TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

A. JAVARY
Chef des travaux graphiques à l'École polytechnique
Ancien élève de cette école
Professeur de géométrie descriptive aux lycées Janson de Sailly, Louis-le Grand.
et au collège Rollin.

PREMIÈRE PARTIE
LA LIGNE DROITE, LE PLAN, LES POLYÈDRES

RÉPONDANT A LA PREMIÈRE PARTIE DU PROGRAMME
DES CONNAISSANCES EXIGÉES POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, A L'ÉCOLE CENTRALE
ET A L'ENSEIGNEMENT DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,

Renfermant en outre
les Principes de la Construction des Ombres,
les Projections cotées.

HUITIÈME ÉDITION, entièrement refondue.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

AVANT-PROPOS

Le Traité de géométrie descriptive dont nous donnons aujourd'hui une édition nouvelle, a été étudié surtout au point de vue de l'art du trait et des applications pratiques de la science aux arts des constructions et du dessin.

Ce n'est pas que nous pensions que la géométrie descriptive doive uniquement se borner aux tracés et ne puisse avoir d'autre but que de représenter graphiquement les résultats obtenus par l'analyse algébrique.

Nous croyons au contraire, après Monge, Hachette, Carnot, Poncelet, Dupin et d'autres savants illustres, que la puissance de la géométrie descriptive, bornée dans les questions de *relation métrique*, est sans égale dans les questions de *forme* et de *relation de position*.

Mais nous ne jugeons pas utile de rouvrir ici une discussion déjà ancienne que M. DE LA GOURNERIE a résumée avec une grande impartialité, et avec la haute autorité que lui donne sa science de géomètre appuyée sur la science de l'ingénieur, dans le remarquable discours qu'il a prononcé, au Conservatoire des arts et métiers, à l'ouverture du cours de géométrie descriptive (*).

Nous avons voulu borner notre travail à l'*Art du trait*, et nous nous sommes surtout occupé des questions de *relation de position*, qui peuvent être utiles aux ingénieurs pour se rendre compte de la forme des ouvrages qu'ils ont conçus et des moyens de les exécuter, aux dessinateurs pour re-

* Discours sur l'art du trait et la géométrie descriptive prononcé le 14 novembre 1854, imprimé chez Gauthier-Villars.

présenter sur le papier, d'une manière facile et correcte, les conceptions des ingénieurs.

Les deux premiers volumes sont le développement des leçons que nous faisons depuis plusieurs années dans les lycées Saint-Louis, Louis-le-Grand et au collège Rollin, dans le but de préparer les candidats aux examens pour l'École polytechnique, l'École normale et l'École centrale, et aussi dans le but de les préparer à suivre, plus tard, les cours de ces écoles.

Le premier volume renferme la ligne droite, le plan, les polyèdres.

Le second volume renferme les cônes et cylindres et les surfaces du second degré de révolution.

Nous compléterons plus tard l'étude des surfaces et de leur représentation

PRÉFACE

L'édition de la première partie de notre Traité de géométrie descriptive, que nous présentons aujourd'hui aux professeurs et aux élèves, diffère entièrement des précédentes.

L'ouvrage a été profondément modifié, d'après les idées dont nous donnons ici un aperçu.

1° M. le colonel Mannheim, le savant professeur de géométrie descriptive de l'École polytechnique, a fait observer depuis longtemps que la *ligne de terre* n'a aucun emploi, aucune utilité dans les applications, et qu'il est avantageux de ne pas habituer les élèves à s'en servir.

L'usage de cette ligne entraîne la fixité des plans de projection, contraire aux indications de la pratique; il conduit à définir les plans par leurs traces, qu'on ne considère jamais dans les applications; il introduit un grand nombre de cas particuliers qui n'ont aucune utilité, qui créent aux débutants des difficultés sans intérêt, capables de les détourner de l'étude de cette science si intéressante et si nécessaire à tous les ingénieurs.

Au contraire les solutions, les constructions obtenues sans son emploi se présentent sous des formes générales s'appliquant toujours de la même manière. *Il n'y a plus de cas particuliers.*

L'éminent professeur a donc supprimé de son enseignement tout tracé comportant des plans de projection fixes avec ligne de terre; nous appliquons cette disposition dans les épures que nous donnons aux élèves de l'École polytechnique; nous l'avons introduite, avec succès, depuis plus de dix ans, dans nos cours préparatoires, et nous pensons qu'il est utile de développer dans cet esprit la première partie de ce cours qui contient *toutes les méthodes de la géométrie descriptive*.

2° Nous insistons à plusieurs reprises sur le caractère pratique que doit avoir l'enseignement de la géométrie descriptive, et sur la nécessité de conserver dans les figures la notion de la verticale réelle, de la direction de la pesanteur.

Il n'y a donc qu'une seule direction pour le plan horizontal, et *nous rejetons les changements de plan horizontal*, changements que la pratique remplace par des rotations.

3° Nous proscrivons d'une manière absolue la *convention inacceptable des surfaces sans épaisseur*.

4° Nous insistons sur la nécessité absolue (contrairement à ce qu'on professe trop souvent) de s'habituer le plus tôt possible à comprendre *la position et la forme des figures dans l'espace*. L'ingénieur conçoit et voit dans l'espace les objets qu'il veut faire exécuter, et ce n'est qu'ensuite, et précisément parce qu'il les voit dans l'espace, qu'il peut les définir par les projections. L'ouvrier, l'artiste chargé de l'exécution doit voir d'après les projections les formes réelles; et cela est si vrai qu'on joint souvent aux projections des perspectives destinées à les faire comprendre; et nous ajouterons même que nous regrettons qu'on n'introduise pas dans les cours élémentaires quelques-uns de ces tracés perspectifs simples, faciles et qui intéresseraient beaucoup les élèves.

Nous ajouterons une dernière observation :

5° On a pris l'habitude de proposer, dans certains concours, des sujets d'épure dans lesquels les solides sont simplement définis par leurs projections horizontales et les cotes des divers points.

C'est la représentation régulière par projection cotée; mais nous redoutons de voir introduire dans l'esprit des élèves une confusion regrettable : on peut bien représenter, par une projection cotée, des solides simples, polyèdres, cônes, cylindres....., pour lesquels un petit nombre de cotes suffit; mais on ne peut songer à définir ainsi des solides de forme compliquée, tels que des édifices ou des machines; la double projection s'impose. D'ailleurs, on admet dans ces épures l'emploi de plans verticaux auxiliaires, et cette *géométrie cotée* n'est qu'une application des procédés et des méthodes de la double projection.

Nous avons traité tous les problèmes de chaque chapitre dans ce système, et nous y trouvons l'avantage de confirmer ce que nous avons dit sur la conservation de la direction du plan horizontal. Mais il est important de ne pas faire de confusion avec la *méthode des projections cotées*, qui s'applique dans des cas bien déterminés pour lesquels l'emploi d'une projection verticale auxiliaire serait impossible, de manière que dans cette méthode toutes les longueurs, toutes les cotes, tous les angles se déduisent de calculs et non de constructions.

Nous avons consacré à cette méthode un chapitre spécial, dans lequel nous avons traité les principaux problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

Telles sont les idées qui nous ont guidé dans la rédaction de cet ouvrage, et nous pensons avoir fait une œuvre utile aux futurs ingénieurs civils ou militaires.

Août 1901.

NOTE POUR LES ÉLÈVES

Nous engageons les élèves qui veulent apprendre la géométrie descriptive, non seulement à reproduire les figures qu'ils trouvent dans le livre, mais à refaire d'eux-mêmes les constructions sur d'autres données; il est très instructif de faire sur le plan vertical les constructions rapportées au plan horizontal dans le livre; puis il faut changer les dispositions de la figure et répéter les constructions en appliquant toujours les mêmes méthodes.

La géométrie descriptive s'apprend surtout par le crayon, et les élèves, en prenant des données au hasard, rencontreront de petites difficultés d'exécution qu'ils doivent s'habituer à surmonter sans modifier les données.

Ensuite il est nécessaire de faire des épures; on a trop de tendance, en se contentant de croquis, à forcer la direction des lignes de manière à faciliter les tracés. L'épure oblige à opérer rigoureusement; en outre, il est trop difficile, surtout pour les commençants, de tracer des croquis assez exactement pour représenter les corps solides avec leurs formes réelles; l'épure seule peut les montrer et permettre à l'élève de se rendre compte de leur aspect et de leur situation dans l'espace.

Nous renvoyons pour les épures à notre recueil d'épures qui renferme des exemples avec données numériques de tous les cas intéressants.

A. J.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

GÉNÉRALITÉS

1. **Définition.** — La *Géométrie descriptive* a pour but de représenter par un dessin fait sur une feuille de papier plane les Corps solides de l'Espace. Ce dessin doit montrer les formes sous lesquelles on voit ces Corps solides, doit permettre de prendre sur ces Corps des mesures de longueurs ou d'angles, afin de résoudre graphiquement tous les problèmes qui les concernent.

Pratiquement, la *Géométrie descriptive* doit habituer à passer facilement des réalités de l'Espace à la représentation sur un plan des Corps solides. Le dessin qu'elle trace doit permettre de se rendre compte exactement des formes, des dispositions des Corps, et il faut dès l'origine s'exercer à cette intelligence de la situation des figures afin de pouvoir ensuite tracer des dessins qui feront comprendre à d'autres personnes la forme des objets réels ou la forme de ceux qu'on aura conçus et projetés avant leur exécution matérielle.

2. **Projection. Position du spectateur.** — Cette représentation se fait au moyen d'une *projection*.

Si l'on abaisse d'un point A de l'Espace une perpendiculaire sur un plan, le pied de cette perpendiculaire est la projection orthogonale du point sur ce plan. Le perpendiculaire est la projetante du point. On voit immédiatement que tous les points situés sur cette perpendiculaire se projetteront au même point du plan.

On peut imaginer qu'on ait ainsi projeté tous les points d'un Corps solide ; l'ensemble de toutes ces projections qu'on pourra réunir par des lignes, comme on réunirait entre eux les points du Corps solide, constituera la projection du Corps sur le plan.

On admettra que cette projection est regardée par un observateur placé au-dessus du plan, à distance infinie, de manière que tous les rayons visuels menés de l'œil de l'observateur aux différents points de la projection sont perpendiculaires au plan, et sont par conséquent représentés par les projetantes.

Il résulte de cette hypothèse que tous les points d'une perpendiculaire au plan de projection seront sur le même rayon visuel et seront vus au même point.

Si l'on suppose que le plan de projection se déplace en restant parallèle à lui-même, la perpendiculaire abaissée d'un point sur tous ces plans parallèles successifs restera la même, par conséquent l'observateur verra toujours la même image, la même projection, quelle que soit la situation du plan de projection. Donc, la forme de la projection ne changera pas quand on déplacera parallèlement à lui-même le plan de projection.

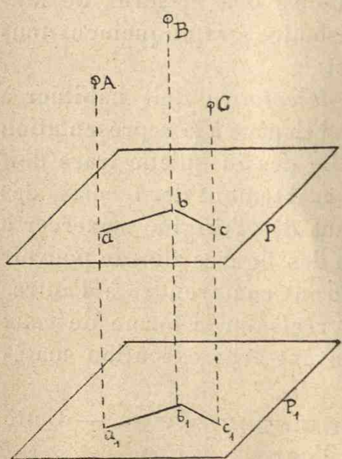


Fig. 1.

Supposons donc ce plan dans une situation déterminée P ; nous pourrons reconstituer le solide de l'espace, si nous connaissons la projection de ce solide et les distances des différents points au plan de projection. Ainsi on aura, dessiné sur le papier, un ensemble de lignes tel que *abc*... (fig. 1).

On élèvera au point a une perpendiculaire au plan égale à la distance du point A au plan P, l'extrémité de cette perpendiculaire sera le point A ; on élèvera au point b une perpendiculaire au plan égale à la distance du point B au plan... ; l'ensemble des points A et B constituera le solide.

Si nous changeons la position du plan de projection en le maintenant toujours parallèle à lui-même, les distances des points à ce plan varieront toutes d'une même longueur égale à l'écartement des deux plans, mais la différence entre ces distances, c'est-à-dire la différence entre Aa et Bb ou entre Aa_1 et Bb_1 restera constante. C'est cette différence qui caractérisera la position relative des points AB.

3. **Plan horizontal. Projetantes.** — Tous les corps solides que nous aurons à dessiner sont soumis à l'action de la pesanteur ; nous pouvons supposer appliquée en chacun de leurs points une verticale représentant la composante de la pesanteur pour chacun de ces points ; nous trouvons ainsi une indication pour la direction des lignes projetantes qu'il convient de choisir verticales et pour la direction du plan de projection que nous choisirons horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction du fil à plomb.

4. **Cotes.** — Nous représenterons donc les corps solides par leur projection horizontale sur un plan horizontal, et par leurs distances à ce plan horizontal, distances que nous appellerons *des cotes*. Comme résumé de tout ce que nous venons de dire : l'observateur sera supposé à l'infini au-dessus du plan horizontal ; tous les points d'une même ligne verticale auront la même projection horizontale ; la forme de cette projection horizontale ne changera pas si l'on place le plan à différentes hauteurs ; et aussi la différence de cotes entre les divers points restera toujours la même, quelle que soit la hauteur de ce plan horizontal.

5. **Projections cotées.** — Pratiquement, après avoir tracé sur une feuille de papier toutes les lignes dont l'ensemble peut figurer la projection horizontale du corps solide, nous mesurerons avec un mètre les distances de chacun des points du corps solide à un plan de projection

horizontal déterminé, et nous inscrirons sur la projection, à côté de chaque point, un nombre indiquant la cote mesurée. Nous pourrons même supposer que le plan horizontal passe par l'un des points qui aura une cote nulle, et nous inscrirons la différence de cote entre ce point et les autres. Nous obtiendrons une définition du corps solide par la méthode dite des *projections cotées*.

6. Emploi d'une projection auxiliaire. Ligne de Terre. — Autrement, au lieu d'inscrire les nombres qui font connaître la grandeur des cotes, nous pouvons dessiner sur la même feuille de papier, ou sur une autre, des lignes qui représentent les longueurs de ces cotes ou de ces différences de cotes, en indiquant pour chacune de ces lignes le point auquel on doit l'appliquer, et nous aurons encore un moyen de reconstituer le corps solide.

Ce procédé ainsi défini est d'une application difficile; mais on a soin de dessiner chaque longueur sur une ligne partant du point même auquel elle s'applique, de manière à éviter toute chance d'erreur. De là l'emploi d'une seconde projection auxiliaire de la première.

On a opéré de la manière suivante : On sait qu'une longueur, comptée sur une ligne parallèle à un plan, se projette sur ce plan suivant une longueur égale. Toutes les cotes dont on veut représenter les longueurs sont comptées sur des perpendiculaires au plan horizontal, c'est-à-dire sont verticales; on les projette sur un plan qui leur est parallèle et qui est alors un plan vertical.

Ainsi (fig. 2), on prendra un plan vertical dont la situation est arbitraire, coupant le plan horizontal suivant une ligne orientée d'une manière quelconque et qu'on nomme la *ligne de terre*; on projette sur ce plan la longueur Aa qui représente la cote du point A. Le point a, situé dans le plan horizontal, se projette sur la ligne de terre en un point α, le point A se projette en a'; $a'\alpha$ est la longueur de la cote du point A et égale à Aa. On projette de même Bb en $\beta b' = Bb$... L'ensemble de toutes les projections $a'b'$... constituera une projection du corps solide sur un plan vertical ou projection verticale auxiliaire. On pourra prendre un autre plan vertical

cal différent du premier, la forme de la projection changera, mais les longueurs des cotes telles que $a'\alpha$ et $b'\beta$ resteront les mêmes.

Remarquons que les figures $Aa\alpha a'$, $Bb\beta b'$... sont des rec-

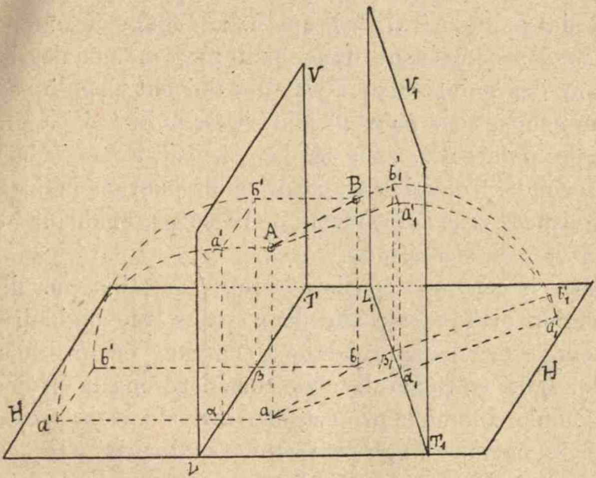


Fig. 2.

tangles, dont les plans sont perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical, par conséquent à la ligne de terre, et que les lignes $a\alpha$, $a'\alpha$, $b\beta$, $b'\beta$... sont toutes perpendiculaires à cette ligne de terre.

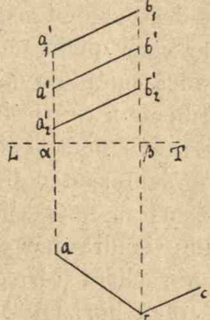


Fig. 3.

7. **Epure.** — Maintenant, supposons que ce plan vertical soit une feuille de papier, nous convenons de faire tourner cette feuille de papier autour de la ligne de terre pour la rabattre sur la feuille de papier sur laquelle est dessinée la projection horizontale; les lignes $a\alpha$ et $a'\alpha$ toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre viendront se prolonger, de même les lignes $b\beta$ et $b'\beta$ se prolongeront; et nous aurons une feuille de dessin disposée de la manière suivante (fig. 3) : la projection horizontale sera un

ensemble de lignes et de points tel que ab... Nous figurons la ligne de terre L T, nous traçons des perpendiculaires à cette ligne passant par les points ab... et nous portons sur ces perpendiculaires à partir de la ligne de terre des longueurs $a'\alpha$, $b'\beta$ égales aux longueurs qui représentent les cotes des points AB... de l'espace. Les longueurs représentatives des cotes sont donc bien placées sur des lignes partant des points auxquelles elles doivent s'appliquer. En même temps, nous pouvons joindre les points $a'b'$... projections des points AB... sur ce plan vertical, et nous obtenons une seconde projection du corps solide pouvant montrer un autre aspect, une autre forme de ce corps, et aidant à compléter sa représentation.

C'est en cela que consiste la représentation par double projection orthogonale sur deux plans rectangulaires, et l'ensemble des deux projections constitue l'épure du corps solide. Mais, en général, nous considérerons la projection horizontale comme la projection principale, et la projection verticale comme une projection auxiliaire uniquement consacrée à faire connaître les cotes ou les différences de cotes des divers points.

8. **Sens des cotes. Epure simplifiée projetante.** — Il résulte d'ailleurs de ce que nous avons dit (2), que l'on peut toujours imaginer le plan horizontal placé au-dessous de tous les points qu'il s'agit de figurer, et que par conséquent toutes les cotes seront dans le même sens ; on les comptera donc sur les projetantes à partir de chaque projection verticale, entre cette projection et la ligne de terre. Si nous abaissons le plan horizontal, toutes les cotes augmenteront d'une même quantité, la projection verticale s'écartera de la ligne de terre. Sans changer de forme, elle viendra par exemple en $a'_1b'_1$; inversement elle s'en rapprochera si les cotes diminuent, c'est-à-dire si l'on élève le plan horizontal ; et toujours les différences de cotes resteront les mêmes.

Or ce sont ces différences de cotes qui caractérisent la position relative des points dans l'espace ; nous ne changerons donc pas ces positions relatives, et par suite la forme du corps solide auquel ces points appartiennent, en laissant indéterminée la hauteur du plan horizontal; nous n'avons aucun intérêt à donner à ce plan une position fixe. Alors nous ne tracerons pas la ligne de terre, intersection du plan vertical avec le plan horizontal; la direction seule de cette ligne sera définie, puisqu'elle est perpendiculaire aux lignes qui joignent les deux projections de chaque point et qu'on nomme projetantes (3).

L'épure se présentera sous la forme (fig. 4)

Remarquons comme premier avantage de cette manière d'opérer la facilité que nous aurons pour disposer convenablement le dessin; s'il arrive que les deux projections se superposent en partie, on allongera toutes les projetantes de la même quantité, de manière à séparer complètement les projections; s'il arrive, au contraire, que l'une de ces projections sorte des limites du papier, on l'y fera rentrer en raccourcissant toutes les projetantes.

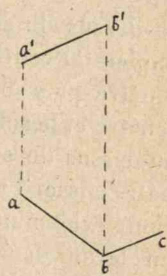


Fig. 4.

D'ailleurs, la géométrie descriptive étant une science pratique, nous allons montrer par un exemple que c'est ainsi qu'on dispose les figures dans les applications.

9. **Echelle.** — D'abord il est évident que nous ne pourrons représenter les lignes qui joignent les différents points d'un objet par des longueurs réellement égales à celles de ces lignes.

Ainsi un édifice ne pourra être figuré en donnant aux lignes leurs véritables longueurs. On devra les réduire dans un certain rapport et tracer une figure semblable à la figure réelle. Le rapport entre la longueur réelle d'une ligne dans l'espace et la longueur de la ligne qui la représente sur le dessin, se nomme l'échelle du dessin.

Ainsi l'on dit qu'un édifice est dessiné à l'échelle de $\frac{1}{100}$, cela veut dire qu'une longueur de 1 mètre est figurée par 1 centimètre.

10. **Exemple du déplacement parallèle du plan horizontal.** — Ceci posé, nous avons fait le dessin d'ensemble de l'édifice à l'échelle de $\frac{1}{100}$; il est tout naturel de prendre le sol sur lequel il est posé comme plan horizontal. Ensuite nous voulons étudier en détail la disposition d'une fenêtre du premier étage; il sera commode de faire de cette fenêtre une figure plus grande, afin de faciliter l'étude des détails; nous augmenterons l'échelle, en la portant, par exemple, à $\frac{1}{10}$. Si la fenêtre est placée à 6 mètres au-dessus du sol, nous laisserons donc sur notre feuille de papier 60 centimètres vides au-dessous du dessin de cette fenêtre pour figurer l'espace de 6 mètres compris entre la fenêtre et le sol; si la fenêtre du second étage est à 10 mètres au-dessus du sol, nous devrons donc pour étudier cette fenêtre laisser 1 mètre en bas du dessin sur la feuille de papier. Non, évidemment, nous supprimerons ces espaces perdus en élevant dans le premier cas le plan horizontal de 6 mètres, dans le second cas de 10 mètres, et la forme des fenêtres ne changera pas. Nous ne fixerons donc pas la position de la ligne de terre et nous placerons notre projection verticale de la manière la plus commode.

11. **Changement de plan vertical.** — Nous avons dit (6) que ce plan vertical auxiliaire pouvait être placé sur le plan horizontal dans une direction quelconque. Ainsi, supposons pour un moment (fig. 2) que nous ayons fixé la hauteur du plan horizontal; nous plaçons sur ce plan horizontal un plan vertical, la ligne de terre ayant la direction LT, et nous construisons la projection verticale; nous plaçons sur ce même plan horizontal un autre plan vertical, tel que la ligne de terre soit L_1T_1; nous construisons une seconde projection verticale exactement de la même manière que la première; nous avions $a'\alpha = Aa$, nous aurons $a'_1\alpha_1 = Aa$, $b'\beta = Bb$ et $b'_1\beta_1 = Bb$.

Nous rabattons le plan vertical V, en le faisant tourner autour de LT; $a\alpha$ et $a'\alpha$ viennent sur une même perpendiculaire a LT; nous rabattons le plan vertical V_1. En le faisant tourner autour de L_1T_1, $a\alpha_1$ et $a'_1\alpha_1$ viennent sur une même perpendiculaire à L_1T_1. De même pour le point b,b' et le point bb'_1.

La double épure se présentera donc sous cette forme (fig. 5), et si nous laissons indéterminée la hauteur du plan horizontal, c'est-à-dire si nous nous occupons seulement de la différence entre les cotes des points en ne traçant pas les lignes de terre, la double épure se présentera donc sous la forme (fig. 6), dans laquelle la différence de cote $b'\gamma$, entre A et B, sera reproduite en $b'_1\gamma_1$ sur la seconde projection verticale. Il est donc facile de passer d'une première projection verticale donnée à une seconde projection verticale, en faisant le raisonnement suivant :

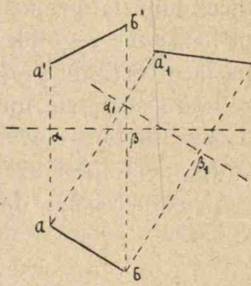


Fig. 5.

Nous changeons le plan vertical; les premières projetantes, telles que aa', indiquent la direction de la première ligne de terre qui leur est perpendiculaire; les secondes projetantes seront prises perpendiculaires à la direction de la seconde ligne de terre que nous aurons choisie; nous mènerons ces projetantes par tous les points de la projection horizontale (fig. 6).

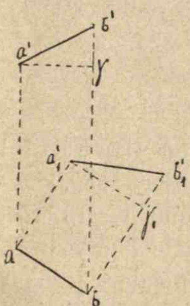


Fig. 6.

Puisque nous ne changeons pas la direction du plan de projection qui reste horizontal, nous ne changeons pas la différence de cotes entre les points; les cotes se comptent sur les projetantes, à partir de la projection verticale (8); la différence de cote entre le point aa' et le point bb' est marquée sur la première projection par $b'\gamma$; nous prendrons arbitrairement sur la nouvelle projetante menée par a, la projection verticale a'_1 de l'un des points; nous tracerons la perpendiculaire $a'_1\gamma_1$ aux projetantes, et nous prendrons sur la nouvelle projetante, menée par $b\ b'_1\gamma_1 = b'\gamma$.

Nous rappelons encore que le tracé que nous faisons, revient à supposer que le plan horizontal passe par le point A de l'espace, et que la cote de ce point est nulle.

12. Exemple. — Montrons encore que ce tracé doit être employé dans la pratique. Nous voulons dessiner un édifice dont la projection horizontale présente la forme d'un hexagone régulier (fig. 7).

La face verticale projetée suivant ab, se projette suivant une figure égale sur un plan vertical qui lui est parallèle; nous la projetons suivant $a'b'fg'$, et nous traçons sur cette face une porte (par exemple), et un bandeau de pierre de taille à la naissance de la voûte; nous voulons étudier la

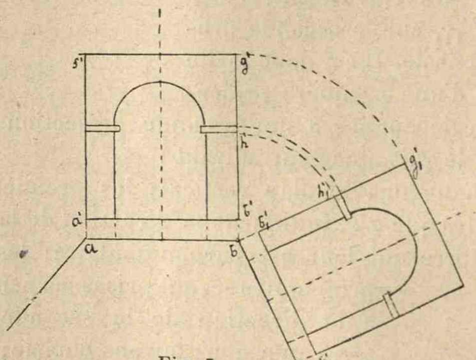


Fig. 7.

face projetée sur bc, nous la projetons sur un plan vertical qui lui est parallèle, mais l'arête de la première face, projetée en $b'g'$, fait partie de la seconde face; nous la projetterons suivant une longueur égale en $b'_1g'_1$; le bandeau de pierre placé sur la première projection verticale à la hauteur $b'h'$, viendra sur la seconde à la hauteur égale $b'_1h'_1$ et ainsi de suite; nous prendrons donc, dans cet exemple, 6 plans verticaux que nous rabattrons successivement sur le plan horizontal, autour de la projection horizontale, et nous pourrions dans d'autres cas être conduits à en employer un plus grand nombre.

Ici, l'emploi de ces plans verticaux montre bien leur caractère de plans auxiliaires; il importerait peu (sauf pour donner une idée d'ensemble de l'édifice) de projeter la face *bc*, sur le même plan vertical que la face *ab;* cette projection n'indiquerait pas les grandeurs des lignes horizontales; nous ne projetterons sur chaque plan vertical que la partie de l'édifice qui s'y projette avec la grandeur exacte.

13. **Observation sur l'emploi de la projection cotée.** — Nous croyons qu'il est utile d'insister sur ce point : il est facile de définir par une seule projection horizontale accompagnée de quelques cotes des corps dont les formes sont simples, telles que prismes, pyramides, cônes, cylindres... Cette définition des solides par une projection cotée peut donc s'appliquer aux problèmes limités, et surtout abstraits, relatifs à ces solides.

Mais aussitôt que l'on veut faire réellement de la géométrie descriptive et représenter des corps solides de formes complexes, tels que machines ou édifices, la définition par projection cotée est inapplicable à cause du grand nombre de cotes qu'il faudrait inscrire et souvent en des points placés sur la même verticale. La double projection s'impose nécessairement et on l'emploie en prenant des plans verticaux auxiliaires. Il ne faut donc pas regarder la représentation par projection cotée comme suffisante dans tous les cas. Il y a au contraire un cas dans lequel elle est seule applicable, c'est lorsque les hauteurs sont assez petites, par rapport aux longueurs horizontales, pour qu'il soit impossible de les représenter sur une projection verticale. Si l'on a, par exemple, une différence de cote de 1 mètre, correspondant à une longueur de 1000 mètres, le dessin étant construit à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, 1 millimètre représentera 1 mètre, la projection horizontale aura 1 mètre de longueur, et la projection verticale 1 millimètre de hauteur (c'est le cas des routes, canaux, chemins de fer); il sera impossible de faire aucune construction sur cette projection verticale; c'est seulement alors qu'on emploie la *projection cotée;* on ne construit plus aucune projection verticale, toutes les opérations se déduisent de calculs.

« C'est véritablement cette application qu'il convient d'appeler géométrie cotée ; on l'a toujours appelée ainsi.

Ce système, appliqué aux corps de formes simples et dont les dimensions peuvent être représentées sur des projections verticales, n'est qu'une double projection dans laquelle on peut faire varier la position du plan vertical, comme nous l'avons montré § 11.

14. **La projection verticale est la projection principale; éloignements.** — Mais il peut arriver au contraire qu'on ait à figurer des objets très développés dans le sens vertical et pour lesquels la projection horizontale ne donne aucune indication. Ainsi une facade d'un édifice sera représentée sur une projection horizontale par deux lignes distantes de l'épaisseur du mur qui constitue cette facade, et les détails de sa disposition, de sa décoration échappent complètement à cette projection ; alors on retournera le dispositif adopté, on construira la projection verticale de la facade sur un plan vertical, et on définira les points par leur projection verticale et par leurs distances au plan vertical. Ces distances au plan vertical se nomment des *éloignements*, et nous allons répéter rapidement en changeant seulement les mots tout ce que nous avons dit relativement à la projection horizontale.

15. **Position du spectateur.** — Cette projection verticale est regardée par un observateur placé à l'infini en avant du plan de projection ; c'est-à-dire que tous les rayons visuels peuvent être considérés comme perpendiculaires à ce plan, et que deux points situés sur une même perpendiculaire au plan vertical sont vus au même point sur la projection verticale. Si l'on recule ou si l'on avance ce plan de projection, la forme de la projection ne changera pas, et la différence des éloignements sera conservée.

16. **Plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical.** — Pour dessiner ces éloignements ou leur différence, on prendra un second plan de projection perpendiculaire au plan vertical et sur lequel les longueurs de ces éloignements se projetteront suivant des longueurs égales (fig. 8) ; ainsi le point A est projeté verticalement en

a' et son éloignement est a'A., on prend un second plan de projection sur lequel cet éloignement se projette suivant $a\alpha$=Aa'. On appelle encore ligne de Terre l'intersection des deux plans, et on fait tourner le second plan de projection, qui est perpendiculaire au plan vertical et qu'on appelle *plan de bout*, autour de cette ligne pour le rabattre sur le plan vertical; les deux projections d'un même point viennent encore se placer sur une perpendiculaire à la ligne de terre. On pourra donc disposer autour de la projection verticale plusieurs plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical et qu'on rabattra sur ce plan vertical.

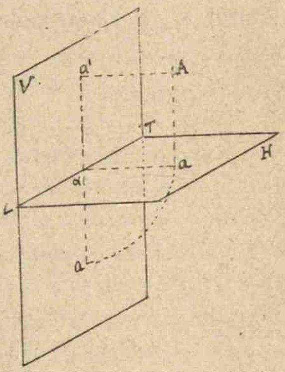


Fig. 8.

17. Epure. Sens des éloignements. — On passera (fig. 9) d'une projection auxiliaire caractérisée par une certaine ligne de terre LT, à une autre caractérisée par une ligne de terre L_1T_1, en menant par les points a', b' de la projection verticale des projetantes perpendiculaires à la nouvelle direction et en conservant la différence des éloignements, qui ne changera pas puisque la direction du plan vertical ne sera pas changée. C'est done exactement appliqués à la projection verticale les mêmes tracés que nous avons indiqués pour la projection horizontale.

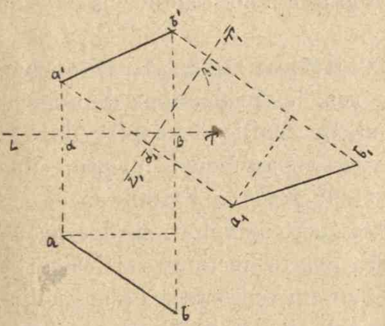


Fig. 9.

En ne traçant pas les lignes de terre, c'est-à-dire en ne fixant pas la position du plan vertical, on arrive à l'épure simplifiée (fig. 10). Les éloignements sont comptés sur les projetantes à partir des projections horizontales des points.

Mais tous les plans auxiliaires, placés sur le plan horizontal et perpendiculaires à ce plan, étaient réellement verticaux; les plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical ne sont pas tous horizontaux; il n'y a qu'une direction de ces plans réellement horizontale; cependant, on a continué à nommer par extension de mots, par analogie, ces plans auxiliaires de bout *plans horizontaux*.

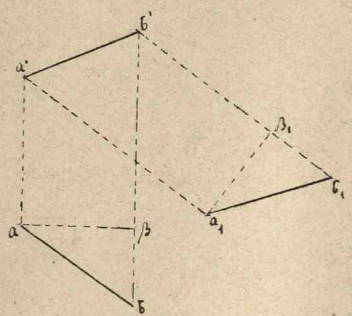


Fig. 10.

Nous dirons plus loin que l'emploi de ces plans auxiliaires de bout (perpendiculaires au plan vertical) n'est pas admis dans les applications pratiques, et qu'on ne peut s'en servir que pour des problèmes abstraits qui ne comportent pas la considération de la position réelle dans l'espace. On les remplace par des rotations que nous étudierons dans un autre chapitre.

18. **Résumé des conventions de la double projection.** — Dans tous les cas, les projections d'un même corps dessinées sur une même feuille de papier doivent être considérées comme vues séparément; la projection horizontale par un observateur placé à l'infini au-dessus du plan horizontal; les cotes étant comptées sur les projetantes en descendant à partir des projections verticales; la projection verticale est vue par un observateur placé à l'infini en avant du plan vertical, et les éloignements sont comptés sur les projetantes à partir des projections horizontales d'avant en arrière; ainsi sur la figure 10. Les cotes sont comptées dans le sens $a'a$, $b'b$, et leur différence est $b'\alpha$, les éloignements sont comptés dans le sens aa', bb' et leur différence est $b\beta$.

Les longueurs des cotes ne changent pas quand on change le plan vertical ; les longueurs des éloignements ne changent pas quand on substitue un plan de bout au plan horizontal Généralement, on désigne un point de l'espace par une grande lettre A ou B, ses projections par les petites lettres a ou b, et on met un accent à la projection verticale ; ainsi, le point A a pour projection verticale le point a' et pour projection horizontale le point a.

18 *bis*. Il faut bien se rendre compte de ce fait : choisir un plan de projection, le placer derrière un corps solide, et projeter le corps solide sur ce plan, c'est supposer que l'observateur regarde ce corps solide d'un point à l'infini sur une perpendiculaire au plan, c'est-à-dire regarde le solide dans une certaine direction. Changer le plan de projection, c'est déplacer l'observateur qui regarde le corps solide dans une direction nouvelle. L'observateur tourne donc autour du solide qui reste immobile, de manière à se placer dans la position la plus avantageuse pour voir un des côtés du corps. L'emploi de ces projections auxiliaires aura donc pour objet de rendre plus faciles certains tracés, certaines mesures; mais ce n'est qu'un moyen d'exécution ; et il faut dès l'origine s'habituer à considérer dans un problème la solution géométrique indépendante des procédés de construction, et les moyens pratiques d'exécution parmi lesquels l'emploi des projections auxiliaires occupe le premier rang.

18 *ter*. Nous verrons d'ailleurs prochainement (§ 31) qu'on peut être conduit dans la solution de problèmes abstraits à changer successivement les deux plans de projection. Ainsi on a un premier système comprenant un plan horizontal et un plan vertical. On prend un autre plan vertical, et partant ensuite de la projection verticale nouvelle, on abandonne le premier plan horizontal pour prendre un second plan dit horizontal perpendiculaire au second plan vertical. On a donc abandonné les deux plans primitifs.

Mais il n'y a rien de nouveau, rien de plus que ce que nous venons de dire. Ces tracés sont toujours la conséquence des principes de la double projection orthogonale. Toutefois nous devons préciser que l'emploi des doubles changements de plans a l'inconvénient de changer complètement la position des figures dans l'espace, de faire disparaître le sens des verticales et des horizontales réelles, et que la Géométrie descriptive ainsi traitée s'écarte de son but pratique et concret de la représentation des corps solides existants réellement, soumis à la pesanteur. Elle prend le caractère d'une science abstraite. Aussi convient-il de n'employer les doubles changements de plans de projection que pour des problèmes restreints, sans les appliquer au déplacement d'une figure entière.

Ajoutons immédiatement que s'il arrive dans la pratique qu'on ait besoin de changer la position d'un solide par rapport aux deux plans de projection, on fera un changement de plan vertical, toujours permis parce que le nouveau plan vertical sera toujours réellement parallèle au fil à plomb et on remplacera le changement de plan horizontal qu'on devrait faire ensuite par un mouvement de rotation, comme nous l'expliquerons plus loin.

LA LIGNE DROITE

19. **Projections d'une droite.** — Tous les points d'une ligne droite se projettent sur un plan suivant des points en ligne droite; il suffit donc de construire les projections de deux points d'une droite pour avoir la projection de la droite.

20. **Une droite est déterminée par ses deux projections.** — La projection horizontale étant donnée, la droite est dans un plan passant par cette ligne et perpendiculaire au plan horizontal, quelle que soit la hauteur de ce plan horizontal (2).

La projection verticale étant donnée, la droite est dans un plan passant par cette ligne et perpendiculaire au plan vertical, quelle que soit la distance à laquelle on place ce plan vertical Donc si l'on trace deux lignes $a'b'$ et ab (fig.4), en marquant la direction des projetantes $a'a$, ce qui fixe la direction des plans de projection, en regardant $a'b'$ et ab comme les projections d'une droite, la droite sera déterminée dans l'espace par l'intersection des deux plans dont nous venons de parler; il y a donc toujours une droite et une seule déterminée par ses deux projections.

Le plan vertical, passant par la projection horizontale de la droite, est le plan projetant horizontalement la droite.

Le plan perpendiculaire au plan vertical, passant par la projection verticale, est le plan projetant verticalement la droite.

20 *bis*. **Théorèmes.** — Deux droites parallèles ont évidemment leurs projections parallèles. Si deux droites se coupent, le point de rencontre se projette nécessairement

au point de rencontre des projections, et, par suite, les projections horizontales et verticales doivent se rencontrer en deux points situés sur une même projetante.

21. **Droite horizontale.** — Une droite peut être parallèle au plan horizontal; on la nomme *droite horizontale* (fig. 11).

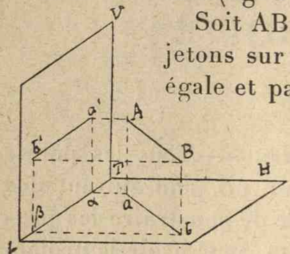


Fig. 11.

Soit AB une semblable droite : nous la projetons sur le plan horizontal suivant ab, ligne égale et parallèle à AB et sur le plan vertical en $a'b'$; mais $a'\alpha = Aa$, $b'\beta = Bb$ et comme la droite est parallèle au plan horizontal $Aa = Bb$, donc $a'\alpha = b'\beta$, la projection verticale est parallèle à la ligne de terre. Nous dirons qu'une droite horizontale est caractérisée par sa projection verticale qui est parallèle à la direction de la ligne de terre ou *perpendiculaire à la direction des projetantes* (fig. 12).

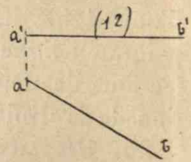


Fig. 12.

22. **Lignes de bout.** — Parmi toutes ces lignes horizontales, mais qui peuvent avoir une orientation quelconque, il y a une direction perpendiculaire au plan vertical.

Une perpendiculaire au plan vertical est un cas particulier d'une horizontale. On appelle quelquefois une semblable droite, droite *de bout.*

Puisque la droite est perpendiculaire au plan vertical, les lignes qui projettent tous ses points sur le plan vertical sont confondues, la projection verticale est réduite à un point. Le plan qui projette horizontalement la droite est alors perpendiculaire aux deux plans de projection, perpendiculaire à la ligne de terre, et la projection horizontale de la droite est perpendiculaire à la ligne de terre ou dirigée suivant les projetantes.

Ainsi une droite *de bout est une horizontale dont la projection horizontale est parallèle aux projetantes* (fig. 13).

Fig. 13.

Si l'on considère une droite horizontale et qu'on change projection horizontale qui caractérise cette position de la droite, nous prenons un axe vertical projeté en o, $o'z'$.

Nous figurons la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite, ses projections sont oc, $c'c'_1$ (94) ; nous traçons la circonférence du point o comme centre avec oc comme rayon à laquelle la projection horizontale de la droite reste tangente, et nous menons une tangente c_1a_1 perpendiculaire aux projetantes. Nous considérons cette tangente comme la projection horizontale de la droite après une certaine

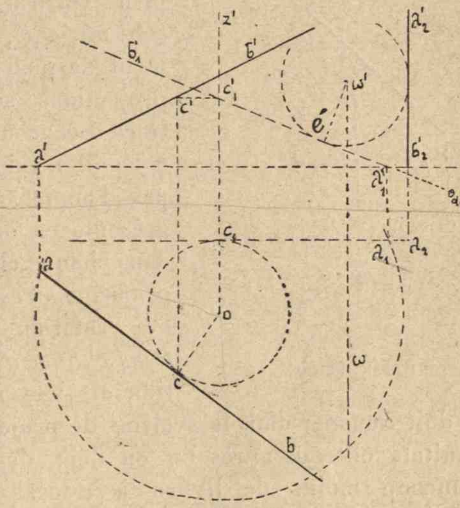


Fig. 92.

rotation ; la projection verticale du point projeté en c_1 sur le cercle est c'_1, la projection verticale du point projeté en a_1 est a'_1 ; $a^1{}_1c'_1b'_1$ est la projection verticale de la droite amenée à être de front.

Remarquons en passant que nous obtiendrons (27) la longueur de la droite, et son angle avec le plan horizontal (28).

2° Cette droite de front sera verticale quand sa projection verticale sera parallèle aux projetantes (23 *bis*) ; il faut donc agir sur la projection verticale et prendre un axe *debout* : soit ω', ω cet axe ; abaissons de ω' une perpendiculaire $\omega'e'$ sur $a'_1b'_1$, la projection verticale de la droite restera tangente au cercle ayant $\omega'e'$ pour rayon, et tous les points de la projection horizontale se déplaceront sur la même droite a_1c_1 ; menons au cercle la tangente verticale $a'_2b'_2$, nous aurons la projection verticale de la droite verticale et tous ses points auront leur projection horizontale en a_2

112. Comparaison avec les changements de plan. — Réalisons comme nous l'avons fait cette situation par deux changements de plans (33), la droite primitive a pour projections ab, $a'b'$ (fig. 92 *bis*) après le changement de plan vertical, ses projections sont ab, $a'_1b'_1$. Après le changement de plan dit horizontal ses projections sont $a'_1b'_1$, a_2. Ce tracé beaucoup plus simple en ce qu'il n'exige pas de cercles, pas d'angles, pas de tangentes, présente en outre cet avantage ; dans chaque changement *une des projections reste fixe*, dans chaque rotation *les deux projections changent*. Cette considération est très importante quand on doit ramener dans le système de projection primitif des résultats obtenus après un ou deux déplacements, il y a beaucoup moins de lignes à tracer, beaucoup moins de causes d'erreur. Au point de vue de la disposition de la figure, il est beaucoup plus difficile d'éviter les superpositions dans les rotations que dans les changements de plans ; la longueur des projetantes qu'on peut faire varier rend la disposition facile. Pour ces motifs, toutes les fois qu'on aura *le choix* entre le changement de plan et la rotation, *il faut préférer le changement de plan.*

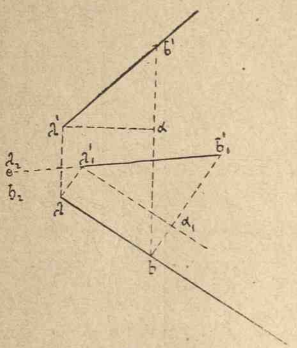


Fig. 92 *bis*.

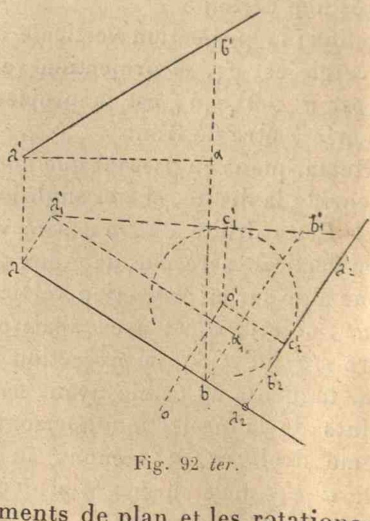


Fig. 92 *ter*.

Pour achever d'établir la corrélation entre les changements de plan et les rotations ; après avoir amené par rotations (fig. 92) la droite à être de front en $a'_1b'_1$, a_1b_1; nous pouvons amener par un changement de plan dit horizontal cette droite de front à être verticale en prenant sa projection dite horizontale en α_2.

112 *bis*. Si nous avons amené par changement de plan (fig. 92 *ter*) la droite ab, $a'b'$ à être de front en ab, a'_1 b'_1 nous pouvons amener cette droite de front à être verticale par rotation autour d'un axe *de-bout* projeté en o'_1o, sa projection horizontale étant parallèle aux projetantes aa'_1 et bb'_1. La droite viendra en $a'_2b'_2$, a_2.

113. **Observation importante.** — Il faut bien observer que les changements de plans ou les rotations ne constituent pas la solution d'un problème comme nous l'avons déjà dit (17 bis), mais fournissent seulement le moyen de construire cette solution. Un problème étant posé, il faut en chercher la solution géométrique dans l'espace, et examiner ensuite quels seront les procédés de réalisation les plus faciles. Il ne faut donc pas en principe changer la position des données, il faut s'efforcer de résoudre le problème sur les données elles-mêmes, sauf à faire des déplacements partiels pour faciliter certains tracés.

Il faut éviter autant que possible de déplacer complètement une figure, et excepté pour la solution de certains problèmes abstraits, limités, il ne faut faire ni doubles changements de places ni doubles rotations.

Nous répétons encore que les objets réels que l'on doit étudier dans les applications de la Géométrie descriptive ont le plus souvent des positions connues habituelles par rapport à l'horizontale et à la verticale, si l'on vient à les rapporter à des plans obliques sur l'horizon, l'esprit conçoit difficilement leur forme et leur position; c'est pour cela que nous avons toujours conseillé d'éviter le remplacement du plan horizontal par un plan de-bout analogue au plan horizontal et de faire une rotation.

114. Ainsi : *Amener une droite à être parallèle au plan horizontal et construire l'angle de la droite avec le plan vertical* (§ 28) (fig. 93). La droite donnée est $a'b'$, ab. — Une droite parallèle au plan horizontal est caractérisée par sa projection verticale qui est perpendiculaire aux proje-

tantes. Nous devons donc prendre un axe de-bout (103); soit c', cd, cet axe, nous menons la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite (89), cette perpendiculaire a pour projections $c'e'$ perpendiculaire à $a'b'$, ee_1 perpendiculaire aux projetantes; nous traçons la circonférence décrite avec $c'e'$ comme rayon et nous menons à cette circonférence une tangente $e'_1a'_1$ perpendiculaire aux projetantes; c'est la projection verticale de la droite après la rotation, le point projeté en e, e' vient en e'_1e_1. Prenons un point quelconque a, a', sa projection verticale décrit une circonférence autour de c' et vient en a'_1; il est facile de voir (107 *bis*) que la projection verticale de la droite vue du point a' ou du point a'_1 conserve la même position relative par rapport au cercle; la projection horizontale a décrit une perpendiculaire $a'cd$, elle est donc venue en a_1. La projection de la droite est $a_1e_1b_1$; nous avons en λ son angle avec le plan vertical.

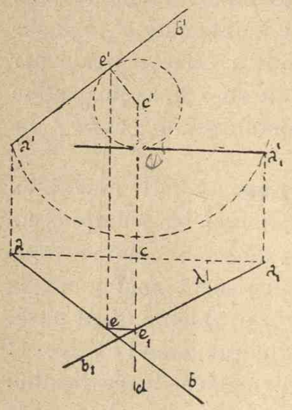


Fig. 93.

115. Amener une droite à être de profil. — Nous devons seulement amener une de ses projections à être parallèle aux projetantes; nous pouvons effectuer ce déplacement par une rotation autour d'un axe de-bout.

116. Amener une droite à être perpendiculaire au plan vertical. — Une première rotation autour d'un axe de-bout amènera la droite à être horizontale (108) ; une seconde rotation autour d'un axe vertical (rotation qu'on pourrait remplacer par un changement de plan vertical) amènera la droite à être de-bout.

117. Amener une droite à être parallèle à la ligne de terre. — Une première rotation autour d'un axe de-bout amènera la droite à être horizontale; une première rotation autour d'un axe vertical amènera la droite à être de front; une seconde rotation autour d'un axe vertical amènera la droite à être parallèle à la ligne de terre; une seconde rotation autour d'un axe de-bout amènera la droite à être parallèle à la ligne de terre.

118. **Simplification des tracés.** — Si l'on se propose seulement de construire la longueur d'une droite ou les angles que fait une droite avec les plans de projection, et si l'axe n'est pas donné par d'autres nécessités de l'épure, on peut simplifier les tracés en faisant passer l'axe de rotation par un point de la droite (fig. 94).

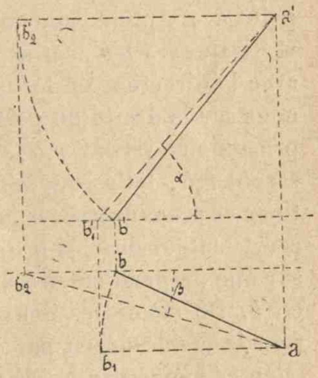


Fig. 94.

La droite a pour projection ***ab***, *a'b'*. Amenons la droite à être de front par rotation autour d'un axe vertical passant par le point *a*, *a'*; la projection horizontale passera toujours par *a*, la projection verticale par *a'*; la droite de front aura pour projection horizontale ab_1 et pour projection verticale $a'b'_1$, α est l'angle de la droite avec le plan horizontal; $a'b'_1$ est la longueur de la droite. Amenons la droite à être horizontale par rotation autour d'un axe de bout passant par le point *a*, *a'*; la projection verticale passera toujours par *a'* et la projection horizontale par *a*; la droite horizontale aura pour projection verticale $a'b'_2$ et pour projection horizontale ab_2, β est l'angle de la droite avec le plan vertical; ab_2 est encore la longueur de la droite. Nous faisons remarquer que l'angle de la droite avec le plan horizontal est toujours plus petit que l'angle de la projection verticale avec la direction de la ligne de Terre, et de même l'angle de la droite avec le plan vertical est toujours plus petit que l'angle de la projection horizontale avec la direction de la ligne de Terre.

Nous avons la longueur de la droite entre les points *a*, *a'* et *bb'* en $a'b'_1$ et en ab_2, donc $a'b'_1 = ab_2$.

Cette remarque conduit à la solution de ce problème.

119. **Problème.** — *Mener par un point a, a' une droite*

faisant avec les plans de projection des angles donnés (fig. 94).

Le point a, a' est un point de la droite, considérons un axe vertical passant par ce point et supposons que nous ayons fait tourner la droite autour de cet axe pour l'amener à être de front, sa projection horizontale sera ab_1 et sa projection verticale sera $a'b'_1$ faisant l'angle α donné avec la direction de la ligne de terre. Supposons que nous ayons fait tourner la droite autour d'un axe *de-bout* passant par le point a, a', pour l'amener à être horizontale, sa projection verticale sera $a'b'_2$, et sa projection horizontale ab_2 faisant avec la direction de la ligne de terre l'angle donné β. Prenons sur la droite un point B, dans la première position ses projections seront $b_1b'_1$, dans la seconde ses projections seront $b_2b'_2$ telles que $a'b'_1 = ab_2$ et faisons les deux rotations en sens inverse; la projection horizontale b_1 décrira un cercle autour de a, la projection horizontale b_2 se déplacera sur une perpendiculaire aux projetantes, donc elle viendra en b. De même les deux lieux de la projection verticale sont le cercle décrit par b'_2 et la perpendiculaire aux projetantes même par b'_1, la projection verticale viendra en b', les deux projections de la droite sont ab, $a'b'$.

120. *Remarque générale au sujet des figures.* Dans toutes les figures que nous venons de tracer, comme dans celles que nous allons encore dessiner, on peut à volonté, et sans rien changer, ajouter une ligne de terre à une hauteur quelconque, ou bien ayant d'abord tracé une ligne de terre, la supprimer après avoir réalisé les constructions. Nous avons mis en pointillé une ligne de terre sur quelques figures.

Rotation d'un plan.

121. **Problème.** — *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe vertical* (fig. 95). Un plan est défini par deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$. On donne un axe vertical projeté horizontalement au point d. On va chercher d'abord le point de rencontre de l'axe avec le plan, ce point restera fixe pendant le mouvement, il appartiendra encore au plan après la rotation. Suivant la méthode indiquée (38)

nous menons dans le plan une droite quelconque dont la projection horizontale passe par le point d, soit bed la projection horizontale, la projection verticale est $b'e$ et le point de rencontre de l'axe avec le plan a pour projection verticale d'.

Nous allons maintenant faire tourner une droite du plan, nous prendrons une horizontale parce que sa projection verticale ne changera pas pendant la rotation (108); ainsi,

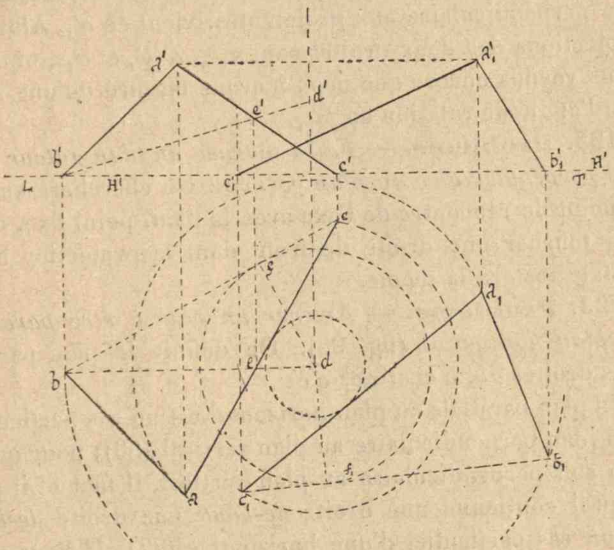


Fig 95.

prenons l'horizontale bc, $b'c'$; nous abaissons du point d une perpendiculaire df sur cette horizontale, et la projection horizontale bc restera tangente au cercle décrit du point d comme centre avec df pour rayon : amenons df en df_1, l'angle fdf_1 étant l'angle donné; $b_1f_1c_1$ sera la projection horizontale de l'horizontale après la rotation, et la projection verticale restera $b'_1c'_1$.

Le plan est maintenant déterminé par le point dd' et par b_1c_1, $b'_1c'_1$. Nous pouvons nous proposer de retrouver la position qu'occuperont les deux droites après la rotation. D'abord le point c de la projection horizontale vient en c_1

il suffit, pour s'en rendre compte, d'examiner la position de ce point par rapport au cercle de rayon df (107 *bis*). Le point b vient en b_1, et nous plaçons en $b'_1c'_1$ les projections verticales des points dont nous avons obtenu les projections horizontales. La projection horizontale ac de la droite ac, $a'c'$ restant tangente au cercle décrit du point d comme centre, vient en a_1c_1 de manière que le centre soit placé de la même manière par rapport aux 2 tangentes. La projection a vient en a_1 et la projection verticale a' se déplaçant sur une perpendiculaire aux projetantes, vient en a'_1. Alors les projections des deux droites sont a_1b_1, $a'_1b'_1$ et a_1c_1 et $a'_1c'_1$. Nous voyons encore que nous n'avons mesuré qu'une seule fois l'angle de rotation en fdf_1.

122. **Problème.** — *Faire tourner un plan autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.* On cherchera encore le point de rencontre de l'axe avec le plan, point fixe, et on fera tourner une droite de front dont la projection horizontale restera la même.

123. **Problème.** — *Amener un plan à être parallèle au plan horizontal* (fig. 96). On définit le plan par les deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$.

Un plan parallèle au plan horizontal est un cas particulier d'un plan perpendiculaire au plan vertical (50); pour qu'un plan soit perpendiculaire au plan vertical, il faut et il suffit qu'il contienne une droite *de-bout*; une droite *de-bout* est un cas particulier d'une horizontale (22). 1° Nous prenons une horizontale du plan et nous l'amenons perpendiculaire au plan vertical (33 et 101); nous devons effectuer une rotation autour d'un axe vertical. Prenons l'axe vertical passant par un point du plan, le point a, a' par exemple, ce point restera fixe pendant la rotation; la projection horizontale de l'horizontale restera tangente au cercle décrit de a comme centre avec ad comme rayon et nous amènerons bc en b_1c_1 parallèle aux projetantes; la projection verticale sera alors réduite au point unique $b'_1c'_1$ situé sur $b'c'$; le point aa' étant resté fixe, le plan perpendiculaire au plan vertical sera représenté par $a'c'_1$ lieu des projections verticales de tous les points du plan, projection verticale commune des deux droites. Amenons par des arcs de cercle les points b et c en b_1 et c_1 toujours en tenant compte des positions relatives par rapport à la circonférence (107 *bis*), les projections horizontales des deux droites après cette première rotation sont ab_1 et ac_1.

2° Le plan perpendiculaire au plan vertical devient horizontal, quand cette ligne P'_1 ou $a'c'_1$ devient perpendicu-

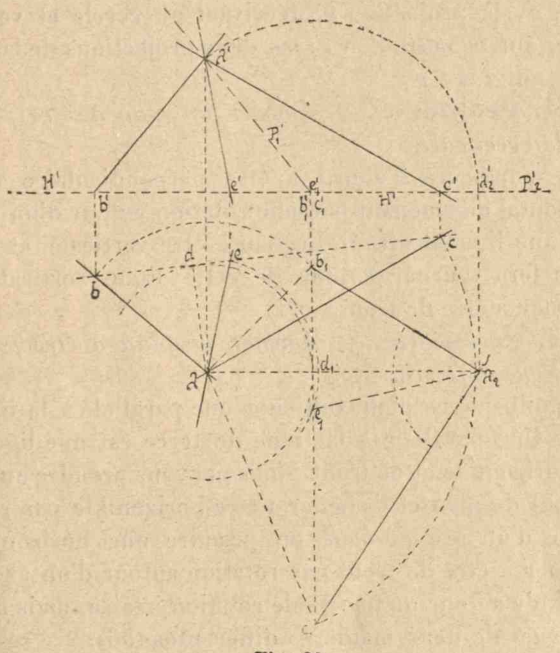


Fig. 96.

laire aux projetantes (50); il faut donc exécuter une seconde rotation autour d'un axe *de-bout*. Or nous avons ici la droite du plan b_1c_1, $b'_1c'_1$ que nous pouvons prendre pour axe, il n'y aura plus à faire tourner qu'un point du plan, le point aa' par exemple. Quand le plan sera devenu horizontal par rotation autour de cet axe, tous les points se projetteront sur la ligne P'_2 perpendiculaire aux projetantes; dans le mouvement de rotation, le point a, a' viendra en a'_2 a_1 et les projections horizontales définitives des deux droites sont a_2b_1 et a_2c_1, l'angle des deux droites données est donc obtenu en vraie grandeur en $b_1a_2c_1$. C'est la construction de l'angle de deux droites par deux rotations. Nous avons déjà résolu le problème par deux changements de plans (53). Nous pouvons nous proposer de construire la bissectrice de l'angle.

Nous menons a_2e_1 bissectrice de l'angle $b_1a_2c_1$. Dans la rotation autour de l'axe vertical a, a' le point e, e'_1 viendra en e, e', la projection e, décrivant un cercle et venant se placer sur bc entre d et c; les deux projections de la bissectrice sont $a\,e$, $a'e'$.

124. **Problème.** — *Amener un plan à être parallèle au plan vertical.*

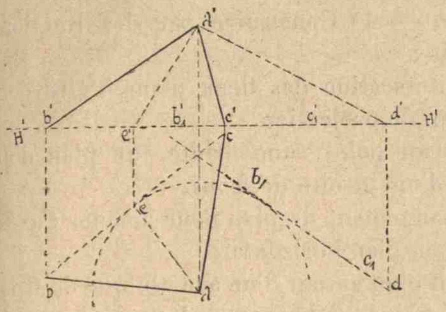
On l'amènera d'abord à être perpendiculaire au plan horizontal en amenant par une rotation autour d'un axe *debout* une ligne de front du plan à être verticale, et ensuite on le fera tourner autour de cette ligne verticale pour l'amener à être de front.

125. **Problème.** — *Amener un plan à être parallèle à la ligne de terre.*

Il suffit que ce plan contienne une parallèle à la ligne de terre. Une parallèle à la ligne de terre est une ligne à la fois horizontale et de front. Nous pouvons prendre une ligne de front du plan et l'amener à être horizontale par rotation autour d'un axe *de-bout*, ou prendre une horizontale et l'amener à être de front par rotation autour d'un axe vertical. Il n'y a donc qu'une seule rotation à faire, mais on peut l'effectuer de deux manières différentes (56).

126. **Problème.** — *Faire tourner un plan autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il passe par un point donné* (fig. 97).

Le plan est défini par les deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c$; le point est le point d, d'; l'axe de rotation est l'axe vertical passant par le point a, a' (choisi pour éviter d'avoir à construire le point de rencontre de l'axe avec le plan). Tous les points du plan en tournant autour de l'axe vertical se déplacent dans des plans horizontaux; donc le point du plan qui viendra après la rotation coïncider avec le point d, d' est dans le même plan horizontal que ce point. Ce plan horizontal détermine dans le plan *abc*, *a'b'c'* une horizontale *bc*, *b'c'*, c'est un point de cette horizontale qui viendra passer par le point *d*, *d'*. Mais dans le mouvement la projection horizontale *bc* reste tangente à la circonférence décrite du point *a* comme centre avec *ae* comme rayon. Nous mènerons par le point *d* une tangente à ce cercle, et cette tangente dc_1b_1 sera la projection nouvelle de l'horizontale *bc*, *b'c'*, sa projection verticale sera $b'_1c'_1$. Il y a deux solutions.



g. 97.

Condition de possibilité. Il faut que le point *d* soit en dehors du cercle. Traçons la droite du plan dont *ae* est la projection horizontale et dont la projection verticale est *a'e'* ; c'est une ligne de plus grande pente du plan par rapport au plan horizontal, elle fait avec ce plan horizontal le même angle que le plan (42). Traçons la droite *ad*, *a'd'* Si le point *d* est en dehors du cercle, cette ligne fera avec le plan horizontal un angle plus petit que la droite *ae*, *a'e'*

Il faut donc que la droite obtenue en joignant le point donné au point de rencontre de l'axe avec le plan fasse avec le plan horizontal un angle plus petit que le plan.

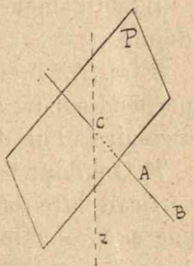


Fig. 98.

127. **Problème.** — *Faire tourner un plan autour d'un axe convenablement choisi de manière que le plan contienne une droite donnée* (fig. 98).

Nous voulons faire passer le plan P par la droite AB.

L'axe étant choisi, nous pourrons faire passer le plan par un point de la droite ; prenons le point de rencontre C de la droite AB avec le plan et faisons passer l'axe CZ par le point C ; ce point restera dans le plan, et nous n'aurons qu'à faire passer le plan par un point de la droite.

128. **Exercices.** — 1° Construire par des rotations l'angle de deux plans :

Il faut amener l'intersection des deux plans à être perpendiculaire à un plan de projection.

2° Faire tourner un point, une droite, un plan d'un angle donné autour d'une droite de front.

Il faut faire un changement de plan pour amener l'axe à être perpendiculaire au plan horizontal.

3° Faire tourner un plan autour d'un axe oblique de front pour l'amener à être perpendiculaire au plan vertical.

Changement de plan horizontal.

4° On donne une droite et un point hors de la droite, faire tourner la droite autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce que sa projection verticale passe par la projection verticale du point

5° On donne une droite, un point hors de la droite, et la projection verticale d'un axe vertical, déterminer l'axe par la condition que la droite tournant autour de cet axe vienne passer par le point.

6° Amener un plan par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection à être perpendiculaire à un plan donné.

Il faut l'amener à passer par une perpendiculaire au plan donné.

6 *bis*. Amener un plan par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à un des plans de projection à être perpendiculaire à l'un des deux plans bissecteurs.

7° On donne une droite par ses projections et un axe vertical, faire tourner la droite autour de cet axe jusqu'à ce que sa projection verticale soit parallèle à une direction donnée. Condition de possibilité.

8° On donne un plan et un axe vertical, faire tourner le plan autour de cet axe de manière que les lignes de front du plan dans la nouvelle position soient parallèles à une direction donnée. Condition de possibilité.

9° On donne deux droites qui ne se rencontrent pas, les amener par une rotation à avoir leurs projections verticales parallèles.

10° On donne deux plans, les amener par une rotation à avoir leurs lignes de front parallèles entre elles.

11° Déterminer l'axe de rotation qui permet d'amener 3 points donnés à se trouver sur la même verticale.

12° Déterminer un axe vertical ou de-bout qui permette d'amener dans un même plan 3 droites quelconques. Nombre de solutions.

13° Déterminer un axe vertical qui permettrait d'amener 3 plans quelconques à se couper suivant une horizontale de cote donnée. Nombre de solutions.

14° Construire par deux rotations la perpendiculaire commune à deux droites.

15° On donne un plan par ses traces, amener ce plan à passer par la ligne de terre.

RABATTEMENTS

129 **Définition.** — Un rabattement est une rotation d'un plan autour d'une horizontale ou d'une ligne de front de ce plan, ayant pour objet d'amener le plan à être parallèle au plan horizontal ou au plan vertical.

Construction : Nous considérons un plan défini par deux droites qui se coupent (fig. 99) $a'b'$, ab et $a'c'$, ac, nous construisons une horizontale $b'c'$, bc de ce plan et nous prenons cette horizontale pour axe de rotation. Nous nous proposons d'amener le plan à coïncider avec le plan horizontal H′ qui contient cette horizontale. Nous devons d'abord prendre un plan auxiliaire de projection perpendiculaire à l'axe (104) ; nous prenons donc un plan vertical, et les nouvelles projetantes seront parallèles à la projection horizontale bc. Nous conservons les différences de cote des divers points, l'horizontale ayant pour projection nouvelle le point arbitraire c'_1, tous les points du plan horizontal H′ ayant même cote que cette horizontale auront leurs projections verticales sur H'_1 perpendiculaire à bc menée par c'_1 ; le point a, a' se projettera en a'_1 ($\alpha_1 a'_1 = \alpha a'$) et tous les points du plan se projetteront sur $c'_1 a'_1$. L'angle de ce plan avec le plan horizontal est l'angle θ. Pour amener le plan à être horizontal il faut donc le faire tourner de l'angle θ ou du supplément de cet angle (121). Dans ce mouvement de rotation autour de cet axe de-bout, la projection verticale a'_1 se déplacera sur la circonférence décrite de c'_1 comme centre, la projection horizontale se déplacera sur une perpendiculaire aux projetantes. Le point étant venu dans le plan H'_1, sa projection verticale sera A′ ; nous avons fait tourner de $(180^\circ\text{-}\theta)$ et sa projection horizontale sera A. Ce point A est le rabattement du point a, a'. Rabattons de la même manière le point d, d'; sa projection verticale auxiliaire est d'_1 situé sur $c'_1a'_1$ et telle que $\beta_1 d'_1 = \beta d'$. Le point se rabat en D.

Si nous considérons un point du plan tel que e, e' situé au-dessous du plan H, la projection verticale auxiliaire de

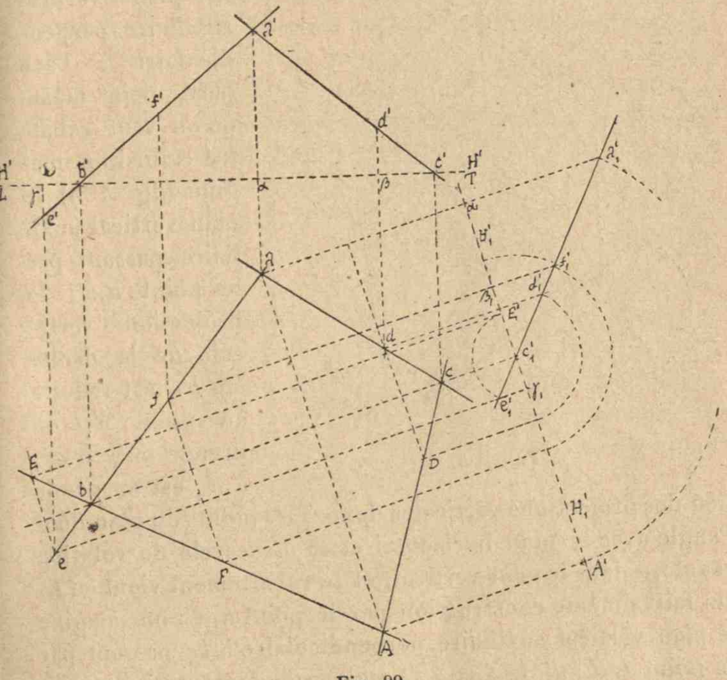


Fig. 99.

ce point sera e'_1 située sur $c'_1a'_1$ et telle que $\gamma_1 e'_1 = \gamma e'$ et ce point tournant encore de l'angle $180^\circ\text{-}\theta$ se rabattra en E par conséquent de l'autre côté de l'horizontale par rapport aux points A et D qui sont les rabattements de points situés au-dessus du plan H.

129 *bis*. *Remarque :* Nous remarquerons que si des points sont en ligne droite sur le plan, leurs rabattements seront aussi en ligne droite ; ainsi les trois points A, D, c, les trois

points A b E. Si l'on veut rabattre un autre point de la droite ab, $a'b'$ tel que le point ff', il n'y a plus qu'à abaisser de la projection horizontale f une perpendiculaire sur bc pour avoir en F le rabattement du point.

130. **Formule.** — On a l'habitude de disposer ces constructions de rabattement d'une manière un peu différente, en faisant passer le plan vertical auxiliaire perpendiculaire à l'axe par le point même qu'on veut rabattre : ainsi on imagine (fig. 100) le plan vertical auxiliaire passant par le point a,a', la projection verticale de la droite bc, $b'c'$ est réduite au point c'_1 on prend $aa'_1 = \alpha a'$, $c'_1 a'_1$ est encore le lieu des projections verticales de tous les points du plan dont l'angle avec le plan horizontal est θ. Le cercle de rotation est alors dans le plan vertical, et le rabattement vient en A. On fait la même construction par le point d, d', on imagine le plan vertical auxiliaire perpendiculaire à bc passant par ce point d, d' ; d'_1 ($dd'_1 = \beta d'$) est la projection verticale auxiliaire du point; $c'_2 d'_1$ est encore la trace du plan sur le plan vertical et doit être parallèle à $c'_1 a'_1$; le point se rabat en D

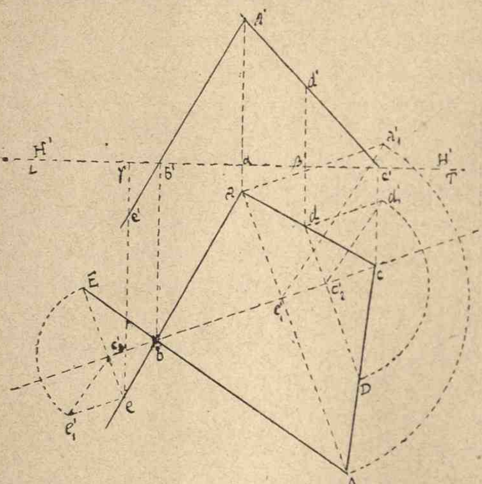


Fig. 100.

Pour le point e, e' on imagine encore le plan vertical passant par ce point qu'on projette en e'_1 ($ee'_1 = \gamma e'$); $e'_1 c'_3$ est la trace du plan parallèle à $c'_1 a'_1$, mais en sens inverse et la rotation d'un angle égal $180° - \theta$, comme pour les autres points, amène le rabattement en E. En réalité, on décompose le changement de plan fait sur la figure précédente en autant de changements de plans partiels qu'on doit rabattre de points. On évite ainsi de tracer les projetantes telles que A'A, D'D, E'E de la figure précédente ; de plus on peut ainsi formuler plus simplement la construction à faire pour le rabattement.

On abaisse de la projection horizontale du point une perpendiculaire sur l'horizontale, le point se rabattra sur cette perpendiculaire à une distance de l'axe de rotation égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit : 1° la distance de la projection horizontale du point à l'axe de rotation (ainsi ac'_1, dc'_2 fig. 100) et 2° la différence de cote entre le point et l'horizontale (ainsi aa'_1, dd'_1 fig. 100). L'angle aigu (θ sur la figure 100) de ce triangle rectangle opposé à la cote est l'angle du plan avec le plan horizontal; nous appellerons ce triangle rectangle auxiliaire *triangle de rabattement*

Cette formule qu'on peut appliquer très simplement à tous les points qu'on voudra rabattre, fait disparaître la notion réelle du double mouvement, changement de plan et rotation qui caractérise le rabattement. Mais il ne faut pas oublier que c'est ce double mouvement qui en justifie l'emploi; il ne faut pas perdre de vue qu'on ne peut par un seul déplacement amener un plan à être parallèle à un plan de projection.

Nous ne reprendrons pas l'explication de ces tracés du rabattement d'un plan sur un plan de front autour d'une droite de front ; nous nous contenterons de répéter la formule en modifiant les mots :

On abaisse de la projection verticale du point une perpendiculaire sur la ligne de front qui est l'axe de rotation, le point se rabattra sur cette perpendiculaire à une distance de la ligne de front égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour cotes de l'angle droit : 1° la distance de la projection verticale du point à l'axe de rotation; 2° la différence d'éloignement entre le point et la ligne de front. L'angle aigu de ce triangle rectangle opposé à l'éloignement, est l'angle du plan avec le plan vertical.

131. **Rabattre un plan perpendiculaire à un plan de projection.** (fig. 100 *bis*). — Considérons un

plan vertical représenté par une ligne P, lieu des projections horizontales de tous les points du plan; nous nous proposons de rabattre ce plan sur un plan horizontal représenté par H' ou LT autour de l'horizontale située dans ce plan.

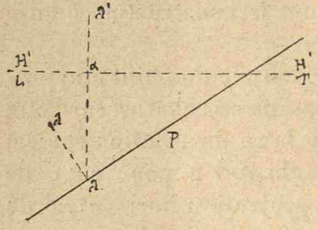


Fig. 100 *bis*.

Il est évident que la distance du point a, a' à l'horizontale du plan P, située dans le plan H', est égale à la cote du point $a'\alpha$. Donc dans le rabattement le point aa' vient en a'_1 ($aa'_1 = \alpha a'$). *Le rabattement d'un plan vertical n'est donc pas autre chose qu'un changement de plan vertical.*

De même le rabattement d'un plan de-bout sur un plan de front est un changement de plan horizontal.

132. **Relèvements.** — Les constructions de rabattement ont en général pour objet de faire dans un plan certains tracés définis par des longueurs de lignes ou des grandeurs d'angles. Mais une fois les résultats obtenus, il faut les ramener dans le plan donné ; il faut donc les relever.

Les constructions se feront par les mêmes moyens que les rabattements, les lignes seront tracées dans un ordre différent.

Ainsi (fig. 101) un plan étant défini par deux droites ba, $a'b'$ et ac, $a'c'$ on l'a rabattu autour de l'horizontale bc,$'bc'$ sur le plan horizontal qui contient cette droite et le triangle rectangle de rabattement ada'_1 nous fait connaître l'angle θ. Nous faisons tourner le point aa' de 180° — θ et nous obtenons son rabattement en A.

Nous avons obtenu comme résultat de certains tracés un point L dont il faut déterminer les projections ; nous menons la perpendiculaire Lm à l'axe, et sa longueur est l'hypoténuse du triangle de rabattement dont θ est l'angle aigu, triangle facile à construire en menant ml'_1 parallèle à da'_1 et en portant m L de m en l'_1 ; l est la projection horizontale du point, ll'_1 est la cote que nous portons en $\delta l'$

du même côté que la cote du point a, a', puisque les rabattements des points sont du même côté de l'horizontale.

Nous pouvons justifier rigoureusement ce tracé en imagi-

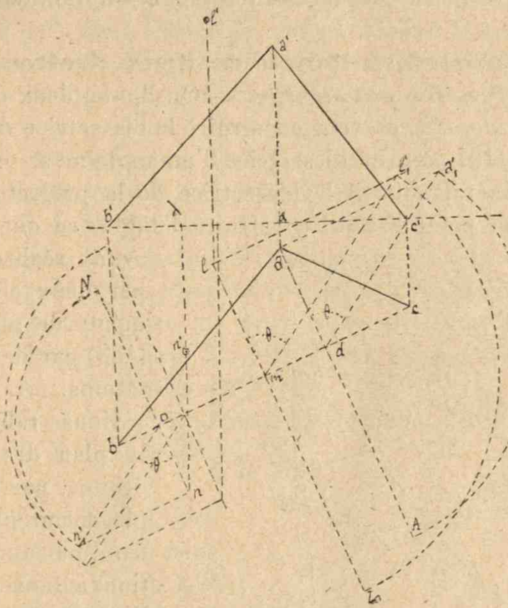


Fig. 101.

nant un plan de projection auxiliaire passant par L et perpendiculaire à l'axe de rotation bc; c'est dans ce plan vertical que tournera le point L.

Le plan donné coupe le plan vertical auxiliaire suivant une ligne ml'_1 faisant avec la direction de la ligne de terre perpendiculaire aux projetantes l'angle θ du plan avec le **plan** horizontal. Le cercle de rotation du point L projeté en vraie grandeur sur le plan vertical et projeté horizontalement suivant la perpendiculaire aux projetantes, amène le point dans le plan en $l'_1 l$; d'où nous déduisons la projection verticale l'.

Si le point obtenu est le point N, nous ferons des tracés identiques, mais le point n'est pas du même côté de l'horizontale que le point A, nous construirons donc le triangle de rabattement semblable au triangle ada'_1 mais en sens inverse en onn'_1, on'_1 étant parallèle à da'_1 et la cote obtenue en nn'_1 sera reportée en $\lambda n'$ au-dessous du plan horizontal.

Il nous reste à appliquer ces tracés à la solution de divers problèmes.

133. **Construire l'angle de deux droites et la bissectrice de cet angle.** — On donne deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$, on veut construire la bissectrice de leur angle (fig. 101 *bis*). La bissectrice d'un angle ne se projette pas en général suivant la bissectrice de la projection de l'angle ; on peut d'abord construire l'angle, ce que nous avons réalisé (53) par deux changements de plans et (123) par deux rotations.

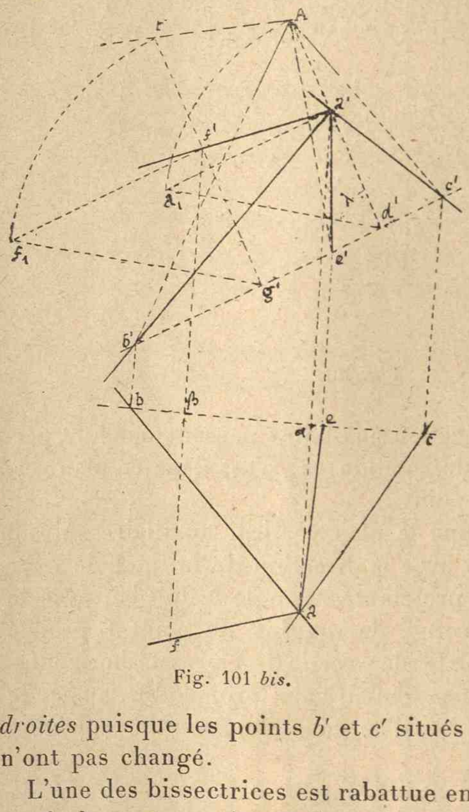


Fig. 101 *bis*.

Nous rabattons le plan des deux droites, par exemple, sur un plan de front par une rotation autour de la ligne de front bc, bc'.

Sans répéter tout ce que nous venons de dire (129), nous construisons le triangle de rabattement en $d'a'a_1$ et le point aa' se rabat en A. $b'Ac'$ *est l'angle des deux droites* puisque les points b' et c' situés sur l'axe de rotation n'ont pas changé.

L'une des bissectrices est rabattue en Ae', le point projeté verticalement en e' sur l'axe de rotation a sa projection horizontale au point e.

Les deux projections de la bissectrice sont donc $a'e'$, ae.

Prenons la seconde bissectrice rabattue en FA ; le point où elle rencontrerait l'axe de rotation est en dehors de l'épure. Nous relèverons directement un point, par exemple le point F (132). Nous figurons donc le triangle de rabattement $f'g'f'_1$ dans lequel $g'f_1$ est parallèle à $d'a_1$ et égal en longueur à g'F. f' est la projection verticale du point et en portant βf égal à $f'f_1$ nous avons la projection horizontale ; les deux projections de la seconde bissectrice sont $a'f'$, af.

134. Construire l'angle de deux plans et le plan bissecteur. — Quelle que soit la manière dont les plans sont définis, nous ramènerons toujours la construction à celle d'un cas particulier unique ainsi précisé.

On prend deux plans de projection fixes en les choisissant de manière que les deux plans aient une trace commune. Ainsi on aura (fig. 102) deux plans P$'a'$P et Q$'a'$Q ayant une trace commune P$'$Q$'a$.

Cette trace commune est l'intersection des deux plans, nous la désignons par $a'b'$, ab.

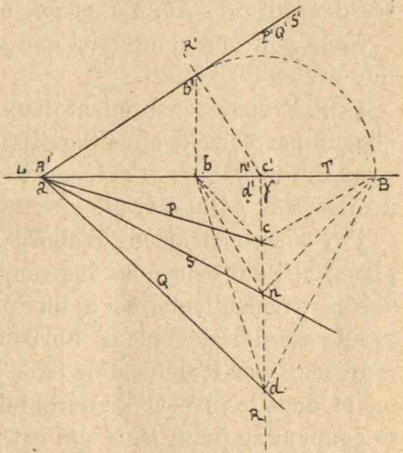


Fig. 102.

Pour construire l'angle des deux plans, nous déterminons l'angle rectiligne du dièdre formé par ces deux plans en les coupant par un plan perpendiculaire à leur intersection. Ce plan perpendiculaire sera encore défini par ses traces R$'\gamma$ perpendiculaire à $a'b'$ et Rγ perpendiculaire à ab.

L'intersection du plan R avec le plan P est donnée par le point de rencontre b', b des traces verticales R$'$ et P$'$ et par le point c, c' où se coupent les traces horizontales P et R ; c'est la droite bc, $b'c'$.

L'intersection du plan R avec le plan Q est donnée par le point de rencontre b', b des traces verticales R′ et Q′ et par ce point d', d où se coupent les traces horizontales Q et R; c'est la droite bd, $b'd'$.

Ainsi les deux droites $b'c'$, bc et $b'd'$, bd comprennent entre elles un angle égal à l'angle des deux plans; nous rabattons le plan de ces deux droites sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de la droite de-bout cd, $c'd'$ Nous rabattons le point b, b' et le triangle de rabattement est tout construit en $b'b\gamma$ (129), le point se rabat en B, les rabattements des deux droites sont cB et dB qui comprennent entre elles l'angle cherché cBd

135. Plan bissecteur. — Si l'on veut déterminer le plan bissecteur, on remarquera d'abord que ce plan passe nécessairement par l'intersection ab, $a'b'$ des deux premiers et qu'il suffira pour le déterminer d'y joindre la bissectrice d'un des angles rectilignes. Ainsi la bissectrice de l'angle que nous venons de construire est rabattue en Bn, elle a pour projection bn, $b'n'$ et le plan bissecteur est défini par les deux droites ab, $a'b'$ et bn, $b'n'$.

Nous pouvons ajouter ici que ses traces sont a'S′ confondue avec a'P′Q′ et aS.

136. Prenons maintenant deux plans quelconques définis chacun par deux droites (fig. 103) : Le plan P défini par les deux droites $f'e'$, fe et $e'g'$, eg; le plan Q défini par les deux droites $h'k'$, hk et $h'l'$, hl.

1° Nous construisons d'abord l'intersection de ces deux plans, et pour cela nous les couperons par des plans auxiliaires perpendiculaires à un plan de projection; nous prendrons ici des plans horizontaux. Le plan horizontal représenté par H′ détermine dans le plan P l'horizontale $f'g'$, fg, et dans le plan Q l'horizontale $k'l'$, kl; ces deux lignes se coupent au point a, a' qui est un point de l'intersection cherchée.

Le plan horizontal représenté par H'_1 détermine les deux horizontales $e'b'$, eb, parallèle à fg, $f'g'$, et $m'b'$, mb, parallèle à kl, $k'l'$, qui donnent par leur point de rencontre un second point de l'intersection cherchée en b, b'.

Ainsi les deux projections de l'intersection sont ab, $a'b'$.

2° Nous choisissons un plan horizontal que nous prendrons comme plan de projection fixe. C'est le plan H'. Alors les projections horizontales *fg* et *kl* sont les traces

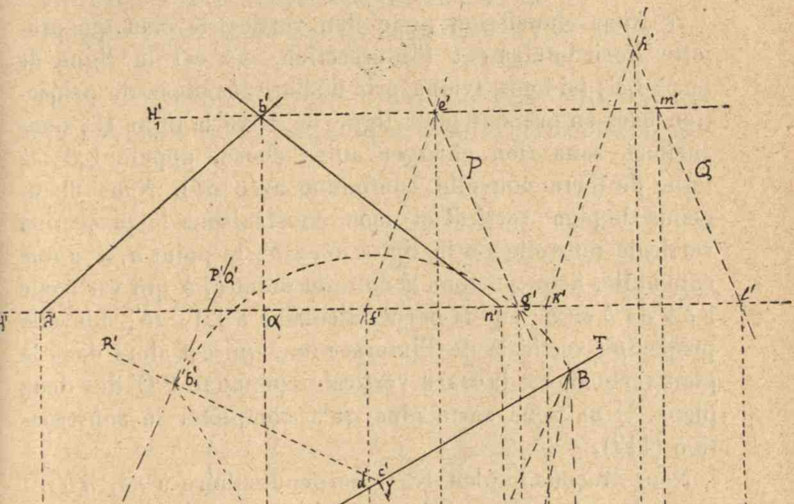


Fig. 103.

horizontales P et Q des deux plans. (Nous pouvons remarquer ici que nous aurions pu prendre d'abord la ligne de terre confondue avec H'. Nous aurions précisé tout de suite le plan horizontal fixe; mais cette désignation *à priori* du plan horizontal peut avoir des inconvénients dans les cas où l'on ne se servirait pas de plans horizontaux auxiliaires pour construire l'intersection des deux plans P et Q ; il vaut mieux, en général, ne fixer le plan horizontal qu'après avoir construit l'intersection).

3° Nous choisissons pour plan vertical le plan qui projette horizontalement l'intersection, ab est la ligne de terre LT ; (si nous avions pris d'abord les plans de projection fixes en prenant pour ligne de terre la ligne H', nous aurions, sans rien changer autre chose, appelé L_1T_1 la ligne de terre nouvelle confondue avec ab). Nous changeons de plan vertical et nous construisons la projection verticale nouvelle de la ligne ab, $a'b'$; le point a, a' a une cote nulle, nous portons la cote du point b, b' qui est égale à $b'\alpha$ de b en b'_1 sur la perpendiculaire à LT. ab'_1 nouvelle projection verticale de l'intersection, qui est alors dans le plan vertical, est la trace verticale commune P'Q' des deux plans. Il ne nous reste plus qu'à compléter la construction (117).

Nous traçons le plan R'γR perpendiculaire à ab, $a'b'$; il coupe les deux autres suivant les lignes bc, b'_1c' et bd, b'_1d', qu'il est inutile de tracer; nous rabattons le plan de ces deux lignes sur le plan horizontal ; le point b, b'_1 venant en B, les rabattements sont Bc et Bd qui comprennent entre elles l'angle demandé.

Résumé : Il faut toujours suivre cet ordre : 1° Construire l'intersection par la méthode la plus commode.

2° Choisir un plan horizontal qui coupera les deux plans suivant deux horizontales qui seront les traces.

3° Prendre pour plan vertical le plan qui projette horizontalement l'intersection.

137. **Plan bissecteur.** — Nous tracerons la bissectrice de l'angle rectiligne ; soit Bn le rabattement de cette bissectrice, sa projection horizontale sera bn; mais nous remarquons que la droite cd sur laquelle se trouve le point n est dans le plan horizontal, donc la projection verticale dans le premier système de projection (même si l'on n'a pas tracé la première ligne de terre) du point projeté en n est n'; les projections de la bissectrice sont bn, $b'n'$.

Le plan bissecteur est déterminé par les deux droites ab, $a'b'$ et bn, $b'n'$.

138. **Autre méthode** (fig. 104). — Le plan P est défini par les deux droites $a'b'$, ab et $a'c'$, ac.

Le plan Q est défini par les deux droites $d'e'$, de et $d'f'$, df.

Nous construisons comme précédemment l'intersection des deux plans en les coupant par un plan horizontal H′ qui

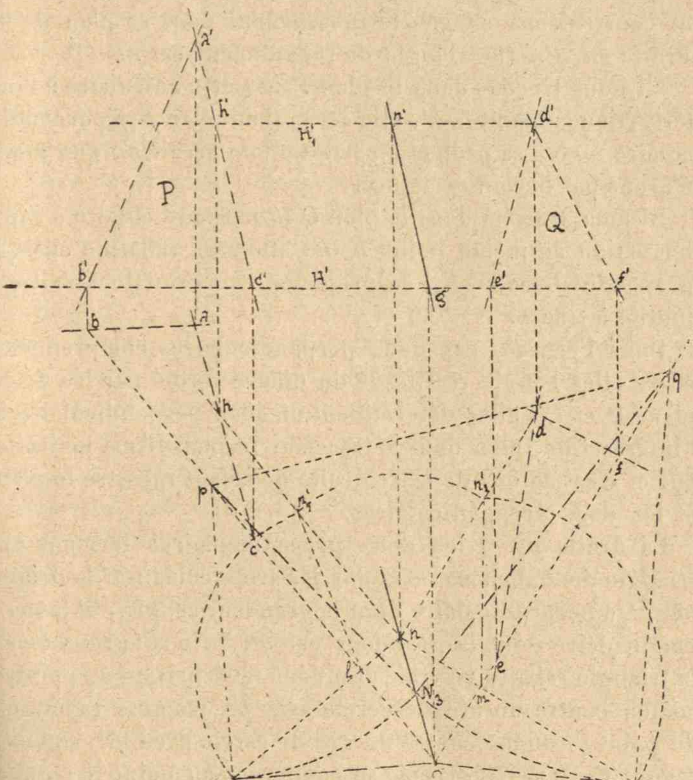


Fig. 104.

détermine les horizontales dont les projections sont bc, et ef, fournissant ainsi un point g, g' de l'intersection. Un autre plan horizontal H'_1 donne les deux horizontales projetées en hn et dn fournissant un second point n, n' de l'intersection qui est gn, $g'n'$.

Rabattons le plan P sur le plan horizontal H' en le faisant tourner autour de l'horizontale bc, $b'c'$ et construisons le rabattement dans ce plan de l'intersection. Le point n, n' se rabattra sur la perpendiculaire nl à bc en N_1 (le triangle de rabattement (129) est nln'_1); la droite gn, $g'n'$ sera rabattue en gN_1.

Rabattons de même le plan Q autour de l'horizontale ef et construisons en gN_2 le rabattement dans ce plan de la droite gn, $g'n'$ (le triangle de rabattement est nmn'_2).

Si nous traçons dans le plan P la perpendiculaire à l'intersection au point n, n', elle sera rabattue en N_1p perpendiculaire à gN_1, sa projection horizontale serait pn que nous n'avons pas besoin de figurer.

Si nous traçons dans le plan Q la perpendiculaire à l'intersection au même point n, n', elle sera rabattue en N_2q perpendiculaire à gN_2, sa projection horizontale serait qn inutile à tracer.

Dans l'espace, ces deux perpendiculaires comprennent entre elles l'angle rectiligne du dièdre formé par les deux plans P et Q; elles déterminent un plan perpendiculaire à l'intersection, plan dont la trace sur le plan H' est la droite pq, et c'est autour de cette droite qu'il faut rabattre le plan et les deux perpendiculaires.

La droite pq et les deux perpendiculaires forment un triangle dont nous connaissons les trois côtés : 1° la droite pq, 2° la perpendiculaire dont la grandeur est pN_1, 3° la perpendiculaire dont la grandeur est qN_2. Nous aurons donc le triangle rabattu en vraie grandeur en décrivant du point p comme centre un arc de cercle avec pN_1 comme rayon, et du point q comme centre un arc de cercle avec qN_2 comme rayon. Ces arcs de cercle se couperont au point N_3; pN_3q est le triangle dans lequel l'angle en N_3 est l'angle cherché.

Remarquons que la trace pq du plan pnq doit être perpendiculaire sur ng, et que dans le rabattement le sommet du triangle projeté en n doit se rabattre sur ng; on pourrait donc se contenter de rabattre le plan P pour obtenir le rabattement $g N_1$ de l'intersection, on mènerait ensuite la perpendiculaire $N_1 p$; on tracerait pq perpendiculaire à ng, enfin on décrirait l'arc de cercle de p comme centre avec pN_1 pour rayon ; on obtiendrait le point N_3 et le triangle pN_3q.

139. **Construire l'angle d'une droite et d'un plan.** — L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan. Nous devons d'abord mener par la droite un plan perpendiculaire au plan donné, plan qu'on déterminera en menant par un point de la droite une perpendiculaire au plan donné (91, fig. 80).

L'intersection de ce plan perpendiculaire avec le plan donné sera la projection cherchée, et on construira ensuite l'angle de la droite et de sa projection.

Nous devons faire observer que l'angle de la droite donnée AB avec la perpendiculaire BC au plan donné est le complément de l'angle cherché, mais qu'en général on n'a pas pour objet de connaître la valeur de l'angle en le mesurant en degrés avec un rapporteur, recherche à laquelle on serait conduit par la considération de l'angle complémentaire; on a besoin au contraire de connaître l'angle de la droite avec le plan dans la position réelle qu'il occupe.

140. **Construire les projections d'un cercle situé dans un plan.** — Un plan est défini par deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$ (fig. 105). Le point a, a' est le centre d'un cercle situé dans ce plan et dont le rayon est connu. Nous allons rabattre le plan (par exemple) sur un plan horizontal H' en le faisant tourner autour de l'horizontale bc, $b'c'$. Le triangle de rabattement du point a, a' est daa'_1 $(a\,a'_1 = \alpha a')$. Nous avons en θ l'angle du plan avec le plan horizontal. Nous faisons tourner le plan de l'angle 180° θ, le point A est le rabattement du point a, a'. Nous traçons le cercle de rayon donné ayant son centre au point A.

Nous pourrions relever par les constructions indiquées (132) un certain nombre de points de ce cercle et nous joindrions par un trait continu les points ainsi obtenus ; mais la projection d'un cercle est une ellipse dont nous pouvons déterminer les axes.

Nous commençons par tracer la ligne de plus grande pente du plan ayant ad pour projection horizontale, la projection verticale de cette ligne est $d'a'$, c'est cette ligne qui

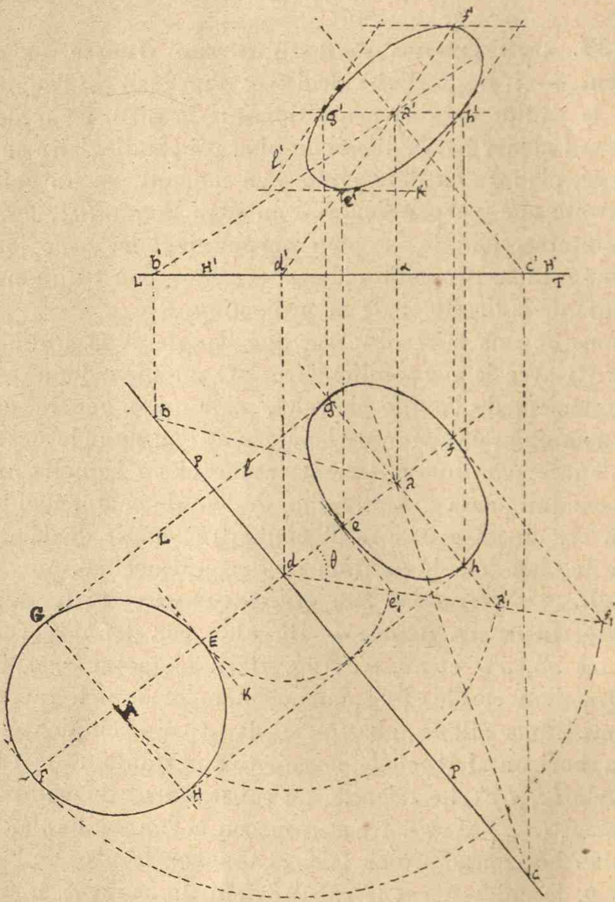


Fig. 105.

se rabat en dA. Considérons le diamètre EF qui se trouve sur cette ligne et relevons les points rabattus en E et F. La construction du relèvement (115) nous donne les points e'_1, e, e' et f'_1, f, f' sur la ligne da, $d'a'$.

Remarquons que ef est égale à la projection de $e'_1f'_1$ c'est-à-dire du diamètre $(e'_1f'_1 = \mathrm{EF})$ faite suivant l'angle θ.

Traçons le diamètre GH perpendiculaire à EF c'est-à-dire parallèle à l'axe de rotation bc; tous les points de ce diamètre étant à égale distance de bc décriront des cercles égaux; ce diamètre se relèvera suivant une parallèle à l'horizontale bc, $b'c'$; pour avoir le relèvement du point rabattu en G nous abaisserons de ce point G une perpendiculaire sur bc, le point où cette perpendiculaire rencontre la projection de l'horizontale du plan menée par a est la projection horizontale du point rabattu en G; on obtient sa projection verticale en g'. On obtient de même le point h, h'. Le diamètre rabattu en GH a pour projection $g'h'$ et gh dont la longueur est égale à GH.

Or la propriété que présente un diamètre de passer par les milieux des cordes qui lui sont perpendiculaires est une propriété projective, qui se retrouve sur chaque projection, puisque le milieu d'une droite se projette au milieu de sa projection; donc ef et gh sont deux diamètres rectangulaires de la projection horizontale; ce sont les axes de cette projection.

Sur la projection verticale les deux diamètres $e'f'$ et $g'h'$ ne sont pas rectangulaires, ils sont conjugués, c'est-à-dire que la tangente à l'ellipse au point e', projection verticale de la tangente rabattue en EK, est parallèle au diamètre $g'h'$ parce que EK est parallèle à GH ou bc; la tangente au point g' est la projection verticale de la tangente rabattue en GL parallèle au diamètre EF c'est-à-dire à la ligne de plus grande pente.

Mais nous aurions pu déduire les axes de la projection verticale du rabattement du plan sur un plan de front autour d'une ligne de front.

141. **Règle des axes.** — Nous pouvons déduire des tracés et des remarques que nous avons faits la règle suivante pour construire les axes des ellipses projections d'un cercle.

Projection horizontale : Le centre de l'ellipse est la projection horizontale du centre du cercle; le grand axe de l'ellipse est parallèle aux horizontales du plan du cercle et égal au diamètre; le petit axe est égal à la projection du diamètre faite suivant l'angle du plan avec le plan horizontal.

Projection verticale : Le centre de l'ellipse est la projection verticale du centre du cercle; le grand axe de l'ellipse est parallèle aux lignes de front du plan du cercle et égal au diamètre; le petit axe est égal à la projection du diamètre faite suivant l'angle du plan avec le plan vertical.

Remarque. Si nous avions supposé des plans de projection fixe, LT étant la ligne de terre, bc eût été la trace horizontale P du plan et il n'y eût eu aucun changement dans nos tracés.

142. **Problèmes relatifs aux projections d'un cercle.** — On définit (fig. 106) un plan par une droite horizontale $a'b'$, ab et un point c, c' (c'est la même définition que dans le cas précédent où l'on voit que les deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$ n'ont servi qu'à déterminer l'horizontale bc, $b'c'$ trace du plan sur le plan horizontal). Le point cc' est le centre d'un cercle de rayon donné contenu dans le plan. On demande de construire le point de la projection verticale du cercle pour lequel la tangente à cette projection verticale sera parallèle à R′.

Le cercle est dans le plan, toutes ses tangentes sont dans le plan, la tangente dont la projection verticale est parallèle à R′ est une droite du plan et nous connaissons la direction de la projection verticale de cette droite. Cherchons la direction de sa projection horizontale; pour cela nous menons $c'b'$ parallèle à R′, et cb est la direction cherchée. Nous devons mener au cercle une tangente parallèle à cb, $c'b'$; rabattons le plan, le point c,c' se rabat en C (triangle de rabattement cdc'_1 obtenu en prenant $cc'_1 = \alpha c'$); la ligne cb, $c'b'$ se rabat en bC; menons le rayon CE égal à la longueur donnée et perpendiculaire à Cb; le point E sera le rabattement du point de contact de la tangente. Il n'y a plus qu'à relever le point; on peut employer le triangle de rabattement (129), nous avons figuré un autre tracé : nous avons prolongé CE jusqu'au point f, le point f,f' situé sur l'axe de rotation ne va pas changer, et la ligne rabattue en fCE, se relève en fce, $f'c'e'$; le point rabattu en E a pour projection e,e' : e' est le point demandé.

On ferait la même construction si l'on voulait trouver le point de la projection horizontale pour lequel la projection horizontale de la tangente a une direction donnée.

On peut aussi demander le point de la projection verti-

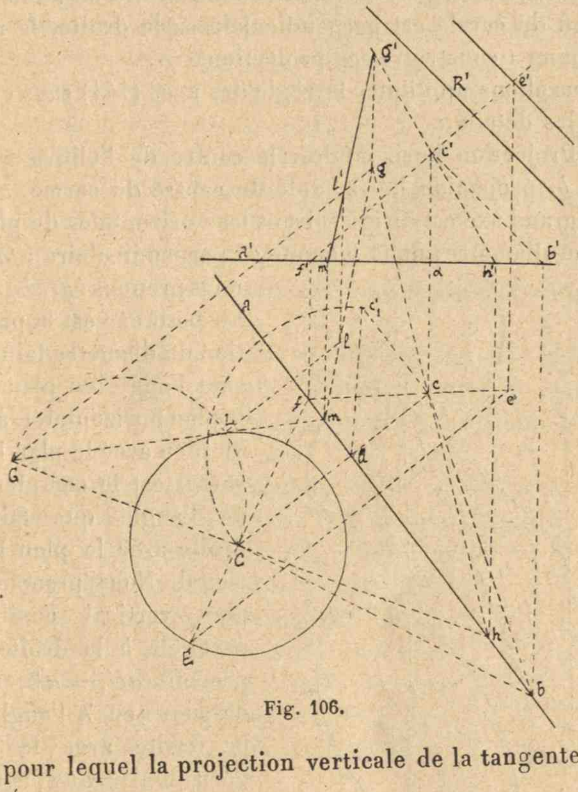


Fig. 106.

cale pour lequel la projection verticale de la tangente passe par g'.

Sans entrer dans tous les détails que la solution du problème précédent suffit à indiquer, nous construisons le point du plan dont g' est la projection verticale; nous avons mené pour cela une ligne du plan projetée en $g'c'h'$, sa projection horizontale ch nous fait connaître le point g. Nous avons rabattu le plan et dans ce plan le point g,g' au moyen de cette ligne *gch g'c'h*, rabattue en G*Ch*; nous avons construit le point de contact L de la tangente, menée par G au cercle, dont le rayon est CE, et nous avons relevé ce point rabattu en L au moyen de la tangente elle-même GL*m* dont les projections sont *mlg m'l'g'* : le point *l'* est le point cherché.

143. Application (fig. 107). — On donne une droite *ab a'b'*. Un cercle a son centre sur la droite au point *b*,*b'*; le plan du cercle est perpendiculaire à la droite, le rayon est connu : construire ses projections.

Nous allons appliquer la règle des axes (141) sans entrer dans les détails :

1° Projection horizontale : le centre de l'ellipse est le point *b*, projection horizontale du centre du cercle.

Le grand axe est dirigé suivant les horizontales du plan et égal au diamètre; nous menons *gh* perpendiculaire à *ab*, et nous prenons $bg = bh = R$. Le petit axe est la projection du diamètre faite suivant l'angle du plan avec le plan horizontal. L'angle du plan avec le plan horizontal est le complément de l'angle que fait la droite avec le plan horizontal. Nous prenons un plan vertical auxiliaire parallèle à la droite, en prenant $aa'_1 = a'\beta$; nous obtenons en λ l'angle de la droite avec le plan horizontal $= aba'_1$; nous menons bk'_1 perpendiculaire sur ba'_1, nous obtenons en kbk'_1 l'angle du plan avec le plan horizontal, nous prenons

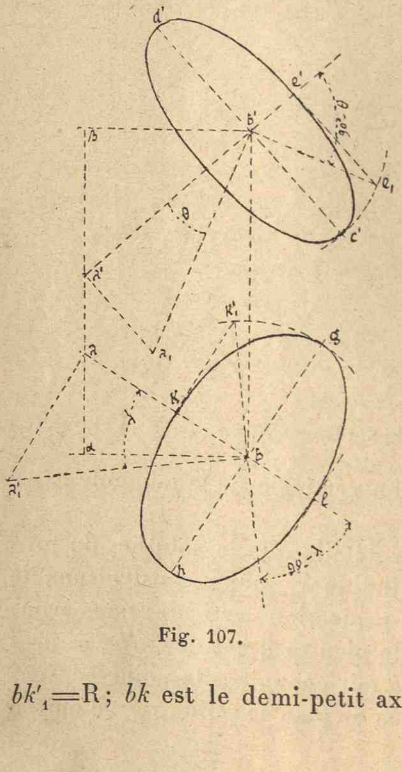


Fig. 107.

$bk'_1 = R$; *bk* est le demi-petit axe et nous portons $bl = bk$;

2° Projection verticale : centre b' ; grand axe $d'b'c'$ perpendiculaire à $a'b'$ et sur lequel on a pris $b'c' = b'd' = R$.

Angle de la droite avec le plan vertical $a'b'a_1 = 0$ $(a'a_1 = a\alpha)$. Angle du plan avec le plan vertical $e'b'e_1$, obtenu en menant $b'e_1$, perpendiculaire sur $b'a_1$. Nous portons le rayon R en $b'e_1$, et nous projetons e_1 en e'; nous portons $b'f' = b'e'$: $f'e'$ est le petit axe.

144. Points entraînés dans le mouvement de rabattement d'un plan. — Nous avons énoncé dans la définition du rabattement, que cette opération ne s'appliquait qu'à une figure plane. On peut avoir intérêt dans certains cas à rabattre un plan et à entraîner dans le mouvement des points extérieurs, ou bien à faire le tracé inverse consistant à relever un plan rabattu en entraînant un point extérieur.

Nous nous contenterons de citer deux exemples, pour faire comprendre dans quels cas une semblable construction peut être utile.

1° Supposons qu'on veuille établir un tétraèdre régulier, ayant une face dans un plan donné. Cette face étant un triangle équilatéral, il suffira de donner deux sommets dans le plan.

Or la projection horizontale d'un tétraèdre régulier ayant une face horizontale est très simple à figurer. C'est un triangle équilatéral ABC (fig. 108) dans lequel le quatrième sommet se projette en D au point de rencontre des trois hauteurs. Ce sommet D est à une distance du plan horizontal facile à déterminer; il suffit de construire le triangle rectangle DD'C, dans lequel CD' = CB; DD' est la hauteur du tétraèdre.

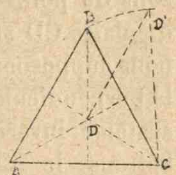


Fig. 108.

On a donc un plan dans lequel sont placés deux des sommets : A et B, par exemple; on le rabat, on effectue le tracé que nous venons d'indiquer et on relève le plan dans lequel on place d'abord le troisième sommet C, et on entraîne le quatrième sommet projeté au point D.

2° Construire les points communs à trois sphères (fig. 109).

Si les centres des trois sphères sont dans un plan horizontal, les cercles communs aux sphères prises deux à deux se projettent suivant les trois cordes communes AB, CD, EF. Leur point de rencontre G est la projection horizontale des deux points communs aux trois sphères points symétriques par rapport au plan des centres, et dont la distance au plan des centres s'obtiendra facilement en rabattant l'un des cercles, le cercle EF par exemple, la distance cherchée est GG'.

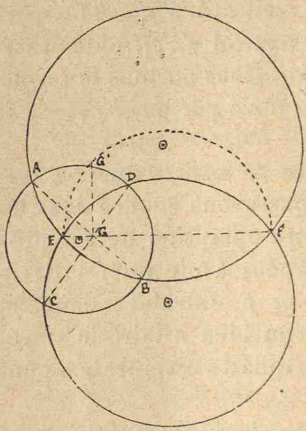


Fig. 109.

Les centres des trois sphères étant connus, on rabattra leur plan sur le plan horizontal, on fera le tracé que nous venons d'indiquer et on relèvera le plan en entraînant les points projetés en G.

145. **Principe de la construction** (fig. 110). — Nous nous proposons de rabattre un plan P sur le plan horizontal H, en le faisant tourner autour de l'horizontal AB et d'entraîner un point C. Nous abaissons du point C une perpendiculaire CD sur le plan P et nous supposons que le plan et la perpendiculaire forment un système invariable. Nous rabattons le plan P sur la partie H du plan horizontal en le faisant tourner de l'angle aigu θ; le point D vient en D_1, et la perpendiculaire devient la verticale D_1C_1 conservant sa longueur; C_1 est la position du point C. Si l'on avait rabattu le plan sur la partie H_1 du plan horizontal en le faisant tourner de l'angle 180° — θ, le point D serait venu en D_2, la perpendiculaire serait devenue

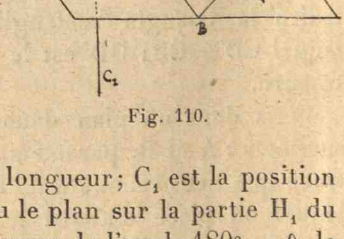


Fig. 110.

la verticale D_2C_2 *située au-dessous* du plan H, et C_2 serait la position du point.

On comprend facilement le tracé inverse; on veut entraîner dans le relèvement du plan P qui a tourné de l'angle aigu θ un point C_1, on abaisse la verticale C_1D_1, on relève le point D_1 en D et on mène la perpendiculaire DC au plan P en prenant $DC = D_1C_1$.

146. **Disposition du tracé** (fig. 111). — Nous définissons simplement un plan par une droite horizontale ab, $a'b'$ et un point c, c'. Nous prenons un point e, e' extérieur au plan (la ligne ce, $c'e'$ ne rencontre pas ab, $a'b'$).

Nous rabattons le plan autour de ab sur le plan horizontal H' ou LT. Le point c,c' vient en C après rotation de $180° - \theta$, θ étant l'angle du plan avec le plan horizontal obtenu dans le triangle de rabattement dcc'_1 ($cc'_1 = \alpha c'$).

La projection horizontale de la perpendiculaire abaissée du point e,e' sur le plan, sera ef perpendiculaire sur ab. ef est en même temps la projection horizontale (84) d'une ligne de plus grande pente du plan par rapport au plan horizontal et cette ligne a sa trace au point g.

Nous prenons pour plan vertical le plan qui contient ces deux droites.

La ligne de plus grande pente est projetée en gf'_1, parallèle à dc'_1, le point ee' a sa projection verticale auxiliaire en e'_1 ($ee'_1 = \beta e'$).

La perpendiculaire se projette suivant $e'_1f'_1$ qui fait connaître sa longueur. (Nous n'avons pas besoin des projections du pied de la perpendiculaire, ni de la projection verticale de cette droite.)

Nous rabattons le point dont la projection verticale auxiliaire est f'_1 en F, car il est évident que gf'_1 est l'hypoténuse du triangle de rabattement de ce point; ce point F est dans le plan horizontal, sa projection verticale est F' et la verticale F'E' égale en longueur à $e'_1f'_1$, nous donne le le point E', E, position du point e, e', après le rabattement du plan.

Supposons le plan rabattu, nous avons un point projeté en L, et dont la distance au plan horizontal est donnée par la projection verticale en L′N′. Nous abaissons la verticale L′N′, LN et nous relevons le point rabattu en N. Nous traçons donc (115) Nm perpendiculaire sur ab, nous menons ensuite mn'_1 parallèle à dc'_1; nous portons mN en mn'_1, et

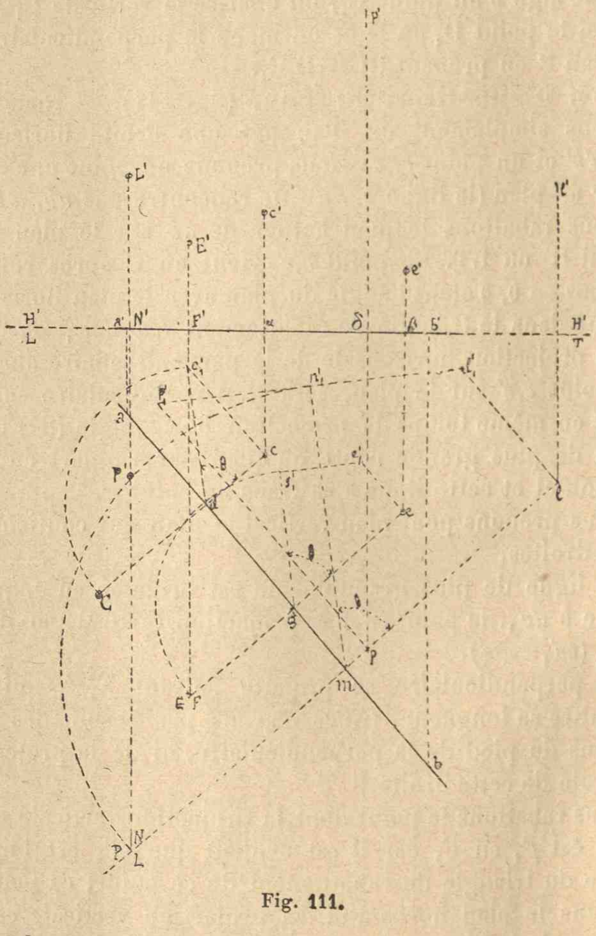


Fig. 111.

nous obtenons la projection verticale auxiliaire n'_1 du pied de la perpendiculaire abaissée du point L sur le plan, sur un plan vertical auxiliaire qui contient cette perpendiculaire, sans marquer les projections du point nous traçons $n'_1l'_1$ perpendiculaire à la ligne de plus grande pente projetée en

mn'_1 ; n'_1l_1 étant égal en longueur à N'L' nous avons en l'_1 la projection verticale auxiliaire du point cherché, l est sa projection horizontale, la cote est ll'_1 et nous la portons en $\gamma l'$.

Il faut bien se rendre compte du sens de la perpendiculaire par rapport au plan. Ainsi, si nous avions un point P projeté au même point que L sur le plan rabattu, par conséquent, sur la même verticale, mais situé au-dessous du plan, de manière que sa cote soit égale à P'N', les mêmes tracés nous donneraient les points p'_1 ($p'_1n'_1$=P'N'), projection verticale auxiliaire, p projection horizontale, p' projection verticale ($p'\delta = pp'_1$).

GÉOMÉTRIE COTÉE.

147. Construction du rabattement d'un plan avec un seul plan de projection (fig. 100 *bis*). — Le plan est défini par une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal; cette ligne est donnée par sa projection horizontale *ab*, sa trace *a* sur un plan horizontal, à partir duquel on compte les cotes et son angle avec le plan horizontal.

Un point du plan a sa projection horizontale au point C.

On propose de rabattre ce plan sur le plan horizontal passant par le point *a* et de construire le rabattement du point *c*.

Ce point décrira autour de l'horizontale *ad* perpendiculaire à *ab* un cercle situé dans un plan vertical et projeté sur la droite *cd* parallèle à *ab*. Nous prenons ce plan pour plan vertical auxiliaire.

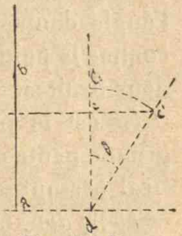


Fig. 100 *bis*.

La ligne de plus grande pente du plan qui a pour projection horizontale *cd* se projette suivant *dc'* faisant avec *dc* un angle θ égal à l'angle donné pour la ligne *ab; cc'* est la cote du point C, dcc'_1 est le triangle de rabattement, et si l'on fait tourner le plan d'un angle aigu égal à θ, le point se rabat en C.

Nous ne répéterons pas la construction du relèvement facile à faire en suivant les mêmes tracés en ordre inverse.

148. Construire l'angle de deux droites et la bissectrice de cet angle (fig. 100 *ter*). — On donne un point B par sa projection horizontale b et sa cote. Par ce point passent deux droites dont les projections horizontales sont ba et bc, elles sont déterminées par les angles qu'elles font avec le plan horizontal. Construire l'angle de ces deux droites et la bissectrice de cet angle.

Nous cherchons d'abord une horizontale du plan des deux droites en prenant sur les deux droites des points à cote égale, et en particulier les points à cote nulle. Nous employons comme plan vertical le plan projetant la droite ab, la projection verticale de cette droite sera $b'a$ obtenue en prenant bb' égal à la cote du point B, et en traçant $b'a$ faisant avec ba l'angle donné θ que doit faire la droite avec le plan horizontal; le point a est la trace de la droite sur le plan horizontal à partir duquel on a compté la cote du point B.

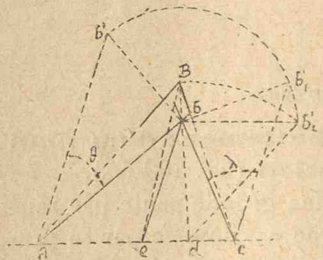


Fig. 100 *ter*.

Nous employons un second plan vertical passant par bc; nous prenons $bb'_1 = bb'$ et nous traçons b'_1c faisant avec cb l'angle donné λ; c est le point de cette droite à cote nulle comme le point a, ac est donc une horizontale du plan des deux droites.

bd est la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente du plan; nous prenons un troisième plan vertical passant par bd; le point B se projette en b'_2 ($bb'_2 = bb'$ $= bb'_1$); dbb_2 est le triangle de rabattement du point B que nous rabattons en B.

Comme les points a et c sont dans le plan horizontal et n'ont pas changé de position, l'angle est rabattu en a Bc.

Nous traçons la bissectrice Be de cet angle; dans le relèvement le point e reste fixe, le point B se relève en b; la projection de la bissectrice est be.

149. Construire l'angle de deux plans (fig. 100

quater). — Les deux plans sont définis chacun par une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal. La ligne AB déterminée par sa projection horizontale ab, sur laquelle le point a est la projection du point à cote nulle et son angle θ avec le plan horizontal définit le plan P. La ligne CD déterminée par sa projection horizontale cd sur laquelle le point c est le point à cote nulle et son angle λ avec le plan horizontal définit le plan Q.

Nous construisons d'abord l'intersection des deux plans. Les horizontales à cote nulle qui passent par les points a et c se coupent au point e; en nous aidant des plans verticaux auxiliaires passant par chacune des deux droites qui sont rabattues en ab' faisant avec ab l'angle θ et en cd' faisant avec cd l'angle λ nous construisons deux horizontales $f'f$ et $g'g$ à la même cote δ (36); un second point de l'intersection est projeté en m; l'intersection est projetée suivant em. Les traces horizontales des deux plans sont ea (trace P) et ec (trace Q).

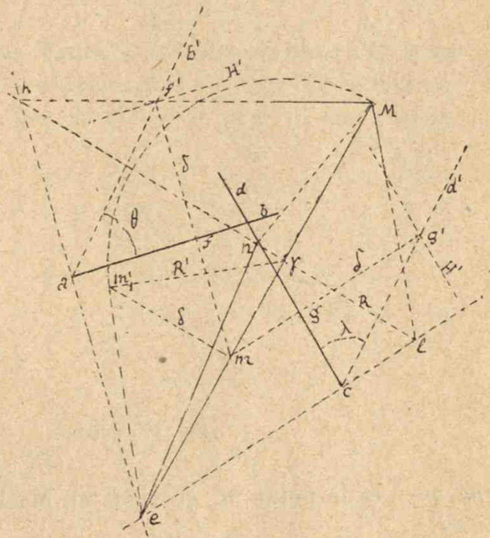


Fig. 100 *quater*.

Appliquons d'abord la première méthode (136) :

Nous prenons pour troisième plan vertical auxiliaire le plan projetant l'intersection EM, la projection verticale de cette droite est em'_1 ($mm'_1 = \delta$, cote du point M) nous traçons le plan R'γR perpendiculaire à la droite em, em'_1, sa trace horizontale R coupe les traces P et Q aux points k et l.

Les droites d'intersection du plan R avec les plans P et Q sont projetés en km et lm. (Il n'est pas nécessaire de tracer ces lignes.) Nous rabattons le plan R sur le plan horizontal, le triangle de rabattement du point M est tout construit en

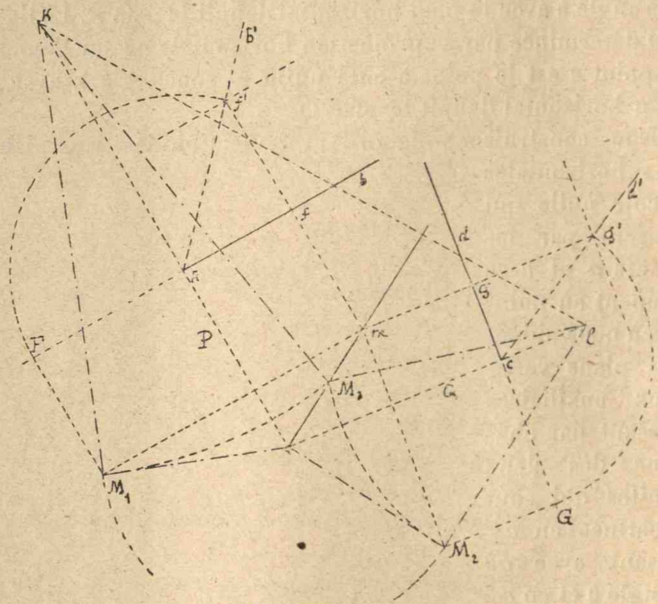


Fig. 100 *quinto*.

$m'_1 m\gamma$; et le point m, m' vient en M; l'angle rabattu est kMl.

Nous traçons la bissectrice de cet angle Mn; cette bissectrice relevée en mn détermine avec l'intersection em le plan bissecteur cherché et dont la trace est ne. Il serait facile d'obtenir une ligne de plus grande pente de ce plan bissecteur.

Si l'on voulait appliquer la seconde méthode (138), on construirait comme nous venons de le faire (fig. 100 *quinto*) l'intersection des deux plans projetés en em.

On rabattra le plan P autour de sa trace horizontale P ; le point f, f' sera rabattu en F, l'horizontale projetée en fm sera rabattue en FM_1 et le point M en M_1. L'intersection sera rabattue en eM_1. On rabattra de même le plan Q autour de sa trace horizontale Q. Des tracés identiques donneront le point M_2 ; l'intersection sera rabattue en eM_2. La perpendiculaire à l'intersection dans le plan P sera rabattue en M_1k, et le relèvera en km (inutile à tracer). La perpendiculaire à l'intersection dans le plan Q sera rabattue en M_2l et se relèvera en lm (inutile à tracer) ; l'angle de ces deux perpendiculaires sera l'angle des deux plans, et on le construira en construisant la vraie grandeur du triangle dont les trois cotés sont lk, kM_1, lM_2, le sommet vient en M_3, $kM_3\,l$ est l'angle cherché.

150. **Construire l'angle d'une droite et d'un plan.** — L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan. Il faut projeter

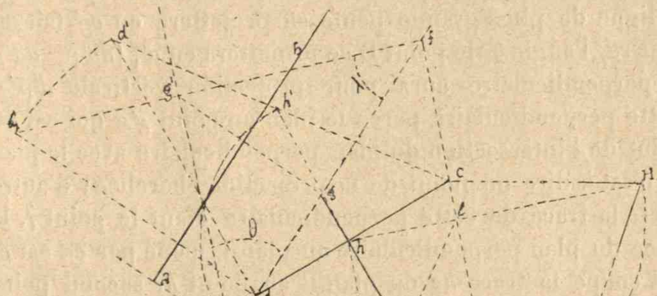


Fig. 100 *sexto*.

la droite sur le plan et pour cela il faut mener par la droite un plan perpendiculaire au plan. — Nous avons déjà expliqué cette construction (§ 91, fig. 77). Nous allons la reprendre pour la compléter par la détermination de l'angle cherché :

La ligne projetée en ab (fig. 100 *sexto*), (point a à cote nulle) et dont on donne l'angle θ avec le plan horizontal, définit le plan P. La ligne CD est définie par sa projection horizontale *cd* (le point *c* à cote nulle) et l'angle λ avec le plan horizontal. Nous choisissons sur la droite le point projeté en *d*, nous cherchons quelle est la cote de ce point en prenant comme plan vertical le plan projetant CD; la projection verticale est cd' faisant avec *cd* l'angle λ, et la cote du point D est dd'.

Par ce point nous menons une perpendiculaire au plan P; la projection horizontale de cette perpendiculaire est *df* parallèle à *ab*. Considérons la ligne de plus grande pente du plan ayant même projection horizontale que la perpendiculaire, sa trace est le point *e* sur la trace horizontale *ae* du plan P. Prenons pour plan vertical le plan contenant cette ligne de plus grande pente et la perpendiculaire cherchée : la ligne de plus grande pente se projettera en eg' faisant avec *edf* l'angle θ, le point D se projettera en d'_1 ($dd'_1 = dd'$), la perpendiculaire aura pour projection verticale $d'_1g'f$ Cette perpendiculaire perce le plan au point $g'g$ qui est un point de l'intersection du plan perpendiculaire avec le plan P, c'est-à-dire un point de la projection cherchée; d'autre part, la trace de cette perpendiculaire étant le point *f*, la trace du plan perpendiculaire au plan P mené par *cd* est *cf* qui coupe la trace *ae* du plan P au point *k*, second point de la projection cherchée; cette projection de la droite sur le plan P est projetée en *gk*, coupant *cd* au point *h* qui est la projection du point de rencontre de CD avec le plan. L'angle demandé est projeté suivant *khc*, nous le rabattons autour de l'horizontale *ck*. Pour cela nous commençons par chercher la cote du point H qui est le sommet de l'angle. Dans le premier plan vertical projetant CD, nous trouvons cette cote en hh'; nous construisons en hh'_1l ($hh'_1 = hh'$) le triangle de rabattement du point H autour de l'horizontale *ck*, et nous rabattons le point en H; l'angle cherché est *c*H*k*.

151. **Exemples.** — 1° On donne la trace horizontale d'un plan, les projections d'un point et la distance de ce point au plan, déterminer l'autre trace du plan.

2° Trouver la trace verticale d'un plan dont la trace horizontale est donnée, connaissant l'angle que forment ces deux traces dans l'espace.

3° Construire un plan, connaissant une droite de profil de ce plan et l'angle que ses deux traces font dans l'espace.

4° Étant donnée une droite et un point extérieur, trouver sur la droite un point situé à une distance connue du point donné.

5° Étant donnée une droite et un point extérieur, mener par le point une droite qui rencontre la droite donnée en faisant avec elle un angle donné.

6° Par un point pris dans un plan, mener aux traces de ce plan des droites de longueur donnée en faisant avec ces traces des angles donnés.

7° Par une droite donnée dans un plan, mener un plan faisant avec le plan donné des angles donnés.

8° Étant données les traces horizontales de deux plans P et Q faisant entre eux un angle ω et la projection horizontale de leur intersection, déterminer ces deux plans.

9° Déterminer la bissectrice de l'angle de deux droites sans construire l'angle.

10° Déterminer le plan bissecteur de l'angle de deux plans sans construire l'angle.

11° Construire l'angle d'un plan avec une verticale.

12° Construire les plans bissecteurs des angles que fait un plan avec les plans de projection.

13° Une horizontale fait avec le plan vertical, un angle de 45°, une ligne de front fait avec le plan horizontal, un angle de 45°. Quel est l'angle des deux droites ?

14° Déterminer l'angle de la ligne de terre avec un plan.

15° Déterminer l'angle d'une droite avec le second plan bissecteur.

16° Déterminer l'angle d'un plan avec le second plan bissecteur.

17° Déterminer la trace verticale d'un plan connaissant la trace horizontale et l'angle de ce plan avec la ligne de terre.

18° Déterminer un plan, connaissant sa trace horizontale et les angles qu'il fait, avec les deux plans de projection.

19° Déterminer les points équidistants des 3 faces du trièdre formé par les deux plans de projection et un plan quelconque, trouver sur chaque face du trièdre le lieu géométrique des projections de ces points équidistants.

20° Trouver une droite qui s'appuie sur deux droites données, parallèle à un plan, et faisant avec le plan horizontal un angle donné.

21° Mener par un point donné, un plan dont l'angle des traces est donné et qui fasse des angles égaux avec les deux plans de projection.

GÉOMÉTRIE COTÉE

Un tétraèdre est défini par sa base qui est un triangle horizontal, par la projection horizontale de son sommet et la cote de ce sommet, par rapport au plan de la base : on demande

22° L'angle de deux arêtes.

23° L'angle dièdre de deux faces et leur plan bissecteur.

24° L'angle d'une arête avec la face adjacente.

POLYÈDRES

152. Un polyèdre est un corps solide limité par des faces planes.

Une surface n'existe que comme limite d'un corps solide, nous n'admettons pas la conception de surfaces sans épaisseur, les corps solides que nous considérons sont toujours pleins et opaques.

Quand on représente un polyèdre par ses deux projections, il y a, en général, sur chaque projection des arêtes vues et des arêtes cachées. Les considérations suivantes permettent de les déterminer.

153. 1° *Visibilité d'un point par rapport à un plan limitant un corps solide* (fig. 112). Figurons l'angle formé par les 2 plans de projection V et H; un plan P limitant un corps solide qui est placé du côté de ce plan indiqué par les hachures et un point A. S'il s'agit de la projection horizontale, le point A est regardé par un observateur placé à l'infini sur la perpendiculaire au plan horizontal (2),

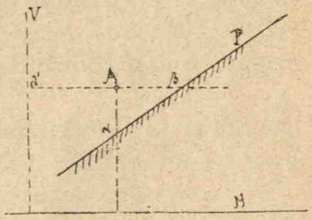


Fig. 112.

la projection est a, le rayon visuel Aa est vertical. Ce rayon perce le plan au point α, donc l'observateur voit d'abord le point A, plus loin sur le même rayon est le point α, le point A sera *vu* sur la projection horizontale. Ainsi on mènera par le point donné une verticale, on construira le point de rencontre de cette verticale avec le plan. Si le point donné a une cote plus grande que la cote du point du plan, la projection horizontale du point sera *vue*. Si le point était en A_1, la cote étant inférieure à la cote du point du plan situé sur la même verticale, la projection horizontale du point serait *cachée*.

On fera le même tracé pour la projection verticale, le spectateur étant placé à l'infini sur une perpendiculaire au plan vertical, le rayon visuel perpendiculaire au plan vertical sera Aa'; il coupe le plan P au point β. Situé en avant du point A, c'est-à-dire ayant un éloignement plus grand que l'éloignement du point A, la projection verticale a' sera *cachée*. Nous pouvons traduire ces constructions par une épure (fig. 113). Le plan est défini par les deux droites ab, $a'b'$ et ac, $a'c'$. Ce plan limite un solide placé au-dessous de lui, c'est-à-dire que sur une même verticale le point du plan est au-dessus de tous les points du solide; prenons un point d, d' qui n'est pas dans le plan, menons la verticale de ce point et cherchons son point de rencontre avec le plan, c'est le point du plan dont d est la projection horizontale (37).

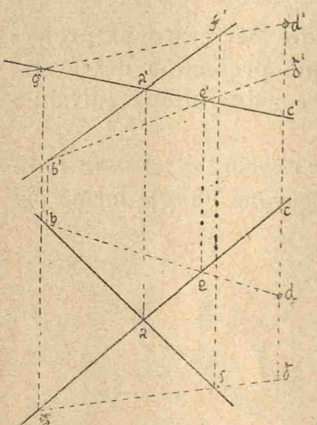


Fig. 113.

Nous imaginons dans le plan une droite dont la projection horizontale passe par le point d; soit deb cette projection horizontale, la droite cherchée aura pour projection verticale $b'e'$ coupant la verticale du point d en δ'.

La cote du point d, d' comptée à partir de d' est plus grande que la cote du point du plan comptée à partir de δ', la projection horizontale *d est vue*.

Menons par le point d, d' la droite *de bout* projetée verticalement en d' et cherchons le point de rencontre de cette ligne *de bout* avec le plan, c'est le point du plan dont la projection verticale est d'; nous construisons la droite du plan dont la projection verticale est $d'f'g'$ et dont la projection horizontale est $fg\delta$; le point cherché du plan a sa projection horizontale en δ, donc l'éloignement de ce point est plus grand que l'éloignement du point d, d'. La projection verticale d' est *cachée*.

154. 2° Deux droites ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, supposées matérielles, sont données par leurs projections. Examiner pour chaque projection quelle est celle des deux droites qui est placée soit en avant, soit au-dessus de l'autre (fig. 114).

Les deux droites données ont pour projection ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$; elles ne se coupent pas ; car les points de rencontre des projections ne sont pas sur une projetante. Les projections horizontales se croisent au point e, qui est la projection horizontale de deux points dont les projections verticales sont e' et e'_1 ; la cote du point projeté en e' et qui appartient à la droite AB est plus grande que la cote du point de la droite CD projetée en e'_1 c'est la droite AB qui est au-dessus de la droite CD.

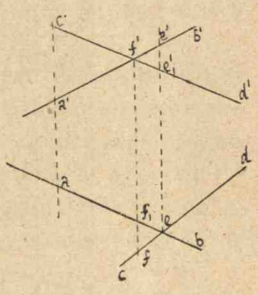


Fig. 114.

Les projections verticales se croisent au point f' projection verticale de deux points dont les projections horizontales sont f f_1, le point de la droite CD projeté en f a un éloignement plus grand que le point de la droite AB projeté en f_1, la droite CD est en avant de la droite AB par rapport au plan vertical.

155. **Application à un octaèdre** (fig. 115). — Nous allons constituer un octaèdre, solide compris sous 8 faces planes triangulaires de la manière suivante :

Nous déterminons d'abord un quadrilatère plan en prenant deux droites qui se coupent et dont les projections sont ac, $a'c'$ et bd, $b'd'$; les quatre sommets du quadrilatère sont a,a' — b,b' — c,c' — d,d'.

Nous menons par le point de rencontre des deux droites une ligne ef, $e'f'$ par laquelle nous prenons les deux points e,e' — f,f'. Nous joignons chacun de ces points aux quatre sommets du quadrilatère. Nous formons ainsi huit plans. EAB, EBC, ECD, EDA ; FAB, FBC, FCD, FDA.

Pour ne pas compliquer la figure, nous n'avons pas tracé les deux lignes AC et BD qui ne serviraient plus dans le reste de l'épure, pas plus que la ligne EF.

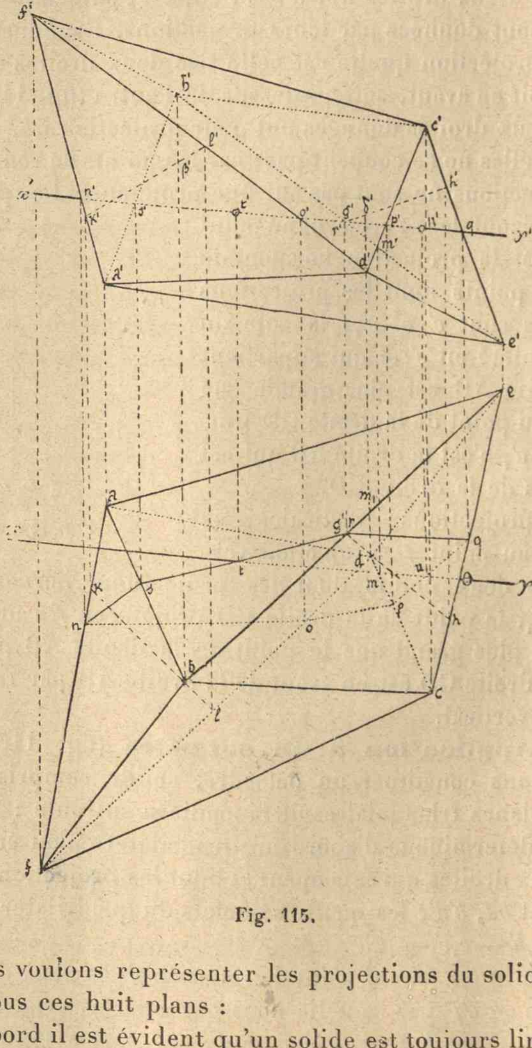


Fig. 115.

Nous voulons représenter les projections du solide compris sous ces huit plans :

D'abord il est évident qu'un solide est toujours limité par des lignes vues qui forment son contour, nous pouvons sur chaque projection indiquer par des traits pleins les contours du solide; ainsi sur la projection horizontale le contour est *faecf*; sur la projection verticale, le contour est $f'a'e'c'f'$.

Considérons pour la projection horizontale le sommet projeté en *d*; il se projette à l'intérieur de la projection de la face BEC, et cherchons s'il est au-dessus ou au-dessous de cette face; suivant la construction indiquée (128), nous menons la verticale de ce point et nous cherchons le point de rencontre de cette verticale avec le plan; pour cela, nous traçons dans le plan la droite dont la projection horizontale est *gdh*, la projection verticale est $g'h'$; le point du plan projeté en *d* a sa projection verticale en δ'; ce point a une cote supérieure à la cote du point *d*, d'.

La projection horizontale *d* est *cachée*. Donc les lignes qui partent de ce point D auront leurs projections horizontales cachées; ainsi la ligne projetée en *de* ne coupe le plan de la face BCE qu'au point E; c'est seulement à partir de ce point que la droite DE qui est en-dessous de la face au point D traverserait la face pour passer au-dessus et devenir vue; *de* est *cachée* et de même *dc*, *da*, *df*.

Considérons le sommet projeté en *b* à l'intérieur de la face AFD; faisons la même recherche au moyen de la droite *kl*, $k'l'$; le point de la face AFD projeté en *b* a sa projection verticale en β' dont la cote est plus faible que la cote du point B, la projection horizontale *b* est vue, et les lignes qui partent de ce point B ont leurs projections horizontales *vues*.

(On a fait la convention de représenter les lignes cachées par une suite de points ronds noirs égaux et également espacés.)

Nous ferons la même recherche pour la projection verticale. Mais nous pouvons aussi considérer le point m' où se croisent les projections verticales des deux arêtes projetées en $c'd'$ et $b'e'$. Ce point est la projection verticale de deux points dont les projections horizontales sont m et m_1; donc la droite CD est par rapport au plan vertical en avant de la droite BE, et comme la droite BE aboutit à un point E du plan CDE, du moment où elle a un point projeté en m' derrière le plan elle y est tout entière; $d'c'$ *est vu*, $b'e'$ *est* *caché*. Dès lors toutes les lignes partant du point D ont leurs projections verticales *vues*; toutes les lignes partant du point B dont la projection verticale est cachée ont leurs projections verticales *cachées*.

156. **Prisme.** — Considérons en particulier le cas d'un prisme dont la base est dans un plan P′ perpendiculaire au plan vertical (fig. 116). La base a pour projection horizontale *abdc*. Le contour extérieur est formé par les deux côtés projetés en *ab*, *bd*, et par les projections des arêtes partant des points projetés en *d* et *a*.

Le point *b′* est la projection verticale de deux points dont les projections horizontales sont *b* et β et $b'b'_1$ est en même temps la projection de l'arête du point B et d'une parallèle menée par le point β*b′* et dont la projection horizontale est $\beta\beta_1$; tous les points de cette parallèle ont des éloignements plus grands que les points de l'arête B, elle est en avant de B, la projection verticale de l'arête B est *cachée*.

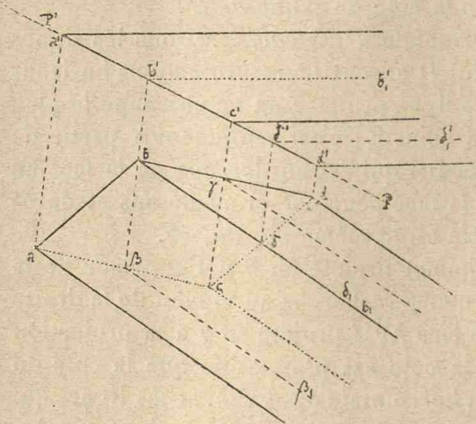


Fig. 116.

On verra de même que la projection verticale de l'arête C est *vue*.

Quant à la projection horizontale, considérons l'arête B dont la projection horizontale est bb_1; bb_1 est la projection horizontale d'une droite située dans la face CD et dont les projections sont $\delta\delta_1$ et $\delta'\delta'_1$, l'arête B est au-dessus de cette droite, sa projection horizontale est *vue*.

Du reste, il est évident que cette arête est au-dessus du plan P′, donc au-dessus de CD; donc la projection horizontale de CD *doit être cachée* Le point projeté en *c* est *caché*, donc la projection horizontale de l'arête qui passe par ce point est *cachée*.

157. **Pyramide** (fig. 117). — La base de la pyramide est le quadrilatère situé dans le plan P′ perpendiculaire au plan vertical projeté suivant *badc*, *b′a′d′c′*.

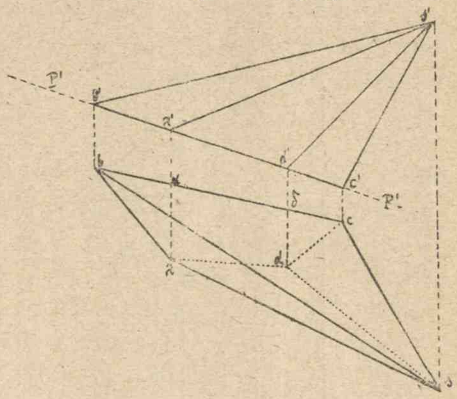


Fig. 117.

Après avoir tracé les contours *vus*, nous voyons que les projections verticales des arêtes SA et SD *sont vues* parce que ces arêtes sont en avant par rapport aux droites du plan SBC projetées horizontalement en Sα et Sδ et qui ont les mêmes projections verticales que SA et SD.

Par la même raison que dans le prisme, la projection horizontale de l'arête SB *est vue*, et la projection horizontale de l'arête SD *est cachée*

158. **Construire les points de rencontre d'une droite et d'un polyèdre** (fig. 115). Nous considérons le polyèdre dont nous avons précédemment (155) tracé les projections et la droite dont les projections sont xy et $x'y'$.

Nous allons chercher les points où cette droite traverse les faces du polyèdre en appliquant la construction de l'intersection d'une droite avec un plan défini par deux droites (58). Évidemment nous ne nous occuperons que des faces dont les deux projections sont traversées par les projections de la droite. Prenons la face ADF, nous considérons le plan de cette face comme déterminée par les deux droites AF et DF. Nous prenons comme plan auxiliaire le plan projetant verticalement la droite et dont tous les points sont projetés sur $x'y'$. La droite $f'a'$, fa perce ce plan au point n',n, la droite $f'd'$, fd perce ce plan au point o', o, l'intersection du plan auxiliaire avec le plan donné ADF a pour projection horizontale *no* qui ne coupe pas *xy* : la droite ne coupe pas la face.

Prenons la face adjacente FDC déterminée par les deux

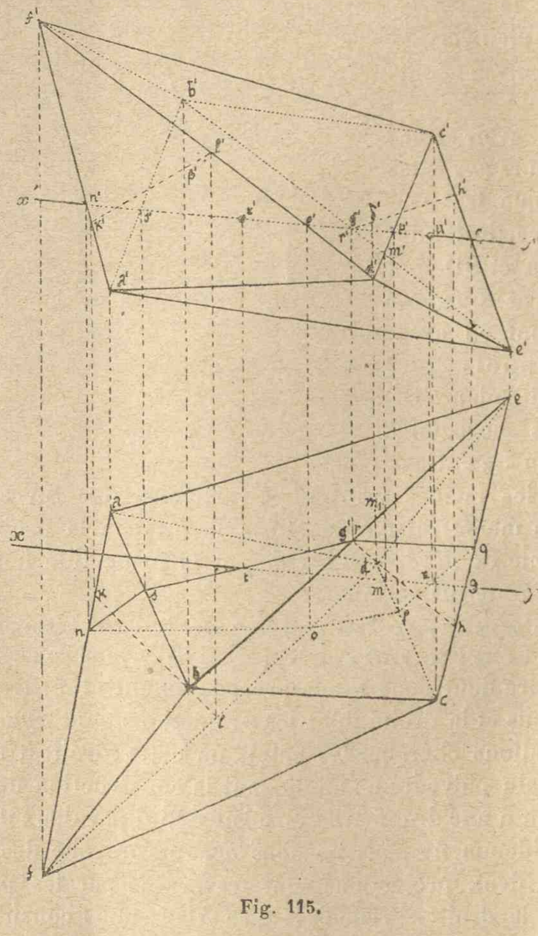


Fig. 115.

droites DF et DC. Le plan auxiliaire considéré coupe FD au point o',o déjà obtenu et DC au point p',p ; l'intersection du plan auxiliaire avec le plan FDC se projette suivant *op* qui ne rencontre pas *xy* : la droite ne coupe pas la face. Prenons la face adjacente DCE, déterminée par les deux droites DC et CE, le même plan auxiliaire donne une intersection projetée en pq qui coupe xy au point u qui est la projection horizontale d'un des points cherchés et dont la projection verticale est u'. Prenons la face adjacente CEB déterminée par CE et EB, le même plan auxiliaire la coupe suivant la droite projetée en qr qui ne rencontre pas xy. La droite ne coupe pas la face. Prenons la face adjacente BEA déterminée par les deux droites BE et BA. Le même plan auxiliaire la coupe suivant la droite dont la projection horizontale est rs qui coupe xy au point t, projection horizontale du second point de rencontre de la droite et du polyèdre et dont la projection verticale est t'. Prenons enfin la face adjacente BAF déterminée par les deux droites BA et AF, le même plan auxiliaire la coupe suivant la droite dont la projection horizontale est sn qui ne rencontre pas xy : la droite ne coupe pas cette face.

En résumé nous avons construit l'intersection du polyèdre par le plan qui projette verticalement la droite donnée. Ce plan a coupé le polyèdre suivant un polygone dont la projection horizontale est $nopqrsn$; la droite rencontre ce polygone en deux points projetés en t, t' et en u, u' qui sont les points cherchés.

159. **Visibilité de la droite.** — Supposons cette droite matérielle et cherchons à représenter ses projections. Il est évident que si la droite perce le polyèdre en un point situé dans une face vue, la droite sera vue jusqu'à ce point, tandis que si la droite perce le polyèdre en un point situé dans une face cachée, le polyèdre se projette sur la droite et la cache. La partie intérieure au solide sera toujours cachée

Ainsi prenons la projection horizontale : le premier point d'intersection en partant du point xx' se projette au point t qui est dans la face ABE dont la projection horizontale est vue; la projection de la droite *est vue* jusqu'au point t; la partie comprise entre t et u, projection de la portion de la droite intérieure au polyèdre *est cachée*. Mais le second point d'intersection u, u' se trouve dans la face CDE dont la projection horizontale est cachée; la projection se trouve *cachée* jusqu'au point θ où elle cesse d'être recouverte par la projection du polyèdre.

Pour la projection verticale, nous ferons une recherche analogue, la face ABE qui contient le point *T* a sa projection verticale cachée, car les deux côtés projetés en $a'b'$ et $b'e'$ sont cachés, *la projection verticale de la droite cesse d'être vue* à partir du point n' ; le second point U est dans la face DCE dont la projection verticale est vue, car les trois côtés sont vus ; la projection verticale de la droite *est vue* à partir du point u'.

160. **Cas particulier de l'intersection d'une droite et d'une pyramide.** — Nous allons expliquer la construction sur une figure dans l'espace, sans faire l'épure qui est très facile à réaliser (fig. 118). Nous représentons une pyramide SABCD dont la base ABCD est dans un plan P et une droite EF. Nous allons employer comme plan auxiliaire un plan passant par la droite EF et par le sommet de la pyramide ; ce plan coupera les faces de la pyramide suivant des droites passant par le sommet; pour obtenir ces droites nous cherchons l'intersection du plan auxiliaire avec le plan de la base : la droite EF perce ce plan au point E, par exemple, il nous faut une seconde droite de ce plan auxiliaire ; nous pouvons joindre le point S à un point quelconque de la droite ou mener par le sommet S une parallèle SG à la droite ; cette parallèle SG perce le plan P au point G. L'intersection du plan auxiliaire avec le plan de la base est GE, qui rencontre la base aux points H et K qui sont bien deux points de l'intersection du plan auxiliaire avec la pyramide; en joignant ces deux points au sommet S nous aurons les droites auxi-

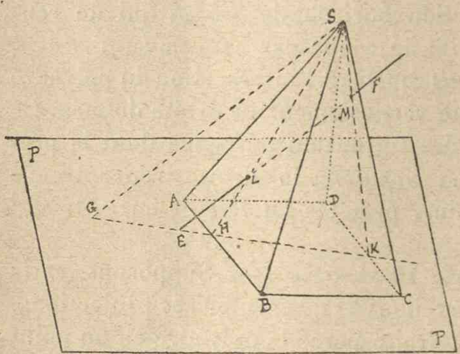


Fig. 118.

liaires SH et SK suivant lesquelles le plan auxiliaire coupe les faces de la pyramide, et elles rencontrent la ligne EF aux points cherchés L et M.

Nous avons encore figuré, suivant les règles que nous avions appliquées dans le cas précédent, les parties vues et cachées de la droite.

Remarque : Cette méthode beaucoup plus simple que la méthode générale (158) est la seule applicable à l'intersection d'une droite avec un cône. Un cône est une pyramide qui a pour base une courbe ; le même tracé s'appliquera absolument ; tandis qu'on ne pourrait employer un plan projetant de la droite, ce plan couperait le cône suivant une courbe qu'il faudrait construire par points et dont les points de rencontre avec la droite ne pourraient pas, en général, être obtenus géométriquement et exactement.

161. Projections cylindriques et coniques. — Imaginons un plan quelconque passant par la droite, plan projetant ou autre ; ce plan coupera la surface suivant un polygone ou une courbe selon que la surface sera une pyramide ou un cône, et nous devrons prendre les points de rencontre de la droite avec cette section. Si nous projetons sur un plan quelconque la droite et la section, le point de rencontre se projettera au point de rencontre des projections. Nous pouvons projeter une ligne sur un plan de plusieurs manières ;

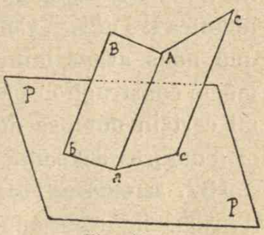


Fig. 119.

soit en menant par tous les points de la ligne des parallèles à une direction constante et en prenant les points de rencontre de toutes ces parallèles avec le plan (fig. 119) ; nous obtiendrons ainsi une projection prismatique ou cylindrique dont la projection orthogonale est un cas particulier.

Si la ligne ABC est supposée matérielle, ayant une épaisseur, si la direction constante est la direction de rayons lumineux parallèles comme les rayons solaires, la projection *abc sera l'ombre au soleil* de ABC.

Au contraire nous pouvons joindre tous les points de la ligne à un point fixe S et prendre les points de rencontre des droites ainsi obtenues avec le plan P (fig. 120). Nous obtiendrons ainsi une projection pyramidale ou conique de la ligne sur le plan P, et cette projection *abc sera l'ombre au flambeau* de la ligne ABC.

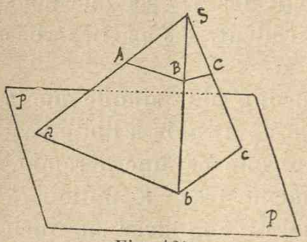


Fig. 120.

Dans une pyramide ou dans un cône, si l'on projette par des droites passant par le sommet des lignes tracées sur la surface, ces droites reproduiront la surface de la pyramide ou du cône, et la projection de la ligne sur le plan de la base *sera la base elle-même*. En menant un plan par la droite EF et le sommet, on construit un plan projetant la droite par des projetantes passant au point S. GE est la projection conique de la droite. Les points H et K sont les projections des points de rencontre de la droite avec une ligne quelconque obtenue en coupant la surface par un plan mené par la droite. Nous ramenons ces points sur la droite par les projetantes HS et KS. Cette manière d'expliquer la construction que nous avons faite (160) généralise la solution et cette même construction par projection conique se retrouve dans un certain nombre de questions d'intersection de surfaces et d'ombres au flambeau.

162. **Intersection d'une droite et d'un prisme.** — Nous figurons encore (fig. 121) un prisme ayant pour base dans le plan P le polygone ABCD et la droite EF.

Nous allons employer comme plan auxiliaire un plan passant par la droite et parallèle aux arêtes du prisme ; il coupera les faces du prisme suivant des parallèles aux arêtes. Nous déterminons ce plan en menant par le point F de la droite une parallèle FG aux arêtes du prisme. La droite EF perce le plan P au point E, la droite FG perce le plan P au point G ; EG est l'intersection du plan auxiliaire avec le plan de la base et rencontre la base aux points H et K qui appartiennent à l'intersection du plan et du prisme ; cette intersection se compose des deux parallèles aux arêtes HL et KM qui déterminent sur la droite les deux points cherchés M et N.

Nous avons encore figuré les parties vues et cachées de la droite.

Remarques : 1° Cette construction est une conséquence de la précédente; un prisme est une pyramide dont le sommet est à l'infini, nous déterminons un plan passant par la droite et le sommet de la pyramide en joignant un point de la droite au sommet à l'infini de la pyramide. Donc nous sommes conduits à mener par un point de la droite une parallèle aux arêtes du prisme.

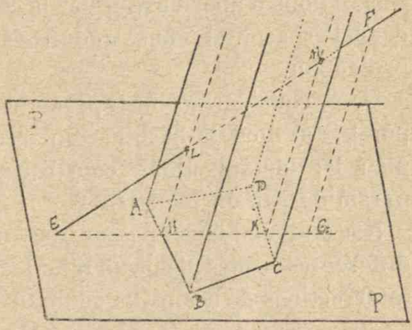


Fig. 121.

2° Cette construction est la seule applicable pour les raisons que nous avons données précédemment à la recherche des points d'intersection d'une droite et d'un cylindre qu'on peut regarder comme un prisme ayant pour base une courbe;

3° Nous pouvons expliquer cette construction comme une conséquence de la projection prismatique du cylindrique. La base serait la projection de la section du prisme par un plan passant par la droite, les projetantes étant parallèles aux arêtes du prisme, EG serait la projection de la droite faite de la même manière, H et K seraient les projections des points de rencontre cherchés qu'on ramènerait sur la droite par des projetantes parallèles aux arêtes.

163. Section plane d'un polyèdre quelconque. — On peut chercher les points où les arêtes du polyèdre percent le plan sécant, ces points sont les sommets du polygone intersection du polyèdre par ce plan; cette construction peut se faire directement ou bien on peut amener le plan sécant à être perpendiculaire à un plan de projection pour obtenir plus facilement ces points de rencontre.

On peut aussi construire les intersections des différentes faces du polyèdre avec le plan sécant.

Ces tracés peuvent être plus ou moins longs et difficiles, mais ne constituent pas des méthodes régulières comme celles qu'on peut employer lorsque le polyèdre est une pyramide ou un prisme.

164. Section plane d'une pyramide (fig. 122). — Nous allons d'abord expliquer la construction sur une figure dans l'espace, et nous traduirons ensuite cette figure en projection.

Nous considérons une pyramide dont le sommet est le point S et dont la base est un triangle ABC situé dans un plan P ; nous voulons construire l'intersection de cette pyramide par un plan Q.

Nous allons faire passer des plans auxiliaires par les différentes arêtes de la pyramide et nous construirons les intersections de ces plans auxiliaires avec le plan Q. Il faut

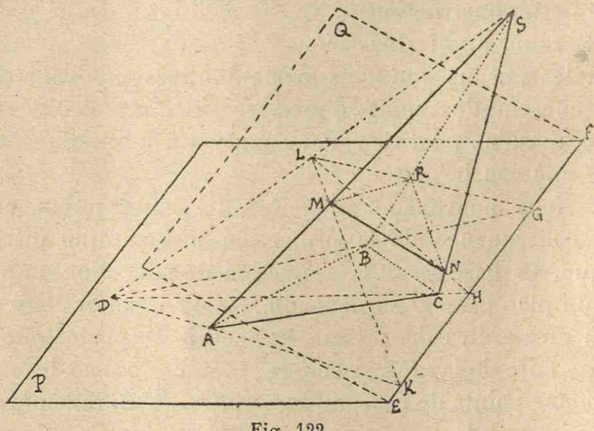


Fig. 122.

trois conditions pour déterminer un plan. Tous les plans auxiliaires passant par le sommet de la pyramide, puisqu'ils doivent contenir des arêtes, sont seulement assujettis à une condition commune. Ils peuvent occuper en tournant autour du sommet une infinité de positions indépendantes les unes des autres, et leur déplacement régulier n'est pas fixé, par suite la génération du polygone ou de la courbe d'intersection, s'il s'agit d'un cône, n'est pas définie; au contraire en faisant passer tous les plans par une même droite menée par le sommet, nous ne laissons plus qu'une condition arbitraire et les plans se déplaceront en tournant autour de la droite d'une manière continue, de manière à engendrer le polygone ou la courbe d'intersection.

Menons par le sommet S la droite SLD perçant le plan P au point D, le plan Q au point L; tous les plans passant par cette droite couperont le plan P suivant des lignes passant par le point D, le plan Q suivant des lignes passant par le point L et les intersections d'un même plan auxiliaire avec les plans P et Q se croiseront sur la ligne EF commune à ces 2 plans.

Ainsi, nous faisons passer un plan par la droite SLD et par l'arête SA. La trace de ce plan sur le plan P sera DAK, la trace de ce plan sur le plan Q sera LK rencontrant SA au point M.

Le plan auxiliaire passant par SB aura pour trace sur le plan P la ligne DBG, sur le plan Q la ligne GL qui coupe SB au point R.

Le plan auxiliaire passant par SC aura pour trace sur le plan P la ligne DCH, sur le plan Q la ligne HL qui coupe SC au point N.

Nous allons réaliser ce tracé dans une épure (fig. 123).

La pyramide a pour base dans le plan horizontal H le quadrilatère dont la projection est *abcd*, le sommet est le point ss'.

Le plan sécant est donné par les deux droites ef, $e'f'$ et eg, $e'g'$:

1° Nous construisons l'intersection de ce plan avec le plan de la base, c'est la droite $f'g'$, fg; 2° nous menons par s,s' une droite auxiliaire et pour éviter de construire son point de rencontre avec le plan sécant, nous la faisons passer par le point e,e' de ce plan; la droite auxiliaire a pour projections seh, $s'e'h'$. Sa trace sur le plan H de la base de la pyramide est le point $h'h$

Nous allons construire la projection horizontale de l'intersection :

Nous menons un plan auxiliaire par l'arête SA, sa trace sur le plan de la base se projette suivant *hak*, sa trace sur le plan sécant se projette suivant *ek* qui coupe la projection

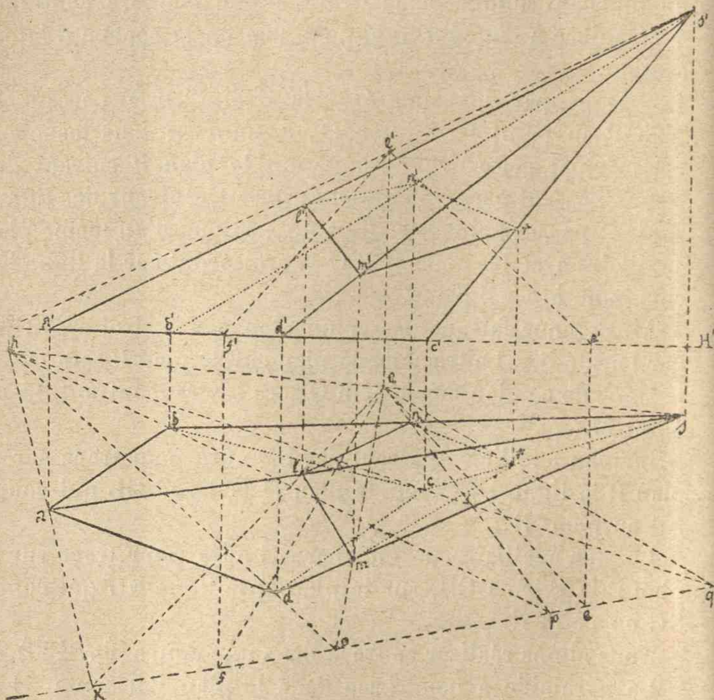


Fig. 123.

horizontale *sa* au point *l* qui est la projection horizontale du point où l'arête SA coupe le plan sécant.

Pour l'arête SB, la trace du plan auxiliaire sur le plan H de la base se projette suivant *hbp*, sa trace sur le plan sécant se projette suivant *pe* qui coupe *sb* au point *n* projection du point où SB perce le plan sécant.

Pour l'arête SC, les traces du plan auxiliaire sur les plans P et Q se projettent suivant *hcq* et *eq* qui rencontre *sc* au point *r*, projection horizontale du point où SC perce le plan sécant.

La même construction appliquée à l'arête SD fait tracer les deux lignes *hdo* et *eo* et fournit le point d'intersection projeté en *m*.

La projection horizontale de la section plane cherchée est *lmrn*.

Nous avons appliqué les remarques faites précédemment à la distinction entre les lignes vues et les lignes cachées.

Nous prenons les projections verticales des points projetés en *l*,*m*,*r*,*n* sur les projections verticales des arêtes et nous avons la projection verticale de la section plane en *l′m′*,*r′n′*.

165. **Épure.** — Cette méthode permet donc de construire entièrement la projection horizontale de l'intersection, sans employer la projection verticale autrement que pour obtenir les points *h* et *e*, et nous signalons tout de

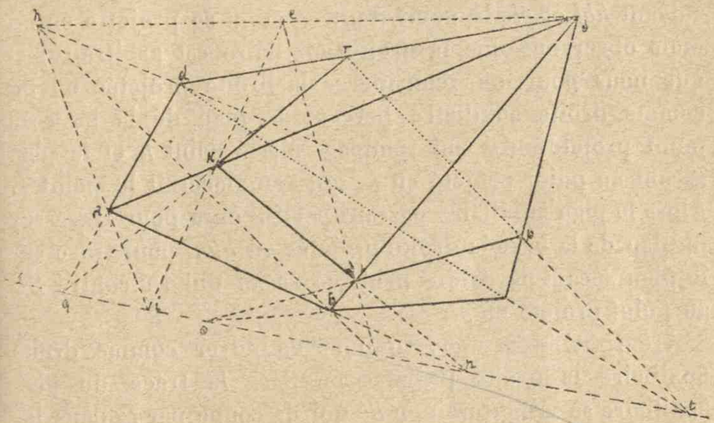


Fig. 124.

suite cette disposition aux lecteurs : *toutes les fois que l'on pourra construire entièrement une projection sans recourir à l'autre*, on ne devra pas manquer de le faire, l'exécution de l'épure est plus rapide, moins sujette à erreurs que si l'on passe continuellement d'une projection à l'autre.

Mais une difficulté peut se présenter dans l'exécution, la trace d'un plan auxiliaire sur le plan de la base, telle que *hc* peut ne pas rencontrer dans les limites de l'épure, la droite *fg* intersection du plan sécant avec le plan de la base.

Nous représentons une projection horizontale (fig. 124) en prenant pour base de la pyramide un polygone projeté en *abcd*, le sommet est projeté au point *s*, et nous figurons la projection horizontale de la droite auxiliaire *seh*, les points *e* et *h* étant obtenus comme précédemment, projections des points où la droite perce le plan sécant et le plan de la base.

Arête SA : la trace du plan auxiliaire sur le plan de la base se projette suivant *hai*, la trace du plan auxiliaire sur le plan sécant se projette suivant *ei*, le point *k* est la projection horizontale du point de rencontre de l'arête SA avec le plan sécant.

Arête SB : les traces du plan auxiliaire se projettent suivant *hbl* et *el*, le point d'intersection se projette en *m*. Mais observons que la droite auxiliaire est arbitraire, et que nous pourrions considérer la droite projetée en S*a* comme droite auxiliaire perçant le plan de la base au point projeté en *a* qui remplacerait le point *h* et le plan sécant au point projeté en *k*, qui remplacerait le point *e*. Alors le plan auxiliaire passant par SB aura pour trace sur le plan de la base la droite projetée en *abn*, pour trace sur le plan sécant la droite projetée en *kn* qui rencontre SB au point projeté en *m*.

Arête SC : Si nous voulions employer comme droite auxiliaire la droite projetée en S*eh*, la trace du plan auxiliaire se projetterait en *hc* qui ne coupe par *fg* dans les limites de l'épure; prenons SB comme droite auxiliaire. Sa trace sur le plan de la base se projette au point *b* (qui remplace le point *h*). Sa trace sur le plan sécant se projette en *m* (qui remplace le point *e*). Donc le plan auxiliaire passant par SC et SB a pour traces sur les deux plans les droites projetées en *cbo* et *omp* : *p* est la projection horizontale du point cherché.

Arête SD : Reprenons comme droite auxiliaire SA. La trace du plan auxiliaire sur le plan de la base se projette suivant *daq* (le point *a* remplaçant le point *h*), la trace sur le plan sécant le projette suivant *qkr* (le point *k* remplaçant le point *e*) : *r* est la projection horizontale du point cherché.

On voit donc qu'en employant cette méthode, et en changeant successivement la droite auxiliaire suivant la disposition des arêtes on pourra construire tous les points de la section plane en maintenant toujours les constructions dans le cadre de l'épure.

Remarque : Nous faisons observer que si nous prenons les plans de projection fixes, la ligne H représentant la ligne de terre (fig. 123), nous ne changerons rien aux tracés La projection verticale ne sert en effet que comme projection auxiliaire pour donner les cotes des points ss' et ee', et nous aurions défini le plan par les deux traces qu'il eût fallu prendre un point de ce plan tel que le point ee' pour y faire passer la droite auxiliaire.

On peut utiliser comme droite auxiliaire la perpendiculaire au plan vertical menée par le sommet et les plans auxiliaires seront les plans qui projettent les arêtes sur le plan vertical; il faudra chercher le point de rencontre de cette droite *de bout* menée par le sommet avec le plan sécant (fig. 125).

Ainsi : la base de la pyramide dans le plan H est le polygone dont un côté se projette suivant *ab;* le sommet est projeté en s, s', le plan sécant déterminé par les deux droites ef, $e'f'$, eg, $e'g'$ coupe le plan H suivant fg, $f'g'$. La droite de bout menée par s, s' perce le plan en un point projeté en σ et que nous avons obtenu en menant par S une ligne quelconque $s'k'h'$ que nous avons considérée comme la projection verticale d'une droite du plan et dont la projection horizontale est hk (38). Les traces de tous les plans auxiliaires sur le plan de la base sont des projetantes telles que $a'al$, $b'bp$; les traces de ces plans auxiliaires sur le plan sécant se projettent suivant $l\sigma$ et $p\sigma$ et nous obtenons sur les projections horizontales des arêtes SA et SB les points projetés en m et n.

Mais si nous voulions employer comme droite auxiliaire la verticale du point s, s', c'est-à-dire prendre comme plans auxiliaires les plans qui projettent horizontalement les arêtes, comme la projection horizontale du point de rencontre de la droite auxiliaire verticale avec le plan sécant serait confondue avec la projection horizontale du sommet s, nous ne pourrions effectuer la construction sans employer

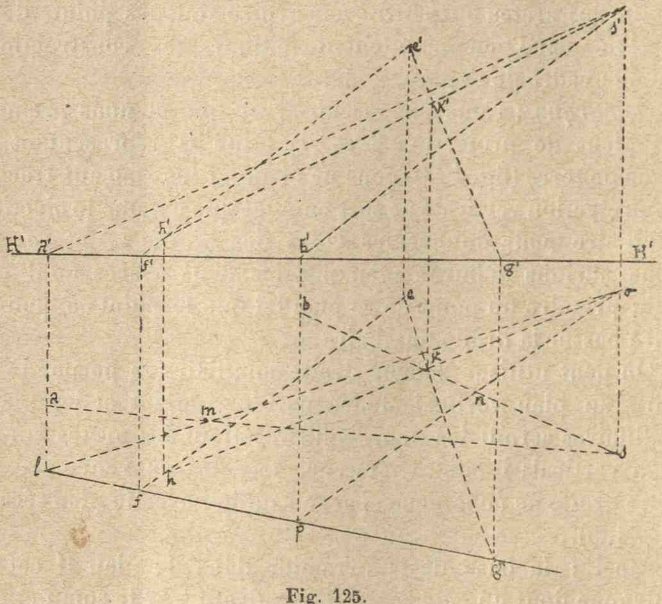


Fig. 125.

la projection verticale; les deux projections devraient être utilisées simultanément, ce qui est un inconvénient au point de vue de l'exécution de l'épure.

166. Figures homologiques. — Poncelet a appelé *Figures homologiques* les figures tracées sur un plan lorsqu'elles se correspondent point par point et droite par droite, de manière que les droites qui joignent les points correspondants convergent en un seul point nommé *Centre d'homologie* et que les droites correspondantes se croisent sur une même droite appelée *axe d'homologie*.

Si nous considérons dans l'espace une pyramide triangulaire coupée par un plan (fig. 126), la base est le triangle ABC situé dans le plan P, le sommet est le point S ; le plan SAB coupe le plan P suivant ABE et le plan Q suivant une droite telle que A′B′E ; le plan SAC coupe le plan P suivant la droite ACF et le plan Q suivant une droite A′C′F qui passe évidemment par A′ et par F et qui coupe SC au point C′ ; le plan SCB coupe le plan P suivant la droite CBD, et son intersection avec le plan Q doit évidemment passer par les 3 points C′B′D.

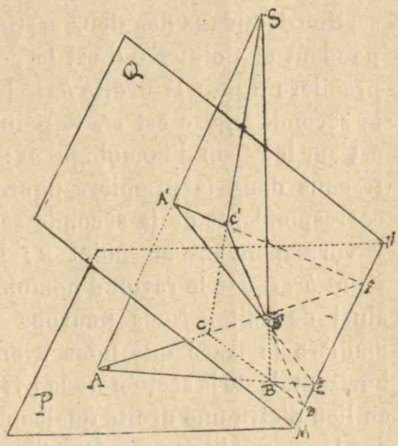


Fig. 126.

Si nous projetons la figure située dans ce plan Q sur la plan P, la projection du point A′ et le point A, la projection du point B′ et le point B, la projection du point C′ et le point C seront évidemment sur des droites concourant en la projection du point S ; les projections des lignes A′B′E, C′B′D, A′C′F passeront respectivement par les points EDF qui sont leur propre projection. Donc le triangle ABC et la projection du triangle $A'B'C_1$ sont deux figures homologiques. Le centre d'homologie est la projection du sommet de la pyramide. L'axe d'homologie est l'intersection des plans des deux triangles.

Nous pouvons donc étendre cette propriété à une pyramide quelconque qu'on décomposerait en pyramides triangulaires et dire que deux sections planes d'une pyramide se projetteront sur un plan suivant des figures homologiques.

Or, si l'on connaît une figure plane, le centre d'homologie, l'axe d'homologie et un point correspondant à un point donné de la figure, on peut construire la figure homologique.

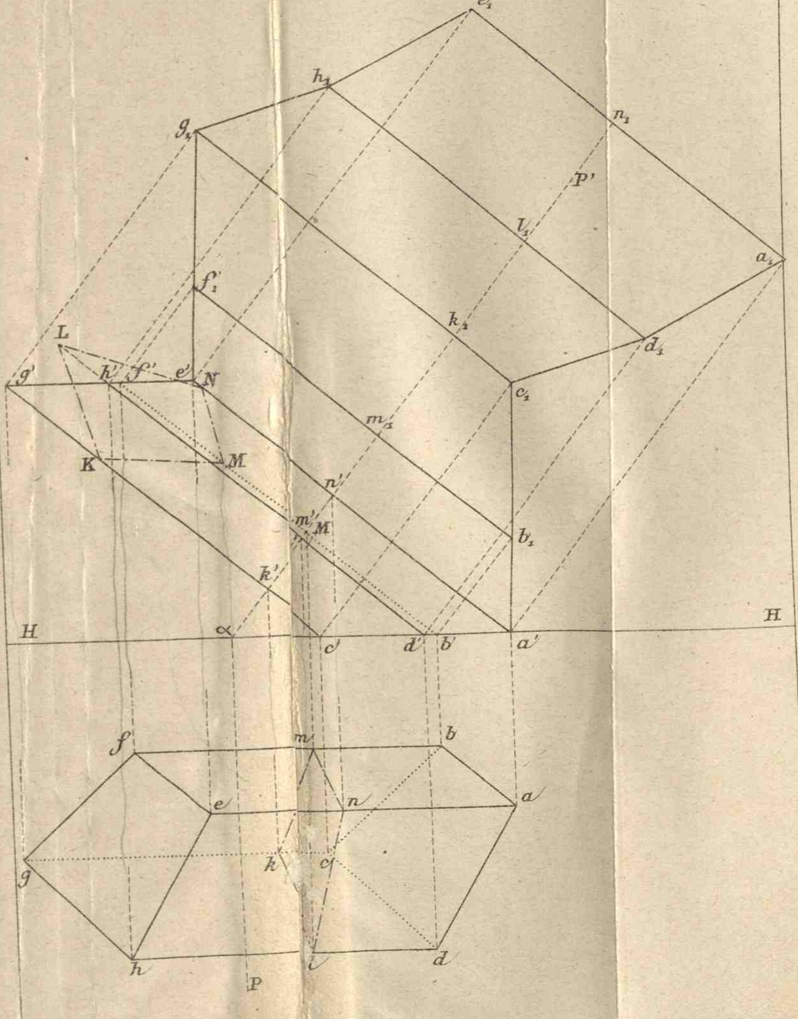
Ainsi reprenons la figure (124). Nous avons la figure plane *abçd*, et le point *h* appartenant à cette première figure, le centre d'homologie *s*, l'axe d'homologie *fg* intersection des plans des deux sections planes, le point correspondant au point *h* qui est le point *e*. Nous tracons dans la première figure la droite *hai*, la droite correspondante de la seconde figure est *ei*, le point correspondant au point *a* est sur le rayon d'homologie *as*; c'est donc le point *k*. Nous tracons dans la première figure la droite *abn*, la droite correspondante de la seconde sera *kn* passant par le point *k* correspondant au point *a;* le point correspondant au point *b* est sur le rayon d'homologie *bs*, c'est le point *m* et ainsi de suite. Nous pouvons donc expliquer de cette manière le tracé que nous avons fait pour la projection horizontale de la section de la pyramide. La droite auxiliaire au lieu d'être une droite quelconque passant par le sommet de la pyramide peut être une arête dont on construit d'abord directement le point de rencontre avec le plan. Nous avons préféré prendre une droite quelconque pour expliquer la construction afin que l'explication puisse s'appliquer au cas où l'on voudrait employer les plans qui projettent les arêtes comme plans auxiliaires.

167. **Centre d'homologie à l'infini.** — Le centre d'homologie peut être un point à une distance infinie dans une direction donnée. Tous les rayons d'homologie seront parallèles à cette direction.

Les points correspondants des deux figures seront toujours situés sur des droites parallèles, et les droites correspondantes des deux figures se couperont toujours sur l'axe d'homologie.

Nous pourrons appliquer la construction des figures homologiques à la projection de la section plane d'un prisme.

168. **Section plane d'un prisme.** — Un prisme est défini par la base ABCD dans le plan P (fig. 127) et les arêtes; on veut construire son intersection avec un plan Q. L'intersection des deux plans P et Q est la droite EF. Nous devons faire passer des plans auxiliaires par les différentes arêtes du prisme, nous les assujétirons à passer par une


e_1
h_1
n_1
g_1
P'
l_1
a_1
f'_1
k_1
L
d_1
g'
h'
f'
e'
N
c_1
m_1
K
M
n'
m'
M
b_1
k'
H
H
α
c'
d'
b'
a'
f
m
b
e
n
a
k
c
g
h
i
d
P

même droite parallèle aux arêtes et quelconque (en principe) soit GH. Le motif qui justifie l'emploi d'une droite auxiliaire par laquelle on fait passer les plans est celui que nous avons exposé à propos de la section plane de la pyramide. Cette droite auxiliaire coupe le plan P au point H, le plan Q au point G.

Nous menons le plan auxiliaire par l'arête A et par GH, la trace de ce plan sur le plan P sera HAK, la trace de ce plan sur le plan Q sera KG rencontrant l'arête A au point L ; la même construction pourra s'appliquer aux autres arêtes, et par conséquent tout le tracé se fera comme pour la pyramide. Ainsi par le plan dont la trace est HBM nous obtenons le point N ; par le plan dont la trace est HCX nous obtenons le point O ; par le plan dont la trace est HDR nous obtenons le point S; la section est NLSO. Mais nous pouvons encore observer que ON et BC prolongés se couperont en un point U sur EF, que AB et NL se couperont en un point T sur EF et les projections de ces lignes se couperont encore sur la projection de EF.

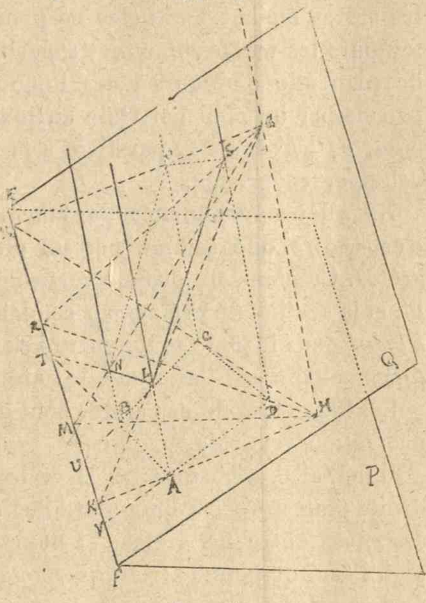


Fig. 127.

La base et la section plane du prisme se projetteront donc suivant des figures homologiques; l'axe d'homologie étant l'intersection des deux plans, les rayons d'homologie étant parallèles à la projection horizontale des arêtes du prisme, au lieu de concourir au sommet de la pyramide.

Nous engageons le lecteur à tracer en projection cette figure que nous avons tracée dans l'espace comme nous l'avons fait plus haut pour la pyramide.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ces constructions en étudiant les questions relatives aux ombres portées.

DÉVELOPPEMENT DES POLYÈDRES.

169. Développement d'un prisme (fig. 128). — Nous considérons un prisme qui a pour base le quadrilatère $abcd$, $a'b'c'd'$ situé dans le plan H ; nous avons supposé que les arêtes étaient parallèles au plan vertical, et on devrait toujours les amener dans cette position par un changement de plan afin d'obtenir leurs longueurs. Nous limitons le prisme par un plan parallèle au plan H donnant la section $efgh$, $e'f'g'h'$ égale et parallèle à la base. Nous voulons développer ce prisme.

Nous devons commencer par construire une section droite, c'est-à-dire une section par un plan perpendiculaire aux arêtes. Ce plan sera projeté verticalement suivant une ligne P′, et la section du prisme par ce plan sera le polygone $klnm$, $k'l'n'm'$ dans lequel les longueurs des côtés représentent les distances qui existent entre les arêtes du prisme.

Les longueurs de ces arêtes sont d'ailleurs données par la projection verticale.

Il faut d'abord connaître la vraie grandeur de la section droite pour avoir les longueurs des côtés qui expriment les distances entre les arêtes, et pour cela nous rabattons le plan P′ sur un plan de front quelconque, autour d'une droite de front de ce plan ; nous portons par exemple à partir de P′ sur les arêtes des longueurs égales aux différents éloignements des points comptés à partir d'un plan de front projeté suivant HH ; aussi $m'M = \alpha m$, $n'N = \beta N$... La vraie grandeur de la section droite est MNLK. Construisons la vraie grandeur de la face projetée en $baef$.

Nous prenons sur la ligne P′ perpendiculaire aux projections verticales des arêtes, $n'm_1 = NM$ et par m_1 nous menons la parallèle b_1f_1 que nous prenons égale à $b'f'$ vraie grandeur de l'arête bf, $b'f'$; nous prenons $m_1k_1 = MK$ et nous traçons $c_1g_1 = c'g'$ vraie grandeur de l'arête... et de même pour les autres faces. La figure $e'f_1g_1h_1e_1a_1d_1c_1b_1a'$ est le développement de la surface extérieure du prisme.

170. Développement d'une pyramide (fig. 129). — Les projections de la pyramide sont S$abcd$, S'$a'b'c'$. La base étant dans le plan horizontal H.

Nous allons construire successivement les triangles qui forment les faces de la pyramide en cherchant les vraies grandeurs de leurs trois cotés.

Nous avons supposé dans la figure pour simplifier le tracé que l'une des arêtes est de front. C'est l'arête Sa, S'a' dont S'a' est la vraie grandeur.

Construisons le triangle SAC. S'a est la vraie grandeur de SA, ab est la vraie grandeur du côté de la base; nous amenons l'arête Sb, S'b' à être de front par une rotation autour de la verticale qui passe par le point S, S', ses projections deviennent Sb_1, S'b'_1 ; nous pouvons donc construire en S'a'B la vraie grandeur de la face.

Construisons le triangle SBC ; bc est la longueur de la base, nous cherchons la longueur de Sc en amenant l'arête à être parallèle au plan vertical en Sc_1, S'c'_1 et nous construisons le triangle S'BC... La surface de la pyramide se développe donc suivant S'aBCDA.

171. Développement d'un polyèdre quelconque. — On commence par chercher la vraie grandeur d'une face qu'on amène par des rotations ou des changements de plans à être parallèle à un plan de projection ; on rabat autour des arêtes de cette face toutes les faces adjacentes. Chaque face rabattue sert à son tour de base pour le rabattement d'autres faces adjacentes et qu'on construit en vraie grandeur, par exemple, en les décomposant en triangles dont on détermine les 3 côtés.

INTERSECTION DES POLYÈDRES.

172. Méthode générale (fig. 130). — Nous considérons deux polyèdres : 1° Une pyramide dont le sommet est le point ss' et dont la base est le triangle abc, $a'b'c'$. 2° Un prisme dont la base est le quadrilatère *defg*, *d'e'f'g'* ; les arêtes sont parallèles à *e*E, *e'*E'.

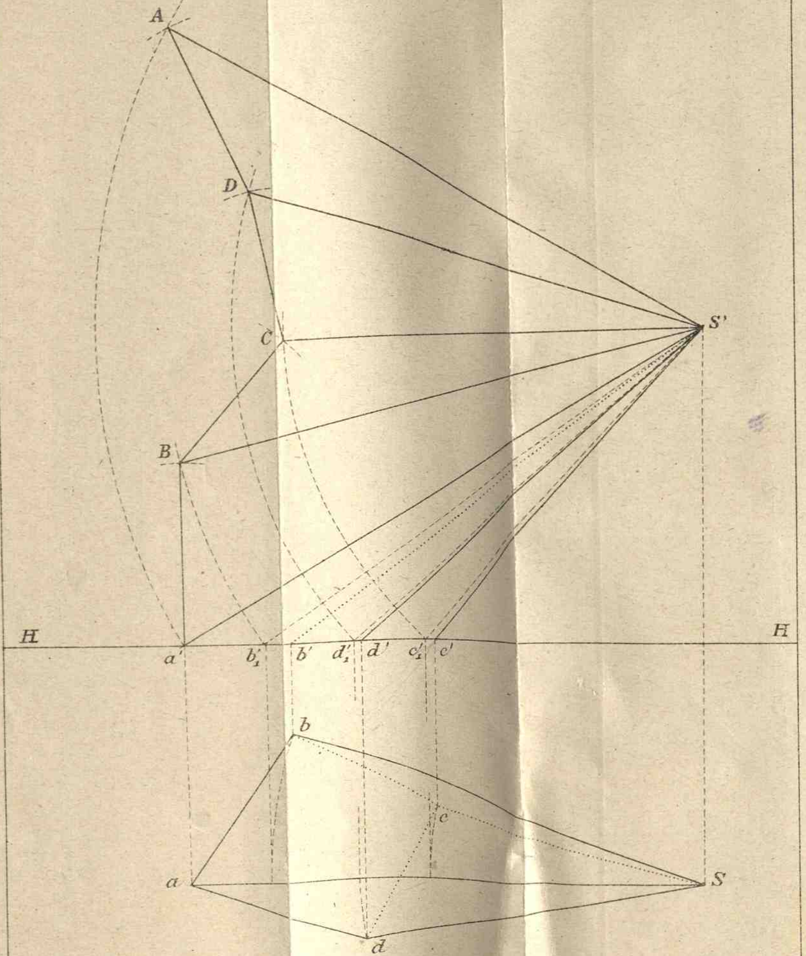
Nous cherchons d'abord le point où une arête d'un des polyèdres perce une face de l'autre. Ainsi nous prenons l'arête S*a*, S'*a'* ; nous cherchons son intersection avec la face du prisme qui a pour directrice *fg*, *f'g'*.

Nous employons comme plan auxiliaire passant par l'arête le plan qui la projette sur le plan vertical, il coupe l'arête *f*, *f'* (nous désignerons désormais chaque arête par une seule lettre, celle qui appartient au sommet de la base par lequel passe l'arête) au point *h'*, *h*, l'arête *g*, *g'* au point *i'*, *i* ; donc l'intersection du plan auxiliaire avec la face *fg* (nous désignerons désormais chaque face par les lettres qui définissent le côté de la base correspondant) est projetée horizontalement suivant *ih* qui rencontre S*a* au point 1, projection horizontale du point où l'arête S*a*, S'*a'* perce la face *fg*. (Nous ne construirons pas les projections verticales des points d'intersection.)

Raisonnement : 1° l'arête S*a* perce la face *fg* au point 1 ; l'arête S*a* est l'intersection de deux faces, nous prenons l'une de ces faces, la face S*ab* par exemple et nous cherchons son intersection avec la face *fg* ; le point 1 est un point de cette intersection, nous en obtiendrons un second point en cherchant le point de rencontre d'une autre arête de la face S*ab* avec la face *fg*, par exemple S*b* : (si l'on avait à opérer sur deux polyèdres quelconques de formes plus compliquées on choisirait dans la face le côté le plus commode à employer pour les tracés).

Cherchons donc le point de rencontre de S*b* avec la face *fg*.

Nous prenons encore pour plan auxiliaire le plan debout passant par l'arête et qui se projette verticalement suivant S'*b'*. (Nous emploierons toujours ici les plans qui projettent verticalement les arêtes parce que nous ne voulons pas construire la projection verticale, et que nous dégageons ainsi la projection horizontale qui deviendra plus claire ; mais dans la pratique on devra prendre tantôt les plans qui projettent verticalement, tantôt les plans qui projettent horizontalement les arêtes selon les facilités plus ou moins grandes qu'ils offriront pour la construction.)


A
D
S'
C
B
H
a'
b'₁
b'
d'₁
d'
c'₁
c'
H
b
c
a
S
d

Le plan de-bout dont tous les points se projettent sur $S'b'$ coupe l'arête f au point j', j et l'arête g au point k', k, l'intersection des deux plans a pour projection horizontale jk qui ne rencontre pas Sb; l'arête ne perce pas la face; mais si l'on suppose le plan de la face fg prolongé, l'arête Sb percera le plan de cette face au point dont la projection horizontale est α situé sur le prolongement de jk. L'intersection des plans des deux faces Sab et fg a pour projection horizontale 1α, mais cette intersection au point de vue du polyèdre n'est utile que dans l'étendue des deux faces, elle rencontre l'arête f au point projeté en 2 qui est alors le point où l'arête f perce la face Sab.

Désormais le raisonnement va recommencer sous la même forme, s'appliquant tantôt à une arête du prisme, tantôt à une arête de la pyramide.

Nous allons le reprendre en l'abrégeant et nous l'avons résumé et synthétisé dans le tableau qui est à la fin de ce paragraphe.

Raisonnement : 2° l'arête f perce la face Sab au point 2, l'arête f est l'intersection de deux faces. Nous venons d'employer fg, nous prenons la face fe dont nous cherchons l'intersection avec Sab.

Nous avons en 2 un point de cette intersection, nous en obtiendrons un second point en prenant le point de rencontre d'une autre arête de la face fe, e par exemple avec Sab.

Nous prenons le plan de-bout passant par e, et projeté verticalement suivant $e'E'$, il coupe Sa, $S'a'$ au point l', l et Sb, $S'b'$ au point m', m. La projection horizontale lm ne coupe pas e; mais son prolongement détermine sur e le point β projection horizontale du point où l'arête e perce le plan prolongé de la face Sab; la ligne $2 - \beta$ est la projection horizontale de l'intersection des plans des deux faces. Dans les polyèdres elle n'existe que dans l'étendue des faces, donc jusqu'à l'arête Sb qu'elle coupe au point projeté en 3, qui est le point où l'arête Sb perce la face fe.

Raisonnement : 3° l'arête Sb perce la face fe au point 3.

L'arête Sb est l'intersection de deux faces, nous venons d'employer Sba, nous considérons la face Sbc dont nous cherchons l'intersection avec la face *fe*. Nous avons en 3 un point de cette intersection, un second point nous sera donné par le point de rencontre d'une autre arête de la face S*bc*, S*c* par exemple avec la face *fe*.

Le plan de-bout passant par S*c* et projeté suivant S′*c*′ coupe les arêtes *f*, *f*′ et *e*, *e*′ aux points *o*′, *o* et *n*′*n*, la projection horizontale *on* de l'intersection de ce plan avec le plan *ef* prolongée, coupe S*c* au point γ ; l'intersection du plan S*bc* avec le plan prolongé de *ef*, est projetée suivant 3 — γ utile jusqu'à l'arête *e* qu'elle coupe au point projeté en 4 et qui est le point de rencontre de *e* avec S*bc*.

Raisonnement : 4° l'arête *e* du prisme perce la face S*bc* au point 4.

L'arête *e* est l'intersection de deux faces, *ef* que nous venons de considérer et *ed* ; cherchons l'intersection de la face *ed* avec la face S*bc*.

Le point 4 est un point de cette intersection, un second point nous sera donné par le point de rencontre d'une autre arête de la face *ed*, *d* par exemple, avec la face S*bc*.

Le plan de-bout représenté par la projection verticale *d* coupe les arêtes S*b*, S′*b*′ et S*c*, S′*c*′ aux points projetés en *q*′*q*, et *p*′,*p* ; la projection horizontale *pq* prolongée rencontre *d* au point δ ; l'intersection du plan de la face *de* avec le plan prolongé de la face S*bc* se projette suivant 4 — δ utile jusqu'à l'arête S*b* qu'elle coupe au point projeté en 5 et qui est le point de rencontre de l'arête S*b* avec la face *de*.

Raisonnement : 5° L'arête S*b* perce la face *de* au point 5.

L'arête S*b* est l'intersection de deux faces, S*bc* que nous venons de considérer et S*ba*, cherchons l'intersection des faces S*ba* et *de*.

Le point 5 est un point de cette intersection, un second point nous sera donné par le point de rencontre d'une autre arête de la face S*ba*, S*a* par exemple, avec la face *de*.

Le plan de-bout représenté par S′*a*′ coupe les arêtes *d*, *d*′ et *ee*′ aux points projetés en *r*′, *r* et *s*′, *s* ; la projection horizontale *rs* prolongée rencontre S*a* au point ε ; l'intersection du plan de la face S*ba* avec le plan de la face *de* prolongée, se projette suivant 5 — ε utile jusqu'à l'arête *d* qu'elle coupe au point projeté en 6 et qui est le point de rencontre de l'arête d avec la face Sba.

Raisonnement : 6° L'arête d perce la face Sba au point 6.

L'arête d est l'intersection de deux faces, de que nous venons de considérer et dg; cherchons l'intersection des deux faces dg et Sba.

Le point 6 est un point de cette intersection, cherchons le point où l'arête g perce le plan Sba.

Le plan de-bout passant par l'arête et dont tous les points sont projetés sur g', coupe les arêtes Sb, S'b' et Sa, S'a' aux points projetés en t', t et u', u. La projection horizontale tu prolongée coupe g au point θ.

L'intersection du plan de la face dg avec le plan prolongé de la face Sba se projette suivant 6 — θ utile jusqu'à l'arête Sa qu'elle coupe au point projeté en 7 et qui est le point où l'arête Sa perce la face dg.

Raisonnement : 7° L'arête Sa perce la face dg au point 7.

L'arête Sa est l'intersection de deux faces, Sab que nous venons de considérer et Sac. Cherchons l'intersection des deux faces dg et Sac.

Le point 7 est un point de cette intersection, cherchons le point où l'arête Sc perce le plan dg.

Le plan de-bout passant par l'arête et représenté par S'c' coupe les arêtes d,d' et g, g' aux points x, x', et φ',φ.

La projection horizontale φx prolongée coupe Sc au point λ.

L'intersection de la face Sac avec le plan prolongé de la face dg est projetée suivant 7 — λ utile jusqu'à l'arête d qu'elle coupe au point projeté en 8 et qui est le point où l'arête d perce le plan Sac.

Raisonnement : 8° L'arête d perce la face Sac au point 8.

L'arête d est l'intersection de deux faces, dg que nous venons de considérer et de, cherchons l'intersection des faces Sac et de.

Le point 8 est un point de cette intersection, cherchons le point où l'arête e perce la face Sac.

Le plan de-bout mené par l'arête et représenté par sa projection verticale e', coupe les arêtes Sa, S'a' et Sc, S'c' aux points l', l et y', y.

La projection horizontale ly coupe l'arête e au point 9.

L'intersection des deux faces Sac et de est projetée suivant 8 — 9.

Raisonnement : 9° l'arête e perce la face Sac au point 9.

L'arête e est l'intersection de deux faces, ed que nous venons de considérer et ef, cherchons l'intersection des deux faces ef et Sac.

Le point 9 est un point de cette intersection, cherchons le point où l'arête f perce la face Sac.

Le plan de-bout mène par l'arête f et représente par sa projection verticale f'', coupe Sa, S$'a'$ et Sc, S$'c'$ aux points z', z et w', w, la projection horizontale zw rencontre f au point 10 projection horizontale du point de rencontre de l'arête f avec la face Sac.

L'intersection des deux faces ef et Sac est projetée suivant 9 — 10.

Raisonnement : 10° L'arête f perce la face Sac au point 10.

L'arête f est l'intersection de deux faces, ef que nous venons de considérer et fg; cherchons l'intersection des faces fg et Sac.

Le point 10 est un point de cette intersection, un second point nous sera donné par le point de rencontre de l'arête g avec la face Sac.

Le plan de-bout représenté par la projection verticale g' coupe les arêtes Sa, S$'a'$ et Sc, S$'c'$ aux points $t't$, et μ', μ; la projection horizontale $t\mu$ rencontre g au point π projection horizontale du point de rencontre de l'arête g avec le plan prolongé de la face Sac. L'intersection de la face fg et du plan prolongé de la face Sac se projette suivant π — 10 utile jusqu'à l'arête Sa qu'elle coupe en un point qui sera le point de rencontre de l'arête Sa avec le plan fg, *par conséquent le point 1.*

Le polygone est donc fermé.

Nous avons résumé cette construction dans le tableau suivant qui indique très nettement la marche des tracés et que nous engageons toujours à dresser quand on devra construire l'intersection de deux polyèdres.

Tableau résumant la construction.

						Côtés.
Face	arête S*a*	du polyèdre S perce la face	*fg*	du polyèdre P au point	1	1-2-α.
	S*ab*		*fg*			
	arête S*b*		*fg*		α	
Face	arête *f*	du polyèdre P perce la face	S*ab*	du polyèdre S au point	2	2-3-β.
	fc		S*ab*			
	arête *e*		S*ab*		β	
Face	arête S*b*	du polyèdre S perce la face	*fe*	du polyèdre P au point	3	3-4-γ.
	S*bc*		*fe*			
	arête S*c*		*fe*		γ	
Face	arête *e*	du polyèdre P perce la face	S*bc*	du polyèdre S au point	4	4-5-δ.
	ed		S*be*			
	arête *d*		S*bc*		δ	
Face	arête S*b*	du polyèdre S perce la face	*de*	du polyèdre P au point	5	5-6-ε.
	S*ab*		*de*			
	arête S*a*		*de*		ε	
Face	arête *d*	du polyèdre P perce la face	S*ba*	du polyèdre S au point	6	6-7-θ.
	dg		S*ba*			
	arête *g*		S*ba*		θ	
Face	arête S*a*	du polyèdre S perce la face	*dg*	du polyèdre P au point	7	7-8-λ.
	S*ac*		*dg*			
	arête S*c*		*dg*		λ	
Face	arête *d*	du polyèdre P perce la face	S*ac*	du polyèdre S au point	8	8-8.
	de		S*ac*			
	arête *e*		S*ac*		9	
Face	*ef*	du polyèdre P perce la face	S*ac*	du polyèdre S		9-10.
	arête *f*		S*ac*		10	
Face	*fg*	du polyèdre P perce la face	S*ac*	du polyèdre S		10-1-π.
	arête *g*		S*ac*		π	
	arête S*a*	du polyèdre S perce la face	*fg*	du polyèdre P	1	Fermeture.

173. **Ponctuation des figures.** — Lorsque deux corps solides sont en présence et se coupent, on peut se proposer de représenter par leur combinaison *six* dispositions différentes. Nous allons expliquer ces dispositions en raisonnant sur des prismes, il sera facile d'étendre l'explication à d'autres solides.

1° *Ensemble de deux solides :*

Supposons que nous ayons pris un bloc d'une matière quelconque et que nous ayons dégagé de ce bloc d'un seul morceau, un solide présentant la forme d'une croix ou d'un X. Nous aurons l'ensemble des deux prismes caractérisé par ce fait que, dans la partie commune, les arêtes n'existent pas et sont noyées dans la masse. Ainsi les arêtes du prisme P n'existent pas dans le prisme Q et les arêtes du prisme Q n'existent pas dans le prisme P. Il est facile de comprendre que si au lieu de prismes nous avons des pyramides, c'est exactement la même chose, et que s'il s'agit de solides quelconques, les figures qui forment les contours de chaque solide n'existent pas dans la partie commune.

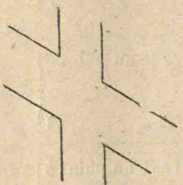


Fig. 131.

2° *Solide commun :*

Disposition en quelque sorte complémentaire de la précédente. Supposons que nous ayons enlevé de la précédente figure les parties de chaque prisme qui sortent de l'autre, et aussi dans cette partie moyenne les parties extérieures aux surfaces qui limitent les deux prismes, il nous restera la partie commune, *c'est-à-dire la partie du prisme P contenue dans le prisme Q ou la partie du prisme Q contenue dans le prisme P;* on peut faire l'énoncé de l'une ou de l'autre manière, on aura toujours le même solide commun. L'extension de cette explication à des pyramides ou à des corps solides quelconques est facile à faire.

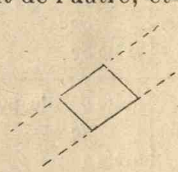


Fig. 132.

3° *Un solide pénétré ou traversé par l'autre :*

On suppose qu'un des solides, (un prisme par exemple) traverse l'autre ; il ne peut le faire qu'en enlevant sur son passage une partie de l'autre solide et de ses arêtes.

3 *bis*. Ainsi le prisme P pénètre ou traverse le prisme Q ; les arêtes du prisme P sont entières et ne sont pas coupées; tandis que les portions d'arêtes du prisme Q qui se trouveraient dans le prisme P sont enlevées. Nous pouvons déduire cette figure de la figure d'ensemble (fig. 131), nous n'avons qu'à y ajouter les portions d'arêtes du prisme P à l'intérieur du prisme Q.

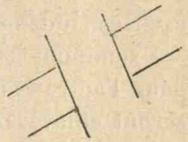


Fig. 133.

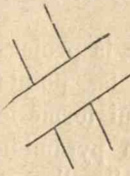


Fig. 134.

De même 3 *ter*, le prisme Q peut traverser le prisme P ; les arêtes du prisme P sont enlevées par le passage du prisme Q et les arêtes du prisme Q sont entières.

4° *Un solide entaillé par l'autre :*

Reprenons l'une des deux figures précédentes, par exemple : 4 *bis*, le prisme P pénétrant le prisme Q, et enlevons le prisme P; il restera donc le prisme Q diminué de ce qu'avait enlevé le prisme P. Les parties de faces et d'arête du prisme P qui se trouvaient à l'intérieur de Q, y restent pour limiter le trou fait dans le solide Q par le solide P ; il ne faut pas oublier dans une épure de représenter ces arêtes intérieures au prisme Q, qui peuvent être vus dans certains cas, cachées dans d'autres.

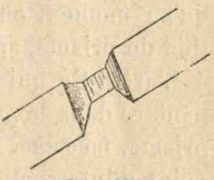


Fig. 135.

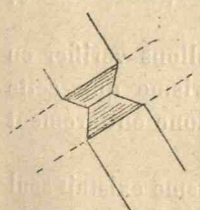


Fig. 136.

4 *ter*. On représenterait de la même manière le prisme P entaillé par le prisme Q.

On demandera dans une épure de représenter ce qui reste d'un des solides après avoir enlevé la partie comprise dans l'autre.

Application à l'intersection du prisme et de la pyramide que nous avons obtenue par la méthode générale

174. — Nous nous proposons de représenter la projection horizontale de *l'ensemble des deux solides*.

Voici la marche qu'il faut toujours suivre :

Déterminer d'abord dans chaque solide les faces vues et cachées, indépendamment de l'autre solide.

Examinons les parties d'arêtes de chaque solide contenues dans l'autre et qui d'après ce que nous avons dit (fig. 131) seront enlevées.

Pyramide : (comme nous ne représentons que la projection horizontale, nous désignons les arêtes et les points simplement par leur projection). L'arête S*a* qui forme le contour de la pyramide et qui serait vue si la pyramide existait seule, est coupée aux deux points 1 et 7, elle est donc supprimée entre ces deux points (nous l'avons représentée en traits mixtes). Le premier point d'intersection avec le prisme est le point 7 qui est dans la face *gd* du prisme, *face vue*, donc l'arête est vue jusqu'au point 7 (159), enlevée entre 7 et 1, elle sort au point 1 qui est dans la face *fg* cachée; elle est donc *cachée* à partir de ce point jusqu'au moment où elle n'est pas recouverte par la projection du prisme, au delà elle *est vue*.

L'arête S*b* qui serait vue si la pyramide existait seule pénètre dans le prisme au point 5 qui est dans la face *de* du prisme, face *vue*, l'arête *est vue* jusqu'au point 5; son second point d'intersection est le point 3 qui est dans la face *ef* du prisme, face *cachée;* l'arête est donc *cachée* à partir du point 3 jusqu'au moment où elle n'est plus recouverte par la projection du prisme; elle est enlevée (traits mixtes) entre les points 5 et 3.

L'arête S*c* *vue* n'est pas coupée, nous allons vérifier en examinant la situation des arêtes du prisme que cette arête est au-dessus du prisme, elle reste donc entièrement *vue*.

Prisme : L'arête *e* qui serait *vue* si le prisme existait seul entre dans la pyramide au point 9 qui est dans la face S*ac* de la pyramide, face *cachée;* l'arête est donc *cachée* à partir du moment où elle est recouverte par la projection de la pyramide; elle est enlevée entre le point 9 et le point 4 (traits mixtes); le point 4 est dans la face *sbc* face *vue*, l'arête est vue à partir de ce point.

L'arête *d* qui serait *vue* si le prisme existait seul, entre dans la pyramide au point 8 qui est dans la face S*ac*, face *cachée;* elle est donc *cachée* à partir du moment où elle est recouverte par la projection de la pyramide jusqu'à ce point; elle est enlevée (traits mixtes) entre le point 8 et le point 6; le point 6 est dans la face S*ba*, face *vue*, l'arête est *vue* à partir de ce point.

L'arête *f* qui serait *cachée* si le prisme existait seul, entre dans la pyramide au point 10; elle reste *cachée* jusqu'à ce point; elle est enlevée (traits mixtes) entre les points 10 et 2; elle sort de la pyramide au point 2 en restant *cachée*.

L'arête *g* n'est pas coupée; or, puisque nous avons été conduits à représenter les arêtes *d* et *e* du prisme *cachées* à partir du moment où elles sont recouvertes par la projection de la pyramide, c'est que l'arête S*c* est au-dessus de ces arêtes; elle ne coupe pas le prisme; elle est donc au-dessus de toutes les arêtes, elle est entièrement *vue* comme nous l'avons déjà dit; mais l'arête *g* qui serait *vue* si le prisme existait seul, est bien *cachée* tant qu'elle est recouverte par la projection de la pyramide.

Cette question de la visibilité des arêtes étant terminée, examinons le polygone. *Règle générale* : Un côté est vu s'il est l'intersection de deux faces vues; il est caché si l'une des deux faces est cachée, et à fortiori si les deux faces sont cachées.

Le côté 1-2 est dans la face S*ab* de la pyramide, face vue, et dans la face *fg* du prisme, face cachée; *1-2 est caché*.

(Il est très commode de se servir du tableau que nous avons fait pour bien se rendre compte de la situation des côtés.)

Le côté 2-3 est dans la face S*ab* de la pyramide et dans la face *fe* du prisme, la face *fe* est cachée; *2-3 est caché*.

Le côté 3-4 est dans la face cachée *fe* du prisme; *3-4 est caché*.

Le côté 4-5 est dans la face Sbc de la pyramide, face vue, et dans la face *ed* du prisme, face vue; *le côté 4-5 est vu.*

Le côté 5-6 est dans la face *vue* Sba de la pyramide et dans la face *vue de* du prisme; *le côté 5-6 est vu*

Le côté 6-7 est dans la face *vue* Sba de la pyramide et dans la face *vue dg* du prisme; *le côté 6-7 est vu.*

Le côté 7-8 est dans la face Sac *cachée* de la pyramide; *le côté 7-8 est caché.*

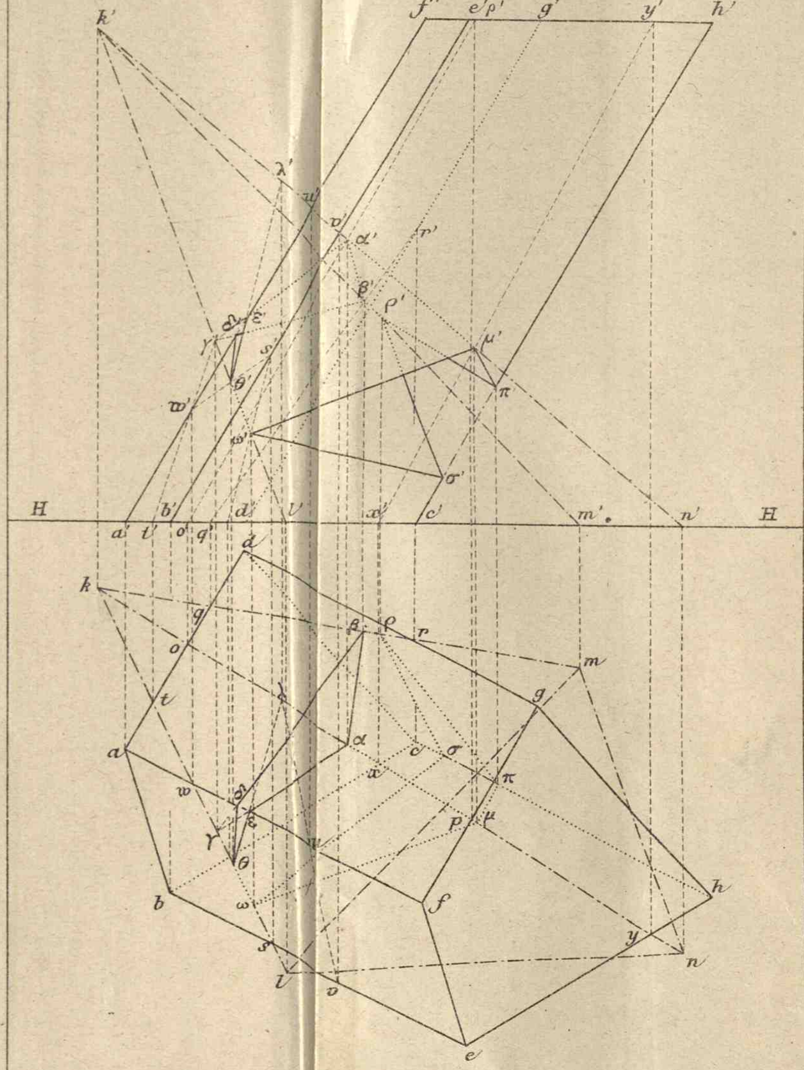
Le côté 8-9 est dans la face Sac *cachée* de la pyramide; *le côté 8-9 est caché.*

Le côté 9-10 est dans la face Sac *cachée* de la pyramide; *le côté 9-10 est caché.*

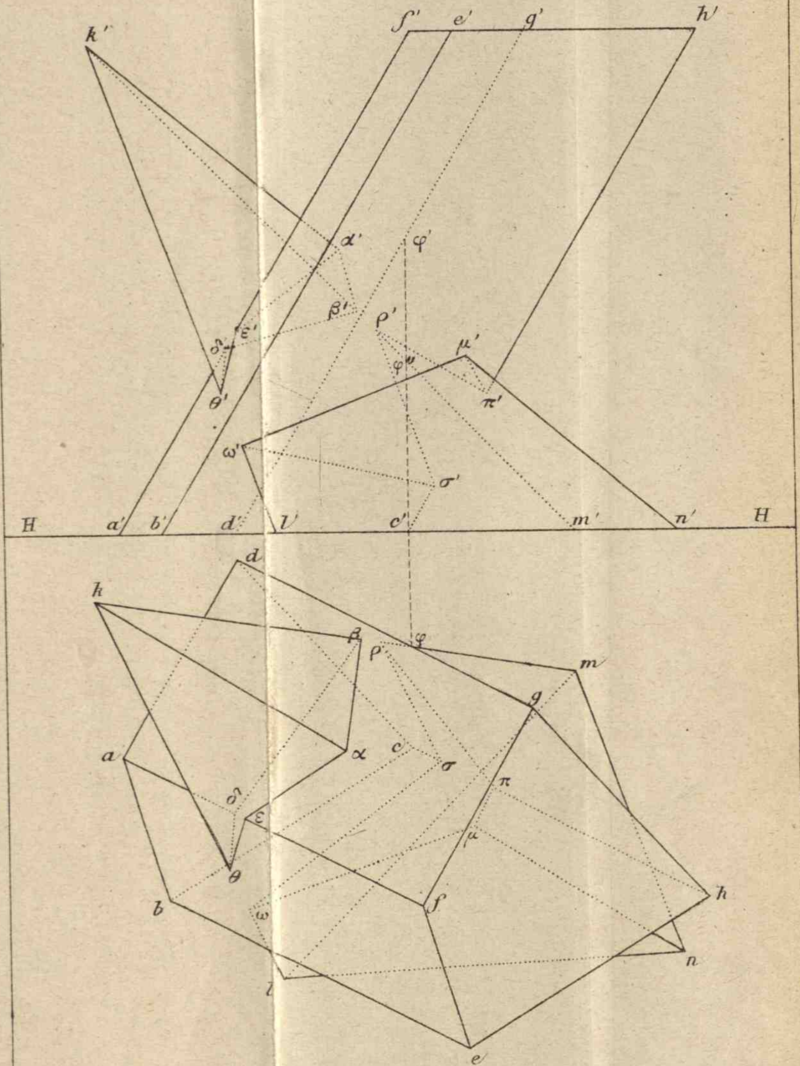
Le côté 10-1 est dans la face Sac *cachée* de la pyramide; *le côté 10-1 est caché.*

Simplifications : On peut simplifier cette recherche en remarquant par exemple que le point 6 étant *vu*, les deux lignes qui partent de ce point sont nécessairement *vues* (le point n'étant pas sur une arête qui forme le contour d'un solide); donc 6-5 et 6-7 sont *vus*. Le point 5 vu n'étant pas sur un contour, 5-4 est *vu*. On ne peut pas continuer ce raisonnement à partir de 4 qui est sur un contour, alors on examine 3 qui n'est pas sur un contour; 3 est *caché*, donc les lignes qui partent de ce point sont cachées; 3-4 *est caché; 3-2 est caché*; 2 n'est pas sur un contour et est caché; *2-1 est caché*. Mais 1 est sur un contour; prenons le point suivant 10; 10 qui est sur l'arête *f* est *caché*; *10-1 et 10-9 sont cachés*; 9 est sur un contour; prenons 8 : nous avons trouvé que 8 est *caché, donc 8-9 et 8-7 sont cachés.*

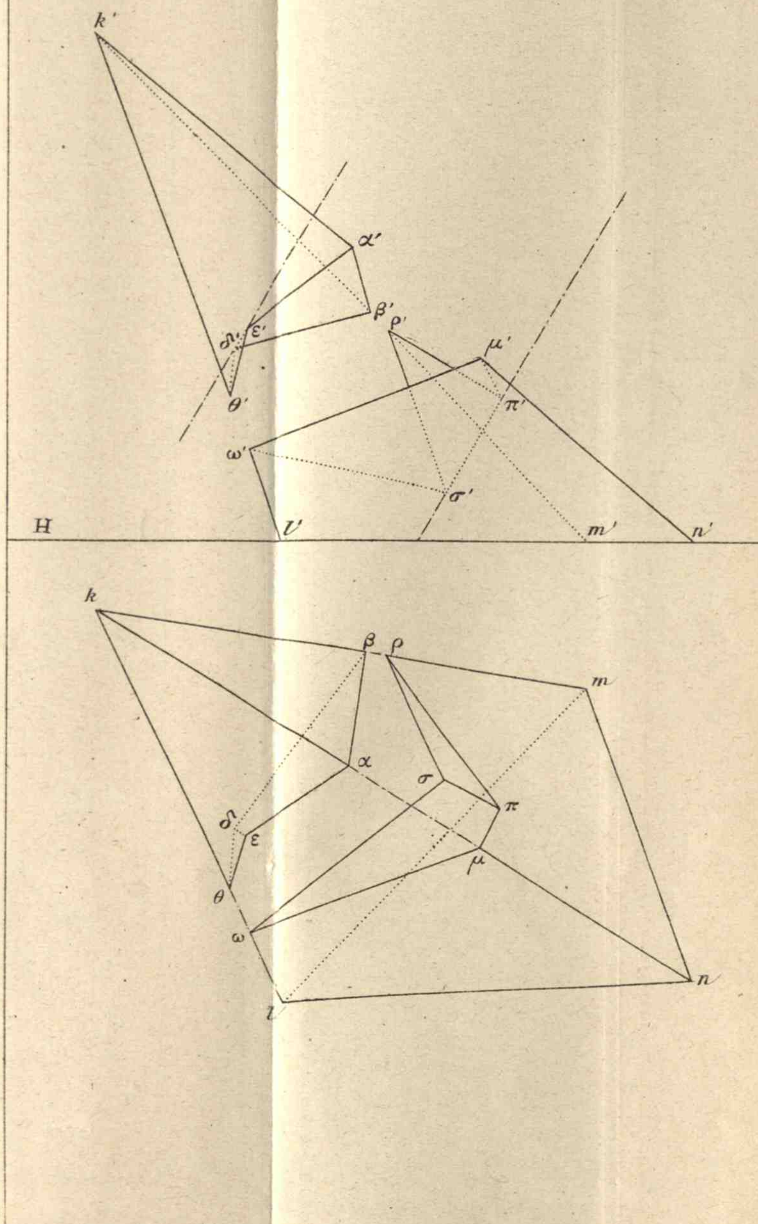
175. Tracé dans une épure. — On représente généralement les parties vues en traits pleins *noirs*, les parties cachées en points ronds également espacés *noirs*. Les parties enlevées pourraient se représenter en traits mixtes (un trait, un point.). Comme nous l'avons fait sur le dessin; il est préférable de les tracer en rouge fin continu. De cette manière il n'y a en *noir* sur l'épure que ce qui se rapporte à la représentation du solide; tout le reste est en rouge; la figure est beaucoup plus claire et plus lisible que lorsqu'on emploie des traits mixtes.



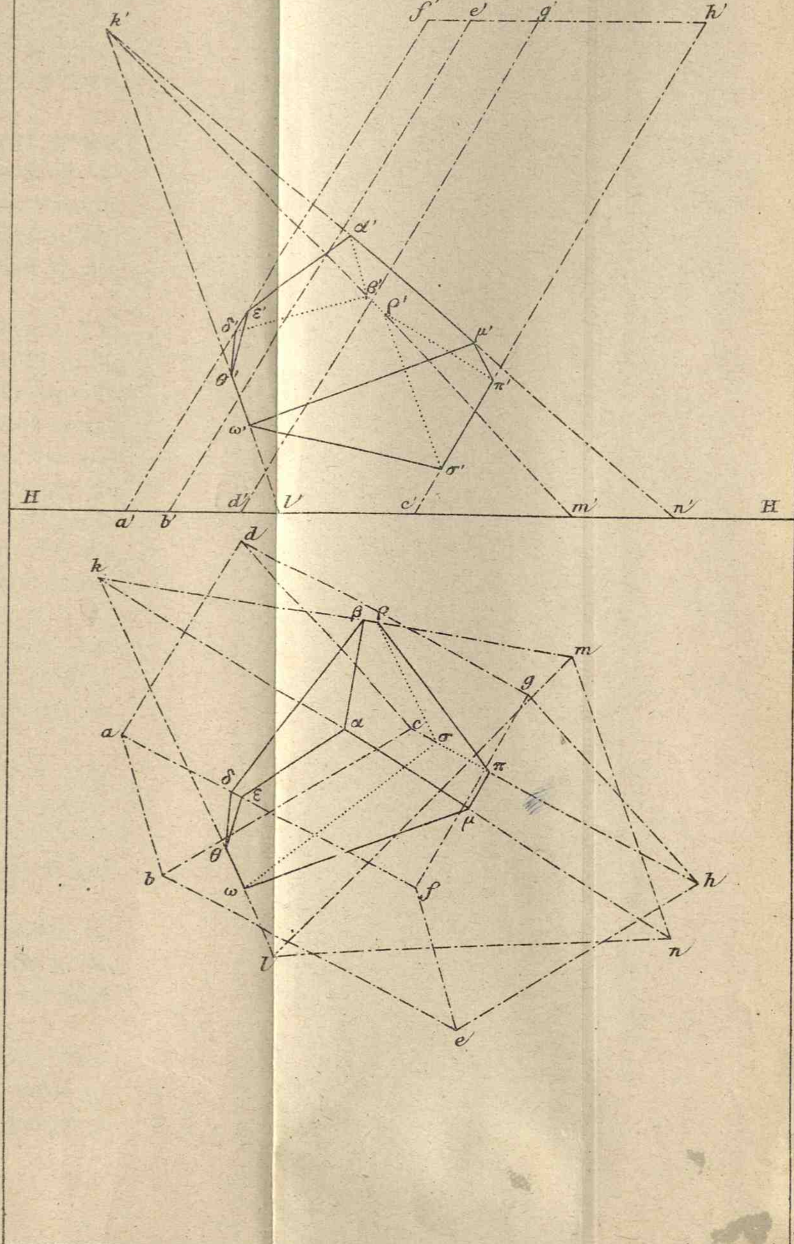
Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

La figure 139 montre un prisme entaillé par une pyramide, l'intersection a été obtenue en employant la méthode générale (172); il y a pénétration.

La figure 140 montre l'ensemble des deux solides.

La figure 141 montre la pyramide entaillée par le prisme.

La figure 142 montre le solide commun.

185. **Intersection de deux prismes qui n'ont pas leurs bases dans le même plan** (fig. 143). — Nous considérons deux prismes; l'un a pour base un triangle ABC situé dans un plan P, les arêtes sont parallèles à CC_1; l'autre a pour base un triangle DEF dans un plan Q, les arêtes sont parallèles à DD_1.

Les deux plans P et Q se coupent suivant la droite XY.

Nous voulons construire l'intersection de l'arête A du prisme P avec le prisme Q. Suivant la méthode exposée (162) nous menons par l'arête A un plan parallèle aux arêtes de Q, en menant par un point pris sur cette arête une parallèle aux arêtes de Q; nous construisons la trace de ce plan sur le plan Q : soit $R\gamma$ cette trace, elle coupe la base du prisme Q aux deux points G et H par lesquels nous menons les parallèles aux arêtes du prisme Q qui déterminent sur l'arête A les points 1 et 6.

La trace de ce plan auxiliaire sur le plan P sera une droite $\rho\gamma$ passant par le point γ situé sur xy et par le point A trace de l'arête A sur le plan P. Ce plan auxiliaire est un plan parallèle aux arêtes des deux prismes.

Nous appliquerons la construction à l'arête B, et nous mènerons par B la parallèle $\rho_2 B\gamma_2$ à $\rho\gamma$, par γ_2 nous mènerons $\gamma_2 R_2$ parallèle à $R\gamma$.

Nous marquons sur la base de Q les points I et K qui déterminent sur l'arête B les points 3 et 5.

Si nous voulons appliquer la construction à l'arête C, nous voyons que le plan auxiliaire passant par cette arête et dont les traces sur les plans des deux bases seraient parallèles à $\rho\gamma$ et γR ne couperait pas le prisme Q.

Nous voulons construire l'intersection de l'arête D du prisme Q avec le prisme P, nous menons par cette arête un plan parallèle aux arêtes du prisme P; ce plan parallèle aux arêtes des deux prismes, parallèle par conséquent aux plans précédemment employés, coupe la base du prisme Q suivant $R_1\gamma_1$ parallèle à $R\gamma$ et la base du prisme P suivant $\gamma_1\rho_1$ parallèle à $\gamma\rho$; la trace $\gamma_1\rho_1$ coupe la base P aux deux points O et N par lesquels nous menons les parallèles aux arêtes de P qui déterminent sur D les points 2 et 8.

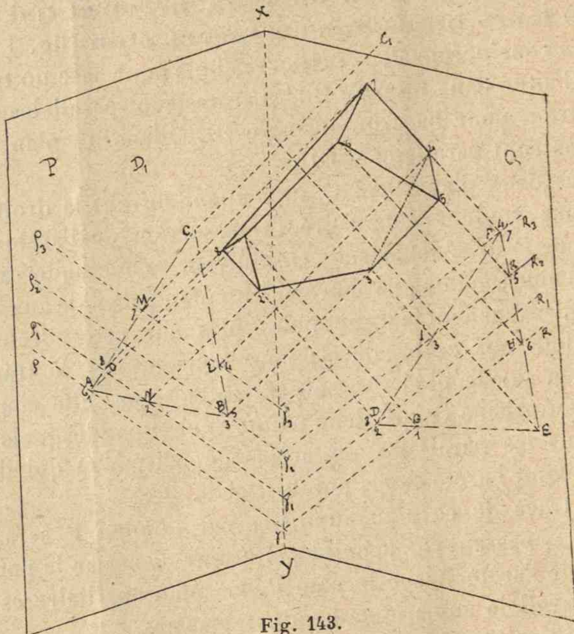


Fig. 143.

Même construction pour l'arête F, les traces du plan auxiliaire sont $R_3\gamma_3$ et $\gamma_3\rho_3$, nous obtenons les points 7 et 4.

On voit que l'arête E ne coupe pas le prisme.

Le plan $R\gamma\rho$ est *limite* par rapport au prisme P.

Le plan $R_3\gamma_5\rho_3$ est *limite* par rapport au prisme Q.

L'ordre de jonction des points s'établira encore comme nous l'avons expliqué (177), nous considérons un premier point mobile parcourant la base ABC, un second mobile parcourant la base DEF et par les positions correspondantes de ces deux mobiles toujours sur les traces d'un même plan auxiliaire nous menons les arêtes.

Il y a arrachement ou pénétration dans les mêmes cas que lorsque les bases sont dans le même plan, les chiffres placés sur les bases et sur le polygone d'intersection indiquent nettement la marche qui a été suivie.

La figure a été ponctuée dans l'hypothèse du *solide commun*.

186. **Intersection de deux pyramides.** — Nous considérons encore (fig. 144) deux plans P et Q qui se coupent suivant XY. Dans le plan P se trouve un triangle ABC base d'une pyramide dont le sommet est le point S.

Dans le plan Q se trouve un triangle DEF base d'une pyramide dont le sommet est le point T.

Nous voulons construire l'intersection de l'arête SA avec la pyramide T en appliquant la méthode indiquée (160) pour l'intersection d'une droite et d'une pyramide. Nous faisons passer un plan par SA et par le sommet T. Ce plan passe par le point S et par le point T et contiendra la droite ST ; la trace de ce plan sur la base P passera donc par le point A, trace de SA, et par le point p, trace de la droite ST sur ce plan ; cette trace sera $pA\alpha$, le point α étant sur xy. La trace de ce plan sur le plan Q passera nécessairement par le point α et aussi par le point q trace de la droite ST sur ce plan : cette trace $q\alpha$ coupe la base DEF aux deux points I et M qu'on joindra au point T et on déterminera ainsi sur l'arête SA les deux points 1 et 6.

En faisant le même raisonnement pour l'arête SB, on trouvera pour traces du plan auxiliaire $pB\alpha_2$ et $\alpha_2 q$, et on obtiendra les points 3 et 5.

En raisonnant de la même manière pour les arêtes de la pyramide T, on sera conduit à employer les plans auxiliaires dont les traces sont $qD\alpha_1$ et $\alpha_1 p$ donnant sur TD les points 2 et 8 et $qF\alpha_3$ et $\alpha_3 p$ donnant sur TF les points 4 et 7. Les plans $p\alpha q$ et $p\alpha_3 q$ sont évidemment les plans limites comme nous l'avons expliqué (177) ; ils ne sont pas limites par rapport à la même pyramide, l'intersection présentera *un arrachement*. L'ordre de jonction des points s'établira comme nous l'avons indiqué (177), car dans le raisonnement que nous avons fait, nous n'avons pas supposé que les arêtes passant par les positions correspondantes des mobiles auxiliaires, et qui sont situées sur les traces d'un même plan auxiliaire, soient parallèles. Les chiffres placés sur les

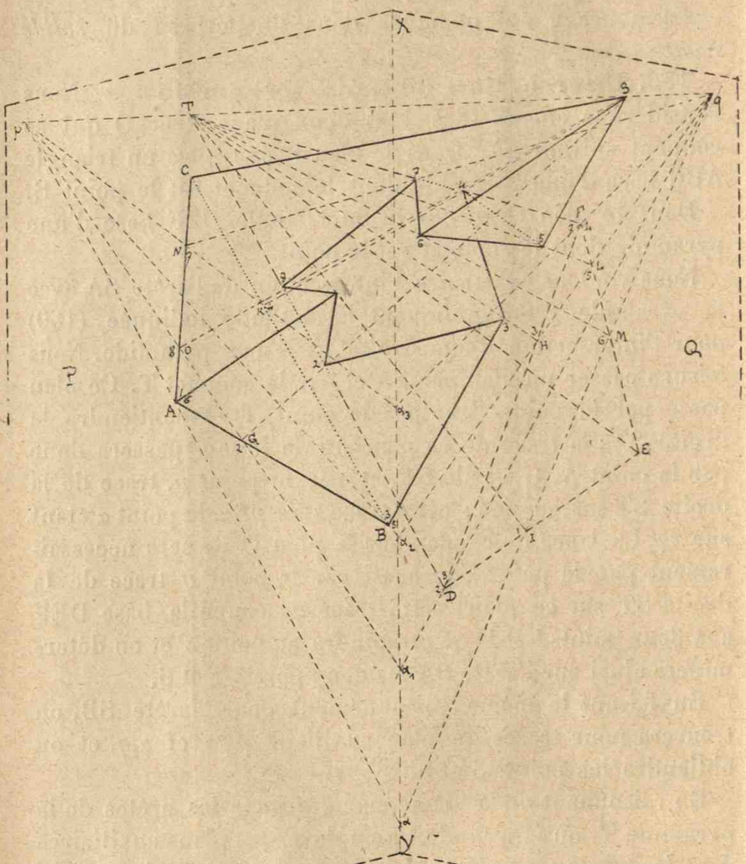


Fig. 144.

bases et sur les points de l'intersection indiquent la marche que nous avons suivie.

Nous avons représenté sur la figure *la pyramide* S *entaillée* par la pyramide T en suivant toujours les règles indiquées (173-4°).

Il est évident que si les pyramides ont leurs bases sur le même plan, il faudra toujours joindre les deux sommets, prendre la trace de la droite ainsi obtenue sur le plan commun des deux bases et faire passer les traces des plans auxiliaires par ce point. Ces constructions de l'intersection de deux pyramides ne diffèrent donc de celles qui s'appliquent aux deux prismes qu'en ce que les traces des plans auxiliaires sont des lignes concourantes au lieu d'être des parallèles.

187. — Nous donnons sur la figure 145 un exemple de la construction que nous venons d'exposer. Nous avons pris deux plans de projection; une des pyramides a sa base dans le plan horizontal, c'est le triangle abc, $a'b'c'$; le sommet est le point s, s'. La seconde pyramide a sa base dans le plan vertical; c'est le triangle $d'e'f'$, def, le sommet est le point t, t'. Nous avons tracé la droite qui joint les deux sommets tS, t'S', et nous avons pris les traces de cette droite sur les plans des deux bases; ce sont les points h, h' et kk'. Un des plans auxiliaires a pour trace sur ce plan horizontal hbg' et pour trace sur le plan vertical $g'l'm'k'$. Ce plan détermine dans la pyramide dont le sommet est t, t' les deux droites dont les projections sont $t'l'$, tl et $t'm'$, tm qui déterminent sur l'arête tb, $t'b'$ les points 1, 1′ et 4, 4′.

Nous engageons le lecteur à poursuivre sur cette figure la construction de tous les autres points et à se rendre compte de la représentation qui y a été faite *de l'ensemble* des deux pyramides.

188. **Prisme et pyramide.** — Nous avons déjà dit qu'on pouvait considérer un prisme comme une pyramide dont le sommet est à l'infini. Nous appliquerons donc la construction précédente : la droite qui joint les sommets des deux pyramides est la parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide. Tout ce que nous avons dit au sujet de l'intersection des deux pyramides s'appliquera exactement, et nous avons déjà montré dans la figure 137 la construction dans le cas où les deux bases sont dans le même plan.

RÉSOLUTION DES ANGLES TRIÈDRES

189. Nous ne pensons pas qu'il soit utile de revenir sur les propriétés des angles polyèdres dont l'étude fait partie de la géométrie élémentaire. Nous nous contenterons de rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un angle trièdre puisse être formé avec des éléments donnés.

1° La plus grande face doit être inférieure à la somme des deux autres;

2° La somme des faces données doit être plus petite que quatre angles droits.

Si l'on donne les dièdres au lieu des faces, les mêmes conditions doivent être remplies, car on doit toujours pouvoir former un trièdre supplémentaire du trièdre considéré, et dans ce trièdre les faces seront les suppléments des angles dièdres donnés.

Un angle trièdre comprend trois faces et trois dièdres, la connaissance de trois de ces éléments suffit pour déterminer l'angle; il en résulte qu'il y a six cas à considérer.

Nous nommons A. B. C. les trois faces.

α. β. γ. les dièdres respectivement opposés à chacune d'elles.

On peut donner : 1° les trois faces A. B. C;

2° Deux faces et le dièdre compris A. B. γ;

3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles A. B. α;

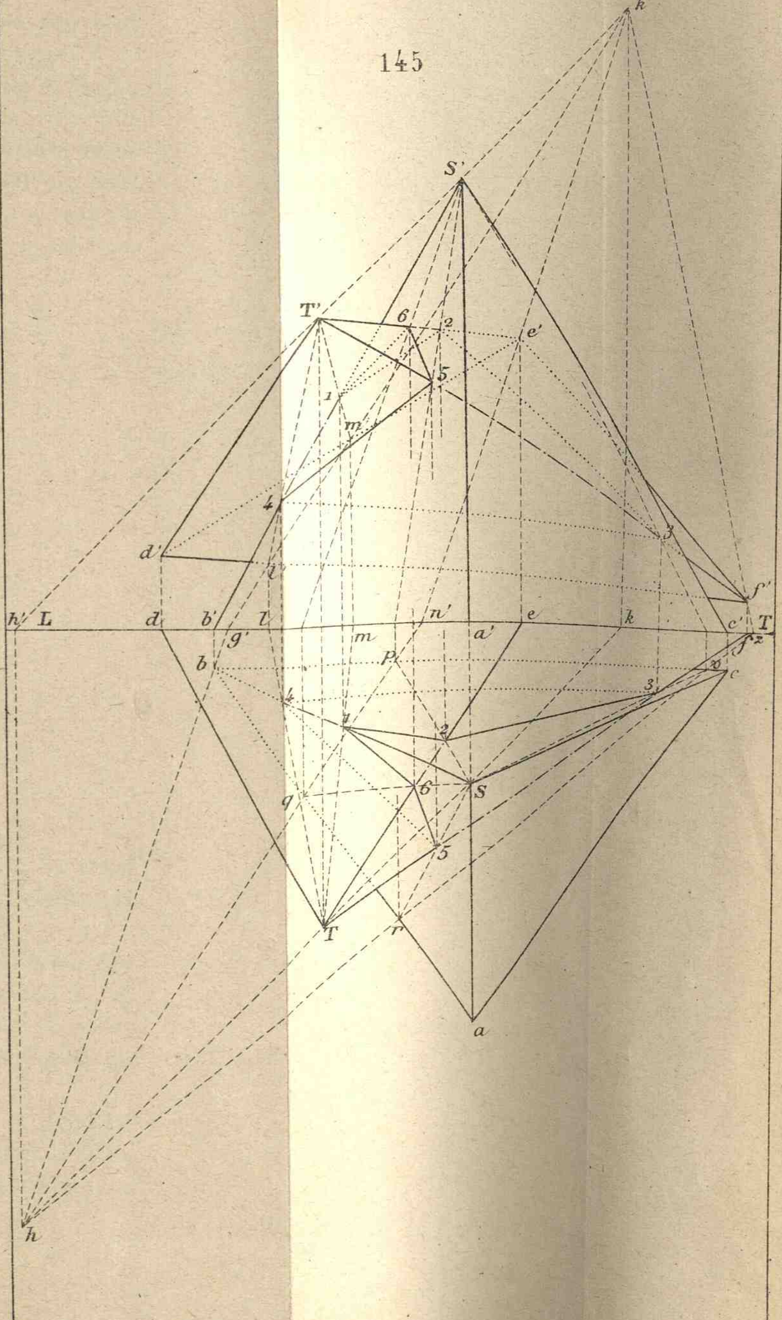
4° Une face et les dièdres adjacents A. β. γ;

5° Une face, un dièdre adjacent, le dièdre opposé A. β. α;

6° Les trois dièdres α. β. γ.

On pourrait, il est vrai, réduire ces cas à trois, au moyen de trièdres supplémentaires. Nous résoudrons directement

145



H. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, P

les cinq premiers et nous donnerons seulement plus tard dans la seconde partie la solution directe du sixième.

190. Premier cas. — *On donne les trois faces* A. B. C., *on veut construire les angles dièdres.* (Fig. 145.)

Je suppose que la face C soit la plus grande des faces données, je place cette face en aSb dans le plan de projection. L'arête Sa sépare la face C de la face B, je suppose qu'on a fait tourner la face B autour de Sa pour la rabattre

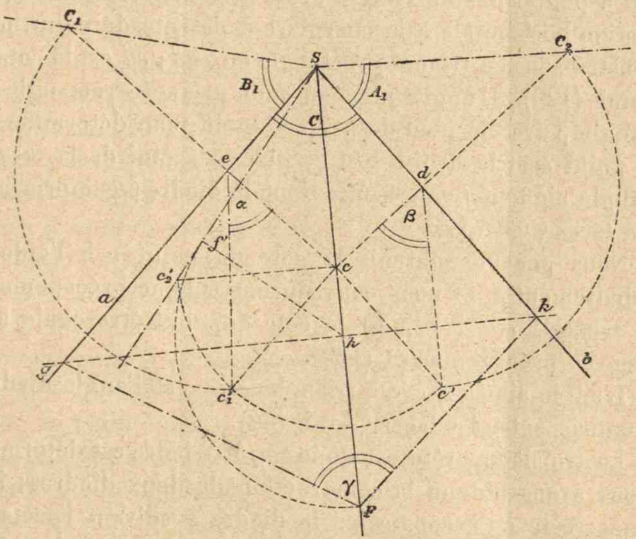


Fig. 145.

sur le plan de projection, elle vient alors en B_1; $c_1 Sa$ étant l'angle de çette face, et la troisième arête du trièdre est rabattue en Sc_1

De même je fais tourner la face A autour de l'arête Sb, je la rabats sur le plan de projection, elle vient en A_1, et la troisième arête du trièdre est rabattue en Sc_2.

Sc_1 et Sc_2 sont les rabattements de la troisième arête du trièdre, et je vais relever cette droite.

Je prends sur le rabattement Sc_1 un point c_1, ce point en se relevant va décrire autour de Sa un cercle dont le plan est perpendiculaire à Sa et qui sera projeté suivant la perpendiculaire c_1e (129).

Je prends sur le rabattement Sc_2 un point c_2 tel que $Sc_2 = Sc_1$; les points c_2 et c_1 seront les rabattements d'un même point de la troisième arête; je relève le point c_2, la projection se déplace sur la perpendiculaire c_2d à Sb; par conséquent la projection du point c_1 c_2 est en c, à la rencontre de c_1e et de c_2d.

Pour achever la détermination de ce point, il faut sa cote. La longueur dc_2 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la distance cd de la projection horizontale à la charnière et la cote du point, nous construisons ce triangle rectangle en cdc'; cc' est la cote du point (129). L'angle aigu en d du triangle rectangle est l'angle β avec le plan de projection du plan déterminé par le point c et la droite Sb; ce plan est celui de la face A, l'angle aigu en d représente donc le dièdre β compris entre les faces C et A (44).

Nous pouvons obtenir la cote du point c à l'aide du rabattement c_1 et nous construisons comme précédemment le triangle ecc'_1; cc'_1 est la cote qui doit être égale à cc' trouvée précédemment (129).

L'angle aigu en e du triangle ecc'_1 est l'angle dièdre α compris entre les faces C et B (44).

La troisième arête est donc Sc; le trièdre est déterminé; nous avons obtenu la construction de deux dièdres; il ne nous reste qu'à construire le dièdre γ suivant l'arête Sc. C'est l'angle de deux plans dont Sc est l'intersection. Nous répétons la construction connue (138). Nous prenons pour plan vertical le plan qui projette Sc, la projection verticale de la ligne sera Sc'_2 obtenue en prenant $cc'_2 = cc'$. Nous menons le plan perpendiculaire à l'arête, ses traces sont ghk, hf, et nous rabattons le point f en F. L'angle cherché γ est gFk.

Il est évident que nous pouvions relever les points c_1 et c_2 au-dessous du plan de projection, et que nous aurions obtenu un point C symétrique par rapport au plan de projection du point que nous avons considéré. Nous avons donc deux trièdres symétriques qui répondent à la question.

La construction même de la côte du point C exige que la face C soit plus petite que la somme des deux autres, et fait ainsi ressortir la condition de possibilité du trièdre.

Prenons l'angle C plus grand que la somme des deux angles A et B, et répétons la construction précédente (fig. 145 *bis*), nous obtiendrons toujours un point c, intersection des deux perpendiculaires c_1e et c_2d; décrivons le cercle qui a pour rayon $Sc_1 = Sc_2$, la corde c_1e coupera ce cercle en n et l'angle aSn sera égal à B; la corde c_2d coupera le cercle en m et l'angle bSm sera égal à A, les droites Sn, Sm seront placées comme le montre la figure, et le point c sera extérieur au cercle; si nous voulons obtenir la cote du point, il faudra construire un triangle rectangle ayant pour hypoténuse $c_1e = en$, et pour côté de l'angle droit ec plus grand que l'hypoténuse; le point c n'est pas la projection d'un point de la troisième arête puisqu'on ne peut déterminer sa cote, et le trièdre est impossible.

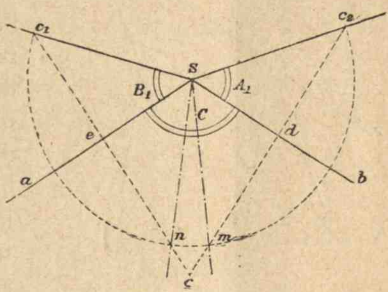


Fig. 145 *bis*.

Nous ne pouvons faire ici la discussion de ce premier cas de l'angle trièdre, nous reprendrons cette discussion dans la seconde partie du cours.

Cas particuliers : 1° *Une des faces est rectangulaire.*

Il n'y a aucun changement à faire à la construction, le dièdre opposé à la face rectangulaire n'est pas droit.

2° *Deux faces sont rectangulaires.*

Les deux dièdres opposés sont droits, parce que l'arête intersection des deux faces rectangulaires est perpendiculaire au plan de la troisième face.

3° *Les trois faces sont rectangulaires.*

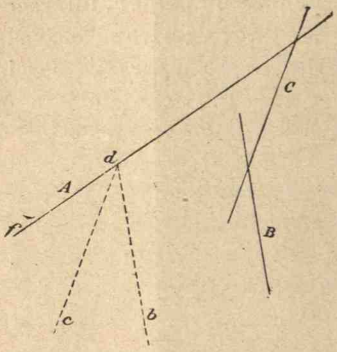
Alors les trois dièdres sont droits, le trièdre est trirectangle.

191. **Applications.** — *Mener une droite rencontrant*

deux droites données et faisant avec elles des angles donnés (fig. 146).

Soient A et B les droites données et C la ligne qui fait avec les deux premières des angles donnés.

Par un point *d* pris sur la droite A, nous menons une parallèle *db* à B et une parallèle *dc* à C; ces trois droites forment un trièdre dans lequel nous connaissons l'angle *fdb* que forment entre elles les deux droites données, et les angles que forme la troisième avec les deux premières, par conséquent si nous construisons la troisième arête *dc* de ce trièdre dont nous connaissons les trois faces, nous obtiendrons une parallèle à la ligne demandée, et nous serons ramenés à ce problème que nous avons déjà résolu : *construire une parallèle à une direction donnée et rencontrant deux droites données* (73).



Fig, 146.

La discussion de ce problème est la même que celle du trièdre, nous y reviendrons, pour montrer qu'il peut recevoir deux, trois, ou quatre solutions.

192. *Réduire un angle à l'horizon* (fig. 147).

Ce problème est posé de la manière suivante : d'un point S, un observateur a mesuré l'angle que fait une direction SB avec la verticale S*a*, l'angle que fait une autre direction SC avec la même verticale, et l'angle que font entre elles les deux directions SB et SC, on veut construire la projection de l'angle observé

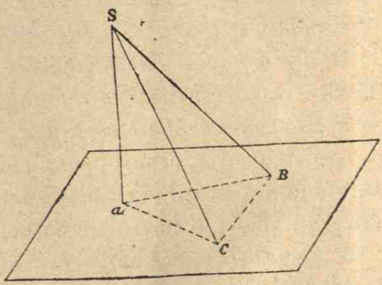


Fig. 147.

BSC sur un plan horizontal H perpendiculaire à la verticale Sa.

Nous avons à construire l'angle dièdre suivant Sa, d'un trièdre dont nous connaissons les trois faces. On dispose généralement la figure d'une manière particulière (fig. 148).

On place l'angle a SB dans le plan vertical, et l'on construit la vraie grandeur de l'arête SC; pour cela on trace dans le plan vertical la droite SC_1 faisant avec Sa l'angle observé cSa, le triangle rectangle aC_1S est la vraie grandeur du triangle aSC; le point c se trouvera donc à une distance du point a égale à ac_1; nous décrivons du point a comme centre un cercle avec cette longueur.

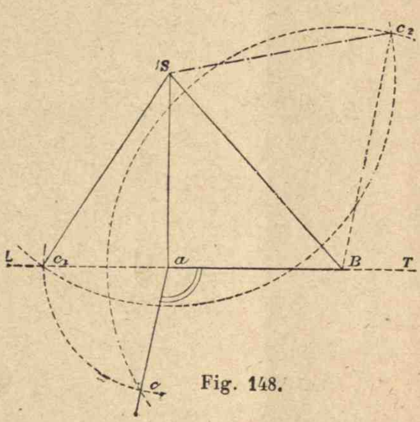


Fig. 148.

Nous construisons ensuite la vraie longueur de BC; dans le triangle SBC nous connaissons l'angle CSB et les longueurs SB et SC qui sont sur notre figure SB et SC_1, nous construisons le triangle et nous obtenons la longueur BC_2; de B comme centre avec BC_2 comme rayon nous décrivons un arc de cercle qui détermine le point c; l'angle cherché est caB.

Exercices. — 1° *On donne deux droites de front, construire une droite rencontrant ces deux droites et faisant avec elles des angles donnés.*

2° *On donne un plan par ses traces, et un point extérieur; mener par le point une droite faisant avec le plan horizontal et avec le plan donné des angles donnés.*

193. 2e cas. — *Deux faces* A *et* B *et le dièdre compris* (fig. 149.)

Nous plaçons l'une des faces B, par exemple, dans le plan de projection en cSa. L'arête Sc sépare la face B de la face A, nous rabattons la face A autour de Sc, et cette face vient en cSb_1, la troisième arête est rabattue en Sb_1. Nous prenons un plan vertical perpendiculaire à Sc, ce plan coupe le dièdre Sc formé par les deux faces B et A suivant le dièdre γ, en sorte que si nous menons la droite $d'c$ faisant

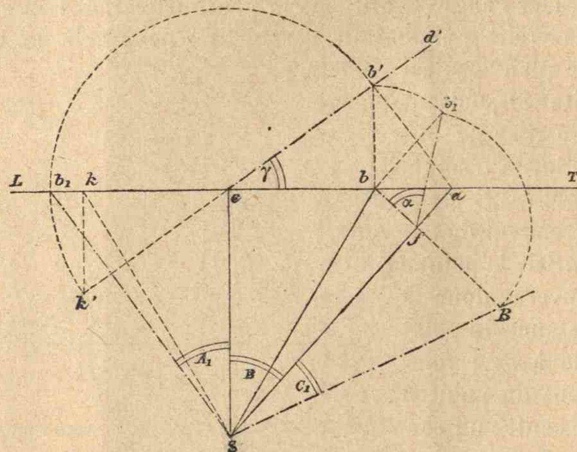


Fig. 149.

avec LT l'angle γ nous aurons la trace verticale du plan de la face A (44). Relevons le point b_1, ce point décrit un cercle dans le plan vertical et vient se placer sur la trace verticale de la face A en b', en sorte que Sb est la projection de la troisième arête, et le trièdre est construit. Nous déterminerons facilement la grandeur de la face C en rabattant le plan de cette face autour de Sa; le point b,b' vient en β; l'angle aSβ est la vraie grandeur de l'angle C, la construction nous donne en même temps en b'_1fb, le dièdre α suivant l'arête Sa (44).

On construirait le troisième dièdre suivant Sb, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le cas précédent, en appliquant la construction ordinaire de l'angle de deux plans (134). Le trièdre est toujours possible, et nous ne trouvons évidemment qu'une seule solution, car si l'on prenait le second point de rencontre k' de l'arc de cercle décrit par le point b avec la trace du plan de la face A, on trouverait Sk pour troisième arête, et le trièdre ainsi obtenu ne répondrait pas à la question, l'angle dièdre suivant Sc serait le supplément de l'angle donné γ.

194. 3e cas. — *Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles* A. C.γ. (fig. 150.)

Nous plaçons la face A dans le plan de projection en cSb.

L'arête Sb sépare la face A de la face C, nous rabattons cette face sur le plan de projection autour de Sb en bSc_1;

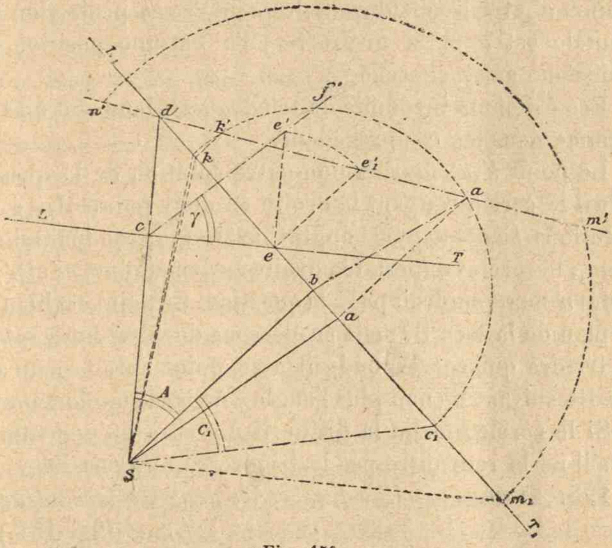


Fig. 150

le dièdre donné γ est le dièdre suivant Sc, nous prenons un plan vertical LT perpendiculaire à Sc, la droite $f'c$ qui fait avec la ligne de terre l'angle γ est la trace verticale du plan de la face B qui fait avec A l'angle γ.

C'est dans ce plan que doit venir se relever la troisième arête rabattue suivant Sc_1.

Si nous relevons le point c_1 de cette arête, ce point décrira un cercle autour de Sb, bc_1 en est le rayon et le point de rencontre de ce cercle avec le plan $f'c$S de la face B sera la position du point a.

Le cercle est contenu dans un plan vertical L_1T_1, nous allons construire la trace du plan de la face B sur le plan vertical L_1T_1 et prendre les points d'intersection du cercle et de la trace.

Nous avons donc à effectuer un changement de plan vertical par rapport au plan $f'c$S (52).

Les lignes de terre LT et L_1T_1 se croisent en e; nous élevons les perpendiculaires égales $ee' = ee'_1$ et de'_1 est la nouvelle trace verticale du plan.

Les points d'intersection du cercle avec la droite sont les points a' et k'; considérons le point a', sa projection horizontale est a et la droite Sa S$'a'$ est une position de la troisième arête cherchée.

Les éléments inconnus du trièdre s'obtiendront aisément comme dans les cas précédents.

Le point k',k, fournit une autre solution de la question. Ainsi le cercle coupant la droite en deux points il y a deux solutions. Cependant si l'angle C avait une grandeur telle que bSm_1, le cercle couperait la droite en deux points m' et n', et le point n' ne répondrait pas à la question. Ce point est bien dans le plan de la face B, mais au-dessous du plan horizontal, et le trièdre qui correspondrait à ce point aurait pour angle dièdre suivant Sc non plus l'angle γ mais le supplément de γ.

Si le cercle touche la droite il n'y aura qu'une solution, et s'il ne la rencontre pas le trièdre sera impossible.

195. 4e cas. — *Une face et les deux diédres adjacents.* A.β.α. (fig. 151.)

On pourrait considérer le trièdre supplémentaire ayant pour face B et C, suppléments de β et γ, et pour angle dièdre compris α supplément de A, et construire les éléments inconnus de ce trièdre. Il est préférable d'opérer directement.

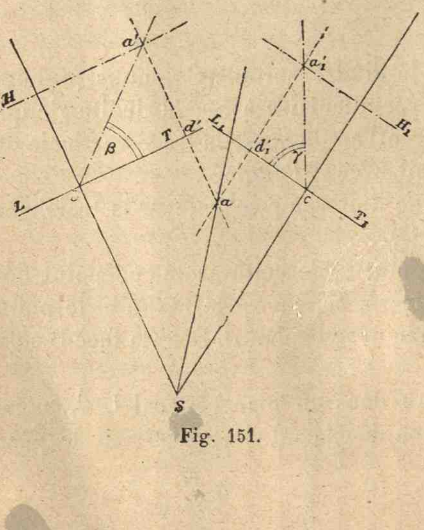


Fig. 151.

Nous plaçons la face

donnée A dans le plan de projection en bSc, nous connaissons les dièdres Sb et Sc qui sont les angles que font avec les plans de projection, les plans des faces B et C, et nous devons construire l'intersection de ces deux plans. Nous prenons un plan vertical LT perpendiculaire à Sb, il coupe la face C suivant $a'b$ faisant avec la ligne de terre l'angle β (49).

Nous prenons un second plan vertical L_1T_1 perpendiculaire à Sc, il coupe la face B suivant a'_1c faisant avec L_1T_1 un angle égal à γ (49).

Nous coupons les deux plans par un plan horizontal. La trace de ce plan sur le plan vertical LT est une droite H, et il détermine dans le plan $a'bS$ une horizontale dont la trace verticale est d' et dont la projection horizontale est $d'a$.

La trace de ce plan sur L_1T_1 est la droite H_1 à la même cote que H, et il détermine dans le plan a'_1cS une horizontale dont la trace verticale est au point a'_1, et dont la projection horizontale est d'_1a. Le point a où se rencontrent ces deux horizontales est un point de la troisième arête dont la cote est $a'd'$. La troisième arête a pour projection Sa et est déterminée.

C'est la construction que nous avons donnée pour l'intersection de deux plans déterminés par leurs traces horizontales et les angles qu'ils font avec le plan horizontal.

Les autres éléments du trièdre seront faciles à obtenir. Le problème admet encore une seule solution à moins qu'on ne construise la solution symétrique par rapport au plan de la face A.

196. 5e cas. — *Une face, un dièdre adjacent, le dièdre opposé* A.β.α (fig. 152.)

Nous prenons pour plan horizontal le plan de la face adjacente aux deux dièdres donnés. C'est le plan de la face C qui est inconnue.

Nous traçons l'arête Sb, intersection de cette face avec la face donnée A et nous rabattons la face A en bSc_1 sur le plan horizontal.

Prenons ensuite un plan vertical LT perpendiculaire à Sb, la trace verticale du plan de la face A sera $c'b$ faisant avec la ligne de terre l'angle β (49). Nous pouvons relever l'arête rabattue en Sc_1 le point c_1 vient en c', et Sc est la projection horizontale de l'arête.

Le plan de la troisième face B passe par l'arête Sc et fait avec le plan de la face C, c'est-à-dire avec le plan horizontal l'angle donné α, sa trace verticale passera par le point c'. Supposons qu'on ait fait tourner ce plan autour de la verticale $c'c$ pour l'amener à être perpendiculaire au plan vertical (123). Alors la trace verticale sera $c'\delta$ faisant

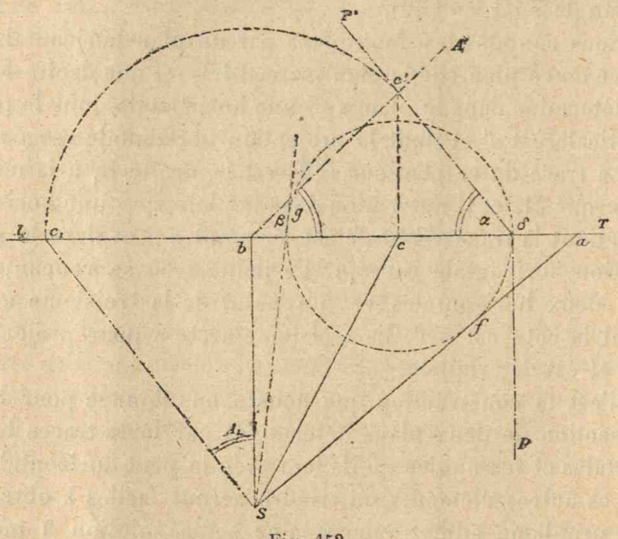


Fig. 152.

avec la ligne de terre l'angle α du plan avec le plan horizontal, sa trace horizontale sera δP perpendiculaire à LT (49).

Quand ce plan reviendra à sa position, sa trace horizontale restera tangente au cercle décrit du point c comme centre et tangent à cette trace, c'est-à-dire au cercle dont le rayon est $c\delta$; d'ailleurs cette trace horizontale qui sera l'intersection de la face B avec la face C, c'est-à-dire la troisième arête, devra passer par le sommet S. Nous allons donc mener du point S la tangente Sf au cercle $c\delta$.

Cette tangente est la trace de la face B; c'est la troisième arête Sa, et le trièdre est construit; bSa est la vraie grandeur de la face C. Les éléments inconnus du trièdre sont faciles à obtenir. Du point S on peut mener au cercle $c\delta$ la tangente S*g*. Cette tangente sera bien la trace d'un plan faisant avec le plan horizontal l'angle α; mais cet angle α ne sera pas compris dans le trièdre qui renfermera son supplément, et le trièdre ainsi obtenu ne répond pas à la question.

On eût pu encore ramener ce cas au troisième, au moyen du trièdre supplémentaire.

197. **6e cas.** *Les trois dièdres* $\alpha.\beta.\gamma$.

Nous donnerons plus tard une solution directe pour ce cas, actuellement nous ne pouvons indiquer que la solution au moyen du trièdre supplémentaire dont les trois faces seraient $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$; on construira les dièdres A_1, B_1, C_1, et les faces du dièdre proposé seront $180 - A_1$, $180° - B_1$, $180° - C_1$.

198. **Angle trièdre trirectangle.** — Si l'on considère les projections horizontales de trois droites partant d'un même point et faisant entre elles des angles obtus, ces trois droites peuvent être considérées comme les projections des arêtes d'un angle trièdre trirectangle.

Si l'on donne la trace d'une des arêtes sur le plan de projection, la position du trièdre est déterminée. On donne les trois lignes S*a*, S*b*, S*c* et la trace *a* de l'une d'elles. Nous allons déterminer d'abord la trace du trièdre sur le plan de projection (fig. 153).

Une arête du trièdre est perpendiculaire au plan de la face opposée, sa projection fait un angle droit avec la trace de cette face. Ainsi la trace de la face *a*S*b* passe par le point *a*, et est perpendiculaire sur S*c*, c'est donc *ab*; de même la trace de la face *a*Sc passe par le point *a* et est perpendiculaire sur S*b*, c'est donc *ac*; la troisième trace est *cb*, et comme vérification cette trace est perpendiculaire sur S*a*.

La trace du trièdre est le triangle *abc*.

Nous pouvons construire la cote du sommet; le plan vertical *c*S*d* coupe la face *a*S*b* suivant une droite S*d* rectangulaire avec S*c*; donc nous décrivons une demi-circonférence sur cd et nous élevons une perpendiculaire au point S, la longueur SS′ sera la cote du point S.

cS′ sera la vraie longueur de l'arête Sc et l'angle S′cd sera l'angle de cette arête avec le plan horizontal.

Il est facile de construire les longueurs des autres arêtes et leurs angles avec le plan horizontal. Ainsi pour l'arête Sb, nous faisons tourner cette arête autour de la verticale

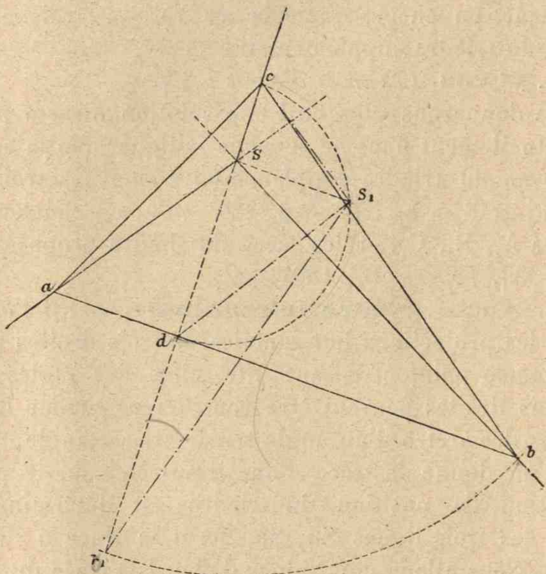


Fig. 153.

SS′, de manière à l'amener dans notre plan vertical, le point b vient en b_1 (111); S′b_1 est la longueur de l'arête, et l'angle S′b_1 S est son angle avec le plan horizontal. Nous ferons pour la troisième des constructions analogues.

199. Exercices. — 1° *On donne la projection et la longueur d'une arête d'un angle trièdre trirectangle, la longueur d'une autre arête. Construire le trièdre.* (Fig. 154.)

Sa est la projection donnée, a est la trace.

Nous prenons pour plan vertical le plan qui projette l'arête Sa, la projection verticale du point S est sur la verticale SS_1', la vraie longueur de l'arête est connue, si nous menons l'oblique aS_1 égale à la longueur donnée, le point S_1 sera donc la projection verticale du point S.

Le plan vertical LT coupe la face opposée à l'arête Sa suivant une perpendiculaire à cette arête ; menons S_1d' à angle droit sur S_1a, nous aurons la trace verticale de la face, et sa trace horizontale sera $bd'c$, rectangulaire sur la ligne de terre. L'arête Sb dont la longueur est donnée est dans la face opposée à Sa, et sa trace est sur $bd'c$. Amenons cette ligne dans le plan vertical par une rotation autour de la verticale SS_1 (105), elle viendra en S_1b_1, cette ligne ayant la grandeur donnée, et sa trace horizontale b_1 décrira un cercle qui rencontrera bc au point b trace de l'arête.

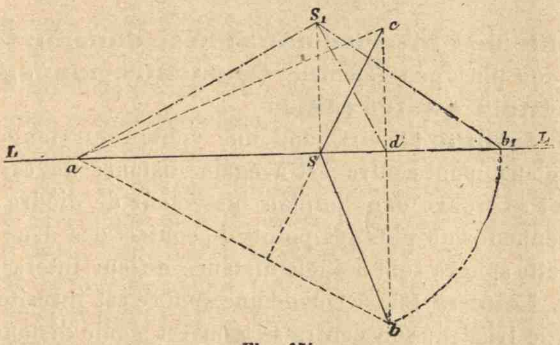


Fig. 154.

L'arête est Sb, par suite la troisième a pour projection Sc perpendiculaire à ab.

On obtiendra évidemment une solution symétrique en prenant le second point de rencontre du cercle lieu de la trace b_1 avec la ligne $bd'c$.

2° On donne la projection horizontale d'une arête, la cote du sommet, l'angle d'une autre arête avec le plan horizontal. Construire le trièdre.

3° On donne la projection horizontale d'une arête, son angle avec le plan horizontal, l'angle d'une autre arête avec le plan horizontal. Construire le trièdre.

4° Sur un triangle acutangle donné construire un trièdre trirectangle.

5° Construire un plan qui coupe un trièdre trirectangle suivant un triangle égal à un triangle donné.

SPHÈRE INSCRITE

ET SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE

Problème : Inscrire une sphère dans un tétraèdre, ou plus généralement **Construire une sphère tangente à quatre plans.**

200. **Lemme I.** — Quand une sphère est tangente à deux plans, son centre est à égale distance de ces deux plans et se trouve dans le plan bissecteur de dièdre qu'ils comprennent ; de plus les points de contact des deux plans avec cette sphère sont à égale distance de leur intersection

201. **Lemme II.** — Quand une sphère est inscrite dans un angle trièdre, son centre se trouve à égale distance des trois faces, et par conséquent il est sur la droite suivant laquelle se coupent les trois plans bissecteurs des dièdres formés par les trois faces. Les points de contact avec les trois faces sont à égale distance du sommet du trièdre.

202. **Lemme III.** — 1° Dans un tétraèdre les six plans bissecteurs intérieurs des angles dièdres se coupent en un même point qui est le centre de la sphère inscrite (fig. 155.)

2° Si l'on considère dans un tétraèdre SABC les trois dièdres extérieurs formés par une face SBC et les prolongements des trois faces adjacentes, les plans bissecteurs de ces trois dièdres suivant SB, SC, BC et les plans bissecteurs des dièdres intérieurs suivant SA, AC, AB, se coupent en un même point qui est le centre d'une sphère ex-inscrite, tangente extérieurement à la face SBC.

3° Si l'on considère dans le tétraèdre SABC, les deux plans bissecteurs extérieurs des dièdres suivant SB et SC, formés par la face SBC et les prolongements des deux faces adjacentes SAB et SAC, les plans bissecteurs extérieurs des dièdres suivant AC et AB formés par la face ABC et les prolongements des deux faces SAB, SAC, et les plans bissecteurs intérieurs suivant AS et BC ; ces six plans se coupent en un même point qui est le centre d'une sphère inscrite dans le comble prismatique BC ou dans son opposé AS.

203. Considérons le tétraèdre SABC, cherchons les lieux de tous les points également distants des trois faces SAB, SBC, SAC, aboutissant au sommet S.

Les trois plans bissecteurs intérieurs se coupent suivant une droite SK qui est le lieu des points intérieurs au trièdre également distants des trois faces (202).

Si nous considérons les dièdres extérieurs suivant SA et SB, les plans bissecteurs extérieurs et le plan intérieur suivant SC se coupent suivant une droite SF, lieu des points également distants de la face ASB extérieurement et des autres faces intérieurement (202).

Nous aurons de même une droite SL, lieu des points également distants de la face BSC extérieurement et des autres faces extérieurement (202).

Nous aurons enfin une droite SP, lieu des points également distants de la face ASC extérieurement et des autres faces intérieurement (202).

Les centres de toutes les sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre seront sur ces droites.

Nous appliquons le lemme 3 : Le plan bissecteur intérieur d'un des dièdres de la face ABC, du dièdre AB, par exemple, rencontre la droite SK au point O_1, centre de la sphère inscrite, rencontre les droites SL et SP, aux points O_3, O_5, centres des sphères ex-inscrites aux faces BSC, ASC ; il rencontre la droite SF en un point O_7 qui sera le centre de la sphère inscrite dans le comble prismatique SC ou dans son opposé AB.

Le plan bissecteur extérieur du dièdre AB, donne sur la droite SK le point O_2, sur la droite SF le point O_4, centres de sphères ex-inscrites aux faces ABC et ASB, et rencontre les droites SL et SP en deux points O_6, O_8, centres des

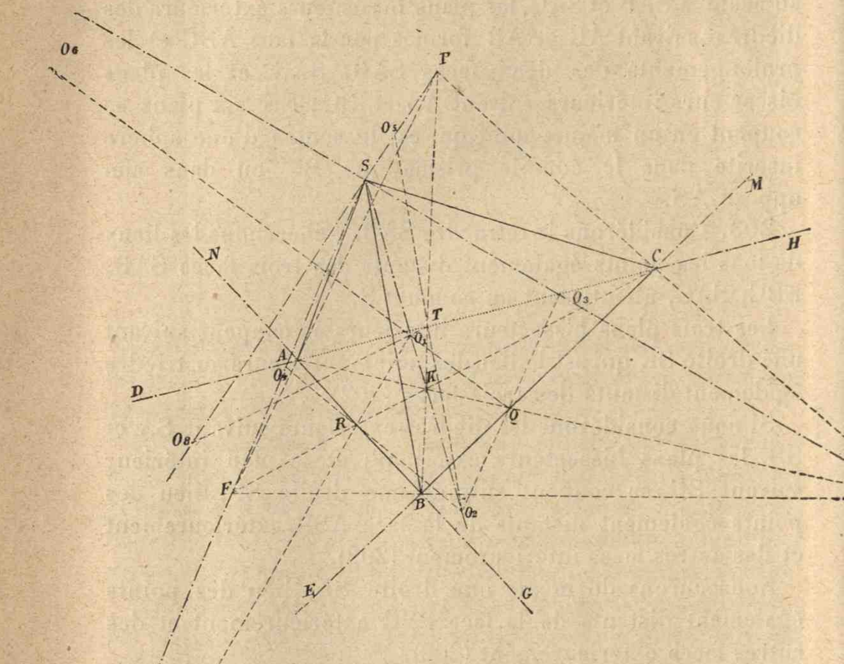


Fig. 155.

sphères inscrites dans les combles prismatiques AC, BC, ou dans leurs opposés.

Nous aurons donc en tout huit sphères possibles.

Du reste nous renvoyons pour la discussion du nombre des sphères et des conditions dans lesquelles quelques-unes de ces sphères s'éloignent à l'infini à la géométrie élémentaire de M. Rouché.

Nous pouvons effectuer par les méthodes de la géométrie descriptive les constructions que nous venons d'indiquer.

Nous plaçons la face ABC du tétraèdre dans le plan horizontal, et nous prenons un plan vertical perpendiculaire à l'arête AB, le sommet se projette en SS' (fig. 155 *bis*).

Nous construisons d'abord les plans bissecteurs des dièdres intérieurs et extérieurs dont l'arête est AS.

C'est la construction de l'angle de deux plans que nous appliquons (134), nous prenons pour plan vertical auxiliaire AS, et l'arête se projette en AS'_1, le plan perpendiculaire à l'arête a pour trace horizontale *acb*, et *cd'* est sa trace verticale sur le plan AS.

Le sommet *d'* est rabattu en d_1, et l'angle intérieur des deux plans est bd_1a ; nous menons la bissectrice d_1f et la perpendiculaire d_1g qui sera la bissectrice de l'angle extérieur.

Les traces des deux plans bissecteurs sont A*f* et A*g* (135).

Nous construisons de même les deux plans bissecteurs des dièdres suivant SB ; l'angle des deux plans est rabattu en hl_1k, les deux bissectrices sont l_1m et l_1n ; les traces des deux plans bissecteurs B*m* et B*n* (134 et 135).

Les traces A*g* et B*n* donnent le point F trace d'une des droites ; les traces A*f* et B*m* donnent le point K trace de la seconde droite. (Comme vérification les trois points CKF sont sur la trace du plan bissecteur du dièdre intérieur SC et sont en ligne droite (202) ; A*f* et B*n* donnent le point L trace de la troisième droite ; A*g* et B*m* donnent le point P trace de la quatrième droite. (Comme vérification les trois points P. C. L. sont sur la trace du plan bissecteur du dièdre extérieur SC et sont en ligne droite (202).

Les quatre droites lieux de tous les centres sont SK, SF, SL, SP, et nous figurons leurs projections verticales.

L'arête AB est perpendiculaire au plan vertical ; par suite S'A'P' est la vraie grandeur du dièdre suivant AB ; nous menons les deux plans bissecteurs dont les traces verticales sont *v'*A'*t'* et *r'*A'*q'* ; le premier donne sur les quatre droites les centres O'_1, O_1 ; O'_3, O_3, O'_5, O_5, centres de la sphère inscrite et de deux sphères ex-inscrites, et détermine sur la droite S'F' le centre de la sphère du comble AB. Le plan *r'*A'*q'* donne les centres O'_2, O_2 ; O'_4, O_4 de deux sphères ex-inscrites ; il coupe la droite SL, S'L' en un point situé au-dessus du sommet et qui est le centre de la sphère du comble SA opposé à BC, il coupe la droite SP, S'P' en un point au-dessus du sommet et qui est le centre de la sphère inscrite dans le comble SB opposé à AC.

Les rayons de ces sphères sont faciles à obtenir, car elles sont tangentes au plan horizontal et au plan S′A′, AB.

204. Autre solution. — *Nous devons signaler une construction donnée récemment par M. Hermary*

L'auteur, s'appuyant sur le lemme 1 (200) remarque que si l'on rabat l'une sur l'autre les faces du dièdre qui comprend la sphère, les deux points de contact coïncideront après le rabattement.

Ensuite, s'appuyant sur le lemme 2 (201), il remarque que si l'on rabat les trois faces du tétraèdre sur le plan de la base, intérieurement, les quatre points de contact coïncideront en un même point qui sera également distant des rabattements des trois sommets. Donc le point de contact sera le centre du cercle passant par les rabattements des trois sommets.

Soit SABC la projection horizontale du tétraèdre, je rabats la face ASB sur le plan horizontal en la faisant tourner autour de AB, la cote du sommet est donnée, je la prends égale à SS′, et je fais la construction connue pour le rabattement (131), le point S vient en S_1 ; la même construction répétée pour les autres faces donne les rabattements S_2 et S_3 ; je mène des perpendiculaires au milieu des droites S_1S_2 et S_2S_3, le point de rencontre de ces perpendiculaires donne le point O, centre du cercle qui passe par les trois points, et projection du point de contact de la sphère inscrite avec le plan de base ; il faut encore déterminer la cote de ce point ; pour cela nous allons relever le point de contact avec l'une des faces, avec la face ASB, par exemple.

Or la construction du rabattement S_1 nous a donné en $S\alpha S'$ l'angle de la face avec le plan horizontal, nous allons faire un relèvement au moyen de la ligne de plus grande pente.

Nous imaginons le plan vertical perpendiculaire à l'arête AB et passant par le point O, nous rabattons ce plan ; sa trace horizontale est O*f* perpendiculaire à AB, et nous menons par *f* une droite parallèle à *a*S′, (elle fera avec *of* l'angle de la face et du plan de base). Nous reportons la

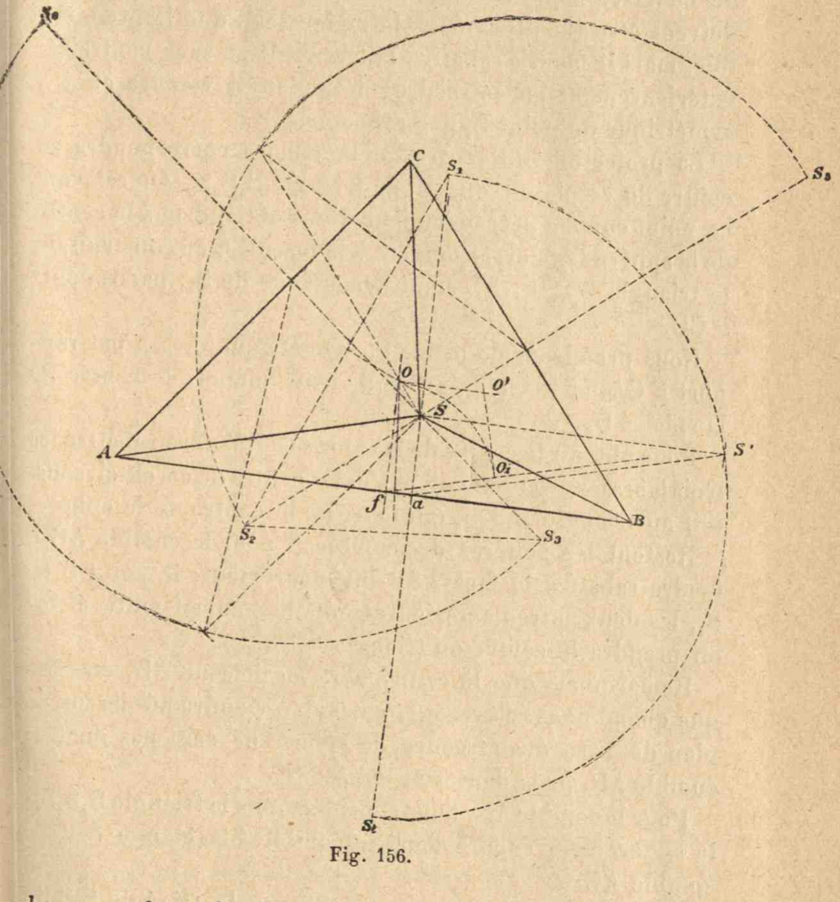


Fig. 156.

longueur *fo* en *fo*$'_1$. Le point O$'_1$ donne la position du point de contact de la sphère avec SAB.

Nous élevons au point *o* une perpendiculaire à *fo*, au point O$'_1$ une perpendiculaire à *a*S′, elles se croisent au point *o*′ : *oo*′ est la cote du centre, et en même temps le rayon de la sphère.

Si nous voulons déterminer une autre sphère, par exemple, la sphère ex-inscrite O'_4 de la figure précédente, nous ferons toujours les rabattements des trois faces du tétraèdre, de manière à obtenir la superposition des points de contact; nous voyons alors que les faces BSC, ASC doivent être rabattues dans le même sens que la première fois, mais il faudra rabattre la face ASB en sens contraire, extérieurement au tétraèdre; le point S viendra en S_4, symétrique du point S_1 par rapport à AB.

La projection du centre de la sphère correspondra au centre du cercle circonscrit au triangle $S_4S_2S_3$. On relèvera ce point comme précédemment. Nous obtiendrons le centre de la sphère O_3, correspondant à la face BSC en construisant le triangle $S_1S_3S_5$, S_5, étant symétrique de S_2, par rapport à CB.

Nous prendrons de même S_6, symétrique de S_3, par rapport à CA, et le triangle $S_2S_1S_6$ nous donnera le centre de la sphère O_5.

Pour obtenir le centre de la sphère O_2 il faudra rabattre les trois faces extérieurement, et c'est le centre du cercle circonscrit au triangle $S_4S_5S_6$ qui fournira le centre de la sphère.

Restent les sphères des combles : pour le comble AB il faudra rabattre la face ASB intérieurement; le point S en S_1, les deux autres extérieurement, le sommet en S_5 et S_6; on prendra le centre du triangle $S_1S_5S_6$.

Remarquons que le centre sera au delà de AB, en sorte que quand nous relèverons, ce centre viendra au-dessus du plan de base du tétraèdre, la sphère ne sera pas dans le comble AB, mais dans son opposé SC.

Pour le comble AC, nous considérerons le triangle $S_3S_4S_5$; la sphère sera encore dans le comble SB et non dans le comble AC.

La dernière sphère sera donnée par le triangle $S_2S_4S_6$. Cette fois le centre se trouvera au-dessous de CB, c'est-à-dire au-dessous du plan horizontal, et la sphère sera bien dans le comble CB.

Dans l'un de ces triangles $S_1S_5S_6$, ou $S_3S_4S_6$, ou $S_2S_4S_6$, les trois sommets peuvent être en ligne droite, ce qui rejetterait à l'infini l'une des sphères des combles.

205. Problème : Circonscrire une sphere à un tétraèdre, ou construire une sphère passant par quatre points (fig. 157). — Nous pouvons toujours supposer qu'on a mis une face du tétraèdre ou trois des points dans le plan horizontal. Nous avons donc pris les trois points A,B,C dans le plan horizontal. Le quatrième point est projeté au point S dont on connaît la cote $\sigma S'$.

Le centre de la sphère étant également distant des deux points A et C, se trouvera dans le plan vertical perpendicu-

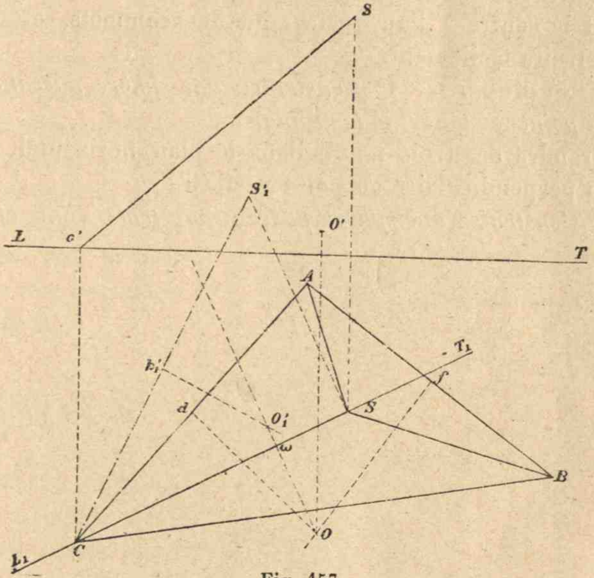


Fig. 157.

laire au milieu de AC ; de même il se trouvera dans le plan vertical perpendiculaire au milieu de AB ; ces deux plans se coupent suivant une droite verticale dont la trace horizontale est au point de rencontre *o* des traces *do* et *fo*, de ces plans et qui est le lieu des points également distants des trois points A,B,C.

Nous obtiendrons un autre lieu du centre de la sphère en construisant un plan perpendiculaire au milieu d'une des trois autres arêtes, l'arête CS par exemple. Pour faire facilement cette opération, nous effectuons un changement de plan vertical en prenant le plan qui projette la droite CS, et pour ligne de terre L_1T_1 ; la nouvelle projection verticale de la droite est CS'_1, la verticale du point o se projette en oo'_1 ; le plan perpendiculaire au milieu de la droite CS'_1 est perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale est $k'_1o'_1$, et il rencontre la verticale oo'_1 au point o'_1 qui est le centre de la sphère ; sa cote est $\omega o'_1$; en revenant au système primitif LT, nous trouvons en oo' le centre de la sphère cherchée ; son rayon est la vraie grandeur de la droite qui joint le centre à l'un quelconque des sommets, et on le construira facilement.

Exercices. — 1° *Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan.*

Prendre les trois points dans le plan horizontal, et le plan perpendiculaire au point vertical.

2° *Construire une sphère passant par trois points et tangente à une droite.*

POLYÈDRES RÉGULIERS

Nous admettrons qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers, et que tout polyèdre régulier est inscriptible et circonscriptible à la sphère.

La démonstration de ces propositions se trouve dans les traités de géométrie.

Nous allons nous proposer de construire les projections des polyèdres réguliers.

TÉTRAÈDRE

206. Le tétraèdre est compris sous quatre faces qui sont des triangles équilatéraux égaux (fig. 158).

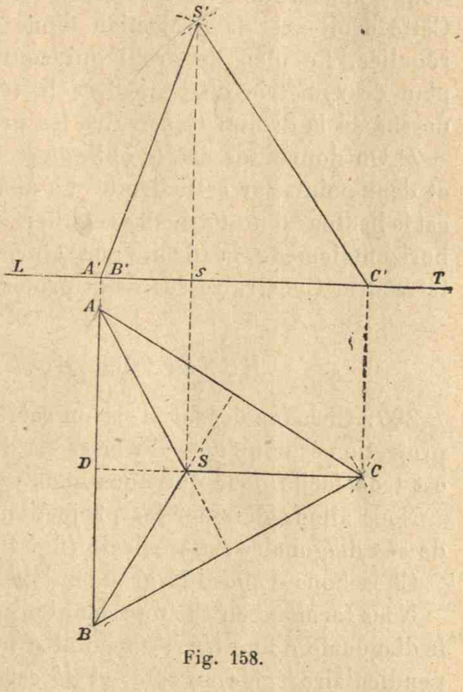


Fig. 158.

Plaçons une face ABC dans le plan horizontal, tout tétraèdre qui aura pour base le triangle ABC et dont les faces seront égales entre elles, aura son sommet projeté au point S, centre du triangle.

Nous allons déterminer la cote du point S par la condition que le tétraèdre soit régulier.

Nous remarquons que SC est la projection d'un côté du tétraèdre, c'est-à-dire d'une ligne qui doit être égale à AC ; par conséquent SC est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont la hauteur est l'autre côté et dont l'hypoténuse est égale à AC.

Nous prenons le plan vertical parallèle à SC, le triangle est $S'sC'$ et $S's$ est la cote du sommet, la projection verticale du tétraèdre est $A'S'C'$.

Remarquons que $A'S'$ est la vraie grandeur de SD, c'est-à-dire de l'apothème du triangle équilatéral ASA, et par conséquent $S'A'$ est égal à DC.

Exercices sur le tétraèdre régulier. — 1° On donne une droite Sa, $S'a'$ située dans un plan de profil. Cette droite est la projection d'une arête d'un tétraèdre régulier. Le plan de profil qui contient la droite est un plan de symétrie du tétraèdre; le tétraèdre est situé au-dessus de la droite. Construire les projections.

2° On donne une droite oblique par ses deux projections et deux points sur cette droite. La distance des deux points est la hauteur d'un tétraèdre régulier, et le plan qui projette horizontalement la droite est un plan de symétrie du tétraèdre. Construire ses deux projections.

HEXAÈDRE OU CUBE

207. Chacune des faces est un carré. La construction des projections lorsqu'une des faces est dans le plan horizontal est trop facile pour que nous nous y arrêtions.

Nous allons dessiner les projections du cube quand une de ses diagonales est verticale (fig. 159 *bis*).

Cherchons d'abord la grandeur de cette diagonale.

Nous formons en cab un triangle rectangle isocèle, cb est la diagonale d'une face; au point c nous menons une perpendiculaire égale au côté, et db est la diagonale. Nous la plaçons verticalement en bd, $b'd'$ et nous construisons le rectangle $c'd'g'b'$ égal au double de dcb. Ce rectangle, qui est la section du cube par un plan qui passe par la diagonale et un côté, représente en même temps ici la projection verticale du solide.

Remarquons que les trois arêtes qui se croisent au sommet $d'd$ sont également inclinées sur le plan horizontal,

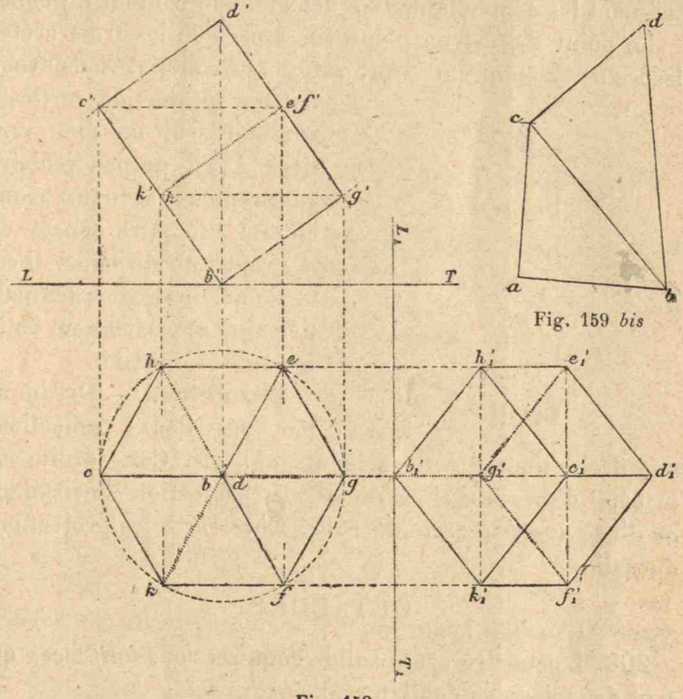


Fig. 159 *bis*

Fig. 159.

et font entre elles des angles égaux, leurs projections hori zontales seront donc trois droites rayonnant du point d et faisant entre elles des angles égaux, de plus elles seront égales entre elles.

De même les trois arêtes partant du point $b'b$ auront pour projections horizontales trois droites égales, et égales aux trois arêtes issues du point d, faisant entre elles des angles égaux, l'arête $b'g'$ se projettera en bg sur le prolongement de l'arête cd, et par suite les autres arêtes se prolongeront réciproquement.

Donc les six sommets seront à égale distance du centre et sur des droites faisant entre elles des angles de 60°. La projection horizontale du cube est donc un hexagone régulier. Les sommets c' et g' se projettent en c et g, ce qui fait connaître la longueur des projections des arêtes, et en joignant les sommets deux à deux on a le contour du cube.

Le point $d'd$ est un point vu, ainsi que les trois arêtes issues de ce point sur la projection horizontale. Nous avons fait une projection verticale auxiliaire sur un plan vertical L_1T_1 perpendiculaire au premier, et nous avons obtenu un autre aspect de la projection du cube. Il est facile de distinguer les parties vues et cachées sur cette seconde projection.

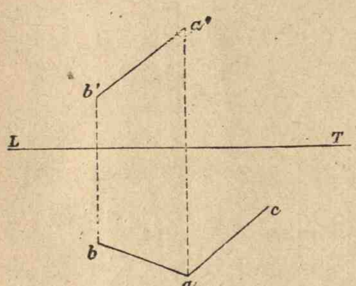


Fig. 159 *ter*.

Exercice. — On donne par ses deux projections une droite limitée à deux points ab, $a'b'$. Cette droite est le côté d'un cube ; on donne la projection horizontale ac d'une seconde arête du cube. Construire les projections du solide.

OCTAÈDRE

208. L'octaèdre est le solide compris sous *huit* faces qui sont des triangles équilatéraux égaux.

Construisons un carré $bcde$ dont le côté soit égal au côté donné de l'octaèdre, et menons les diagonales qui se coupent au point a. Cette figure peut être regardée comme la projection horizontale d'une pyramide quadrangulaire régulière dont nous allons déterminer la hauteur par la condition que chacun des triangles, tel que acd par exemple, soit la projection d'un triangle équilatéral. ae est donc le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à ed, le troisième côté est la hauteur qui, par conséquent, est égale à ad.

Nous prenons un plan horizontal $d'b'$ à une cote égale à *ad*, les quatre points *bcde* sont projetés en *b'c'd'e'*, le sommet *a* en *a'* et la pyramide est formée ; nous lui superposons une autre pyramide égale dont le sommet est en *f'f*, et nous avons ainsi un solide compris sous huit triangles équilatéraux.

Nous avons fait une projection verticale sur un plan L_1T_1 parallèle à la diagonale *bd*.

Nous observons que dans ce solide toutes les faces sont

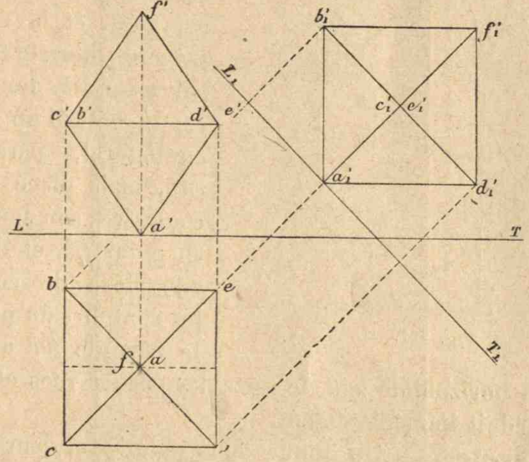


Fig. 160

égales et parallèles deux à deux, mais que ces triangles égaux et parallèles sont disposés en sens inverse.

Tout plan passant par deux côtés adjacents coupe le solide suivant un carré.

Nous allons nous proposer de construire les projections du solide posé sur une de ses faces.

Ainsi on donne la face *abc* dans le plan horizontal. Nous plaçons un côté perpendiculaire au plan vertical. Considérons le carré adjacent au côté *cb* ; son plan sera perpendiculaire au plan vertical, le côté du carré opposé à *cb* aura donc pour projection verticale un point qui se trouvera à une distance du point *c* égale au côté de l'octaèdre. Nous décrirons donc du point *c'* comme centre avec un rayon égal au côté un arc de cercle.

De plus, ce côté du carré forme avec le point a un triangle équilatéral, donc sa distance au point a est égale à l'apothème du triangle équilatéral; nous décrivons du point a comme centre avec $a'c'$ comme rayon, un arc de cercle qui coupe le premier au point d', projection verticale du côté du carré opposé à bc Le plan du carré a pour trace verticale $b'd'$, et le carré se projette horizontalement suivant $cdeb$. Le côté dc est le côté d'un triangle équilatéral, parallèle à cab, mais placé en sens contraire; son sommet est au point ff', et il est facile alors de compléter les contours du polyèdre; le triangle fed a sa projection horizontale *vue*, le reste des parties vues et cachées s'en déduit immédiatement.

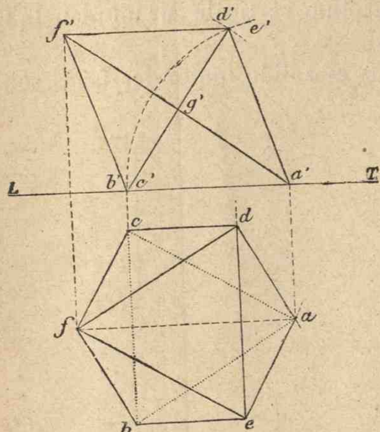


Fig. 161.

Exercice. — On donne deux points par leurs projections, et la cote d'un troisième point qu'on déterminera par la condition que le triangle formé par les trois points soit équilatéral. Construire sur ce triangle un *octaèdre régulier*.

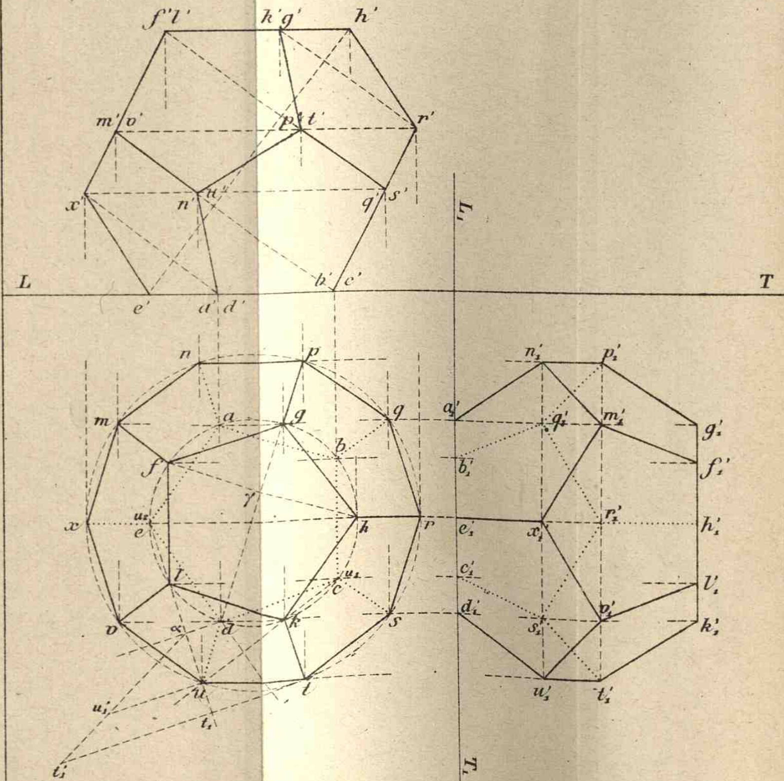
DODÉCAÈDRE

209. Le dodécaèdre est le solide compris sous *douze* faces qui sont des pentagones réguliers égaux. (fig. 162.)

Nous plaçons une de ces faces $abcde$ sur le plan horizontal, un des côtés étant perpendiculaire au plan vertical.

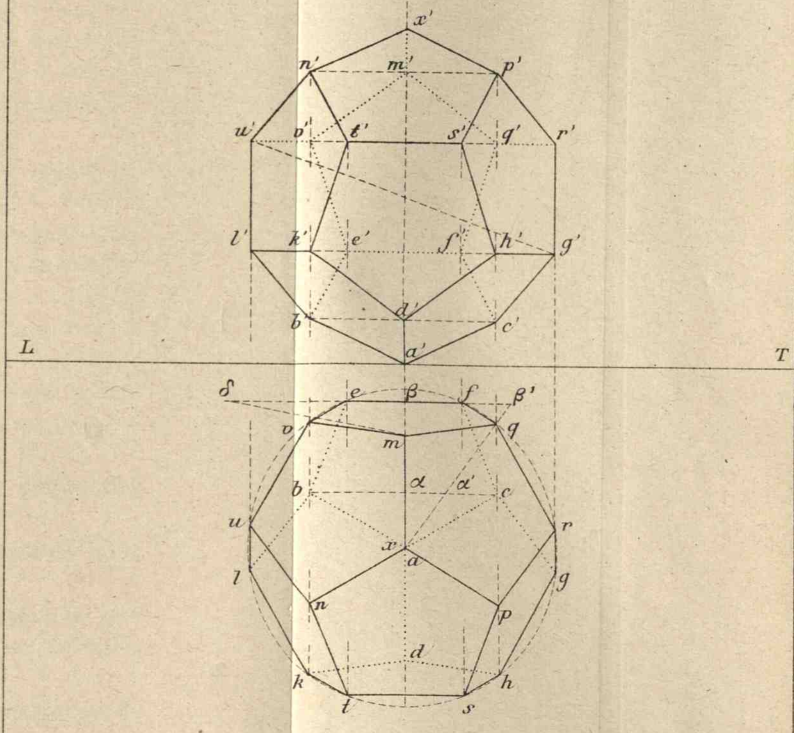
Au côté ed est adjacent un pentagone que nous pouvons supposer rabattu sur le plan horizontal autour de de, il coïncidera avec $abcde$, et un sommet u sera rabattu en u_1.

162



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

163



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

De même, au côté *cd* correspond un pentagone qui, rabattu, se confondra avec *abcde*, et le sommet u se rabattrait en u_2. Il faut relever le point rabattu en u_1 et u_2. Le point u_1 décrit le cercle u_1u situé dans un plan perpendiculaire à *ed* (132); le point u_2 décrit le cercle u_2u situé dans le plan perpendiculaire à *cd* (132), l'intersection donne la projection horizontale u, et l'arête *ud* est évidemment dirigée suivant un rayon du cercle circonscrit au pentagone.

Nous pouvons déterminer la cote du point u : c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont $u\alpha$ est un autre côté et dont l'hypoténuse est αu_2, c'est donc uu'_1 et l'angle $u\alpha u'_1$ est l'angle que fait avec le plan horizontal le plan du pentagone adjacent au côté *cd* (132).

L'arête partant du point c sera dirigée encore suivant le rayon et égale à *du*, ce qui nous donnera le point s. Il nous reste à déterminer le dernier sommet du pentagone. Ce sommet est à une distance de la base égale à l'apothème du pentagone; prenons sur $\alpha u'_1$ une longueur $\alpha t'_1$ égale à l'apothème, αt_1 sera la projection de l'apothème, le point t situé sur la perpendiculaire au milieu de *dc* sera le sommet cherché. Nous pouvons donc obtenir *cinq* pentagones, *udest*, *scbqr*, *bqpna*, *naexm*, *exvud*, groupés autour du pentagone horizontal.

Les sommets *usqnx* sont dans un même plan horizontal dont la cote est uu'_1.

Les sommets *trpmv* sont dans un plan horizontal dont la cote est $t_1t'_1$.

Nous verrons tout à l'heure que les dix sommets que nous venons de trouver sont sur une même circonférence.

Nous pouvons superposer à cette première couronne de *six* pentagones, *six* autres pentagones placés en sens inverse; ainsi *vu* et *ut* seraient deux côtés adjacents, les côtés *tk* et *vl* dirigés suivant des rayons et égaux à *du* formeraient avec *lk* un pentagone égal à l'un des pentagones construits, et l'on aurait les cinq pentagones *vlktu*, *vlfmx*, *mfgpn*, *pghrq*, *rhkts*, et enfin le pentagone horizontal *fghkl*, égal au pentagone de base, inscrit dans le même cercle, mais inversement placé; ce pentagone est dans un plan horizontal dont la cote au-dessus des sommets *trpmv* est égale à la cote des points *usqnx* au-dessus du plan horizontal.

Il est donc facile de construire la projection verticale. Faisons la distinction des parties vues et cachées. Sur la projection horizontale, le pentagone supérieur *fghkl* est vu ainsi que les arêtes qui partent de ses sommets; on complète alors le contour du polyèdre en plein, et tout le reste est caché.

Sur la projection verticale tout est vu, parce qu'il y a toujours deux pentagones qui ont même projection verticale.

Nous avons construit une projection auxiliaire sur un plan vertical L_1T_1 perpendiculaire au premier et parallèle aux arêtes *bc* et *fl*. La figure offre une grande symétrie; et la distinction des parties vues ne présente aucun embarras.

Nous avons dit que les sommets se projetaient sur le même cercle. En effet, le dodécaèdre est inscriptible dans une sphère; le centre est au milieu de la hauteur, et par suite à égale distance des deux plans horizontaux $p't'p'v'm'$ et $s'q'u'n'x'$, par suite ces plans déterminent dans la sphère des cercles égaux qui ont même projection horizontale.

Nous observerons encore que toutes les faces sont deux à deux parallèles, égales, mais disposées en sens inverse, que tous les sommets sont deux à deux sur des droites égales passant par le centre de la sphère circonscrite et partagées en ce point en deux parties égales. Toutes ces droites sont des axes; l'un d'eux est projeté en vraie grandeur en $e'h'$.

210. *Nous allons nous proposer de construire les projections d'un dodécaèdre dont un axe est vertical* (fig. 163).

D'un même sommet partent trois arêtes qui font avec l'axe des angles égaux et qui se projettent sur le plan horizontal suivant trois droites *ab*, *ac*, *ac* faisant entre elles des angles de 120°.

Nous plaçons une de ces droites ad, $a'd'$ perpendiculaire à la ligne de terre.

Les extrémités bcd de ces arêtes sont sur une même horizontale, puisque les droites sont égales et font des angles égaux avec le plan horizontal, donc leur distance est la vraie grandeur de la diagonale du pentagone qui forme une des faces du solide et elle se projettera suivant une parallèle à la ligne de terre; nous connaissons le côté du dodécaèdre donné, nous pouvons donc construire ce pentagone et la diagonale, et placer la longueur trouvée entre les deux lignes ab et ac.

Soit bc la projection horizontale de la diagonale; nous allons déterminer sa cote.

La distance $a\alpha$ est la projection de la distance du sommet à la diagonale, distance que nous pouvons connaître. (Nous avons fait la figure 163 avec les mêmes dimensions que la figure 162, en sorte que la diagonale bc de la figure 163 est égale à la diagonale fh de la figure 162, et la longueur $a\alpha$ est la projection de la longueur $g\gamma$.)

Nous construisons le triangle rectangle $a\alpha\alpha'$ dans lequel $a\alpha'$ est égal à $g\gamma$ de la figure 162; $\alpha\alpha'$ est la cote de bc, et l'angle $\alpha a\alpha'$ est l'angle du plan du pentagone qui contient bac avec le plan horizontal.

Nous prenons la longueur $a\beta'$ égale à l'apothème du pentagone; la longueur $\beta\beta'$ sera la cote du côté opposé au sommet a, et ce côté qui est horizontal se projette sur le plan horizontal suivant $e\beta f$.

Nous obtenons donc les trois pentagones qui ont leurs sommets au point a, et nous pouvons construire les projections verticales des sommets.

Les trois pentagones sont : $abefc$, $a'b'e'f'c'$; $acghd$, $a'c'g'h'd'$, $adklb$, $a'd'k'l'b'$.

Nous considérons l'extrémité de l'axe opposée au point a. Nous avons en ce point trois arêtes parallèles aux arêtes inférieures, dirigées en sens inverse et qui se projettent horizontalement suivant xm, xn, xp, égales aux précédentes, sur lesquelles nous établissons trois pentagones égaux aux premiers et dont les projections horizontales sont : $xmqrp$, $xpstn$, $xnuvm$. Si nous menons ensuite les lignes ev, fq, vg, sh, kt, lu, nous obtiendrons la projection horizontale du dodécaèdre.

Considérons le pentagone $efqmv$ et cherchons la cote du point m au-dessus du plan horizontal qui contient l'arête ef.

La longueur βm est la projection de l'apothème du pentagone, par conséquent si nous construisons le triangle rectangle $\beta m \delta$ dans lequel l'hypoténuse $m\delta$ est égale à l'apothème, $\delta\beta$ sera la cote du sommet m, et par suite celle des sommets n et p au-dessus du plan horizontal passant par ef.

Les trois pentagones supérieurs sont parallèles aux trois inférieurs, nous pouvons construire les cotes de leurs sommets. Nous prenons au-dessus du plan horizontal $m'n'p'$ une cote $m'x'$ égale à la cote $\alpha\alpha'$, nous avons le sommet supérieur x' ; nous prenons au-dessous du plan $m'n'p'$ une cote égale à la différence $\beta\beta' - \alpha\alpha'$, nous avons le plan horizontal dans lequel sont placés les sommets $qrstuv$.

Il est donc facile d'achever la projection verticale.

La ponctuation de la figure ne présente aucune difficulté.

Exercice. — On donne trois points par leurs projections.

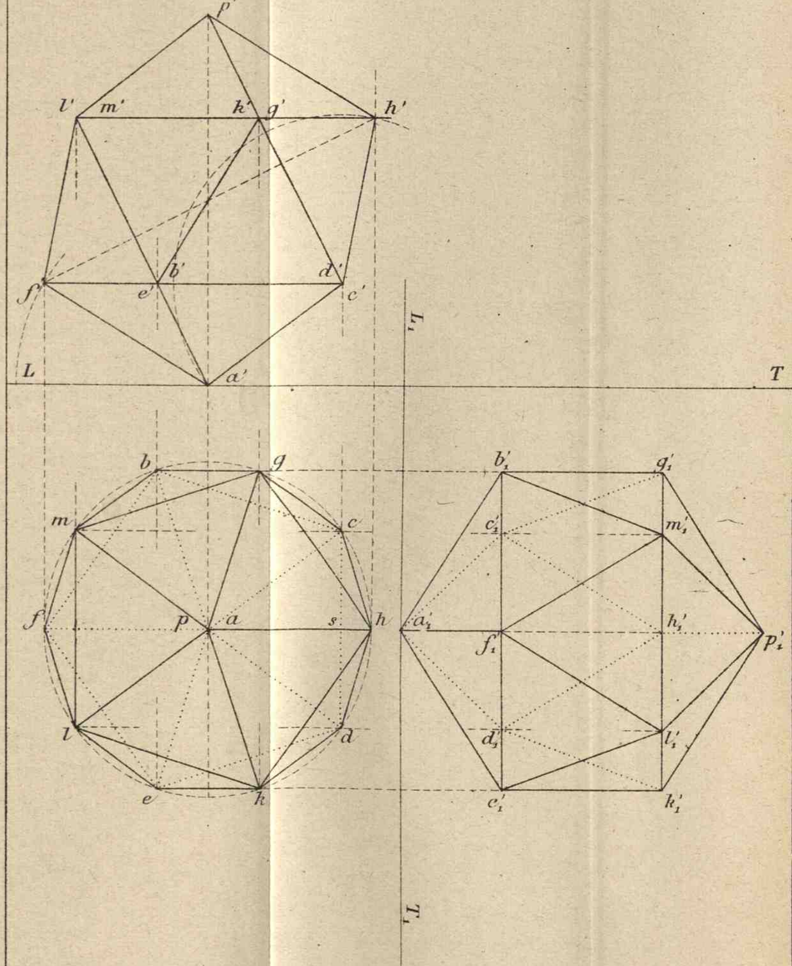
Construire les projections d'un dodécaèdre régulier dont un des points donnés est un sommet, et dont une des faces est le pentagone inscrit dans le cercle passant par les trois points.

ICOSAÈDRE

211. L'icosaèdre régulier est le solide compris sous vingt faces égales qui sont des triangles équilatéraux (fig. 164).

On donne le côté du triangle équilatéral.

On peut en déduire le rayon du cercle sur lequel serait inscrit un pentagone régulier ayant pour côté la longueur donnée.


p'
l' m'
k' g'
h'
b'
d'
f'
e'
c'
L
a'
T
L₁
b
g
m
c
f
p a
s
h
l
d
e
k
b'₁
g'₁
c'₁
m'₁
a'₁
h'₁
p'₁
f'₁
d'₁
l'₁
c'₁
k'₁
T₁

On trace donc le cercle et l'on inscrit le pentagone *bcdef* (nous plaçons un des côtés *cd* perpendiculaire au plan vertical). La figure est la projection horizontale d'une pyramide régulière, et nous déterminons la hauteur de la pyramide par la condition que chacun des triangles, tel que *cad*, soit la projection d'un triangle équilatéral.

Le côté *af* est parallèle au plan vertical, décrivons du point a' comme centre avec un rayon égal au côté *fb* un arc de cercle qui déterminera le point f' sur la verticale du point *f*, les sommets *bcde* auront la même cote.

Traçons un pentagone inscrit dans le même cercle que le premier et disposé en sens inverse, ses sommets étant au milieu des arcs soutendus par les côtés du premier en *ghklm*; puis joignant les sommets des deux pentagones, nous formons dix triangles *bgc*, *bgm*, *bmf*, *mfl*, etc., égaux; déterminons la cote du point *h* par la condition que le triangle *chd* soit la projection d'un triangle équilatéral dont *cd* est le côté : *hs* sera la projection de l'apothème de ce triangle : or nous avons cet apothème en vraie grandeur en $c'a'$; du point c' comme centre avec $c'a'$ comme rayon, nous décrivons un arc qui coupe en h' la verticale du point *h*; si nous plaçons les sommets *hgklm* dans le plan horizontal ainsi obtenu nous formons dix triangles équilatéraux, égaux à ceux dont se compose la pyramide inférieure. Au-dessus de ce second plan horizontal nous prenons sur la verticale du point *a* une hauteur égale à la cote des points $b'c'd'e'f'$; nous obtenons le point p' qui est le sommet d'une pyramide pentagonale régulière dont la face est *ghklm*. Nous avons ainsi constitué le solide compris sous vingt faces triangulaires.

Nous avons fait une projection auxiliaire sur un plan vertical L_1T_1, parallèle à l'un des côtés du pentagone de base; la figure est plus symétrique que dans la première projection.

Nous observons encore que les sommets sont situés deux à deux sur des droites égales passant par le centre de la sphère circonscrite et qui sont des axes du solide; les faces sont deux à deux parallèles, mais les triangles sont disposés en sens inverse.

212. Nous allons maintenant construire une *projection de l'icosaèdre sur le plan d'une de ses faces* (fig. 165).

Nous plaçons la face abc donnée dans le plan horizontal, une des arêtes perpendiculaire à la ligne de terre.

Nous considérons la pyramide pentagonale qui a son sommet au point a et dont un des côtés est bc. Nous allons construire le plan du pentagone qui est la base de cette pyramide.

Ce pentagone rabattu sur le plan horizontal autour de bc se rabattra suivant $be_1d_1f_1c$. Le point d_1 en se relevant décrira un cercle dont le rayon est d_1q et projeté en vraie grandeur sur le plan vertical suivant le cercle décrit du point b' comme centre avec $b'd'_1$ comme rayon (132). Mais le sommet d viendra à une distance du point a égale au côté de l'icosaèdre; par conséquent nous décrivons de a' comme centre avec le côté de l'icosaèdre comme rayon, un arc qui coupe le premier au point d' qui est la projection verticale du point d, et nous en déduisons sa projection horizontale.

Le plan du pentagone a pour trace verticale $d'b'$.

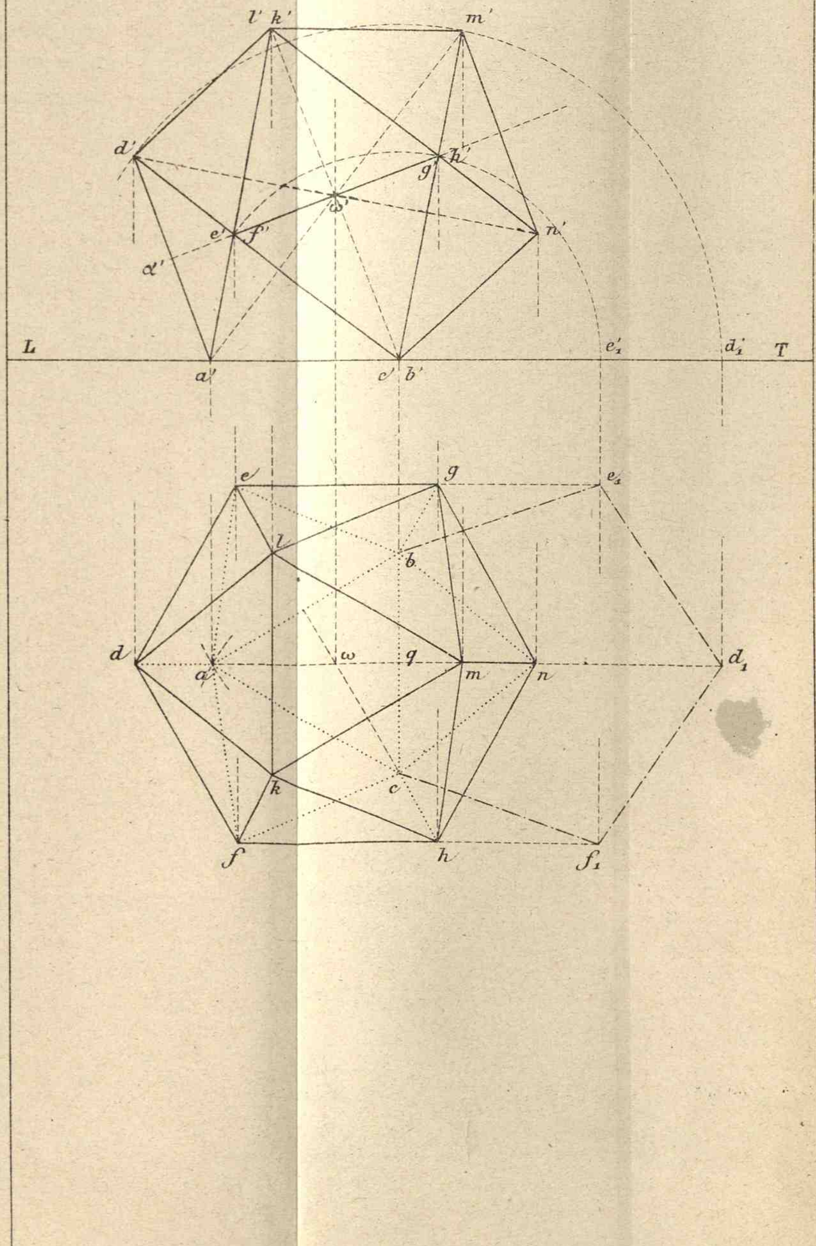
La droite e_1f_1, qui a pour projection verticale e'_1 vient se placer dans ce plan en $e'f'$, ef.

La projection horizontale du pentagone relevé est donc $bedfc$, nous joignons le point a, a' aux différents sommets.

Construisons le centre de la sphère circonscrite au solide : nous prenons le centre ω du triangle abc, nous élevons une verticale par ce point, cette verticale est un lieu du centre de la sphère; nous menons le plan perpendiculaire au milieu de ad, $a'd'$; la trace verticale de ce plan sera $\alpha'\omega'$ perpendiculaire au milieu de $a'd'$: ce plan est un second lieu du centre de la sphère, le centre de la sphère est donc le point ω',ω.

Si nous prenons les points symétriques des six sommets obtenus par rapport à ce centre, nous aurons les six autres sommets de l'icosaèdre.

Le triangle lkm, $l'k'm'$ est horizontal comme parallèle à abc. Il est entièrement *vu* sur la projection horizontale, il



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

est facile de déduire de ce fait la disposition des parties vues et cachées.

Exercice. — On donne deux points par leurs projections, et la cote d'un troisième point qu'on déterminera par la condition que le triangle formé par les trois points soit équilatéral. Construire sur le triangle un icosaèdre régulier.

DES OMBRES

213. Ombre d'un point. — On considère un point a,a et une droite RR′, on mène par le point une parallèle à la droite et l'on cherche ses traces. Si la droite RR′ est la direction d'une série de rayons parallèles, le point A_h sera l'*ombre* du point a,a'. Les plans de projection étant supposés opaques, la trace verticale A_v de la droite sera l'ombre du point aa', en supposant que le rayon ait d'abord traversé le plan horizontal, ce sera une *ombre virtuelle*.

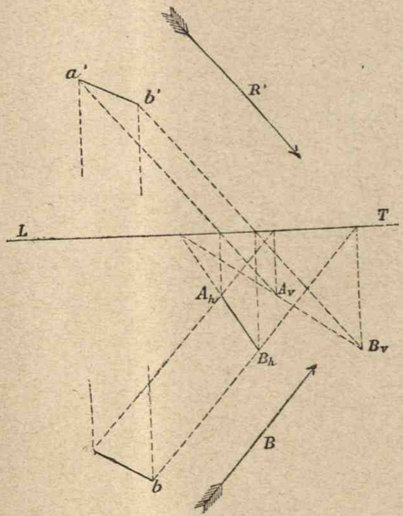


Fig. 166.

La droite RR′ pourrait être assujettie à passer par un point fixe. On mènera alors par aa' et par le point une droite; les traces de cette droite seront les ombres du point éclairé par des rayons convergents.

214. Ombre d'une droite. — Considérons un autre point $b'b'$, on trouvera de même son ombre réelle B_h, son ombre virtuelle B_v et la droite A_hB_h sera l'*ombre réelle* de la droite ab, $a'b'$; c'est la trace du plan mené par cette droite parallèlement à RR′. L'ombre A_vB_v sera l'ombre virtuelle, et ces deux droites étant les traces sur les deux plans de projection du plan mené par ab, $a'b'$ parallèlement à RR′, doivent se couper en un même point de la ligne de terre.

L'ombre est la projection oblique de la droite, les projetantes étant parallèles à RR′.

Il est inutile de répéter tout le raisonnement pour montrer que l'ombre de la droite éclairée par un point lumineux, c'est-à-dire par des rayons convergents, est la trace du plan mené par la droite et par le point.

Il peut arriver que A_h soit réelle et B_h virtuelle ; alors l'ombre est réelle jusqu'au point α où elle rencontre la ligne de terre, elle est virtuelle dans l'autre partie. Au contraire, l'ombre sur le plan vertical A_vB_v est réelle du point B_v au point α, et virtuelle au delà. *L'ombre de la droite ab, a'b' est donc la ligne brisée* $A_h\alpha B_v$ que nous avons tracée en traits pleins sur la figure ; on devra fixer une convention pour les traits qui représentent les prolongements virtuels.

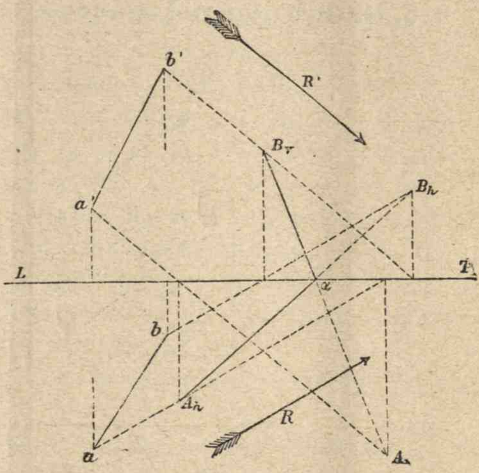


Fig. 167.

Lorsqu'on a les traces de la droite dont on cherche l'ombre, les traces sont évidemment leur ombre à elles-mêmes, et font partie des ombres de la droite sur les plans de projection ; cela est d'ailleurs une conséquence de ce que l'ombre est formée par les traces d'un plan passant par la droite, et par suite les traces du plan doivent contenir les traces de la droite.

L'ombre portée par une droite sur un plan ou sur une surface quelconque est l'intersection du plan mené par la droite parallèlement aux rayons avec le plan ou avec la surface.

Tout ce que nous venons de dire s'applique exactement au cas où les rayons, au lieu d'être parallèles, sont des rayons qui divergent d'un point.

215. Droite parallèle à un plan de projection. — Si l'on considère une droite parallèle à un plan de projection, la trace sur ce plan de projection d'un plan passant par la droite, sera parallèle à cette droite, et si les rayons sont parallèles la longueur de l'ombre sera évidemment égale à la longueur de la droite.

216. Ombre d'un polygone. — On obtiendra l'ombre

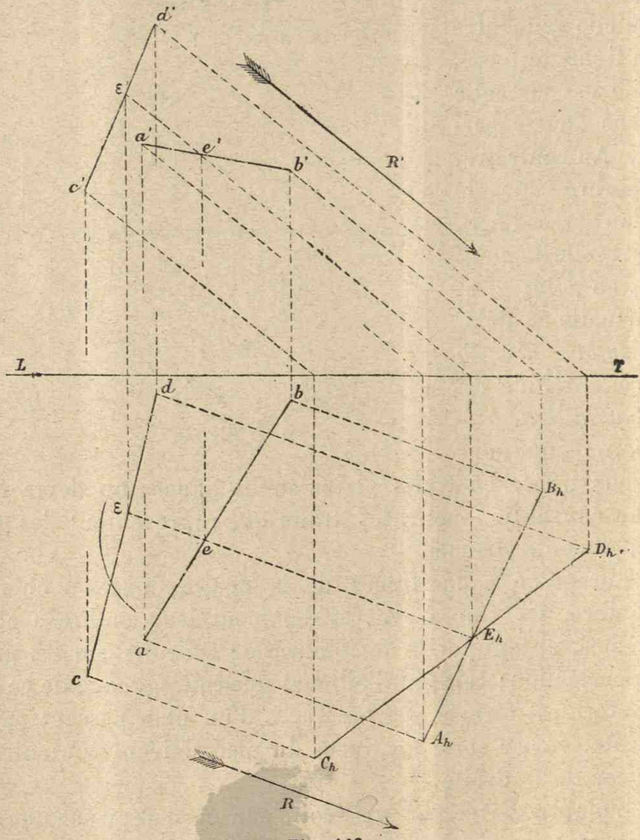


Fig. 168.

d'un polygone en construisant les ombres de ses différents sommets. Les rayons passant par ces sommets formeront un prisme ou une pyramide d'ombre selon que les rayons sont parallèles ou divergents. Si le polygone est parallèle au plan de projection, l'ombre par rayons parallèles sera égale au polygone, l'ombre par rayons divergents lui sera semblable.

217. **Ombre portée par une droite sur une autre.** — On donne deux droites ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, on les éclaire par des rayons parallèles à RR', et l'on demande de trouver l'ombre portée par la droite cd sur la droite ab : c'est-à-dire de trouver le point de rencontre du plan mené par la droite cd parallèlement à RR' avec la droite ab. On cherche alors les ombres des deux droites (214), on trouve A_hB_h et C_hD_h qui se coupent en E_h : Il y a donc un rayon E_he qui rencontre la droite ab en e et la droite cd en ε. Ce rayon qui rencontre à la fois les deux droites est une droite du plan d'ombre mené par cd ; son intersection avec ab au point e est donc le point de rencontre de la droite et du plan, c'est-à-dire l'ombre de cd sur ab. D'ailleurs c'est le point $\varepsilon\varepsilon'$ de cd qui porte ombre en e sur ab.

La même construction s'applique évidemment au cas d'un point lumineux.

218. **Ombre d'un corps solide. Polyèdre.** — Considérons maintenant un polyèdre, un tétraèdre par exemple, donné par ses deux projections $abcd$, $a'b'c'd'$. Cherchons les ombres des sommets; ce sont les points ABCD (213), et en joignant les points deux à deux, nous avons les ombres des arêtes. On voit alors que le contour ABC est le contour utile de l'ombre, le point D tombe dans l'intérieur de ce contour, en sorte que les ombres AD, DB, CD, sont inutiles.

Mais quand on doit ainsi trouver l'ombre d'un polyèdre, il faut s'efforcer de reconnaître comment le rayon glisse sur le corps de manière à ne pas construire des ombres inutiles.

Nous prenons pour exemple un dodécaèdre donné par ses deux projections (fig. 170).

Nous commençons par chercher un sommet qui donne une ombre utile. La disposition de la figure permet de juger à première vue que le rayon qui passe par le point aa' et qui porte son ombre A_v touchera extérieurement le solide sans le pénétrer ni avant ni après le point de contact; le point aa' sera un point de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le dodécaèdre, le point A_v un point d'ombre utile. S'il y avait doute on couperait le solide par

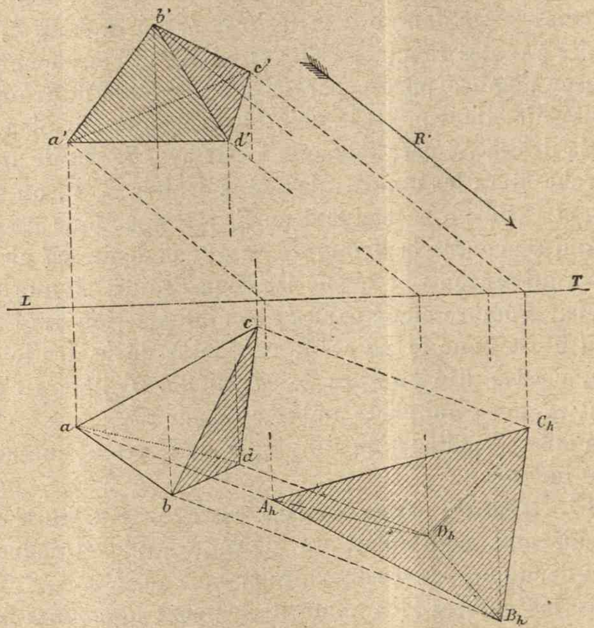
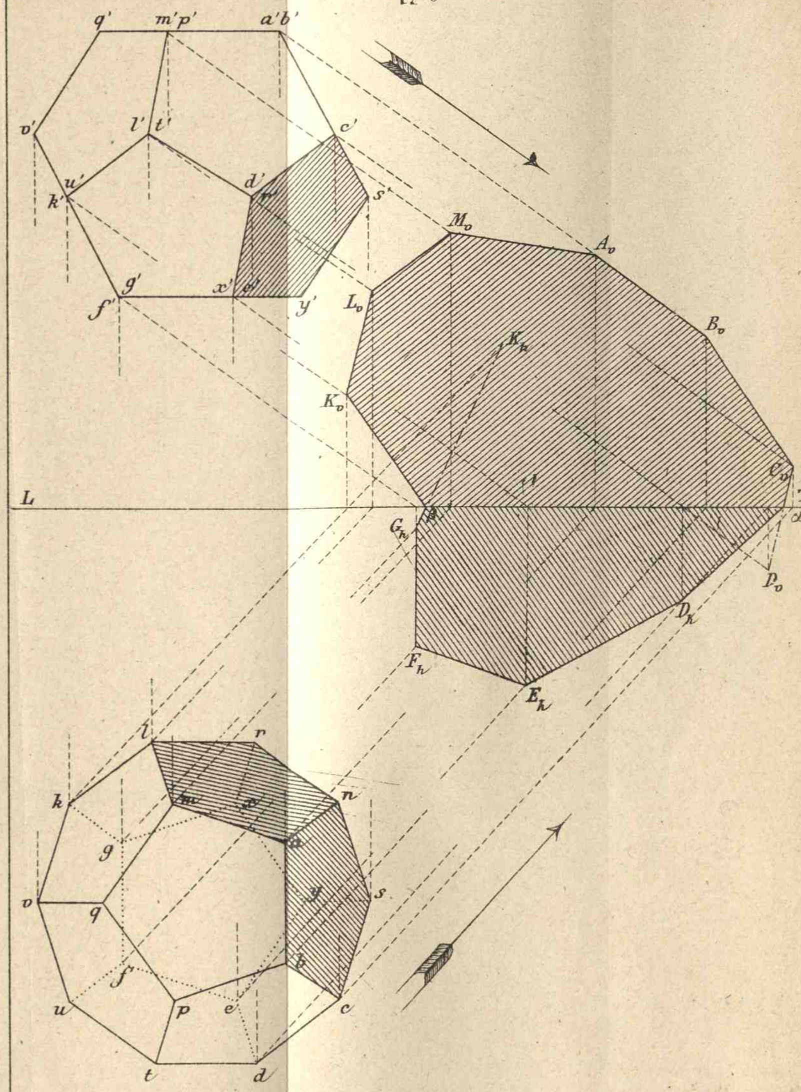


Fig. 169.

un plan vertical parallèle au rayon et passant par le point aa'. Ce plan couperait le solide suivant un polygone, et l'on verrait quels sont les rayons extrêmes situés dans le plan et ayant un seul point commun avec le solide.

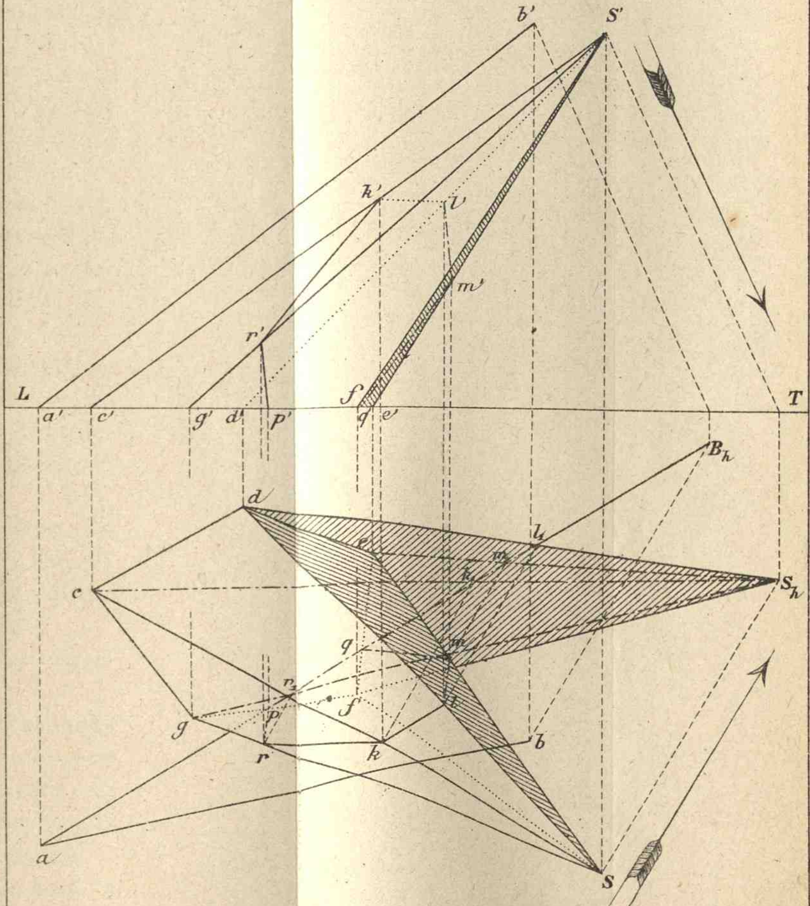
La droite ab, $a'b'$ est ici perpendiculaire au plan vertical et son ombre est A_vB_v ; arrivé au point bb', le rayon peut suivre l'arête bp ou bc, mais il est évident que le rayon passant par le point pp' traversera immédiatement le solide, donc le rayon suit bc dont l'ombre est B_vC_v ; arrivé au point

170



Librairie CH. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

171



c, c', le rayon peut suivre l'arête cs ou l'arête cd; s'il suivait cs, il est clair qu'au point s en particulier le rayon devrait avoir traversé d'abord le solide pour passer par ce point; donc le point s, s' n'est pas un point de la ligne de séparation et le rayon doit suivre l'arête cd, $c'd'$. Cette arête a pour ombre C_vD_v, réelle jusqu'au point α, mais qui se brise au point α pour se retourner sur le plan horizontal suivant αD_h; arrivé au point d, d' le rayon pourrait suivre dt ou de, il est clair qu'il doit suivre de, $d'e'$, et sans répéter le même raisonnement il est facile de voir qu'il parcourt ef, $e'f'$, puis fg, $f'g'$, ensuite gk, $g'k'$; l'ombre de gk, $g'k'$ est G_hK_h qui coupe la ligne de terre au point β et se retourne βK_v. Le rayon parcourt ensuite kl, lm, et revient enfin au point aa'.

La ligne de séparation d'ombre et de lumière ou la *séparatrice* est donc $abcdefgklm$. — $a'b'c'd'e'f'g'k'l'm'$. Les arêtes ainsi déterminées sont situées entre une face obscure et une face éclairée.

On voit que l'ombre portée est l'ombre de la séparatrice, on pourrait donc construire les ombres de toutes les arêtes du polyèdre, et examinant quelles sont celles dont les ombres forment le contour extérieur de l'ombre portée, on aura les arêtes qui constituent la séparatrice.

219. Ombre d'une droite sur un polyèdre. — On considère une pyramide qui a pour base $cdefg$ dans le plan horizontal, son sommet est au point SS'; et une droite ab, $a'b'$ donnée par ses deux projections (fig. 171).

Nous éclairons l'ensemble par des parallèles à une direction RR'.

Pour obtenir l'ombre de la pyramide nous cherchons l'ombre S_h de son sommet et nous joignons cette ombre aux traces des arêtes; le contour extérieur de l'ombre est formé par les ombres extérieures S_hd et S_hf; par conséquent les arêtes Sd, $S'd'$ et Sf, $S'f'$ constituent la séparatrice.

Nous construisons l'ombre de la droite (214), le point a est la trace horizontale, le point b, b' fait son ombre en B_h et l'ombre de la droite est aB_h, qui coupe les ombres des arêtes aux points $l_1m_1k_1r_1$ que nous ramenons sur les droites par des parallèles au rayon en $lmrk$; le plan d'ombre de la droite dont la trace est aB_h rencontre la base de la pyramide aux points p et q qui appartiennent à l'ombre portée dont le contour est $prklmq$. Il faut observer que les ombres des arêtes noyées dans l'ombre générale doivent être représentées suivant une convention particulière, de même que les lignes lm, $l'm'$ et lq, $l'q'$ qui sont tracées sur des faces entièrement ombrées.

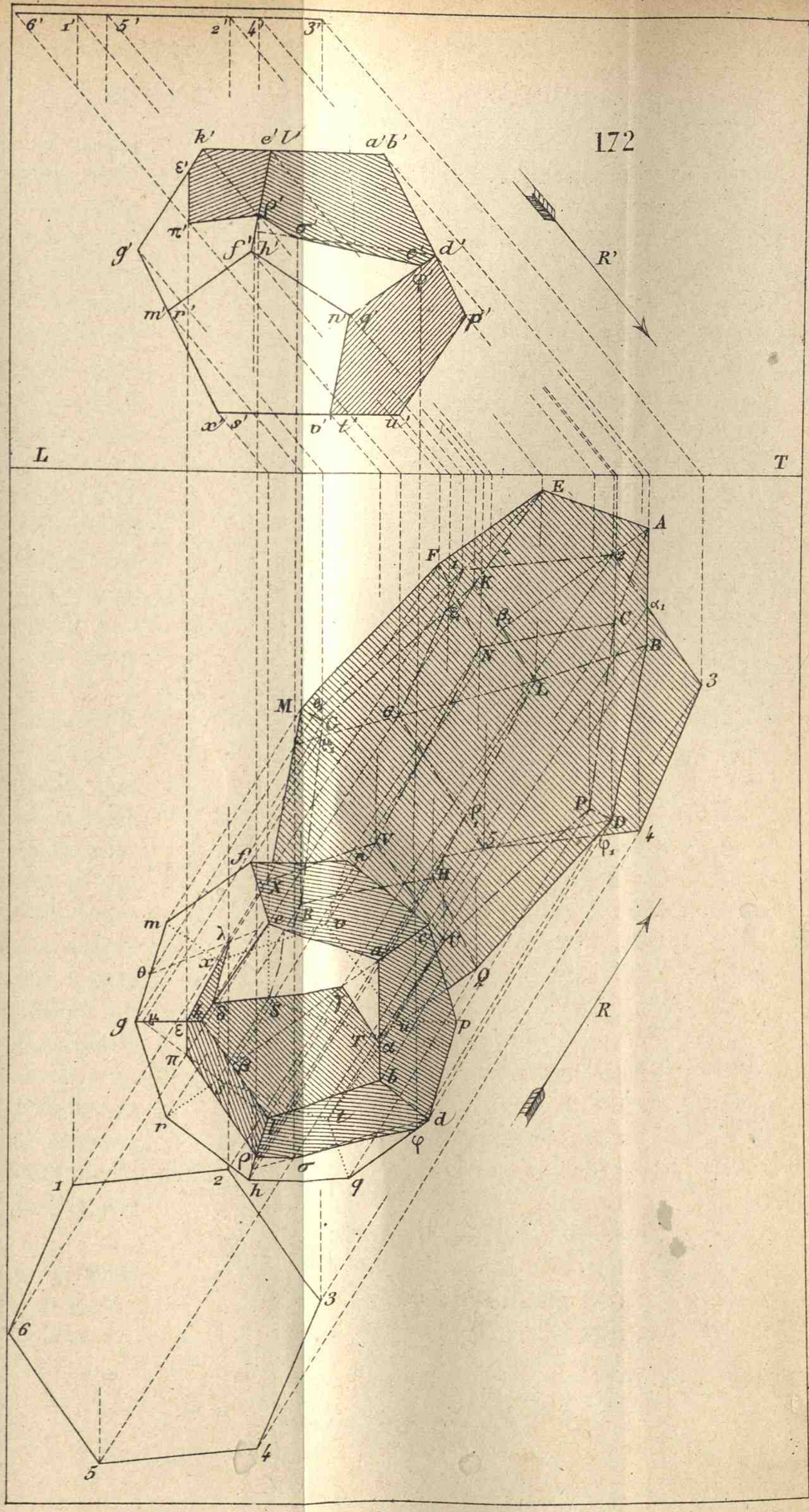
Les parties d'ombre propre ou portée utiles mais cachées, telles que pr, la partie ft et $k'l'$ doivent être représentées en points ronds.

Remarque. — Si la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, le plan d'ombre sera le plan vertical passant par la droite et dont la trace sera parallèle à la projection horizontale du rayon. Les points de rencontre des arêtes avec ce plan se relèveront simplement en projection verticale.

220. Ombre portée par deux polyèdres l'un sur l'autre. — C'est l'intersection d'un des polyèdres avec le prisme ou la pyramide d'ombre qui s'appuie sur la séparatrice de l'autre. C'est donc l'intersection de deux polyèdres, et l'on peut appliquer les constructions que nous avons indiquées d'une manière générale (172-176). Cependant on peut employer la méthode des projections obliques qui conduit souvent à des tracés plus simples. Nous prenons pour exemple le dodécaèdre construit sur la figure 162; et nous traçons un polygone que nous prenons horizontal 1.2.3.4.5.6., $1'2'3'4'5'6'$ qui sera la base d'un prisme oblique parallèle à RR' (fig. 172).

Ce polygone représente la séparatrice d'un second polyèdre, cette séparatrice ne serait pas, en général, un polygone plan; mais, ainsi qu'on le verra, la nature de ce polygone est indifférente. Nous figurons l'ombre portée par le dodécaèdre sur le plan horizontal, en construisant les ombres de toutes ses arêtes (218); l'ombre de la séparatrice du second polyèdre est le polygone 1.2.3.4.5.6. Quelle que soit cette séparatrice, on obtiendra toujours un polygone dans le plan horizontal.

Nous remarquons que l'ombre AB du côté ab, $a'b'$ est



172

croisée au point α_1 par l'ombre du côté 2, 3 ; donc il y a une parallèle au rayon qui s'appuie sur les deux lignes ; et le côté 2, 3 porte ombre au point α situé à la rencontre de cette parallèle et du côté ab, $a'b'$ (217). Le point α est le point où le côté ab, $a'b'$ perce la face 2, 3 du prisme. Le sommet 2 est projeté obliquement dans l'intérieur de deux faces du dodécaèdre, la face EKLBA et la face FNCAE, mais il est clair que l'arête du prisme qui passe par ce sommet rencontre d'abord la face *eklba*, et c'est sur cette face qu'il portera ombre utile. Nous menons la droite $A2\beta_1$ que nous relevons par des parallèles au rayon en $a\beta$ et le point γ où cette ligne rencontre l'arête du prisme menée par 2 est le point cherché. Nous ne construisons pas le second point inutile comme ombre, mais si l'on voulait appliquer cette méthode à l'intersection du prisme et du polyèdre, on ferait une construction analogue dans la face *fncae*. Le côté 1, 2 rencontre EK au point δ_1, nous relevons ce point en δ par une parallèle au rayon.

Le sommet 1 est projeté obliquement sur les faces MFEKG et FNCAE, il est facile de voir qu'il rencontre d'abord la première de ces faces : nous menons la droite $E1\theta_1$ que nous relevons par des parallèles au rayon en $e\theta$ et nous obtenons le point de rencontre λ de l'arête 1 avec la face. Le point de sortie s'obtiendrait de la même manière si l'on considérait l'intersection complète du prisme et du dodécaèdre indépendamment de la question d'ombre. L'ombre du côté 1, 6 sort de la face MFEKG au point ε_1 sur l'arête KG, et nous ramenons ce point en ε par une parallèle au rayon. Le point 6 se trouve projeté sur les faces GKLHR et FNVXM ; il est clair que le point d'entrée est sur la première de ces faces, nous le construisons à l'aide de la droite $L6\mu_1$. (Du reste, nous avons une autre indication résultant de ce que le polygone pour être continu doit passer de la face *mefgk* à la face adjacente, dont l'arête est croisée par le côté 1, 6.) Le point obtenu est le point π.

Les arêtes 6, 5 et LH donnent le point ρ_1 que nous relevons en ρ ; le point 5 porte son ombre au point σ que nous relevons à l'aide de la droite HD (qui passe par hasard par le point 5), et enfin les séparatrices se rencontrent au point φ_1 que nous relevons en φ et qui limite l'ombre portée utile.

Le contour de cette ombre, qui n'est qu'une partie du polygone d'intersection des deux polyèdres, est $\alpha\gamma\delta\lambda\varepsilon\pi\rho\sigma\varphi$.

Nous avons indiqué comment on obtiendrait le reste de l'intersection, nous pouvons ajouter que l'intersection présenterait un cas d'*arrachement* parce que les ombres ne se superposent qu'en partie.

La projection verticale de cette ombre se relève soit sur les arêtes du prisme, soit sur les arêtes du dodécaèdre ; on peut ainsi, comme nous l'avons fait pour le point σ, σ', relever le point sur une des droites auxiliaires (ici c'est la droite $h'd'$, hd) qui ont servi à le construire.

PROJECTIONS COTÉES

221. Nous pensons qu'il est nécessaire de compléter l'étude de la ligne droite et du plan en montrant comment on résout les problèmes par la méthode des projections cotées

Nous avons déjà exposé le principe de cette méthode et nous le rappelons ici.

Un point est défini par sa projection sur un plan et par sa distance au plan.

On choisit le plan de projection horizontal, réellement perpendiculaire au fil à plomb, et les distances au plan sont des hauteurs verticales, qu'on inscrit à côté de la projection du point.

On écrit donc à côté de chaque point un nombre qui indique la distance au plan, ou la hauteur au-dessus du plan. Ce nombre se nomme *la cote* du point.

Pour que ce nombre donne une indication réelle, dont on puisse se servir, il faut choisir une unité de longueur; ainsi l'on écrit à côté d'un point le nombre 10, il faut convenir que ce nombre 10 représentera des mètres ou des décimètres, ou telle autre unité de longueur qu'il plaira de choisir.

Dans la pratique, on exprime les distances réelles au plan en mètres, et comme il serait souvent impossible de représenter sur des feuilles de dessin les longueurs avec leurs grandeurs réelles, on convient de les diminuer dans un certain rapport.

222. Echelle. — On établit ce même rapport entre les distances des points entre eux, afin que toutes les parties de la figure conservent les unes par rapport aux autres les mêmes relations ; et ce rapport se nomme *échelle* du dessin.

On dessine une *figure semblable* à la projection réelle, et toutes les longueurs qu'on obtiendra par des constructions ou qu'on calculera comme nous l'indiquerons devront être multipliées par le rapport inverse de l'échelle pour faire connaître les grandeurs de l'espace.

Par extension on donne le nom d'*échelle* à une figure qui représente le rapport de similitude et qu'on trace de manière à pouvoir y mesurer des longueurs quelconques placées sur le dessin. Ainsi tout dessin exécuté par la méthode des projections cotées doit être accompagné d'une échelle tracée d'après un type analogue à celui de la figure qui représente l'échelle de $\frac{1}{100}$ ou 1 centimètre pour 1 mètre.

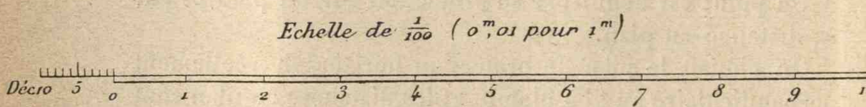


Fig. 173.

On voit qu'on doit diviser une partie en longueurs représentant 1 mètre, et ajouter à gauche une division entière partagée en dixièmes, de manière qu'on puisse prendre une longueur telle que $4^m,20$ par exemple avec une seule ouverture de compas.

223. **Inscription des cotes**. — Les cotes des points s'inscrivent en chiffres dessinés parallèlement au bord inférieur de la feuille de dessin

LIGNE DROITE

224. Une droite est déterminée par deux points.

Ainsi l'on donne le point a coté 1,25, le point b coté 2,50; ces deux points (fig. 174) déterminent une droite et tous les points de cette droite ont leurs projections sur ab.

225. Problème. — *Étant donnée la projection d'un point d'une droite, trouver sa cote* (fig. 174).

La projection du point est c. Imaginons le plan vertical qui projette la droite et rabattons-le. Le point a vient en a', tel que aa' représente $1^m,25$ à l'échelle du dessin (nous la supposons égale à $\frac{1}{100}$).

Le point b vient en b', tel que bb' représente $2^m,50$; le point c vient en c' ; nous prenons une ouverture de compas égale à cc', nous la portons sur l'échelle à partir de la division O, nous trouvons $1^m,90$. C'est la cote du point c.

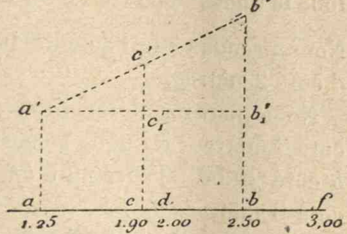


Fig. 174.

Dans la pratique des projections cotées on ne fait pas ces rabattements ; menons l'horizontale $a'c'_1b'_1$, nous obtenons $\frac{c'c'_1}{b''b_1} = \frac{ac}{ab}$.

$b'b'_1$ est la différence de cote entre les points a et $b = 2^m,50 - 1^m,25 = 1^m,25$.

On mesure à l'échelle $ac = 1^m,35$, $ab = 2^m,70$, et l'on en déduit $c'c'_1$, différence de cote entre a et $c = \frac{1^m,25 \times 1^m,35}{2^m,70}$ $= 0^m,65$; alors la cote du point $c = 1^m,25 + 0^m,65 = 1^m,90$. On fait toujours ainsi l'opération arithmétique de la quatrième proportionnelle.

226. Problème. — *Placer sur une droite un point de cote donnée.* La droite est donnée par les points 1,25 et 2,50 (fig. 174), placer sur cette droite le point dont la cote est 1,90. La proportion précédente, dans laquelle l'inconnue est la longueur ac, va nous donner le point.

$$c'c'_1 = 1,90 - 1,25 = 0,65, \quad b'b'_1 = 1,25.$$

On mesure ab sur l'échelle, et l'on trouve $2^m,70$.

$$ac = \frac{2,70 \times 0,65}{1,25} = 1^m,35.$$

On prend sur l'échelle la longueur qui correspond à $1^m,35$ et on la porte de a en c.

Le point C est le point cherché.

Points à cote ronde. — On applique ce calcul à la détermination des points dont la cote est un nombre exact de mètres et qu'on nomme *points à cote ronde*.

Ainsi cherchons sur la droite le point dont la cote est 2 mètres. Soit x la distance de ce point au point a, nous calculons la quatrième proportionnelle $x = \frac{0,75 \times 2,70}{1,25} = 1^m,62$.

Nous prenons sur l'échelle $1^m,62$ et nous obtenons le point d coté 2 mètres.

Nous pouvons déterminer de la même manière le point coté 3 mètres ; ici nous remarquons que nous avons le point b coté $2^m,50$, et prenant $bf = bd$, nous aurons le point f coté 3 mètres.

Désormais il est facile de placer les autres points à cote ronde, et l'on peut intercaler les points à cote fractionnaire, en partageant la distance des points dans le rapport de la fraction à l'unité; et souvent on place à vue des points compris entre deux cotes fractionnaires bien déterminées.

227. **Définition. Intervalle**. — La distance qui existe sur le dessin entre les projections de deux points à cote ronde distants verticalement de 1 mètre se nomme l'*intervalle*. Et lorsque la projection est donnée, ainsi que l'intervalle et la cote d'un point, la droite est déterminée.

Trace de la droite. — On obtient la trace de la droite en cherchant le point de cette droite dont la cote est nulle.

228. **Problème.** — *Mener par un point une parallèle à une droite.*

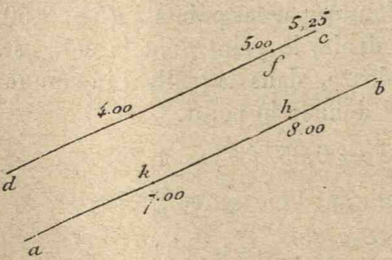


Fig. 175.

On donne une droite ab par deux points à cote ronde. On veut mener par un point c, coté 5,25, une parallèle à la droite (fig. 175).

Les deux droites étant parallèles ont leurs projections parallèles et les intervalles égaux. Traçons cd parallèle à ab, cherchons le point coté 5,00 sur cette ligne; la différence de cote entre le point 5,00 et le point c est égale à $\frac{1}{4}$ de l'unité de hauteur, la distance entre les deux points sera égale à $\frac{1}{4}$ de l'intervalle, nous prenons $cf = \frac{1}{4}\, kh$ et le point f a la cote 5,00. Il faut porter la longueur du côté convenable pour que les deux droites descendent dans le même sens.

Ensuite on connaît l'intervalle $= kh$ et l'on peut coter la droite cd.

229. **Droite horizontale**. — Une droite horizontale a tous les points à la même cote; on peut écrire en deux points le même chiffre; il vaut mieux (fig. 176) écrire une seule fois la cote, mais *parallèlement à la ligne*, et non plus parallèlement au bord inférieur de la feuille de papier.

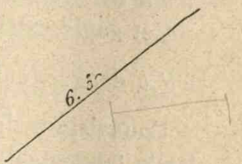


Fig. 176.

230. **Problème**. *Trouver la distance de deux points donnés par leurs cotes.*

La distance des deux points est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côté de l'angle droit la distance des projections, et pour autre côté de l'angle droit la différence des cotes (fig. 177).

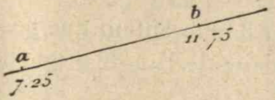


Fig. 177.

Ainsi on connaît les deux points a (7,25) et b (11,75) la différence de cote $= 4{,}50$.

La longueur ab mesurée sur l'échelle du dessin $= 2{,}40$.

La distance des deux points $= \sqrt{(4{,}5)^2 + (2{,}4)^2} = 5{,}1$.

231. **Problème.** — *Prendre sur une droite à partir d'un point une longueur égale à une longueur donnée* (fig. 177).

On veut prendre sur la droite ab à partir du point a une longueur de 3 mètres.

On commence par calculer la longueur dont la projection est l'intervalle, c'est-à-dire la distance réelle qui sépare deux points dont les cotes diffèrent de 1 mètre, le calcul est semblable à celui que nous venons d'effectuer ; ensuite on remarque que les longueurs réelles sont proportionnelles à leurs projections.

Soit l la distance réelle correspondante à l'intervalle, x la projection cherchée et i l'intervalle : on a $\frac{x}{i}=\frac{3}{l}$.

Lorsque l'on connaît la distance de deux points a et b, dont la distance réelle est de $5^m,1$; la projection ab ayant pour longueur mesurée à l'échelle 2^m40, on calcule x par la proportion $\frac{x}{2,40}=\frac{3}{5,1}$.

232. Problème. — *Déterminer l'angle que fait une droite avec le plan de projection* (fig. 174).

Cet angle est l'angle aigu du triangle rectangle, tel que $a'b'_1b'$ dans lequel on a $b'b'_1=a'b'_1\times tg\alpha$, d'où $tg\alpha=\frac{b'b'_1}{a'b'_1}$.

Connaissant deux points de la droite on peut donc calculer la tangente de l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal. Lorsqu'on connaît l'intervalle i, l'expression de $tg\alpha$ devient $tg\alpha=\frac{1}{i}$.

Définition. Pente. — La quantité $\frac{1}{i}$ est ce qu'on nomme la pente de la droite, et l'on donne autant que possible une droite, non pas par la valeur de l'angle α qu'elle fait avec le plan de projection, mais par sa pente, $\frac{1}{5}$ par exemple, ce qui veut dire que la droite est parallèle à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la hauteur est égale à l'unité, et la base égale à 5 unités.

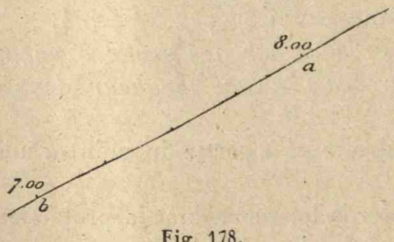


Fig. 178.

Une droite dont on donne la projection est donc déterminée par la cote d'un de ses points et la pente.

Ainsi on donne (fig. 178) le point a d'une droite coté 8,0, et la pente de $\frac{1}{4}$ descendant de a vers b, on porte sur ab une longueur égale à 4 mètres à l'échelle du dessin, soit 4 centimètres (toutes les figures sont faites à l'échelle de $\frac{1}{100}$), et l'on a le point b coté 7,00. La droite est alors déterminée.

Condition pour que deux droites se coupent. — Il est clair que les projections doivent se croiser et que les droites doivent avoir même cote au point de rencontre de ces projections.

233. **Remarque.** — Nous avons montré comment il fallait avoir recours aux calculs pour faire les déterminations que demande la méthode des projections cotées ; il semble au premier abord qu'il serait plus commode de prendre les projections verticales des droites sur lesquelles on opère, et de mesurer directement les longueurs qui représentent les cotes.

Dans les applications des projections cotées, il arrive le plus souvent que les longueurs horizontales sont extrêmement grandes par rapport aux dimensions verticales ; ainsi dans les dessins des cartes, tracés de canaux, de routes, de chemins de fer, de fortifications, des différences de hauteur de quelques mètres correspondent souvent à des longueurs de plusieurs centaines de mètres. L'échelle du dessin est nécessairement prise en raison des dimensions en longueurs. L'échelle de $\frac{1}{1{,}000}$, dans laquelle 1 millimètre représente 1 mètre, est une des plus grandes. Si l'on veut faire les déterminations de cotes par le tracé, on ne peut obtenir sur une longueur mesurée sur l'échelle une erreur plus petite que $\frac{1}{10}$ de millimètre qui correspond à 10 centimètres, et l'on arrive à des erreurs trop grandes pour l'exécution du travail que le dessin doit représenter.

La méthode des projections cotées est donc différente de ce que nous avons appelé *Géométrie cotée*, puisque la géométrie cotée fait un usage constant des projections verticales auxiliaires

DU PLAN

234. Le plan peut toujours être défini par trois points ou deux droites qui se coupent, ou par sa ligne de plus grande pente. C'est cette dernière détermination qui est seule en usage dans les projections cotées, et l'on y ramène toutes les autres. Nous prions le lecteur de se reporter à la première partie de ce traité (§ 43-46), et nous rappelons seulement les propriétés de la ligne de plus grande pente.

Elle est perpendiculaire aux horizontales du plan et sa projection est perpendiculaire aux projections des horizontales. Elle fait avec le plan horizontal le même angle que le plan. Une ligne de plus grande pente suffit pour le déterminer.

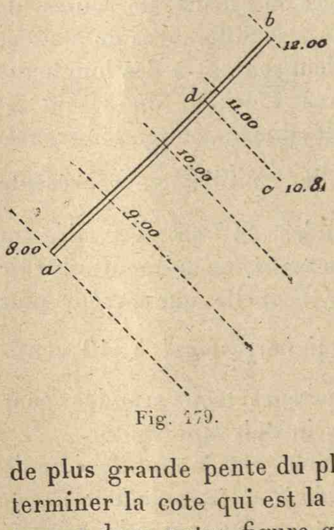


Fig. 179.

On donne une droite *ab* par deux points *a* : coté 8,00 et *b* coté 12,00. Cette ligne est la ligne de plus grande pente d'un plan; on connaît la projection horizontale *c* d'un point, on demande sa cote (fig. 179). Imaginons l'horizontale du plan qui passe par le point *c*, sa projection horizontale est *cd* et croise la ligne de plus grande pente du plan au point *d*, dont on peut déterminer la cote qui est la même que celle du point *c*. On trouve dans notre figure que le point *c* a pour cote 10,80

En général, quand on connaît une ligne de plus grande pente d'un plan, on gradue cette droite en y plaçant dans toute l'étendue utile les points à cote ronde, et en inscrivant les cotes parallèlement aux horizontales; la ligne prend le nom d'*échelle de pente*, on la représente par deux traits de grosseur inégale (l'un très fin), sur lequel on amorce les horizontales.

235. **Problème.** — *Un plan étant donné par deux droites qui se coupent, ou trois points, construire son échelle de pente.*

On donne deux droites *ab* et *ac* qui se croisent au point *a* coté 9,30, le point *b* est coté 6,60, le point *c* coté 7,50 (fig. 180).

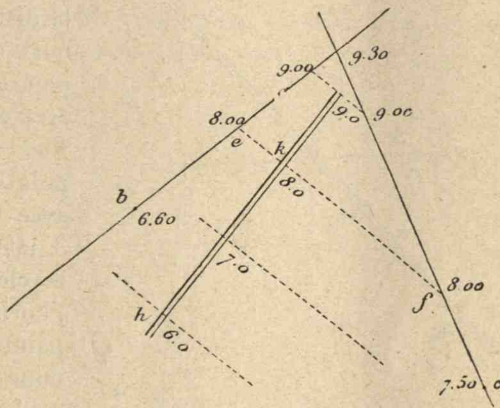


Fig. 180.

On cherche sur les deux droites un point à même cote, par exemple le point coté 8,0, et l'on joint les deux points ainsi obtenus; la ligne *ef* est une horizontale du plan des deux droites, on lui mène une perpendiculaire quelconque *kh*, c'est la projection de la ligne de plus grande pente.

On cherche sur l'une des droites le point à cote ronde différant d'une unité du point 8,0, par exemple, le point 9,0 sur la ligne *ab*, et l'on mène une parallèle *ef*; on obtient sur l'échelle de pente l'intervalle 8-9, et on le reporte de manière à graduer l'échelle.

On définit donc un plan par un point, sa pente (qui est celle de son échelle de pente), *la projection de cette échelle ou la direction des horizontales.*

236. **Problème.** — *Mener par un point dans un plan donné une droite de pente donnée.*

Le plan est donné par son échelle de pente *df* (fig. 181).

On donne le point a du plan (nous l'avons placé immédiatement sur une horizontale), on veut mener par ce point une droite située dans le plan et dont la pente soit égale à $\frac{1}{3}$.

Nous allons chercher le point où cette droite rencontrera l'horizontale 9,0 du plan.

Ce point sera coté 9,0, la différence de cote avec le point a est de 1 mètre ; donc la distance horizontale qui doit séparer le point a du point c doit être égale à 3 mètres. Nous décrivons du point a, comme centre avec un rayon égal à 3 mètres, un arc de cercle qui rencontre l'horizontale 9,0 aux points b et c, il y a donc deux solutions, et la droite cherchée peut avoir pour projection ab ou ac.

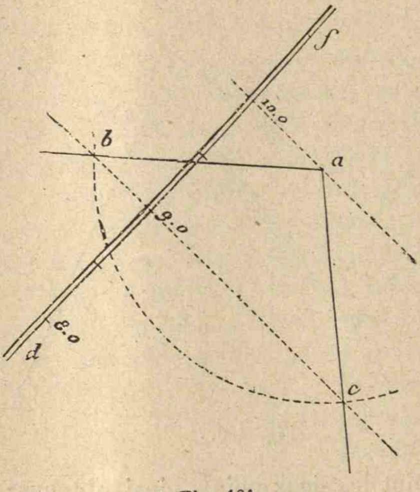


Fig. 181.

Il est évident que la pente de la droite doit être plus faible que la pente du plan.

Si elle est égale, l'arc de cercle touchera l'horizontale de même cote, et la ligne tracée dans le plan sera une ligne de plus grande pente.

237. **Problème.** — *Faire tourner un plan autour d'un axe vertical.*

On donne un plan par sa ligne de plus grande pente fh, on se propose de faire tourner ce plan autour d'un axe vertical qui perce le plan en un point projeté au point a et dont la cote est connue (fig. 182).

Tous les points du plan décriront des cercles horizontaux autour de l'axe, et une horizontale quelconque restera dans le plan horizontal qui la contient: de plus, elle sera constamment tangente à un cercle décrit dans le plan horizontal qui la contient, ayant son centre sur l'axe, et pour rayon la distance de l'axe à l'horizontale.

Les projections de tous les centres sont confondues avec le point a, puisque l'axe est vertical.

Ainsi l'horizontale 6,0 du plan restera tangente au cercle décrit du point a comme centre avec la distance du point a à la droite comme rayon. Décrivons ce cercle bc, situé dans le plan horizontal 6,0; une tangente quelconque dk à ce cercle peut être regardée comme une position particulière de l'horizontale 6,0. Le point a du plan n'a pas changé, et

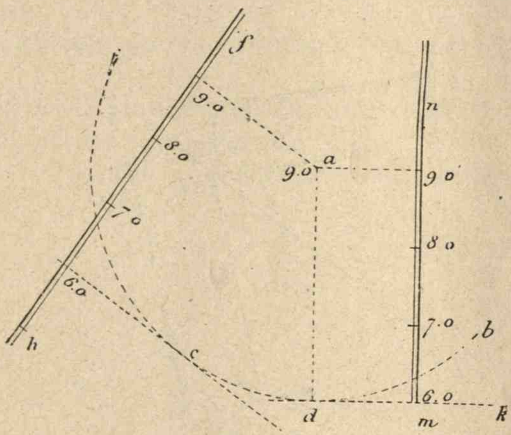


Fig. 182

la droite ad menée par le point de contact est une ligne de plus grande pente du plan dont on a les cotes aux points a et d. On peut donc figurer une parallèle mn à cette droite, et la graduer, de manière qu'elle ait un point sur l'horizontale dk, et cette parallèle mn sera une échelle de pente du plan dans la nouvelle position où nous l'avons amené après la rotation.

238. Problème. — *Mener par une droite un plan de pente donnée.*

La droite est ab (fig. 183), on veut mener par cette droite un plan dont la pente soit $\frac{1}{3}$.

La ligne de plus grande pente doit donc être telle que l'intervalle soit égal à 3. (Ici 3 centimètres à l'échelle de $\left.\frac{1}{100}\right)$.

Traçons par le point *a* pris sur la droite une ligne quelconque *am* que nous coterons de manière à lui donner la pente de $\frac{1}{3}$ ($am=3$ centimètres).

Cette ligne pourra être considérée comme une position particulière de la ligne de plus grande pente du plan cher-

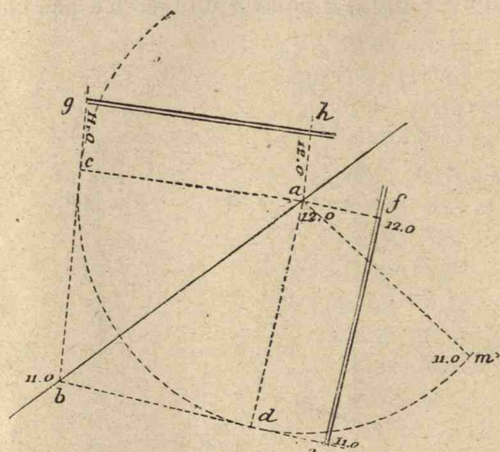


Fig. 183.

ché, si l'on fait tourner ce plan autour de la verticale du point *a*.

Dans cette rotation le cercle décrit par le point *m* sera dans le plan horizontal dont la cote est 11,0, et l'horizontale 11,0 du plan restera toujours tangente à ce cercle.

Le plan doit passer par la droite, donc le point 11,0 de la droite sera sur l'horizontale 11,0 du plan.

Menons par le point *b* côté 11,0 une tangente *bd* au cercle, nous obtenons l'horizontale 11,0 du plan qui est déterminé en outre par le point *a* dont la cote est connue.

L'échelle de pente est perpendiculaire à *bd*, nous la figurons en *ef*, nous la cotons 11,0 au point *e* et nous prenons l'intervalle *ef*=*ad*. On peut mener du point *b* une seconde tangente *bc* qui fournit une seconde solution, l'échelle de pente de ce second plan est *gh;* son intervalle est égal à celui du premier plan.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener par le point *b* une tangente au cercle, c'est-à-dire que *ab* soit plus grand que *am;* il faut donc *que la pente du plan soit plus grande que la pente de la droite.*

Si les deux pentes sont égales, il n'y aura qu'une seule solution, et *ab* sera la ligne de plus grande pente du plan construit.

239. **Problème.** — *Construire l'intersection de deux plans.*

L'échelle de pente du premier plan est *ab*, l'échelle de pente du second plan est *dc* (fig. 184).

Considérons dans les deux plans les horizontales à la cote

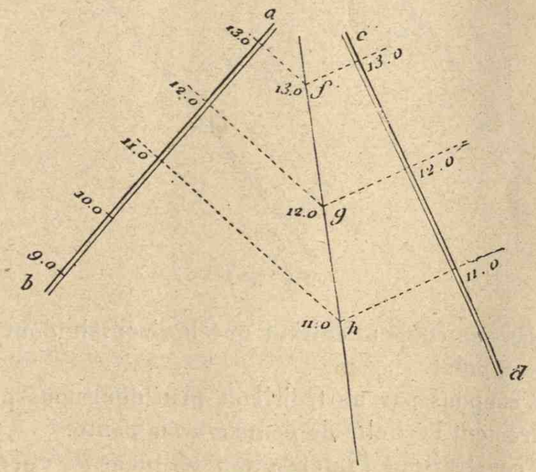


Fig. 184.

13,0, elles sont dans un même plan et se rencontrent en un point *f* qui appartient à l'intersection.

Les horizontales 12,0 se rencontrent en un point *g*.

Les horizontales 11,0 se rencontrent en un point *h*.

Tous ces points appartiennent à l'intersection des deux plans et doivent être en ligne droite. La ligne d'intersection est en même temps graduée à ses points de rencontre avec les diverses horizontales.

240. **Problème.** — *Construire l'intersection de deux plans dont les échelles de pente sont parallèles en projection.*

Les échelles de pente sont *ab* et *cd* parallèles, mais les intervalles sont différents sur ces échelles, et les plans ne sont pas parallèles (fig. 185)

Les horizontales perpendiculaires à des droites dont les projections sont parallèles, sont parallèles entre elles; les

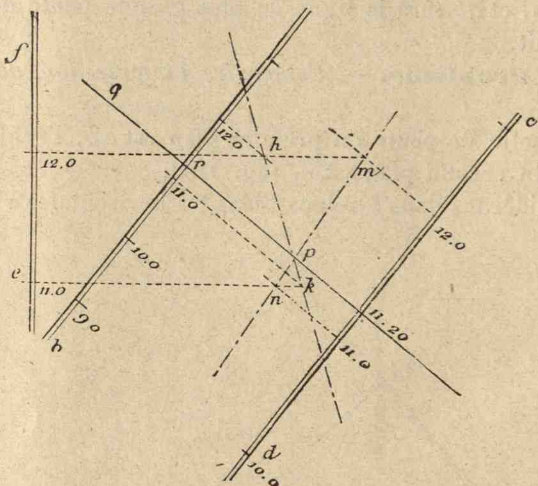


Fig. 185.

deux plans se coupent suivant une horizontale dont il faut obtenir un point.

Nous coupons par un troisième plan dont nous prenons arbitrairement l'échelle de pente *ef* et la pente.

Nous construisons l'intersection des plans *ab* et *ef*; nous obtenons la droite *hk;* nous construisons l'intersection des plans *cd* et *ef*, nous obtenons la droite *mn*. Ces deux droites sont dans le plan *ef* et se rencontrent au point projeté en *p*.

L'intersection des deux plans proposés est la droite horizontale *pq*.

Nous fixons sa cote au moyen de la cote du point où elle rencontre une des échelles de pente ; le point *r* situé sur *ab* serait coté 11,20. C'est la cote de l'intersection des deux plans.

Exercice. — Construire l'intersection de deux plans dont les échelles de pente sont *presque* parallèles en projection.

241. **Problème.** — *Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan.*

Le plan est donné par l'échelle de pente *ab*.

La droite a pour projection *cd* (fig. 186).

Nous faisons passer par la droite un plan quelconque ; il suffit de mener par les points cotés de la droite des parallèles

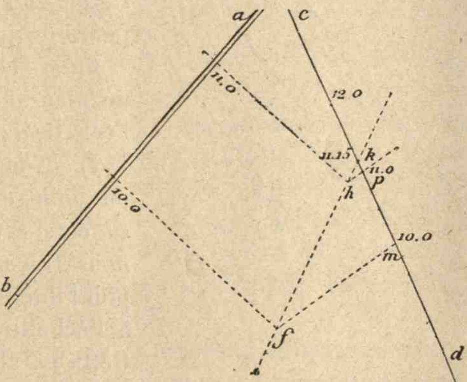


Fig. 186.

mf et *ph* à une direction arbitraire, elles déterminent un plan, dont il est même inutile de figurer l'échelle de pente, et dont elles sont les horizontales ; ainsi nous plaçons la droite *mf* à la cote 10,0 et la droite *ph* à la cote 11,0.

Les horizontales de même cote de ce plan et du plan proposé se rencontrent aux points *f* et *h* : les deux plans se coupent suivant *fh* qui croise la droite donnée au point *k*. Le point *k* est le point de rencontre cherché ; il est sur la droite, sa cote est facile à obtenir : ici sa cote est 11,15.

DROITES ET PLANS

PERPENDICULAIRES

242. Quand une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection horizontale est perpendiculaire à la trace horizontale du plan.

La projection de la perpendiculaire à un plan est donc perpendiculaire aux horizontales, *ou parallèle à l'échelle* de pente du plan.

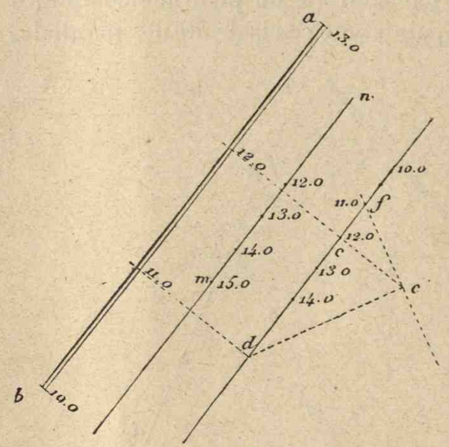


Fig. 187.

Ainsi considérons un plan dont *ab* est l'échelle de pente (fig. 187). Nous prenons un point *c* du plan sa cote est 12,0, et nous traçons par ce point une parallèle *cd* à l'échelle de pente. Cette parallèle est la projection d'une perpendiculaire au plan mené par le point *c;* il faut coter cette ligne. Imaginons le plan vertical dont la trace est *cd*, et rabattons-le sur le plan horizontal 11,0, le point *c* viendra en c', la longueur cc' étant égale à 1 mètre; le point *d* ne change pas, et la droite $c'd$ représente la trace du plan donné sur le plan vertical; menons par c' une perpendiculaire à cette droite, cette perpendiculaire $c'f$ est le rabattement de la perpendiculaire cherchée.

Si nous désignons par α l'angle de pente du plan, et par β l'angle de pente de la perpendiculaire, ces deux angles étant complémentaires nous aurons :

$$tg\alpha \times tg\beta = 1.$$

Or $tg\alpha = \frac{1}{i}$, $tg\beta = \frac{1}{i}$; i et i' étant les intervalles du plan et de la perpendiculaire, donc

$$\frac{1}{ii'} = 1 \text{ ou } i' = \frac{1}{i}.$$

Les intervalles sont donc réciproques.

Ainsi l'intervalle sur l'échelle de pente étant égal à 2 mètres, l'intervalle sur la perpendiculaire est égal à $\frac{1^m}{2} = 0^m,50$.

Nous portons donc à partir du point c sur la perpendiculaire des longueurs égales à $0^m,05$ $\left(\text{à échelle de } \frac{1}{100}\right)$ et nous avons les points de la perpendiculaire dont les cotes diffèrent de 1 mètre.

D'ailleurs il est évident que les cotes doivent être placées de manière que la perpendiculaire descende dans le sens opposé à la ligne de plus grande pente du plan.

243. **Problème.** — *Mener une perpendiculaire à un plan par un point extérieur* (fig. 186).

Le plan est donné par son échelle de pente ab. Le point est le point m coté 15,0.

La projection de la perpendiculaire est mn parallèle à l'échelle de pente ; son intervalle est inverse de celui du plan ; l'intervalle du plan $=2$ mètres, l'intervalle sur la perpendiculaire $\frac{1^m}{2} = 0^m,50$, nous portons des intervalles égaux à 0^m5 en cotant en sens inverse de l'échelle de pente. On pourra construire ensuite le point de rencontre de la perpendiculaire avec le plan en suivant la méthode exposée (241), et l'on pourra calculer la distance du point au plan (230).

244. **Problème.** — *Mener par un point une perpendiculaire à une droite.*

La droite donnée est ab, le point donné est le point c coté 8,00. (fig. 188).

L'échelle de pente doit être parallèle à la projection de la droite ; nous traçons *cd* parallèle à *ab*. L'intervalle sur le plan doit être inverse de l'intervalle sur la droite

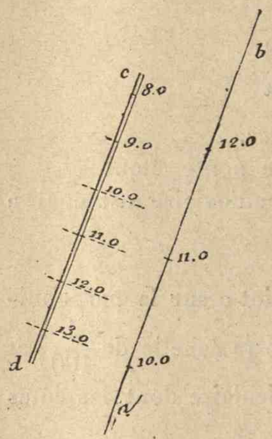


Fig. 188.

L'intervalle sur la droite $=1^m,50$,

l'intervalle du plan $=\frac{1}{1,50}=0^m,66$.

Nous portons sur l'échelle *cd* des longueurs égales à $0^m,0066$ (à l'échelle de $\frac{1}{100}$) et nous cotons les points de manière que l'échelle descende en sens inverse de la droite.

Distance du point à la droite.

On construira comme nous l'avons montré le point de rencontre de la droite et du plan, on joindra ce point au point *c* et l'on calculera la longueur de cette droite.

245. Problème. — *Rabattre un plan sur un plan horizontal.*

On donne l'échelle de pente d'un plan *ab*, un point *c* du plan coté 12,65 (fig. 189). On se propose de rabattre le plan et le point sur le plan horizontal 10,0.

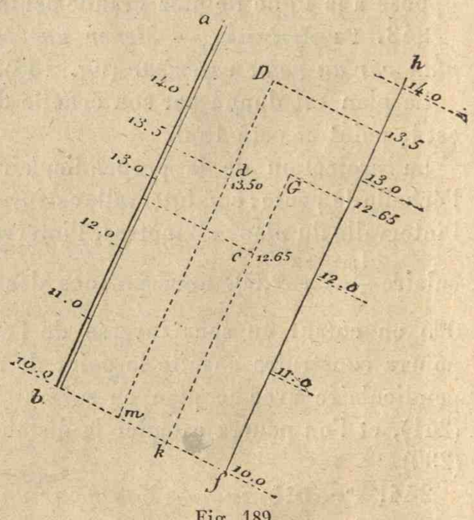


Fig. 189.

Calculons la distance réelle de deux points de l'échelle de pente dont les cotes diffèrent de 1 mètre ; l'intervalle est égal à 1 mètre ; la distance $=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=1,41$.

Le plan étant rabattu autour de l'horizontale 10,0 qui reste fixe, l'horizontale 11,0 se rabattra suivant une droite parallèle distante de la première de $1^m,41$, et si nous portons sur une droite fh, parallèle à l'échelle de pente, des longueurs égales à 1,41, nous aurons le rabattement d'une échelle de pente, c'est l'échelle de division du plan rabattu, et les horizontales du plan se rabattent suivant des perpendiculaires passant par les points de division.

La position du point c par rapport aux horizontales du plan ne changera pas dans le rabattement; nous prenons sur l'échelle fh le point 12,65 et nous menons la perpendiculaire à fh; le point c sera rabattu sur cette ligne. D'autre part, ce point se rabattra sur une perpendiculaire à la charnière, c'est-à-dire à l'horizontale 10,0, donc son rabattement est C.

246. Problème. — *Relever un plan rabattu* (fig. 189).

Relevons le point D que nous considérons comme un point du plan, rabattu avec lui. Ce point D se relève sur la perpendiculaire Dm à la charnière ; si l'on cherche la position du point D par rapport aux horizontales rabattues, on trouve qu'il correspond à 13,50; il viendra donc se placer sur l'horizontale 13,50 du plan relevé; sa position est donc le point d.

247. Problème. — *Construire l'angle de deux droites.*

Nous supposons que les deux droites ab et cd se coupent au point f, qui est le sommet de l'angle et qui est coté 12,75 (fig. 190).

Nous cherchons sur chaque droite le point coté 10,0, et nous traçons la ligne ac qui est une horizontale du plan des deux droites.

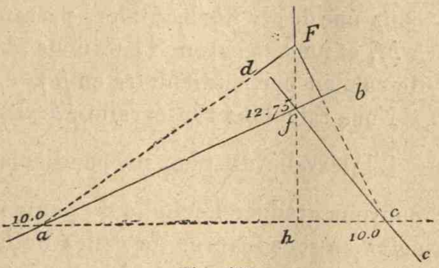


Fig. 190.

Nous rabattons le plan autour de cette horizontale sur le plan horizontal 10,0; le point f vient sur la perpendiculaire fh à l'horizontale à une distance du point h égale à $\sqrt{(1,50)^2+(2,75)^2}=2^m,30$ (la longueur mesurée $hf=1^m,50$ et la différence de cote est $2^m,75$).

Nous prenons $h\mathrm{F}=2^{\mathrm{m}},30$, et nous joignons le point F aux points a et c; l'angle $a\mathrm{F}c$ est l'angle cherché.

248. Problème. — *Construire l'angle de deux plans.*

Les échelles de pente des deux plans sont ab et cd (fig. 191). Nous construisons l'intersection fh.

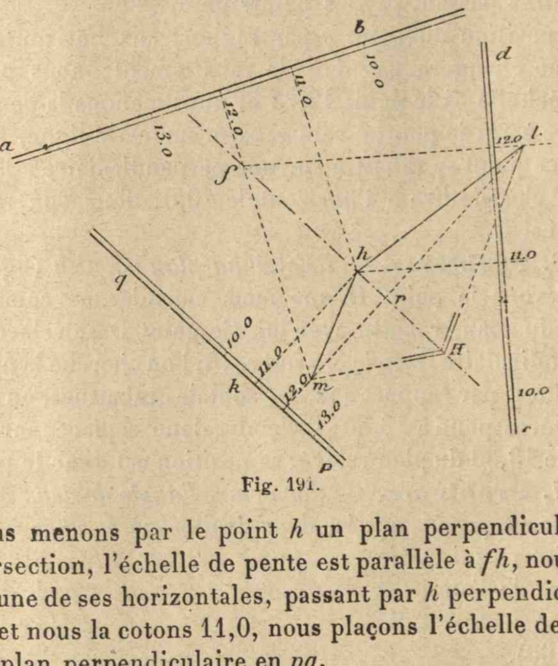


Fig. 191.

Nous menons par le point h un plan perpendiculaire à l'intersection, l'échelle de pente est parallèle à fh, nous plaçons une de ses horizontales, passant par h perpendiculaire à hf, et nous la cotons 11,0, nous plaçons l'échelle de pente de ce plan perpendiculaire en pq.

Nous calculons l'intervalle $fh=2^{\mathrm{m}},05$.

L'intervalle du plan perpendiculaire$=\frac{1}{2,05}=0,48$; nous pouvons graduer l'échelle de pente en faisant descendre les cotes en sens inverse de celles de la droite fh.

Nous pouvons construire les intersections du plan pq avec le plan ab et avec le plan cd; ce sont les droites hm et hl, et l'angle de ces deux droites fera connaître l'angle des deux plans. Nous rabattons cet angle autour de ml qui est l'horizontale 12,0 du plan; le point h se rabat en H à une distance $r\mathrm{H}=\sqrt{1+(0,48)^2}=1^{\mathrm{m}},12$, et l'angle $m\mathrm{H}l$ est l'angle cherché.

249. Problème. — *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

L'angle d'une droite avec un plan est l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan ; on peut donc construire la projection, en prenant d'abord le point de rencontre de la droite et du plan, en abaissant d'un point de la droite une perpendiculaire sur le plan. Il est préférable ici de se contenter d'abaisser d'un point de la droite une perpendiculaire sur le plan et de prendre l'angle des deux droites qui est le complément de l'angle cherché.

250. Problème. — *Construire la plus courte distance de deux droites.*

On donne la droite *ab* et la droite *cd* (fig. 192).

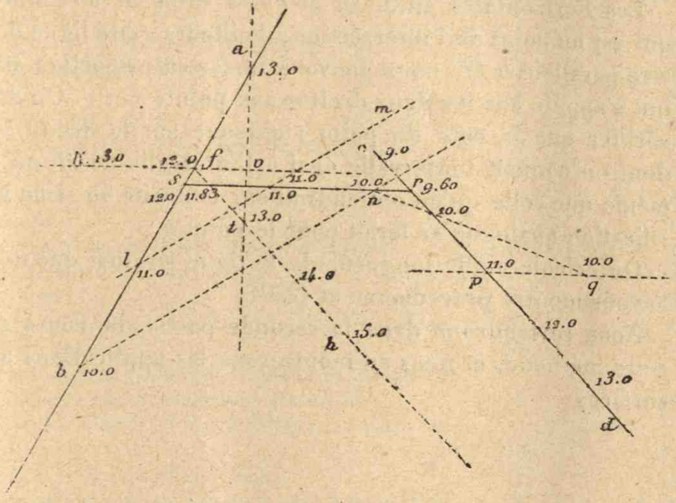


Fig. 192.

On se propose de construire la perpendiculaire commune.

Construisons un plan parallèle à la fois aux deux droites : par un point *f* coté 12,0 pris sur *ab*, nous menons la parallèle *fh* à *cd* ; *ta* est l'horizontale 13,0 de ce plan.

Nous menons une perpendiculaire au plan par le point *f* ; la projection de cette perpendiculaire est *fk* perpendiculaire à l'horizontale *ta* ; son intervalle est inverse de l'intervalle *fv* du plan ; $fv = 0^m,72$, l'intervalle de la perpendiculaire $= \frac{1}{0,72} = 1^m,38$; la perpendiculaire est donc cotée, et nous avons soin de la faire descendre en sens inverse du plan.

Nous conduisons par chaque droite un plan parallèle à la perpendiculaire, *l'intersection des deux plans sera la perpendiculaire commune.*

Le plan de *ab* et de *kf* est un de ces plans ; *lm* est l'horizontale 11,0 de ce plan, *bn* est l'horizontale 10,0.

Nous traçons par le point *p* coté 11,0 sur *cd* la parallèle *pq* à la perpendiculaire. Le plan de *cd* et de *pq* est le second plan ; *qn* est son horizontale 10,0.

Les horizontales 10,0, *bn* et *qn* se croisent au point *n* qui est un point de l'intersection ; d'ailleurs cette ligne doit être parallèle à *kf*, nous pouvons tracer sa projection *sur*, qui s'appuie sur les deux droites aux points *s* et *r*. On doit vérifier que la cote du point *s* obtenue sur la droite *sur* dont on connaît l'intervalle égal à l'intervalle de *rf*, est la même que celle qu'on obtiendrait sur la droite *ba*. Une vérification analogue se ferait pour le point *r*.

On calculerait la longueur de la ligne *sr* ainsi que nous l'avons montré précédemment (230).

Nous reviendrons dans la seconde partie du cours sur cette méthode, et nous en montrerons les applications aux surfaces

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

GÉNÉRALITÉS.

	Paragraphes.	Pages.
Définition	1	1
Projection. Position du spectateur	2	1
Plan horizontal. Projetantes	3	3
Cotes	4	3
Projections cotées	5	3
Projection auxiliaire. Ligne de terre	6	4
Épure	7	5
Sens des cotes. Épure simplifiée	8	6
Échelle	9	7
Déplacement parallèle du plan horizontal	10	8
Changement de plan vertical	11	8
Exemple	12	10
Observation sur l'emploi de la projection cotée.	13	11
Éloignements	14	12
Position du spectateur, lorsque la projection verticale est la projection principale	15	12
Plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical	16	12
Épure. Sens des éloignements	17	13
Résumé des conventions de la double projection.	18	14-16

LA LIGNE DROITE.

Projections d'une droite	19-20	17
Droite horizontale	21	18
Lignes de bout	22	18
Lignes de front	23	19
Lignes verticales	23 *bis*	19

	Paragraphes.	Pages.
Lignes parallèles à la ligne de terre	24	20
Lignes de profil	25	20
Amener une droite à être de front.	26	21
Longueur d'une droite, angle avec le plan horizontal	27	22
Amener une droite à être de profil.	30	23
Prendre un point sur une droite de profil . . .	31	24
Double changement de plan.	32	24
Amener une droite à être perpendiculaire au plan horizontal	33	25
Notations	33 *bis*	26
Retour au système primitif.	33 *ter*	27
Amener une droite à être perpendiculaire au plan vertical	34	28
Amener une droite à être parallèle à la ligne de terre	35	28
Géométrie cotée : Manières de définir une droite.	36	29

LE PLAN

Définition	37	31
Trouver un point d'un plan	38	31
Lignes caractéristiques d'un plan	39	32
Horizontales, lignes de front, traces	40-42	33
Surfaces sans épaisseur	42 *bis*	35
Lignes de plus grande pente et angles d'un plan avec les plans de projection.	43-46	36-38
Plan vertical	47	38
Plan de front.	48	39
Plan de bout.	49	40
Plan horizontal.	50	40
Plan de profil	51	40
Amener un plan à être de bout	52	40
Employer ce plan de bout comme plan de projection. Angle de deux droites.	53-54	41-42
Plan parallèle à la ligne de terre	55-56	42
Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan perpendiculaire à un plan de projection	57	43
Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan	58-59	44-46
Construire l'intersection de deux plans	60-61	47-48
Point commun à trois plans.	62	49

		Paragraphes.	Pages.
Mêmes problèmes, les plans étant donnés par leurs traces		63-66	49-52
Géométrie cotée :	Lignes de plus grande pente, échelles de pente	67	52
	Trouver la cote d'un point d'un plan	68	54
	Intersection d'une droite et d'un plan	69	54
	Intersection de deux plans	70-71	57-59
Applications		72-73	59-60
Plans bissecteurs des dièdres formés par les plans de projection		74	61
Droites parallèles aux plans bissecteurs		75-77	62-64
Droites perpendiculaires aux plans bissecteurs.		79	65
Plans perpendiculaires aux plans bissecteurs.		80	66
Exercices		81	67

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES.

Mener par un point une perpendiculaire à un plan. Distance du point au plan	82-86	69-72
Mener par un point un plan perpendiculaire à une droite et abaisser d'un point une perpendiculaire sur une droite	87-90	73-76
Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan	91	76
Construire la perpendiculaire commune à deux droites.	92	77
Cas particuliers	94-97	79-82
Géométrie cotée : Mêmes problèmes	98-101	83-89
Exercices	102	89

ROTATIONS.

Principe.	104	92
Faire tourner un point autour d'un axe vertical ou de bout.	105-106	93
Faire tourner une droite autour d'un axe vertical ou de bout.	107-109	93-95
Corrélation avec les changements de plans de projection	110	96
Amener une droite à être perpendiculaire au plan horizontal	111	96
Comparaison avec les changements de plans de projection.	112-113	98-99
Amener une droite à être de profil	115	100
— — de bout	116	100
— — parallèle à LT	117	100

	Paragraphes.	Pages.
Simplification des tracés dans certains problèmes	118-119	101-102
Faire tourner un plan autour d'un axe vertical ou de bout	121-122	102-104
Amener un plan à être parallèle au plan horizontal ou au plan vertical	123-124	104
Amener un plan à être parallèle à LT	125	106
Faire passer un plan par un point donné . . .	126	106
— — par une droite donnée . .	127	107
Exercices	128	108

RABATTEMENTS.

Définition et tracé	129	110
Formules	130	112
Rabattre un plan perpendiculaire à un plan de projection	131	113
Relèvements	132	114
Angle de deux droites et bissectrice	133	116
Angle de deux plans et plan bissecteur	134-138	117-121
Angle d'une droite et d'un plan	139	123
Projections d'un cercle situé dans un plan. . .	140-143	123-129
Points entraînés dans le rabattement d'un plan.	144-146	129-133
Géométrie cotée : Rabattement d'un plan	147	133
Géométrie cotée : Angle de deux droites	148	134
Géométrie cotée : Angle de deux plans	149	134
Géométrie cotée : Angle d'une droite et d'un plan. .	150	137
Exercices	151	138

POLYÈDRES.

Définition	152	141
Visibilité d'un point par rapport à un plan . .	153	141
Position relative de deux droites	154	143
Représentation d'un octaèdre	155	143
— prisme.	156	146
— d'une pyramide	157	147
Intersection d'une droite et d'un polyèdre. . .	158	147
Visibilité de la droite	159	149
Intersection d'une droite et d'une pyramide . .	160	150
Projections coniques et cylindriques	161	151
Intersection d'une droite et d'un prisme . . .	162	152
Section plane d'un polyèdre quelconque. . . .	163	153
Section plane d'une pyramide	164-165	154
Figures homologiques	166-167	160-162
Section plane d'un prisme	168	162

DÉVELOPPEMENT DES POLYÈDRES

	Paragraphes.	Pages.
Développement d'un prisme.	169	164
— d'une pyramide	170	165
— d'un polyèdre quelconque . . .	171	165

INTERSECTION DES POLYÈDRES.

Méthode générale.	172	165
Ponctuation des figures	173	172
Application à l'épure de l'intersection de deux polyèdres et tracé d'une épure	174-175	174
Prisme et pyramide	176	177
Ordre de jonction des points	177	178
Ponctuation	178-181	180
Intersection de deux prismes	182	183
Représentation du solide commun	183	186
Intersection de deux prismes qui n'ont pas leurs bases dans le même plan	185	187
Intersection de deux pyramides qui n'ont pas leurs bases dans le même plan	186-187	189-191
Intersection d'un prisme et d'une pyramide qui n'ont pas leurs bases dans le même plan . .	188	191

RÉSOLUTION DES ANGLES TRIÈDRES.

Angles trièdres :	Généralités	189	192
	1er cas : les trois faces	190-192	193
	2e cas : deux faces et le dièdre compris . .	193	197
	3e cas : deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles	194	199
	4e cas : une face et les deux dièdres adjacents	195	200
	5e cas : une face, un dièdre adjacent, le dièdre opposé	196	201
	6e cas : les trois dièdres.	197	203
	Angle trièdre trirectangle	198-199	203

SPHÈRE INSCRITE.

Inscrire une sphère dans un tétraèdre. . . .	200-203	206
Construction de M. Hermary	204	210
Sphère circonscrite à un tétraèdre.	205	213

POLYÈDRES RÉGULIERS.

Tétraèdre	206	215
Hexaèdre ou cube.	207	216
Octaèdre	208	218

	Paragraphes.	Pages.
Dodécaèdre	209-210	221
Icosaèdre	211-212	224

DES OMBRES.

Ombre d'un point.	213	228
Ombre d'une droite.	214	228
Ombre d'un polygone	216	230
Ombre d'une droite sur une autre	217	231
Ombre d'un polyèdre	218	231
Ombre d'une droite sur un polyèdre	219	233
Ombre portée par deux polyèdres l'un sur l'autre.	220	234

PROJECTIONS COTÉES

Généralités	221	237
Echelles.	222	237
Détermination d'une droite, cotes de ses points.	224-226	238-240
Intervalle	227	240
Parallèle à une droite	228	240
Distance de deux points	230-231	241
Angle d'une droite avec le plan horizontal. Pente	232	242

DU PLAN.

Définition d'un plan	234	244
Construire l'échelle de pente d'un plan	235	245
Mener dans un plan une droite de pente donnée.	236	245
Faire tourner un plan autour d'un axe vertical.	237	246
Mener par une droite un plan de pente donnée.	238	347
Construire l'intersection de deux plans. . . .	239-240	249
Point de rencontre d'une droite et d'un plan . .	241	251
Perpendiculaire à un plan, intervalle	242	252
Mener par un point une perpendiculaire à un plan	243	253
Mener par un point une perpendiculaire à une droite.	244	253
Rabattre et relever un plan.	245-246	254
Angle de deux droites	247	255
Angle de deux plans.	248	256
Angle d'une droite et d'un plan	249	257
Plus courte distance de deux droites	250	257

Imp. Paul Schmidt. — F. Schmidt Fils, Grand-Montrouge (Seine).

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE