

S t a t i c a
și
R e z i s t e n ța

de
Gh. Em. Filipescu

II



Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului
Imprimeria Națională
București
1935



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI

Cota *639/9 Inplet*

Inventar *431966*

Biblioteca Centrală Universitară
București
Cota *639/9 Inplet*
Inventar *431966*

RC96/03

639/9-63920

B.C.U. Bucuresti



C431966

VIII. GRINZI CU ZĂBRELE ÎN SPAȚIU.

A) Considerațiuni generale.

Aceste construcțiuni le obținem în același fel ca și grinzile cu zăbrele plane, cu singura deosebire că în spațiu, pentru fixarea unui punct în mod invariabil de o construcție, avem nevoie de 3 bare (fig. 167) articulate la capetele lor și invariabile ca lungime. După această regulă, dacă grinda cu zăbrele are n noduri, avem nevoie de $3n$ bare. Se observă că pentru a lega în mod invariabil primele trei puncte avem nevoie numai de 3 bare, deci în total regula de mai sus ne dă un surplus de 6 bare, și deci numărul barelor este:

$$(1) \quad m = 3n - 6$$

Ca și la grinzile cu zăbrele în plan, putem suprima o bară înlocuind-o cu alta, cu condiția însă ca sistemul să rămână nedeformabil, adică o parte a grinzii să nu poată avea mișcări, de orice fel, față de cealaltă.

Dacă se pleacă dela considerațiunea găsirii eforturilor din bare, se găsește aceeași legătură între numărul barelor și numărul nodurilor. În adevăr, dacă avem n noduri, vom scrie $3n$ ecuații de echilibru. Sistemul fiind în echilibru șase ecuațiuni între forțele dela noduri — forțe date și reacțiuni — trebuiesc satisfăcute, așa că pentru determinarea eforturilor din bare nu dispunem decât de $3n - 6$ ecuații și deci acesta trebuie să fie numărul barelor.

Pentru ca eforturile în bare să fie finite, trebuie ca același determinant $\Delta \neq 0$, determinant care are exact aceeași structură ca la grinzile plane.

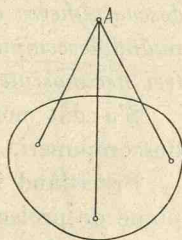


Figura 167



Pentru determinarea eforturilor din bare vom scri echilibrul fiecărui nod și vom căpăta un sistem de ecuații liniar și omogen în F , întocmai ca la grinzile plane, și deci expresia efortului va fi de forma:

$$(2) \quad N_{ik} = n_{ik,1} F_1 + \dots + n_{ik,i} F_i + \dots$$

Așa dar, putem utiliza suprapunerea efectelor, etc.

În fine toate considerațiunile generale avute acolo în vedere sunt aplicabile și aci.

B) Determinarea eforturilor din bare.

Avem și aci aceleași metode ca la grinzile plane.

1. Metoda separării nodurilor.

a) Metoda lui Cremona.

Vom scri echilibrul fiecărui nod în parte, deci vom aplica *metoda lui Cremona*.

Pentru a putea aplica această metodă, este nevoie să începem descompunerea dela un nod din care pleacă numai trei bare și continuând descompunerea să ajungem la un nod la care avem iarăși numai trei necunoscute.

S'a dat norma grafică și analitică pentru efectuarea acestei descompuneri.

Procedând în acest fel pe cale grafică, se obțin în cele două plane de proiecție două figuri reciproce, a căror laturi ne dau în proiecție eforturile din bare, pe cari apoi putem să le aflăm în adevărată mărime.

Numărul barelor fiind $m = 3n - 6$ și cum o bară aparține la două noduri, înseamnă că m mediu într'un nod este:

$$(3n - 6)/(n/2) = 6 - 12/n \text{ bare.}$$

Se poate ușor recunoaște, că, chiar pentru un număr restrâns de noduri, putem avea grinzi cu zăbrele la cari din fiecare nod să plece mai mult decât trei bare și deci nu putem aplica metoda lui Cremona.

Pentru a o putea aplica, grinda va trebui să mai îndeplinească o condițiune specială, întocmai ca la grinzile cu zăbrele plane.

Dacă se urmează exact același raționament ca acolo, se găsește că acea condițiune este ca grinda cu zăbrele în spațiu să rezulte din juxtapunerea a o serie de piramide triunghiulare, cari nu se pătrund.

După această normă s'a alcătuit grinda cu zăbrele din fig. 168. De triunghiul 123 s'a fixat nodul 6; de triunghiul 163 s'a fixat nodul 8; de triunghiul 138 s'a fixat nodul 4; de triunghiul 168 s'a fixat nodul 5; de 368 s'a fixat nodul 7, de 568 s'a fixat nodul 9, etc.

Se recunoaște numaidecât că p'ecând dela nodurile 13 și 15, putem găsi eforturile în toate barele, până la nodurile 6 și 8. Dacă plecăm și dela nodurile 2 și 4, găsim eforturile și în restul barelor.

b) Metoda lui Henneberg.

În cazul când grinda nu îndeplinește condițiunea de aplicabilitate a metodei lui Cremona, vom aplica metoda lui Henneberg.

Suprimăm din grinda cu zăbrele o serie de bare și introducem din nou tot atâtea, câte avem nevoie pentru a transforma grinda în una căreia putem să-i aplicăm metoda lui Cremona. Sub acțiunea sarcinilor date, aflăm eforturile în toate barele acestei grinzi astfel transformată.

Fie $N_1, N_2, N_3 \dots$ eforturile din prima, a doua etc., din barele introduse din nou.

Suprimăm apoi toate forțele de pe grindă și după direcția primei bare suprimate, introducem în nodurile respective două forțe egale cu $1t$ și de sensuri contrare și aflăm din nou eforturile în toate barele grinzii transformate. Fie $n_{11}, n_{21}, n_{31} \dots$ eforturile din prima, a doua etc., din barele introduse.

Suprimăm apoi această forță și introducem alte două egale cu $1t$, în aceleași condițiuni, după direcția celei de a doua bară suprimată. Fie $n_{12}, n_{22}, n_{32} \dots$ eforturile din barele introduse.

Facem același lucru pentru toate celelalte bare.

Notăm cu X, Y, Z etc. eforturile din barele suprimate.

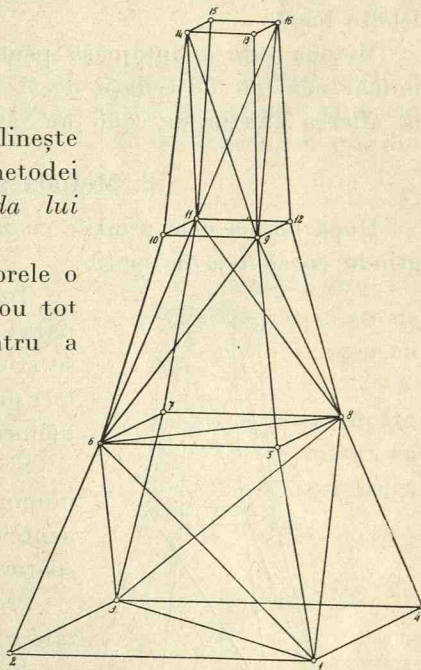


Figura 168

Dacă facem exact același raționament ca la grinzile plane, barele introduse le putem suprima când:

$$(3) \quad \begin{aligned} -N_1 &= X n_{11} + Y n_{12} + Z n_{13} + \dots \\ -N_2 &= X n_{21} + Y n_{22} + Z n_{23} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Vom avea atâtea ecuații câte înlocuiri am avut, cari ne determină valorile lui X , Y , Z , etc.

Bazați pe suprapunerea efectelor, deducem eforturile din celelalte bare.

Metoda este avantajoasă pentru că rezolvăm, în orice caz, un număr mai mic de ecuații decât în cazul când am proceda direct la aflarea eforturilor, când am avea de rezolvat $3n - 6$ ecuații.

2. Metoda secțiunilor.

După norma dela grinzile cu zăbrele plane, facem o secțiune în grinda cu zăbrele în spațiu.

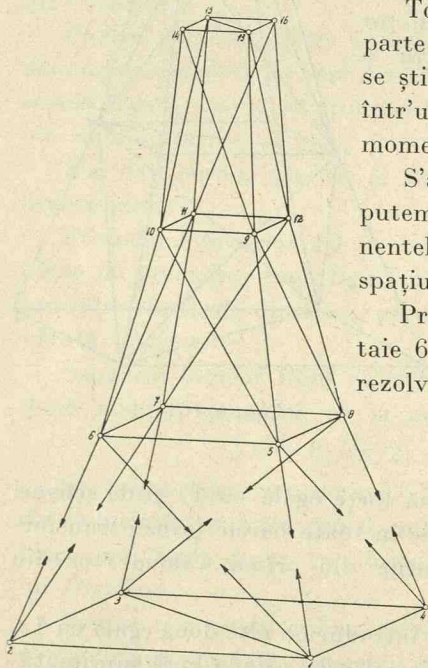


Figura 169

Toate forțele ce se găsesc de aceeași parte a secțiunii se reduc, după cum se știe, la o rezultantă unică $\bar{R}$, aplicată într'un punct ales după voie și la un moment $\bar{M}$ care corespunde aceluși punct.

S'a arătat la forțe în spațiu, cum putem găsi din grupul $\bar{R}$ și $\bar{M}$ componentele după 6 direcțiuni diferite în spațiu.

Prin urmare, dacă secțiunea făcută taie 6 direcțiuni diferite, problema este rezolvată.

Se întâmplă că la unele grinzi să nu găsim secțiuni cari să taie numai 6 bare ci mai multe și totuși descompunerea să fie posibilă fără a mai recurge la rezolvarea întregului sistem de $3n - 6$ ecuații.

În majoritatea cazurilor, această posibilitate ne-o dau elementele geometrice ale grinzii

care prezintă anumite particularități.

Particularitatea curentă este aceea de a avea mai multe direcțiuni cuprinse în același plan sau concurente.

Vom ilustra cele de mai sus printr'un exemplu.

Grinda din fig. 169 are zăbrelele astfel dispuse că nu-i putem aplica direct metoda lui *Crémona*.

Are particularitatea că nodurile 1, 2, 3 și 4 sunt în același plan. De asemenea și grupurile de noduri 2, 6, 7, 3 — 3, 7, 8, 4 — 1, 5, 8, 4 — 5, 6, 7, 8, etc. sunt cuprinse în aceleași plane.

Facem o secțiune care taie barele: 1, 5 — 1, 6 — 2, 6 — 2, 7, 3, 7 — 3, 8 — 4, 8 și 4, 5, în total 8.

Forțele din nodurile 1, 2, 3 și 4, cari rămân de aceeași parte a secțiunii, le compunem într'o rezultantă unică $\overline{R}$, aplicată să zicem în nodul 1 și la un moment $\overline{M}_1$. Dacă această rezultantă am aplica-o în nodul 8, atunci avem evident:

$$(4) \quad \overline{M}_8 = \overline{M}_1 + \overline{18. R}$$

Vom nota în cele ce urmează direcția 18 de exemplu, prin $\overline{18}$.

Vom lua momentul forțelor și al eforturilor din barele tăiate de secțiunea considerată, mai întâiu în raport cu nodul 1 și apoi cu nodul 8.

Proiectând aceste momente după direcțiunea $\overline{18}$, vom căpăta momentul după această axă. Se vede de pe figură că în raport cu această axă momentele a cinci din necunoscute sunt nule pentrucă o întâlnesc.

Vom avea deci:

$$(5) \quad \begin{aligned} l_{12} N_{26} \overline{12. 26} + l_{12} N_{27} \overline{12. 27} + l_{13} N_{37} \overline{13. 37} + l_{13} N_{38} \overline{13. 38} \\ + l_{14} N_{48} \overline{14. 48} + l_{14} N_{45} \overline{14. 45} = \overline{M}_1 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} l_{78} N_{27} \overline{87. 72} + l_{78} N_{37} \overline{87. 73} + l_{68} N_{26} \overline{86. 62} + l_{68} N_{16} \overline{86. 61} \\ + l_{58} N_{15} \overline{85. 51} + l_{58} N_{45} \overline{85. 54} = \overline{M}_8 \end{aligned}$$

Dacă se multiplică aceste ecuații scalar cu $\overline{18}$, dacă se ține seamă de relația între $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_8$ și că vectorii $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{45}$, $\overline{38}$, $\overline{48}$ și $\overline{58}$ sunt complanari cu $\overline{18}$, căpătăm:

$$\begin{aligned} l_{12} N_{26} \overline{12. 26. 18} + l_{12} N_{27} \overline{12. 27. 18} + l_{13} N_{37} \overline{13. 37. 18} = \overline{M}_1. \overline{18} \\ l_{68} N_{26} \overline{86. 62. 18} + l_{78} N_{27} \overline{87. 72. 18} + l_{78} N_{37} \overline{87. 73. 18} = \overline{M}_1. \overline{18} \end{aligned}$$

două ecuații între cele trei necunoscute din planul 2673.

Dacă, după aceeași normă, luăm momentele după axele $\overline{25}$, $\overline{36}$ și $\overline{47}$, vom căpăta în total 8 ecuații cari ne dau valorile căutate.

În cazul când planul 1234 este paralel cu 5678, și acesta-i cazul curent în practică, atunci și vectorii $\overline{12}$, $\overline{27}$ și $\overline{78}$ sunt complanari cu $\overline{18}$, și ecuațiile de mai sus se reduc la:

$$(7) \quad \begin{aligned} l_{12} N_{26} \overline{12} \cdot \overline{26} \cdot \overline{18} + l_{13} N_{37} \overline{13} \cdot \overline{37} \cdot \overline{18} &= \overline{M_1} \cdot \overline{18} \\ l_{68} N_{26} \overline{86} \cdot \overline{62} \cdot \overline{18} + l_{78} N_{37} \overline{87} \cdot \overline{73} \cdot \overline{18} &= \overline{M_1} \cdot \overline{18} \end{aligned}$$

două ecuații cu două necunoscute, cari ne dau direct efortul din montanții 26 și 37.

Eforturile din montanți fiind cunoscute, pentru rest aplicăm metoda lui *Cremona*, începând descompunerea sau reciproca dela nodurile unde avem trei necunoscute, ceea ce este totdeauna posibil.

Așa dar, avem posibilitatea să găsim, oarecum direct, eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele, rezolvând pe grupe restrânse cele $3n - 6$ ecuații, a căror rezolvare directă e o muncă foarte mare.

Chiar așa fiind, calculele sunt mai numeroase ca la grinzile cu zăbrele plane.

Volumele ce formează coeficienții diferiților termeni se evaluează grafic sau analitic după normele date, ținând bine înțeles seamă de semnele lor.

Aplicația Nr. 44. Să determinăm eforturile în barele grinzilor cu zăbrele din figurile 170 și 171 presupunând că la partea superioară se aplică două forțe

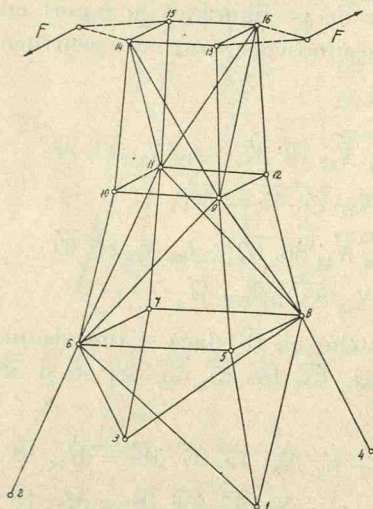


Figura 170

orizontale, egale și de direcții contrare, cari dau un moment M al cărui ax este evident vertical.

Fiecare grindă are câte 16 noduri. Grupele de noduri 1, 2, 3, 4, — 5, 6, 7, 8, — etc., sunt situate în plane orizontale.

De asemenea grupele de noduri 1, 5, 8, 4, — 1, 2, 6, 5, — 2, 6, 7, 3, — etc. sunt situate în câte un plan.

Ambele grinzi, prin intermediul articulațiilor 1, 2, 3 și 4, sunt fixate de câte o fundație.

Pentru ambele grinzi, pentru fiecare nod putem scrie câte trei ecuații, afară de nodurile 2 și 4 din prima figură, unde nu putem scrie decât câte o singură ecuație și afară de nodurile 1, 2, 3 și 4 din a doua figură, unde nu putem scrie decât câte două ecuații.

Deci pentru ambele figuri nu putem scrie decât câte $3 \times 16 - 4 = 44$ ecuații.

Ca necunoscute avem eforturile în cele m bare ale grinzii și reacțiunile din articulațiile 1, 2, 3, 4 cari, în ambele cazuri, au în total 8 necunoscute.

Deci avem $44 = m + 8$ și deci $m = 36$. Ambele grinzi au câte 36 bare, deci sunt static determinate și putem găsi reacțiunile și eforturile din bare.

a) *Să ne ocupăm de grinda cu zăbrele din fig. 170.* Facem o secțiune care taie toate barele care unesc grupurile de noduri 1, 2, 3, 4 cu 5, 6, 7, 8.

Dacă luăm momentul tuturor eforturilor din barele astfel tăiate, mai întâiu în raport cu nodul 1 și apoi cu nodul 3 și îl proiectăm pe direcțiunea $\overline{13}$, căpătăm:

$$\begin{aligned} l_{12} N_{26} \overline{12} \cdot \overline{26} \cdot \overline{13} + l_{14} N_{48} \overline{14} \cdot \overline{48} \cdot \overline{13} &= 0 \\ l_{32} N_{26} \overline{32} \cdot \overline{26} \cdot \overline{31} + l_{34} N_{48} \overline{34} \cdot \overline{48} \cdot \overline{31} &= 0 \end{aligned}$$

din cari deducem:

$$N_{26} = N_{48} = 0.$$

Dacă facem același lucru și în etajele superioare găsim:

$$N_{59} = N_{711} = 0 \quad \text{și} \quad N_{10,14} = N_{12,16} = 0.$$

Să considerăm echilibrul nodului 5. Am găsit $N_{59} = 0$, rezultă numaidecât că avem și:

$$N_{51} = N_{56} = N_{58} = 0.$$

Dacă procedăm astfel și cu nodurile 7, 10 și 12, găsim că eforturile din toți montanții și toate barele orizontale sunt nule.

Fac excepție numai barele orizontale care leagă nodurile 13—14—15 și 16, ale căror eforturi sunt independente de eforturile din restul grinzii și depind numai de modul cum forțele F se transmit acestor noduri.

Cu această excepție se vede că numai diagonalele acestei grinzii se încarcă cu eforturi.

Să le determinăm. Să ne ocupăm de diagonalele 1—6 și 1—8.

Momentul M putem să-l înlocuim cu un cuplu a două forțe *orizontale* trecând prin nodurile 1 și 3. Fiecare din aceste forțe trebuie să fie cuprinsă în planele determinate de nodurile 6—1—8 și 6—3—8, deci vor fi paralele cu 6—8 sau 2—4.

Dacă notăm cu a , distanța între nodurile 1 și 3 măsurată după normală la 2—4, atunci valoarea forței ce se aplică în nodul 1 sau 3 va fi:

$$M/a = F_1,$$

Această forță, din planul 6—1—8, o descompunem după regulile cunoscute după direcțiile $\overline{16}$ și $\overline{18}$.

Astfel procedăm și pentru celelalte. Prin urmare, problema este complet rezolvată.

b) *Să ne ocupăm de grinda din fig. 171.* Facem aceeași secțiune ca în cazul precedent, și luăm momentele tuturor eforturilor din barele tăiate în raport cu nodul 1. Se vede că acest caz a fost tratat la metoda secțiunilor și expresia momentului este dată de relația (5). S'a văzut acolo că eforturile din 2—6 și 3—7 sunt date de formula (7) și că deci avem eforturile din montanți.

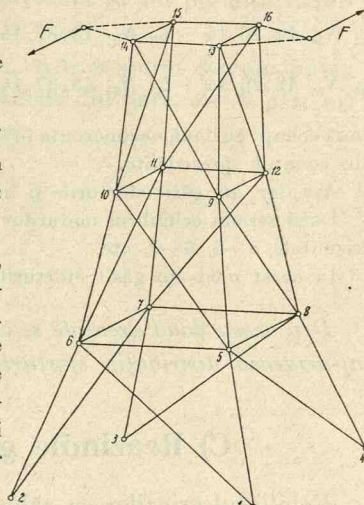


Figura 171

Dacă facem și alte secțiuni similare, găsim eforturile din toți montanții. Ca să găsim eforturile din diagonale vom lua momentul în raport cu două noduri așa fel încât, înmulțite convenabil, să dispară o serie de termeni și să ne rămână grupe de ecuații cu cât mai puține necunoscute.

Dacă expresiile lui $\overline{M}_1$ din (5) și a lui $\overline{M}_4$ a cărui expresie este:

$$l_{11} N_{15} \overline{41.15} + l_{41} N_{16} \overline{41.16} + l_{42} N_{26} \overline{42.26} + l_{43} N_{27} \overline{42.27} + l_{43} N_{37} \overline{43.37} + l_{43} N_{38} \overline{43.38} = \overline{M}_4 = \overline{M}$$

le înmulțim scalar cu $\overline{14}$ și dacă ținem seamă că $\overline{M} \overline{14} = 0$, obținem:

$$l_{12} N_{26} \overline{12.26.14} + l_{13} N_{37} \overline{13.37.14} + l_{12} N_{27} \overline{12.27.14} + l_{13} N_{38} \overline{13.38.14} = 0$$

$$l_{42} N_{26} \overline{42.26.14} + l_{43} N_{37} \overline{43.37.14} + l_{42} N_{27} \overline{42.27.14} + l_{43} N_{38} \overline{43.38.14} = 0$$

două ecuații cu două necunoscute în N_{27} , N_{38} , pentru că pe N_{26} și N_{37} îi cunoaștem din ecuațiile precedente.

Așa dar, am găsit eforturile și în toate diagonalele.

Dacă scriem echilibrul nodurilor 5, 6, 7, etc., găsim și eforturile din barele orizontale 5—6, 6—7, etc.

În acest mod am găsit eforturile din toate barele grinzii cu zăbrele.

Din aceste două exemple se vede că modul de așezare al diagonalelor influențează distribuția eforturilor în toate barele grinzii cu zăbrele.

C) Reazimile grinzilor cu zăbrele.

Echilibrul grinzilor cu zăbrele se asigură în genere prin reazime simple și articulații, cari se aplică diferitelor noduri.

Se știe că în plan o articulație are două necunoscute, un reazim simplu una singură.

Dacă notăm cu a numărul articulațiilor și cu s acela al reazimilor simple, atunci în plan aceste reazime vor avea $2a + s$ necunoscute.

În spațiu vor avea $3a + s$ necunoscute.

La grinzile cu zăbrele am găsit eforturile din bare scriind echilibrul fiecărui nod în parte și am văzut cum din acele ecuațiuni rezultă și reacțiunile.

Dacă n este numărul nodurilor, m numărul barelor grinzii cu zăbrele, a numărul articulațiilor și s numărul reazimilor simple cari asigură echilibrul grinzii cu zăbrele, atunci în plan numărul necunoscutelor trebuie să satisfacă relația

$$(1) \quad m + 2a + s = 2n$$

iar în spațiu

$$(1) \quad m + 3a + s = 3n$$

Dacă pentru o grindă plană avem $m = 2n - 3$, atunci rezultă:
 $2a + s = 3$.

Prin urmare, o articulație și un reazim simplu asigură echilibrul grinzii.

Relația (1) este satisfăcută și atunci când de exemplu mai adăugăm un reazim simplu, însă micșorăm numărul barelor cu una.

Același lucru și în spațiu.

Se va avea grijă ca bara care se suprimă să nu permită deformarea sistemului.

Echilibrul oricărei grinzi cu zăbrele va fi asigurat și vom putea determina valoarea reacțiunilor și eforturile din bare, ori de câte ori sunt satisfăcute relațiile (1) de mai sus.

IX. REZISTENȚE.

A) Rezistențe în spațiu.

1. Generalități și definiții.

Un corp găsiindu-se în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, va trebui ca și fiecare particică din el să fie de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor ce lucrează asupra ei.

Dacă, din interiorul corpului, separăm un element de volum, V , mărginit de o suprafață Ω , acesta va trebui de asemenea să satisfacă ecuațiile de echilibru.

Să vedem forțele cari lucrează asupra lui. Mai întâiu vom avea greutatea sau atracțiunea ce exercită asupra lui restul corpurilor înconjurătoare, sau forțele ce rezultă din accelerațiile la cari este supus. În al doilea rând vin reacțiunile ce le exercită corpul asupra suprafeței acestei particule de volum, reacțiuni egale cu acțiunile ce le exercită acest element de volum asupra corpului din care a fost detașat. Acestea sunt evident forțe.

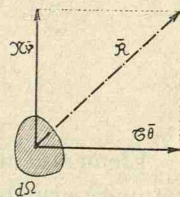


Figura 172

Dacă considerăm un element de suprafață $d\Omega$ (fig. 172), și dacă asupra ei se exercită o forță $d\vec{F}$, atunci limita raportului:

$$(1) \quad \overline{dF/d\Omega} = \overline{R}$$

poartă numele de *rezistență*.

Rezistența $\overline{R}$ va avea o valoare numerică, care, din definiția ce i s'a dat, se vede că se măsoară în forță/suprafață. În mod curent noi o exprimăm în kg/cm^2 , kg/mm^2 , sau t/m^2 *).

*) În sistemul m, t, s (metru, tonă, secundă) unitatea de forță este stenul = 102 kg greutate, adică forța care dă unei mase de 1 tonă o accelerație de 1 m/sec^2 . Unitatea de rezistență se măsoară în $\text{sten/cm}^2 = \text{piez}$. Rezultă deci: 1,02 $\text{kg/mm}^2 = 1 \text{ piez}$ sau 1 $\text{kg/mm}^2 = 0,981 \text{ piez}$. Această unitate este puțin întrebuințată.

Rezistența $\bar{\mathcal{R}}$ va avea și o direcțiune care va fi aceea a lui $d\bar{F}$.

În definiția lui $\bar{\mathcal{R}}$ intră și elementul de suprafață, care pe lângă mărime are și o direcțiune, care este fixată prin direcțiunea $\bar{v}$, a normalei la elementul de suprafață.

Se va considera $\bar{v}$ pozitiv, ori de câte ori este dirijat din interiorul corpului spre exteriorul lui.

Rezistența $\bar{\mathcal{R}}$ are în genere o direcțiune oarecare. O putem deci descompune, în planul determinat de ea și normala la suprafață, în două componente: una după normala $\bar{v}$ la suprafața $d\Omega$ și alta după tangenta $\bar{\theta}$ la această suprafață și cuprinsă în planul determinat de $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{v}$.

Componenta după normală poartă numele de rezistență normală, iar cea după tangentă, rezistență tangentială.

Prima se mai numește rezistența la tensiune sau compresiune, și valoarea ei se notează cu $\mathfrak{N}$. A doua se numește și rezistență la tăiere sau forfecare și valoarea ei se notează cu $\mathfrak{T}$.

Așa dar:

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \bar{\mathcal{R}} \bar{v} \quad , \quad \mathfrak{T} = \bar{\mathcal{R}} \bar{\theta}$$

Vom avea evident:

$$\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \bar{v} = \bar{\mathcal{R}} \bar{v} \cdot \bar{v} \quad , \quad \bar{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T} \bar{\theta} = \bar{\mathcal{R}} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}$$

și

$$\bar{\mathfrak{N}} + \bar{\mathfrak{T}} = \bar{\mathcal{R}} \quad \text{sau} \quad \mathfrak{N} \bar{v} + \mathfrak{T} \bar{\theta} = \bar{\mathcal{R}}$$

2. Ecuațiile de echilibru.

Elementul de volum V trebuie să se găsească în echilibru sub acțiunea următoarelor forțe:

1°. Greutatea G , a elementului de volum, care este egală cu $\bar{\gamma} V$, $\bar{\gamma}$ fiind greutatea specifică a materialului din care este făcut corpul.

2°. Dacă elementul de volum este în mișcare, el mai este supus la forța $m \bar{d}\bar{v}/dt$ în care m și $\bar{v}$ sunt masa și viteza elementului de volum.

3°. Forțele cari rezultă din rezistențele $\bar{\mathcal{R}}$, de pe toată suprafața elementului de volum și care au valoarea:

$$\bar{F} = \int \bar{\mathcal{R}} d\Omega$$

Pentru echilibru trebuie să avem:

$$\bar{\gamma} V + m \bar{d}\bar{v} / dt + \bar{F} = 0$$

$$\bar{a}\bar{\gamma} V + m \bar{a} \bar{d}\bar{v} / dt + \bar{a}\bar{F} = 0$$

adică rezultanta și momentul, în raport cu un punct oarecare, să fie nule.

În cazul când accelerația este nulă, avem:

$$\bar{\gamma} V + \bar{F} = 0 \quad \bar{a}\gamma V + \bar{a}\bar{F} = 0$$

Acestea sunt ecuațiile pe cari ni le dă mecanica.

3. Valoarea rezistenței $\bar{R}$ după o direcțiune oarecare.

Să presupunem că avem un element de volum de forma unui tetraedru (fig. 173). Trei fețe ale lui sunt ortogonale între ele, cum ar fi planele de coordonate ale unui sistem de axe rectangular, iar fața patra ABC un plan oarecare. Direcția acestui plan (ABC) este fixată prin direcția normalei sale $\bar{v}$, valoarea suprafeții fiind Ω . Notăm cu $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ direcțiile axelor de coordonate x , y , z . Planul OBC , normal pe axa $o x$, va avea direcțiunea — $\bar{\xi}$, căci direcțiunea lui este aceea a normalei sale (totdeauna din interiorul spre exteriorul corpului).

Suprafața OBC va fi egală cu proiecția suprafeții ABC pe planul $y o z$ și va avea valoarea Ω multiplicată cu cosinul unghiului ce fac între ele direcțiile normalelor lor. Cosinul acestui unghi este — $\bar{\xi} \bar{v} = -a$ și deci valoarea suprafeții este — $\bar{\xi} \bar{v} \Omega = -a \Omega$. Pentru celelalte suprafețe, dacă notăm $\bar{\eta} \bar{v} = b$, $\bar{\zeta} \bar{v} = c$, avem — $b \Omega$ și — $c \Omega$.

Pe fața ABC avem o rezistență $\bar{R}$, iar pe fețele ce corespund direcțiilor $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ avem rezistențele $\bar{R}_x$, $\bar{R}_y$, și $\bar{R}_z$, ale căror valori și direcțiuni sunt oarecari și cari în genere diferă de normalele la suprafețele respective.

În aceste condiții, să scriem că suma forțelor este nulă, avem:

$$\bar{\gamma} V + \bar{R} \Omega - \bar{R}_x a \Omega - \bar{R}_y b \Omega - \bar{R}_z c \Omega = 0$$

În tot ce urmează, vom presupune suprafața Ω infinit mică, așa ca să putem presupune oricând, că rezistențele de pe fețele respective sunt uniform distribuite și că rezultanta lor se aplică în centrul de greutate al suprafeței.

Dacă împărțim cu Ω și observăm că $V/\Omega = h/3$, în care h este înălțimea tetraedrului coborâtă din O pe planul ABC , și dacă

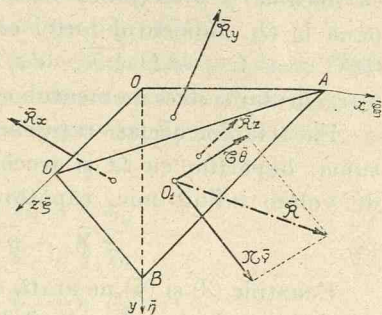


Figura 173

facem elementul de volum infinit mic, deci $h = 0$, atunci ecuația precedentă se reduce la

$$(3) \quad \bar{R} = a \bar{R}_x + b \bar{R}_y + c \bar{R}_z$$

Când dăm diferite înclinări planului ABC , $\bar{R}_x$, $\bar{R}_y$ și $\bar{R}_z$ rămân constante, ceea ce variază este numai direcțiunea normalei $\bar{v}$. Așadar, $\bar{R}$ este o funcțiune liniară de cosinurile directoare ale normalei la fața ABC .

Să aplicăm aceluiași element de volum ecuația momentelor.

Luăm momentele tuturor forțelor în raport cu O_1 , centrul de greutate al feței ABC .

Forța $\bar{R} \Omega$ va da evident un moment nul. Momentul greutateii elementului de volum va fi egal cu $h_1 \gamma V$, în care h_1 este distanța, ca mărime și direcțiune, dela centrul de greutate al tetraedrului până la O_1 . Momentul forței ce corespunde rezistenței de pe fața OBC va fi $-a \Omega \xi \bar{R}_x dx/3$. Inșă $a \Omega dx/3 = V$, volumul tetraedrului și deci momentul este egal cu $-\xi \bar{R}_x V$.

Dacă facem același raționament și pentru celelalte fețe, facem suma, împărțim cu Ω și trecem la limită considerând elementul de volum infinit mic, căpătăm:

$$(4) \quad \xi \bar{R}_x + \eta \bar{R}_y + \zeta \bar{R}_z = 0$$

Ecuatiile (3) și (4) ne arată că rezistența $\bar{R}$, în un punct oarecare din interiorul corpului, depinde de rezistențele $\bar{R}_x$, $\bar{R}_y$ și $\bar{R}_z$, deci de 9 elemente. Ecuația (4) ne arată că între ele există 3 relațiuni și deci $\bar{R}$ este complet determinat când cunoaștem 6 elemente.

Din ecuația (4) mai scoatem o concluzie foarte importantă.

O multiplicăm vectorial cu $\bar{v}$ și căpătăm:

$$(5) \quad \bar{R} = a \bar{R}_x + b \bar{R}_y + c \bar{R}_z = \xi \bar{v} \bar{R}_x + \eta \bar{v} \bar{R}_y + \zeta \bar{v} \bar{R}_z$$

Pentru o altă direcțiune $\bar{v}_1$ vom avea:

$$(5') \quad \bar{R}_1 = \xi \bar{v}_1 \bar{R}_x + \eta \bar{v}_1 \bar{R}_y + \zeta \bar{v}_1 \bar{R}_z$$

Dacă multiplicăm (5) scalar cu $\bar{v}_1$, se observă, numai de câț, că avem:

$$(6) \quad \bar{R} \bar{v}_1 = \bar{R}_1 \bar{v}$$

Cu alte cuvinte: *proiecția rezistenței $\bar{R}$, ce corespunde planului $\bar{v}$, pe direcția $\bar{v}_1$, este egală cu proiecția rezistenței $\bar{R}_1$, ce corespunde planului $\bar{v}_1$, pe direcția $\bar{v}$.*

Direcțiile pentru cari avem $\bar{R} \bar{v}_1 = \bar{R}_1 \bar{v} = 0$ poartă numele de *direcțiuni conjugate*.

În special să presupunem că avem o direcțiune $\bar{v}$, căreia îi corespunde rezistența $\bar{\mathcal{R}}$ și direcțiunea infinit vecină $\bar{v} + d\bar{v}$, căreia îi corespunde rezistența $\bar{\mathcal{R}} + d\bar{\mathcal{R}}$.

În virtutea relației (6) avem:

$$\bar{\mathcal{R}} (\bar{v} + d\bar{v}) = (\bar{\mathcal{R}} + d\bar{\mathcal{R}}) \bar{v}$$

care ne dă:

$$(7) \quad \bar{\mathcal{R}} d\bar{v} = \bar{v} d\bar{\mathcal{R}}$$

4. Componentele rezistenței $\bar{\mathcal{R}}$.

Vom determina aceste componente așa ca ecuația (4) să fie satisfăcută, deci vom determina cele 6 componente ale lui $\bar{\mathcal{R}}$.

Pentru aceasta descompunem rezistența $\bar{\mathcal{R}}_x$ în trei componente paralele cu cele trei axe de coordonate (fig. 174).

Componenta *paralelă cu axa Ox* și deci normală pe planul OBC o notăm cu $\mathfrak{X}_x$, iar cele două componente conținute în acest plan și *normale pe axele Oy și Oz*, le notăm respectiv cu $\mathfrak{S}_y$ și $\mathfrak{S}_z$. Dacă facem același lucru și cu $\bar{\mathcal{R}}_y$ și $\bar{\mathcal{R}}_z$ avem:

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_x &= \bar{\xi} \mathfrak{X}_x + \bar{\eta} \mathfrak{S}_z + \bar{\zeta} \mathfrak{S}_y \\ \bar{\mathcal{R}}_y &= \bar{\eta} \mathfrak{X}_y + \bar{\zeta} \mathfrak{S}_x + \bar{\xi} \mathfrak{S}_z \\ \bar{\mathcal{R}}_z &= \bar{\zeta} \mathfrak{X}_z + \bar{\xi} \mathfrak{S}_y + \bar{\eta} \mathfrak{S}_x \end{aligned}$$

Rezistența normală $\mathfrak{X}$, se definește ca pozitivă, ori de câte ori este dirijată din interiorul corpului spre exterior, cu alte cuvinte, când este dirijată după sensul pozitiv al normalei la suprafață. În acest caz poartă numele de *rezistență la tensiune*. În caz contrar, *rezistență la compresiune*.

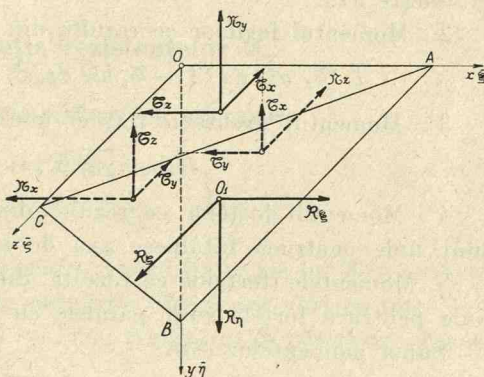


Figura 174

În mod general, vom avea în primul caz $\mathfrak{X}^-$ iar în al doilea — $\mathfrak{X}^+$.

Din această definiție, rezultă că semnul lui $\mathfrak{X}$ este absolut independent de sistemul de axe la care am reperat elementul de volum și fețele lui și independent de orientarea feții pe care se aplică.

Din definiția de mai sus pentru $\mathfrak{X}$ și din ecuațiile (8), rezultă și sensul pozitiv al rezistențelor $\mathfrak{G}$. Dacă $\mathfrak{X}$ pozitiv este dirijat către direcțiunea negativă a axei cu care este paralelă, atunci și $\mathfrak{G}$ este pozitiv, când este dirijat către direcțiunea negativă a axei cu care este paralelă. În adevăr, dacă prima ecuație din (8) o multiplicăm cu -1 , avem:

$$-\bar{\mathfrak{R}}_x = -\bar{\xi} \mathfrak{X}_x - \bar{\eta} \mathfrak{G}_z - \bar{\zeta} \mathfrak{G}_y$$

cu alte cuvinte, dacă $+\mathfrak{X}$ este dirijat către $-\bar{\xi}$, atunci și $+\mathfrak{G}_z$ și $+\mathfrak{G}_y$ sunt dirijate respectiv către $-\bar{\eta}$ și $-\bar{\zeta}$.

După modul cum s'au făcut notațiile, se vede că s'a notat cu $\mathfrak{G}_z$, rezistența tangentială din planul OBC , normală pe axa Oz și tot cu $\mathfrak{G}_z$, rezistența tangentială din planul OCA , normală pe aceeași axă Oz . S'au notat cu aceeași literă pentru că sunt egale.

Același lucru este și cu $\mathfrak{G}_x$ din fața OCA și OBA și cu $\mathfrak{G}_y$ din fețele OAB și OBC .

Aceasta se poate arăta fie efectuând produsele vectoriale arătate de ecuația (4), fie luând momentul tuturor forțelor în raport cu câte o axă, paralelă cu cele trei axe de coordonate, trecând prin centrul de greutate al feței ABC .

În adevăr, luând momentul în raport cu o axă paralelă cu Oz , vom avea:

1°. Momentul forței ce rezultă din rezistența $\bar{\mathfrak{R}}$ este nul, pentru că întâlnește axa.

2°. Momentul forțelor ce rezultă din rezistențele $\mathfrak{G}_z$ vor fi:

$$\bar{\zeta} (\mathfrak{G}_z a \Omega dx/3 - \mathfrak{G}_z b \Omega dy/3) = \bar{\zeta} (\mathfrak{G}_z - \mathfrak{G}_z) V$$

3°. Momentul greutateii tetraedrului va fi

$$\overline{\gamma h_1} \cdot V$$

4°. Momentul forțelor ce rezultă din rezistențele $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y$ și $\mathfrak{X}_z$ sunt nule pentru că întâlnesc axa de momente.

5. Momentele forțelor ce rezultă din rezistențele $\mathfrak{G}_x$ și $\mathfrak{G}_y$ sunt nule pentru că forțele sunt paralele cu axa.

Suma momentelor este:

$$\bar{\zeta} (\mathfrak{G}_z - \mathfrak{G}_z) + \overline{\gamma h_1} = 0$$

Făcând elementul de volum infinit mic, avem $h_1 = 0$, și deci

$$\mathfrak{G}_z = \mathfrak{G}_z$$

Această proprietate poartă numele de *dualitatea rezistențelor* $\mathfrak{G}$ și se exprimă astfel:

Dacă într'un plan oarecare există o rezistență tangentială $\bar{\mathfrak{S}}$, atunci într'un plan normal pe precedentul va exista o rezistență tangentială $\bar{\mathfrak{S}}$, egală cu precedenta și simetric dispusă față de muchia comună a celor două planuri.

Prin urmare, rezistența $\bar{\mathfrak{R}}$ se poate exprima în funcțiune de $\bar{\mathfrak{R}}_x$, $\bar{\mathfrak{R}}_y$ și $\bar{\mathfrak{R}}_z$, între cari există relația (4), sau numai în funcțiune de șase elemente: $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, și $\mathfrak{S}_z$, relația (4) fiind satisfăcută în acest caz.

Componentele lui $\bar{\mathfrak{R}}$, după cele trei axe de coordonate, le notăm cu $\mathfrak{R}_\xi$, $\mathfrak{R}_\eta$ și $\mathfrak{R}_\zeta$. Vom avea evident

$$\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\xi} \cdot \mathfrak{R}_\xi + \bar{\eta} \cdot \mathfrak{R}_\eta + \bar{\zeta} \cdot \mathfrak{R}_\zeta$$

în care:

$$\mathfrak{R}_\xi = \bar{\xi} \bar{\mathfrak{R}} \quad , \quad \mathfrak{R}_\eta = \bar{\eta} \bar{\mathfrak{R}} \quad , \quad \mathfrak{R}_\zeta = \bar{\zeta} \bar{\mathfrak{R}}$$

Dacă în aceste relații punem valorile din (3) și apoi cele din (8), avem:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\xi &= a \mathfrak{K}_x + b \mathfrak{S}_z + c \mathfrak{S}_y \\ \mathfrak{R}_\eta &= b \mathfrak{K}_y + c \mathfrak{S}_x + a \mathfrak{S}_z \\ \mathfrak{R}_\zeta &= c \mathfrak{K}_z + a \mathfrak{S}_y + b \mathfrak{S}_x \end{aligned} \quad (9)$$

Această ecuație se poate deduce și proiectând după cele trei axe forțele ce acționează asupra elementului de volum.

5. Variația rezistențelor $\mathfrak{K}$.

a) Rezistențe și direcțiuni principale.

Din ecuațiile (2) și (3) rezultă imediat:

$$(4) \quad \mathfrak{K} = \bar{\xi} \bar{v} \cdot \bar{v} \bar{\mathfrak{R}}_x + \bar{\eta} \bar{v} \cdot \bar{v} \bar{\mathfrak{R}}_y + \bar{\zeta} \bar{v} \cdot \bar{v} \bar{\mathfrak{R}}_z$$

Se observă mai întâiu că pentru valori finite ale lui $\mathfrak{R}_x, \dots$, avem valori finite pentru $\mathfrak{K}$, căci cosinurile directoare variază între -1 și $+1$. Din expresia de mai sus, mai rezultă că $\mathfrak{K}$ păstrează aceeași valoare pentru $+\bar{v}$ și $-\bar{v}$.

Dacă plecăm dela direcțiunea $+\bar{v}$ și trecem prin toate direcțiunile, până ajungem la $-\bar{v}$, $\mathfrak{K}$ fiind finit, va trece prin unul sau mai multe maxime și minime, pentru că revine la valoarea inițială.

Să presupunem că luăm ca direcțiune de plecare direcțiunea ce corespunde unui maxim. Făcând același raționament ca mai sus se vede că $\mathfrak{K}$ trece cel puțin printr'un minim.



Dacă, după diferitele direcțiuni $\bar{v}$, purtăm pe raza vectoare $\bar{v}$, valorile lui $\mathcal{K}$, extremitățile lor vor fi pe o suprafață închisă, care va avea un centru de simetrie și care va avea raze vectoare maxime și minime.

Să găsim valorile maxime și minime ale lui $\mathcal{K}$ și direcțiunile după cari au loc.

$\mathcal{K}$ va fi maxim sau minim pentru valoarea lui $\bar{v}$ care face $d\mathcal{K}=0$.

Din ecuațiile (2) și (7), deducem:

$$d\mathcal{K} = 2 \bar{\mathcal{R}} d\bar{v}$$

Se știe că $d\bar{v}$ este cuprins în întregime în planul normal pe $\bar{v}$ și are ca valoare numerică unghiul $d\varphi$, dintre direcțiunea $\bar{v}$ și $\bar{v} + d\bar{v}$. Să notăm cu $\bar{\theta}$ acel vector, vom avea deci $d\bar{v} = \bar{\theta} d\varphi$, și deci

$$d\mathcal{K}/2d\varphi = \bar{\mathcal{R}} \bar{\theta}$$

În planul normal pe $\bar{v}$ este și direcțiunea $\bar{\theta}$, din planul determinat de $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{v}$, pentru care avem relația (2), adică $\bar{\mathcal{R}} \bar{\theta} = \bar{\mathcal{G}}$.

Deci:

$$(11) \quad d\mathcal{K}/2 d\varphi = \bar{\mathcal{R}} \bar{\theta} = \bar{\mathcal{G}}$$

Așa dar, derivata lui $\mathcal{K}$ în raport cu unghiul 2φ este egală cu $\bar{\mathcal{G}}$.

Deci maximele și minimele au loc atunci când

$$d\mathcal{K}/2d\varphi = \bar{\mathcal{G}} = 0$$

adică pentru direcțiunile pentru cari $\bar{\mathcal{G}} = 0$. Pentru acele direcțiuni $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{K}}$ sunt paralele, adică coincid.

Direcțiunile, pentru cari avem $\mathcal{K}$ maximum sau minimum, poartă numele de *direcțiuni principale*, iar valorile lui $\mathcal{K}$ ce corespund acelor direcțiuni, poartă numele de *rezistențe principale*.

Să presupunem că, prin un mijloc oarecare, am găsit o direcțiune principală $\bar{v}_1$, și vom vedea mai în urmă cum o găsim.

Să considerăm planul normal acestei direcțiuni și în acest plan o direcțiune oarecare $\bar{v}_2$, căreia îi corespunde o rezistență $\bar{\mathcal{R}}_2$.

În virtutea relației (6) avem:

$$\bar{\mathcal{R}}_1 \bar{v}_2 = \bar{\mathcal{R}}_2 \bar{v}_1 = 0$$

pentru că $\bar{\mathcal{R}}_1 \bar{v}_2 = 0$ și deci $\bar{\mathcal{R}}_2$ este cuprins în întregime în planul normal pe $\bar{v}_1$. În acest plan vom găsi o direcțiune principală $\bar{v}_2$ și o rezistență principală $\mathcal{K}_2$, așa cum s'a arătat mai sus.

Să considerăm $\bar{v}_3$, perpendicular pe $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, și rezistența respectivă $\bar{\mathcal{R}}_3$.

Avem, tot în virtutea relației (6)

$$\bar{\mathcal{R}}_1 \bar{v}_3 = \bar{\mathcal{R}}_3 \bar{v}_1 = 0, \quad \bar{\mathcal{R}}_2 \bar{v}_3 = \bar{\mathcal{R}}_3 \bar{v}_2 = 0,$$

și deci:

$$\bar{\mathcal{R}}_3 \bar{v}_1 = \bar{\mathcal{R}}_3 \bar{v}_2 = 0.$$

Prin urmare, $\bar{\mathcal{R}}_3$ este normal pe $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ și dirijat după $\bar{v}_3$.

Așadar, avem trei direcțiuni principale $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ normale între ele, cărora le corespund trei rezistențe principale $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$. Rezistențele $\mathfrak{G}$ în aceste plane sunt nule.

Dacă luăm ca axe de coordonate axele principale, atunci avem:

$$\bar{v} \bar{v}_1 = a, \quad \bar{v} \bar{v}_2 = b, \quad \bar{v} \bar{v}_3 = c$$

și ecuațiile (3), (8), (9) și (10) se transformă în:

$$(12) \quad \bar{\mathcal{R}} = a \cdot \bar{v}_1 \mathcal{K}_1 + b \cdot \bar{v}_2 \mathcal{K}_2 + c \bar{v}_3 \mathcal{K}_3$$

$$(13) \quad \bar{\mathcal{R}}_x = \bar{v}_1 \mathcal{K}_1, \quad \bar{\mathcal{R}}_y = \bar{v}_2 \mathcal{K}_2, \quad \bar{\mathcal{R}}_z = \bar{v}_3 \mathcal{K}_3$$

$$(14) \quad \mathcal{R}_\xi = a \mathcal{K}_1, \quad \mathcal{R}_\eta = b \mathcal{K}_2, \quad \mathcal{R}_z = c \mathcal{K}_3$$

$$(15) \quad \mathcal{K} = a^2 \mathcal{K}_1 + b^2 \mathcal{K}_2 + c^2 \mathcal{K}_3$$

și dacă ridicăm (12) la patrat, mai găsim:

$$(16) \quad \mathcal{R}^2 = a^2 \mathcal{K}_1^2 + b^2 \mathcal{K}_2^2 + c^2 \mathcal{K}_3^2$$

b) Elipsoidul rezistențelor.

Dacă ridicăm ecuațiile (14) la patrat și dacă ținem cont că

$$(17) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

avem:

$$\mathcal{R}_\xi^2 / \mathcal{K}_1^2 + \mathcal{R}_\eta^2 / \mathcal{K}_2^2 + \mathcal{R}_z^2 / \mathcal{K}_3^2 = 1$$

Prin urmare, extremitățile rezistențelor $\bar{\mathcal{R}}$, pentru orice direcțiune, se găsesc pe un elipsoid ale cărui axe principale sunt chiar direcțiunile principale.

c) Determinarea rezistențelor principale.

Dacă într'un plan avem o rezistență principală, atunci ea coincide cu normala la acel plan și componentele ei după cele trei axe vor fi:

$$\mathcal{R}_\xi = a\mathcal{K} \quad ; \quad \mathcal{R}_\eta = b\mathcal{K} \quad ; \quad \mathcal{R}_z = c\mathcal{K}.$$

Punând aceste valori în ecuațiile (9), avem:

$$a(\mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}) + b \mathfrak{G}_z + c \mathfrak{G}_y = 0$$

$$a \mathfrak{G}_z + b(\mathfrak{K}_y - \mathfrak{K}) + c \mathfrak{G}_x = 0$$

$$a \mathfrak{G}_y + b \mathfrak{G}_x + c(\mathfrak{K}_z - \mathfrak{K}) = 0$$

Dacă eliminăm a , b și c între aceste ecuații găsim ecuația de gradul al treilea în $\mathfrak{K}$:

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}) & \mathfrak{G}_z & \mathfrak{G}_y \\ \mathfrak{G}_z & (\mathfrak{K}_y - \mathfrak{K}) & \mathfrak{G}_x \\ \mathfrak{G}_y & \mathfrak{G}_x & (\mathfrak{K}_z - \mathfrak{K}) \end{vmatrix} = 0$$

Dacă se dezvoltă acest determinant și dacă se notează:

$$\begin{aligned} \Sigma (\mathfrak{K}_x) &= p \\ \Sigma (-\mathfrak{K}_y \mathfrak{K}_z + \mathfrak{G}_x^2) &= q^2 \\ \mathfrak{K}_x \mathfrak{K}_y \mathfrak{K}_z + 2 \mathfrak{G}_x \mathfrak{G}_y \mathfrak{G}_z - \Sigma (\mathfrak{K}_x \mathfrak{G}_x^2) &= r^3 \end{aligned} \quad (19)$$

găsim:

$$-\mathfrak{K}^3 + p \mathfrak{K}^2 + q^2 \mathfrak{K} + r^3 = 0 \quad (20)$$

ale cărei rădăcini sunt cele trei rezistențe principale $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$.

Cantitățile p, q, r sunt invariante și deci avem și:

$$\Sigma \mathfrak{K}_1 = p, \quad \Sigma \mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2 = q^2 \quad \text{și} \quad \mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_3 = r^3$$

d) Determinarea direcțiilor principale.

Vom presupune direcțiile principale $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ cunoscute și vom căuta direcția $\bar{\xi}$, a axei ox , așa fel ca în planul ce-i corespunde să avem tocmai $\bar{\mathfrak{K}}_x$, acel dat. Prin urmare, vom avea de aflat cosinurile directoare ale axei ox cu direcțiile $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$, cari pentru prescurtarea scrisului, le vom nota după tabloul următor:

	$\bar{\xi}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\zeta}$
$\bar{v}_1$	a_1	a_2	a_3
$\bar{v}_2$	b_1	b_2	b_3
$\bar{v}_3$	c_1	c_2	c_3

În acest caz ecuațiile (17), (15) și (16) se transformă în:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

$$a_1^2 \mathfrak{K}_1 + b_1^2 \mathfrak{K}_2 + c_1^2 \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_x$$

$$a_1^2 \mathfrak{K}_1^2 + b_1^2 \mathfrak{K}_2^2 + c_1^2 \mathfrak{K}_3^2 = \mathfrak{K}_x^2$$

Avem trei ecuații cu trei necunoscute a_1^2 , b_1^2 și c_1^2 .
Numitorul necunoscutelor este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{X}_1^2 & \mathfrak{X}_2^2 & \mathfrak{X}_3^2 \end{vmatrix} = (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2)(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3)(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1)$$

iar numărătorul necunoscutei a_1^2 , de ex. este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{X}_x & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{X}_x^2 & \mathfrak{X}_2^2 & \mathfrak{X}_3^2 \end{vmatrix} = (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3) [\mathfrak{X}_x(\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) - \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_x^2]$$

Așa că vom avea:

$$(21) \quad a_1^2 = [\mathfrak{X}_x^2 - \mathfrak{X}_x(\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3] / (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1)$$

Analog găsim pe b_1^2 și c_1^2 .

Pe aceiași cale găsim:

$$(21) \quad a_2^2 = [\mathfrak{X}_y^2 - \mathfrak{X}_y(\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3] / (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1)$$

$$a_3^2 = [\mathfrak{X}_z^2 - \mathfrak{X}_z(\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3] / (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1)$$

Cu aceste valori putem fixa poziția axei principale $\bar{v}_1$, față de cele trei axe $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Facem apoi același lucru cu $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$, aflând cele 9 valori cari ne interesează.

6. Variația rezistențelor $\mathfrak{G}$.

Am văzut că aceste rezistențe sunt nule, după direcția axelor principale, iar după o direcțiune oarecare au valoarea dată de ecuația (2).

$$\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{R}} \bar{\theta} \quad \text{sau} \quad \mathfrak{G}^2 = \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{X}^2$$

Deci rezultă din ecuațiile (15), (16) și (17) că $\mathfrak{G}^2$ este funcție de a^2 , b^2 și c^2 , funcție finită cu maxime și minime. Să studiem variația lui $\mathfrak{G}$. Ea va fi maximă când $d\mathfrak{G}/da^2 = 0$, deci:

$$d\mathfrak{R}^2/da^2 - 2\mathfrak{X} d\mathfrak{X}/da^2 - k = 0,$$

în care k este un coeficient nedeterminat, pentru că avem ecuația de legătură (17).

Din ecuațiile (16) și (15) deducem:

$$d\mathfrak{R}^2/da^2 = \mathfrak{X}^2, \quad d\mathfrak{X}/da^2 = \mathfrak{X}_1.$$

Procedând la fel și cu b și c găsim:

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_1^2 - 2\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1 &= k \\ \mathfrak{X}_2^2 - 2\mathfrak{X}\mathfrak{X}_2 &= k \\ \mathfrak{X}_3^2 - 2\mathfrak{X}\mathfrak{X}_3 &= k. \end{aligned}$$

Scăzând între ele aceste ecuații, avem:

$$(23) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_1)$$

Prin urmare, maximile sau minimile lui $\mathfrak{G}$ au loc pentru acele direcțiuni, pentru cari sunt satisfăcute relațiile (23).

a) Valorile maxime și minime ale rezistenței $\mathfrak{G}$.

Dacă multiplicăm pe rând ecuațiile (22) cu a^2 , b^2 , c^2 și le adunăm, avem:

$$\mathfrak{R}^2 - 2 \mathfrak{X}^2 = k \quad \text{sau} \quad \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{X}^2 = k.$$

Introducând valoarea lui k în (22), obținem:

$$\mathfrak{G} = \pm (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}) \quad , \quad \mathfrak{G} = \pm (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}) \quad , \quad \mathfrak{G} = \pm (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X})$$

În cari introducând valorile din (23), avem:

$$(24) \quad \mathfrak{G}_3 = \pm \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2) \quad , \quad \mathfrak{G}_1 = \pm \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3) \quad , \quad \mathfrak{G}_2 = \pm \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1).$$

Acestea sunt valorile maxime și minime ale rezistențelor $\mathfrak{G}$.

b) Direcțiile după cari avem $\mathfrak{G}$ maximum și minimum.

N'avem decât să punem în ecuația (15) valoarea lui $\mathfrak{X}$:

$$(a^2 - \frac{1}{2}) \mathfrak{X}_1 + (b^2 - \frac{1}{2}) \mathfrak{X}_2 + c^2 \mathfrak{X}_3 = 0$$

relație care este satisfăcută, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ și $\mathfrak{X}_3$ fiind oarecari, pentru:

$$a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}; \quad b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}; \quad c = 0$$

Acestea însă sunt cosinurile directoare ale planelor bisectoare, corespunzând rezistențelor principale $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$. Prin urmare, rezistențele tangențiale sunt maxime în planele bisectoare principale și au valorile date de ecuațiile (24).

7. Diagrama variației rezistențelor $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{G}$.

Am văzut că valorile lui $\overline{\mathfrak{R}}$ variază ca razele vectoare duse din centru la un punct al suprafeții elipsoidului rezistențelor.

Se poate da însă o diagramă plană, care să reprezinte variația lui $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{G}$.

Din ecuația (21):

$$a_1^2 = [\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{X} (\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3) + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3] / (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_1)$$

se vede, că dacă ne ocupăm de planul care conține axa principală $\bar{v}_1$, atunci $\bar{\xi} \bar{v}_1 = a_1 = 0$ și cum $\mathcal{R}^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{G}^2$, vom avea:

$$\mathcal{R}^2 - \mathcal{X} (\mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3) + \mathcal{G}^2 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 = 0$$

Oricare ar fi orientarea acestui plan care conține pe $\bar{v}_1$, variația rezistențelor $\mathcal{X}$ și $\mathcal{G}$ este dată de un cerc, al cărui centru O_1 se găsește pe axa $O\mathcal{X}$, la distanța $\frac{1}{2} (\mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3)$ și de rază $\frac{1}{2} (\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_3)$ (fig. 175).

Abscisa unui punct de pe cerc este $\mathcal{X}$, ordonata $\mathcal{G}$, iar distanța dela punct la origine $\mathcal{R}$.

Dacă presupunem că luăm planul care conține axa $\bar{v}_2$, vom găsi alt cerc, în aceleași condiții, cu centrul în O_2 . Același lucru pentru $\bar{v}_3$, pentru care găsim centrul O_3 .

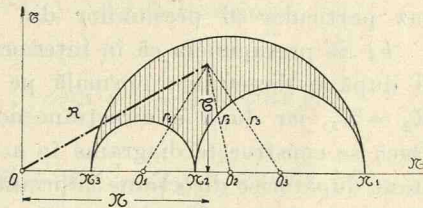


Figura 175

Orice punct de pe aceste cercuri ne dă $\mathcal{X}$ și $\mathcal{G}$ pentru orice plan care conține o axă principală.

Să presupunem că luăm un plan care face un unghi constant cu axa $\bar{v}_1$, rotindu-se în jurul acestei axe. Din ecuația (21) deducem:

$$\mathcal{R}^2 - \mathcal{X} (\mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3) + \mathcal{G}^2 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 - a_1^2 (\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1) (\mathcal{X}_3 - \mathcal{X}_1) = 0$$

Legătura între $\mathcal{X}$ și $\mathcal{G}$ este tot un cerc, de centru tot în O_1 , însă de rază:

$$(25) \quad r_1^2 = a_1^2 (\mathcal{X}_3 - \mathcal{X}_1) (\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1) + \frac{1}{4} (\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_3)^2$$

O direcțiune oarecare $\bar{\xi}$, se fixează în spațiu prin cosinusurile directoare, cu cele trei axe principale (a , b , c).

Formulele (21) ne dau pentru fiecare din acestea, câte un cerc de rază r_1 , r_2 , r_3 .

Se demonstrează că aceste trei cercuri se întâlnesc într'un punct din regiunea hașurată a fig. 175.

Prin urmare, orice punct din această regiune ne dă o stare posibilă de rezistențe. Fiecărui punct îi corespund trei raze, (r_1 , r_2 , r_3) și deci o direcțiune (a , b , c). Din această figură se vede că, dacă $\mathcal{X}_1 > \mathcal{X}_2 > \mathcal{X}_3$, atunci cea mai mare rezistență tangentială corespunde planului bisector ce conține axa $\bar{v}_2$, ceea ce de altfel rezultă și din formulele (23). Acest cerc poartă numele de cerc principal.

Această reprezentare grafică se datorește lui *Mohr*.

8. Cazuri particulare.

a) Să presupunem că, în interiorul unui corp, rezistențele tangențiale sunt nule peste tot, adică pentru orice direcție. Acesta ar fi cazul lichidelor perfecte în repaos, când se știe că nu există frecare între diferitele elemente ale lor. În acest caz, orice direcțiune este o direcțiune principală și din diagramă se vede că rezistența este aceeași după orice direcțiune, iar cele trei cercuri se reduc la un punct. Prin urmare, cazul lichidelor perfecte nu este decât un caz particular al presiunilor din interiorul unui solid oarecare.

b) Să presupunem că în interiorul unui corp avem o tensiune $\mathcal{K}_1$ și după o direcțiune normală pe prima, avem o compresiune $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$, iar după o direcțiune normală pe precedentele $\mathcal{K}_3 = 0$. Dacă se construiește diagrama în acest caz, se vede că $\mathcal{R}$ este constant după orice direcțiune cuprinsă în planul $\bar{v}_1 \bar{v}_2$ și că în planele bisectoare $\bar{\sigma} = \pm \mathcal{K}$.

B) Rezistențe în plan.

Cazul curent din practică este acela în care $\mathcal{K}_z = 0$, $\bar{\sigma}_x = 0$, $\bar{\sigma}_y = 0$. Observăm că rezistențele $\mathcal{K}_x$, $\mathcal{K}_y$ și $\bar{\sigma}_z$ sunt complanare.

Acest caz se poate studia făcând în formulele stabilite până aci

$$\mathcal{K}_z = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_x = 0.$$

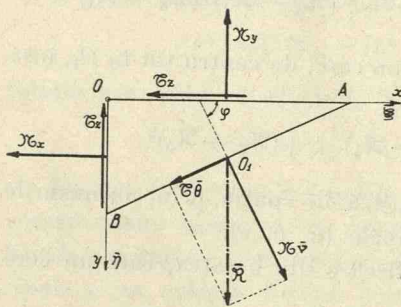


Figura 176

Se poate studia și direct ca în cazul precedent, însă în loc de a lua un element de volum în formă de tetraedru, se ia unul în formă de priză triunghiulară, a cărui înălțime măsurată pe normală la bază este h , arbitrară, care se poate lua egală cu unitatea (fig. 176).

De pe figură se vede imediat că avem:

$$(26) \quad \bar{\mathcal{R}} = (a\mathcal{K}_x + b\bar{\sigma}_z) \bar{\xi} + (b\mathcal{K}_y + a\bar{\sigma}_z) \bar{\eta}.$$

Dacă se ia momentul tuturor forțelor în raport cu O_1 , centrul de greutate al feței AB , se constată numai decît că $\bar{\sigma}_z$ din fața AO este egal cu $\bar{\sigma}_z$ din fața BO și deci avem exact rezultatul găsit la cazul rezistențelor din spațiu.

1. Variația rezistențelor $\mathcal{R}$ și $\mathfrak{G}$.

Am avut ecuația (2)

$$\mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}} \bar{\nu}$$

Dacă multiplicăm (26) scalar cu $\bar{\nu}$, avem:

$$\mathcal{R} = a^2 \mathcal{R}_x + b^2 \mathcal{R}_y + 2ab \mathfrak{G}_z$$

Să notăm cu φ unghiul făcut de $\bar{\nu}$ cu $\bar{\xi}$. Avem:

$$\bar{\xi} \bar{\nu} = a = \cos \varphi \quad ; \quad \bar{\eta} \bar{\nu} = b = \sin \varphi$$

și ținând seama că avem:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \quad , \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

căpătăm:

$$(27) \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_y) + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_x - \mathcal{R}_y) \cos 2\varphi + \mathfrak{G}_z \sin 2\varphi$$

Să multiplicăm aceeași ecuație (26) vectorial cu $\bar{\nu}$, avem:

$$\bar{\mathcal{R}} \bar{\nu} = (a \mathcal{R}_x + b \mathfrak{G}_z) \bar{\xi} \bar{\nu} + (b \mathcal{R}_y + a \mathfrak{G}_z) \bar{\eta} \bar{\nu}$$

Însă:

$$\bar{\mathcal{R}} \bar{\nu} = -\mathfrak{G} \bar{\zeta} \quad ; \quad \bar{\xi} \bar{\nu} = \bar{\zeta} \sin \varphi = \bar{\zeta} b \quad ; \quad \bar{\eta} \bar{\nu} = -\bar{\zeta} \cos \varphi = -\bar{\zeta} a$$

și deci:

$$(28) \quad \mathfrak{G} = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}_x - \mathcal{R}_y) \sin 2\varphi + \mathfrak{G}_z \cos 2\varphi$$

Din (27) și (28) se vede numaidecât, că: $d\mathcal{R}/2d\varphi = \mathfrak{G}$, și că $\mathcal{R}$ este maxim sau minim, pentru direcțiile pentru care $\mathfrak{G} = 0$. Din (28) deducem

$$(29) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2 \mathfrak{G}_z / (\mathcal{R}_x - \mathcal{R}_y).$$

Prin urmare, am găsit direcțiile axelor principale.

Dacă introducem această valoare în ecuația (27) găsim valorile rezistențelor principale:

$$(30) \quad \mathcal{R}_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\mathcal{R}_x - \mathcal{R}_y)^2 + 4 \mathfrak{G}_z^2}$$

Maximile lui $\mathfrak{G}$ au loc pentru $d\mathfrak{G}/2d\varphi = 0$. Derivând ecuația (28) avem:

$$(31) \quad 1/\operatorname{tg} 2\varphi_1 = -2\mathfrak{G}_z/(\mathcal{R}_x - \mathcal{R}_y)$$

Comparând această valoare cu aceea dată de ecuația (29), vedem că ele diferă cu $\pi/2$, deci unghiurile φ_0 și φ_1 diferă între ele cu $\pi/4$, iar maximile și minimile lui $\mathfrak{G}$ au loc în planele bisectoare ale planelor principale.

Dacă se introduce valoarea lui $\operatorname{tg} 2\varphi_1$ în (28) și dacă se ține cont de (30), găsim:

$$\bar{\sigma} = \pm \frac{1}{2} (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)$$

2. Diagrama variației rezistențelor $\mathcal{K}$ și $\bar{\sigma}$. Cercul lui Mohr.

Să presupunem că am găsit direcțiunile principale și că scriem expresia rezistențelor $\mathcal{K}$ și $\bar{\sigma}$ în raport cu aceste axe.

Ecuatiile (27) și (28) se transformă în:

$$(27') \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) + \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) \cos 2\varphi$$

$$(28') \quad \bar{\sigma} = -\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) \sin 2\varphi$$

Dacă se ridică la pătrat și se adună avem:

$$(32) \quad [\mathcal{K} - \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]^2 + \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{4}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)^2$$

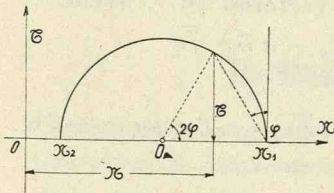


Figura 177

Ecuatia de legătură între $\mathcal{K}$ și $\bar{\sigma}$ este un cerc de rază $\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)$ și al cărui centru se găsește pe axa absciselor $O\mathcal{K}$, la distanța $\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)$ (fig. 177).

Cu ajutorul cercului lui Mohr găsim pe cale grafică și alte elemente cari ne interesează.

Să presupunem că cele două direcțiuni principale $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sunt dreptele $A\mathcal{K}_1$ și $A\mathcal{K}_2$ de pe fig. 178 și 179. Ele sunt evident paralele cu cele două direcțiuni.

Dacă vrem să găsim $\mathcal{K}$ și $\bar{\sigma}$ după direcțiunea $\bar{v}$ (AB), care face unghiul φ cu $\bar{v}_1$, ducem dreapta AB , care taie cercul în punctul B . Abscisa $O\mathcal{K}$ și ordonata $\mathcal{K}B$ ne dau pe $\mathcal{K}$ și $\bar{\sigma}$, după această direcțiune.

Suprafața pe care se exercită aceste rezistențe este normală pe $\bar{v}$, deci paralelă cu DB , punctul D găsindu-se pe diametrul AO_3D .

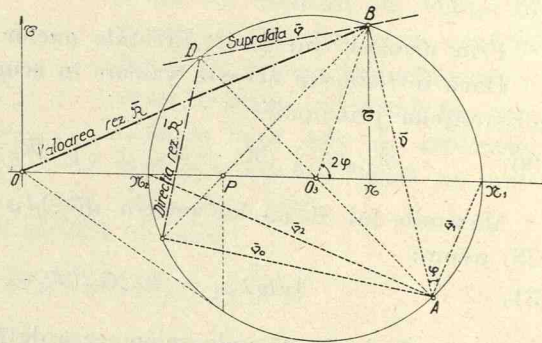


Figura 178

Să găsim pe epură direcția lui $\bar{\mathcal{R}}$, căci valoarea lui este OB . Dacă am cunoaște direcția $\bar{v}_0$, conjugată lui $\bar{v}$, atunci știm că avem:

$$\bar{\mathcal{R}} \bar{v}_0 = \bar{\mathcal{R}}_0 \bar{v} = 0$$

deci $\bar{\mathcal{R}}$ este normală pe $\bar{v}_0$.

Avem însă:

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{X} \bar{v} + \mathcal{C} \bar{\theta}$$

$$\text{și } \bar{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{X}_0 \bar{v}_0 + \mathcal{C}_0 \bar{\theta}_0$$

deci

$$\mathcal{X} \bar{v} \bar{v}_0 + \mathcal{C} \bar{\theta} \bar{v}_0 = \mathcal{X}_0 \bar{v}_0 \bar{v} + \mathcal{C}_0 \bar{\theta}_0 \bar{v} = 0$$

și încă:

$$\bar{\theta} \bar{v}_0 / \bar{v} \bar{v}_0 = -\mathcal{X} / \mathcal{C} \quad \bar{\theta}_0 \bar{v} / \bar{v} \bar{v}_0 = -\mathcal{X}_0 / \mathcal{C}_0$$

De pe fig. 180 avem imediat că:

$$\bar{\theta} \bar{v}_0 = -\bar{\theta}_0 \bar{v}, \text{ și deci}$$

$$\mathcal{X} / \mathcal{C} = -\mathcal{X}_0 / \mathcal{C}_0$$

Așa dar, direcțiile $\bar{v}$ și $\bar{v}_0$ sunt conjugate, când unghiurile $CO\mathcal{X}_2$ și $BO\mathcal{X}_1$ sunt egale.

Se vede numai decât, că punctele B și C sunt pe coarda care trece prin punctul P , polul originii axelor de coordonate O în raport cu cercul lui Mohr.

Așa dar, am fixat direcțiunea $\bar{v}_0$, conjugată lui $\bar{v}$. $\bar{\mathcal{R}}$ va fi normal pe $\bar{v}_0$, deci va avea direcția CD .

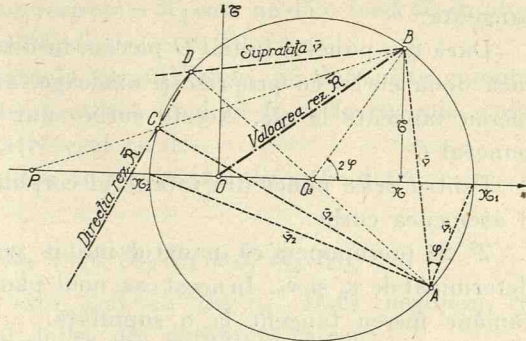


Figura 179

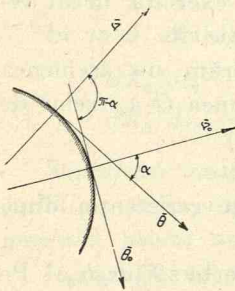


Figura 180

C) Suprafețe isostatice.

În interiorul unui corp, în care se dezvoltă niște rezistențe oarecari, și într'un punct anumit, putem determina, așa cum s'a arătat, direcțiunile axelor principale și valorile rezistențelor respective.

1° Să presupunem că pe axa principală $\bar{v}_1$ considerăm un punct infinit vecin O_1 , în care caut de asemenea direcțiunile axelor principale. Noua axă principală $\bar{v}_1$ va diferi de aceea din punctul O ,

considerat anterior. Dacă continuăm așa, din aproape în aproape, vom găsi în definitiv o curbă la care axa principală $\bar{v}_1$ este mereu tangentă.

Dacă din punctul inițial O plecăm în direcțiile $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$, vom găsi încă două curbe cu proprietăți analoge, adică axele $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ sunt mereu tangente la ele. Aceste curbe sunt ortogonale între ele în punctul O .

Pentru orice punct din interiorul corpului, se pot construi câte 3 asemenea curbe.

2° Să presupunem că punctul infinit vecin îl luăm în planul determinat de $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$. În acest caz, noul plan determinat de $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ rămâne mereu tangent la o suprafață.

Același lucru putem spune și despre planele determinate de $\bar{v}_2$ cu $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_3$ cu $\bar{v}_1$.

Aceste suprafețe se bucură de proprietatea evidentă, că în planul lor nu există rezistența $\mathfrak{T}$, pentru că coincid cu direcțiile planelor principale.

Rețeaua acestor suprafețe împarte corpul în o serie de paralelipede curbilinii, pe suprafețele cărora nu se exercită decât rezistențe normale $\mathfrak{X}$.

Să considerăm un asemenea

paralelipiped, ale cărei laturi trecând prin originea O a axelor de coordonate au lungimea ds_1 , ds_2 și ds_3 (fig. 181).

Laturile opuse vor fi evident $ds_1 + \Delta ds_1$, etc.

Să proiectăm toate forțele ce rezultă din rezistențe, după direcțiunea $\bar{v}_1$, după care avem $\mathfrak{X}_1$ și ds_1 .

a) Pe fața care trece prin origine avem forța $\mathfrak{X}_1 ds_2 ds_3$. Pe fața opusă avem: $\mathfrak{X}_1 ds_2 ds_3 + d(\mathfrak{X}_1 ds_2 ds_3)$. Suma lor dirijată după $+v$, va fi $d(\mathfrak{X}_1 ds_2 ds_3)$ adică:

$$V \cdot d\mathfrak{X}_1/ds_1 + \mathfrak{X}_1 ds_2 \Delta ds_3 + \mathfrak{X}_1 ds_3 \Delta ds_2$$

în care $V = ds_1 ds_2 ds_3$, este volumul paralelipipedului curbiliniu infinit mic.

Avem însă $\Delta ds_2 = ds_1 ds_2 / r_{21}$ și $\Delta ds_3 = ds_1 ds_3 / r_{31}$.

Și deci:

$$(d\mathfrak{X}_1/ds_1 + \mathfrak{X}_1/r_{31} + \mathfrak{X}_1/r_{21}) V.$$

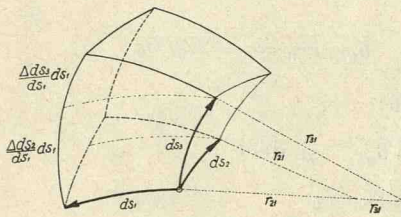


Figura 181

În aceste expresii r_{21} , este raza de curbură a arcului ds_2 în planul $\bar{v}_1 \bar{v}_2$, iar r_{31} este raza de curbură a arcului ds_3 în planul $\bar{v}_3 \bar{v}_1$.

b) Pe fața $ds_1 ds_3$ avem rezistența $\mathfrak{K}_2$ care ne dă o forță $\mathfrak{K}_2 ds_1 ds_3$, iar pe fața opusă avem $\mathfrak{K}_2 ds_1 ds_3 + d(\mathfrak{K}_2 ds_1 ds_3)$.

Aceste forțe proiectate în planul $ds_1 ds_2$ ne dau niște componente egale chiar cu ele, pentru că unghiul fiind foarte mic, cosinusul lui este aproximativ egal cu 1.

Aceste componente dau o rezultantă dirijată după $-\bar{v}_1$, a cărei valoare este

$$-[\mathfrak{K}_2 ds_1 ds_3 + \frac{1}{2}d(\mathfrak{K}_2 ds_1 ds_3)] ds_2/r_{21}$$

pentru că unghiul lor este egal cu ds_2/r_{21} . Dacă neglijăm, ca infinit mic, termenul al doilea din paranteză, avem:

$$-\mathfrak{K}_2 V/r_{21}$$

c) În mod analog găsim pe fața $ds_1 ds_2$:

$$-\mathfrak{K}_3 V/r_{31}$$

d) Dacă greutatea specifică după direcția $+\bar{v}_1$ este $\bar{\gamma}_1$ atunci mai avem și forța $\gamma_1 V$.

Și ecuația de proiecții pe $\bar{v}_1$ conduce la:

$$(33) \quad d\mathfrak{K}_1/ds_1 + (\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2)/r_{21} + (\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_3)/r_{31} + \gamma_1 = 0$$

În mod analog avem:

$$(33) \quad \begin{aligned} d\mathfrak{K}_2/ds_2 + (\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_3)/r_{32} + (\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1)/r_{12} + \gamma_2 &= 0 \\ d\mathfrak{K}_3/ds_3 + (\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{K}_1)/r_{13} + (\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{K}_2)/r_{23} + \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Suprafețele acestea cari împart corpul în o serie de paralelipiede curbilinii, pe suprafața cărora nu se exercită decât tensiuni sau compresii, poartă numele de suprafețele isostatice ale lui Lamé.

În cazul când avem de-a-face cu rezistente în plan ecuațiile de mai sus se reduc la

$$(34) \quad \begin{aligned} d\mathfrak{K}_1/ds_1 + (\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2)/r_2 + \gamma_1 &= 0 \\ d\mathfrak{K}_2/ds_2 + (\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1)/r_1 + \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

pentru că toți ceilalți termeni sunt nuli.

D) Ecuațiile lui Cauchy.

Ecuațiile (33) și (34) sunt datorite lui *Cauchy* și le vom traduce aci în coordonate carteziane.

Vom presupune că luăm un paralelipiped de laturi dx , dy , dz . pe fețele căruia, conform convențiilor de până acum, vom avea rezistențe $\mathcal{X}$ și $\mathcal{G}$ (fig. 182).

În fețele cuprinse în planele de coordonate avem rezistențele $\mathcal{X}$ și $\mathcal{G}$, pe când în fețele opuse, la distanțele dx , dy și dz , vom avea aceleași rezistențe plus niște creșteri $\partial\mathcal{X}$ și $\partial\mathcal{G}$.

Dacă se iau momentele tuturor forțelor ce rezultă din rezistențe, se găsește principiul dualității rezistențelor $\mathcal{G}$.

Să aplicăm ecuațiile de proiecție după axa Ox .

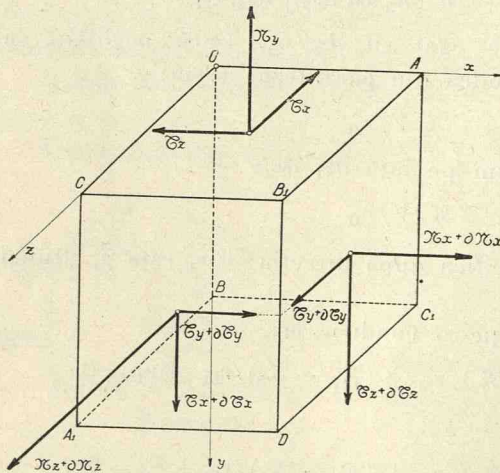


Figura 182

1°. Pe fața OBA_1C_1 avem rezistența $\mathcal{X}_x$, care ne dă o forță dirijată după $-\bar{\xi}$, a cărei valoare este $-\mathcal{X}_x dy dz$, iar pe fața opusă avem, dirijată după $+\bar{\xi}$, o forță $(\mathcal{X}_x + \partial\mathcal{X}_x) dy dz$, a căror rezultantă este $\partial\mathcal{X}_x dy dz$ sau $(\partial\mathcal{X}_x/\partial x) dV$ în care $dV = dx dy dz$.

2°. Pe fața OAB_1C avem, după axa Ox , o forță $-\mathcal{G}_z dx dz$, iar pe fața opusă $(\mathcal{G}_z + \partial\mathcal{G}_z) dx dz$ a căror rezultantă este $(\partial\mathcal{G}_z/\partial y) dV$.

3°. În mod identic găsim că, pe fețele OAC_1B și DA_1CB_1 , avem o rezultantă $(\partial\mathcal{G}_y/\partial z) dV$.

4°. Dacă γ_x este greutatea specifică dirijată după Ox , vom avea o forță $\gamma_x dV$.

5°. Dacă elementul de volum este în mișcare și animat de iuțeala v_x , vom avea o forță $dm \cdot dv_x/dt$ în care dm este masa elementului de volum și anume $(\gamma/g) dV$, și deci forța rezultantă este $(\gamma/g) dV \cdot dv_x/dt$.

Dacă facem proiecțiile și după celelalte axe obținem următoarele 3 ecuații:

$$\begin{aligned}
 & \partial\mathcal{X}_x/\partial x + \partial\mathcal{G}_z/\partial y + \partial\mathcal{G}_y/\partial z + \gamma_x + (\gamma/g) dv_x/dt = 0 \\
 (35) \quad & \partial\mathcal{X}_y/\partial y + \partial\mathcal{G}_x/\partial z + \partial\mathcal{G}_z/\partial x + \gamma_y + (\gamma/g) dv_y/dt = 0 \\
 & \partial\mathcal{X}_z/\partial z + \partial\mathcal{G}_y/\partial x + \partial\mathcal{G}_x/\partial y + \gamma_z + (\gamma/g) dv_z/dt = 0
 \end{aligned}$$

Este evident că atunci când corpul este în repaus, ultimii termeni sunt nuli. Aceștia au o importanță oarecare la corpurile cari au mișcări repezi și se va ține cont de ei.

De obicei se neglijează și penultimii termeni, din cauză că sunt mici.

În adevăr, pe fețele unui cub de oțel cu muchia un cm, se exercită rezistențe cam de 1000 kg/cm^2 , ceea ce dă forțe de mărimea a 1000 kg , pe când greutatea unui cm^3 de oțel este $7,85$ grame. Așa că în mod curent se utilizează primii trei termeni.

În cazul rezistențelor în plan, ecuațiile de mai sus se reduc la

$$\partial \mathfrak{X}_x / \partial x + \partial \mathfrak{S}_z / \partial y = 0$$

$$\partial \mathfrak{X}_y / \partial y + \partial \mathfrak{S}_z / \partial x = 0$$

considerând neglijabili ultimii doi termeni.

În coordonate cilindrice, evident că aceste ecuații se prezintă altfel și se pot stabili pe aceleași considerații ca cele expuse mai sus.

Ecuațiile suprafețelor isostatice se pot deduce și din aceste ecuații.

Aplicația Nr. 45. Se dă un punct și după trei direcții ortogonale Ox , Oy și Oz avem:

$$\mathfrak{X}_x = 700 \text{ kg/cm}^2; \quad \mathfrak{X}_y = 500 \text{ kg/cm}^2; \quad \mathfrak{X}_z = -400$$

$$\mathfrak{S}_x = 300, \quad \mathfrak{S}_y = -100, \quad \mathfrak{S}_z = 200$$

Să se găsească rezistențele principale și să se figureze pe diagrama lui Mohr poziția punctelor ce reprezintă direcțiile Ox , Oy și Oz .

Avem din ec. (19):

$$p = \Sigma \mathfrak{X}_x = 700 + 500 - 400 = 8.10^2$$

$$-q^2 = \Sigma (\mathfrak{X}_y \mathfrak{X}_z - \mathfrak{S}_x^2) = 700 \times 500 - 500.400$$

$$-400 \times 700 - 300^2 - 100^2 - 200^2 = -27.10^4$$

$$r^3 = \mathfrak{X}_x \mathfrak{X}_y \mathfrak{X}_z + 2 \mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_y \mathfrak{S}_z - \Sigma \mathfrak{X}_x \mathfrak{S}_x^2$$

$$= -700.500.400 - 2.300.100.200$$

$$-700.300^2 - 500.100^2 + 400.200^2 = -204.10^6$$

Ecuația (20) de gradul al treilea, este:

$$-\mathfrak{X}^3 + 8.10^2 \mathfrak{X}^2 + 27.10^4 \mathfrak{X} - 204.10^6 = 0$$

care rezolvată prin încercări ne dă:

$$\mathfrak{X}_1 = 829, \quad \mathfrak{X}_2 = 482, \quad \mathfrak{X}_3 = -511 \text{ kg/cm}^2$$

rădăcini aflate cu o eroare $< \pm 0,5$.

Pentru control avem:

$$\Sigma \kappa_1 = 800$$

$$\Sigma \kappa_1 \kappa_2 = -270343$$

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = -204\,184\,358$$

Diferența se explică prin faptul că rădăcinile sunt aproximative.

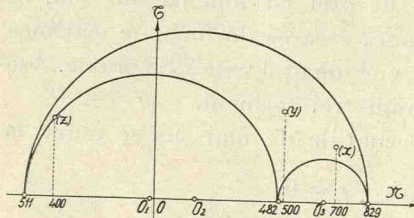


Figura 183

Fig. 183 reprezintă diagrama lui Mohr și pe ea s'au fixat punctele ce reprezintă direcțiile axelor date prin coordonatele lor.

Aplicația Nr. 46. Se dă un punct în care avem:

$$\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0, \quad \sigma_x = 300,$$

$$\sigma_y = -100, \quad \sigma_z = 200 \text{ kg/cm}^2$$

Să se găsească valorile rezistențelor principale.

Avem: $p = 0$, $q^2 = +14 \cdot 10^4$, $r^3 = -12 \cdot 10^6$, cari ne dau:

$$-\kappa^3 + 14 \cdot 10^4 \cdot \kappa - 12 \cdot 10^6 = 0$$

Ale cărei rădăcini sunt:

$$\kappa_1 = 320, \quad \kappa_2 = 91, \quad \kappa_3 = -411 \text{ kg/cm}^2$$

Fig. 184 arată reprezentarea grafică respectivă.

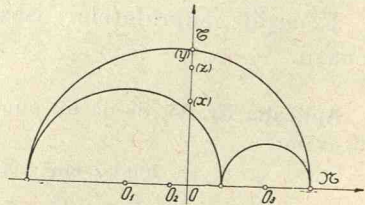


Figura 184

Aplicația Nr. 47. Se dă:

$$\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma.$$

Se cer valorile rezistențelor principale.

$$\text{Avem: } p = 0; \quad q^2 = +3\sigma^2; \quad r^3 = +2\sigma^3$$

$$-\kappa^3 + 3\sigma^2 \kappa + 2\sigma^3 = 0$$

Ale cărei rădăcini sunt:

$$\kappa_1 = 2\sigma, \quad \kappa_2 = -\sigma, \quad \kappa_3 = -\sigma$$

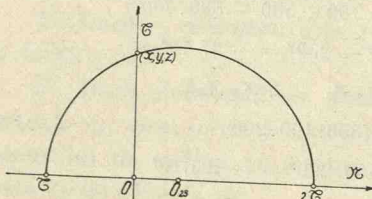


Figura 185

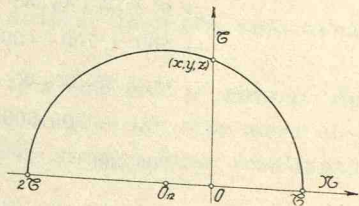


Figura 186

Variantă. Același caz însă $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\sigma_z = -\sigma$.

$$\text{Avem: } \kappa^3 - 3\sigma^2 \kappa + 2\sigma^3 = 0$$

care ne dă:

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \sigma, \quad \kappa_3 = -2\sigma$$

Fig. 185 și 186 ne arată reprezentările grafice respective.

X. ÎMPINGERA PĂMÂNTULUI.

Adeseori avem ocazia să facem mișcări de pământ și suntem obligați a-i da anumite forme.

Dacă încercăm să facem o movilă din pământ fărâmițat, vedem că el nu ia forma pe care o voim noi, ci se așează sub un unghiu anumit față de orizontală.

Acest unghiu poartă numele de *unghiul taluzului natural* pe care-l notăm cu ψ .

Experiența arată că acest unghiu diferă dela pământ la pământ. unul este pentru petriș, altul pentru argilă, altul pentru nisip, etc.

Mai mult încă, acest unghiu depinde și de starea de umiditate a pământului și în genere cu cât un pământ este mai umed, cu atât unghiul taluzului natural este mai mic.

În construcțiuni suntem obligați de foarte multe ori să dăm pământului o înclinare alta decât aceea a taluzului natural și va trebui să sprijinim pământul într'un mod oarecare. Această sprijinire se face cu ajutorul unor ziduri de piatră, beton sau cărămidă, cari poartă numele de *ziduri de sprijinire* (fig. 187). Pentru a le putea calcula, va trebui să găsim forța cu care pământul împinge asupra zidului. Această forță depinde de natura pământului. Prin urmare, ne vom interesa mai întâiu să știm cu ce pământ avem de-a-face, pentru că natura lui diferind foarte mult, diferă și valoarea împingerilor. Orice pământ va fi caracterizat, în cele ce urmează, prin taluzul lui natural ψ și prin greutatea sa specifică γ .

Pentru calculul forței cu care pământul împinge asupra zidului avem la îndemână mai multe teorii. În toate se presupune că masivul de pământ este format din particule, cari n'au nicio coeziune între ele.

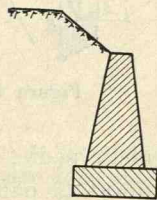


Figura 187

A) Teoria lui Rankine.

În interiorul pământului se dezvoltă niște rezistențe $\mathcal{R}$ și $\mathcal{G}$, cari diferă dela punct la punct și după direcția care se consideră. Masivul de pământ este în echilibru atâta timp cât o mișcare în interiorul lui nu este posibilă. Să presupunem că, într'un punct oarecare și după o direcție oarecare în interiorul pământului, avem rezistențele $\mathcal{R}$ și $\mathcal{G}$. O mișcare este posibilă numai atunci când după direcția lui $\mathcal{G}$, este posibilă o lunecare. Dacă coeficientul de frecare între diferitele particule este μ , atunci lunecarea este posibilă numai când $\mathcal{G} > \mu \mathcal{R}$. Ori coeficientul de frecare cel mai mare este $\mu = \operatorname{tg} \psi$. Așa dar, la limită, o lunecare în interiorul masivului de pământ este posibilă când

$$(1) \quad \mathcal{G} = \mathcal{R} \operatorname{tg} \psi$$

Aceasta este relația fundamentală care servește la determinarea împingerii pământului și este datorită lui Coulomb.

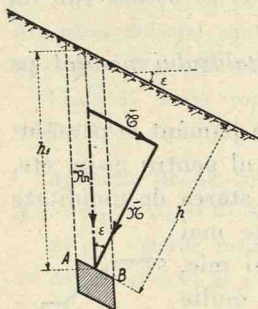


Figura 188

În această stare a rezistențelor, lunecarea producându-se, masivul ce lunecă va împinge asupra zidului cu o forță oarecare. În aceste condiții, să determinăm forța de împingere.

Să presupunem că avem un masiv indefinit, mărginit la exterior cu un plan care face cu orizontala unghiul ε (fig. 188).

Să presupunem că în interiorul pământului considerăm un element de volum paralelipipedic, mărginit cu 4 plane verticale și 2 paralele cu suprafața pământului. Secțiunea orizontală a acestui paralelipiped este Ω . Greutatea pământului de deasupra elementului de volum este γh_1 . Ω iar rezistența $\mathcal{R}_n$ pe fața AB, este:

$$(2) \quad \mathcal{R}_n = \gamma h_1 \Omega \cos \varepsilon / \Omega = \gamma h_1 \cos \varepsilon = \gamma h$$

Rezistența verticală $\mathcal{R}_n$ o descompunem în două componente:

$$(3) \quad \mathcal{R} = \gamma h \cos \varepsilon, \quad \mathcal{G} = \gamma h \sin \varepsilon.$$

Așa dar, la adâncimea h , măsurată normal la suprafața pământului, pe un plan paralel cu această suprafață, cunoaștem valoarea lui $\mathcal{R}$ și $\mathcal{G}$.

1. Calculul grafic al rezistențelor.

Să reprezentăm pe diagrama lui Mohr aceste rezistențe (fig. 189). Din originea O , pe o dreaptă paralelă cu suprafața pământului, luăm o lungime $OB = \gamma h$.

În aceste condiții proiecțiile lui OB pe cele două axe, reprezintă tocmai $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{S}$ date de ecuația (3).

Ca să găsim variația rezistențelor în jurul acestui punct, n'avem decât să ducem un cerc prin B care să aibă centrul O_1 pe dreapta OX .

Observăm că putem duce o infinitate de cercuri. În condițiile

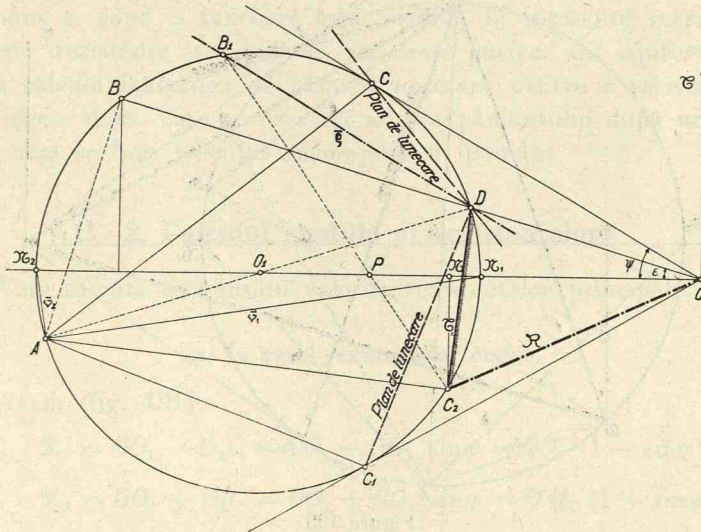


Figura 189

de mai sus să ducem cercul tangent la dreapta OC , care face unghiul ψ cu axa OX . Rezistențele reprezentate de punctul C , satisfac condiției (1) și anume:

$$(1) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \operatorname{tg} \psi$$

Așa dar, acest cerc reprezintă variația rezistențelor în punctul considerat, când o alunecare în interiorul pământului este posibilă.

Această construcție grafică ne dă și valoarea rezistențelor principale, cari se vede că sunt $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$.

Putem găsi cu ajutorul construcției de mai sus și celelalte elemente ce ne interesează.

Dacă din B ducem BA normal pe BO , adică pe suprafața pământului, găsim punctul A pe cerc, care ne dă direcția axelor

De pe figură se vede că planele de alunecare fac unghiuri egale cu $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi$ cu direcția $A\mathfrak{X}_2$ în primul caz și cu $A\mathfrak{X}_1$ în al doilea caz.

Primul caz, adică atunci când $\mathfrak{X}_1 < \mathfrak{X}_2$, ne dă rezistențele cari *împing asupra zidului* de sprijin, atunci când o lunecare în interiorul pământului este posibilă. De aceea aceste rezistențe se numesc *rezistențe active*. La aceste rezistențe vom calcula un zid care sprijinește un masiv de pământ oarecare.

Al doilea caz, adică atunci când $\mathfrak{X}_1 > \mathfrak{X}_2$, ne dă rezistențele din interiorul pământului când *zidul împinge* asupra masivului de pământ și când o lunecare este posibilă în interiorul masivului. Aceste rezistențe se numesc *rezistențe pasive*. Cu ajutorul lor vom calcula înălțimea de pământ necesară pentru a rezista la o împingere dată, care se exercită asupra pământului după un plan dat. Așa se face calculul ancorajelor în pământ.

2. Calculul analitic al rezistențelor.

Vom calcula mai întâiu valorile rezistențelor principale.

a) În cazul rezistențelor active.

Avem (fig. 191):

$$\mathfrak{X}_1 = OO_1 - O_1C = OO_1 - OO_1 \sin\psi = OO_1 (1 - \sin\psi)$$

$$\mathfrak{X}_2 = OO_1 + O_1C = OO_1 + OO_1 \sin\psi = OO_1 (1 + \sin\psi)$$

Deci:

$$(4) \quad \mathfrak{X}_1/\mathfrak{X}_2 = (1 - \sin\psi)/(1 + \sin\psi) = \operatorname{tg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi)$$

Pe de altă parte:

$$OB + OD = (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) \cos \varepsilon$$

$$OB \cdot OD = OC^2 = OO_1^2 \cos^2\psi = \frac{1}{4} (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2)^2 \cos^2\psi$$

Așa dar, OB și OD sunt rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea, deci:

$$(5) \quad OB, OD = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) (\cos \varepsilon \pm \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi})$$

De pe figură se vede că $OB = \gamma h > OD$, deci:

$$(6) \quad \gamma h = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) (\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi})$$

Din ecuațiile (1) și (3) scoatem:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{1a} &= \gamma h (1 - \sin \psi) / (\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}) \\ \mathfrak{X}_{2a} &= \gamma h (1 + \sin \psi) / (\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}) \end{aligned}$$

În cazul când $\varepsilon = 0$, avem:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{1a} &= \gamma h \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \psi \right) \\ \mathfrak{X}_{2a} &= \gamma h \end{aligned}$$

b) În cazul rezistențelor pasive.

Avem (fig. 191):

$$\mathfrak{X}_1 = OO_2 + O_2C = OO_2 + OO_2 \sin \psi = OO_2 (1 + \sin \psi)$$

$$\mathfrak{X}_2 = OO_2 - O_2C = OO_2 - OO_2 \sin \psi = OO_2 (1 - \sin \psi)$$

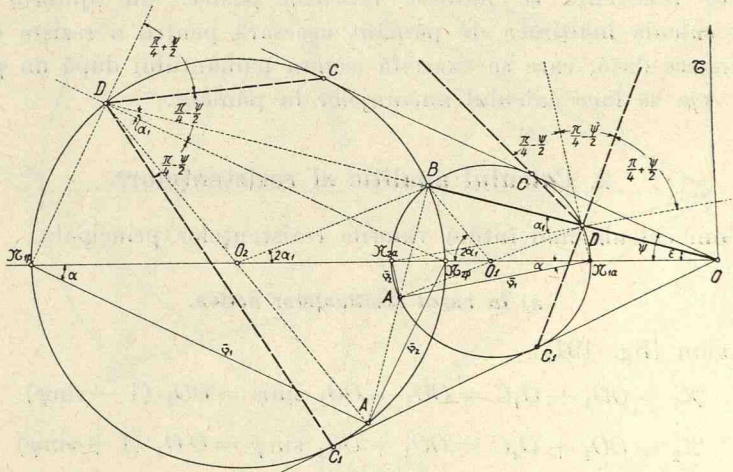


Figura 191

Deci:

$$(4_1) \quad \mathfrak{X}_1 / \mathfrak{X}_2 = (1 + \sin \psi) / (1 - \sin \psi) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi \right)$$

OB și OD au valorile date de relația (5) de mai sus, și se vede de pe figură că $OB = \gamma h < OD$, deci

$$(6_1) \quad \gamma h = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) (\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi})$$

Din ecuațiile (4₁) și (6₁) scoatem

$$(7_1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{1p} &= \gamma h (1 + \sin \psi) / (\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}) \\ \mathfrak{X}_{2p} &= \gamma h (1 - \sin \psi) / (\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}) \end{aligned}$$

În cazul când $\varepsilon = 0$, avem

$$(8_1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{1p} &= \gamma h \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi \right) \\ \mathfrak{X}_{2p} &= \gamma h \end{aligned}$$

În cazul când $\varepsilon = 0$, se vede că cele două axe principale sunt una verticală alta orizontală.

Din formula (8) se vede că dacă rezistența după verticală este γh , sau p , atunci în sens orizontal este $\gamma h \operatorname{tg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi)$ sau $p \operatorname{tg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi)$.

Dacă am avea de-a-face cu apă, pentru care $\psi = 0$, atunci avem:

$$\mathcal{K}_{1a} = \mathcal{K}_{2a} = \gamma h$$

Așa dar, din cauza frecărilor interioare, pământul poate fi considerat ca un lichid imperfect.

În al doilea caz, formula (8₁) ne arată, — că dacă împingem orizontal în masivul de pământ cu $\mathcal{K}_{1p} = \gamma h \operatorname{tg}^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi)$ atunci în sens vertical se dezvoltă $\mathcal{K}_{2p} = \gamma h$.

În cazul apei $\mathcal{K}_{1p} = \mathcal{K}_{2p} = \gamma h$.

Numai în cazul lichidelor perfecte, $\psi = 0$, presiunile se transmit egal în toate sensurile.

Pentru determinarea celorlalte elemente, mai avem nevoie de unghiul α pe care îl face axa $A\mathcal{K}_1$, cu $O\mathcal{K}$.

Să notăm cu $2\alpha_1$ unghiul $BO_1\mathcal{K}_2$. Avem:

$$(9) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_1 = \gamma h \sin \varepsilon / [\gamma h \cos \varepsilon - \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)]$$

iar din triunghiul $OD\mathcal{K}_2$, deducem:

$$(10) \quad \alpha = \alpha_1 - \varepsilon$$

În cazul rezistențelor pasive, avem:

$$(9_1) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_1 = \gamma h \sin \varepsilon / [\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) - \gamma h \cos \varepsilon]$$

și din triunghiul $D\mathcal{K}_2O$, deducem:

$$(10_1) \quad \alpha = \alpha_1 + \varepsilon$$

În construcția epurei am considerat axul $O\mathcal{K}$ orizontal, deci unghiul α ne fixează direcția principală $\bar{v}_1$ față cu orizontala. Dacă voim rezistențele după un plan a cărui normală face cu orizontala unghiul β , atunci aplicăm formulele (27') și (28') dela rezistențe, unde $\varphi = \beta - \alpha$.

B) Teoria lui Rebhan.

Se bazează tot pe ipoteza lui Coulomb și anume că o mișcare în interiorul pământului este posibilă, atunci când o lunecare este posibilă.

Să presupunem că lunecarea are loc după planul AC , care face unghiul α cu planul taluzului natural, înclinat cu ψ față cu orizontală (fig. 192). În acest caz, masivul de pământ ABC , împreună cu sarcina de deasupra, lucrează asupra planelor AB și AC întocmai ca o pană. Forța E , care lucrează asupra planului AB , face cu normala la acest plan un unghi egal cu coeficientul de frecare între pământ și zid sau între pământ și pământ.

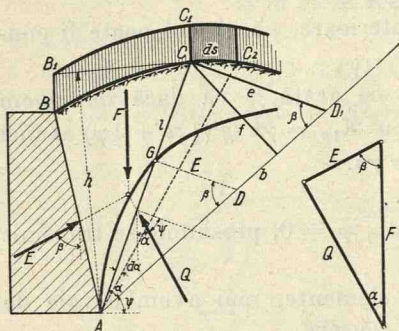


Figura 192

Dacă acesta din urmă este mai mic, atunci lunecarea are loc între pământ și pământul care aderă de zid. În aceste condiții, E face cu verticala un unghi β . Forța Q , care se aplică pe planul AC , face cu normala la acesta unghiul ψ pentru că lunecarea se face între pământ și pământ. Greutatea penei de pământ cu sarcina de deasupra este verticală și îi

cunoaștem valoarea F și poziția, când planul AC este dat.

Aceste trei forțe F , E și Q ca să fie în echilibru, trebuie să fie concurente și să formeze un poligon închis, ca în figură, din care rezultă:

$$(11) \quad F/\sin(\alpha + \beta) = E/\sin\alpha = Q/\sin\beta$$

În cazul când spinarea zidului este poligonală (fig. 193), pe diferitele porțiuni de linii drepte avem împingerile E_1, E_2, E_3 . În acest caz, va trebui ca E_1, E_2, E_3, F și Q să formeze un poligon închis ca în figură. Dacă prelungim pe E_3 până la F , atunci se formează triunghiul F_1, E, Q , în care F_1 este porțiunea detașată din F de prelungirea lui E_3 .

Se observă în acest caz, că între F_1, E și Q există aceeași relație (11).

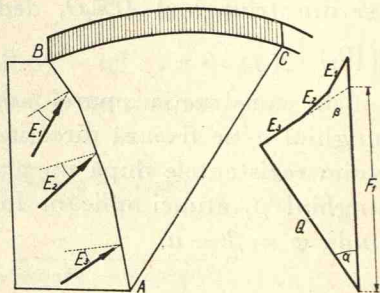


Figura 193

Dacă pe direcția AD , care face unghiul ψ cu orizontală, luăm o lungime egală cu F și dacă de aci ducem dreapta DG , care face unghiul β cu AD , căpătăm la intersecția cu AC punctul G .

Observăm însă că ADG nu-i altceva decât triunghiul forțelor F, E, Q (fig. 192).

Așa dar, dacă am cunoaște poziția planului de lunecare AC am cunoaște și punctul G , deci valoarea lui E .

Făcând să varieze înclinarea lui AC , punctul G descrie *curba lui Culmann* și se observă că E trece printr'un maxim. Zidul va trebui să reziste la acest E maxim. Ca să găsim pe E maxim vom analiza derivata lui, din ecuația (11), în raport cu variabila α .

Avem:

$$(12) \quad dE/da = \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) \, dF/da + F \sin\beta = 0$$

Să evaluăm pe F și pe dF/da .

Vom observa mai întâiu că atunci când F crește, α scade, deci $dF/da < 0$.

Mai observăm că creșterea dF este independentă de faptul dacă spinarea zidului este dreaptă sau poligonală și deci concluziile cari se scot, sunt aplicabile ambelor cazuri.

Notăm cu h distanța dela A la tangenta în C la suprafața pământului, cu ds distanța CC_2 cuprinsă între dreptele AC și AC_2 cari fac între ele unghiul da .

Dacă greutatea specifică a pământului este γ și suprasarcina p kg/m², presupunând că normal pe figură luăm o grosime egală cu unitatea, atunci:

$$(13) \quad dF = \frac{1}{2} \gamma h ds + p ds = \frac{1}{2} \gamma' h ds$$

în care am notat:

$$(14) \quad \gamma' = \gamma + 2p/h.$$

În aceste condiții avem:

$$(15) \quad F = \gamma' \Omega$$

în care Ω este suprafața ABC .

Pe de altă parte, suprafața triunghiului ACC_2 are și expresia $\frac{1}{2} l^2 da$, și deci

$$(16) \quad dF/da = -\frac{1}{2} \gamma' l^2$$

în care l este lungimea AC .

Introducând în (12) valorile din (15) și (16) avem:

$$(17) \quad \Omega = \frac{1}{2} l^2 \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) / \sin\beta$$

Din C ducem dreapta CD_1 , așa ca unghiul CD_1A să fie egal cu β . Notăm $CD_1 = e$, $AD_1 = b$, iar perpendiculara din C pe AD cu f . Avem (fig. 192):

$$f = l \sin \alpha$$

$$(18) \quad \sin(\alpha + \beta)/b = \sin \alpha/e = \sin \beta/l$$

Introducând aceste valori în (17), căpătăm:

$$(19) \quad \Omega = \frac{1}{2} b f = \triangle ACD_1$$

Așa dar, dacă AC este planul de lunecare, atunci suprafața triunghiului ACD_1 este egală cu Ω . Aceasta este condiția care ne fixează poziția planului de lunecare.

În cazul general această poziție se găsește prin încercări.

Prizma ABC astfel determinată, poartă numele de priză de împingere.

Ca să găsim valorile lui E și Q n'avem decât să multiplicăm ecuația (11) cu (18) ceea ce ne dă:

$$(20) \quad F/b = E/e = Q/l$$

în care punând în locul lui F valoarea sa din (15) și (19), adică

$$F = \frac{1}{2} \gamma' b f,$$

căpătăm:

$$(21) \quad E = \frac{1}{2} \gamma' f e \quad \text{și} \quad Q = \frac{1}{2} \gamma' f l$$

Caz simplu. Să presupunem că avem un zid care sprijină un teren mărginit printr-o suprafață plană și încărcat cu o supra-sarcină p (fig. 194).

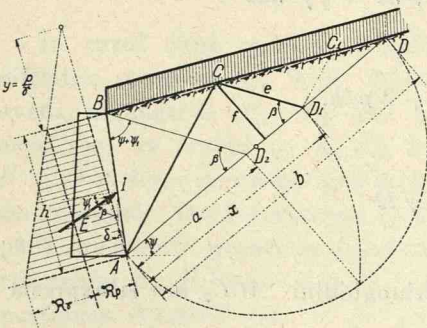


Figura 194

Împingerea E face cu normala la zid un unghi ψ_1 , care variază între zero și ψ când frecarea între pământ și zid variază între aceste limite.

Dacă AC este planul de lunecare, atunci CD_1 face cu AD unghiul β .

Dreapta BD_2 paralelă cu CD_1 face, în acest caz, cu AB unghiul $\psi + \psi_1$, cum ușor se poate arăta. În acest caz, lungimea $AD_2 = a$ este cunoscută.

Dacă AC este plan de lunecare, atunci $\triangle ABC = \triangle ACD_1$. Ducem $D_1C_1 \parallel AC$. Și $\triangle ACD_1 = \triangle ACC_1$, pentru că au aceeași

bază și aceeași înălțime. Rezultă atunci $BC = CC_1$. Lungimea $AD = b$, măsurată din A până la intersecția lui AD cu BD , este de asemenea cunoscută. Notăm $AD_1 = x$. Din triunghiurile DD_1C și DD_2B , deducem:

$$(b - x)/(x - a) = DC/BC = DC/CC_1$$

Din triunghiurile DCA și DC_1D_1 deducem

$$DC/CC_1 = b/x.$$

Din aceste două relațiuni scoatem:

$$(22) \quad x^2 = ab.$$

Așa dar, x este medie proporțională între cantitățile cunoscute a și b . Se poate calcula sau construi grafic cu ajutorul unui cerc. Având punctul D_1 , avem imediat pe C și deci pe f și e .

Deci avem pe E , a cărui direcțiune o cunoaștem.

Mai trebuie să-i găsim punctul de aplicație.

E este rezultanta unor rezistențe $\mathfrak{R}$, cu aceeași direcțiune ca și E , multiplicată cu suprafața pe care se exercită.

Dacă notăm suprafața AB cu h_1 , și pentru că $\mathfrak{R}$ este variabil avem:

$$E = \int \mathfrak{R} dh_1$$

care prin diferențiere, ne dă:

$$(23) \quad \mathfrak{R} = dE/dh_1$$

din care putem deduce distribuția lui $\mathfrak{R}$ după AB .

Punem

$$(24) \quad E = E_\gamma + E_p$$

în care E_γ este împingerea datorită numai pământului și E_p datorită numai suprasarcinii. Avem evident:

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \gamma f e \quad \text{și} \quad E_p = p f e / h$$

De pe figură se vede că atât f , e cât și h sunt funcțiuni liniare de h_1 și deci putem pune

$$E_\gamma = k h_1^2, \quad E_p = k_1 h_1$$

în care k și k_1 sunt niște constante.

De aci scoatem:

$$(25) \quad \mathfrak{R}_\gamma = dE_\gamma/dh_1 = 2k h_1, \quad \mathfrak{R}_p = dE_p/dh_1 = k_1$$

Aşa dar, rezistenţele $\mathcal{R}_\gamma$ datorite presiunii pământului variază liniar cu h , deci după ordonatele unui triunghi, iar cele datorite suprasarcinei — $\mathcal{R}_p$ — sunt constante şi variază după ordonatele unui dreptunghi.

Forţa E_γ , rezultând din rezistenţele $\mathcal{R}_\gamma$ se aplică la $\frac{1}{3}h_1$ de punctul A , iar cea rezultând din rezistenţele $\mathcal{R}_p$ — adică E_p — se aplică la distanţa $\frac{1}{2}h_1$ de acelaşi punct. Dacă notăm distanţa AI cu c şi dacă luăm momentele în raport cu A , avem:

$$(26) \quad c = (\frac{1}{3}E_\gamma h_1 + \frac{1}{2}E_p h_1)/E$$

Deci am găsit şi punctul de aplicaţie al lui E .

Să găsim acum valoarea rezistenţelor $\mathcal{R}_\gamma$ şi $\mathcal{R}_p$. Notăm cu $\mathcal{R}_{\gamma A}$ cea mai mare rezistenţă $\mathcal{R}_\gamma$, adică cea din punctul A .

Conform celor de mai sus vom avea:

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\gamma A} h_1 = \frac{1}{2} \gamma f e \quad , \quad E_p = \mathcal{R}_p h_1 = p f e / h$$

din care scoatem:

$$(27) \quad \mathcal{R}_{\gamma A} = \gamma f e / h_1 \quad , \quad \mathcal{R}_p = p f e / h h_1$$

Am fi putut lua variaţia rezistenţelor după înălţimea h , adică am fi luat h ca variabilă, în acest caz obţinem:

$$(28) \quad \mathcal{R}_{\gamma A} = \gamma f e / h \quad , \quad \mathcal{R}_p = p f e / h^2$$

Suma celor două rezistenţe $\mathcal{R}_\gamma + \mathcal{R}_p$ variază după ordonatele unui trapez. Centrul de greutate al acestui trapez ne dă de asemenea poziţia rezultantei E .

Să presupunem că laturile neparalele ale acestui trapez se întâlnesc la distanţa y dela suprafaţa pământului, măsurată după direcţia lui h . Vom avea, din figură:

$$\mathcal{R}_{\gamma A} / h = \mathcal{R}_p / y$$

sau din formula (28) deducem: $y = p / \gamma$

Aceasta ne arată că putem înlocui suprasarcina p printr-o înălţime de pământ p / γ . Rezistenţele $\mathcal{R}$ în acest caz variază după ordonatele unui triunghi iar împingerea E este datorită numai trapezului care se aplică pe spinarea zidului.

Aplicaţia Nr. 48. Un teren cu panta 20° , este sprijinit de un zid a cărui suprafaţă face cu verticala un unghi de 10° şi a cărui înălţime măsurată pe normala la suprafaţa terenului, este 6 m (fig. 195). Greutatea specifică a pământului este $1,8 \text{ t/m}^3$, iar unghiul taluzului natural 27° . Să se găsească valoarea împingerii, presupunând că luăm o lăţime de zid de 1 m.

a) Rezolvare cu metoda Mohr.

* Mai întâiu cu ajutorul formulelor (7) vom determina valoarea rezistențelor principale $\mathfrak{K}_{1a}$ și $\mathfrak{K}_{2a}$. Vom face aceasta la adâncimea $h = 1$ m. Pentru adâncimea $h = 6$ m, vom multiplica rezultatele precedente cu 6.

Avem:

$$\cos \varepsilon = 0,940 \quad ; \quad \sin \varepsilon = 0,342 \quad ; \quad \cos^2 \varepsilon = 0,883$$

$$\sin \psi = 0,454 \quad ; \quad \cos^2 \psi = 0,794$$

$$\gamma \cdot 1 \cdot \cos \varepsilon = 1,692 \quad ; \quad \gamma \cdot 1 \cdot \sin \varepsilon = 0,6156$$

$$\alpha_1 = 1,8 (1 - 0,454) / (0,940 + \sqrt{0,883 - 0,794}) = 0,794 \text{ т/м}^2$$

$$\kappa_2 = 1,8 (1 + 0,454) / (0,940 + \sqrt{0,883 - 0,794}) = 2,112 \text{ t/m}^2$$

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) = 1,453 \text{ t/m}^2.$$

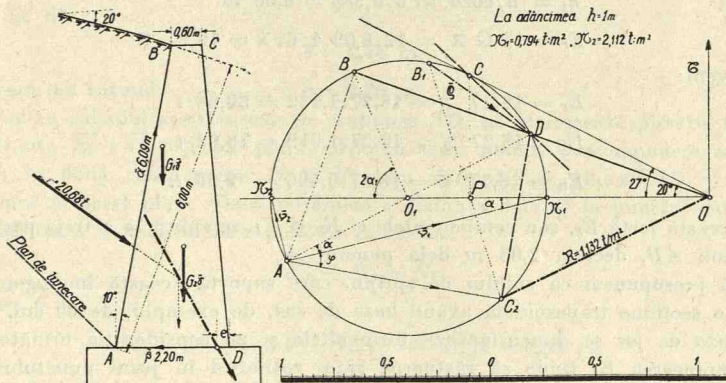


Figura 195

Cu ajutorul formulelor (9) și (10) deducem orientarea axelor principale.

Avem:

$$\operatorname{tg} 2a_1 = 0,6156 / (1,692 - 1,453) = 2,576$$

$$2a_1 = 68^\circ 47' \quad ; \quad a_1 = 34^\circ, 23',5 \quad ; \quad a = 14^\circ 23',5$$

Aşa dar, axa principală $A\mathfrak{X}_1$ face cu orizontala un unghi $\alpha = 14^\circ 23',5$.

Zidul fiind înclinat cu 10^0 , va trebui deci să găsim valorile lui $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{C}$ pentru direcția AC_2 care face cu $A\mathfrak{X}_1$ unghiul:

$$\varphi = \delta + \alpha = 10^{\circ} + 14^{\circ}23',5 = 24^{\circ}23',5$$

adică după AC_2 .

Vom utiliza formulele:

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) + \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2) \cos 2\varphi$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2) \sin 2\varphi$$

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2) + \frac{1}{2}(\mathfrak{X}_1^2 - \mathfrak{X}_2^2) \cos 2\varphi$$

Cu:

$$\cos 2\varphi = \cos 48^\circ 47' = 0,659 \quad \text{și} \quad \sin 2\varphi = 0,751$$

Avem:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{2}(0,794 + 2,112) + \frac{1}{2}(0,794 - 2,112) 0,659 = 1,019 \text{ t/m}^2$$

$$\mathfrak{Z} = -\frac{1}{2}(0,794 - 2,112) 0,751 = 0,496 \text{ t/m}^2$$

$$\mathfrak{X}^2 = \frac{1}{2}(0,794^2 + 2,112^2) + \frac{1}{2}(0,794^2 - 2,112^2) 0,659 = 1,283$$

și

$$\mathfrak{X} = 1,132 \text{ t/m}^2$$

Ca să găsim rezistențele la 6 m adâncime vom multiplica cantitățile de mai sus cu 6. Aceste rezistențe pe înălțimea zidului variază liniar, dela zero la valorile calculate.

Valoarea forțelor respective se va căpăta multiplicând rezistențele de mai sus cu suprafața pe care ele se exercită, ținând seamă de distribuția triunghiulară.

Cu

$$h_1 = h/\cos\delta = 6/0,985 = 6,09 \text{ m}$$

$$E_r = 12 \Omega \mathfrak{X} = 12 \cdot 6,09 \cdot 1,6 \cdot \mathfrak{X} = 18,27 \cdot \mathfrak{X}$$

Avem:

$$E_r = 18,27 \cdot \mathfrak{X} = 18,27 \cdot 1,132 = 20,68 \text{ t}$$

$$E_t = 18,27 \cdot \mathfrak{X} = 18,27 \cdot 1,019 = 18,62 \text{ t}$$

$$E_n = 18,27 \cdot \mathfrak{Z} = 18,27 \cdot 0,496 = 9,06 \text{ t}$$

Această forță E_r , sau componentele ei E_n și E_t , se aplică la a treia parte a lungimii AB , deci la 2,03 m dela punctul A .

Să presupunem că zidului de sprijin, care suportă această împingere, îi dăm o secțiune trapezoidală având baza de sus, de exemplu, de 60 cm.

Baza de jos se dimensionează între altele și pe considerația următoare.

Împingerea E_r tinde să răstoarne zidul rotindu-l în jurul punctului D . Momentul lui E_r în raport cu D poartă numele de *moment de răsturnare* M_r . La această răsturnare se opune greutatea zidului care, în raport cu D , ne dă un *moment de stabilitate* M_s .

Se prescrie să avem:

$$M_s \geq 1,5 M_r.$$

Dacă notăm cu b mărimea bazei de jos, atunci:

$$M_r = 18,62 (2,03 - b \cdot \sin 10^\circ) - 9,06 b \cos 10^\circ,$$

și cum:

$$\sin 10^\circ = 0,174 \quad ; \quad \cos 10^\circ = 0,985,$$

avem:

$$M_r = 37,80 - 12,16 b$$

Să evaluăm momentul de stabilitate M_s .

Masivul de zidărie îl presupunem dintr'un material a cărui greutate specifică este $\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$, dirijată după vectorul $\bar{\gamma}$ de sus în jos. Trapezul $ABCD$ îl descompunem în triunghiurile ABC și ACD în ale căror centre de greutate sunt aplicate G_1 și G_2 (fig. 195) respectiv de:

$$G_1 = 6 \cdot 0,6 \cdot 2,2 \bar{\gamma}/2 = 3,96 \bar{\gamma} t$$

$$G_2 = 6 \cdot b \cdot 2,2 \bar{\gamma}/2 = 6,6 b \bar{\gamma} t$$

Dacă notăm cu $\bar{a}$ și $\bar{\beta}$ direcțiile AB și DA , atunci distanța DG_1 este:

$$b\bar{\beta} + \frac{2}{3}(6,09\bar{a} - \frac{1}{2}0,60\bar{\beta}) = (b - 0,2)\bar{\beta} + 4,06\bar{a}$$

iar DG_2 :

$$\frac{1}{2}b\bar{\beta} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}b\bar{\beta} + 6,09\bar{a} - 0,60\bar{\beta}) = (\frac{2}{3}b - 0,2)\bar{\beta} + 2,03\bar{a}$$

Momentul acestor greutateți în raport cu D , dacă se ține seamă că:

$$\overline{\beta\gamma} = -1 \quad ; \quad \overline{\alpha\gamma} = -\sin 10^\circ = -0,174$$

este:

$$M_s = 4,4b^2 + 0,31b - 3,59.$$

Din condiția $M_r = 1,5 M_s$, scoatem:

$$4,4b^2 + 18,55b - 60,29 = 0$$

care ne dă

$$b = 2,16 \text{ m.}$$

Vom lua rotund

$$b = 2,20 \text{ m.}$$

Pentru calculul rezistențelor pe secțiunea AD , ne interesează punctul unde rezultanta $\overline{E_r} + \overline{G}$ înțeapă planul AD . În acest punct, descompunem rezultanta în două componente N și T , una normală pe planul AD și alta cuprinsă în acest plan. Dacă notăm cu e distanța dela D la punctul căutat, și dacă luăm momentul în raport cu D , avem:

$$M_s - M_r = Ne$$

în care $b = 2,2 \text{ m}$

$$M_s - M_r = 4,4b^2 + 12,47b - 41,39 = 7,34 \text{ tm}$$

$$N = 18,62 \cdot 0,174 + 9,06 \cdot 0,985 + \frac{1}{2} \cdot 1,6(b + 0,60) \cdot 2,2 = 30,64 \text{ t.}$$

$$\text{Deci } e = (M_s - M_r) / N = 7,34 / 30,64 = 0,239 \text{ m} \approx 0,24 \text{ m.}$$

Sunt alte cazuri când ni se impune ca $e \geq \frac{1}{3}b$. Să determinăm pe b în acest caz. Avem

$$N = 16,12 + 6,6b.$$

Vom pune condiția $e = \frac{1}{3}b$ și deci:

$$M_s - M_r = \frac{1}{3}Nb$$

care ne dă $b = 3,015 \approx 3 \text{ m.}$

Epura (fig. 195) dă aceleași valori cu o aproximație suficientă.

b) Rezolvarea cu metoda Rebhan.

Presupunem că E face cu normala la planul zidului unghiul $\psi_1 = 10^\circ$. Avem: $\delta = 10^\circ$, rezultă: $\beta = 90^\circ - \delta - \psi_1 = 70^\circ$. Mai avem: $\varphi = 27^\circ$, $\varepsilon = 20^\circ$ și rezultă $\varphi + \psi_1 = 37^\circ$.

Apoi:

$$a = h_1 \sin(\psi + \psi_1) / \sin \beta = 3,90 \text{ m}$$

$$b = h_1 \sin(\frac{1}{2}\pi + \varepsilon - \delta) / \sin(\psi - \varepsilon) = 49,21 \text{ m}$$

$$x = 13,82 \text{ m} \quad , \quad b - x = 35,39 \text{ m}$$

$$e = (b - x) \sin(\psi - \varepsilon) / \sin(\beta - \psi + \varepsilon) = 4,84 \text{ m}$$

$$f = e \sin \beta = 4,55 \text{ m}$$

$$E = \frac{1}{2} \gamma e f = \frac{1}{2} 1,8 \cdot 4,84 \cdot 4,55 = 19,8 \text{ t}$$

$$\mathfrak{X}_{\gamma A} = E / \Omega = 19,8 / \frac{1}{2} 6 \cdot 1 = 6,60 \text{ t/m}^2.$$

După cum se vede rezultatele sunt foarte apropiate. Nepotrivirea vine de acolo, că aci am luat pentru $\psi_1 = 10^\circ$, pe când în teoria lui Mohr acesta rezultă, pentru că este unghiul între $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{X}$.

Evident că neavând suprasarcină, E se aplică la $1/3$ din h_1 , adică la 2,03 m de punctul A.

XI. DEFORMAȚII.

Orice corp este deformabil. Prin deformație un corp trece dela o formă la alta.

Vom admite că această trecere se face în mod continuu, așa fel că formele intermediare, oricare ar fi numărul lor, diferă puțin una de alta.

În această transformare vom lua o formă oarecare ca reper în raport cu care vom compara toate celelalte forme.

Această formă, luată ca reper, o vom denumi forma nedeformată a corpului. Toate celelalte le vom denumi forme deformate ale primei.

Să presupunem că în poziția nedeformată a corpului, considerăm în interiorul lui un punct O . Prin deformarea corpului, acest punct ajunge în O_1 , parcurgând drumul $\vec{j}$. Un alt punct va parcurge alt drum $\vec{j}$, și așa mai departe. Toate punctele corpului vor parcurge drumuri $\vec{j}$ oarecari, diferind dela punct la punct.

Să presupunem că mai considerăm două puncte A și B cari după deformație ajung în A_1 și B_1 (fig. 196).

Să dăm corpului în stare deformată o translație — $\vec{j}$, până când O_1 ajunge în O , apoi o rotație așa ca dreapta $O_1 A_1'$ să se suprapună peste OA (A_1'' nu se va suprapune peste A) și apoi o altă rotație, în jurul dreptei OA , până când planul $B_1 O'' A_1''$ se va suprapune peste planul BOA (dreapta $B_1''' O$ nu se va suprapune peste BO).

Drumurile $\vec{j}$ fiind oarecari, rezultă că vor exista puncte ale

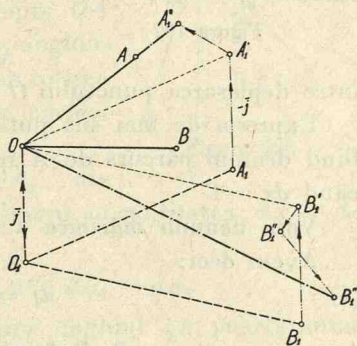


Figura 196

formeii deformate, altele afară de O_1 , cari nu se vor suprapune peste punctele corespunzătoare ale figurii nedeformate.

Zicem că avem o formă deformată a unui corp, atunci când prin mișcări de translație și rotație, această formă nu se suprapune complet peste forma nedeformată.

Când o formă oarecare a unui corp prin mișcări de translație și rotație, se suprapune *complet*, punct cu punct, peste forma nedeformată, atunci zicem că acel corp nu a suferit nicio deformare, a rămas rigid.

Așa dar, mișcările de translație și rotație date corpului întreg nu-l deformează.

1. Deplasări.

Să presupunem că în apropierea punctului O , care a parcurs drumul $\vec{j}$, mai considerăm punctul infinit vecin A , la distanța $d\vec{s}$ (fig. 197). Acest punct se va deplasa cu cantitatea $\vec{j} + d\vec{j}$, ajungând în A_1 . În acest caz, nici $d\vec{s}$ nu rămâne invariabil, ci va avea lungimea și direcția $O_1 A_1$, egală cu $d\vec{s} + \Delta d\vec{s}$.

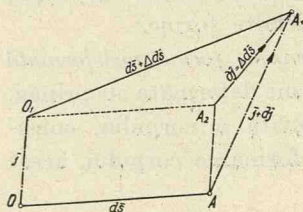


Figura 197

Elementul ds îl presupunem infinit mic, așa ca să-l putem oricând considera ca o porțiune de linie dreaptă.

De pe figură se vede numaidecât că $A_2 A_1$ are valoarea și direcția:

$$d\vec{j} = \Delta d\vec{s}$$

Această relație stabilește o legătură între deplasarea punctului O și variația cantității $d\vec{s}$.

Expresia de mai sus putem să o punem și sub forma $\bar{\lambda} ds$, $\bar{\lambda}$ fiind drumul parcurs de A în raport cu O , ca mărime și direcție, când $ds = 1$

Vom denumi mărimea $\bar{\lambda}$ drum sau deplasare specifică.

Avem deci:

$$(1) \quad d\vec{j} = \Delta d\vec{s} = \bar{\lambda} ds$$

2. Deformațiuni specifice.

a) Lungire specifică.

Să presupunem că elementul ds se lungește în direcția $\vec{r}$ a lui, cu cantitatea Δds . Raportul

$$(2) \quad \Delta ds / ds = \varepsilon$$

se numește lungire specifică.

Același lucru, dacă o lungime oarecare l se lungeste cu cantitatea Δl , atunci raportul $\Delta l/l = \varepsilon$ se numește tot lungire specifică.

Când vom avea o scurtare vom avea $-\Delta ds/ds = -\varepsilon$.

Când vom avea lungiri avem $\varepsilon > 0$, când avem scurtări avem $\varepsilon < 0$.

Lungimile lor, după ce s'au lungit sunt:

$$ds + \Delta ds = (1 + \varepsilon) ds, \quad l + \Delta l = (1 + \varepsilon) l.$$

Să notăm cu u deplasarea $\vec{j}$ dirijată după $\vec{v}$, direcția elementului ds .

Vom avea:

$$d\vec{j} = \vec{v} du$$

$$\Delta \vec{ds} = \Delta \vec{v} ds = \vec{v} \Delta ds = \vec{v} \varepsilon ds$$

care, în virtutea relației (1), ne dă

$$(3) \quad du = \varepsilon ds$$

ecuație care stabilește, în acest caz, o relație între deplasarea u , a punctului O și deformația elementului ds .

b) Lunecare specifică.

Să presupunem că avem un unghi drept AOB (fig. 198) și că el s'a deformat în planul său ocupând poziția $A_1 O_1 B_1$. Figurii deformate îi dăm o translație în planul său, așa ca punctul O_1 să se suprapună peste O .

În acest caz, perechile de drepte OA cu OA_1' și OB cu OB_1' , fac între ele unghiurile $d\varphi_1$ și $d\varphi_2$, unghiuri ce rezultă din rotirea dreptelor OA și OB în jurul unui ax normal pe planul AOB .

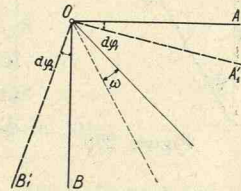


Figura 198

După deformație unghiul $B_1'OA_1'$ are

valoarea $\frac{1}{2}\pi - (d\varphi_1 - d\varphi_2)$, deci s'a micșorat cu cantitatea: $d\varphi_1 - d\varphi_2$.

Cantitatea:

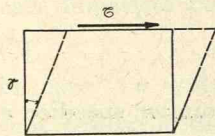


Figura 199

$$(4) \quad \gamma = d\varphi_1 - d\varphi_2$$

cu care s'a micșorat unghiul $\frac{1}{2}\pi$, poartă numele de *lunecare specifică*. Când unghiul se mărește avem $\gamma < 0$.

Se numește așa, pentru că este unghiul cu care s'a micșorat unghiul drept al unui dreptunghi, când una din laturi lunecă în direcția ei cu o cantitate oarecare, deformând dreptunghiul într'un paralelogram (fig. 199).

Bisectoarea unghiului drept face cu OA unghiul $\frac{1}{4}\pi$. Bisectoarea unghiului $A_1'OB_1'$ deformat face cu aceeași dreaptă unghiul $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(d\varphi_1 + d\varphi_2)$.

Așa dar, sistemul A_1OB_1 s'a rotit, față de AOB , cu unghiul:

$$(4') \quad \frac{1}{2}(d\varphi_1 + d\varphi_2) = \omega$$

Din relațiile (4) și (4') deducem:

$$(5) \quad d\varphi_1 = \frac{1}{2}\gamma + \omega \quad \text{și} \quad d\varphi_2 = -\frac{1}{2}\gamma + \omega$$

Din cauza rotației ω , conform definiției ce s'a dat, nu se produc deformațiuni în interiorul corpului.

c) Deformațiune specifică.

Cu ajutorul lungirii specifice ε și a lunecării specifice γ , se pot exprima deformațiunile de orice natură a corpurilor.

Să facem aceasta pentru elementul $\bar{ds}$, a căru direcțiune este $\bar{v}$.

Avem (fig. 200):

$$\Delta \bar{ds} = \Delta (\bar{v} ds) = \bar{v} \Delta ds + \Delta \bar{v} \cdot ds = \bar{\lambda} ds$$

și deci:

$$\bar{\lambda} = \bar{v} \varepsilon + \Delta \bar{v}$$

Vectorul $\Delta \bar{v}$ rezultă din rotirea direcției $\bar{v}$ în jurul unui ax $\bar{\omega}$, cu unghiul $d\varphi$ și prin urmare are direcția $\bar{\omega} \bar{v} = \bar{\theta}$ și valoarea numerică dată de ecuația (5) și anume $\frac{1}{2}\gamma + \omega$, așa dar:

$$\Delta \bar{v} = \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma + \bar{\theta}\omega = \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma + \bar{\omega}\bar{v}$$

Figura 200

Rezultă:

$$(6) \quad \bar{\lambda} = \bar{v} \varepsilon + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma + \bar{\omega}\bar{v}$$

Prin urmare, deplasarea specifică $\bar{\lambda}$ se compune din două părți: prima

$$(7) \quad \bar{\delta} = \bar{v} \varepsilon + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma$$

formată din primii doi termeni, datorită deformațiunilor specifice ε și γ , pe care o vom denumi *deformațiune specifică* și o vom nota cu $\bar{\delta}$, și o a doua parte datorită rotației ω care nu produce deformațiuni.

Vom avea deci:

$$(6') \quad \bar{\lambda} = \bar{\delta} + \bar{\omega}\bar{v}$$

Ecuția (6') stabilește legătura între deplasarea $\bar{j}$ deformația specifică $\bar{\delta}$ și rotația întregului sistem.

Dacă se multiplică (7) scalar cu $\bar{v}$ și $\bar{\theta}$, avem:

$$(8) \quad \bar{v} \bar{\delta} = \varepsilon, \quad \bar{\theta} \bar{\delta} = \frac{1}{2} \gamma$$

adică, deformația specifică proiectată pe $\bar{v}$, ne dă pe ε și proiectată pe $\bar{\theta}$ ne dă $\frac{1}{2} \gamma$.

Dacă ridicăm pe (7) la patrat, mai avem:

$$(8') \quad \delta^2 = \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \gamma^2$$

3. Variațiunea deformațiunilor specifice.

a) Componentele deformațiunii specifice $\bar{\delta}$.

Să presupunem că în apropierea punctului O luăm punctele A , B și C , după direcțiile a trei axe de coordonate normale, respectiv la distanțele dx , dy , dz (fig. 201). Să considerăm elementul ds corespunzător.

Avem evident:

$$d\bar{s} = d\bar{x} + d\bar{y} + d\bar{z}$$

Să aplicăm acestei egalități ecuația (1) ținând seamă și de (6).

Vom avea:

$$\Delta d\bar{s} = \bar{\lambda} ds = \bar{\delta} ds + \overline{\omega v} ds$$

Pentru că deplasarea $\overline{\omega v} ds$ este datorită unei rotațiuni care nu dă deformațiuni, vom

aplica elementului ds numai operațiunea care dă deformațiuni și vom avea:

$$\bar{\delta} ds = \bar{\delta}_x dx + \bar{\delta}_y dy + \bar{\delta}_z dz$$

care împărțită cu ds , ne dă:

$$(9) \quad \bar{\delta} = a \bar{\delta}_x + b \bar{\delta}_y + c \bar{\delta}_z$$

în care: $a = dx/ds = \bar{\xi} \bar{v}$, $b = dy/ds = \bar{\eta} \bar{v}$, și $c = dz/ds = \bar{\zeta} \bar{v}$, sunt cosinurile directe ale direcțiunii $\bar{v}$, a elementului ds .

Să determinăm pe $\bar{\delta}_x$. N'avem decât să aplicăm ecuația (7) axei Ox .

Vom observa mai întâiu că elementul ds are o lungire specifică ε și că elementelor dx , dy , dz vor corespunde niște lungiri specifice ε_x , ε_y , ε_z .

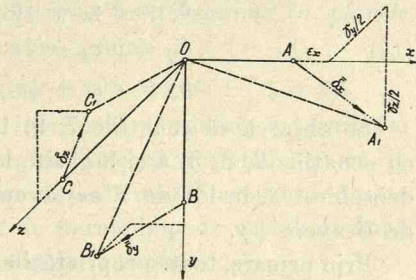


Figura 201

Mai observăm că elementul ds se rotește în jurul axului $\bar{\omega}$ cu unghiul $\frac{1}{2}\gamma$ și că elementul dx de ex. se rotește, în jurul axelor de coordonate Oy și Oz , cu cantitățile $-\frac{1}{2}\gamma_y$ și $+\frac{1}{2}\gamma_z$.

De pe figură se vede că avem:

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{\delta}_x &= \bar{\xi} \varepsilon_x + \frac{1}{2}\bar{\eta} \gamma_z + \frac{1}{2}\bar{\zeta} \gamma_y \\ \bar{\delta}_y &= \bar{\eta} \varepsilon_y + \frac{1}{2}\bar{\zeta} \gamma_x + \frac{1}{2}\bar{\xi} \gamma_z \\ \bar{\delta}_z &= \bar{\zeta} \varepsilon_z + \frac{1}{2}\bar{\xi} \gamma_y + \frac{1}{2}\bar{\eta} \gamma_x \end{aligned}$$

Dacă multiplicăm aceste ecuații vectorial succesiv cu $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, și le adunăm, căpătăm:

$$(11) \quad \bar{\xi} \bar{\delta}_x + \bar{\eta} \bar{\delta}_y + \bar{\zeta} \bar{\delta}_z = 0$$

Notăm cu $\bar{\delta}_\xi$, $\bar{\delta}_\eta$, $\bar{\delta}_\zeta$ componentele lui $\bar{\delta}$ după cele trei axe, avem:

$$(12) \quad \delta_\xi = \bar{\xi} \bar{\delta}, \quad \delta_\eta = \bar{\eta} \bar{\delta}, \quad \delta_\zeta = \bar{\zeta} \bar{\delta}$$

și

$$(13) \quad \bar{\delta} = \bar{\xi} \delta_\xi + \bar{\eta} \delta_\eta + \bar{\zeta} \delta_\zeta$$

Dacă în (12) se pun valorile din (9) și (10) se capătă:

$$(14) \quad \begin{aligned} \delta_\xi &= a \varepsilon_x + \frac{1}{2}b \gamma_z + \frac{1}{2}c \gamma_y \\ \delta_\eta &= b \varepsilon_y + \frac{1}{2}c \gamma_x + \frac{1}{2}a \gamma_z \\ \delta_\zeta &= c \varepsilon_z + \frac{1}{2}a \gamma_y + \frac{1}{2}b \gamma_x \end{aligned}$$

Se observă că ecuațiile 7, 9, 10, 11 și 14 sunt absolut identice cu ecuațiile 2, 8, 3, 4 și 9 găsite la studiul rezistențelor, cu singura deosebire că, în loc de $\mathfrak{R}$ aci avem $\bar{\delta}$, în loc de $\mathfrak{X}$ avem ε și în loc de $\mathfrak{S}$ avem $\frac{1}{2}\gamma$.

Prin urmare, toate proprietățile găsite acolo se aplică întocmai aci.

b) Variația lungirilor specifice ε .

Dacă se urmează aceeași cale, ca la studiul variației rezistențelor $\mathfrak{X}$, se găsesc exact aceleași rezultate și anume: că există trei direcțiuni principale $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, după cari lungirile specifice ε_1 , ε_2 și ε_3 sunt maxime și minime, și că lunecările specifice corespunzând acestor axe sunt nule.

Dacă raportăm totul la axele principale avem:

$$(15) \quad \bar{v} \bar{v}_1 = a, \quad \bar{v} \bar{v}_2 = b, \quad \bar{v} \bar{v}_3 = c$$

$$(16) \quad \bar{\delta} = a \bar{v}_1 \varepsilon_1 + b \bar{v}_2 \varepsilon_2 + c \bar{v}_3 \varepsilon_3$$

$$(17) \quad \bar{\delta}_x = \bar{v}_1 \varepsilon_1, \quad \bar{\delta}_y = \bar{v}_2 \varepsilon_2, \quad \bar{\delta}_z = \bar{v}_3 \varepsilon_3$$

$$(18) \quad \delta_\xi = a \varepsilon_1, \quad \delta_\eta = b \varepsilon_2, \quad \delta_\zeta = c \varepsilon_3$$

$$(19) \quad \varepsilon = a^2 \varepsilon_1 + b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_3$$

$$(19) \quad \delta^2 = a^2 \varepsilon_1^2 + b^2 \varepsilon_2^2 + c^2 \varepsilon_3^2$$

Avem și aci un elipsoid al deformațiunilor a cărei ecuație este:

$$\delta^2 \xi / \varepsilon_1^2 + \delta^2 \eta / \varepsilon_2^2 + \delta^2 \zeta / \varepsilon_3^2 = 1$$

Valorile lungirilor specifice maxime se determină absolut în același mod, însă coeficienții ecuației de gradul al treilea au valorile

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon_x &= \varepsilon_v \\ (20) \quad \sum \left(\frac{1}{4} \gamma_x^2 - \varepsilon_y \varepsilon_z \right) &= \eta^2 \\ \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_x \gamma_y \gamma_z - \frac{1}{4} \sum \varepsilon_x \gamma_x^2 &= k^3 \end{aligned}$$

și ecuația care ne dă valorile principale $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ este:

$$(21) \quad -\varepsilon^3 + \varepsilon_v \varepsilon^2 + \eta^2 \varepsilon + k^3 = 0$$

Cantitățile ε_v, η și k sunt de asemenea invariante.

Pentru găsirea direcțiunii axelor principale ne servim de aceleași relații ca la rezistențe.

c) Variația lunecărilor specifice γ .

Urmând aceeași cale ca la rezistențele σ , se găsesc aceleași rezultate și anume: *că lunecările specifice sunt maxime în planele bisectoare planelor principale, în cari avem:*

$$(22) \quad \gamma_3 = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad \gamma_1 = \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3); \quad \gamma_2 = \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$$

Dacă în fiecare punct din interiorul corpului, determinăm direcțiunile axelor principale și urmând același raționament ca la rezistențe, vom găsi și aici niște suprafețe de izodeformațiuni. Aceste suprafețe împart corpul în o serie de paralelipiede curbilinii după muchiile cărora nu există decât lungiri specifice.

Ecuațiile acestor suprafețe sunt absolut identice cu acelea dela rezistențe.

4. Exprimarea deformațiunilor în coordonate carteziene.

Să presupunem că deplasările unui punct după cele trei axe de coordonate sunt u, v și w .

După ecuația (3) avem evident:

$$(23) \quad \partial u / \partial x = \varepsilon_x, \quad \partial v / \partial y = \varepsilon_y \quad \text{și} \quad \partial w / \partial z = \varepsilon_z$$

Cantitatea cu care se modifică unghiul drept xOy , adică γ_z este $\gamma_z = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$, pentru că deplasările fiind mici putem confunda unghiul cu tangenta sa. Deci avem:

$$\begin{aligned} (24) \quad \gamma_x &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \gamma_y &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \\ \gamma_z &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned}$$

Putem exprima și valorile unghiurilor de rotire, ω_x , ω_y , ω_z .
Am avut $\omega = \frac{1}{2}(d\varphi_1 + d\varphi_2)$ din care deducem

$$\omega_x = \frac{1}{2}(\partial v / \partial y - \partial v / \partial z)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}(\partial u / \partial z - \partial v / \partial x)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$$

Incheiere.

Din compararea studiului celor două noțiuni, *rezistențe și deformațiuni specifice*, se constată un paralelism perfect.

Aceste două noțiuni cu totul diferite, ascultă de aceleași legi, ceea ce va avea de efect o simplificare importantă a calculelor ce vor urma.

Mai mult. In cele ce preced nu s'a făcut nicio ipoteză asupra materialului din care este făcut corpul, în care se dezvoltă rezistențe sau se deformează, deci aceste legi se aplică tuturor materialelor din cari sunt făcute corpurile.

Aplicația Nr. 49. Să presupunem că după trei axe de coordonate avem:
 $\varepsilon_x = 8$, $\varepsilon_y = 2$, $\varepsilon_z = -6$, $\gamma_x = 16$, $\gamma_y = -10$, $\gamma_z = 14$
toate multiplicare cu 10^{-5} , pentru că în genere sunt de acest ordin de mărime.

Se cer deformațiunile specifice principale; avem:

$$\varepsilon_v = 4 \quad , \quad \eta^2 = 182 \quad , \quad k^3 = -924$$

și deci ecuația

$$-\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + 182\varepsilon - 924 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\varepsilon_1 = 12,62 \quad ; \quad \varepsilon_2 = 5,27 \quad ; \quad \varepsilon_3 = -13,89$$

Valorile maxime ale lui γ vor fi:

$$\gamma_1 = \pm 19,16 \quad ; \quad \gamma_2 = \pm 26,51 \quad ; \quad \gamma_3 = \pm 7,35.$$

XII. LEGĂTURA ÎNTRE REZISTENȚE ȘI DEFORMAȚIUNI PENTRU SOLICITĂRI ÎNTR'O SINGURĂ DIRECȚIUNE.

În rezistența materialelor se studiază echilibrul corpurilor reale, cari sunt deformabile, pe când în mecanică se studiază echilibrul corpurilor rigide.

Și unele și altele trebuie să satisfacă ecuațiile din mecanică.

Corpurile deformabile trebuie să mai satisfacă și alte condiții, după cum vom vedea.

Să presupunem că avem o grindă orizontală, simplu rezemată pe două reazime de nivel (fig. 202). Să mai presupunem că este supusă la o forță F așezată la mijlocul grinzii.

Reacțiunile reazimilor vor fi $\frac{1}{2}F$. Deci

în aceste condiții grinda se găsește în echilibru. Să mai presupunem că grinda este făcută din oțel. Dacă forța F crește, dela valoarea zero până la o valoare oarecare, experiența arată că grinda se îndoaie luând o formă curbă ca în figură. Dacă forța

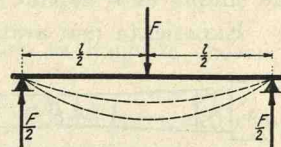


Figura 202

F continuă a crește, se observă că grinda se încovoie și mai mult. Dacă din contra, facem ca forța F să dească, se observă că grinda — în oarecare măsură — revine spre poziția inițială.

Din această simplă constatare, rezultă că între valoarea forței F și deformația grinzii există neapărat o relație oarecare. Se mai constată că, oricare ar fi valoarea forței F , reacțiunile rămân mereu egale cu $\frac{1}{2}F$.

În aceste condiții, să facem ca F să crească necontenit. Experiența arată că, la o anumită valoare a lui F , grinda se rupe și deci

echilibrul se distruge. Prin urmare, cu toate că echilibrul dat de ecuațiile din mecanică e mereu satisfăcut, el nu există, pentrucă la fiecare creștere a forței F corespunde o nouă deplasare a ei din cauza deformației grinzii, și echilibrul este distrus când forța F a trecut peste o anumită limită.

Din acest simplu fapt experimental, vom trage două concluzii și anume:

1. Pentru ca echilibru să existe trebuie ca ecuațiile din mecanică să fie neapărat satisfăcute, deci ecuațiile din mecanică sunt necesare.

2. Pentru ca echilibru să existe grinda noastră trebuie să mai satisfacă și alte ecuații. Așa dar, ecuațiile de echilibru date de mecanica corpurilor rigide, nu sunt suficiente și grinda va trebui să satisfacă și alte ecuații pe cari le vom numi *ecuațiile echilibrului elastic*.

Toată chestiunea care se pune este a stabili legătura între forța F și deformația grinzii. Așa pusă, chestiunea este mai complicată. Vom pleca dela cazuri foarte simple și vom ajunge apoi până la cele mai complicate.

A) Relația între rezistențele normale $\mathcal{R}$ și lungirile specifice ε .

Incepem cu cazul cel mai simplu posibil. Această relație, oricât de simplă ar fi ea, nu se deduce decât pe cale experimentală.

Experiența mai arată că relația între $\mathcal{R}$ și ε depinde de natura materialului.

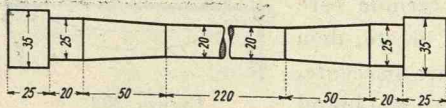


Figura 203

Din materialul care ne interesează se confecționează o epruvetă de forma celeia din fig. 203, care are o porțiune cilindrică și capetele, de ase-

menea cilindrice, racordate între ele cu două trunchiuri de con. Epruvetele normale pentru metale au porțiunea centrală cilindrică lungă de 220 mm și pe ea se înseamnă o lungime de 200 mm. Diametrul părții cilindrice centrale, la epruvetele normale, este de 2 cm. Vom nota cu l lungimea de 200 mm și Ω valoarea secțiunii.

Piesa astfel pregătită se introduce cu capetele ei între fălcile unei mașini de încercat materiale, care poate întinde piesa cu o forță variabilă F .

Dela zero, cât este F în primul moment, facem ca efortul de tensiune exercitat asupra barei să atingă o valoare $F_1 = 500$ kg de ex.

Dacă admitem că forța F_1 se distribue uniform pe secțiune, atunci avem:

$$dF/d\Omega = F_1/\Omega = \mathfrak{X}_1 = 500/\Omega.$$

Dacă în această poziție măsurăm distanța între repere, constatăm că lungimea $l = 200$ mm. a crescut cu o cantitate oarecare, având lungimea totală l_1 .

$$\text{Se știe că} \quad (l_1 - l)/l = u_1/l = \varepsilon_1$$

Să variem acum pe F dela valoarea $F_1 = 500$ kg la $F_2 = 1000$ kg. Vom avea o rezistență $\mathfrak{X}_2 = F_2/\Omega$ și vom constata că bara s'a lungit cu u_2 , căreia îi corespunde lungirea specifică $\varepsilon_2 = u_2/l$.

Dăm apoi lui F valoarea F_3 și a. m. d.

Pe o foaie de hârtie, trasăm două axe de coordonate rectangulare $O\varepsilon$ și $O\mathfrak{X}$ (fig. 204), pe care fixăm punctele $\varepsilon_1, \mathfrak{X}_1; \varepsilon_2, \mathfrak{X}_2; \varepsilon_3, \mathfrak{X}_3$; etc.

În felul acesta se capătă o curbă continuă, care reprezintă chiar legătura între rezistențele normale $\mathfrak{X}$ și lungirile specifice ε , ale epruvetei încercate.

Această curbă poartă numele de *curba caracteristică* a materialului din care este făcută epruveta încercată.

Dacă această încercare se continuă, bara se lungeste mereu, până când, la un moment dat, se rupe.

Continuând a trasa caracteristica până la ruperea barei, ea se va prezenta ca în figură, punctul D corespunzând momentului ruperii.

Legătura între rezistențele normale $\mathfrak{X}$ și lungirile specifice ε , reprezentată prin curba construită, o putem traduce analitic în forma:

$$\mathfrak{X} = f(\varepsilon)$$

Limita raportului:

$$(1) \quad d\mathfrak{X}/d\varepsilon = f'(\varepsilon) = E$$

adică valoarea tangentei trigonometrice la curba caracteristică, într'un punct oarecare al ei, se numește prin convențiune *coeficient de elasticitate* și se notează cu E . Din experiență se vede că E n'are o valoare constantă pentru același material, ci depinde de punctul de pe curbă unde s'a luat tangenta.

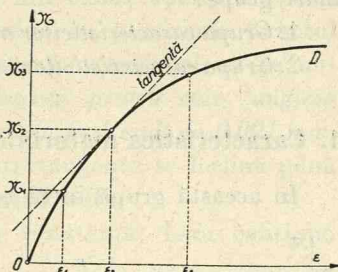


Figura 204

Dimensiunea cantității E se vede că este kg/cm^2 , deci aceeași ca a rezistențelor.

Repetând experiența cu un alt material, vom obține o curbă caracteristică mai mult sau mai puțin asemănătoare cu precedenta.

Încercând materialul la compresiune vom obține de asemenea curbe caracteristice.

Fiecare material are o curbă caracteristică a lui. Mai mult, chiar pentru materiale de aceeași natură se găsesc curbe caracteristice deosebite, aceasta depinzând de compoziția lui, de procesul de fuziune sau de tratamentul lui termic. Același oțel de ex. dă curbe caracteristice diferite, după cum este călit sau nu, ciocănit sau nu, și după cantitatea de carbon, siliciu, crom, nickel, etc. ce el conține.

Pentru lemn, evident, obținem altă curbă caracteristică decât pentru piatră, etc.

Cu toată această mare varietate, totuși le putem grupa în două mari grupe:

1. Grupa caracteristicilor materialelor cari ascultă de legea lui Hooke.
2. Grupa caracteristicilor materialelor cari nu ascultă de această lege.

1. Caracteristica materialelor cari ascultă de legea lui Hooke.

În această grupă intră toate varietățile de oțel și lemnul.

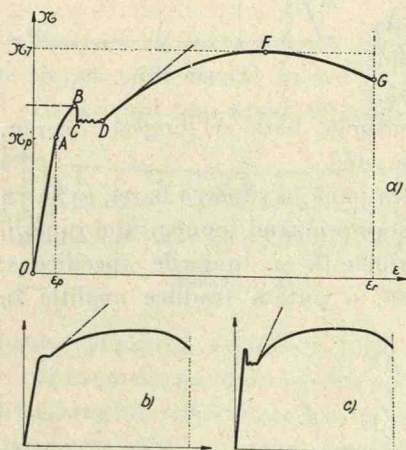


Figura 205

Cu toate că celelalte materiale nu ascultă de această lege, totuși câteodată, pentru simplificarea calculelor, se admite că și lor li se aplică.

Curba caracteristică a oțelului moale este prototipul acestor caracteristice.

Supunând la tensiune o epruvetă de oțel moale și ridicând diagrama, cu ajutorul aparatelor înregistratoare, ea se prezintă ca în fig. 205.

Se observă că până la un punct oarecare A, caracteristica se compune din o linie

dreaptă. Pentru această porțiune avem:

$$(2) \quad E = d\sigma/d\varepsilon = \sigma/\varepsilon = C^{td}$$

adică *lungirile specifice sunt proporționale cu rezistențele*. Aceasta e legea lui *Hooke*, care a descoperit-o în 1660, exprimând-o prin cuvintele: *ut tensio sic vis*.

E este numit impropriu coeficient de elasticitate. Pentru oțeluri are valori cuprinse între $2 \cdot 10^6$ și $2,2 \cdot 10^6$ kg/cm.² O valoare medie este $2,1 \cdot 10^6$ kg/cm.². Pentru lemn se ia o valoare medie de $0,1 \cdot 10^6$ kg/cm.², cu toate că sunt varietăți pentru care E nu atinge valoarea $0,08 \cdot 10^6$, pe când pentru altele trece de $0,18 \cdot 10^6$ kg/cm.².

Valoarea $\mathfrak{X}_p$ a rezistenței, până la care se menține legea lui *Hooke*, adică

$$(2) \quad \varepsilon = \mathfrak{X}/E$$

poartă numele de *limita de proporționalitate*. Dincolo de limita de proporționalitate tangenta se înclină, curba caracteristică afectând o formă ușor curbă. Din cauză că curba caracteristică nu părește brusc linia dreaptă, ci pe nesimțite și din cauza aparatelor, cari dau oarecari erori, nu se poate determina cu precizie punctul de tangență. De aceea s'a admis, în mod convențional, să se numească *limită de proporționalitate rezistența pentru care lungirea calculată și cea măsurată pe epruvetă diferă cu mai mult de 0,001 mm*.

Dincolo de limita de proporționalitate tangenta se înclină până când la un moment dat ajunge orizontală (B).

Asta înseamnă că, fără să crească rezistența, bara continuă a se deforma.

Rezistența pentru care are loc aceasta, poartă numele de *limita deformațiunilor mari*, sau *limita de scurgere* sau *limita de plasticitate*, pentru că bara se deformează fără ca forțele exterioare să crească.

Din acest punct B , tangenta sau se menține orizontală sau în majoritatea cazurilor devine negativă și chiar paralelă cu axa $O\mathfrak{X}$, ordonatele descrescând brusc până într'un punct C , de unde urmează o porțiune nesigură, în care tangenta schimbă alternativ de sens, până într'un punct D , unde capătă o valoare oarecare.

Rezistența care corespunde punctului B poartă numele de *limita superioară de scurgere a materialului*, iar aceea ce corespunde punctului C *limita inferioară*. Porțiunea de caracteristică BCD ne arată că bara se deformează chiar sub rezistențe mai mici, decât cele ce corespund punctului B .

Din punctul D unde tangenta are o valoare oarecare, ea scade mereu, până în punctul F , unde ajunge iarăși orizontală. De aci înainte ia valori negative, până în punctul G , unde bara se rupe.

Pe porțiunea DFG se reproduce același fenomen ca pe porțiunea $OABC$, cu singura deosebire că nu există o porțiune de linie dreaptă.

Rezistența care corespunde punctului F poartă numele de *rezistență totală* și se înseamnă cu $\mathfrak{R}_t$, iar aceea ce corespunde punctului G , *rezistența de rupere*, $\mathfrak{R}_r$.

Se vede că bara se rupe la o rezistență mai mică decât rezistența maximă ce o poate suporta.

Lungirea barei, în momentul ruperii, poartă numele de *lungire la rupură* și se notează cu ε_r .

La această caracteristică deosebim două regiuni distincte: prima care este o linie dreaptă și care exprimă legea lui *Hooke* și singura care ne interesează din punct de vedere practic și restul curbei care nu are același interes pentru noi ca prima parte.

Dacă lungimea între repere după ce bara s'a rupt — juxtapunând cât mai bine cele două capete ale barei rupte — este l_r , atunci diferența $(l_r - l)/l$ exprimată în procente ne dă pe ε_r .

Contrațiunea transversală. Experiența mai arată că, pe măsură ce bara se lungeste, secțiunea ei transversală se micșorează și invers, dacă bara ar fi supusă la compresiune, deci s'ar scurta, secțiunea transversală se mărește. Tot experiența arată că, în prima aproximație, contrațiunea transversală este o fracțiune din lungirea specifică în sensul întinderii, deci este de forma — $\mu \varepsilon$. Coeficientul μ poartă numele de constanta lui *Poisson* și în primă aproximație este o constantă cuprinsă între 0,25 și 0,30. În calculele practice se ia 0,3 pentru oțeluri și 0,25 pentru celelalte materiale.

Dacă ținem seamă de această contrație și dacă notăm cu Ω_1 secțiunea contractată, atunci rezistența reală este F/Ω_1 .

Din cauza contrației avem:

$$\Omega_1 = (1 - \mu \varepsilon)^2 \Omega \simeq (1 - 2 \mu \varepsilon) \Omega$$

pentru că ε este foarte mic față de 1.

În acest caz

$$\mathfrak{R} = F/(1 - 2 \mu \varepsilon) \Omega \simeq F (1 + 2 \mu \varepsilon)/\Omega$$

deci mai mare ca F/Ω .

Cu toate acestea, în practică, la construcția curbei caracteristice, nu se ține seamă de acest spor de rezistență, rezistențele socotindu-se totdeauna raportate la secțiunea inițială.

Mai mult. Experiența mai arată că, îndată ce trecem de limita deformațiunilor mari, contrațiunea care era până aci uniform

distribuită pe toată lungimea barei, se concentrează în o anumită regiune, unde bara se gâtuie, și că în acea regiune lungirile sunt cu mult mai mari ca în restul barei.

Asta înseamnă că, curba caracteristică construită în felul arătat mai sus nu este caracteristica reală a materialului, ci numai o curbă convențională, pentru că în secțiunea în care se face ruperea, în genere în secțiunea gâtuită, nici rezistența și nici lungirile specifice nu sunt cele ce figurează în curba caracteristică.

Cu toate acestea, pentru că în construcțiile curente $\mathcal{X}$ rămâne totdeauna sub limita deformațiunilor mari pentru cari caracteristica este aproape de realitate, se păstrează la încercări normele arătate aci.

Totuși, pentru ca rezultatele încercărilor să fie comparabile și pentru celelalte elemente, s'a convenit ca epruvetele de încercări să aibă anumite dimensiuni.

Țările mai înaintate ca noi au fixat norme precise, în mod oficial, după cari se confecționează epruvetele așa ca rezultatele să fie comparabile între ele.

Dacă Ω_r este secțiunea barei în punctul unde s'a făcut ruperea și dacă Ω este secțiunea inițială, atunci

$$(\Omega - \Omega_r)/\Omega = \psi$$

exprimat în procente, ne dă coeficientul de contracție.

Cu cât lungirile specifice și contracția transversală sunt mai mari cu atât materialul este mai ductil și invers.

Până acum am stabilit pe bază de experiențe șase coeficienți cari vor da caracteristica unui material oarecare și anume: E coeficientul de elasticitate, $\mathcal{X}_p$ limita de proporționalitate, $\mathcal{X}_d$ limita de deformațiunilor mari, $\mathcal{X}_t$ rezistența totală, ϵ_r lungirea la rupere și ψ contracția totală la rupere.

2. Lucrul mecanic necesar ruperii unei bare.

Să presupunem că la un moment dat în bară avem o rezistență $\mathcal{X}$. Din curba caracteristică se vede că la această rezistență corespunde o lungire specifică ϵ . Să presupunem că $\mathcal{X}$ crește cu cantitatea $d\mathcal{X}$. Prin urmare, valoarea forței în acest interval a fost la început $\mathcal{X}\Omega$, iar la sfârșit $(\mathcal{X} + d\mathcal{X})\Omega$ și deci valoarea medie este $\frac{1}{2}(\mathcal{X} + d\mathcal{X})\Omega$.

Dacă se neglijează $d\mathcal{X}$ față de valoarea principală $2\mathcal{X}$, căpătăm $\mathcal{X}\Omega$.

Să vedem drumul parcurs de ea.

Să considerăm două secțiuni infinit vecine la distanța dx . Când rezistența trece dela $\mathcal{K}$ la $\mathcal{K} + d\mathcal{K}$, ε trece dela ε la $\varepsilon + d\varepsilon$ și deci elementul dx se lungeste cu cantitatea $dx.d\varepsilon$.

Lucrul mecanic produs va fi:

$$dL = \mathcal{K} \Omega . dx . d\varepsilon = \mathcal{K} d\varepsilon . dV$$

în care am notat $\Omega dx = dV$, adică volumul elementului de bară.

Lucrul mecanic acumulat de întreaga bară va fi:

$$L = \int \mathcal{K} . d\varepsilon . dV$$

Am văzut că atât $\mathcal{K}$ cât și ε dincolo de limita deformațiunilor mari nu se mai distribuie uniform pe lungimea barei, și deci suma de mai sus trebuie făcută ținând seamă de aceste variațiuni.

Dacă însă rămânem în cadrul convențiunilor admise pentru curba caracteristică și anume rezistențele le raportăm totdeauna la secțiunea inițială și lungirea specifică ε o deducem împărțind lungirea totală a barei la lungimea inițială a ei, atunci $\mathcal{K}$ și ε sunt aceiași pentru toate elementele de volum și deci avem:

$$(3) \quad L = V \int \mathcal{K} d\varepsilon$$

în care V este volumul barei.

Formula aceasta deci, este exactă până la limita deformațiunilor mari, până unde $\mathcal{K}$ și ε se distribuie uniform pe toată bara, și convențională pentru restul curbei caracteristice.

Se observă însă că, $\int \mathcal{K} d\varepsilon$ este suprafața curbei caracteristice cuprinsă între ea, axa $O\varepsilon$ și ordonata ce corespunde lui $\mathcal{K}$ și ε .

Așa dar, *suprafața curbei caracteristice, în cadrul convențiunilor de mai sus, ne reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a obține în elementul de volum $V = 1$ rezistența $\mathcal{K}$.*

Lucrul mecanic necesar ruperii barei de un volum V , după formula (3), este dat de suprafața caracteristice cuprinsă între axa $O\varepsilon$ și ordonata ce corespunde rezistenței la rupere.

Această suprafață se exprimă în kgcm/cm^3 și poartă numele de *coeficient de rezistență al materialului sau lucru mecanic specific pentru a rupe un element de volum $V = 1$.*

Fiecărui material îi corespunde un coeficient de rezistență care este egal cu suprafața caracteristice, care se află cu ajutorul planimetrelor sau metodelor grafice.

În practică, această suprafață se înlocuiește cu suprafața dreptunghiului circumscris curbei caracteristice, laturile lui fiind para-

lele cu axele de coordonate, multiplicată cu un coeficient $\alpha < 1$ (fig. 206).

În acest caz, suprafața dreptunghiului este $\mathcal{X}_t \varepsilon_r$, și deci:

$$L = V \cdot \alpha \mathcal{X}_t \varepsilon_r$$

α se numește coeficient de reducere, iar produsul $\mathcal{X}_t \varepsilon_r$ se numește *coeficient de calitate*.

În privința lui α , el variază de la material la material, însă, pentru aceeași categorie de materiale, valoarea lui este aproape constantă.

În acest caz, pentru materiale din aceeași categorie, pentru a le compara din punctul de vedere al coeficientului de rezistență, e suficient să comparăm numai coeficienții lor de calitate, ceea ce este mult mai ușor.

Revenind la expresia lucrului mecanic, dacă presupunem că rămânem sub limita de proporționalitate constatăm că suprafața este un triunghi și deci:

$$L = \frac{1}{2} V \mathcal{X} \varepsilon$$

și dacă ținem seama de legea lui Hooke, avem:

$$(4) \quad L = \frac{1}{2} V \mathcal{X} \varepsilon = \frac{1}{2} V \mathcal{X}^2 / E = \frac{1}{2} V E \varepsilon^2$$

Deci lucrul mecanic se poate exprima în funcție de forța exterioară F , în funcție de lungirea specifică ε , sau în funcție și de una și de alta.

Prin urmare, la ceilalți coeficienți cari caracterizează un material, se mai adaugă și *coeficientul de rezistență*, care se poate înlocui cu *coeficientul de calitate*.

La aceste corpuri, dacă sunt supuse la compresiune, se obține o curbă caracteristică identică.

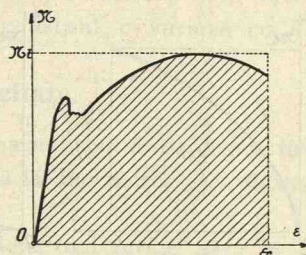


Figura 206

3. Caracteristica materialelor cari nu ascultă de legea Hooke.

În această categorie intră: *rocile de natură eruptivă și sedimentară: (granitul, porfirul, calcarul, gresia, etc.), mortarele (de var gras, de var hidraulic sau ciment), betoanele de ciment (sau puzolane), apoi fonta, aliajele cuprului și aluminiului, în fine cauciucurile, curelele, funiile de cânepă, etc.*

Pentru unele din aceste materiale, se poate face încă uz de legea lui Hooke, întru cât în limitele practice în care se întrebuințează, nu se depărtează prea mult de ea.

În schimb altele, între cari în primul rând *pietrele, mortarele și fontele*, nu permit de loc a aplica această lege.

Ca și pentru materialele cari ascultă de legea lui *Hooke*, pentru a găsi legătura între rezistențe și deformațiuni, vom pregăti în mod identic epruvete, cari se vor supune la tensiune. Pentru pietre și betoane, vom pregăti cuburi cari le vom supune la compresiune.

Notând rezultatele pe o diagramă, se construiește curba caracteristică, al cărei aspect este ca cel din fig. 207.

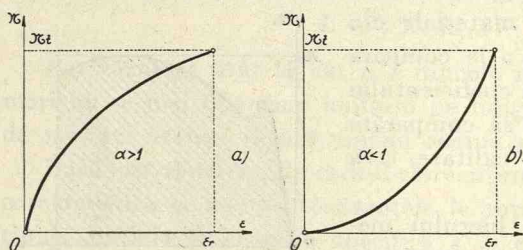


Figura 207

Această curbă se înclină mereu și spre deosebire de caracteristica celeilalte grupe, nu prezintă nicio particularitate până în momentul ruperii.

Pentru calificarea materialului curba construită este suficientă,

însă pentru calcul ne trebuie o expresie analitică a ei.

Diferiți experimenatori au propus diverse formule.

Lumea tehnică s'a oprit la formulele propuse de *Bülfinger* și *Hodgkinson*, verificate apoi de *Bach* și *Schülle*.

Iată această formulă:

$$\varepsilon = X^a / E_0$$

care mai poartă și numele de *legea potențială*.

Cantitățile a și E_0 se determină prin experiență și diferă pentru același corp dacă este supus la *compresiune sau tensiune*.

În ceea ce privește pe a el este mai mare ca 1, aproape pentru toate materialele, și este mai mic decât 1 pentru curele, funii de cânepă, bumbac, etc. Alura curbelor este ca în fig. 207.

După cum am spus aceste curbe nu prezintă nicio particularitate, n'au nici limită de proporționalitate și nici limită a deformațiunilor mari.

La aceste materiale $X_t = X_r$.

Și aci, ca la materialele cari ascultă de legea lui *Hooke*, *lucrul mecanic specific sau coeficientul de rezistență este egal cu suprafața curbei caracteristice*.

Trebuie să mai observăm aci că ecuația deși dă rezultate bune în regiunea de solicitări obișnuite, totuși în origine dă rezultate

inacceptabile. În adevăr, valoarea coeficientului de elasticitate este:

$$E = d\mathcal{K}/d\varepsilon = E_0/\alpha\mathcal{K}^{\alpha-1}$$

Pentru corpurile pentru cari $\alpha > 1$, pentru $\mathcal{K} = 0$, căpătăm $E = \infty$, după cum pentru corpurile pentru cari $\alpha < 1$, căpătăm $E = 0$, pentru $\mathcal{K} = 0$.

Ambele rezultate sunt inacceptabile, pentru că nu există nici corpuri rigide și nici corpuri cari să se deformeze fără vre-o solicitare.

În privința contractării transversale se dau foarte puține date, și coeficientul μ al lui Poisson nu este constant, ci variază cu $\mathcal{K}$.

4. Limita de elasticitate.

Să luăm o epruvetă dintr'un corp care ascultă de legea lui *Hooke*; dacă am supune această epruvetă la încercare, am obține caracteristica din fig. 208.

Încercarea însă o facem altfel. Întindem mai întâiu bara la o forță de exemplu de 500 kg și marcăm pe diagramă punctul ce corespunde rezistenței $\mathcal{K}$ și alungirii specifice ε , pentru acest caz.

După aceea facem forța $F = 0$, adică dăm drumul barei. Dacă măsurăm distanța între repere, constatăm că a rămas aceeași, prin urmare bara s'a comportat ca o bară perfect elastică.

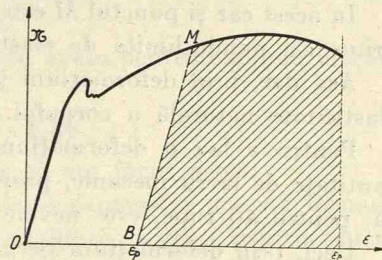


Figura 203

Întindem bara acum cu 1000 kg, marcăm punctul pe diagramă și dăm iarăși drumul barei. Constatăm și de astă dată, că bara a revenit la poziția inițială. Procedând mereu în același fel și făcând ca forța F să crească, constatăm că dela o anumită rezistență bara nu mai revine la poziția inițială, ci rămâne cu o deformare oarecare, pe care o numim *deformație permanentă*, spre deosebire de cealaltă deformațiune, care dispăre odată cu suprimarea rezistenței și pe care o numim *deformațiune elastică*.

Rezistența maximă, pentru care corpul are numai deformațiuni elastice, poartă numele de *limita de elasticitate naturală*.

Măsurători de precizie arată că în realitate nu există corpuri perfect elastice, adică după ce au avut o rezistență, oricât de mică, să revie apoi în starea absolut identică stării inițiale, așa că definiția de mai sus nu este exactă decât în primă aproximație.

În practică *limita de elasticitate naturală este rezistența pentru care deformația permanentă ajunge la 0,03%, iar limita deformațiunilor mari este rezistența, pentru care lungirea este 0,3%.*

Să continuăm experiența și să presupunem că am întins bara până am ajuns pe curba caracteristică în punctul M .

Dacă suprimăm forța, experiența arată, că bara se scurtează, iar punctele de pe caracteristică se mișcă pe dreapta MB , paralelă cu porțiunea dreaptă a caracteristicii corpului, rămânând cu deformația permanentă $OB = \varepsilon_p$.

Dacă se reîncepe experiența, se constată că punctele de pe caracteristică se mișcă pe dreapta BM .

Dacă nu trecem de punctul M și dăm drumul barei, punctele de pe caracteristică se mișcă iarăși pe dreapta MB , deci avem numai deformațiuni elastice.

Deci, *un corp care a suferit o deformațiune permanentă, rămâne elastic pentru toate rezistențele inferioare celeia care a produs deformația permanentă.*

În acest caz și punctul M este o limită de elasticitate și de aceea prima s'a numit limita de elasticitate naturală.

Așa dar, prin deformațiuni permanente se modifică limita de elasticitate naturală a corpului.

Pentru a lua o deformațiune permanentă, corpul consumă o cantitate de lucru mecanic, proporțională cu suprafața OMB , așa că, pentru a-l rupe, este nevoie numai de suprafața hașurată.

Deci, prin deformațiuni permanente, corpul își micșorează coeficientul de rezistență sau coeficientul de calitate, și nu mai are aceeași capacitate de a acumula lucru mecanic.

Prin o deformație permanentă, se schimbă oarecum structura interioară, pentru că atâta timp cât bara este întinsă cu rezistențe sub limita de elasticitate, ea absoarbe căldură, pe când dincolo de limita de elasticitate — oricare ar fi aceasta — degajă căldură.

Corpurile cari nu ascultă de legea lui *Hooke* au de asemenea o limită de elasticitate.

B) Relația între rezistențele tangențiale τ și lunecările specifice γ .

Cum s'au stabilit relațiuni între $\mathfrak{X}$ și ε , tot așa se stabilesc și relațiuni între τ și γ . Lucrul este ceva mai greu, pentru că nu se pot face experiențe la forfecare propriu zisă.

Se va arăta ulterior că avem rezistențe tangențiale pure, neînsoțite de alte rezistențe în aceeași secțiune, numai în cazul când avem o bară de secțiune circulară supusă la un moment de torziune. La capitolul respectiv se va arăta cum calculăm valorile rezistențelor τ și valorile lui γ .

Dacă se supune o bară la torziune și dacă se calculează τ și γ după datele experienței și dacă se construiește curba caracteristică, atunci pentru corpurile cari ascultă de legea lui *Hooke*, se găsește o curbă caracteristică absolut analoagă.

Și aci se definește coeficientul de elasticitate transversală G , ca limită a raportului:

$$G = d\tau/d\gamma$$

Și aci există o limită de proporționalitate până la care avem:

$$G = d\tau/d\gamma = \tau/\gamma = C^{\text{ta}}$$

și deci:

$$\gamma = \tau/G$$

Și aci există o limită a deformațiunilor mari, lunecare totală, lunecare specifică la ruptură, etc.

Bazați pe aceleași considerațiuni, avem pentru expresia lucrului mecanic acumulat de volumul V :

$$L = V \int \tau d\gamma$$

și în cadrul acelorași convențiuni ce am făcut acolo.

În mod identic ca acolo, se poate demonstra această formulă.

Până la limita de proporționalitate avem pentru lucrul mecanic specific sau pentru coeficientul de rezistență valorile:

$$L = \frac{1}{2} V \tau \gamma = \frac{1}{2} V \tau^2/G = \frac{1}{2} V G \gamma^2$$

Corpurile din a doua grupă, acelea cari nu ascultă de legea lui *Hooke*, prezintă altă legătură între τ și γ , puțin studiată până acum, pentru că nu se întâlnește curent în practică și deci nu prezintă interes pentru noi.

C) Ruperea materialelor prin oboseală.

Până acum ne-am ocupat numai de cazul când bara supusă la o forță, a fost întinsă până când s'a rupt.

La stabilirea limitei de elasticitate ne-am ocupat cu cazul când bara e supusă de mai multe ori la încercare și am văzut ce rezultate ne-a dat experiența.

Să presupunem că dintr'un același material luăm mai multe epruvete și că prima, supunând-o la tensiune, o rupem la o rezistență $\mathcal{K}_r$.

A doua eprubetă o supunem la rezistență $\mathcal{K}_1 < \mathcal{K}_r$. Bara evident nu se va rupe. O încercăm a doua oară până la $\mathcal{K}_1$ și vedem iarăși că nu se rupe. Dacă repetăm experiența de un număr foarte mare de ori, constatăm că bara se rupe, cu toate că nu s'a depășit rezistența $\mathcal{K}_1$. Așa dar, *efectul repetării solicitărilor face ca bara să se rupă sub o rezistență $\mathcal{K}_1 < \mathcal{K}_r$* .

Încercăm acum a treia eprubetă la o rezistență $\mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_1$. Să presupunem că și aceasta se rupe. Luăm rezistențe din ce în ce mai mici, până când ajungem la o rezistență $\mathcal{K}_0$, la care supunând bara de milioane de ori, constatăm că nu se mai rupe.

Această rezistență $\mathcal{K}_0$ poartă numele de *rezistență la rupere a barei sub acțiunea rezistențelor repetate dela 0 la $\mathcal{K}_0$* , pentru că de îndată ce este depășită, bara se rupe sub acțiunea ei repetată.

Să presupunem că repetăm experiențele, însă în loc ca rezistențele să varieze dela 0 la $\mathcal{K}_0$, variază dela $-\mathcal{K}_1'$ la $+\mathcal{K}_1'$, $\mathcal{K}_1' < \mathcal{K}_0$. Se observă și acum, că după un număr oarecare de încercări bara se rupe. Dacă luăm $\mathcal{K}_2' < \mathcal{K}_1'$ constatăm că bara iarăși se rupe. Continuând constatăm că ajungem la o rezistență $\mathcal{K}_a$, la care bara fiind supusă de milioane de ori nu se rupe. Această rezistență poartă numele de *rezistența la rupere sub acțiunea rezistențelor alternative*.

Primul care a relevat această chestiune a fost Wöhler, inginer la căile ferate prusiene, care a observat o rupere prematură a osiilor de vagoane.

În adevăr, osia de vagon este supusă la o încovoiere, partea de sus fiind întinsă, iar cea de jos comprimată.

Printr'o învârtire cu 180° , sensul rezistențelor se schimbă, luând aceleași valori însă de sens contrar.

După un număr oarecare de învârtituri, rezistențele într'un punct oarecare al osiei, schimbă tot de atâtea ori de semn și prin urmare osia, din punctul de vedere al rezistenței, nu se mai comportă ca o eprubetă supusă o singură dată la rupere.

Experiențele arată că $\mathcal{K}_a < \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_r$.

Explicația fenomenului este următoarea:

S'a arătat la limita de elasticitate, că dacă un corp se întinde până la rezistența $\mathcal{K}$, ce corespunde punctului A de pe curba caracteristică, atunci el este elastic pentru această rezistență și cele inferioare ei.

Măsurătorile de precizie au arătat, că aceasta nu este adevărat și că atunci când întindem bara, parcurgem curba BDA , iar când îi dăm drumul curba ACB , închizând între ele o suprafață $BDACB$, care reprezintă lucrul mecanic neredat de bară (fig. 209). Așa dar, bara nu este perfect elastică.

Să considerăm fig. 210. Să presupunem că am întins bara până la rezistența $\mathcal{R}$ corespunzătoare punctului B .

Dacă dăm drumul barei ajungem în punctul C , bara rămânând cu o deformare permanentă $OC = \varepsilon$. Pentru a anula această deformare, comprimăm bara la o rezistență ce corespunde punctului D . Să presupunem că continuăm comprimarea până ajungem în punctul F . Dacă dăm drumul barei, adică facem $\mathcal{R} = 0$, ajungem în G , bara rămânând cu o deformare permanentă $—\varepsilon$. Dacă o întindem din nou așa ca să ajungem în H , de unde făcând pe $\mathcal{R} = 0$, să ajungem iarăși în C .

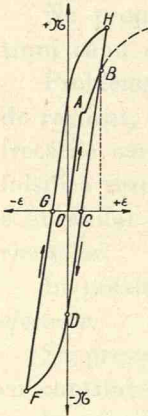


Figura 210

Observăm că deși am ajuns în același punct, adică am adus bara într-o poziție anterioară, am consumat un lucru mecanic. Curba aceasta este analoagă curbei hysteresis dela studiul magnetismului și poartă și aci același nume. Să notăm cu L_h suprafața acestei curbe, atât în primul caz cât și în al doilea și fie L_r suprafața curbei caracteristice ce corespunde rezistenței $\mathcal{R}_r$, adică atunci când bara este ruptă dintr'odată.

Prin experiențe, d-l *Ljungberg* a stabilit că numărul încercărilor, după cari se rupe o bară, este foarte aproximativ:

$$n = L_r / L_h$$

ceea ce înseamnă că oricare ar fi felul în care este solicitată bara, *lucrul mecanic specific pentru a o rupe este constant și egal cu acela ce corespunde curbei caracteristice*, adică lucrului mecanic necesar pentru a rupe bara printr'o singură încercare.

În experiențele citate n este de ordinul 10^6 . Deși s'a trecut dincolo de limita deformațiunilor mari, L_h este foarte mic față de L_r .

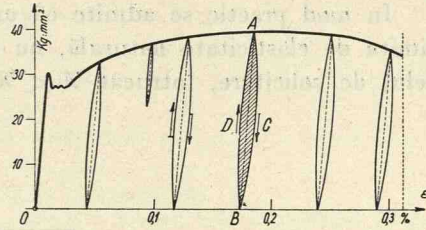


Figura 209

Se înțelege că L_h este și mai mic în cazul când rămânem cu rezistențele sub limita de elasticitate naturală, și deci n este exagerat de mare, dar totuși are o valoare oarecare.

În mod practic se admite că un corp, supus la rezistențe sub limita de elasticitate naturală, nu se rupe niciodată oricare ar fi felul de solicitare, întrucât $\mathcal{K} < \mathcal{K}_a < \mathcal{K}_o < \mathcal{K}_1$.

XIII. LEGĂTURA ÎNTRE REZISTENȚE ȘI DEFORMAȚIUNI PENTRU SOLICITĂRI ÎN MAI MULTE SENSURI.

Până acum am studiat numai relațiunea între rezistențe și deformațiuni pentru solicitări simple, într'o singură direcție.

Ne propunem să studiem relația între rezistențe și deformațiuni când corpul este solicitat în mai multe direcțiuni.

Problema este evident mai complicată și experimental este greu de realizat, întru cât în experiențele ce se pot face nu se pot evita frecările cari se produc între piesa de încercat și mașină și cari falsifică rezultatele. Singura cale care rămâne deschisă, este aceea a studiului analitic și compararea rezultatelor cu rezultatul experiențelor.

În prealabil vom stabili următoarea leamnă, zisă a *suprapunerii efectelor*.

Să presupunem că o bară, sub acțiunea forței F_1 , se lungeste cu cantitatea $u_1 = \varepsilon_1 l$.

Lungimea ei finală va fi $l(1 + \varepsilon_1)$.

Să presupunem că acum îi aplicăm forța F_2 , care va produce lungirea u_2 , care este egală cu $l(1 + \varepsilon) \varepsilon_2$, iar lungimea finală va fi $l(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$. Dacă aplicăm n forțe, vom avea, lungimea finală:

$$l(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \dots (1 + \varepsilon_n) = l[1 + \sum \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i \varepsilon_h + \sum \varepsilon_i \varepsilon_h \varepsilon_k + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n]$$

Ultimii termeni din paranteză sunt mici față de primii și deci lungimea finală este $l(1 + \sum \varepsilon_i)$ sau:

$$(1) \quad \varepsilon = \sum \varepsilon_i$$

Așa dar, dacă mai multe forțe $F_1, F_2 \dots F_n$, aplicate unei bare, produc lungirile specifice $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, atunci lungirea specifică a

barei, când aplicăm rezultanta lor $R = \Sigma F$, este ε și egală cu suma lungirilor specifice, produse de fiecare forță în parte.

Din cele de mai sus se vede că această lege este aproximativă și nu este valabilă decât pentru cazul deformațiunilor mici când putem neglija termenii $\Sigma \varepsilon_i \varepsilon_h \varepsilon_k \dots$

1. Ecuațiile lui Poisson.

a) Rezistențe și deformațiuni în spațiu.

Să presupunem că un element de volum paralelipipedic este supus pe fețele sale la rezistențele principale $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$.

În sensul direcțiunii 1, se va produce o lungire specifică $\mathfrak{X}_1/E$ însă, din cauza rezistențelor de pe celelalte fețe, se va produce o contracțiune egală cu $-\mu (\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3)/E$. Așa dar, după direcțiunea 1 vom avea:

$$(2) \quad E \varepsilon_1 = \mathfrak{X}_1 - \mu (\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3)$$

În mod cu totul analog, avem:

$$(2) \quad E \varepsilon_2 = \mathfrak{X}_2 - \mu (\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_1)$$

$$E \varepsilon_3 = \mathfrak{X}_3 - \mu (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2)$$

S'a arătat că $\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = p$ este un invariant și deci ecuațiile (2) le putem pune sub forma:

$$(3) \quad E \varepsilon_1 = (1 + \mu) \mathfrak{X}_1 - \mu p$$

S'a arătat de asemenea că $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_v$ este un invariant. Dacă adunăm ecuațiile (3) avem:

$$(4) \quad E \varepsilon_v = (1 - 2\mu) p$$

valabilă pentru orice alte axe, normale între ele, fie că ar fi axe principale sau nu.

Dacă scoatem pe p din (4) și-l înlocuim în (3), avem trei ecuații de forma:

$$(5) \quad \mathfrak{X}_1 = E [\varepsilon_1 + \varepsilon_v \mu / (1 - 2\mu)] / (1 + \mu)$$

Relațiile (2) sau (3), ne dau lungirile specifice în funcțiune de rezistențele principale, iar ecuația (5) exprimă rezistențele principale în funcțiune de lungirile principale.

Să scădem ecuațiile (5) una din alta, avem:

$$\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 = E (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (1 + \mu)$$

Însă

$$\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 = 2 \mathfrak{G}_3, \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_3, \quad \mathfrak{G}_3 = G\gamma_3$$

cari introduse în ecuația precedentă, ne dau:

$$(6) \quad G = E/2(1 + \mu)$$

Așa dar, ecuațiile (5) implică o anumită legătură între coeficienții E , G și μ , de asemenea invariantă.

Ținând seamă de ecuația (6) putem scri ecuațiile (5) sub forma:

$$(5) \quad \mathfrak{K}_1 = 2G[\varepsilon_1 + \varepsilon_0 \mu / (1 - 2\mu)]$$

Să vedem ce formă iau aceste ecuații, pentru alte direcțiuni decât cele principale.

Ecuațiile (4) și (6) păstrează evident aceleași forme.

Ecuațiile rezistenței și lungirii specifice după o direcțiune oarecare sunt:

$$\mathfrak{K} = a^2 \mathfrak{K}_1 + b^2 \mathfrak{K}_2 + c^2 \mathfrak{K}_3$$

$$\varepsilon = a^2 \varepsilon_1 + b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_3$$

Dacă ecuațiile (5) le multiplicăm respectiv cu a^2 , b^2 și c^2 și le adunăm căpătăm:

$$(5) \quad \mathfrak{K} = 2G[\varepsilon + \varepsilon_0 \mu / (1 - 2\mu)]$$

Deci și pentru o direcțiune oarecare, ecuațiile lui *Poisson* păstrează aceeași formă.

Pentru o direcțiune oarecare $\bar{\xi}$ vom avea:

$$(5) \quad \mathfrak{K}_x = 2G[\varepsilon_x + \varepsilon_0 \mu / (1 - 2\mu)]$$

Să considerăm trei axe rectangulare după cari avem $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z$ și $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_z, \dots$ și să vedem dacă ecuațiile lui *Poisson* păstrează aceeași formă.

Din ecuațiile (2), (3) și (8) dela studiul rezistențelor și (8), (9) și (10) dela deformațiuni, avem:

$$\mathfrak{K} = \Sigma a^2 \mathfrak{K}_x + 2 \Sigma bc \mathfrak{G}_x$$

$$\varepsilon = \Sigma a^2 \varepsilon_x + \Sigma bc \gamma_x$$

Dacă fiecare din ecuațiile (5) le multiplicăm cu a^2 , b^2 , c^2 și le adunăm și ținem seama și de ultimile două ecuații, căpătăm:

$$\mathfrak{K} - 2 \Sigma bc \mathfrak{G}_x = 2G[\varepsilon + \varepsilon_0 \mu / (1 - 2\mu)] - 2G \Sigma bc \gamma_x$$

Se vede că ele păstrează aceeași formă dacă avem

$$(6) \quad \mathfrak{G}_x = G\gamma_x, \quad \mathfrak{G}_y = G\gamma_y, \quad \mathfrak{G}_z = G\gamma_z$$

Din cele de mai sus rezultă că am admis pentru ecuațiile lui *Poisson* următoarele ipoteze:

1. Am rămas sub limita de proporționalitate;
2. E , G și μ sunt constanți după orice direcțiune.

Corpurile cari îndeplinesc aceste condițiuni poartă numele de *corpuri izotrope*.

O condiție a isotropiei este și relația (6) de legătură între E , G și μ .

b) Rezistențe și deformațiuni în plan.

Să presupunem că în loc de un element de volum sollicitat în spațiu, am avea același element de volum supus la rezistențele $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ cuprinse într'un plan.

Vom repeta aci întocmai raționamentul de mai sus și vom căpăta aceleași formule însă cu alți coeficienți.

Ecuatiile (2) se reduc la:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_1 &= \mathfrak{X}_1 - \mu \mathfrak{X}_2 \\ E \varepsilon_2 &= \mathfrak{X}_2 - \mu \mathfrak{X}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Dacă se notează și aci invarianții:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 &= p \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \varepsilon_s \end{aligned}$$

atunci avem:

$$E \varepsilon_1 = (1 + \mu) \mathfrak{X}_1 - \mu p \quad (3)$$

$$E \varepsilon_s = (1 - \mu) p \quad (4)$$

Și aci deducem:

$$\mathfrak{X}_1 = E (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_s) / (1 - \mu^2) = 2 G [\varepsilon_1 + \varepsilon_s \mu / (1 - \mu)] \quad (5)$$

iar după o altă direcție oarecare avem:

$$\mathfrak{X}_x = E (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) / (1 - \mu^2) \quad (5)$$

Am putea deduce și aci pe aceeași cale relația (6).

Observație. Am avut mai sus invarianții ε_v și ε_s . Să vedem care este semnificarea lor fizică.

Să presupunem că avem un element de volum paralelipedic, ale cărui laturi, egale cu unitatea, se lungesc cu lungirile specifice ε_1 , ε_2 , ε_3 . Volumul după deformație va fi

$$(1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_3) = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Dacă se neglijează termenii $\Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$, se vede că:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

este dilatația elementului de volum. Tot așa, ε_s este dilatația elementului de suprafață.

2. Rezistențe reduse.

Dacă avem o bară supusă la tensiune numai într'un sens, legătura între deformațiuni și rezistențe este dată de relația $E \varepsilon = \mathfrak{K}$, bine înțeles dacă rămânem până la limita de proporționalitate.

Dacă corpul este supus la rezistențe în mai multe sensuri, atunci această legătură este dată de ecuațiile lui *Poisson* cari evident diferă de precedentea.

Rezistența care ar produce la o bară supusă numai la tensiune (sau compresiune) aceeași lungire specifică, ca la un corp sollicitat în mai multe sensuri, poartă numele de rezistență redusă.

Cu alte cuvinte, dacă la un corp sollicitat în mai multe sensuri avem după o direcțiune oarecare o lungire specifică ε_1 , dată de ecuațiile lui *Poisson*, atunci rezistența redusă $\mathfrak{K}_{1\text{ red}}$, este rezistența care, la o bară supusă numai la tensiune sau numai la compresiune, ar produce aceeași lungire specifică. Deci

$$\mathfrak{K}_{1\text{ red}} = E \varepsilon_1, \quad \mathfrak{K}_{2\text{ red}} = E \varepsilon_2, \quad \mathfrak{K}_{3\text{ red}} = E \varepsilon_3.$$

Punând acestea în ecuațiile (2) avem:

$$(7) \quad \mathfrak{K}_{1\text{ red}} = \mathfrak{K}_1 - \mu(\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3), \quad \mathfrak{K}_{2\text{ red}} = \mathfrak{K}_2 - \mu(\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}_1) \\ \mathfrak{K}_{3\text{ red}} = \mathfrak{K}_3 - \mu(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2).$$

În cazul rezistențelor în spațiu nu se poate da o expresie a lor în funcție de $\mathfrak{K}_x \dots \mathfrak{K}_y \dots$ pentrucă $\mathfrak{K}_1 \dots$ rezultă din rezolvarea unei ecuații de gradul al treilea.

În plan chestiunea este mai simplă, pentrucă avem de-a-face cu o ecuație de gradul al doilea.

Avem:

$$\mathfrak{K}_{1\text{ red}} = \mathfrak{K}_1 - \mu\mathfrak{K}_2, \quad \mathfrak{K}_{2\text{ red}} = \mathfrak{K}_2 - \mu\mathfrak{K}_1$$

Am avut însă:

$$\mathfrak{K}_{1,2} = \frac{1}{2} (\mathfrak{K}_x + \mathfrak{K}_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}_y)^2 + 4\mathfrak{K}_z^2}$$

Dacă se pun aceste valori în expresia rezistențelor reduse de mai sus, avem:

$$(8) \quad \mathfrak{K}_{\text{red}} = \frac{1}{2} (\mathfrak{K}_x + \mathfrak{K}_y) (1 - \mu) \pm \frac{1}{2} (1 + \mu) \sqrt{(\mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}_y)^2 + 4\mathfrak{K}_z^2}$$

Pentru $\mu = 0,25$ avem:

$$N_{\text{red}} = 0,375 (\mathfrak{K}_x + \mathfrak{K}_y) \pm 0,625 \sqrt{(\mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}_y)^2 + 4\mathfrak{K}_z^2}$$

iar pentru $\mu = 0,3$, avem:

$$\mathfrak{X}_{red} = 0,35 (\mathfrak{X}_x + \mathfrak{X}_y) \pm 0,65 \sqrt{(\mathfrak{X}_x - \mathfrak{X}_y)^2 + 4 \mathfrak{T}_z^2}$$

În cazul când avem numai rezistențe $\mathfrak{T}_z$, avem

$$(9) \quad \mathfrak{X}_{red} = \pm (1 + \mu) \mathfrak{T}_z.$$

3. Lucru mecanic.

Vom nota cu L lucrul mecanic acumulat de elementul de volum V .

Am văzut că dacă avem rezistențe normale, expresia lucrului mecanic este

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{X} \varepsilon$$

iar dacă avem rezistențe tangențiale

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{T} \gamma$$

Să presupunem că elementul de volum este supus la rezistențele $\mathfrak{X}_x, \mathfrak{X}_y, \mathfrak{X}_z, \mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z$ după cari se produc deformațiunile $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, date de ecuațiile lui *Poisson*.

Vom avea:

$$(10) \quad L = \frac{1}{2} \sum \mathfrak{X}_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sum \mathfrak{T}_x \gamma_x$$

Această expresie putem să o exprimăm fie în funcție numai de rezistențe, fie numai de deformațiuni.

a) Lucru mecanic în funcție de rezistențe.

Dacă în ecuația (10) se introduc valorile lui ε din ecuația (3) a lui *Poisson*, dacă se ține seamă că:

$$\sum \mathfrak{X}_x^2 = p^2 - 2 \sum \mathfrak{X}_x \mathfrak{X}_y,$$

dacă se ține seamă că am notat invariantul:

$$\sum (\mathfrak{T}_x^2 - \mathfrak{X}_y \mathfrak{X}_z) = q^2$$

și că între E și G există relația (6)

$$G = E/2 (1 + \mu)$$

atunci căpătăm:

$$(11) \quad L = \frac{1}{2} (p^2/E + q^2/G)$$

b) Lucru mecanic în funcție de deformațiuni.

Dacă în ecuația (10) de mai sus punem valorile lui $\mathfrak{X}$ din ecuația (5) a lui *Poisson*, dacă ținem seamă că:

$$\sum \varepsilon_x^2 = \varepsilon_v^2 - 2 \sum \varepsilon_x \varepsilon_y$$

și că am notat invariantul:

$$\Sigma (\frac{1}{4}\gamma_x^2 - \varepsilon_y \varepsilon_z) = \eta^2$$

căpătăm

$$(12) \quad L = 2G (k \varepsilon_v^2 + \eta^2)$$

în care am notat:

$$k = (1 - \mu)/2 (1 - 2\mu)$$

Observațiuni. Sub acțiunea rezistențelor corpul se deformează modificându-și *lungimile* și *unghiurile*. Prin modificarea lungimilor corpul își schimbă *volumul*, iar prin modificarea unghiurilor corpul își schimbă *forma*.

Pentru fiecare din aceste modificări este nevoie de un lucru mecanic.

Vom nota cu L_f și L_v lucrul mecanic necesar pentru modificarea volumului și respectiv a formei.

Să presupunem că un corp este supus la rezistențele $\mathfrak{X}'_x$, $\mathfrak{X}'_y$, $\mathfrak{X}'_z$ așa că:

$$(13) \quad \Sigma \mathfrak{X}'_x = 0$$

În acest caz, ecuația (4) a lui *Poisson* ne arată că $\varepsilon_v = 0$. Așa dar, un corp supus la rezistențe normale cari îndeplinesc condiția (13) de mai sus, nu-și schimbă volumul, ci numai forma.

Un corp supus numai la rezistențe tangențiale nu-și schimbă volumul ci numai forma. În adevăr să avem un paralelipiped de laturi a , b , c .

Dreptunghiul de bază ab se transformă într'un paralelogram care are baza a și înălțimea $b \cos \gamma_z$. Or γ_z fiind mic, $\cos \gamma_z \simeq 1$, și deci baza rămâne egală cu ab . Dacă această bază se multiplică cu $c \cos \gamma$, avem, pentru același motiv, $c \cos \gamma \simeq c$. Așa dar, volumul, în primă aproximație, rămâne neschimbat sub acțiunea rezistențelor $\mathfrak{C}$, corpul schimbându-și numai forma.

Putem pune oricând $\mathfrak{X}_x = \mathfrak{X}'_x + \frac{1}{3}p$, etc., în care $\mathfrak{X}'_x \dots$ îndeplinesc condiția (13) de mai sus. În acest caz:

$$q^2 = \Sigma \mathfrak{C}_x^2 - \Sigma \mathfrak{X}'_x \mathfrak{X}'_y - \frac{1}{3}p^2$$

Punând această valoare în ecuația (11) avem:

$$L = \frac{1}{2} [p^2/E - p^2/3G + \Sigma (\mathfrak{C}_x^2 - \mathfrak{X}'_x \mathfrak{X}'_y)/G]$$

Din această expresie se vede că ultimii doi termeni servă la schimbarea formei elementului de volum, și atunci primii doi termeni servă la modificarea volumului.

Aşa dar:

$$(14) \quad L_v = \frac{1}{2} p^2 (1/E - 1/3 G) = (1 - 2 \mu) p^2 / 6 E$$

$$(15) \quad L_f = (\frac{1}{3} p^2 + q^2) / 2 G$$

Având evident:

$$L = L_v + L_f$$

Putem exprima aceste lucruri mecanice şi în funcţie de deformaţiuni.

Cu ajutorul formulei (4) a lui *Poisson*, avem:

$$(16) \quad L_v = E \varepsilon_v^2 / 6 (1 - 2 \mu) = 2 G \varepsilon_v^2 (k - \frac{1}{3}) = p \varepsilon_v / 6$$

$$(17) \quad L_f = 2 G (\frac{1}{3} \varepsilon_v^2 + \eta^2)$$

Aşa dar, am găsit expresiunile lucrului mecanic acumulat de un element de volum. Am mai văzut cât anume din acest lucru mecanic servă la dilatarea şi cât anume la modificarea formei volumului.

Să stabilim aceleaşi formule când avem de-aface cu rezistenţe în plan.

Aci notăm:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_x + \mathfrak{X}_y &= p, & \varepsilon_x + \varepsilon_y &= \varepsilon_s \\ \mathfrak{G}_z^2 - \mathfrak{X}_x \mathfrak{X}_y &= q^2, & \frac{1}{4} \gamma_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y &= \eta^2 \end{aligned}$$

Dacă se urmează absolut acelaşi raţionament şi dacă se notează

$$k = 1/2 (1 - \mu)$$

se găseşte că formulele (10), (11) şi (12) rămân absolut identice.

Dacă urmărim mai departe raţionamentul, dacă avem $\mathfrak{X}_x' + \mathfrak{X}_y' = 0$ şi dacă notăm

$$\mathfrak{X}_x = \mathfrak{X}_x' + \frac{1}{2} p, \quad \mathfrak{X}_y = \mathfrak{X}_y' + \frac{1}{2} p$$

găsim pentru expresiile lucrului mecanic necesar pentru dilatarea suprafeţii şi modificarea formei ei, în funcţiune de rezistenţe:

$$(14') \quad L_s = \frac{1}{2} p^2 (1/E - 1/4 G) = (1 - \mu) p^2 / 4 E = \frac{1}{4} p \varepsilon_s$$

$$(15') \quad L_f = (\frac{1}{4} p^2 + q^2) / 2 G$$

iar în funcţiune de deformaţiuni

$$(16') \quad L_s = \frac{1}{2} k E \varepsilon_s^2$$

$$(17') \quad L_f = 2 G (\frac{1}{4} \varepsilon_s^2 + \eta^2)$$

4. Relația între rezistențe și deformațiuni la corpurile plastice.

Nu toate corpurile au o limită elastică ridicată. Sunt unele corpuri cari chiar sub acțiunea unor solicitări mici capătă deformațiuni permanente. Același lucru se petrece și cu corpurile cari ascultă de legea lui *Hooke*, însă dincolo de limita deformațiunilor mari. Pentru acest motiv, această limită am numit-o și limita de plasticitate.

Și pentru aceste corpuri avem o curbă caracteristică. Și aci

$$(18) \quad d\mathcal{K}/d\varepsilon = D$$

definește *coeficientul de plasticitate*, care este o funcțiune de $\mathcal{K}$.

La corpurile plastice se admite că un corp sub acțiunea rezistențelor $\mathcal{K}$ își schimbă numai forma, volumul rămânând constant. Aceasta, bine înțeles, în primă aproximație.

Așa dar, pentru corpurile plastice avem:

$$(19) \quad \varepsilon_v = 0$$

Din ecuația lui *Poisson*: $E \varepsilon_v = (1 - 2\mu)p$, deducem:

$$(20) \quad \mu = 0,5$$

Aceste două condițiuni definesc relația între rezistențele și deformațiunile unui corp în regiunea plastică a caracteristicii lui.

În acest caz, ecuațiile lui *Poisson* pentru direcțiunile principale se scriu sub forma:

$$D \varepsilon_1 = \mathcal{K}_1 - 0,5 (\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3), \text{ etc.}$$

și dacă notăm

$$(21) \quad \Sigma \mathcal{K}_1 = p,$$

avem:

$$2 D \varepsilon_1 = 3 \mathcal{K}_1 - p$$

$$(22) \quad 2 D \varepsilon_2 = 3 \mathcal{K}_2 - p$$

$$2 D \varepsilon_3 = 3 \mathcal{K}_3 - p$$

sau:

$$(23) \quad \mathcal{K}_1 = \frac{1}{3}(p + 2 D \varepsilon_1)$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{3}(p + 2 D \varepsilon_2)$$

$$\mathcal{K}_3 = \frac{1}{3}(p + 2 D \varepsilon_3)$$

Dacă se scad aceste ecuații una din alta, dacă se ține seamă că,

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_3 = 2 \mathcal{G}_1, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \gamma_1, \text{ etc.}$$

și dacă se notează ca la corpurile elastice:

$$(24) \quad \mathcal{G} = \gamma H$$

se obține:

$$(25) \quad H = \frac{1}{3} D$$

Aşa dar, relația între coeficientul de plasticitate transversal H și cel longitudinal D este același ca și între E și G la corpurile elastice dacă se face $\mu = 0,5$.

Intocmai ca la corpurile elastice și pe aceeași cale, se arată că ecuațiile (5) păstrează aceeași formă și pentru alte direcțiuni și că deci avem:

$$(26) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{3}(p + 2 D\varepsilon) = \frac{1}{3}p + 2H\varepsilon$$

La fel se arată că această ecuație subsistă sub aceeași formă dacă D și H păstrează aceeași valoare și ecuațiile (24) și (25) sunt satisfăcute pentru orice direcție.

Aceste ecuații se aplică întocmai și corpurilor elastice, dincolo de limita de elasticitate.

Dincolo de această limită, ε se compune din două părți: o lungire elastică ε_e și una permanentă sau plastică ε_p .

Dacă $\mathfrak{X}_e$ este limita de elasticitate, atunci ε_p este datorit rezistenței $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_e$. Dacă în ecuația (26) punem această valoare și dacă noua sumă a rezistențelor $\mathfrak{X}$ o notăm tot cu p , căpătăm iarăși ecuația (26).

Aşa dar, ecuațiile lui *Poisson* sub limita de proporționalitate au forma:

$$\mathfrak{X} = 2G[\varepsilon + \varepsilon_v\mu/(1 - 2\mu)]$$

iar peste aceasta:

$$\mathfrak{X} = 2H\varepsilon + \frac{1}{3}p$$

În prima formulă ε sunt numai deformațiuni elastice, în a doua numai plastice sau permanente.

În prima formulă G este constant, în a doua H este o funcție de $\mathfrak{X}$ sau de ε .

XIV. IPOTEZE ASUPRA RUPERII MATERIALELOR.

1. Solicitări într'o singură direcțiune.

Cel mai simplu exemplu de ruptură este obținut prin încercarea unei epruvete la tensiune și asupra căreia se exercită o forță care crește mereu până obținem ruperea epruvetei.

Am văzut de asemenea cum construim curba caracteristică.

Fie $\mathcal{R}_t$ rezistența totală și ε_r lungirea specifică la ruptură. Se zice că un material se va rupe în momentul când rezistența $\mathcal{R}$, ce se dezvoltă în el, va atinge valoarea $\mathcal{R}_t$. De asemenea, dacă comparăm lungirile specifice, vom zice că un material oarecare în aceleași condițiuni se va rupe când lungirea lui specifică va atinge valoarea ε_r .

Prin urmare, ne este absolut indiferent dacă se face compararea rezistențelor *efective* sau a lungirilor *efective*, cu aceleași elemente din momentul ruperii.

Mai mult. Pentru a rupe o epruvetă cheltuim un anumit lucru mecanic L_e , lucru mecanic al forței exterioare. Acesta este acumulat de bară, prin deformare bară, înmagazinând lucrul mecanic L_i .

Atât timp cât între aceste cantități există relația

$$(1) \quad L_e = L_i$$

există și echilibru între forțele exterioare și eforturile interioare. Din momentul în care această relație nu mai e satisfăcută, echilibrul este rupt, nu mai există.

Dacă voim să impunem unei epruvete să înmagazineze un lucru mecanic mai mare decât L_{ir} , adică mai mare decât lucrul mecanic necesar ruperii, atunci bară se va rupe.

Prin urmare, pentru a ști dacă o bară supusă la tracțiune se va rupe sau nu, va trebui să comparăm unul din cele trei elemente: $\mathcal{K}$ rezistența, ε lungirea specifică, sau L lucrul mecanic, cu aceleași elemente la rupere.

Aceasta putem să o facem, pentru că între cele trei elemente $\mathcal{K}$, ε , și L există o singură relațiune precisă, curba caracteristică.

În acest caz simplu nu avem nicio îndoială și putem să spunem cu precizie, dacă un material, solicitat la o tracțiune oarecare, se va rupe sau nu.

Același lucru se petrece și când avem de-a-face cu o compresiune simplă.

2. Solicitări din mai multe direcțiuni.

Chestiunea se complică în cazul când corpul este supus la rezistențe după mai multe direcțiuni.

Există asupra acestei chestiuni mai multe ipoteze:

a) S'a emis ipoteza că un material se rupe când rezistența efectivă atinge rezistența de ruptură a aceluiași material supus la tracțiune sau la compresiune.

Dacă avem un element de volum supus la rezistențele $\mathcal{K}_x \dots \mathcal{G}_x$, se pot găsi rezistențele normale principale $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ și rezistențele tangențiale maxime. Comparând rezistența maximă — să zicem $\mathcal{K}_1$ — cu rezistența la ruptură, s'ar putea — după această ipoteză — să știm dacă corpul se va rupe sau nu.

Numeroase experiențe făcute în această direcțiune, au arătat că această ipoteză nu este adevărată.

După experiențele lui *Föppl* și *Groth* cari au supus diverse materiale la presiuni până la 3000 at în interiorul lichidelor, a rezultat, că afară de câteva excepțiuni, materialele nu se sfărâmă, nu se rup.

În urma acestor experiențe ei trag concluziunea că ruperea n'ar avea loc nici la presiuni și mai mari.

b) O altă ipoteză datorită lui *Barré de Saint-Venant*, este de a compara lungirile reale din interiorul corpului, cu lungirile la ruptură al unei epruvete supusă numai la tensiune sau numai la compresiune.

Cu ajutorul formulelor (2) sau (5) și cu (6) ale lui *Poisson*, putem deduce lungirile și lunecările specifice $\varepsilon_x \dots \gamma_x \dots$, cu ajutorul lor am văzut cum putem deduce lungirile specifice principale $\varepsilon_1 \dots$ și lunecările specifice maxime $\gamma_1 \dots$.

După această ipoteză, când lungirea specifică maximă — să zicem ε_1 — a atins valoarea lungirii specifice la rupere, ε_r , a unei piese supuse numai la tensiune sau numai la compresiune, atunci vom zice că piesa se va rupe.

Aceasta-i ipoteza în general admisă în toate tratatele de rezistența materialelor de până acum.

Și această ipoteză este în dezacord cu rezultatele experiențelor. În adevăr, a compara lungirile specifice între ele, este a compara rezistența redusă din interiorul corpului, cu rezistența la rupere a aceluiași material supus numai la tensiune sau numai la compresiune.

Când un corp este supus numai la rezistențe tangențiale, formula (9) dela rezistențele reduse ne dă:

$$\mathcal{K}_{red} = (1 + \mu)\mathfrak{T}z$$

Pentru valori ale lui μ cuprinse între 0,25—0,30 căpătăm pentru $\mathfrak{T}$ respectiv valorile:

$$\mathfrak{T} = 0,80 \mathcal{K}_{red} \div 0,77 \mathcal{K}_{red}$$

Or, după experiențele lui *Mohr* și *Guest*, rezultă pentru oțeluri și alte materiale că există relația

$$\mathfrak{T} = 0,5 \mathcal{K}$$

deci o nepotrivire prea mare.

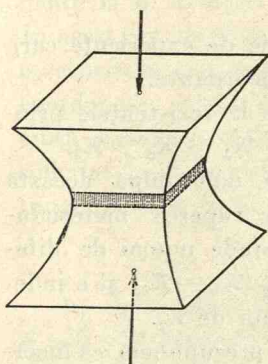


Figura 211

Mai mult. Cuburile de beton sau de piatră supusă la compresiune se distrug — se rup — ca în fig. 211, adică, de pe lături se detașează după niște planuri înclinate porțiuni de material. Prin urmare, ruperea a început să se facă după plane înclinate și numai după aceea trunchiurile de piramidă tind să pătundă unul în altul.

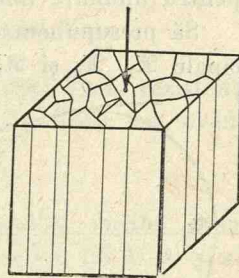


Figura 212

Din cauza frecării ce se produce între cele două baze ale cubului cu piesele mașinii care le comprimă, dilatarea lor este împiedecată și ruperea se face ca în fig. 211. În cazul însă, când suprafețele în contact dintre material și mașină se ung, atunci ruperea se face

și după plane dirijate după direcția solicitării, așa cum se arată în fig. 212. Asta probează suficient că ruperea nu se face după direcția după care avem cele mai mari deformațiuni ϵ .

Mai mult încă, *Föpl* a supus un cub la compresiune după o singură direcție și l'a rupt la o rezistență $\mathcal{R}$. Supunând în aceleași condițiuni un cub din același material, însă la rezistențe după două direcțiuni normale, a observat că se rupe la aceeași rezistență $\mathcal{R}$. De aci rezultă că lungirile specifice n'au nicio influență, căci calculându-se, se vede că au valori diferite în cele două experiențe.

Alt fapt. Când o epruvetă se supune la încercare, de îndată ce a apărut contracțiunea transversală sau dilatarea, se observă pe fața epruvetei niște linii înclinate cam la 45° , cari indică în mod clar, că după direcția lor au loc niște lunecări. Acestea sunt așa zisele linii ale lui *Piobert*.

Aceste nepotriviri au condus pe *Mohr* să admită:

c) Ipoteza lui Couloumb și anume că ruperea unui material se produce din cauza rezistențelor tangențiale.

Ruptura are loc atunci când $\mathfrak{T}$ din interiorul materialului atinge valoarea $\mathfrak{T}_t$ a rezistenței totale la forfecare.

Se știe că valorile maxime ale lui $\mathfrak{T}$ sunt date de diferențele $\mathfrak{T}_3 = (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)/2$, etc.

Prin urmare, după această ipoteză ruptura va avea loc când una din aceste diferențe atinge valoarea $\mathfrak{T}_t$.

Această ipoteză este justificată prin o serie de experiențe, cari, pentru anumite materiale, dau rezultate concordante.

Să presupunem că un material este supus la rezistențele principale $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ și $\mathcal{R}_3$, cari satisfac relațiunea $\mathcal{R}_1 > \mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_3$.

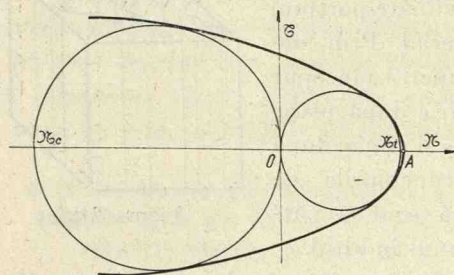


Figura 213

Așa dar, după această ipoteză ruperea materialului depinde numai de diferența $\frac{1}{2}(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_3)$ și e independentă de $\mathcal{R}_2$.

Să presupunem că încercăm o epruvetă la tensiune simplă și că ea se rupe la rezistența $\mathcal{R}_i$. Cercul care trece prin origine și abscisa $+\mathcal{R}_i$ în diagrama lui *Mohr*, reprezintă starea rezistențelor din interiorul corpului după diferite direcțiuni în momentul ruperii (fig. 213).

Să presupunem că supunem același corp la compresiune, vom avea în aceleași condiții cercul care trece prin origine și prin $\mathcal{X}_c$.

Să presupunem că supunem corpul la o rezistență de tensiune într-o direcție și compresiune în altă direcție. Să presupunem că variem una din ele până obținem ruperea corpului. Starea rezistențelor din interiorul corpului va fi reprezentată iarăși prin un cerc. Dacă facem astfel de încercări variind oricum rezistențele în cele două sensuri până corpul se rupe, obținem o serie de cercuri cari sunt învăluite de o curbă, numită *curba limită a lui Mohr*.

Prin definiție, orice cerc din interiorul acestei curbe, reprezintă o stare a rezistențelor din interiorul corpului pentru care ruperea nu este posibilă, un cerc tangent la această curbă reprezintă starea rezistențelor corpului în momentul ruperii și orice cerc având centrul pe axa $O\mathcal{X}$ și care tace curba, reprezintă o stare dincolo de ruptură, deci când echilibru nu mai există.

Punctul A unde această curbă tace axa $O\mathcal{X}$ corespunde cazului când corpul ar fi solicitat numai la tensiuni egale în două sau trei sensuri normale.

Totul este să construim această curbă, ceea ce nu este tocmai ușor.

În cazul când rezistența într'un sens crește liniar față de cealaltă din sensul normal, atunci cercurile rămân tangente la o dreaptă (fig. 214). În acest caz, dacă ducem cercul cu centru în originea axelor de coordonate, acest cerc reprezintă cazul când avem corpul solicitat în două sensuri cu $+\mathcal{X}$ și $-\mathcal{X}$ și deci avem rezistența tangențială $\mathcal{T} = \mathcal{X}$. De pe figură se vede că în acest caz avem:

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}_i \mathcal{X}_c / (\mathcal{X}_i + \mathcal{X}_c)$$

În cazul când $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_c$, cum e cazul oțelului moale, avem $\mathcal{T} = 0,5 \mathcal{X}$, formulă care corespunde cu experiențele lui Mohr și ale altora.

Din această teorie s'a admis ca sigur până astăzi:

1°. Pentru materialele uzuale, precum oțelul moale, arama, etc. rezistența $\mathcal{T}_i$ maximă este constantă și hotărăște ruperea materialului.

2°. Pentru materialele cassante, precum betonul, marmora, etc. ruperea se face prin lunecare.

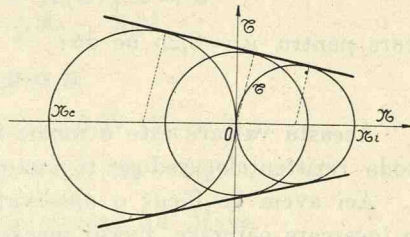


Figura 214

Nici această ipoteză nu concordă cu altă serie de experiențe.

Bach găsește de ex. tot pentru oțelul moale $\bar{\sigma} \approx \bar{\kappa}$, ceea ce se apropie mai mult de ipoteza lui *Saint-Venant*.

În altă serie de experiențe, *Mörsch* găsește pentru beton $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\kappa}_t \bar{\kappa}_c}$; așa dar, rezultate variind dela simplu la dublu.

d) Ultima ipoteză constă în a compara lucrul mecanic acumulat de un element oarecare de volum, supus la rezistențele $\bar{\kappa}_x \dots \bar{\sigma}_x \dots$, cu lucrul mecanic la rupere al aceluiași element de volum supus numai la tensiune sau numai la compresiune.

Huber, care a emis această ipoteză, arată că în cazul $p > 0$ trebuie să comparăm lucrurile mecanice L , iar în cazul $p < 0$ să comparăm numai lucrul mecanic de deformare L_f .

Să presupunem că facem două experiențe, una la tensiune și alta la forfecare.

După *Huber* avem:

$$\bar{\kappa}^2/2 E = \bar{\sigma}^2/2 G$$

de unde:

$$\bar{\sigma} = \bar{\kappa} \sqrt{G/E} = \bar{\kappa} / \sqrt{2} (1 + \mu)$$

care pentru $\mu = 0,25$ ne dă:

$$\bar{\sigma} = 0,63 \bar{\kappa}$$

Această valoare este o medie între valoarea obținută prin metoda rezistențelor reduse și metoda lui *Mohr*.

Aci avem de făcut o observație. Când un corp este supus la o încercare oarecare, lucrul mecanic exterior se transformă în căldură, în lucru care modifică volumul, lucru care modifică forma, etc. La o altă încercare, lucrul mecanic exterior se transformă în același fel, însă în alte proporții. Dacă solicitările în cele două experiențe sunt diferite unele de altele, atunci pentru a compara efectele din punctul de vedere al ruperii, *pare* că trebuie să comparăm între ele numai lucrurile necesare pentru modificarea formei.

De exemplu, dacă voim să comparăm rezistențele la tensiune cu acelea la forfecare, vom compara între ele numai lucrurile mecanice L_f din cele două experiențe.

După formula (15), dela lucru mecanic, avem în cele două cazuri:

$$L = \bar{\kappa}^2/6 G = \bar{\sigma}^2/2 G$$

și deci

$$\bar{\sigma} = \bar{\kappa} / \sqrt{3} = 0,58 \bar{\kappa}$$

Această valoare este intermediară și aproape media celor obținute de *Mohr* și *Huber*.

În cazul când corpul este supus din toate părțile la rezistențe egale, formula (15) ne arată că $L_f = 0$, deci n'ar exista rupătură, fapt dovedit experimental în ceea ce privește compresiunea.

Aceasta pare a arăta că, cel puțin în limitele practice, variația volumului corpului n'are nicio influență asupra ruperii și că ea este datorită numai variației formei corpului.

În cazul când $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 > \mathcal{K}_3$ sau $\mathcal{K}_1 > \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3$, avem:

$$\frac{1}{3}p^2 + q^2 = \frac{1}{3}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)^2$$

Dacă $\mathcal{K}$ este rezistența echivalentă a lucrului mecanic L_f , a unei epruvete supusă numai la tensiune, din ecuația (15) rezultă:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3$$

și dacă $\mathcal{G}$, este rezistența echivalentă a unei epruvete supusă la forfecare, rezultă:

$$\mathcal{G} = (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3) / \sqrt{3} = 0,58 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)$$

În cazul când $\mathcal{K}_1 > \mathcal{K}_3$ și $\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_3)$ avem:

$$\frac{1}{3}p^2 + q^2 = \frac{1}{4}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)^2$$

și în aceleași condițiuni ca mai sus

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3) / \sqrt{3}/2 = 0,87 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3) = 0,5 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)$$

Ultimul rezultat este conform cu ipoteza lui *Mohr*.

În cazul general $\mathcal{K}_1 > \mathcal{K}_2 > \mathcal{K}_3$, oricare ar fi valoarea lui $\mathcal{K}_2$ se găsește că $\mathcal{K}$ și $\mathcal{G}$ variază între:

$$0,87 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3) \leq \mathcal{K} \leq \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3$$

$$0,5 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3) \leq \mathcal{G} \leq 0,58 (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_3)$$

Asta arată că influența rezistenței intermediare este într'adevăr mică.

Concluzie.

Din cele arătate până aci, rezultă că cheștiunea ruperii unui material, când este solicitat în mai multe sensuri, nu este complet clarificată până acum. Diverși cercetători caută a pune la punct ipoteza lui *Huber*, adică a lucrului mecanic echivalent, care

pare până acum singura care dă rezultate mai concordante cu rezultatul experiențelor.

Dificultatea provine de acolo că ideile nu sunt bine fixate nici asupra modului cum se rupe o epruvetă la simplă tensiune, sau numai la simplă compresiune.

În adevăr, imediat ce rezistența în piesă trece dincolo de limita deformațiunilor mari, în regiunea unde se va produce ruperea, apare o contracțiune a secțiunii în cazul tensiunii și o dilatare în cazul compresiunii. Aceste variațiuni de secțiune se întind pe o

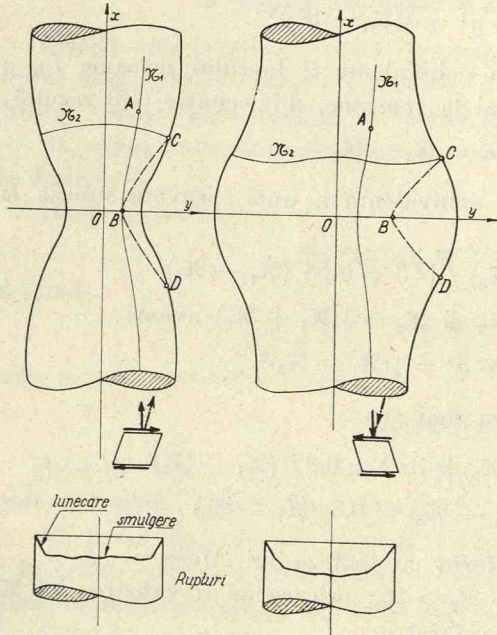


Figura 215

regiune oarecare, ca în fig. 215. În aceste regiuni să considerăm elementul de volum din A . El va fi supus la niște rezistențe de tensiune sau compresiune după caz și la o rezistență tangențială $\mathfrak{T}$, ca în figură.

Dacă se caută direcțiunile principale în cele două cazuri, se vede că liniile izostatice se dirijează către centrul secțiunii. Rezultă de aci în mod clar că, cel puțin pentru barele supuse la compresiune, rezistențele nu se distribuiesc uniform pe secțiune și anume, pe partea centrală a secțiunii sunt mai mari ca pe rest.

Pe figură s'au schițat liniile isostatice ale rezistențelor $\mathcal{K}_1$ și $\mathcal{K}_2$. Dacă presupunem că epruvetele sunt cilindri cu bază circulară, atunci avem de-a-face cu linii isostatice în plan. Am găsit ecuația lor. Dacă se face abstracție de greutatea elementului de volum și dacă se ține seamă că $\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) = \mathfrak{T}$, atunci ecuațiile (34) dela rezistențe se transformă în

$$d\mathcal{K}_1/ds_1 + 2\mathfrak{T}/r_2 = 0$$

$$d\mathcal{K}_2/ds_2 - 2\mathfrak{T}/r_1 = 0$$

Există un punct C , pe conturul barei, în care expresia:

$$r_2 d\mathcal{K}_1/ds_1 - 2\mathfrak{T}$$

are o valoare maximă. Dacă plecând din acest punct construim isostatica CB a rezistențelor $\bar{\sigma}$, aceasta taie secțiunea din mijlocul contracțiunii în B .

Rezultă în mod clar că pe regiunea OB ruperea se face prin smulgere, detașare (rupture d'arrachement, break by severing, Trennungsbruch) pe când pe porțiunea BC se face prin lunecare (rupture de glissement, break by gliding, Gleitungsbruch). Examinarea pieselor rupte confirmă acest punct de vedere.

Din cele arătate mai rezultă că până acum nu avem o teorie care să explice în mod satisfăcător ruperea materialelor.

XV. APLICAREA PRACTICĂ A ECUAȚIEI DE ECHILIBRU ELASTIC.

A) Rezistențe admisibile, coeficient de siguranță.

Din cele arătate până aci rezultă că sub acțiunea forțelor exterioare corpul se deformează, acumulând un lucru mecanic, L_e , al forțelor exterioare. La fiecare valoare L_e , corespunde un lucru mecanic interior L_i , între ele existând relația:

$$(1) \quad L_e = L_i$$

De îndată ce această relație nu mai subsistă, nu mai există nici echilibru.

Am văzut că pe L_i putem să-l exprimăm în funcție de rezistențele $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{T}$ din interiorul corpului. De îndată ce aceste rezistențe, într'un punct oarecare al corpului, trec de valorile ce corespund ruperii materialului, corpul se rupe și echilibrul nu mai există. Așa dar, L_i nu poate trece de o anumită valoare, și deci nici L_e , în virtutea relației (1).

L_e fiind cunoscut, putem deduce sarcina sau sarcinile maxime ce le poate suporta construcția noastră.

Am mai văzut că pe L_i putem să-l exprimăm și în funcție de deformațiile specifice ε și γ și că cu ajutorul lor putem deduce deplasările $\bar{j}$, ale unui punct oarecare al construcțiunii.

Pentru a avea o construcție stabilă, trebuie ca $\bar{j}$, sub acțiunea sarcinilor, să aibă o valoare finită sau o valoare care să nu treacă de anumite limite.

Așa dar, și în acest caz, L_i nu poate depăși o anumită valoare, și deci și L_e . Ca și mai sus, L_e având o valoare limitată putem deduce sarcinile F maxime ce poate suporta construcția.

Asta din punct de vedere teoretic. Practic însă, trebuie să avem în vedere următoarele considerațiuni:

1. *S'a văzut că nu putem evalua exact sarcinile cari acționează o construcție și că facem o serie de aproximații.*

2. *Formele geometrice obținute din calcul nu se pot realiza exact în practică.* O bară dreaptă în realitate, nu este o dreaptă matematică, ci este o dreaptă cu oarecare aproximație, având în anumite puncte o curbură apreciabilă sau nu. Avem toleranțe și la forma și valoarea secțiunilor.

3. *În formulele stabilite până acum și pe cari le vom aplica, am presupus corpurile izotrope, adică cu același E , G și μ în toate sensurile.*

În realitate, corpurile nu sunt nici măcar omogene. O bară din oțel laminat are un E în sensul lăminajului și un altul în sens transversal.

O rocă sedimentară are de asemenea un coeficient de elasticitate în sensul stratificației și altul în sens normal.

Mai mult. La lemn acești coeficienți sunt variabili după cele trei direcțiuni: în sensul fibrelor lemnul are un E_1 , în sens normal pe fibre E_2 , iar în direcția normală pe precedentele E_3 (fig. 216). Nu putem ține seama în calcule de toate acestea, căci calculele s'ar lungi atât, încât ar costa mai mult decât construcția.

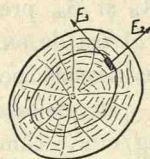


Figura 216

4. *Nu cunoaștem caracterele materialelor decât în mod aproximativ,* pentru că nu putem încerca absolut toate piesele ce intră într-o construcție. În genere se încearcă o parte din piese și zicem că și restul ar avea aceleași calități. Nesiguranța este și mai mare, când cumpărăm materiale din comerț.

5. *Nu realizăm în practică ipotezele de calcul.* De ex. o grindă a unui planșeu are capetele încastrate în două ziduri de cărămidă. În genere, o calculăm ca și când ar fi rezemată pe ziduri.

În realitate ea este încastrată, pentru că face corp cu zidul. Experiența arată că nu putem să o considerăm ca încastrată la extremități. Ea ar trebui calculată la o stare intermediară, între o grindă simplu rezemată și alta complet încastrată. Într-un câtuș cunoaștem măsura în care este încastrată, vom admite o ipoteză de calcul, să zicem: că este simplu rezemată la cele două capete. De aci rezultă că una este starea de fapt și alta este ipoteza de calcul.

În acest caz meșteșugul inginerului este de a găsi care este ipoteza de calcul care se apropie mai mult de realitate.

Toate aceste considerațiuni ne fac să nu calculăm construcțiunea la limita ei de ruptură sau de stabilitate, ci ceva mai depărtat, așa că dela starea la care am calculat-o și până la limita de ruptură sau stabilitate, să mai avem oarecare margine, oarecare joc.

Dacă materialul din care facem construcția are o rezistență totală $\mathcal{R}_t$, atunci pe baza considerațiunilor de mai sus, în construcția noastră, vom admite numai o rezistență $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_t/c$, adică o fracțiune din $\mathcal{R}_t$. $\mathcal{R}_a$ poartă numele de rezistență admisibilă, iar c coeficient de siguranță.

În cazul când intervine stabilitatea construcției, dacă ea trebuie să suporte sarcina F , atunci o vom calcula la sarcina cF , în care c este coeficientul de siguranță.

Pentru diferite materiale și diferite solicitări, practica construcțiunilor de până acum a stabilit valoarea rezistențelor admisibile $\mathcal{R}_a$ și $\mathcal{S}_a$, precum și valorile coeficienților de siguranță c .

Așa de ex. pentru piese de mașini supuse la eforturi alternative se fixează pentru oțelul moale $\mathcal{R}_a = 600 \text{ kg/cm}^2$.

În aceleași condiții pentru ferme metalice se fixează $\mathcal{R}_a = 1400 \text{ kg/cm}^2$, când am evaluat complet toate forțele, ținând cont de zăpadă, vânt, etc. Când însă la evaluarea lor s'au făcut oarecari aproximații, se prescrie $\mathcal{R}_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$.

La stabilitatea pieselor supuse la compresiune, se admite în genere un coeficient de siguranță $c = 3,5$.

În manualele de inginerie, pentru fiecare fel de construcție sau solicitări, se dau valorile rezistențelor admisibile și ale coeficienților de siguranță pe cari practica construcțiunilor le-a stabilit până acum.

În concluzie, dacă construcțiunea în momentul când începe ruperea sau în momentul când încetează de a mai fi stabilă, a acumulat un lucru mecanic L_i , atunci, pentru a ne pune la adăpost, vom lua pentru sarcinile F acele valori cari ne dau pentru L_e valoarea:

$$(2) \quad L_e = L_i/c = L_{ia}$$

în care L_{ia} , este lucrul mecanic admisibil.

Aceasta este ecuația fundamentală a echilibrului elastic.

Evident că această ecuație va fi satisfăcută și când

$$L_e < L_{ia}$$

dar atunci construcția nu mai este economică.

B) Calculul rezistențelor la grinzi.

În partea întâia a cursului am stabilit rezultanta momentelor și forțelor aplicate în centrul de greutate al secțiunii, care asigură echilibrul grinzii.

Făcând o secțiune normală pe bară într'un punct al ei, vom avea o rezistență $\overline{\mathcal{R}}$, pe care o descompunem după cele trei axe în $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{G}_y$, și $\mathcal{G}_z$. Conform convențiilor făcute pentru semnele rezistențelor, sensurile lor pozitive sunt cele din fig. 217.

Forțele și momentele ce rezultă din aceste rezistențe trebuie să fie tocmai forțele și momentele aplicate în centrul de greutate al secțiunii.

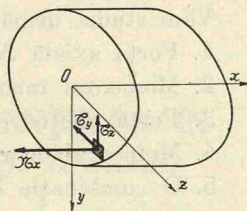


Figura 217

Vom avea:

$$(3) \quad \int \mathcal{R}_x d\Omega = N_x \quad , \quad \int \mathcal{G}_y d\Omega = T_y \quad , \quad \int \mathcal{G}_z d\Omega = T_z$$

Acum se explică de ce forța tăietoare este pozitivă când în secțiunea ce o considerăm este dirijată de jos în sus, adică este dirijată către $-y$ și $-z$. Aceasta rezultă din semnele rezistențelor $\mathcal{G}$.

Să luăm acum momentele în raport cu centrul de greutate. Vom avea:

$$(4) \quad \int (z\mathcal{G}_x - y\mathcal{G}_y) d\Omega = M_x \quad , \quad \int \mathcal{R}_x z d\Omega = -M_y \quad , \quad \int \mathcal{R}_x y d\Omega = M_z$$

Pentru momente am ținut seamă de sensul lor pozitiv de rotație.

Prin urmare, am găsit 6 ecuații de legătură între rezistențele ce se dezvoltă în o secțiune a barei și eforturile din acea secțiune.

Aceasta în cazul general. Putem însă să avem toate eforturile nule afară, de exemplu, de N_x . În acest caz, avem o singură ecuație și anume $\int \mathcal{R}_x d\Omega = N_x$. Aceasta însă este insuficientă pentru determinarea rezistențelor $\mathcal{R}_x$ din secțiune. Prin urmare, găsirea rezistențelor într'un punct oarecare al secțiunii este o problemă static nedeterminată.

Dacă însă, într'un mod oarecare am putea găsi legea după care variază $\mathcal{R}_x$ pe secțiune, atunci problema este rezolvată. Singură experiența poate să ne dea această variație.

Ca normă generală vom presupune că în secțiune acționează izolat numai câte un efort. De ex. numai N_x , sau numai T_y , etc.... și, pe baza arățărilor experienței, vom deduce legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune și cu aceasta determinăm chiar rezistențele.

Vom presupune apoi că lucrează mai multe sau toate eforturile deodată, și vom vedea ce se întâmplă.

Vom studia următoarele cazuri când efortul se reduce la:

1. Forța axială N .
2. Momentul încovoietor M_i .
3. Forța tăietoare T .
4. Momentul de răsucire M_r .
5. O combinație oarecare între cele patru cazuri de mai sus.

XVI. DETERMINAREA REZISTENȚELOR ÎN GRINZILE SUPUSE LA FORȚE AXIALE.

1. Bare cu secțiune constantă: Legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune.

În acest caz am văzut că singura ecuație de care dispunem este:

$$(1) \quad \int \mathcal{K} d\Omega = N$$

Dacă am presupune că în secțiune există și rezistențe $\mathcal{G}$, ecuația de proiecții pe tangenta la axa barei ne dă:

$$\int \mathcal{G} d\Omega = 0$$

care în genere nu este satisfăcută decât în cazul când $\mathcal{G} = 0$, pe toată secțiunea.

Pentru a găsi legea de distribuție a rezistențelor $\mathcal{K}$ se recurge la experiență.

Se ia o bară cilindrică cu baza circulară, pătrată, sau dreptunghiulară. Pe conturul ei se trasează o serie de generatoare și directoare, cari împart astfel suprafața într-o serie de dreptunghiuri (fig. 218).

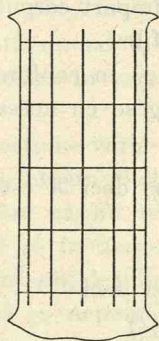


Figura 218

Directoarele trasate pe piesă, le trasăm astfel ca să fie conținute într'un plan perpendicular pe axa piesei.

În același mod se pregătesc și epruvetele supuse la compresiune.

Experiența arată că, atâta timp cât nu atingem limita deformațiunilor mari, pe toată întinderea piesei, toate dreptunghiurile, trasate înainte de deformație, rămân dreptunghiuri și după deformație și că toate directoarele rămân mereu în plane normale pe axa piesei.

De aci rezultă în mod clar, că cel puțin pentru elementele cari sunt pe conturul barei, lungirea specifică în sensul lungimii barei este aceeași pentru toate.

Din faptul că dreptunghiurile rămân tot dreptunghiuri, urmează că nu avem deformațiuni γ și deci, pentru toate elementele $\zeta = 0$.

Pentru că n'avem posibilitatea pentru corpurile opace de a verifica, admitem că același lucru se petrece și în interiorul barei.

Pentru materiale transparente, cu mijloace optice, s'a putut verifica că această ipoteză este adevărată.

Așa fiind, toate elementele unei secțiuni cari se găseau într'un plan normal pe axa piesei, după deformație se găsesc de asemenea într'un plan normal pe axă. Aceasta se exprimă zicând:

Secțiunile plane înainte de deformație rămân plane și după deformație.

Aceasta este legea fundamentală admisă pentru tensiune și compresiune.

Să considerăm o porțiune de bară cuprinsă între două plane normale pe ax. Să împărțim suprafața Ω a secțiunii într'o serie de suprafețe $d\Omega$ elementare.

Cilindrii cu baza $d\Omega$ și cu generatoarele paralele cu axa piesei împart corpul în o serie de fășii longitudinale, pe cari le vom numi fibre.

În conformitate cu cele spuse mai înainte, toate fibrele se lungesc cu aceeași cantitate, deci avem:

$$\varepsilon = \mathfrak{X}/E = C^{ta}.$$

și deci $\mathfrak{X}$ este constant pe toată secțiunea barei. Așa dar:

$$\int \mathfrak{X} d\Omega = N$$

și deci

(2)

$$\mathfrak{X} = N/\Omega.$$

Avem încă:

(3)

$$\varepsilon = N/E\Omega.$$

iar lungirea totală a barei este:

$$u = \varepsilon l = Nl/E\Omega.$$

Pentru expresia lucrului mecanic am avut la studiul caracteristicii materialelor formula:

$$L = \frac{1}{2} V \mathfrak{X} \varepsilon = \frac{1}{2} V \mathfrak{X}^2 / E = \frac{1}{2} V E \varepsilon^2$$

în care înlocuind $V = l\Omega$, avem:

(4)

$$L = \frac{1}{2} Nu = \frac{1}{2} N^2 l / E\Omega = \frac{1}{2} E\Omega u^2 / l$$

În prima parte a cursului, la grinzi s'a stabilit

$$(5) \quad dN/dx = -p_x$$

iar la deformațiuni (ecuația 23):

$$du/dx = \varepsilon$$

Dacă această ecuație o derivăm în raport cu x , dacă derivăm și (3) și ținem seama de (5) avem:

$$(6) \quad E\Omega d^2u/dx^2 + p_x = 0.$$

În această ecuație, dacă p_x este pozitiv, atunci primul termen este neapărat negativ, și dacă punem aceasta în evidență avem:

$$(6) \quad -E\Omega d^2u/dx^2 + p_x = 0$$

Această ecuație are mare asemănare cu acelea din mecanică. Precum acolo md^2u/dt^2 s'a numit forță de inerție care se opune mișcării, tot așa și aci vom denumi $E\Omega d^2u/dx^2$ sarcina elastică a barei și care se opune deformării, și care se vede că lucrează în sens invers sarcinii p_x .

2. Bare cu secțiuni variabile.

Ipoteza distribuției admisă mai sus este adevărată numai întru cât condițiunile ce se realizează sunt analoage aceloră în care am făcut experiențele.

Prin urmare, dacă bara nu este cilindrică, ci cu secțiune variabilă, sau în apropierea capetelor unde sarcina se aplică într'un mod ce nu corespunde cu situația din cursul piesei, evident că nu se realizează distribuția uniformă a rezistențelor. *Totuși și în aceste cazuri vom admite că rezistențele se distribuiesc în mod uniform*, deși în realitate lucrurile se petrec cu totul altfel, rămânând ca nepotrivirea între realitate și calcul să o lăsăm pe seama coeficientului de siguranță și a datelor empirice, pe care ni le dă experiența.

În cazul când secțiunea este continuu variabilă, putem admite că rezistența se distribuie uniform pe secțiune.

Nu e tot așa când avem variațiuni bruște de secțiune. În aceste cazuri experiența și calcule de natură mai complicată, arată că rezistența nu se distribuie uniform în secțiunea slăbită.

Mai mult, forma barei influențează și asupra rezistenței ei. Pentru aceasta vom cita experiențele făcute de Kirkaldy și alții.

C. Bach a reluat încercările cu bare rotunde cari aveau secțiunea longitudinală ca în fig. 219 *a*, *b*, *c* și *d*.

Pentru bara *b* a obținut rezistențe cu 7%, cu bara *c* cu 18% și cu bara *d* cu 39% mai mari ca pentru bara *a*, în cazul când materialul a fost oțel moale. Cu epruvete din materiale casante, precum fontă, a obținut pentru bara *b* rezistențe cu 5% iar pentru bara *d* cu 7% mai mici ca în cazul barei *a*.

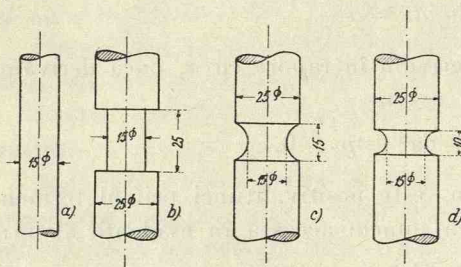


Figura 219

Aceste diferențe în primul caz se explică prin aceea că în secțiunea redusă contracțiunea este împiedicată din cauza vecinătății secțiunilor alăturate și deci lungirile la rupură sunt mai mici după ipoteza lui Saint Venant. În al doilea caz, unde rupura are loc după ipoteza lui Mohr, tranziția de secțiune face să apară rezistențele σ cari hotărăsc ruperea.

Practicește însă este bine să evităm asemenea tranziții bruște de secțiune.

Piese supuse la compresiune cu secțiune variabilă avem destul de des, mai ales la construcțiuni de zidărie, unde avem blocuri suprapuse, unele peste altele. Cazul când un bloc mai rezistent, de suprafață Ω_0 , reazimă pe un bloc mai puțin rezistent, a cărui suprafață este Ω_1 , este cel mai frecvent (fig. 220).

Dacă notăm $\mathcal{K}_0$ rezistența din secțiunea Ω_0 și $\mathcal{K}_1$ cea din Ω_1 , neglijând greutatea proprii, vom avea relația:

$$(7) \quad \mathcal{K}_0 \Omega_0 = \mathcal{K}_1 \Omega_1$$

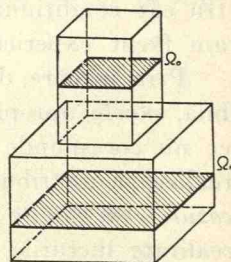


Figura 220

între rezistențele presupuse uniform distribuite pe cele două fețe Ω_0 și Ω_1 . Într-o secțiune intermediară și în special în apropierea feței Ω_0 , e foarte puțin probabil ca rezistențele să se distribue uniform, și cu siguranță că nu toată suprafața este interesată la compresiune.

Chestiunea aceasta este mai complicată de cum se vede. S'au dat diferite formule pentru a găsi rezistențele la diferite distanțe de suprafețele în contact.

Cea mai comodă normă este aceea dată de circulările oficiale, cari prescriu: *suprafața efectivă, pe care se exercită compresiunea pe un plan paralel cu suprafața de contact, se capătă luând intersecția acestui plan cu planele înclinate la 45° , cari conțin laturile suprafeței Ω_0* (fig. 220 bis).

Prin urmare, pe lângă formulele cari s'au dat, pentru că problemele reale n'au asemănare perfectă cu cele teoretic studiate aci, va trebui să se țină seamă și de alte considerațiuni trase de pe urma unor încercări și observațiuni îndelungate.

Începătorii trebuie să facă ucenicie, prin calcule dese și variate, pentru a prinde sensul noțiunilor cari singure fixează în mod exact fenomenele reale. Calculul matematic ne pune la îndemână numai instrumentul de a le putea măsura.

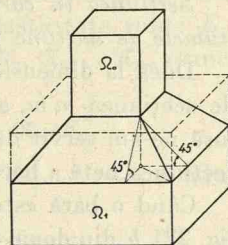


Figura 220 bis

Aprecierea modulului cum lucrează un material în cutare condițiuni, având în vedere diferența între realitate și calculele pe cari le facem noi, nu se poate preda, ea se capătă pe de o parte prin muncă, iar pe de alta prin aptitudini speciale și formează, ca să zicem așa, partea artistică a inginerului.

3. Secțiuni brute, secțiuni nete.

În practică se întâmplă foarte rar să avem de aface cu bare a căror secțiune este constantă.

Din cauză că barele trebuiesc îmbinate — înădite — cu altele, ele trebuiesc găurite sau forjate, într'un mod special, pentru a obține legătură lor cu alte piese. În aceste cazuri vom avea în vedere în totdeauna *secțiunea cea mai redusă a piesei, care poartă numele de secțiune netă*. De ex. platbanda A (fig. 221 a) o prindem de placa B , cu ajutorul niturilor din figură.

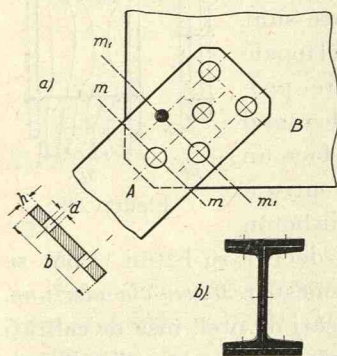


Figura 221

În special când avem bare supuse la tensiuni cari cer secțiuni mari, pe cari nu le putem obține dintr'o bucată, le alcătuim din piese mai mici, cari se

găuresc și apoi se nituesc după cum se arată în fig 221 b.

Secțiunea curentă a barei, neslăbită — negăurită — poartă numele de secțiune brută.

În cazul platbandei din fig. 221 *a*, dacă lățimea ei este b și grosimea h , secțiunea brută este $\Omega_b = bh$. În secțiunea $m m$, dacă diametrul găurii de nit este d , secțiunea barei este $\Omega = (b - d)h$. În secțiunea $m_1 m_1$, unde avem două nituri, secțiunea este $\Omega = (b - 2d)h$.

Secțiunea în care se obține rezistența cea mai mare, poartă numele de secțiune periculoasă.

Dacă la dimensionarea barei — cazul platbandei — ne-am servit de secțiunea $m m$, atunci secțiunea netă este $(b - d)h = \Omega_n$; dacă însă ne-am servit de secțiunea $m_1 m_1$, atunci $(b - 2d)h = \Omega_n$ este secțiunea netă a barei. Secțiunea brută în ambele cazuri este $\Omega_b = bh$.

Când o bară este compusă din mai multe elemente — cum este fig. 221 *b* din două fiare $\square$ și două platbande — acestea se solidarizează între ele prin nituri, cari evident slăbesc secțiunea brută.

Se consideră secțiune netă care servă la dimensionarea barei, secțiunea cea mai mică, normală pe bară.

4. Bare compuse din materiale neomogene.

Dese ori avem de-aface cu bare supuse la tensiune sau compresiune formate din materiale neomogene, cum ar fi combinațiuni de beton cu fier, lemn cu fier, sau oțeluri de diferite calități.

La acest fel de piese, avem de-aface cu materiale distincte și va trebui la calcul să ținem seamă de aceasta.

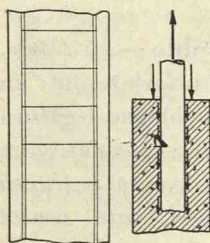


Figura 222

Să presupunem că avem de-aface cu un stâlp de beton armat. Stâlpul se compune din beton în care sunt împlântate bare de oțel moale (fig. 222). Betonul are proprietatea de a se lipi de oțelul moale și prin urmare face un tot cu el (monolit). Pentru a smulge o bară de fier din beton

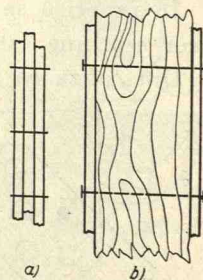


Figura 223

trebuie să întrebuițăm o forță oarecare, deci între beton și fier se dezvoltă o rezistență la lunecare, care se numește *rezistență la adeziune*.

Când facem o piesă din mai multe bucăți de oțel, însă de calități diferite, acestea se solidarizează între ele legându-le cu nituri (fig. 223 *a*).

Când compunem o piesă din oțel și lemn, acestea se solidarizează între ele în buloane (fig. 223 *b*).

În orice caz, când o piesă se face din mai multe materiale diferite între ele, se solidarizează între ele așa ca să formeze, pe cât posibil, un singur bloc.

Pentru calculul lor vom admite aceeași ipoteză și anume *că secțiunile plane înainte de deformațiune rămân plane și după deformațiune*.

Dacă secțiunea transversală Ω a piesei se compune din secțiunile $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_n$, ai căror coeficienți de elasticitate sunt: $E_1, E_2 \dots E_n$, și dacă în ele se dezvoltă rezistențele $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \dots \mathcal{K}_n$, atunci avem:

$$(8) \quad \varepsilon = \mathcal{K}_1/E_1 = \mathcal{K}_2/E_2 = \dots = \mathcal{K}_n/E_n$$

Multiplicând fiecare raport respectiv cu $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_n$ și adunând, obținem:

$$\mathcal{K}_1/E_1 = \mathcal{K}_2/E_2 = \dots = \Sigma \mathcal{K}_i \Omega_i / \Sigma E_i \Omega_i$$

Însă $\mathcal{K}_1 \Omega_1 = N_1$ adică forța ce revine secțiunii Ω_1 , iar $\Sigma N_i = N$, adică forța ce revine întregii secțiuni Ω .

Așa dar:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= NE_1 / \Sigma E_i \Omega_i \\ N_1 &= N \cdot E_1 \Omega_1 / \Sigma E_i \Omega_i \end{aligned}$$

În acest mod am determinat și rezistența pe fiecare suprafață Ω_i și sarcina ce-i revine N_i .

Observare. Să presupunem că avem un stâlp de beton armat, supus la compresiune, a cărui secțiune de beton este Ω_b , iar cea de fier Ω_f , coeficienții lor de elasticitate fiind respectiv $E_b = 0,14 \cdot 10^6$ kg/cm² și $E_f = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².

Avem după formulele (9):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_b &= N \cdot E_b / (E_b \Omega_b + E_f \Omega_f) \\ \mathcal{K}_f &= N E_f / (E_b \Omega_b + E_f \Omega_f) \end{aligned}$$

Dacă se împart ambii termeni cu E_b și se ține seamă că $E_f/E_b = 15$, avem:

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_b &= N / (\Omega_b + 15 \Omega_f) = N / \Omega_{ib} \\ \mathcal{K}_f &= N / (\Omega_f + \Omega_b/15) = N / \Omega_{if} \end{aligned}$$

Ω_{ib} și Ω_{if} poartă numele de secțiuni ideale de beton și fier și se vede din formule care-s valorile lor.

Deci și în acest caz, al secțiunilor neomogene, putem pune $\mathcal{K} = N/\Omega$, adică formula generală, însă în loc de Ω punem Ω_i respectiv.

Dacă am fi avut același stâlp supus la tensiune, pentru care avem $E_f = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, iar $E_b = 0,056 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, atunci:

$$(10') \quad \begin{aligned} \mathfrak{K}_b &= N / (\Omega_b + 37,5 \Omega_f) = N / \Omega_{ib} \\ \mathfrak{K}_f &= N (\Omega_f + \Omega_b / 37,5) = N / \Omega_{if} \end{aligned}$$

Aci Ω_{ib} și Ω_{if} sunt secțiunile ideale de beton și fier la tensiune, pe când în cazul precedent au fost la compresiune.

Dacă am fi avut o bară compusă din o secție de lemn care are $E_b = 0,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, atât la tensiune cât și la compresiune, atunci secțiunile ideale pentru ambele aceste solicitări sunt respectiv:

$$(10'') \quad \begin{aligned} \Omega_{il} &= \Omega_l + 21 \Omega_f \\ \Omega_{if} &= \Omega_f + \Omega_l / 21 \end{aligned}$$

Așa dar, avem mijlocul de a calcula și piesele formate din materiale neomogene.

5. Calculul barelor la cari dilatarea transversală este împiedecată.

Experiența arată, după cum s'a menționat și cu altă ocaziune, că atunci când contracțiunea sau dilatarea transversală este împiedecată, sau când lateral se exercită rezistențe, atunci rezistența în sens longitudinal se modifică.

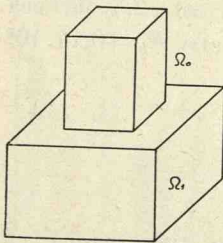


Figura 224

Ne interesează numai cazurile când rezistența în sens longitudinal este mărită. Un caz este următorul. Pe un bloc de piatră de suprafață Ω_1 reazimă un altul de suprafață Ω_0 (fig. 224).

La suprafața de contact, se poate admite o rezistență mai mare. *Bauschinger* a arătat că pentru pietre, dacă rezistența admisibilă pentru suprafața Ω_1 este $\mathfrak{K}_{1a}$, atunci la suprafața de contact între Ω_0 și Ω_1 , se poate admite o rezistență $\mathfrak{K}_{0a}$ mai mare, care în limitele practice este dată de formula empirică:

$$(11) \quad \mathfrak{K}_{0a} = \mathfrak{K}_{1a} \sqrt[3]{\Omega_1 / \Omega_0}$$

Aceasta se explică prin faptul că restul din suprafața Ω_1 , neacoperită de suprafața Ω_0 , în planul de contact al celor două corpuri, nu se dilată și deci împiedică dilatarea transversală a elementelor de sub suprafața Ω_0 .

Cazul cel mai curent e al stâlpilor supuși la compresiune, făcuți din beton armat cercuit (fretat). La acești stâlpi, după cum se arată pe fig. 225 (secție transversală) pe lângă fiarele longitudinale, se mai pun niște cercuri de fier formate dintr'o sârmă în elice, care împiedică dilatarea transversală.

Dacă $\mathcal{K}_1$ este rezistența în sensul lungimii stâlpului și dacă $\mathcal{K}_2$ este rezistența în sens transversal (fig. 226), atunci dilatarea transversală (ε_2) are valoarea dată de ec. (2) ale lui Poisson:

$$\varepsilon_2 E_b = -\mathcal{K}_2 + \mu (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)$$

Aceasta fiind aproape nulă, avem:

$$-\mathcal{K}_2 + \mu (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) \simeq 0$$

în care punând $\mu = 0,25$ avem:

$$\mathcal{K}_1 \simeq 3 \mathcal{K}_2$$

Dacă stâlpul n'ar fi cercuit, n'ar exista $\mathcal{K}_2$ și deci nici $\mathcal{K}_1$, dar atunci poate suporta rezistența $\mathcal{K}_b$. Dacă este cercuit va suporta rezistența:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_b + \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_b + 3 \mathcal{K}_2$$

Prin urmare, dacă lateral se exercită o rezistență $\mathcal{K}_2$, atunci rezistența în sensul lungimii crește cu $3 \mathcal{K}_2$.

Foarte numeroase experiențe arată că într'adevăr rezistența $\mathcal{K}$ are expresia de mai sus numai cifra 3 fiind aproximativă.

Dacă Ω este secțiunea fierului, care formează cerc și dacă rezistența este $\mathcal{K}_f$, atunci $\mathcal{K}_f \Omega$ este tensiunea din cerc (fig. 226).

Forța de împingere pe distanța h , dintre două cercuri și pe lungimea ds este: $\mathcal{K}_2 h ds$. De pe figură se vede că avem:

$$\mathcal{K}_2 h ds = \mathcal{K}_f \Omega d\varphi$$

sau

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_f \Omega / h r$$

Se notează:

$$\pi d \Omega / h = \Omega_c$$

care nu este altceva decât secțiunea de fier conținută în planul secțiunii, echivalentă unei spire de cerc. Aceasta revine la a

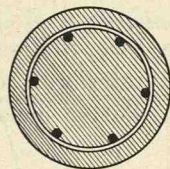


Figura 225

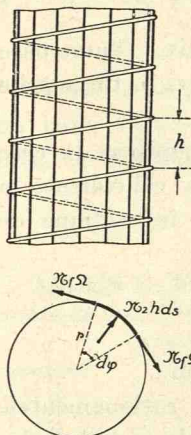


Figura 226

înlocui cercurile de fier cu un tub cilindric care înfășoară betonul și care are secțiunea transversală Ω_c .

Ducând această valoare a lui Ω în ecuația precedentă, avem:

$$\mathfrak{K}_2 \Omega_s = \frac{1}{2} \mathfrak{K}_f \Omega_c$$

în care $\pi r^2 = \Omega_s$, adică secțiunea sâmburelui de beton, cuprinsă în interiorul cercului.

Partea doua a acestei ecuații o putem pune sub forma:

$$15 \Omega_c \mathfrak{K}_b (\mathfrak{K}_f / 30 \mathfrak{K}_b)$$

Valoarea parantezei este aproximativ egală cu 1. În adevăr, $\mathfrak{K}_f$ variază între 1000—1200, iar $\mathfrak{K}_b$ între 30—40.

Atunci avem în mod aproximativ:

$$\mathfrak{K}_2 \Omega_s = 15 \Omega_c \mathfrak{K}_b$$

Ori, am văzut că surplusul de sarcină pe care-l poate suporta miezul de beton este $3 \mathfrak{K}_2 \Omega_s$ și deci $3.15 \Omega_c \mathfrak{K}_b$.

Așa dar, încercuirea echivalează cu un surplus de secțiune egal cu:

$$3.15 \Omega_c$$

Am arătat că coeficientul 3 este aproximativ. Numeroase experiențe arată că acest coeficient variază între 2,4 și 6. Circulările oficiale l'au luat egal cu 3.

Așa dar, dacă stâlpul are secțiunea de beton cuprinsă în cerc Ω_s , secția fiarelor longitudinale Ω_f , iar secțiunea echivalentă a cercurilor Ω_c , atunci secțiunea ideală echivalentă în secțiune de beton este:

$$\Omega_{ib} = \Omega_s + 15 \Omega_f + 3.15 \Omega_c$$

cu care calculăm stâlpii cercuiți.

Diametrul d se socotește din ax în axul cercului.

Acest exemplu arată că atât calculele cât și raționamentele pentru cazuri noi, trebuiesc controlate cu rezultatele experiențelor respective.

6. Solide de egală rezistență la tensiune și compresiune.

Un solid, se zice că este de egală rezistență, când are o astfel de formă încât în toate secțiunile sale are aceeași rezistență. De ex. o bară supusă la forța axială N , neținând seamă de alte forțe, va fi de egală rezistență atunci când secțiunea va fi constantă. Într'adevăr, conform definiției avem $N/\Omega = \mathfrak{K} = \text{const.}$

Să găsim, pentru alte cazuri, forma solidului de egală rezistență. Să presupunem că voim să găsim *ce formă trebuie să aibă o bară care sub acțiunea forței N_o și a greutății proprii, să fie solid de egală rezistență.*

Să notăm cu γ greutatea specifică a materialului. În o secțiune oarecare avem după fig. 227:

$$\mathfrak{K}\Omega = N_o + \int_0^x \gamma\Omega dx$$

Derivând în raport cu x , avem:

$$\mathfrak{K}d\Omega/dx = \gamma\Omega$$

sau

$$d\Omega/\Omega = \gamma dx/\mathfrak{K}$$

care ne dă

$$\lg\Omega = \gamma x/\mathfrak{K} + C$$

Determinarea constantei C se face punând condiția că pentru $x = 0$, avem $\Omega = \Omega_o$, deci

$$\Omega = \Omega_o e^{\gamma x/\mathfrak{K}}$$

Variația secțiunii în genere este foarte lentă, așa că practic se dă barei secțiuni constante pe anumite porțiuni, satisfăcând condiția ca în secțiunea periculoasă rezistența să nu fie întrecută.

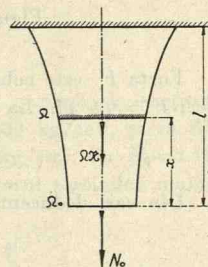


Figura 227

7. Aplicații.

Aplicația Nr. 50. Să se găsească deplasarea capătului unei bare, de secțiune constantă, sub acțiunea forței N_o ținând cont de greutatea proprie (fig. 228).

Presupunem că greutatea barei este p kg/m.

Intr'o secțiune oarecare x , avem:

$$N = N_o + px$$

și deci

$$\varepsilon = N/E\Omega = (N_o + px)/E\Omega$$

Lungirea barei până în secția x va fi

$$u = \int_0^x \varepsilon dx = \int_0^x (N_o + px) dx/E\Omega = (N_o x + \frac{1}{2} p x^2)/E\Omega$$

Pentru lungimea l avem:

$$u = (N_o + \frac{1}{2} pl)l/E\Omega.$$

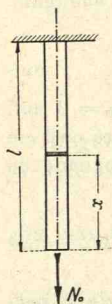


Figura 228

Aplicația Nr. 51. O șină foarte lungă este așezată pe pământ. Ea are secția Ω , coeficientul de elasticitate E , și cântărește p kg/m. Coeficientul de frecare

între şină şi pământ este 0,4. Şina este trasă de un cap cu o forţă F şi apoi i se dă drumul. Cu ce forţă trebuie să tragem de cap şina, aşa ca după ce-i dăm drumul, capul şinei să rămână cu o deplasare de 1 cm. (fig. 229).



Figura 229

Am avut

$$E\Omega d^2u/dx^2 = -0,4 p$$

care ne dă succesiv

$$E\Omega(du/dx - \varepsilon_0) = -0,4 p x$$

$$E\Omega(u - u_0 - \varepsilon_0 x) = -0,2 p x^2$$

Forţa F este echilibrată de acţiunea frecării de pe o lungime oarecare l , deci $F = 0,4 pl$. La lungimea l , vom avea şi ε şi u egale cu zero, deci

$$E\Omega\varepsilon_0 = 0,4 pl$$

$$E\Omega(u_0 + \varepsilon_0 l) = 0,2 pl^2$$

Din cari deducem

$$\varepsilon_0 = 0,4 pl/E\Omega$$

$$u_0 = -0,2 pl^2/E\Omega$$

Dacă am cunoaşte pe u_0 , avem toate elementele ce ne trebuiesc. Dacă facem ca forţa F să scadă lent dela valoarea sa la zero, capul şinii se va retrage înapoi. Ea se va retrage până când se va stabili un echilibru între forţele cari o trag şi frecarea care se opune.

Din motive de simetrie se vede că mijlocul lungimii l va rămâne pe loc.

Deplasarea u_1 a mijlocului şinei va fi dată de relaţia:

$$u = -0,2 p x^2/E\Omega + u_0 + \varepsilon_0 x$$

în care punem în loc de x valoarea sa $l/2$

$$u_1 = -0,05 pl^2/E\Omega.$$

Capătul şinei în acest caz va fi deplasat faţă de poziţia iniţială cu $2u_1$, deci cu

$$2u_1 = -0,1 pl^2/E\Omega.$$

Aceasta trebuie să fie egală cu -1 cm, deci:

$$1 = 0,1 pl^2/E\Omega,$$

de unde

$$l = \sqrt{10 E\Omega/p}$$

Exemplu numeric. $E = 2,1 \cdot 10^6$, $\Omega = 65$ cm², $p = 50$ kg/m.

Avem $l = 522$ m, iar $F = 0,4 pl = 10440$ kg. Valoarea lui $u_0 = 2$ cm.

Prin urmare, dacă de capul şinei tragem cu 10440 kg, el se deplasează cu 2 cm şi dacă dăm drumul încet, capul şinei se retrage înapoi cu 1 cm, rămânând cu o deplasare aşa zisă permanentă de 1 cm.

Aplicaţia Nr. 52. Secţiunea unei bare a unei grinzi cu zăbrele, este Ω_0 , având coeficientul de elasticitate E_0 .

Rezistenţa în bară este $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p + \mathcal{R}_m$, adică rezistenţa din sarcinile permanente şi mobile. Dacă sarcinile mobile au crescut cu $k\%$, atunci rezistenţa în bară creşte. Pentru a evita aceasta, secţiunea se măreşte, adică i se mai adaugă o secţiune Ω_1 , cu coeficientul de elasticitate E_1 , aşa că în secţiunea veche să avem aceeaşi rezistenţă maximă $\mathcal{R}$.

Această operație se chiamă *consolidarea secțiunii* Ω_0 . Se cere să se găsească valoarea secțiunii Ω_1 .

Secțiunea ideală exprimată în materialul vechi, dacă $E_1/E_0 = n$, este:

$$\Omega_i = \Omega_0 + n \Omega_1$$

Sarcina care revine secțiunii din încercările mobile este $(1+k) \Omega_0 \mathfrak{T}_m$ și rezistența în piesa veche trebuie să fie $\mathfrak{T}_m$. Așa dar, avem:

$$(1+k) \Omega_0 \mathfrak{T}_m / \Omega_i = \mathfrak{T}_m$$

din care scoatem:

$$\Omega_1 = k \Omega_0 / n$$

Exemplu numeric. Să presupunem că rezistența în o piesă de secțiune $\Omega_0 = 60 \text{ cm}^2$, datorită încărcărilor mobile este $\mathfrak{T}_m = 800 \text{ kg/cm}^2$, și că din cauza sporirii sarcinilor mobile $\mathfrak{T}_m$ ar ajunge la 1100 kg/cm^2 . Cu $E_0 = 2.10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_1 = 2,2.10^6 \text{ kg/cm}^2$ rezultă $n = 2,2/2 = 1,1$. Sporul sarcinilor mobile este:

$$k = (1100 - 800) / 800 = 37,5\% \text{ și}$$

$$\Omega = k \Omega_0 / n = 0,375.60 / 1,1 = 20,5 \text{ cm}^2$$

Aplicația Nr. 53. Un punct O este legat de n puncte fixe prin n bare articulate la extremitățile lor în O și în fiecare din punctele $1, 2, \dots, n$ (fig. 230). Fiecare bară este caracterizată prin elementele $l, \bar{\lambda}, E$ și Ω . Să se găsească eforturile din bare.

Sub acțiunea eforturilor, fiecare bară se va lungi cu o cantitate oarecare u . Dacă notăm:

$$u_{11} = l_1/E_1\Omega_1, \quad u_{22} = l_2/E_2\Omega_2, \dots$$

și cari nu sunt altceva decât lungirile barelor respective sub o sarcină egală cu unitatea, atunci lungirile barelor le putem pune sub forma:

$$u_1 = N_1 u_{11}, \quad u_2 = N_2 u_{22}, \dots$$

punctul O după deformarea barelor ajunge în O_1 , parcurgând drumul $\vec{j}$, fiecare bară modificându-și lungimea cu u și direcția cu $d\bar{\lambda}$. Avem evident:

$$(l_1 + u_1) (\bar{\lambda}_1 + d\bar{\lambda}_1) - l_1 \bar{\lambda}_1 = \vec{j}$$

sau

$$\vec{j} = u_1 \bar{\lambda}_1 + (l_1 + u_1) d\bar{\lambda}_1$$

Unghiul pe care îl fac între ele direcțiile $\bar{\lambda}_1$ și $\bar{\lambda}_1 + d\bar{\lambda}_1$ este egal cu $v_1/(l_1 + u_1)$ și deci avem:

$$\vec{j} = \bar{u}_1 \bar{\lambda}_1 - \bar{v}_1 \bar{\theta}_1 = \bar{u}_2 \bar{\lambda}_2 - \bar{v}_2 \bar{\theta}_2 = \dots$$

din care scoatem:

$$u_1 = \vec{j} \bar{\lambda}_1, \quad u_2 = \vec{j} \bar{\lambda}_2, \dots$$

și deci

$$N_1 = \vec{j} \bar{\lambda}_1 / u_{11}, \quad N_2 = \vec{j} \bar{\lambda}_2 / u_{22}, \dots$$

Luând sensurile din figură și scriind echilibrul nodului O , în poziția nedeformată a barelor, avem:

$$\Sigma N_1 \bar{\lambda}_1 = F \bar{\varphi}$$

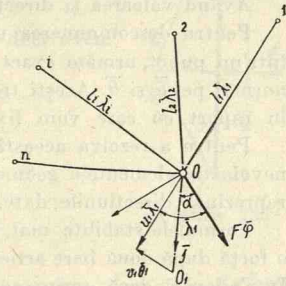


Figura 230

în care introducând valorile lui N de mai sus căpătăm:

$$\Sigma \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{j} \bar{\lambda}_1 / u_{11} = F \bar{\varphi}$$

o ecuație care conține singura necunoscută j și din care putem deduce valoarea și direcția ei.

De fapt ar fi trebuit să scriem echilibrul nodului în poziția deplasată O_1 , deci facem o aproximație de altfel general admisă.

Pentru a rezolva această ecuație, notăm cu $\bar{\theta}$ un vector normal pe $\bar{\varphi}$ și o multiplicăm scalar cu $\bar{\varphi}$ și $\bar{\theta}$. Căpătăm:

$$\Sigma \bar{\varphi} \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{j} \bar{\lambda}_1 / u_{11} = F \quad ; \quad \Sigma \bar{\theta} \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{j} \bar{\lambda}_1 / u_{11} = 0.$$

Mai notăm cu $\lambda_1, \lambda_2 \dots a$ unghiurile pe cari direcțiile $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \dots \bar{j}$ le fac cu direcția $\bar{\varphi}$ a forței, măsurate totdeauna în sensul mișcării acelor unui ciasornic.

Avem:

$$\bar{\varphi} \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{j} \bar{\lambda}_1 = j \cos \lambda_1 \cos(\lambda_1 - a) \quad ; \quad \bar{\theta} \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{j} \bar{\lambda}_1 = j \sin \lambda_1 \cos(\lambda_1 - a).$$

Dacă se introduc aceste valori în ecuațiile de mai sus și dacă notăm:

$$\Sigma (1/u_{11}) = a \quad ; \quad \Sigma (\cos 2 \lambda_1 / u_{11}) = b \quad ; \quad \Sigma (\sin 2 \lambda_1 / u_{11}) = c$$

găsim:

$$\operatorname{tga} = -c/(a - b)$$

$$j = 2 F / [(a + b) \cos a + c \sin a] = 2 F \sqrt{(a - b)^2 + c^2} / (a^2 - b^2 - c^2)$$

Având valoarea și direcția lui j , putem calcula valorile lui $N_1, N_2, \dots$

Pentru descompunerea unei forțe după n direcțiuni în spațiu, concurente într'un punct, urmăm exact calea indicată mai sus, utilizând încă un vector $\bar{\beta}$ normal pe $\bar{\varphi}$ și $\bar{\theta}$. Acești trei vectori formează sistemul de axe de coordonate în raport cu care vom fixa direcțiile barelor.

Pentru a rezolva această problemă static nedeterminată se vede că avem nevoie de elementele geometrice și materialele din cari sunt făcute barele ce reprezintă direcțiunile date.

Formulele stabilite mai sus nu se aplică în cazul când avem de descompus o forță după două bare articulate când cele trei articulații sunt în linie dreaptă. Într'adevăr, dacă scriem echilibrul nodului O în poziția nedeplasată găsim eforturi infinite în bare. De asemenea dacă după norma indicată mai sus căutăm poziția nodului O_1 , o găsim la infinit. Așa dar, nu putem aplica metoda aproximativă.

Vom scri deci echilibrul nodului în poziția O_1 , deplasată, și nu vom neglija valorile lui u_1 și u_2 când vom scri expresia direcțiunii barelor în poziția deplasată.

În acest caz se procedează după norma indicată la aplicația Nr. 54.

Aplicația Nr. 54. Un fir este întins în linie dreaptă între două puncte 0 și 1 situate pe aceeași verticală. Transversal este acționat de forța orizontală F (fig. 231). Se cere tensiunea în fir.

Din punct de vedere static, firul fiind nedeformabil, problema este imposibilă, pentru că dă eforturi infinite în fir și se poate rezolva numai dacă se ține seamă de lungirea firului.

Sub acțiunea forței F , punctul ei de aplicație se va deplasa cu cantitatea v , pentru că firul sub acțiunea eforturilor N_0 și N_1 se va lungi cu cantitățile

$$(1) \quad u_0 = N_0 a / E \Omega \quad \text{și} \quad u_1 = N_1 b / E \Omega$$

La grinzile cu zăbrele în acest caz, s'a stabilit formula

$$(2) \quad \nu^2 = 2 (u_0 + u_1) a b / l$$

$$\sin \alpha_0 = \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = \nu / a \quad , \quad \sin \alpha_1 = \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \nu / b$$

$$\cos \alpha_0 = 1 - \nu^2 / 2 a^2 \quad , \quad \cos \alpha_1 = 1 - \nu^2 / 2 b^2$$

Descompunând pe F după N_0 și N_1 , cele două ecuații de proiecție ne dau:

$$N_0 \sin \alpha_0 + N_1 \sin \alpha_1 = F$$

$$N_0 \cos \alpha_0 = N_1 \cos \alpha_1$$

sau

$$(3) \quad N_0 / a + N_1 / b = F / \nu$$

$$(4) \quad N_0 (1 - \nu^2 / 2 a^2) = N_1 (1 - \nu^2 / 2 b^2)$$

Ecuațiile (1), (2), (3) și (4) sunt suficiente și ne dau valoarea lui N_0 și N_1 . Aceasta conduce la rezolvarea unei ecuații de gradul 6.

Se rezolvă prin încercări. Noi o vom rezolva în mod aproximativ.

Din ecuația (4) scoatem:

$$(5) \quad N_0 / N_1 = 1 + \nu^2 l (b - a) / a^2 b^2$$

Termenul al doilea este foarte mic față de 1, deci avem $N_0 \simeq N_1 = N$, care dusă în (2) dă:

$$(6) \quad \nu^2 = 2 N a b / E \Omega$$

care introdusă în (3) ne dă:

$$N^3 = F^2 a b E \Omega / 2 l^2$$

iar valoarea rezistenței va fi

$$\mathfrak{N}^3 = F^2 a b E / 2 l^2 \Omega^2$$

Exemplu numeric: $F = 400$ kg, $l = 4$ m, $a = 1$ m, $b = 3$ m, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm², iar firul are $\varnothing = 2$ cm, deci $\Omega = 3,14$ cm². Ecuația de mai sus ne dă

$$\mathfrak{N}^3 = 400^2 \cdot 100 \cdot 300 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14 / 2 \cdot 400^2$$

sau

$$N = 4620 \text{ kg.} \quad \mathfrak{N} = 1470 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă vrem să găsim exact pe N_0 și N_1 , găsim mai întâiu o valoare aproximativă pentru ν^2 din formula (6), în cazul nostru $\nu^2 = 42$, iar din formula (5) găsim:

$$N_0 / N_1 = 1 + 1,12 \cdot 10^{-4}$$

deci N_0 și N_1 sunt foarte sensibil egale, diferind între ele numai cu 0,5 kg și ne mulțumim cu valorile găsite anterior.

Se mai observă că pentru o forță de 400 kg. găsim pentru N valoarea 4620 kg deci de 11,5 ori mai mare.

Deci, acesta nu e un sistem economic de construcție și se evită.

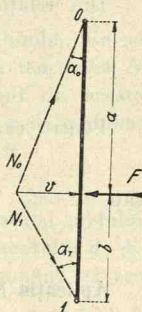


Figura 231

Aplicația Nr. 55. Intre două puncte se întinde în linie dreaptă un fir de oțel cu secție constantă de $\varnothing = 2 \text{ cm}$ și cu $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Normal pe fir avem o încărcătură de $p = 35 \text{ kg/m}$. Să se găsească rezistența din fir, dacă distanța $l = 10 \text{ m}$ (fig. 232).

Și această problemă din punct de vedere static este imposibilă, dacă nu se ține seamă de lungirea firului.

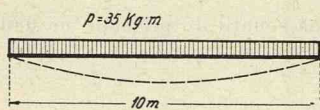


Figura 232

Sub acțiunea sarcinii, firul de lungime l se va lungi, luând valoarea s . La calculul firelor am avut ec. (67).

$$(s - l)/l = \varepsilon \simeq \alpha_0^2/6$$

în care $\alpha_0 = pl/2H$.

Lungirea specifică a firului este $N/E\Omega$ și cum aci $N \cos \theta \approx H$, iar θ este foarte mic, avem aproximativ

$$\varepsilon = H/E\Omega$$

Din relația de mai sus avem

$$H^3 = p^2 l^2 E \Omega / 24$$

$$\mathfrak{U}^3 = p^2 l^2 E / 24 \Omega^2$$

Pentru cazul nostru avem:

$$\mathfrak{U}^3 = 0,35^2 \cdot 1000^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 / 24 \cdot 3,14^2$$

sau

$$\mathfrak{U} = 1030 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația Nr. 56. O bară de lungime l cu secțiune constantă (fig. 233), este articulată la ambele extremități. Într'un punct al ei și în sensul direcției barei, se aplică o forță F . Să se găsească reacțiunile la capetele barei.

Să notăm cele două reacțiuni cu V_1 și V_2 , cari evident sunt dirijate după direcția barei.

Porțiunea 1 A se lungeste cu cantitatea

$$u_1 = V_1 a / E \Omega$$

iar A 2 se scurtează cu:

$$u_2 = V_2 b / E \Omega$$

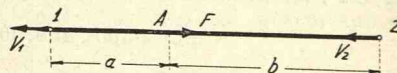


Figura 233

Deplasarea punctului A este aceeași, deci u în cele două cazuri sunt egale. Deci avem:

$$V_1 a / E \Omega = V_2 b / E \Omega$$

sau

$$V_1 a = V_2 b$$

care ne dă

$$V_1/b = V_2/a = (V_1 + V_2)/(a + b) = F/l$$

și deci

$$V_1 = F b / l, \quad V_2 = F a / l.$$

Aplicația Nr. 57. Un cablu de secțiune Ω suportă o încărcare permanentă și mobilă $p + q$, uniform distribuită pe unitatea de proiecție orizontală. Cablul este suspendat de două puncte de nivel de deschidere l (fig. 234).

La o anumită temperatură săgeata la mijloc este ν , iar rezistența maximă $\mathfrak{U}$. Coeficientul de elasticitate al cablului este E , iar cel de dilatație prin temperatură $1/E_t$. Să se găsească rezistența maximă în cablu când temperatura a crescut cu t^0 și suportă numai sarcina p .

În ambele cazuri curba funiculară va fi o parabolă.

În primul caz, pe baza ecuației (37) dela curbele funiculare avem:

$$sh a_0 = 4 \nu / l, \quad H = (p + q) l^2 / 8 \nu$$

Având $sh a_0$, putem calcula și tensiunea maximă din cablu, care va fi $H ch a_0$.

Dându-ni-se rezistența maximă $\mathfrak{U}$, putem deduce și secțiunea Ω . Cu elementele ce le avem putem deduce și lungimea s a cablului.

Să trecem la partea doua.

Din cauza variației de temperatură lungimea cablului se schimbă. Ea se mai schimbă și din faptul că variind sarcina, se va schimba și tensiunea N din cablu. Curba va fi o altă parabolă. E vorba ca ținând cont de aceste variații, din elementele primei parabole să deducem pe acelea ale celei a doua.

Din cauza variației de temperatură lungimea cablului va fi

$$s (1 + t^0/E_t) = l (1 + \varepsilon_1) (1 + t^0/E_t)$$

Să presupunem că în primul caz tensiunea într'un punct oarecare al cablului era N și că în cazul al doilea este N_1 . Lungirea specifică a elementului ds de cablu va fi $(N_1 - N) / E \Omega$. Lungirea totală a cablului, presupunând că are secțiunea constantă este: $(1/E \Omega) \int (N_1 - N) ds$.

Calculul acestei expresii este mai complicat, însă având în vedere că valoarea acestui termen este mică în raport cu a celorlalți, se face aproximația

$$N_1 - N \simeq H_1 - H$$

așa că lungirea totală este aproximativ:

$$(H_1 - H) s / E \Omega$$

Lungimea totală a cablului va fi:

$$l (1 + \varepsilon_1) (1 + t^0/E_t) [1 + (H_1 - H) / E \Omega]$$

și deci creșterea lui ε_1 este:

$$\Delta \varepsilon_1 = t^0/E_t + (H_1 - H) / E \Omega$$

Cu ajutorul formulelor (47) sau (48) dela curbele funiculare — după gradul de aproximație ce vom avea în calculele noastre, — găsim pe $\Delta sh a_0$ și deci elementele cablului în noua sa poziție.

Exemplu numeric. Fie $l = 100$ m, $p = 300$ kg/m, $q = 500$ kg/m, $\nu = 8$ m, $\mathfrak{U} = 2000$ kg/cm², $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm², $1/E_t = 11,4 \cdot 10^{-6}$ și că temperatura variază între -20^0 și $+30^0$, deci $t^0 = 50^0$.

Avem:

$$H = (p + q) l^2 / 8 \nu = (300 + 500) 100^2 / 8 \cdot 8 = 125.000 \text{ kg}$$

$$sh a_0 = 4 \nu / l = 4 \cdot 8 / 100 = 0,32 \quad \therefore \quad ch a_0 = 1,05$$

$$N_1 = H ch a_0 = 131.250, \quad \Omega = N_1 / \mathfrak{U} = 65,6 \sim 66 \text{ cm}^2$$

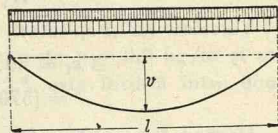


Figura 234

Vom face un calcul aproximativ utilizând formula (47), din care deducem

$$\Delta sha_0 \cdot sha_0 = 3 \cdot \Delta \varepsilon_1$$

Cablul în noua sa poziție are $sha_0 + \Delta sha_0$. Dacă punem această valoare în formula (36) dela curbe funiculare, avem:

$$H_1 = pl/2 sha_0 (1 + 3 \Delta \varepsilon_1 / sh^2 a_0)$$

sau

$$H_1 = 46875 / (1 + 29,3 \Delta \varepsilon_1)$$

Valoarea lui $\Delta \varepsilon_1$ este:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= 50,11,4 \cdot 10^{-6} + (H_1 - H) / 2,1 \cdot 10^6 \cdot 66 \\ &= [570 + 0,007215 (H_1 - H)] \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Dacă luăm pentru H_1 valoarea aproximativă $H_1 = 46875$, găsim $\Delta \varepsilon_1 = 0,0000055$ și deci

$$H_1 = 46875 / 1,000161 \simeq 46867 \text{ kg}$$

iar

$$\Delta sha_0 = 0,0000165 / 0,32 = 0,0000516$$

Așa dar, cablul rămâne sensibil în aceeași pozițiune. În adevăr, noua săgeată este 8,0013 m.

Rezistența maximă în noua poziție este însă

$$\mathfrak{R} = 46867 \cdot 1,05 / 66 = 745 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația Nr. 58. Între două puncte A și B , cari sunt între ele la distanțele l și h , măsurate pe o orizontală și verticală, se întinde un cablu de o secțiune dată și care poate suporta o rezistență maximă de asemenea dată. La temperatura t_0 suportă sarcina p , iar la o temperatură mai ridicată cu t_1 suportă sarcina $p + q$, ambele socotite pe unitatea de lungime de cablu (fig. 235).

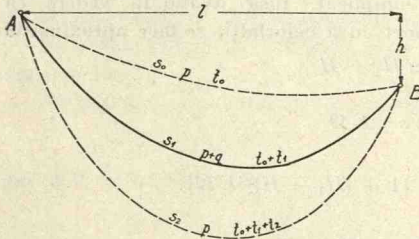


Figura 235

Cum trebuie montat cablul la temperatura $t_0 + t_1 + t_2$ sub acțiunea sarcinei p , astfel ca rezistența maximă să nu fie întrecută în niciunul din cazurile precedente?

În cele trei cazuri lungimile cablului vor fi respectiv s_0, s_1, s_2 , cărora le corespund cantitățile $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Când trecem dela prima poziție la ultima, ε_2 are valoarea:

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_0 + (t_1 + t_2) / Et + (H_2 - H_0) / E \Omega$$

când trecem dela poziția doua la ultima, ε_2 are valoarea

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_1 + t_2 / Et + (H_2 - H_1) / E \Omega$$

Dacă $\varepsilon_{20} > \varepsilon_{21}$, adică $\varepsilon_{20} - \varepsilon_{21} > 0$, atunci rezistența maximă este atinsă de cablu în prima sa poziție; iar dacă $\varepsilon_{20} - \varepsilon_{21} < 0$, în poziția doua. Prin urmare, după cum diferența $\varepsilon_{20} - \varepsilon_{21} \geq 0$, adică

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + t_1 / Et - (H_0 - H_1) / E \Omega \geq 0,$$

rezistența maximă în cablu va fi atinsă mai întâi în prima sau în a doua poziție.

În cazul când această diferență este nulă, atunci rezistența maximă este atinsă în același timp în primele două poziții.

Pentru că este vorba de a face numai o comparație, vom face uz de formulele aproximative.

Dacă ținem seama de formulele (26), (61) și (67) dela cable, diferența de mai sus se transformă în:

$$(a_0^2 - a_1^2)/6 + t_1/Et - [p/a_0 - (p+q)/a_1] l/2 E \Omega \geq 0$$

Pentru a este suficient să luăm valorile date de formula aproximativă (75).

Exemplu numeric. O funie de aramă, care cântărește $p = 0,9$ kg/m și are $\Omega = 1$ cm², $E = 0,78 \cdot 10^6$ kg/cm², $1/Et = 17 \cdot 10^{-6}$, este întinsă între două puncte A și B , între cari $l = 350$ m, $h = 50$ m.

În ce poziție trebuie pusă această funie la $+15^\circ$ C astfel ca la -20° C sub acțiunea greutateii proprii și la -5° C sub acțiunea și a unei greutatei suplimentare $q = 0,8$ kg/m de cablu, rezistența de $\mathfrak{X} = 1.200$ kg/cm² să nu fie întrecută.

Vom lua prima poziție cea dela -20° C, a doua cea dela -5° C și a treia cea dela $+15^\circ$. Cantitățile referitoare la prima și a doua poziție le vom afecta de indicii 0 și 1.

$$\text{Avem } N = \mathfrak{X}_a \cdot \Omega = 1200 \cdot 1 = 1.200 \text{ kg.}$$

$$c_0 = N/p = 1200/0,9 = 1333 \text{ m}$$

$$c_1 = N/(p+q) = 1200/(0,9+0,8) = 706 \text{ m}$$

$$a_0^2 = (l^2 + h^2)/(2 c_0 - h)^2 = (350^2 + 50^2)/(2 \cdot 1333 - 50)^2 = 0,0183$$

și

$$a_0 = 0,1352$$

$$a_1^2 = (350^2 + 50^2)/(2 \cdot 706 - 50)^2 = 0,0674 \quad \text{și} \quad a_1 = 0,2596, \quad t_1 = 20^\circ - 5^\circ = 15^\circ \text{ C}$$

Calculăm diferența arătată mai sus. Avem:

$$\begin{aligned} & (a_0^2 - a_1^2)/6 + t_1/Et - [p/a_0 - (p+q)/a_1] l/2 E \Omega = \\ & (0,0183 - 0,0674)/6 + 17 \cdot 15 \cdot 10^{-6} - [0,9/0,1352 - 1,7/0,2596] 350/2 \cdot 0,78 \cdot 10^6 \\ & = [-8183 + 255 - 22] 10^{-6} = -7950 \cdot 10^{-6} < 0 \end{aligned}$$

Prin urmare, poziția doua, adică cea dela -5° C și cu încărcătura suplimentară $q = 0,8$ kg/m trebuie avută în vedere la așezarea cablului la $+15^\circ$ C.

Vom căuta mai întâi elementele cablului la -5° C sub acțiunea sarcinei $p+q = 1,7$ kg/m. E cazul chestiunilor tratate la pag. 83 și 89. Plecăm dela:

$$a_1 = 0,27, \quad sh a_1 = 0,27329, \quad cha_1 = 1,03667$$

și facem calculele cu rigla

$$\Delta = 350^2/0,27^2 + 50^2/0,27329^2 - (2 \cdot 706 - 50)^2/1,03667^2 - 12280$$

$$\Delta a_1 = -12280/2 [350^2/0,27^3 + 50^2 \cdot 1,03667/0,27329^3]$$

$$- (2 \cdot 706 - 50)^2 \cdot 0,27329/1,03667^3 = -12280/2 \cdot 5895000$$

$$= -0,00104$$

Având $a_1 = 0,26896$ avem toate elementele cablului. Nu ne interesează decât:

$$H_1 = (p+q) l/2 a_1 = (0,9+0,8) 350/2 \cdot 0,26896 = 585,6 + 520,5 = 1106,1 \text{ kg}$$

E vorba ca dela această poziție — la -5° C și cu o încărcătură $p+q = 1,7$ kg/m — să trecem la poziția cablului dela $+15^\circ$ C și cu încărcătura $p = 0,9$ kg/m.

E cazul problemei precedente și vom urma aceeași cale.

Avem: $H_2 = p l/2 (\alpha_1 + \Delta \alpha_1) = p l/2 \alpha_1 (1 + \Delta \alpha_1/\alpha_1)$

Din ecuația (67) dela cable, avem

$$\alpha_1 \Delta \alpha_1 = 3 \Delta \varepsilon_1$$

și cu

$$\Delta \varepsilon_1 = t_2/Et + (H_2 - H_1)/E \Omega$$

avem:

$$H_2 = p l/2 \alpha_1 \{1 + 3 [t_2/Et + (H_2 - H_1)/E \Omega] / \alpha_1^2\}$$

Valoarea parantezei este:

$$1 + 3 (20.17 + (H_2 - 1106,1)/0,78.1)/0,26896^2 \cdot 10^6 = \\ 1 - (57480 - 52,9 H_2) 10^{-6}$$

și prin urmare

$$H_2 = 585,6/[1 - (57480 - 52,9 H_2) 10^{-6}] = 601,04$$

din care scoatem

$$a_2 = p l/2 H_2 = 0,9.350/2 \cdot 601,04 = 0,26205$$

Având pe a_2 , avem toate elementele cablului în această poziție. În genere ne interesează tensiunea maximă

Avem

$$\varepsilon_2 = \alpha_2^2/6 = 0,011445$$

$$\operatorname{sh} \psi = \operatorname{tg} \beta/(1 + \varepsilon_2) = 50/350 (1 + 0,011445) = 0,14110$$

$$\psi = 0,13778 \quad ; \quad \psi + a_2 = 0,39983 \sim 0,4 \quad ; \quad \operatorname{ch}(\psi + a_2) = 1,081$$

și deci

$$N = H \operatorname{ch}(\psi + a_2) = 601,04 \cdot 1,081 = 650 \text{ kg}$$

Cum temperaturile de montaj sunt variabile, se calculează ca mai sus tensiunea maximă ce corespunde fiecărei temperaturi și se întinde cablul până când un dinamometru arată tensiunea ce corespunde temperaturii la care se face montajul. În acest mod se așează cablul exact în poziția care trebuie.

XVII. DETERMINAREA REZISTENȚELOR LA GRINZILE SUPUSE LA MOMENTE ÎNCOVOIETOARE.

A) Grinzi făcute din materiale omogene.

1. Ipoteza lui Bernoulli.

În acest caz, rezultanta tuturor forțelor se reduce la un moment al cărui ax este cuprins în planul secțiunii.

Chestiunea care se pune este să se găsească distribuția rezistențelor pe secțiune. Numai experiența ne dă indicațiuni în acest sens.

Să luăm o bară cilindrică și pe conturul ei să trasăm două directoare AB și CD , normale pe axa barei, la o distanță oarecare și după aceea să o supunem la două momente încovoietoare egale și de sens contrar (fig. 236 a). Observăm că bara se îndoaie și că cele două directoare își modifică poziția relativă una față de alta.

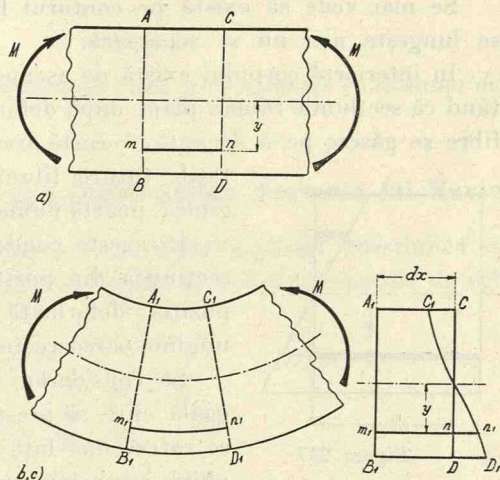


Figura 236

Mai întâiu se constată, că cele două directoare, cari erau cuprinse în plane normale pe axa barei, rămân cuprinse tot în plane normale pe axa barei, în noua sa poziție deformată fig. (236 b).

Dacă aceasta se petrece pentru fibrele barei situate pe contur, pe cari le vedem și le putem verifica, admitem că același lucru se petrece și pentru fibrele din interiorul corpului. Așa dar, *admitem că secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformațiune, rămân plane și normale pe axa barei și după deformațiune.*

Prin deformațiune, axa barei se transformă într'o curbă.

Intr'adevăr, dacă între cele două directoare trasăm și măsurăm înainte de deformațiune niște lungimi mn , toate egale între ele și dacă în poziția deformată măsurăm aceleași lungimi constatăm că unele din ele s'au lungit iar altele s'au scurtat. Dacă pe o bucată de hârtie figurăm poziția dreptelor $A_1 B_1$ și $C_1 D_1$ înainte de deformație, cu lungimea fibrelor înainte de deformație, și dacă pe aceeași figură punem lungimea fibrelor după deformație, vom căpăta o curbă $C_1 D_1$ ca cea din figura 236 c, din care ese în evidență că unele fibre s'au lungit iar altele s'au scurtat.

După cum am spus, experiența arată că chiar pentru corpuri cari nu ascultă de legea lui *Hooke*, în primă aproximație, extremitățile fibrelor deformatate se găsesc pe o dreaptă, adică curba $C_1 D_1$ este o dreaptă.

Această ipoteză, verificată experimental foarte târziu, este datorită lui *Iacob Bernoulli* (1705), și-i poartă numele.

Se mai vede că există pe conturul barei o fibră care nici nu se lungeste nici nu se scurtează.

În interiorul corpului există de asemenea astfel de fibre. Admițând că secțiunile rămân plane după deformațiune, rezultă că aceste fibre se găsesc pe o dreaptă. Această dreaptă, care conține extremitățile tuturor fibrelor cari nu-și modifică lungimea, poartă numele de *axa neutră a secțiunii*.

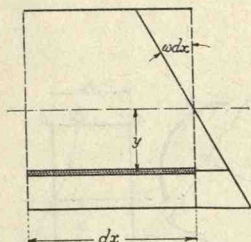


Figura 237

În aceste condițiuni, putem considera că secțiunea din poziția nedeformată ajunge în poziția deformată prin rotirea ei cu un unghi oarecare în jurul axei neutre.

Să considerăm două secțiuni la distanța egală cu 1. Să presupunem că aceste secțiuni se rotesc una față de alta cu unghiul ω . Unghiul ω poartă numele de *încovoiere specifică*.

Două secțiuni la distanța dx , se vor roti între ele cu unghiul ωdx .

Să considerăm o fibră de lungime dx și la distanța y de axa neutră (fig. 237). Lungirea ei va fi $y \omega dx$, iar lungirea specifică

(1)

$$\epsilon = y\omega dx/dx = \omega y$$

Așa dar, lungirile specifice sunt proporționale cu distanța dela axa neutră.

Această formulă interpretează analitic tot ce am spus până aci.

2. Distribuția rezistențelor pe secțiune.

Am găsit până acum expresia lungirii specifice ε .

Se știe că între lungirile specifice și rezistențe există relația de legătură care este dată de curba caracteristică și pe care putem să o punem sub forma:

$$\varepsilon = f(\mathfrak{X})$$

Ținând cont de formula (1), avem:

$$\varepsilon = \omega y = f(\mathfrak{X})$$

formulă care ne arată că distribuția rezistențelor pe secțiune, se face după ordonatele $\mathfrak{X}$ ale curbei caracteristice a materialului.

Aceasta este concluzia importantă a ipotezii lui *Bernoulli*.

În special în cazul când bara este făcută dintr'un material care ascultă de legea lui *Hooke* și rezistențele rămân în limita în care este aplicabilă această lege, atunci avem:

$$\varepsilon = \mathfrak{X}/E$$

și deci

$$(2) \quad \mathfrak{X} = E \omega \cdot y$$

adică, în acest caz, și rezistențele sunt proporționale cu distanța dela axa neutră.

3. Aflarea axei neutre și a rezistențelor. Formula lui Navier.

Odată legea de distribuție a rezistențelor găsită, chestiunea este rezolvată. De aci încolo n'avem decât să aplicăm ecuațiile de echilibru.

Vom scri că $N = 0$, deci

$$\Sigma \mathfrak{X} d\Omega = 0$$

care ținând seama de (2), ne dă

$$E\omega \int y d\Omega = 0$$

Însă $\int y d\Omega = S$, este momentul static al secțiunii în raport cu axa neutră. Deci avem condiția

$$(3) \quad S = 0$$

Aşa dar, *axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiunii*. Luăm axa neutră ca axă oz , iar normala pe direcţia momentului ca axă oy (fig. 238).

Să luăm momentele în raport cu axa oy . Momentul M , fiind perpendicular pe oy , dă o componentă egală cu zero. Momentul provenit din rezistenţele $\mathfrak{X}$ este $\int \mathfrak{X} d\Omega \cdot z$ şi avem:

$$(4) \quad E\omega \int y z d\Omega = E\omega \cdot I_{yz} = 0$$

Aşa dar, *axa neutră este conjugată direcţiunii normale momentului*. Prin urmare, dacă ni se dă axa momentului, aflăm numaidecât direcţiunea axei neutre. Să luăm momentele în raport cu axa neutră, cu care direcţiunea momentului face unghiul δ . Vom avea:

$$M \cos \delta = \int \mathfrak{X} d\Omega y = E\omega \int y^2 d\Omega = E\omega I$$

deci

$$(5) \quad E\omega = M \cos \delta / I$$

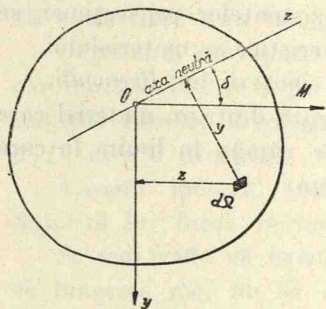


Figura 238

Vom nota totdeauna cu I momentul de inerție în raport cu axa neutră. Aşa dar, am găsit şi unghiul ω adică încovoierea specifică.

Deci, avem toate elementele: *poziția axei neutre: trece prin centrul de greutate; direcția ei: e conjugată normalei la direcția momentului; și încovoierea specifică, dată de formula (5).*

Dacă valoarea lui $E\omega$ din (5) o introducem în (2), avem:

$$(6) \quad \mathfrak{X} = My \cos \delta / I$$

Rezistența va fi maximă acolo unde y este maximum. Se notează raportul

$$(7) \quad I / y_{\max} = W$$

și se numește *momentul rezistent al secţiunii*. Atunci rezistența maximă are valoarea

$$(8) \quad \mathfrak{X}_{\max} = M \cos \delta / W$$

În cazul când axa momentului coincide cu o axă principală a secţiunii $\delta = 0$ și deci

$$\mathfrak{X}_{\max} = M / W$$

Aceste formule poartă numele de *formulele lui Navier*.

Observație. În cazul când axa momentului nu coincide cu o axă principală, atunci trebuie să determinăm unghiul δ .

Să presupunem că noi cunoaștem direcția axelor principale y_1Oz_1 și că axa momentului face cu axa Oz_1 unghiul δ_1 (fig. 239). Să mai presupunem că axa neutră Oz face, cu aceeași axă Oz_1 , unghiul δ_2 . Axa neutră este conjugată direcțiunii Oy și deci trebuie să avem $I_{yz} = 0$.

De pe figură se vede că avem:

$$y = y_1 \cos \delta_2 - z_1 \sin \delta_2$$

$$z = y_1 \sin \delta_1 + z_1 \cos \delta_1$$

și notând

$$\int y_1^2 d\Omega = I_{z_1}, \int z_1^2 d\Omega = I_{y_1}, \text{ avem:}$$

$$I_{yz} = I_{z_1} \sin \delta_1 \cos \delta_2 - I_{y_1} \sin \delta_2 \cos \delta_1 = 0$$

pentru că axele y_1Oz_1 fiind principale, avem $I_{y_1z_1} = 0$, și deci

$$(9) \quad I_{z_1} \operatorname{tg} \delta_1 = I_{y_1} \operatorname{tg} \delta_2$$

din care deducem $\operatorname{tg} \delta_2$, și deci δ_2 .

De pe figură se vede că: $\delta = \delta_2 - \delta_1$.

Determinarea lui $\cos \delta$ prin urmare, necesită calcule suplimentare.

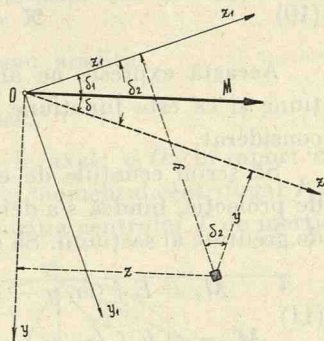


Figura 239

4. Altă formă a formulei lui Navier.

În loc să raportăm elementele secțiunii la axa neutră și la normala pe direcția momentului, le raportăm la două axe oarecare yOz , normale între ele și după cari componentele momentului sunt respectiv M_y și M_z .

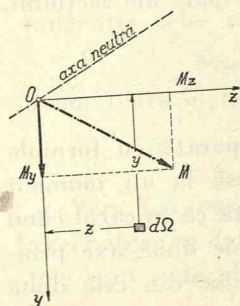


Figura 240

Prin deformare secțiunea plană se rotește în jurul axei neutre cu unghiul ω . Această rotație o descompunem în două componente, ω_y și ω_z , după cele două axe (fig. 240). Să considerăm un element de suprafață $d\Omega$, de coordonate y și z . Fibra care trece prin acest element de suprafață și care are lungimea dx se va lungi cu cantitatea $\omega_z y dx$, rotirea făcându-se în sensul dela x spre y .

Din cauza rotației ω_y , aceiași fibră se va scurta cu cantitatea $\omega_y z \, dx$, rotirea făcându-se în sensul dela z spre x . Lungirea totală va fi

$$\varepsilon = \omega_z y - \omega_y z$$

și deci

$$(10) \quad \mathfrak{K} = E (\omega_z y - \omega_y z)$$

Această expresie ne arată că rezistența variază liniar pe secțiune și că este funcțiune de coordonatele elementului de secțiune considerat.

Să scriem ecuațiile de echilibru. Nu e nevoie să scriem ecuațiile de proiecție, fiindcă s'a demonstrat că axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii. Să scriem numai ecuațiile de momente. Avem:

$$(11) \quad \begin{aligned} M_z &= E \int (\omega_z y - \omega_y z) y \, d\Omega = E (\omega_z I_z - \omega_y I_{yz}) \\ M_y &= -E \int (\omega_z y - \omega_y z) z \, d\Omega = -E (\omega_z I_{yz} - \omega_y I_y) \end{aligned}$$

cari ne dau:

$$E\omega_y = (M_y I_z + M_z I_{yz}) / (I_y I_z - I_{yz}^2)$$

$$E\omega_z = (M_y I_{yz} + M_z I_y) / (I_y I_z - I_{yz}^2)$$

și deci

$$(12) \quad \mathfrak{K} = [(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_y I_z + M_z I_{yz}) z] / (I_y I_z - I_{yz}^2)$$

Din această formulă generală, putem deduce toate cazurile particulare de până aci.

Să presupunem că am ales axele așa ca axa Oz să coincidă cu axa momentului. In acest caz $M_z = M$, $M_y = 0$, și deci

$$(13) \quad \mathfrak{K} = M (y I_y - z I_{yz}) / (I_y I_z - I_{yz}^2)$$

Să presupunem că Oy și Oz sunt axele principale ale secțiunii. In acest caz: $I_{yz} = 0$, și deci

$$(14) \quad \mathfrak{K} = M_z y / I_z - M_y z / I_y$$

Formula aceasta este importantă căci, comparată cu formula lui Navier, din cazul când secțiunea este supusă la un moment încovoiător dirijat după o axă principală, ne arată că în cazul când este supusă la două momente, dirijate după cele două axe principale, rezistența este egală cu suma rezistențelor din cele două cazuri, deci *putem suprapune efectele*.

5. Calculul rezistenții maxime din secțiune.

Ea se va produce în punctul de pe secțiune care va fi la cea mai mare distanță de axa neutră. Pentru aceasta ducem, la conturul secțiunii o tangentă paralelă cu axa neutră.

Punctul de tangentă are evident distanța cea mai mare dela axa neutră.

Aceasta putem să o facem grafic sau analitic.

a) Metoda grafică.

Să presupunem secțiunea raportată la axele y_1, z_1 în raport cu care avem momentele de inerție I_{y1}, I_{z1} și momentul centrifugal I_{y1z1} (fig. 24). Cu ajutorul acestora găsim poziția centrului T de inerție.

Să presupunem că direcția momentului M , este dreapta OM . Direcția normală lui OM , este Oy , iar direcțiunea conjugată acesteia, dreapta Oz care trece prin extremitatea corzii ce trece prin T și se taie cu Oy și Oz pe cercul lui Mohr.

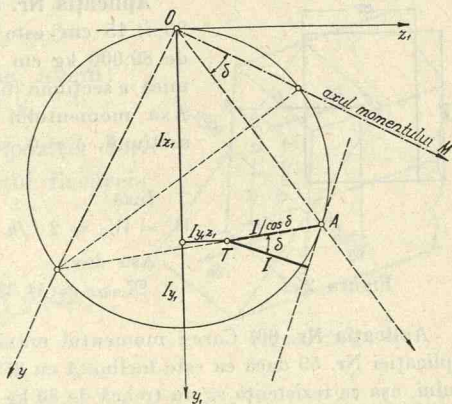


Figura 241

Momentul de inerție I este lungimea perpendiculării ce pleacă din T la tangenta la cercul lui Mohr unde dreapta Oz taie acest cerc.

Se observă de pe figură că dreapta TA este tocmai $I/\cos\delta$. Dacă ducem o tangentă la contur paralelă cu Oz , aceasta va atinge conturul într'un punct care va avea cel mai mare y . De obicei putem duce două tangente. Vom lua, evident, pe y care corespunde tangentei celei mai depărtate. Deci în formula

$$\mathfrak{X}_{max} = My_{max} \cos\delta / I = My_{max} / (I/\cos\delta)$$

avem toate elementele cunoscute.

b) Metoda analitică.

Vom lua cazul cel mai curent, adică al formulei (14). Direcția axei neutre se determină prin condiția evidentă, că pe ea rezistențele sunt nule, deci $\mathfrak{X} = 0$ sau

$$M_z y / I_z - M_y z / I_y = 0$$

sau dacă notăm $M_y/M_z = \operatorname{tg} \delta_1$ și $y/z = \operatorname{tg} \delta_2$, dăm tocmai peste formula:

$$(9) \quad \operatorname{tg} \delta_1 \cdot I_z = \operatorname{tg} \delta_2 \cdot I_y$$

Odată găsită direcția axei neutre putem găsi și punctul cel mai depărtat pe axa neutră, ale cărui coordonate sunt să zicem y_0, z_0 . Notăm $I_z/y_0 = W_z$ și $I_y/z_0 = W_y$, în acest caz formula (14) se reduce la:

$$(15) \quad \mathfrak{X}_{\max} = M (\cos \delta_1 / W_z - \sin \delta_1 / W_y)$$

dacă notăm:

$$M_z = M \cos \delta_1 \quad \text{și} \quad M_y = M \sin \delta_1.$$

În aplicațiuni este comodă formula lui Navier sub această formă.

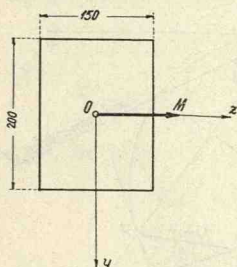


Figura 242

Aplicația Nr. 59. O grindă de lemn de secțiune 20×15 cm este supusă la un moment încovoiător de 80.000 kg cm al cărui ax este paralel cu latura mică a secțiunii (fig. 242). Se cere rezistența maximă. Axa momentului coincidând cu o axă principală a secțiunii, $\delta = 0$, și deci avem:

$$\mathfrak{X} = M/W.$$

Însă

$$W = W_z = 2 I/h = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 20^2 = 1000 \text{ cm}^3.$$

Așa dar:

$$\mathfrak{X}_{\max} = M/W = 80000/1000 = 80 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația Nr. 60. Care-i momentul maxim care-l poate suporta secțiunea aplicației Nr. 59 dacă ea este înclinată cu 25° față de axa orizontală a momentului, așa ca rezistența să nu treacă de 80 kg/cm^2 (fig. 243).

În acest caz avem:

$$M_z = M \cos 25^\circ, \quad M_y = -M \sin 25^\circ.$$

Direcția axei neutre o găsim din relația:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{tg} \delta_1 I_z/I_y = -\operatorname{tg} 25^\circ \cdot 20^2/15^2 = -0,830$$

și deci $\delta_2 = -39^\circ 40'$. De pe figură rezultă că rezistențele maxime vor fi în punctele A și B. Cu:

$$W_z = 15 \cdot 20^2/6 = 1000 \text{ cm}^3, \quad W_y = 20 \cdot 15^2/6 = 750 \text{ cm}^3.$$

$$\cos \delta_1 / W_z + \sin \delta_1 / W_y = 0,906/1000 + 0,423/750 = 1,471 \cdot 10^{-3}$$

avem:

$$M = (80/1,471) \cdot 10^3 = 54250 \text{ kg cm}.$$

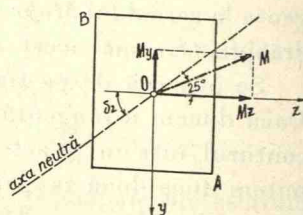


Figura 243

6. Suprafața rezistențelor.

Dacă în fiecare punct al secțiunii ridicăm o normală pe secțiune, pe care luăm un segment egal cu rezistența în acel punct,

capetele segmentelor vor fi pe o suprafață, care am văzut că este un plan, căci am avut $N = E\omega \cdot y$ (fig. 244). Această suprafață poartă numele de *suprafața rezistențelor*.

Se observă că volumul corpului astfel format, din regiunea comprimată, este tocmai egală cu suma compresiunilor și o vom nota cu N_c . Avem deci

$$(16) \quad N_c = E \omega \int_c y d\Omega = E \omega S_c$$

în care S_c este momentul static al porțiunii de secțiune comprimată, în raport cu axa neutră.

Același lucru și pentru partea întinsă:

$$(16) \quad N_t = E \omega S_t$$

ori suma lor este nulă, deci:

$$(17) \quad N_t + N_c = 0, \quad S_t + S_c = 0$$

sau neținând seama de semne, avem:

$$(17) \quad N_t = N_c, \quad S_t = S_c$$

Vrem să știm care este poziția lor. N'avem decât să luăm momentul fiecăreia în raport cu axa neutră.

Vom avea:

$$E \omega \int_c y^2 d\Omega = y_c \cdot E \omega \int_c y d\Omega$$

Sau:

$$(18) \quad I_c = y_c S_c$$

în care y_c este distanța dela axa neutră până la poziția rezultantei compresiunilor.

Pentru partea întinsă avem la fel:

$$(15) \quad I_t = y_t S_t$$

Distanța y_r , între cele două rezultante N_t și N_c , este egală cu suma lor, deci

$$(19) \quad y_r = y_t + y_c$$

Putem, cu ajutorul acestor elemente, să dăm o altă expresie lui I , adică momentului de inerție total al secțiunii. Avem

$$(20) \quad I = I_c + I_t = S_c y_c + S_t y_t = S_c y_r = S_t y_r$$

În anumite cazuri, este comod a utiliza valoarea lui I sub această formă.

Valoarea lui N_c va fi evident

$$(21) \quad N_c = M/y_r$$

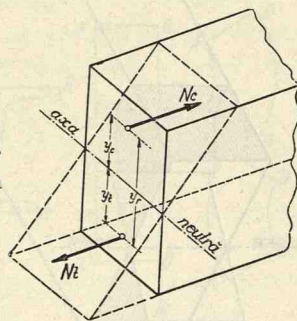


Figura 244

7. Rezultatele teoriei comparate cu rezultatele experiențelor.

a) Din cele arătate până acum, rezultă că pe suprafața secțiunii se dezvoltă rezistențe la tensiune și compresiune ca la piesele supuse numai la tensiune sau numai la compresiune.

Dacă supunem la încercare o bară până la rupere prin încovoiere, se constată că rezistența la rupere prin încovoiere $\mathfrak{R}_i$, este todeauna mai mare ca rezistența totală, $\mathfrak{R}_t$, a unei bare făcută din același material, însă supusă numai la tensiune sau numai la compresiune.

Diferiți autori au deosebit rezistența la rupere, de rezistența la rupere prin tensiune provocată de încovoiere, recomandând valori diferite pentru cele două feluri de rezistențe admisibile.

Această deosebire se explică prin faptul că experiențele se fac în condițiuni cu totul diferite. Am văzut, că admitând ipoteza lui *Bernoulli* și trecând dincolo de limita de proporționalitate, distribuția rezistențelor se face după curba caracteristică a materialului, (fig. 245). În aceste condițiuni este greu de făcut un calcul al distribuției rezistențelor pe secțiune. Diferențele însă, între $\mathfrak{R}_t$ și $\mathfrak{R}_i$ nu sunt așa de mari.

Bazați pe acest fapt și pe acela că în construcțiile noastre rămânem cu rezistențele admisibile sub limita de proporționa-

litate, considerăm formula lui Navier exactă până la această limită, și admitem rezistențele admisibile pentru tensiunea și compresiunea provocată de încovoiere, exact aceleași ca pentru piesele făcute din același material, supuse numai la tensiune sau numai la compresiune.

b) Din formula lui Navier rezultă că la aceeași distanță de axa neutră, avem aceeași rezistență. *C. Bach* supunând la încovoiere un fier $\square$ a obținut rezistențele înscrise pe fig. 246 a, deci în neconcordanță cu formula lui Navier.

Aceste diferențe se explică în modul următor:

Mai întâiu secțiunea nu e supusă numai la un moment încovoietor, ci și la alte solicitări. Dacă presupunem că secțiunea barei ar fi formată numai din inima fierului $\square$ atunci aceasta singură ar rezista la momentul încovoietor.

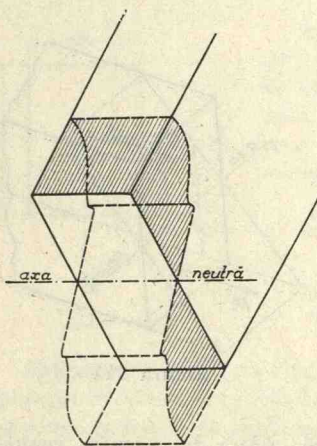


Figura 245

Fierul $\square$ având și aripi, pentru ca acestea să intre în acțiune, va trebui ca în secțiunea de contact între inimă și aripi să se desvolte niște rezistențe la lunecare. De aci rezultă că rezistențele în punctele A și C sunt în orice caz mai mari ca în B și D . Așa fiind, aripile fierului $\square$ văzute în plan, se vor deforma ca în fig. 246 b , luând formele $AABB$ și $CCDD$, curbe. Așa fiind și secțiunea fierului $\square$ se va deforma ca în figură.

Aceasta ne arată, că rezistențele pe secțiune nu depind numai de elementele geometrice y și I , ci și de alte elemente în care forma secțiunii joacă un rol important.

Alte exemple, date de *Bach*, arată diferențe și mai mari.

Un calcul în acest sens este dificil.

Practicește, ne mulțumim a face calculul pe baza formulei lui *Navier*, care este foarte simplă, corectând toate aceste nepotriviri cu ajutorul rezistențelor admisibile.

c) O altă nepotrivire vine din faptul că grinzile nu sunt supuse numai la momente ci și la alte solicitări. În genere sarcinile se aplică pe grindă în anumite puncte și deci se desvoltă și niște rezistențe $\mathcal{K}_y$, de cari nu se ține seamă în formula lui *Navier*.

Acestea au o valoare cu deosebire importantă în dreptul sarcinilor concentrate și a reazimelor.

Cu ajutorul calculelor de altă natură decât cele indicate aci și mai ales cu ajutorul experiențelor făcute pe corpuri transparente cu ajutorul luminii, s'a arătat că pentru grinzi de secțiune dreptunghiulară de laturi $b \times h$, formula lui *Navier* dă rezultate absolut neconforme cu realitatea pe o lungime $2,5 h$ dela reazime. De asemenea, în dreptul sarcinilor concentrate, rezultatele diferă de acelea date de formula lui *Navier*. Calcule exacte în acest sens nu există.

Pentru aceste motive vom aplica în toate cazurile formula lui *Navier* și vom corecta rezultatele cu datele experiențelor, fixându-ne rezistențele admisibile în consecință. Cu alte cuvinte, rezistențele admisibile ce se fixează pentru o grindă de 10 m deschidere nu se vor aplica fără discernământ pentru o grindă de 10 cm deschidere.

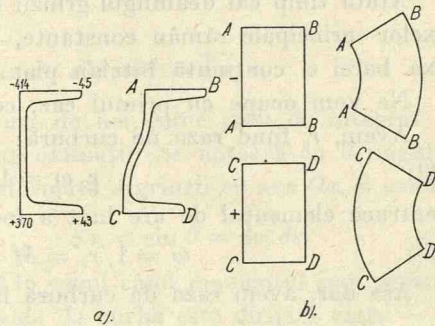


Figura 246

8. Deformația grinzilor prin încovoiere.

a) Ecuația diferențială a axei deformate.

În cele ce urmează ne vom ocupa de deformarea axei grinzii.

Prin încovoiere am văzut că două secțiuni cari se găsesc între ele la distanță egală cu unitatea se rotesc între ele cu unghiul:

$$(5) \quad \omega = M \cos \delta / EI$$

Pentru prescurtare, vom denumi produsul EI : *modulul de rigiditate* al grinzii în secțiunea considerată.

Din cele de mai sus, rezultă că raza de curbura și deci și centrul de curbura al axei grinzii deformate, se găsește într'un plan normal pe axa neutră și trecând prin centrul de greutate al secțiunii.

Atâta timp cât dealungul grinzii direcția momentului și direcția axelor principale rămân constante, curba în care se transformă axa barei e conținută într'un plan. Altfel, curba va fi oarecare.

Ne vom ocupa cu primul caz, cel mai curent întâlnit.

Avem, r_c fiind raza de curbura:

$$(22) \quad r_c \omega = 1$$

pentru că elementul de arc luat a fost $ds = 1$. Avem deci

$$(23) \quad \omega = 1/r_c = M \cos \delta / EI.$$

Așa dar, avem raza de curbura în fiecare punct al axei grinzii deformate și deci putem să o construim.

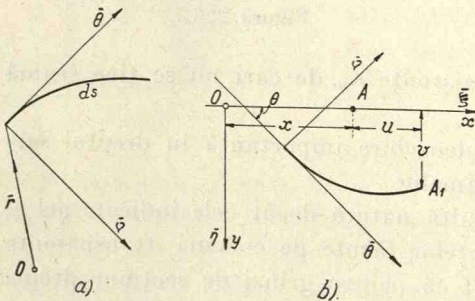


Figura 247

Din această formulă se vede că dacă elementele din partea doua a ecuației (23) rămân constante pe o porțiune oarecare de grindă, atunci, pe acea porțiune, axa deformată a grinzii va fi un cerc.

În genere însă nu este așa, căci M variază ca valoare, de asemenea și I . Mai mult. E mai comod să avem axa deformată a piesei raportată la un sistem de axe de coordonate.

Ecuația unei curbe plane raportată la polul O (fig. 247 a), este:

$$d^2 \bar{r} / ds^2 = \bar{v} / r_c$$

în care $\bar{r}$ este raza vectorie ce pleacă din O la un punct de pe curbă, iar r_c este raza de curbura a curbei în acel punct.

În cele ce urmează presupunem axa piesei coincidând cu axa Ox , iar axa Oy cuprinsă în planul normal pe axa neutră.

Un punct A de pe axa grinzii, ale cărei coordonate sunt x și $y = 0$, după deformare ajunge în punctul A_1 , parcurgând drumurile u și v după cele două axe de coordonate (fig. 247 b).

Dacă luăm O ca origine, avem:

$$\bar{r} = (x + u) \bar{\xi} + v \bar{\eta}$$

Introducând această valoare în ecuația de mai sus avem:

$$\bar{\xi} d^2u/ds^2 + \bar{\eta} d^2v/ds^2 = \bar{v}/r_c$$

Aceasta este ecuația axei deformate a grinzii.

Dacă o multiplicăm succesiv scalar cu $\bar{\xi}$ și $\bar{\eta}$, căpătăm următoarele două ecuații:

$$d^2v/ds^2 = \bar{\eta} \bar{v}/r_c \quad d^2u/ds^2 = \bar{\xi} \bar{v}/r_c$$

Ecuațiile acestea, sub forma de aci, sunt greu de integrat și de aceea se fac următoarele aproximații. Se notează cu θ unghiul care îl face tangenta la axa deformată a grinzii cu axa Ox , și avem:

$$\bar{\eta} \bar{v} = -\cos \theta, \quad \bar{\xi} \bar{v} = \sin \theta = dv/ds.$$

Am pus semnul $-$, pentru că în cazul când momentul este pozitiv în secțiunea considerată normala la curbă este dirijată către $-\bar{\eta}$. În genere unghiul θ este foarte mic, așa că dacă punem $\cos \theta = 1$ și $\sin \theta = \theta$, eroarea care o facem este de mărimea unui infinit mic de ordinul al doilea.

În acest caz prima ecuație se reduce la:

$$(24) \quad d^2v/ds^2 = -1/r_c$$

Dacă în ecuația doua, introducem valoarea lui $\bar{\xi} \bar{v}$ și r_c de mai sus căpătăm:

$$d^2u/ds^2 = -(dv/ds)(d^2v/ds^2) = -\frac{1}{2} d(dv/ds)^2/ds$$

care integrată ne dă:

$$du/ds = -\frac{1}{2} (dv/ds)^2 + C$$

Constanta de integrare este nulă în cazul când luând originea axelor în secțiunea în care $\sin \theta = dv/ds = 0$, avem și $du/ds = 0$. În adevăr în această secțiune, adică acolo unde tangenta la axa deformată este paralelă cu axa Ox , elementul ds care nu se lungeste se proiectează în adevărata mărime și deci $du/ds = 0$.

Această ecuație ne mai arată că dacă v este un infinit mic de ordinul întâi, atunci u este de mărimea unui infinit mic de ordinul al doilea.

Și sub această formă ecuațiile sunt greu de integrat. Vom mai face o a doua aproximație.

Având în vedere că $ds^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) dx^2$ și că θ este foarte mic atunci în paranteză putem neglija infinitul mic de ordinul al doilea $\operatorname{tg}^2 \theta$ față de 1 și putem lua: $ds = dx$.

Așa fiind cele două ecuații se transformă în:

$$(24) \quad d^2v/dx^2 = -1/r_c, \quad du/dx = -\frac{1}{2} (dv/dx)^2 + C$$

Sub această formă vom utiliza aceste două ecuații în tot ce urmează.

Ținând cont de (23) prima ecuație (24) se transformă în:

$$(25) \quad d^2v/dx^2 = -M \cos \delta / EI$$

În cazul când $\delta = 0$, avem

$$(26) \quad d^2v/dx^2 = -M/EI$$

Când direcția momentului încovoiator este oarecare, în locul formulei (25) putem întrebuința formula (26), descompunând momentul M în două componente M_z și M_y , după cele două axe principale și atunci aplicăm de două ori ecuația (26), deci:

$$(26) \quad \begin{aligned} d^2v/dx^2 &= -M_z/EI_z \\ d^2w/dx^2 &= -M_y/EI_y, \end{aligned}$$

și astfel găsim cele două componente ale deplasării, pe cari le punem apoi între ele.

Am găsit astfel ecuația diferențială a axei deformate a grinzii.

b) Integrarea analitică a ecuației diferențiale a axei deformate.

Plecăm dela ecuația (26), pe care integrând-o odată, avem:

$$(27) \quad dv/dx = - \int M dx / EI$$

Să stabilim constantele de integrare. Să presupunem că avem o porțiune de grindă supusă la momentele încovoiatoare date de curba momentelor (fig. 248). Extremitatea din stânga a bucății de grindă o luăm ca origine a axelor de coordonate, axa grinzii ca axă Ox , și normala pe ea, cuprinsă în planul normal pe axa neutră, ca axă Oy . Dacă în fiecare secțiune, împărțim valoarea momentului prin EI , căpătăm o curbă a cantităților M/EI .

În origine, dv/dx reprezintă tocmai tangenta la axa deformată a grinzii și pe care o notăm $tg \theta_0$.

În intervalul dela 0 la x , partea doua are valoarea $\int_0^x (M/EI) dx$, care nu e altceva decât suprafața curbei ale cărei ordonate sunt M/EI , și pe care o notăm:

$$\int_0^x (M/EI) dx = \Omega_{ox}.$$

Avem deci:

$$(27) \quad dv/dx - tg \theta_0 = -\Omega_{ox}$$

Așa dar, diferența tangentelor, între două puncte ale axei deformate a grinzii este tocmai suprafața Ω_{ox} definită ca mai sus.

Să mai integrăm odată, avem:

$$v - v_0 - x tg \theta_0 = -\int_0^x \Omega dx$$

În membrul întâi am pus limitele, notând cu v_0 deplasarea în sensul lui Oy a originii grinzii, pe care o vom denumi săgeata în origine.

Partea doua a ecuației, o integrăm prin părți și avem:

$$\int_0^x \Omega dx = \left| x \Omega \right|_0^x - \int_0^x x d\Omega$$

Însă din:

$$\int_0^x (M/EI) dx = \Omega_{ox}$$

deducem:

$$(M/EI) dx = d\Omega,$$

și ținând seamă că $x\Omega$, în origine este nulă, avem:

$$\int_0^x \Omega dx = x\Omega_{ox} - \int_0^x (M/EI) x dx$$

Partea doua a membrului al doilea al acestei relații nu este altceva decât momentul static al suprafeței, ale cărei ordonate sunt M/EI , în raport cu originea și deci o putem pune sub forma $e_1 \Omega_{ox}$, dacă e_1 este distanța dela origine până la centrul de greutate a suprafeței Ω_{ox} . Punând aceasta în ecuația de mai sus și ținând seamă de pe figură că $e_1 + e_2 = x$, avem

$$\int_0^x \Omega dx = e_2 \Omega_x = S_{x0}$$

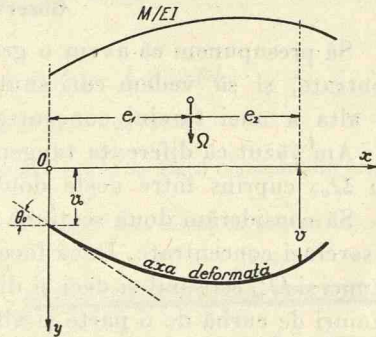


Figura 248

adică *momentul static al suprafeței a cărei ordonate sunt M/EI , în raport cu secțiunea x , și deci:*

$$(28) \quad \nu - \nu_0 - x \operatorname{tg} \theta_0 = -S_{x0}$$

În cazul când $EI = ct$ pe toată lungimea grinzii, atunci formulele (27) și (28) le punem sub forma:

$$(27') \quad d\nu/dx - \operatorname{tg} \theta_0 = -\Omega_{ox}/EI$$

$$(28') \quad \nu - \nu_0 - x \operatorname{tg} \theta_0 = -S_{x0}/EI$$

În acest caz, Ω_{ox} și S_{x0} reprezintă chiar suprafața și momentul static a suprafeței momentelor.

Prin urmare am găsit valorile săgeților ν și ale tangentelor $d\nu/dx$, explicit, în funcțiune de curba momentelor și de elementele grinzii.

Aci avem de făcut două observații și anume în cazul sarcinilor concentrate.

Observația I-a.

Să presupunem că avem o grindă supusă numai la sarcini concentrate, și să vedem cari sunt tangentele și săgețile de o parte și alta a unei sarcini concentrate.

Am văzut că diferența tangentelor între două secțiuni este egală cu Ω_{ox} cuprins între acele două secțiuni.

Să considerăm două secțiuni infinit vecine, de o parte și de alta a sarcinei concentrate. Dacă facem ca distanța între ele să fie nulă, atunci și Ω_{ox} este nul și deci și diferența între tangentele celor două ramuri de curbă de o parte și alta a sarcinei concentrate este nulă, deci au aceeași tangentă. Așa dar, axa deformată a grinzii este o curbă continuă, fără coturi oricare ar fi sistemul de încărcări.

În aceleași condiții să considerăm diferența săgeților. Din formula (28) se vede că atunci când distanța între cele două secțiuni tinde către zero, atunci x și S_{x0} tind de asemenea către zero și deci și diferența săgeților este nulă.

Așa dar, *ramurile de curbă ale axei grinzii deformată, de o parte și alta a unei sarcini concentrate, au în dreptul sarcinii concentrate aceeași tangentă și aceeași săgeată.*

Observația II-a.

Din ecuația (26) se vede că expresia lui ν depinde de expresia lui M . Deci pe grindă în cazul când $EI = ct$ vom avea atâtea

expresiuni ale lui v , câte avem pentru M . Așa dar, în special în cazul sarcinilor concentrate, când expresia momentelor este diferită în diferitele intervale, vom avea atâtea curbe diferite câte intervale avem între sarcini. Toate aceste curbe sunt legate între ele prin legăturile stabilite mai sus și anume, ele au în dreptul sarcinilor concentrate aceleași tangente și săgeți.

Practicește noi vom proceda așa.

În cazul când expresia momentului este simplă, vom proceda direct la integrarea ecuației (26), iar în cazul când este mai complicată vom utiliza norma generală indicată mai sus.

Aplicația Nr. 61. O grindă simplu rezemată pe două reazime de nivel, are $EI = ct$ și suportă o sarcină p kg/m. Să se găsească săgeata la mijlocul ei (fig. 249). Expresia momentului pe toată lungimea grinzii este

$$M = \frac{1}{2} p x x'$$

În acest caz putem proceda direct la integrare.

Avem:

$$d^2v/dx^2 = - p x (l - x) / EI$$

care ne dă:

$$dv/dx - tg \theta_0 = - p x^2 (\frac{1}{2} l - \frac{1}{3} x) / 2 EI$$

$$v - v_0 - x tg \theta_0 = - p x^3 (2 l - x) / 24 EI$$

Avem de determinat cele două constante v_0 și $tg \theta_0$. Dacă reazimul din origine nu se deplasează atunci $v_0 = 0$.

Pentru determinarea lui $tg \theta_0$, avem trei căi. Sau scriem ca pentru $x = \frac{1}{2} l$ $tg \theta = 0$ din motive de simetrie, sau că pentru $x = l$ pentru aceleași motive $tg \theta = - tg \theta_0$, sau că pentru $x = l$, $v = 0$.

Din una din ele căpătăm:

$$tg \theta_0 = p l^3 / 24 EI$$

Avem deci

$$v = p x (l^3 - 2lx^2 + x^3) / 24 EI$$

Aceasta este ecuația axei deformată a grinzii. Se obișnuiește a se nota raportul $x/l = \xi$ și atunci avem:

$$v = p l^4 \xi (1 - 2\xi^2 + \xi^3) / 24 EI$$

$$= p l^4 \xi \xi' (1 + \xi \xi') / 24 EI$$

Pentru $x = \frac{1}{2} l$ sau $\xi = \frac{1}{2}$, avem

$$v_{\max} = 5 pl^4 / 384 EI.$$

Pe curbă (fig. 249) s'au înscris coeficienții $\xi (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$ din 0,1 l în 0,1 l . Curba desenată la scară mare dă o idee de alura axei deformată a piesei.

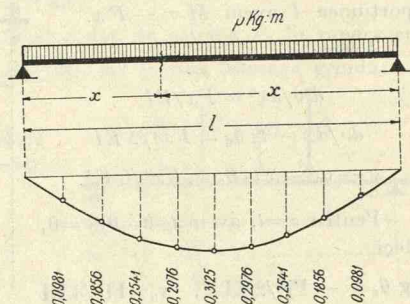


Figura 249

Aplicația Nr. 62. O grindă de secțiune constantă incastată la o extremitate și liberă la cealaltă, suportă o sarcină p kg/m. Să se găsească săgeata la extremitatea ei (fig. 250).

Expresia momentului într-o secțiune oarecare este $M = -\frac{1}{2} p x^2$, și deci:

$$d^2 v / dx^2 = p x^2 / 2 EI.$$

care ne dă:

$$dv/dx - \operatorname{tg} \theta_0 = p x^3 / 6 EI$$

$$v - v_0 - x \operatorname{tg} \theta_0 = p x^4 / 24 EI.$$

Punem condiția că pentru $x = l$ atât $\operatorname{tg} \theta$ cât și v sunt nule, deci

$$\operatorname{tg} \theta_0 = -p l^3 / 6 EI, \quad v_0 = p l^4 / 8 EI$$

deci:

$$v = p (3 l^4 - 4 l x + x^4) / 24 EI$$

sau cu notația $x/l = \xi$:

$$v = p l^4 (3 - 4 \xi + \xi^4) / 24 EI$$

Curba din fig. 250 dă alura axei deformată a grinzii, iar cifrele scrise reprezintă coeficientul $3 - 4 \xi + \xi^4$ din $0,1 l$ în $0,1 l$.

Aplicația Nr. 63. O grindă, de secțiune constantă, este incastată la o extremitate și suportă o sarcină F . Să se găsească săgeata maximă și ecuația axei deformată a piesei (fig. 251).

Luăm originea în dreptul sarcinii F . Pe porțiunea b momentul este nul, raza de curbură infinită, deci axa rămâne dreaptă, nedeformată. Pe porțiunea l avem $M = -F x$.

Avem:

$$d^2 v / dx^2 = F x / EI$$

$$dv/dx - \operatorname{tg} \theta_0 = F x^2 / 2 EI$$

$$v - v_0 - x \operatorname{tg} \theta_0 = F x^3 / 6 EI.$$

Pentru $x = l$, avem $\operatorname{tg} \theta = 0$, $v = 0$, deci

$$\operatorname{tg} \theta_0 = -F l^2 / 2 EI, \quad v_0 = F l^3 / 3 EI$$

iar:

$$v = F (2 l^3 - 3 l^2 x + x^3) / 6 EI = F l^3 (2 - 3 \xi + \xi^3) / 6 EI.$$

Curba din fig. 251 și cifrele scrise dau alura curbei și valoarea expresiei din paranteză. La dreapta forței F săgeata este egală cu $v_0 + x' \operatorname{tg} \theta_0$, care este o dreaptă căci variază cu x' . Tangentele la extremități se taie la $\frac{1}{3} l$.

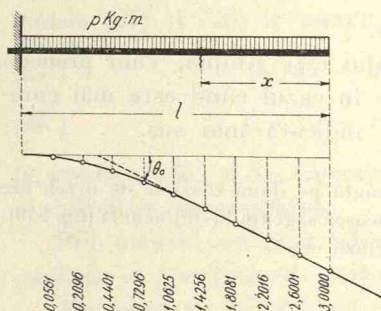


Figura 250

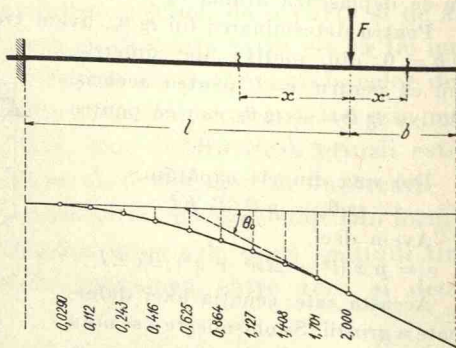


Figura 251

Să calculăm pentru acest caz și valorile lui u . Vom utiliza ecuația două (24) în care intră expresia lui $d\nu/dx$. Pentru cazul $b=0$, avem:

$$d\nu/dx = F(x^2 - l^2)/2EI$$

și deci:

$$u = -\frac{1}{2} (F/2EI)^2 \int_0^l (x^2 - l^2)^2 dx$$

Punând condiția că pentru $x=l$ să avem $u=0$, găsim:

$$u = (8 - 10\xi + 10\xi^2 - 3\xi^5) F^2 l^5 / 120 E^2 I^2$$

care pentru $\xi=0$, ne dă:

$$u_0 = F^2 l^5 / 15 E^2 I^2 = Fl^2 \nu_0 / 5 EI.$$

Aplicație numerică. Să presupunem $l=4$ m $b=0$ și că grinda este formată dintr'un fier dublu I profil 20 cm $y_{max}=10$ cm. La extremitate suportă o sarcină F așa că $\mathfrak{K}_{max}=1400$ kg/cm².

Dacă ținem seamă $\mathfrak{K}_{max} = Fly_{max}/I$ atunci găsim:

$$\nu_0 = \mathfrak{K} l^2 / 3 E y_{max} = 1400 \cdot 400^2 / 3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 10 = 3,56 \text{ cm}$$

$$u_0 = \mathfrak{K} l \nu_0 / 5 E y_{max} = 1400 \cdot 400 \cdot 3,56 / 5 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 10 = 0,02 \text{ cm.}$$

Din aceste cifre se vede că u are valori într'adevăr foarte mici.

Să calculăm și $tg\theta_0$ avem:

$$tg\theta_0 = -Fl^2/EI = -\mathfrak{K}l/2Ey_{max} = -1400 \cdot 400 / 2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 10 = -0,0133$$

valoare care justifică aproximațiile ce s'au făcut la stabilirea formulelor.

Aplicația Nr. 64. O grindă de secțiune constantă, simplu rezemată la extremități, este încărcată cu sarcinile verticale concentrate F_1, F_2 , etc. Să se găsească săgeata maximă (fig. 252).

Suprafața momentelor de pe întreaga grindă dată de sarcina F_1 este:

$$\frac{1}{2} (F_1 a_1 b_1 / l) l = \frac{1}{2} F_1 a_1 b_1$$

iar de toate sarcinile va fi

$$\Omega_{01} = \frac{1}{2} \Sigma F_i a_i b_i$$

Momentul static a suprafeței momentelor dat de sarcina F_1 în raport cu reazimul din dreapta este $\frac{1}{6} F_1 a_1 b_1 \cdot (l + b_1)$, iar pentru întreaga grindă:

$$S_{10} = \frac{1}{6} \Sigma F_i a_i b_i (l + b_i)$$

Pentru grindă noastră noastră avem condițiile că pentru $x=0$ și $x=l$ să avem și $\nu=0$, deci

$$tg\theta_1 - tg\theta_0 = -\Omega_{01}/EI$$

$$l tg\theta_0 = S_{10}/EI$$

din care deducem și:

$$l tg\theta_1 = -S_{01}/EI.$$

Așa dar, avem înclinarea grinzii la cele două capete ale sale.

Expresia săgeții într'un punct oarecare al grinzii va fi:

$$\nu = x tg\theta_0 - S_{x0}/EI$$

Săgeata va fi maximă acolo unde $tg\theta=0$, deci în secțiunea în care:

$$\Omega_{0x} = EI tg\theta_0$$

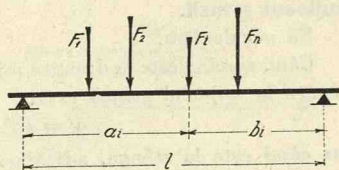


Figura 252

De aci determinăm pe x , adică secțiunea în care săgeata este maximă. N'avem decât să scriem expresia lui S_{x0} în această secțiune și avem valoarea exactă a săgeții.

Se poate face și un calcul aproximativ însă mai expeditiv ca precedentul.

Să presupunem că avem o singură sarcină pe grindă la distanțele $a = \alpha l$, $b = \beta l$, așa fel că $\alpha + \beta = 1$ și $\alpha > \beta$ (fig. 253).

Avem:

$$\Omega_{01} = \frac{1}{2} Fl^2 \alpha \beta, \quad S_{10} = \frac{1}{6} Fl^3 \alpha \beta (1 + \beta), \quad EI \operatorname{tg} \theta_0 = S_{10}/l = \Omega_{0x}$$

Suprafața momentelor până în dreptul sarcinei F este $F a^2 b/2 l$, iar până în dreptul secțiunii x , Ω_{0x} și ele sunt în raportul a^2/x^2 , de .i:

$$F a^2 b/2 a^2 l = \Omega_{0x}/x^2 = S_{10}/l x^2$$

de unde deducem pentru secțiunea cu săgeata maximă:

$$\xi_m = x/l = \sqrt{\frac{1}{3} a (1 + \beta)}$$

Când sarcina este la mijlocul grinzii, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ și rezultă $\xi_m = \frac{1}{2}$, iar când sarcina este la limită, pe reazimul din dreapta, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ și rezultă $\xi_m = 1/\sqrt{3} = 0,577$.

Așa dar, oricare ar fi poziția sarcinei pe grindă, secțiunea în care are loc săgeata maximă se găsește în intervalul $0,577 l - 0,5 l = 0,077 l$, măsurat dela mijlocul grinzii, deci într'un interval foarte mic. Secțiunea în care avem săgeata maximă și poziția forței, se găsesc de aceeași parte față de mijlocul grinzii.

Practicește nu se face o eroare apreciabilă, dacă se ia ca săgeată maximă săgeata dela mijlocul grinzii.

Eroarea maximă ce se face, când am avea o singură sarcină pe grindă, foarte aproape de o extremitate, este de 2,5%. Sarcinile de o parte și alta a mijlocului grinzii apropie secțiunea în care are loc săgeata maximă de mijlocul grinzii. Pentru sarcini simetrice ea coincide cu mijlocul grinzii.

Pentru aceste considerațiuni și pentru faptul că în jurul maximului variațiile sunt mici, **putem lua practicește drept săgeată maximă, săgeata dela mijlocul grinzii.**

Să o calculăm.

Când sarcina este la dreapta mijlocului grinzii, adică pentru $\beta \leq 0,5$, expresia săgeții la mijlocul grinzii este:

$$v = Fl^3 \beta (3 - 4 \beta^2) / 48 EI$$

iar când este la stânga, adică pentru $\alpha \leq 0,5$:

$$v = Fl^3 \alpha (3 - 4 \alpha^2) / 48 EI.$$

Săgeata totală va fi egală cu suma celor două expresii.

Când avem o singură sarcină la mijlocul grinzii, avem:

$$v_{max} = Fl^3 / 48 EI.$$

Din expresiile de mai sus se vede că:

$$(29) \quad R = \Sigma F \alpha (3 - 4 \alpha^2) + \Sigma F \beta (3 - 4 \beta^2)$$

este o forță concentrată care aplicată la mijlocul grinzii, produce aceeași săgeată în această secțiune, ca și sistemul de sarcini F dat.

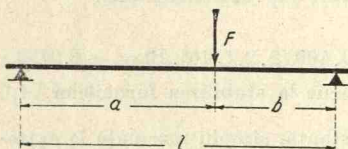


Figura 253

În expresiile de mai sus vom grupa sarcinile așa ca să avem totdeauna α și $\beta \leq 0,5$.

Exemplu numeric. Fie o grindă de 10 m deschidere cu sarcinile din fig. 254.

Avem:

$$3000 \cdot 0,2 (3 - 4 \cdot 0,2^2) = 1704$$

$$5000 \cdot 0,5 (3 - 4 \cdot 0,5^2) = 5000$$

$$8000 \cdot 0,4 (3 - 4 \cdot 0,4^2) = 7552$$

$$1000 \cdot 0,3 (3 - 4 \cdot 0,3^2) = 792$$

$$R = 15048 \text{ kg}$$

Așa dar, forța $R = 15,048 \text{ t}$, aplicată la mijlocul grinzii produce în această secțiune aceeași săgeată ca și sistemul de sarcini dat.

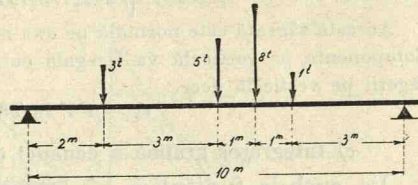
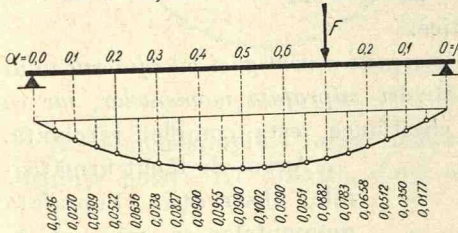


Figura 254

Aplicația Nr. 65. Să se scrie ecuația axei deformată a grinzii din fig. 255 pentru o sarcină F care ocupă o poziție dată. Presupunem deci α și β dați.

Pentru secțiunile dela stânga sarcinei avem



săgeata totală j va avea valoarea dată de relația:

$$j^2 = v^2 + w^2$$

sau

$$j = F l^3 \sqrt{1/I_z^2 + 1/I_y^2} / 48 \cdot \sqrt{2} \cdot E$$

Această săgeată este normală pe axa neutră deci face unghiul δ_2 cu axa Oy_1 . Componenta pe verticală va fi egală cu proiecția celor două componente ale săgeții pe verticală deci

$$v_y = F l^3 I_p / 96 E I_{y1} I_{z1}$$

c) Integrarea grafică a ecuației diferențiale a axei deformate.

La curbele funiculare s'a stabilit ecuația:

$$H d^2y / dx^2 = -p$$

care s'a integrat. Cu alte cuvinte am găsit pe y în funcție de x și p , cu ajutorul unui poligon funicular.

Dacă se compară această ecuație cu:

$$E I d^2v / dx^2 = -M$$

se vede că sunt absolut identice.

Prin urmare, axa deformată a grinzii o vom găsi cu ajutorul unui poligon funicular, luând ca încărcări suprafața momentelor, iar ca distanță polară pe EI . Deci, chestiunea este complet rezolvată.

Avem de făcut următoarele observații. Suprafața momentelor se măsoară în $\text{kg cm} \cdot \text{cm} = \text{kg cm}^2$, EI în kg cm^2 , deci în aceleași unități.

Distanța polară EI , este o cantitate foarte mare, așa că poligonul funicular iese foarte întins și deci săgețile foarte mici. Dacă distanța po-

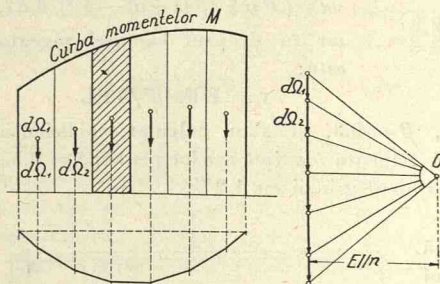


Figura 257

lară se reduce la EI/n , atunci ordonatele curbei funiculare vor fi de n ori mai mari. Dacă scara desenului pentru lungimi este $1/n$ și dacă luăm distanța polară EI/n , atunci ordonatele curbei funiculare vor fi de n ori mai mari, deci pe desen le vom avea în adevărata lor mărime.

Ecuația diferențială a axei deformate este de ordinul al doilea și necesită două constante de integrare. Am văzut analitic cum pentru diferitele cazuri fixăm cele două constante. Grafic este tot așa de simplu. Dacă de ex. avem o grindă simplu rezemată și dacă la capete săgețile sunt nule, linia de închidere o vom trasa așa ca săgețile la capete să fie nule (fig. 257) ș. a. m. d.

În construcții se întâlnesc grinzi cari nu au I constant pe toată lungimea lor. Analitic e greu de integrat, căci pe diferite intervale trebuie să modificăm M în consecință, luând valorile M/EI diferite.

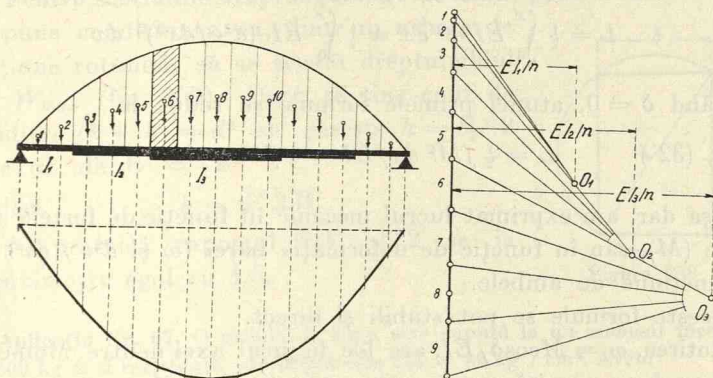


Figura 258

Aci e mai simplu. Luăm pentru diferite porțiuni de grindă distanțe polare EI diferite, după cum se arată pe fig. 258.

9. Lucrul mecanic acumulat de grinzi prin încovoiere.

Plecăm dela formula fundamentală stabilită pentru un element de volum și care este:

$$dL = \frac{1}{2} \int \kappa^2 dV / E$$

în care în loc de dV punem $d\Omega \cdot dx$.

Notăm cu dL lucrul mecanic acumulat de elementul dx de grindă, deci:

$$dL/dx = \frac{1}{2} \int \kappa^2 d\Omega / E$$

integrarea făcându-se pe toată suprafața secțiunii. Dacă în loc de κ punem valoarea sa dată de formula lui Navier, avem:

$$(30) \quad dL/dx = \frac{1}{2} M^2 \cos^2 \delta / EI$$

sau

$$(31) \quad L = \frac{1}{2} \int_0^x M^2 \cos^2 \delta \cdot dx / EI$$

Am avut însă:

$$\omega = M \cos \delta / EI$$

și deci

$$(32) \quad L = \frac{1}{2} \int_0^x M \cos \delta \cdot \omega \cdot dx$$

sau încă

$$(33) \quad L = \frac{1}{2} \int_0^x EI \omega^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^x EI (d^2 v / dx^2)^2 dx$$

Când $\delta = 0$, atunci primele formule se reduc la

$$(31'), (32') \quad L = \frac{1}{2} \int M^2 dx / EI = \frac{1}{2} \int M \omega dx.$$

Așa dar, am exprimat lucrul mecanic în funcție de forțele exterioare (M), sau în funcție de deformația barei (ω și $d^2 v / dx^2$) sau în funcțiune de ambele.

Aceste formule se pot stabili și direct.

Rotirea, $\omega = M \cos \delta / EI$, are loc în jurul axei neutre. Momentul care produce această rotire este proiecția lui M pe axa neutră, deci $M \cos \delta$.

Lucrul mecanic este produsul între moment și unghiul de rotire.

Pentru că ω crește liniar cu M , suprafața lucrului mecanic este un triunghi și deci vom multiplica expresia de mai sus cu factorul $\frac{1}{2}$. Acestea toate au loc pentru un element de grindă de lungime 1, pentru lungimea dx , vom avea

$$(30) \quad dL/dx = \frac{1}{2} M^2 \cos^2 \delta / EI,$$

ecuație stabilită anterior.

10. Dimensionarea grinzilor la încovoiere.

De fapt aceasta este adevărata problemă care ni se pune și anume: dându-ni-se momentul încovoiitor și rezistențele admisibile, să găsim secțiunea care satisface acestor condițiuni.

Am avut $\mathfrak{X} = M/W$, și deci $W = M/\mathfrak{X}$, deci chestiunea e să găsim secțiunea care are un W dat.

Problema pusă așa are o infinitate de soluțiuni.

Numai pentru secțiunile care depind de un singur parametru, precum pătratul și cercul, avem o singură soluție pentru că pentru ele:

$$W = \frac{1}{6} a^3 \quad \text{și} \quad W = \frac{1}{4} \pi r^3.$$

Aceste secțiuni însă nu se prea întrebuintează decât în cazuri speciale.

Pentru toate celelalte secțiuni, care depind de doi sau mai mulți parametri, *li se pune condiția ca să fie economice, adică W cerut, să se realizeze cu cea mai mică secțiune practicește posibilă.*

Pentru secțiunile dreptunghiulare de lemn, pentru care $W = \frac{1}{6}bh^2$, se pune condițiunea ca, dintr'un arbore de secțiune rotundă, să se scoată dreptunghiul cu W_{max} (fig. 259). Dacă se ține cont de condiția $b^2 + h^2 = d^2$ se găsește $h = b\sqrt{2}$ care ne dă $W = \frac{1}{3}b^3$ și deci $b = \sqrt[3]{3W}$

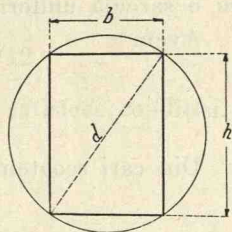


Figura 259

În practică raportul $h/b = \sqrt{2}$ se ia aproximativ egal cu 1,5.

Aplicația Nr. 67. O grindă de lemn este supusă la un moment încovoiător de 800 kg m și rezistența admisibilă este $\mathfrak{R}_a = 80 \text{ kg/cm}^2$. Avem

$$W = M/\mathfrak{R}_a = 80000/80 = 1000 \text{ cm}^3.$$

$$\text{deci } b = \sqrt[3]{3W} = \sqrt[3]{3 \cdot 1000} = 14,4 \text{ cm}, \quad h = 1,5b = 20,4 \text{ cm}.$$

Aceste dimensiuni se rotunjesc respectiv la $b = 15$, $h = 20 \text{ cm}$.

W cerut de calcul, adică $W = M/\mathfrak{R}_a$, poartă numele de W necesar, iar cel realizat din rotunjirea dimensiilor poartă numele W efectiv. Va trebui deci ca $W_n = W_e$. Pentru a fi acoperiți, când nu putem realiza această egalitate, vom rotunji așa dimensiile, încât să avem $W_e > W_n$.

În cazul nostru se întâmplă că $\frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}15 \cdot 20^2 = 1000 \text{ cm}^3$, adică, $W_e = W_n$.

Pentru grinzile de fier, cărora prin laminare li se pot da diferite forme de secțiuni, se obțin cele mai economice grinzi, atunci când materialul este așezat în secțiune cât mai departe de axa neutră. Așa sunt făcute grinzile în I sau $\square$. În tabele, pentru diferite profile, se dă valoarea lui W .

Aplicația Nr. 68. Fie o grindă de oțel moale supusă la un moment încovoiător $M = 50 \text{ tm}$, cu o rezistență admisibilă de $\mathfrak{R}_a = 1400 \text{ kg/cm}^2$.

Avem $W_n = M/\mathfrak{R}_a = 5000000/1400 = 3570 \text{ cm}^3$. În tabele găsim profilul I Nr. 55 care are $W_e = 3610 \text{ cm}^3$. În acest caz rezistența efectivă va fi

$$\mathfrak{R}_e = M/W_e = 5000000/3610 = 1385 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă am fi luat profilul imediat mai mic, adică Nr. 50, care are $W = 2750 \text{ cm}^3$, rezistența ar fi fost de 1818 kg/cm^2 , deci mult peste rezistența admisibilă impusă, de 1400 kg/cm^2 .

La dimensionarea grinzilor intervine și deformația lor și anume, ni se impune ca săgeata maximă să nu fie mai mare ca $\nu = l/n$, în care n pentru grinzile de fier este cuprins între 500 și 900.

Să presupunem că avem o grindă simplu rezemată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

Avem

$$\mathfrak{X} = M/W = pl^2 h/16 I$$

$$\nu = 5 pl^4/384 EI$$

Din cari scoatem

$$h = \mathfrak{X} nl/4,8 E$$

În aceleași condiții, pentru o sarcină concentrată la mijlocul grinzii, avem:

$$h = \mathfrak{X} nl/6 E$$

Dacă în aceste două cazuri, h este mai mare decât valorile indicate aci, ν este mai mic decât cel ce ni s'a impus. Dacă este mai mic, atunci dimensionarea se va face pe baza deformației, deducând I ce corespunde.

Aplicația Nr. 69. O grindă de 8 m deschidere, este încărcată cu o sarcină de $p = 3$ t/m. Să se găsească fierul I , care să satisfacă: $\mathfrak{X}_a = 1400$ kg/cm² și săgeata să fie 1/900 din deschidere.

Avem:

$$M = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 8^2 = 24 \text{ tm.}$$

$$W_n = M/\mathfrak{X}_a = 2400000/1400 = 1712 \text{ cm}^3.$$

pentru care corespunde I Nr. 42½ cu $W_e = 1740$ cm³ și are înălțimea $h = 42,5$ cm.

Înălțimea trebuie să fie, presupunând $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm²

$$h = \mathfrak{X} nl/4,8 E = 1400 \cdot 900 \cdot 800 / 2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,8 = 100 \text{ cm.}$$

Așa dar, cu profile I nu se poate realiza în același timp $\mathfrak{X}_{max} = 1400$ și $\nu = l/900$, din cauză că cel mai mare profil este Nr. 60, cu $h = 60$ cm.

Așa dar, renunțăm de a avea $\mathfrak{X}_e = 1400$, vom avea o rezistență mai mică, însă cu $\nu = l/900 = 0,89$ cm.

Din $\nu = 5 pl^4/384 EI$, deducem: $I = 5 p l^4/384 E \nu$, care ne dă:

$$I = 5 \cdot 30 \cdot 800^4 / 384 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,89 = 85.500 \text{ cm}^4$$

la care corespunde **profilul I Nr. 55** care are $I = 99.180$ cm⁴, și $W_e = 3610$ cm³. Deci dacă condiția de săgeată e satisfăcută, aceea a rezistențelor nu; acestea sunt mai reduse. În adevăr $\mathfrak{X}_e = 2400000/3610 = 665$ kg/cm².

Observația I-a.

Dacă ne-am impune $\sigma = l/700$ și $\mathfrak{N}_a = 1.400 \text{ kg/cm}^2$, cu $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, atunci rezultă pentru grinzile de fier, în cele două cazuri: a unei sarcini uniform distribuite și a unei sarcini concentrate la mijloc:

$$h = l/10,28 \approx l/10, \text{ și } h = l/12,8 \approx l/12.$$

Pentru grinzile pe cari le alcătuim pentru a satisface condiției de deformație, luăm în regulă generală

$$h = l/8 - l/12$$

Observația II-a.

In cazul când secțiunea este slăbită cu găuri de nit sau bulon, atunci se va ține seama de această slăbire, luându-se W al secțiunii nete.

Aplicația Nr. 70. Exemplu de alcătuire de secțiune. Să presupunem că secțiunea unei grinzi este supusă la un moment încovoietor, $M = 400 \text{ t m}$, și ni se impune $\mathfrak{N}_a = 1400 \text{ kg/cm}^2$. Avem

$$W_n = 4000000/1400 = 28570 \text{ cm}^3.$$

Secțiunea o vom compune din o inimă, patru corniere și niște platbande (fig. 260).

Să presupunem că deschiderea grinzii este $l = 16 \text{ m}$, înălțimea h indicată în figură o luăm $l/10 = 1,6 \text{ m}$. Toate elementele secțiunii se solidarizează între ele cu nituri de $23 \text{ mm } \varnothing$.

Momentul de inerție al inimei este:

$$bh^3/12 = 1,2 \cdot 160^3/12 = 409600 \text{ cm}^4;$$

se admite că niturile, prin diverse îmbinări, slăbesc inima cam cu 15%, deci: momentul de inerție al inimei este

$$I_i = 0,85 \cdot 409600 = 348160 \text{ cm}^4.$$

Să găsim momentul de inerție al cornierelor. Distanța, dela centrul de greutate al cornierei până la axa neutră, este $80 - 3,44 = 76,56 \text{ cm}$, și momentul de inerție va fi $4 (394 + 29,7 \cdot 76,56^2) = 697900 \text{ cm}^4$.

În secțiune cad niturile indicate pe figură, al căror moment de inerție trebuie scăzut. Avem $4 \cdot 2,3 \cdot 1,3 (79,35^2 + 75^2) = 142600 \text{ cm}^4$, deci

$$I_c = 697900 - 142600 = 555300 \text{ cm}^4$$

Așa dar, inima și cele patru corniere au un moment de inerție net:

$$I_0 = I_i + I_c = 348160 + 555300 = 903500 \text{ cm}^4$$

căruia îi corespunde $W_0 = 2 I_0/h = 11294 \text{ cm}^3$, deci cu mult mai mic ca cel

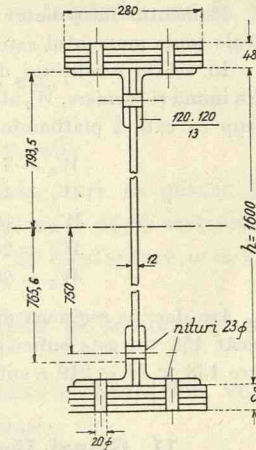


Figura 260

ce ni se cere. Mai adăugăm platbandele indicate în figură. Dacă notăm cu δ grosimea totală a platbandelor, vom avea:

$$I = I_0 + b [h + 2\delta]^3 - h^3 / 12 \simeq I_0 + \frac{1}{2} b \delta (h + \delta)^2$$

neglijând termenul $\frac{1}{6} b \delta^3$, care este mic în comparație cu ceilalți.

În acest caz

$$W = [I_0 + \frac{1}{2} b \delta (h + \delta)^2] / (\frac{1}{2} h + \delta)$$

Dacă notăm $W - W_0 = \Delta W$, atunci avem:

$$\delta = h \Delta W / [b (h + \delta)^2 - 2 W]$$

care se rezolvă prin încercări, luând în partea doua a ecuației pentru δ , ca primă valoare, $\delta = 0$. Dacă lățimea brută a platbandelor este 280 mm și dacă se scad două găuri de nit, avem lățimea netă $b = 28 - 2 \cdot 2,3 = 23,4$ cm, $\Delta W = 28.570 - 11.294 = 17.276$ cm³.

Rezolvând ecuația de mai sus — calculele făcute cu rigla — ne dă succesiv pentru δ valorile 5,1 cm, 4,74 cm, 4,76 cm. Vom lua **patru platbande de câte 12 mm grosime deci în total 4,8 cm.**

Pentru această grosime, cu ajutorul formulei de mai sus, se găsește

$$W_e = [903500 + \frac{1}{2} 23,4 \cdot 4,8 (160 + 4,8)^2] / (\frac{1}{2} 160 + 4,8) \simeq 28600 \text{ cm}^3$$

deci sensibil egal cu cel cerut.

Momentul încovoietor pe grindă variază după curba momentelor, așa că acolo unde momentul este mai mic, putem suprima din platbande.

În aceste condițiuni dacă W_0 este momentul rezistent al grupului format din inimă și corniere, W_1 al grupului precedent cu câte o platbandă, W_2 al aceluiași grup cu câte 2 platbande, etc., atunci ele pot suporta următoarele momente:

$W_0 = 11290$	cm ³	suportă un	$M = 158$	tm
$W_1 = 15630$	„	„	„	$M = 219$
$W_2 = 19960$	„	„	„	$M = 280$
$W_3 = 24300$	„	„	„	$M = 340$
$W_4 = 28600$	„	„	„	$M = 400$

Așa dar, pe regiunea din grindă pe care momentul încovoietor este mai mic decât 158 tm este suficientă secțiunea ce corespunde lui W_0 , pe regiunea pe care $158 < M < 219$ e suficientă secțiunea ce corespunde lui W_1 ș. a. m. d.

11. Grinzi făcute din materiale cari nu ascultă de legea lui Hooke.

La aceste materiale legătura între rezistențe și deformațiuni este dată de relația: $\varepsilon = \mathfrak{R}^a / E_0$. Și pentru aceste corpuri, la încovoiere, se admite ipoteza lui *Bernoulli*. Chiar admitând această simplificare, formulele ce rezultă sunt așa de complicate, încât și pentru aceste corpuri se admite *legea lui Hooke*. Rezultatele evident nu sunt exacte și atunci se fac corecțiunile necesare potrivit rezistențelor admisibile în consecință.

B) Grinzi făcute din materiale neomogene. Grinzi de beton armat.

1. Generalități.

Și pentru aceste grinzi, la încovoiere, se admit cele două ipoteze: a lui *Hooke* și *Bernoulli*.

În baza celei de a doua ipoteze, rezultă o axă neutră, în jurul căreia secțiunea se rotește cu unghiul ω , încovoierea specifică.

Vom avea deci:

$$\varepsilon = \omega y.$$

La secțiunile neomogene ale grinzilor, fiecare element de suprafață este caracterizat prin câte un alt E . Lungirile specifice în diferite puncte ale secțiunii vor fi:

$$\varepsilon = \mathcal{X}/E, \quad \varepsilon_1 = \mathcal{X}_1/E_1, \text{ etc.}$$

și deci:

$$\mathcal{X} = E\omega y, \quad \mathcal{X}_1 = E_1\omega y, \text{ etc.}$$

Dacă expresiile de mai sus le înmulțim și împărțim cu E , și dacă notăm:

$$n_1 = E_1/E, \quad n_2 = E_2/E, \text{ etc.}$$

atunci avem:

$$(1) \quad \mathcal{X} = E\omega y, \quad \mathcal{X}_1 = n_1 E\omega y, \text{ etc.}$$

Așa dar, rezistențele în diversele materiale cari se găsesc la o aceeași distanță de axa neutră, sunt aceleași ca și când secțiunea ar fi făcută din materialul al cărui coeficient de elasticitate este E , înmulțite respectiv cu $n_1, n_2, \text{ etc.}$

Ecuatiile (1) ne dau distribuția rezistențelor pe secțiune și pe diversele materiale.

Pentru a găsi poziția axei neutre și valoarea rezistențelor, vom aplica cele două ecuații de echilibru și anume:

$$\int \mathcal{X} d\Omega = 0, \quad \int \mathcal{X} y d\Omega = M,$$

cari ne dau respectiv:

$$(2) \quad \int n_1 y d\Omega = 0 \quad (3) \quad E\omega \int n_1 y^2 d\Omega = M.$$

Expresiile de sub semnul sumei nu sunt decât momentul static și de inerție al secțiunii, ca și când aceasta ar fi făcută din materialul al cărui coeficient de elasticitate este E , însă fiecare element de suprafață mărit de $n_1, n_2, \dots$ ori, după materialul ce compune fiecare element de secțiune.

În cadrul acestei convențiuni putem scri:

$$\int n_1 y d\Omega = S, \quad \int n_1 y^2 d\Omega = I$$

și atunci ecuațiile (2) și (3), le putem scri:

$$(2) \quad (3) \quad S = 0, \quad E\omega I = M$$

adică tocmai sub forma care am avut-o la încovoierea barelor cu secțiunea făcută dintr'un material omogen.

Ecuațiile (1), în acest caz, le putem scri sub forma:

$$(1) \quad \varkappa = My/I, \quad \varkappa_1 = n_1 My/I, \text{ etc.}$$

Așa dar, ecuațiile cari ne dau rezistențele pentru acest fel de secțiuni, le-am adus la tipul secțiunilor omogene.

Vom face câteva aplicațiuni la grinzile de beton armat, cari au o întrebuințare curentă în construcțiuni.

S'a mai spus că vergelele de fier băgate în beton, aderă de acesta și formează un *monolit*.

Intr'o secțiune transversală a unei grinzi de beton armat vom avea elemente de suprafață de fier și de beton, supuse la tensiune sau la compresiune.

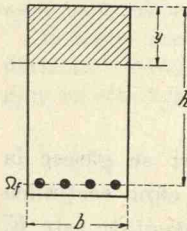


Figura 261

Se admite că fierul are la tensiune și compresiune același E_f , a cărui valoare este: $E_f = 2,1 \cdot 10^6$ kg./cm². Pentru elementele de suprafață de beton supuse la compresiune se ia $E_b = 0,14 \cdot 10^6$ kg/cm². Pentru elementele de suprafață de beton, supuse la tensiune se ia $E = 0$, cu toate că betonul la tensiune, are o oarecare rezistență, care însă este mică în raport cu celelalte arătate mai sus.

Dacă se raportează totul la secțiunea comprimată de beton, atunci pentru fier avem

$$n = E_f/E_b = 15$$

iar pentru secțiunea de beton supusă la tensiune avem $n = 0$, cu alte cuvinte ca și când secțiunea de beton întinsă n'ar exista.

În aceste condițiuni, armătura de fier se pune în regiunea întinsă a secțiunii grinzii. O secțiune supusă la un moment pozitiv, se va prezenta ca în fig. 261. Regiunea hașurată este formată din beton supus la compresiune, vergelele de fier, a căror secțiune totală este Ω_f , vor fi supuse la tensiune, iar secțiunea nehașurată este formată din beton supus la tensiune. Așa se prezintă în genere o secțiune de grindă de beton armat.

În cele ce urmează vom nota cu y distanța dela axa neutră până la fibra de beton cea mai obosită, adică în care avem rezistența maximă $\mathfrak{X}_b$, iar cu h distanța dela centrul de greutate a secțiunii de fier, Ω_f , până la aceeași fibră. Cu b notăm lățimea grinzii.

În aceste condiții rezistențele maxime $\mathfrak{X}_b$, în beton și $\mathfrak{X}_f$, în centrul de greutate a secțiunii de fier, după formula (1) de mai sus, vor fi:

$$(4) \quad \mathfrak{X}_b = My/I, \quad \mathfrak{X}_f = nM(h-y)/I$$

Dacă se împart între ele aceste relații și dacă se notează:

$$(5) \quad k = n \mathfrak{X}_b / (n \mathfrak{X}_b + \mathfrak{X}_f)$$

se găsește:

$$(6) \quad y = kh$$

Cu alte cuvinte, pentru niște rezistențe $\mathfrak{X}_b$ și $\mathfrak{X}_f$ date, raportul între y și h rezultă.

Se mai obișnuiește a se pune:

$$(7) \quad \Omega_f = \varphi \cdot bh$$

în care caz φ poartă numele de *coeficientul de armare a secțiunii*.

Formulele (5) — (7) sunt generale și le aplicăm la toate secțiunile.

2. Secțiuni dreptunghiulare cu armătură simplă.

Ele se prezintă ca în fig. 261. Poziția axei neutre o vom găsi scriind $S = 0$, sau $S_t - S_c = 0$.

Avem:

$$S_c = \frac{1}{2} by^2 \quad \text{și} \quad S_t = n \Omega_f (h - y)$$

și deci:

$$by^2 - 2 n \Omega_f (h - y) = 0$$

Dacă ținem seamă de (6) și (7) căpătăm:

$$k^2 - 2 n \varphi (1 - k) = 0$$

care ne dă:

$$(8) \quad k = n \varphi \left[\sqrt{2/n \varphi + 1} - 1 \right]$$

și

$$(9) \quad \varphi = k^2 / 2 n (1 - k) = k \mathfrak{X}_b / 2 \mathfrak{X}_f$$

Așa dar, din (8) găsim poziția axei neutre. De ecuația (9) vom face uz mai târziu.

Acum putem găsi momentul de inerție care are valoarea:

$$(10) \quad I = \frac{1}{3} by^3 + n \Omega_f (h - y)^2$$

E comod a da și alte expresii pentru I .

Avem:

$$I = y_r S_c = y_r S_t$$

și:

$$y_c = I_c / S_c = \frac{2}{3} y; \quad y_t = h - y; \quad y_r = h - \frac{1}{3} y = h (1 - \frac{1}{3} k)$$

și deci:

$$(11) \quad \begin{aligned} I &= n \Omega_f (h - y) (h - \frac{1}{3} y) = n \Omega_f h^2 (1 - k) (1 - \frac{1}{3} k) \\ &= \frac{1}{2} b y^2 (h - \frac{1}{3} y) = \frac{1}{2} k^2 b h^3 (1 - \frac{1}{3} k) \end{aligned}$$

Dacă ducem aceste valori în (4), căpătăm:

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{K}_b &= 2 M / b y (h - \frac{1}{3} y) = 2 M / b h^2 k (1 - \frac{1}{3} k) \\ \mathfrak{K}_f &= M / \Omega_f (h - \frac{1}{3} y) = M / \Omega_f h (1 - \frac{1}{3} k) = M / b h^2 \varphi (1 - \frac{1}{3} k) \end{aligned}$$

Aceste expresiuni putem să le scrim și direct, luând momentul forțelor interioare în raport cu axele ce trec prin punctele de aplicație ale lui N_t și N_c . Avem într'adevăr

$$M = y_r N_c = y_r N_t$$

Dacă în locul lui N_c și N_t , punem valorile lor:

$$N_c = \frac{1}{2} b y \mathfrak{K}_b, \quad N_t = \mathfrak{K}_f \Omega_f$$

găsim tocmai relațiile (12).

Prin urmare dacă ni se dă M și dimensiunile grinzii, putem afla rezistențele din fier și beton.

În practică, în genere, ni se pune problema invers și anume, dându-ni-se momentul M , lățimea b a grinzii și rezistențele $\mathfrak{K}_b$ și $\mathfrak{K}_f$, din beton și fier, să găsim pe h . Odată găsit h , din relațiile (9) și (7) găsim pe Ω_f .

În aceste condițiuni relațiile (5) și (9) ne dau direct valorile lui k și φ .

Dacă aceste valori le introducem în ultima relație (12) și dacă notăm:

$$(13) \quad \alpha^2 = 1 / \varphi (1 - \frac{1}{3} k) \mathfrak{K}_f$$

găsim:

$$(14) \quad h = a \sqrt{M / b}$$

Având pe φ și h , relația (7) ne dă pe Ω_f . Cu ajutorul acestor formule s'au întocmit tabele, cari pentru valori date ale lui $\mathfrak{K}_b$ și $\mathfrak{K}_f$ ne dau direct valorile lui k , φ și α și cari înlesnesc foarte mult proiectarea secțiunilor.

Aplicația Nr. 71. O grindă de beton armat, lată de 40 cm, e supusă la un moment încovoietor de 8,4 tm. Rezistențele admisibile fiind, $\mathfrak{R}_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ și $\mathfrak{R}_f = 1200 \text{ kg/cm}^2$, să se dimensioneze grinda. Avem:

$$k = n \mathfrak{R}_f / (n \mathfrak{R}_b + \mathfrak{R}_f) = 15.50 / (15.50 + 1200) = 0,385$$

$$1 - \frac{1}{3} k = 1 - \frac{1}{3} 0,385 = 0,872$$

$$\varphi = k \mathfrak{R}_b / 2 \mathfrak{R}_f = 0,385 \cdot 50 / 2 \cdot 1200 = 0,008$$

$$a^2 = 1 / \varphi (1 - \frac{1}{3} k) \mathfrak{R}_f = 1 / 0,008 \cdot 1200 \cdot 0,872 = 0,1195 \therefore a = 0,3457$$

$$h = a \sqrt{M/b} = 0,3457 \sqrt{840000 / 40} \simeq 50 \text{ cm}$$

Și apoi:

$$\Omega_f = \varphi b h = 0,008 \cdot 40 \cdot 50 = 16 \text{ cm}^2$$

Secțiunea de fier o vom face din vergele ce se găsesc în comerț. Vom lua $5 \text{ } \varnothing 22 \text{ mm}$ a căror secțiune totală este $\Omega_f = 19,01 \text{ cm}^2$ (fig. 262).

Dela centrul de greutate al fierăriei, până la marginea betonului, luăm o distanță de circa **3,5 cm**, așa că înălțimea totală de beton este de 53,5 cm. Fiindcă am luat fier mai mult decât a reieșit din calcul luăm pentru înălțimea grinzii **52 cm**, așa că avem:

$$h = 52 - 3,5 = 48,5 \text{ cm.}$$

Să verificăm această secțiune. Avem:

$$\varphi = \Omega_f / b h = 19,01 / 40 \cdot 48,5 = 0,0098$$

$$n \varphi = 0,0098 \cdot 15 = 0,147$$

$$k = n \varphi [\sqrt{2 / n \varphi + 1} - 1] = 0,147 [\sqrt{2 / 0,147 + 1} - 1] = 0,415$$

$$y = k h = 0,415 \cdot 48,5 = 20,1 \text{ cm, } h - \frac{1}{3} y = 48,5 - \frac{1}{3} 20,1 = 41,8 \text{ cm}$$

$$\mathfrak{R}_b = 2 M / b y (k - \frac{1}{3} y) = 2 \cdot 840000 / 40 \cdot 20,1 \cdot 41,8 = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mathfrak{R}_f = M / \Omega_f (h - \frac{1}{3} y) = 840000 / 19,01 \cdot 41,8 = 1057 \text{ kg/cm}^2.$$

Rezistența în fier este mai mică decât cea impusă, pentru că am luat o secțiune mai mare ca cea dată de calcul.

Cantitatea de fier în kg/m^3 de beton, dacă $7,85 \text{ t/m}^3$, este greutatea specifică a fierului, va fi:

$$7850 \cdot 0,0098 \cdot 48,5 / 52 = 71,7 \text{ kg/m}^3.$$

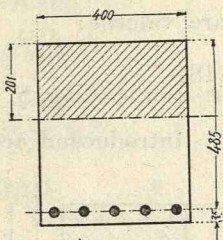


Figura 262

3. Secțiuni dreptunghiulare cu armătură dublă.

S'a văzut că pentru niște rezistențe date și un moment dat, rezultă o anumită înălțime de grindă. Suntem adesea obligați de a micșora această înălțime; în acest caz rezistențele vor crește. Rezistența în fier o micșorăm mărind secțiunea Ω_f , cea din beton

nu o putem micșora decât adăogând fier în regiunea comprimată a betonului. În acest caz avem așa zisele grinzi dublu armate.

Calculul lor se face după norma indicată mai sus.

Avem (fig. 263)

$$(15) \quad S_c = \frac{1}{2} b y^2 + n \Omega'_f (y - h'); \quad S_t = n \Omega_f (h - y)$$

Dacă ținem seamă de (6) și notăm:

$$\Omega'_f = \varphi' b h$$

căpătăm:

$$(16) \quad k^2 + 2 n (\varphi + \varphi') k - 2 n (\varphi + \varphi' h'/h) = 0$$

și

$$(17) \quad k = n (\varphi + \varphi') [\sqrt{2 (\varphi + \varphi' h'/h) / n (\varphi + \varphi')^2 + 1} - 1]$$

Având pe k avem tot ce ne trebuie, adică y_c , y_t , y_r și I care are valorile:

$$(18) \quad \begin{aligned} I &= \frac{1}{3} b y^3 + n \Omega'_f (y - h')^2 + n \Omega_f (h - y)^2 \\ &= \Sigma y_r S_c = \frac{1}{2} b y^2 (h - \frac{1}{3} y) + n \Omega'_f (y - h') (h - h') \end{aligned}$$

Introducând aceste valori în ecuația (4), găsim pe $\mathfrak{X}_b$ și $\mathfrak{X}_f$ și deci putem verifica secțiunea dată a grinzii.

În practică se pune problema invers, și anume să găsim dimensiunile secțiunii.

In cazul general se dă b , h , M , $\mathfrak{X}_b$ și $\mathfrak{X}_f$, rămânând să se determine Ω_f și Ω'_f .

Se ajunge la soluție pe mai multe căi. Una din ele, aproximativă însă, este și următoarea.

În loc de a determina Ω'_f , se determină o altă, care aplicată la $\frac{2}{3}y$ dela axa neutră, să ne dea în raport cu această axă, același

moment. Noua secțiune o notăm $\psi \Omega_f$ adică o considerăm în funcție de Ω_f , armătura întinsă. Ea satisface deci relația:

$$(19) \quad \frac{2}{3} y \psi \Omega_f = \Omega'_f (y - h')$$

Dacă ținem seamă de (6) și (7) și introducem aceste valori în (15), căpătăm:

$$(20) \quad \frac{1}{2} k^2 + \frac{2}{3} n k \varphi \psi - n \varphi (1 - k) = 0$$

care ne dă

$$(21) \quad \psi = \frac{3}{4} (2 \varphi \mathfrak{X}_f - k \mathfrak{X}_b) / n \varphi \mathfrak{X}_b$$

Dacă aceste valori le introducem în expresia lui I din ecuația (18), găsim tocmai pe I dat de ecuația (11), dela primul caz și anume:

$$(11) \quad I = n \Omega_f h^2 (1 - k) (1 - \frac{1}{3} k) = b h^3 n \varphi (1 - k) (1 - \frac{1}{3} k).$$

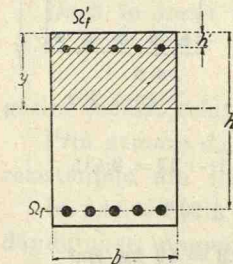


Figura 263

Dacă se urmează calea dela primul caz, se găsesc ecuațiile (13) și (14). In rezumat, din (13) și (14) deducem pe φ , iar din (21) pe ψ și deci problema este rezolvată.

O metodă mai generală și exactă este următoarea: se ia momentul tuturor forțelor interioare, pe rând, în raport cu două axe, ce trec prin centrul de greutate a celor două secțiuni de fier. Vom avea:

$$(22) \quad \begin{aligned} M &= \frac{1}{2} b y (h - \frac{1}{3} y) \mathfrak{X}_b + \mathfrak{X}_{fc} \Omega'_b (h - h') \\ M &= -\frac{1}{2} b y (\frac{1}{3} y - h') \mathfrak{X}_b + \mathfrak{X}_{ft} \Omega_f (h - h') \end{aligned}$$

ecuații, ce le putem utiliza sub această formă. Dacă ținem seamă că:

$$\mathfrak{X}_{fc}/\mathfrak{X}_b = n (y - h')/y \text{ și } \mathfrak{X}_{ft}/\mathfrak{X}_b = n (h - y)/y,$$

atunci putem să le punem sub forma:

$$(23) \quad \begin{aligned} \varphi &= [M/bh^2 \mathfrak{X}_b + \frac{1}{2} k(\frac{1}{3} k - h'/h)]k/n (1 - h'/h)(1 - k) \\ \varphi' &= [M/bh^2 \mathfrak{X}_b - \frac{1}{2} k(1 - \frac{1}{3} k)]k/n (1 - h'/h)(k - h'/h) \end{aligned}$$

Aplicația Nr. 72. Să luăm chiar cazul aplicației Nr. 27, în care necesități de construcție ne cer $h = 40$ cm. Să determinăm deci pe Ω_f și Ω'_f .

Prima metodă. Din ecuația (14) deducem:

$$1/a^2 = M/bh^2 = 840000/40 \cdot 40^2 = 13,125$$

iar din (13)

$$\varphi = 1/a^2 (1 - \frac{1}{3} k) \mathfrak{X}_f = 13,125/1200 \cdot 0,872 = 0,01253$$

Așa dar:

$$\Omega_f = \varphi b h = 0,01253 \cdot 40 \times 40 = \mathbf{20,05 \text{ cm}^2}$$

Din (21) deducem:

$$\psi = 3 (2 \cdot 0,01253 \cdot 1200 - 0,385 \cdot 50)/4 \cdot 15 \cdot 0,01253 \cdot 50 = 0,864$$

Dacă luăm $h' = 3$ cm cum $y = kh = 15,40$ cm, din (19) deducem:

$$\Omega'_f = 2 y \psi \Omega_f/3 (y - h') = 2 \cdot 15,40 \cdot 0,864 \cdot 20,05/3 (15,40 - 3) = \mathbf{14,33 \text{ cm}^2}$$

A doua metodă. Avem:

$$M/bh^2 \mathfrak{X}_b = 0,2625 \quad , \quad h'/h = 3/40 = 0,075$$

$$\frac{1}{2} k (\frac{1}{3} k - h'/h) = \frac{1}{2} \cdot 0,385 (\frac{1}{3} \cdot 0,385 - 3/40) = 0,010267$$

$$\frac{1}{2} k (1 - \frac{1}{3} k) = 0,167796$$

$$\varphi = (0,2625 + 0,010267) \cdot 0,385/15(1 - 0,075)(1 - 0,385) = 0,01232$$

$$\varphi' = (0,2625 - 0,167796) \cdot 0,385/15(1 - 0,075)(0,385 - 0,075) = 0,00848$$

Ceea ce ne dă:

$$\Omega_f = \mathbf{19,72 \text{ cm}^2} \text{ și } \Omega'_f = \mathbf{13,58 \text{ cm}^2}$$

Diferențele se explică prin aceea, că prima metodă este aproximativă, însă mai expeditivă, pentru că poate utiliza tabelele întocmite pentru secțiunile cu armătură simplă.

4. Secțiuni în T simplu armate.

Sunt foarte des întrebuințate.

Au forma din fig. 264 și 265. În genere la aceste secțiuni se dă b și d .

În calcul, în cazul celor două figuri se ia pentru b valoarea cea mai mică, dată de următoarele relații:

$$b \leq 12d + 2b_i + b_0; \quad b \leq \frac{1}{2}l; \quad b \leq c$$

$$b \leq 4,5d + b_i + b_1; \quad b \leq \frac{1}{4}l; \quad b \leq \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b_0$$

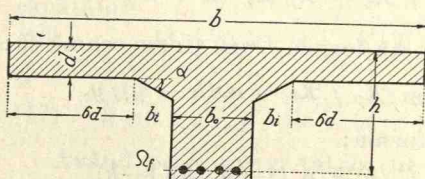


Figura 264

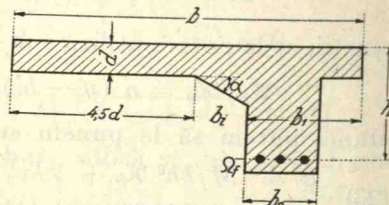


Figura 265

în care l este deschiderea grinzii, iar c distanța între axele inimilor grinzilor. Se mai recomandă

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{3}; \quad b_i \leq 3d$$

În calcul nu se ține seamă de racordarea între inima grinzii și placa de deasupra, ci se are în vedere o secțiune ca cea din fig. 266.

Pentru verificarea rezistențelor e nevoie de poziția axei neutre.

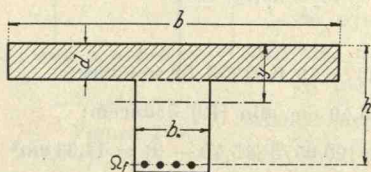


Figura 266

Dacă axa neutră cade pe placă, adică dacă $y \leq d$, atunci verificarea se face ca în cazul secțiunilor dreptunghiulare.

Când cade pe inimă — ca în figură — se face aproximația, neglijându-se partea comprimată a

betonului de pe inimă, adică de pe regiunea b_0 ($y - d$).

Avem astfel:

$$S_c = bd \left(y - \frac{1}{2}d \right), \quad S_t = n\Omega_f (h - y)$$

din cari scoatem:

$$y = (n\Omega_f h + \frac{1}{2}bd^2) / (n\Omega_f + bd)$$

Valoarea lui I este:

$$I = \frac{1}{3}b \left[(y^3 - (y - d)^3) + n\Omega_f (h - y)^2 \right]$$

$$= bd \left[h \left(y - \frac{1}{2}d \right) - d \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}d \right) \right]$$

E comod, în acest caz, a utiliza distanța y_r , a cărei valoare este:

$$(24) \quad y_r = h - d (y - \frac{2}{3}d) / (2y - d)$$

cu ajutorul căreia avem și

$$(23) \quad I = bd (y - \frac{1}{2}d) y_r = n\Omega_f (h - y) y_r$$

Introducând aceste valori în (4) avem:

$$(25) \quad \mathfrak{X}_f = M/y_r \Omega_f, \quad \mathfrak{X}_b = My/I = y \mathfrak{X}_f/n (h - y)$$

Așa dar, putem verifica o secțiune dată.

Pentru proiectare luăm $y_r \simeq h - \frac{1}{2}d$ și din relația (25) deducem valoarea lui Ω_f . Prin urmare ne trebuie valoarea lui h . Dacă în prima ecuație (4), punem valoarea lui y din (6), dacă în expresia lui I facem aceleași înlocuiri și dacă se notează:

$$(26) \quad p = (1 + k) d/2k + M/bd \mathfrak{X}_b,$$

atunci h este una din rădăcinile ecuației:

$$h^2 - ph + d^2/3k = 0$$

În practică ne mulțumim cu valoarea aproximativă.

$$(27) \quad h = p - d^2/3k \quad h \simeq p - d^2/3k p$$

Aplicația Nr. 73. O grindă de beton armat în T e supusă la un moment încovoietor de 50 tm, și are $b = 1,20$ m, $d = 12$ cm, cu $N_b = 50$ kg/cm² și $\mathfrak{X}_f = 1200$ kg/cm². Se cere h și Ω_f .

Avem:

$$k = 15.50 / (15.50 + 1200) = 0,385$$

$$p = (1 + 0,385) 12 / 2 \cdot 0,385 + 5.000.000 / 120 \cdot 12 \cdot 50 = 90,9 \text{ cm}$$

$$d^2/3k = 12^2 / 3 \cdot 0,385 = 125$$

care ne dă $h = 90,9 - 125/90,9 = 89,5 \simeq 90$ cm.

$$\Omega_f = 5000000 / 1200 (90 - \frac{1}{2}12) = 49,6 \text{ cm}^2$$

Vom lua **10 Ø 25 mm** cu $\Omega_f = 49,09 \text{ cm}^2$. Să verificăm această secțiune. Avem:

$$n \Omega_f = 736,35$$

$$y = (736,35 \cdot 90 + \frac{1}{2}120 \cdot 12^2) / (736,35 + 120 \cdot 12) = 43,6 \text{ cm}$$

$$y_r = 90 - 12 (43,6 - \frac{2}{3}12) / (2 \cdot 43,6 - 12) = 84,33 \text{ cm}$$

$$\mathfrak{X}_f = M/y_r \Omega_f = 5000000 / 84,33 \cdot 49,09 = 1208 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mathfrak{X}_b = y \mathfrak{X}_f / n(h - y) = 43,6 \cdot 1208 / 15 \cdot 68,1 = 51,7 \text{ kg/cm}^2.$$

Rezistențele sunt puțin depășite, pentru că secțiunea de fier s'a luat ceva mai mică decât cea reieșită din calcul.

În cazul când lățimea b_0 a inimii nu este neglijabilă, atunci se ține seama și de compresiunea de pe inimă, ca în fig. 267.

În acest caz:

$$(28) \quad S_c = bd \left(y - \frac{1}{2}d \right) + \frac{1}{2}b_0 \left(y - d \right)^2; \quad S_t = n \Omega_f (h - y)$$

cari ne dau:

$$(28) \quad \frac{1}{2}b_0 y^2 + [n \Omega_f + (b - b_0) d] y - [n \Omega_f h + \frac{1}{2}(b - b_0) d^2] = 0$$

Din aceasta găsim pe y și apoi avem pe I :

$$(29) \quad I = \frac{1}{3}[by^3 - (b - b_0)(y - d)^3] + n \Omega_f (h - y)^2 \\ = bd \left[h \left(y - \frac{1}{2}d \right) - d \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}d \right) + q \right]$$

în care s'a notat:

$$(30) \quad q = \frac{1}{2}b_0(y - d)^2(h - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}d)/bd$$

Proiectarea secțiunii necesită calcule mai multe.

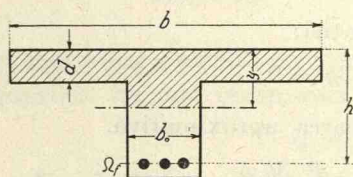


Figura 267

Dacă valoarea lui I din (29) o punem în (4), ținând seamă și de (6), se obține aceeași ecuație în h , analoagă ecuației (27) și care* este:

$$(31) \quad h = p - (\frac{1}{3}d^2 + q)/kh$$

care prin încercări ne dă valoarea lui h .

Ca primă valoare a lui h luăm pe aceea dată de ecuația (27). Această valoare introdusă în ecuația (31) pusă sub forma:

$$(32) \quad kh^2 - kph + \frac{1}{3}d^2 + q = 0$$

nu dă partea doua egală cu zero ci cu Δ .

Corecțiunea lui h o facem cu ajutorul formulei:

$$(33) \quad \Delta h = -\Delta/k[2h - p + 2q/(y - d) + q(1/k - \frac{1}{3})/(h - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}d)]$$

Ne mulțumim, foarte adesea, numai cu prima corecțiune. Având pe h , avem pe y deci pe y_r , care cu ajutorul formulei (25) ne dă pe Ω_f .

Aplicația Nr. 74. Să luăm cazul aplicației Nr. 29, în care presupunem $b_0 = 50$ cm. Prin metoda aproximativă, s'a obținut $h = 90$ cm. Acestui h îi corespunde:

$$y = 0,385 \cdot 90 = 34,65; \quad y - d = 22,65; \quad h - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}d = 70,45$$

$$q = \frac{1}{2}50 \cdot 22,65^2 \cdot 70,45 / 120 \cdot 12 = 628; \quad 1/k - \frac{1}{3} = 2,264$$

$$\Delta = 0,385 \cdot 90^2 - 0,385 \cdot 90 \cdot 90,9 + \frac{1}{3}12^2 + 628 = 644,8$$

Aceasta ne dă:

$$\Delta h = -644,8 / 0,385 [2 \cdot 90 - 90,9 + 2 \cdot 644,8 / 22,65 + 644,8 \cdot 2,264 / 70,45] \\ = -10 \text{ cm, deci } h = 80 \text{ cm}$$

Repetăm același calcul pentru $h = 80$, și găsim $\Delta h = -1,92 \approx -2$ cm.

Dacă mai repetăm încă odată calculul cu $h = 78$ cm, găsim: $\Delta h = 0,02$. Așa dar înălțimea este 78,02; noi vom lua $h = 78$. Acestei înălțimi corespunde:

$$\begin{aligned} y &= 30,03; \quad \frac{1}{3} y = 10,01; \quad y_c = \frac{2}{3} [b y^3 - (b - b_0)(y - d)^3] / (b y^2 - (b - b_0)(y - d)^2) \\ &= 22,2 \text{ cm}; \quad y_r = h - y + y_c = 70,17 \text{ cm}; \quad \Omega_f = 5000000 / 70,17 \cdot 1200 \\ &= 59,5 \text{ cm}^2 \text{ pentru care luăm } 10 \varnothing 28 \text{ mm} = 61,58 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Deși exemplul luat este cam exagerat, se vede că influența inimii asupra lui h este de circa 13%.

Din examinarea aplicațiilor 73 și 74 se vede, că în metoda aproximativă avem nevoie teoretic de 49,6 cm² fier, iar în cea exactă de 59,5 cm², deci de un surplus de 9,9 cm² fier, sau $9,9 \times 100$. 0,00785 $\approx$ 7,77 kgr fier pe metru liniar de grindă. În schimb în metoda exactă facem o economie de beton:

$$(90 - 78) \cdot 50.100 = 0,06 \text{ m}^3/\text{m}.$$

Soluția cea mai economică, nu este aceea care are material mai puțin, ci aceea ce costă mai puțin. După prețurile metruului cub de beton și a kilogramului de fier, se vede care este soluția cea mai eficientă.

Se poate face dimensionarea secțiilor și pe baza unui calcul de economie, care însă e mai complicat.

5. Grinzi de beton făcute cu fiare profilate.

De multe ori, în loc de vergele de fier, se întrebuințează fiare profilate. Calculul se face exact ca la grinziile cu armătură simplă, cu deosebirea că în expresia momentului de inerție trebuie să ținem seamă și de momentul de inerție al fierului profilat. Dacă I_f este acest moment de inerție, atunci la valoarea lui I dată de formula (10) sau (11), se mai adaugă această valoare. Vom avea deci

$$I + n I_f$$

La vergele s'a neglijat momentul de inerție al vergelelor în raport cu centrele lor de greutate, fiindcă sunt foarte mici în raport cu I .

O altă deosebire este că în loc de a lua rezistența fierului în centrul de greutate, o luăm în punctul cel mai obosit, adică la distanța $h_1 - y$ cum se arată în fig. 268.

La vergele se neglijează aceasta, pentru că distanța dela centrul de greutate a fierăriei până la punctul cel mai obosit este mică.

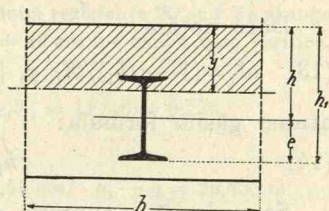


Figura 268

Și la vergele este bine să ținem seamă de aceasta, în cazul când ele ar fi așezate pe mai multe șiruri orizontale și când distanța dela centrul de greutate al fierăriei până la punctul cel mai obosit ar da diferențe apreciable pentru valorile lui $\mathfrak{X}_f$.

Dacă aplicăm formulele (4) la acest caz, găsim formula (6) sub forma:

$$(6) \quad y = k h_1$$

Dacă se urmează exact aceeași cale ca la grinzile cu armătură simplă, și dacă se notează:

$$(7) \quad \Omega_f = \varphi_1 b h_1$$

$$\text{și} \quad h_1 = h + e$$

se găsește:

$$(8) \quad k = n \varphi_1 [\sqrt{2 (1 - e/h_1)/n \varphi_1 + 1} - 1]$$

și

$$(9) \quad \varphi_1 = k^2/2 n (1 - k - e/h_1)$$

Având pe k , avem pe y și deci și I , a cărei valoare este:

$$(10) \quad I = \frac{1}{3} b y^3 + n \Omega_f (h - y)^2 + n I_f$$

și deci putem verifica rezistențele într'o secțiune ale cărei dimensiuni sunt date.

Pentru proiectare chestiunea este mai dificilă și o vom rezolva prin încercări, punând pe I sub forma:

$$(11) \quad I = n \Omega_f h_1^2 [(1 - k - e/h_1) (1 - \frac{1}{3} k - e/h_1) + i^2/h_1^2]$$

în care

$$i^2 = I_f/\Omega_f$$

Dacă notăm

$$(13) \quad \alpha_1^2 = (1 - e/h_1)/\mathfrak{X}_f \varphi_1 [(1 - k - e/h_1) (1 - \frac{1}{3} k - e/h_1) + i^2/h_1^2]$$

atunci găsim formula:

$$(14) \quad h_1 = \alpha_1 \sqrt{M/b}$$

Se vede că o expresie mai simplă pentru h_1 este greu de dat și de aceea s'au pus formulele sub forma apropiată primului caz, pentru a putea rezolva problema prin încercări.

Aplicația Nr. 75. Să presupunem că facem o asemenea grindă, cu fiare I așezate din 100 în 100 cm și că momentul ce revine acestei porțiuni este 8 tm. Să presupunem că ni se impun $\mathfrak{X}_f = 1200 \text{ kg/cm}^2$, și $\mathfrak{X}_b = 40 \text{ kg/cm}^2$. Avem:

$$k = 15.40/(15.40 + 1200) = \frac{1}{3}; \quad \sqrt{M/b} = 89.5$$

Presupunem pentru o primă aproximație: $e = 0$, $i = 0$, și avem:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/3^2 \cdot 2.15 (1 - \frac{1}{3}) = 1/180 \\ \alpha_1^2 &= 180/1200 (1 - \frac{1}{3}) (1 - \frac{1}{9}) = 0,253 \therefore \alpha_1 = 0,503 \\ h_1 &= 0,503 \cdot 89,5 = 45 \text{ cm}, \quad \Omega_f = 45 \cdot 100/180 = 25 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Profilul I , care are o secțiune imediat superioară, este Nr. 18, care are elementele:

$$I_f = 1450 \text{ cm}^4, \quad \Omega_f = 27,9 \text{ cm}^2, \quad i^2 = 52 \text{ cm}^2, \quad e = 9 \text{ cm}.$$

Pentru h_1 luăm valoarea găsită în calculul anterior și avem $e/h_1 = 0,2$; $i^2/h_1^2 = 0,0256$. Refacem calculul și găsim:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/3^2 \cdot 2.15 (\frac{2}{3} - 0,2) = 1/126 \\ \alpha_1^2 &= (1 - 0,2) 126/1200 [(\frac{1}{3} - 0,2) (\frac{8}{9} - 0,2) + 0,0256] = 0,242 \\ \alpha_1 &= 0,492; \quad h_1 = 0,492 \times 89,5 = 44; \quad \Omega_f = 44 \cdot 100/126 = 34,9 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Profilul I cu secțiune imediat superioară este Nr. 22 care are elementele:

$$I_f = 3060 \text{ cm}^4, \quad \Omega_f = 39,6 \text{ cm}^2, \quad i^2 = 77,27 \text{ cm}^2, \quad e = 11 \text{ cm}.$$

Luând pentru h_1 valoarea 44 cm, avem

$$e/h_1 = 0,25; \quad i^2/h_1^2 = 0,0399$$

Refacem calculul și găsim:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/3^2 \cdot 2.15 (\frac{2}{3} - 0,25) = 1/112,5 \\ \alpha_1^2 &= (1 - 0,25) 112,5/1200 [(\frac{2}{3} - 0,25) (\frac{8}{9} - 0,25) + 0,0399] = 0,2297 \\ \alpha_1 &= 0,479; \quad h_1 = 0,479 \cdot 89,5 = 43; \quad \Omega_f = 43 \cdot 100/112,5 = 35 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Soluția este găsită pentru că din acest calcul ne-a ieșit $\Omega_f = 35 \text{ cm}^2$, iar din cel precedent $34,9 \sim 35 \text{ cm}^2$.

Ne fixăm la profilul **I Nr. 22** pentru că în tabele nu avem un profil cu secțiunea 35 cm^2 . În acest caz rezistențele vor fi mai mici ca cele indicate. Pentru a le mări vom micșora pe h_1 până una din cele două rezistențe $\mathcal{R}_f$ sau $\mathcal{R}_b$ ajunge la limita indicată. Prin încercări ajungem la $h_1 = 40 \text{ cm}$, pe care o vom verifica.

Avem:

$$n \varphi_1 = 15 \cdot 39,6/40 \cdot 100 = 0,1485; \quad e/h_1 = 11/40 = 0,275.$$

Din formula (8) găsim:

$$k = 0,3387, \quad y = 13,55 \text{ cm}, \quad h - y = 15,45 \text{ cm}, \quad h_1 - y = 26,45 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1}{3} 100 \cdot 13,55^3 + 15 \cdot 39,6 \cdot 15,45^2 + 15 \cdot 3060 = 270.616$$

$$\mathcal{R}_b = 800000 \cdot 13,55/270.616 = 40,1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mathcal{R}_f = 15 \cdot 800000 \cdot 26,45/270616 = 1174 \text{ kg/cm}^2.$$

Prin urmare, secțiunea cu profilul I No. 22 și cu $h_1 = 40 \text{ cm}$ satisface problemei puse.

Rezistența în centrul de greutate a fierăriei este 686 kg/cm^2 , care se vede că diferă foarte mult de rezistența maximă.

6. Cazul general.

În toate cazurile de până acum, s'a presupus că axa momentului coincide cu o axă principală a secțiunii de beton armat, așa că direcțiunea axei neutre era cunoscută.

Când axa momentului diferă de o axă principală a secțiunii, atunci va trebui să găsim și direcțiunea axei neutre, deci și secțiunea de beton comprimat.

Principal problema se rezolvă astfel: Se ia pentru axa neutră o direcțiune arbitrară și din ochi, dacă e posibil cât mai aproape de realitate, pentru a micșora numărul încercărilor.

Se determină față de această direcțiune poziția axei neutre punând condiția $S_c = S_t$. Se poate afla apoi poziția centrului de greutate al secțiunii, — ceea ce nu este necesar — prin care să ducem axa Oy , normală pe axa momentului.

Dacă direcțiunea aleasă pentru axa neutră ar fi cea bună, atunci ar trebui ca momentul centrifugal al secțiunii în raport cu aceste două axe să fie nul, adică să avem $\int z y d\Omega = 0$, adică momentul cantităților $y d\Omega$ în raport cu axa Oy , să fie nul. Facem verificarea. Dacă nu este nul, atunci direcția axei neutre nu este bine aleasă. Încercăm cu altă direcțiune. Să presupunem că pentru o direcțiune obținem I_{xy} , iar pentru altă direcțiune $I_{xy'}$.

Pentru a găsi o direcțiune apropiată vom interpola între cele două precedente.

Problema în genere este dificil de tratat analitic și se tratează de obicei pe cale grafică.

Se alege cum s'a spus mai sus o direcțiune arbitrară pentru axa neutră.

Se împarte regiunea comprimată a betonului în fâșii paralele cu această direcțiune și se construiește un poligon de forțe cu suprafețele Ω_{1b} , Ω_{2b} , (fig. 269).

Se face același lucru și cu suprafețele de fier, considerând în centrele de greutate ale vergelelor suprafețele: $n\Omega_{1f}$, $n\Omega_{2f}$, ...; evaluate la aceeași scară ca și suprafețele de beton. În poligonul forțelor, de o parte a unei origini O , așezăm suprafețele Ω_{1b} , Ω_{2b} , ..., iar de cealaltă parte, a aceleiași origini, suprafețele $n\Omega_{1f}$, $n\Omega_{2f}$, ..., în ordinea depărtării lor dela presupusa fibră de beton comprimat care are rezistența maximă, așa cum se arată în figură. Prima rază polară și deci prima latură de poligon funicular, reazimă pe elementele de suprafață Ω_{1f} și Ω_{1b} .

Intersecția celor două laturi de poligon funicular fixează poziția axei neutre, fiindcă pentru axa care trece prin acest punct de intersecție, avem într'adevăr $S_c = S_l$. Am determinat astfel și secțiunea de beton comprimat, păstrând în poligonul forțelor numai atâtea elemente, câte sunt dela Ω_{1b} până la axa neutră.

Centrul de greutate se găsește evident pe axa neutră. Am putea să-i găsim chiar poziția lui, dând altă orientare elementelor $\Omega_{1b} \dots$ și, cu ajutorul unui nou poligon funicular, să găsim o nouă axă pe care se găsește centrul de greutate și deci, la intersecția cu axa precedentă, să găsim chiar poziția lui. N'avem nevoie însă de aceasta.

Trebue acum verificat dacă direcția aleasă este conjugată direcției normale pe direcția momentului.

Laturile primului poligon funicular, prelungite până la axa neutră, ne fixează pe aceasta segmentele $y \Omega_{1b}$, etc.

Dacă cu aceste elemente — care formează un poligon închis — di-

rijate după normala la direcția momentului și aplicate respectiv în centrele de greutate ale suprafețelor $\Omega_{1b} \dots$, construim un nou poligon funicular, atunci segmentul interceptat între laturile extreme de poligon funicular — paralele în cazul nostru — multiplicat cu distanța polară, ne dă $\int y z d\Omega$.

Pentru ca această expresie să fie nulă, trebuie ca laturile extreme de poligon funicular să se suprapună. Dacă nu se suprapun, cele două axe nu sunt conjugate. Să presupunem că distanța între laturile extreme de poligon funicular la prima încercare a fost b . Facem o nouă încercare, cu altă direcțiune, ca mai sus și păstrând aceleași distanțe polare obținem altă distanță b_1 și așa mai departe.

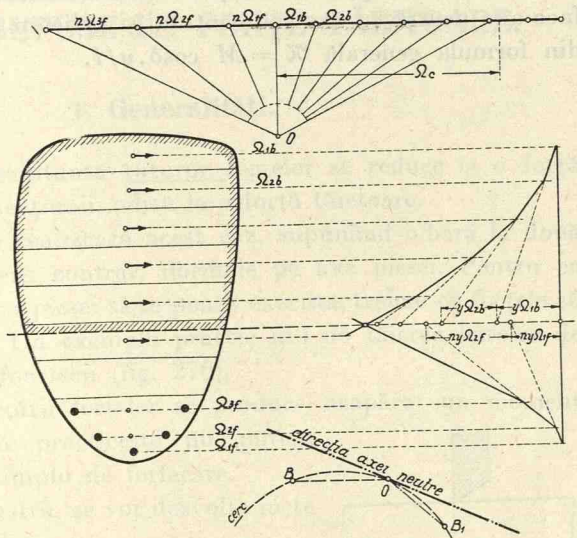


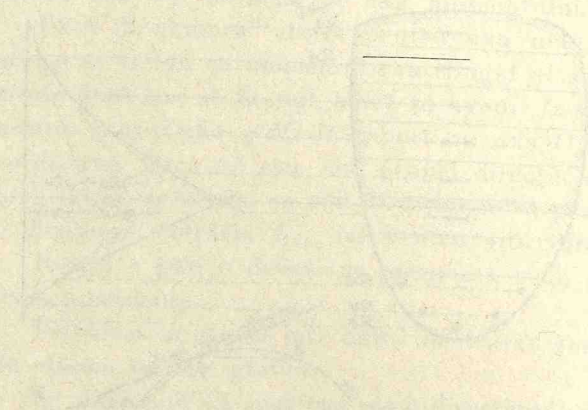
Figura 269

Dacă dintr'un punct oarecare O ales arbitrar luăm, pe direcții paralele cu direcțiile astfel încercate, distanțe $OB = b$, $OB_1 = b_1$, etc., punctul B fixat în acest mod descrie o curbă oarecare. Direcția axei neutre, care satisface problemei, va fi aceea pentru care $b = 0$, și va fi dată de tangenta în O la curba descrisă de punctul B .

Dacă avem două încercări cari ne dau punctele B și B_1 ca în figură, pentru a treia încercare și în majoritatea cazurilor pentru direcția definitivă a axei neutre, ne mulțumim cu direcția tangentei în O , la cercul ce trece prin BOB_1 .

În acest mod se găsește direcțiunea și poziția axei neutre.

Se determină apoi I în raport cu această axă și unghiul δ , ce îl face axa neutră cu axa momentului și aplicăm formulele ce rezultă din formula generală $\mathfrak{X} = M \cos \delta \cdot y/I$.



XVIII. DETERMINAREA REZISTENȚELOR LA GRINZILE SUPUSE LA FORȚE TĂIETOARE.

1. Generalități.

În acest caz, rezultanta tuturor forțelor se reduce la o forță cuprinsă în planul secțiunii, adică la o forță tăietoare.

Experimental se realizează acest caz, supunând o bară la două forțe egale și de sens contrar, normale pe axa piesei. Pentru ca tăierea sau forfecarea piesei să se poată executa, trebuie ca forțele să fie puțin desaxate. Un exemplu practic ni-l dă tăierea barelor de metal cu ajutorul foarfecii (fig. 270).

Din cauza desaxării forțelor se produce neapărat un moment încovoiător, așa că practicește nu putem realiza fenomenul simplu de forfecare.

În secțiunea noastră, se vor desvolta niște rezistențe $\bar{\sigma}$ așa fel, ca

$$\int \bar{\sigma} d\Omega = \bar{T}$$

Rezistența $\bar{\sigma}$ o descompunem în două componente $\bar{\sigma}_y$ și $\bar{\sigma}_z$, normale respectiv pe axele Oy și Oz .

Să presupunem că avem numai forța tăietoare T_z . Vom avea evident:

$$(1) \quad \int \bar{\sigma}_z d\Omega = T_z \quad , \quad \int \bar{\sigma}_y d\Omega = 0.$$

Rezistențele $\bar{\sigma}_z$ nu se distribuiesc uniform pe secțiune.

În adevăr. Să presupunem că luăm un element de volum, ale cărui două fețe să fie conținute respectiv în planul secțiunii și pe conturul barei (fig. 271).

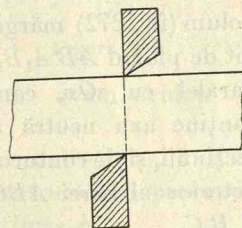


Figura 270

Pe conturul barei nu avem niciun fel de rezistențe, deci nici rezistențe τ . Atunci nici pe fața conținută în planul secțiunii nu există rezistențe τ_z normale pe tangenta la contur. Așa dar, *dacă în această față există rezistențe τ ele nu pot fi dirijate decât după direcțiunea tangentei la contur, deci nu există decât τ_n* . Așa dar, în

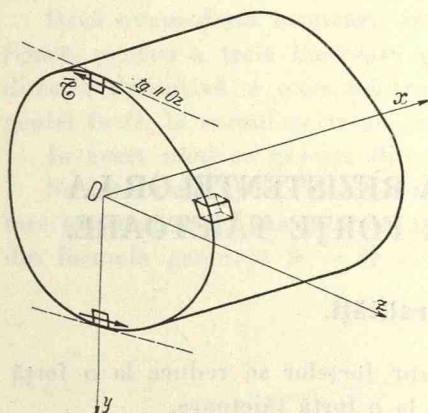


Figura 271

vecinătatea conturului, când conturul nu este supus la rezistențe τ , rezistențele tangențiale din secțiune sunt *dirijate totdeauna după tangentă la contur*.

Să considerăm elementul de suprafață de pe contur, vecin tangentei la contur normală la T_z . Pentru acest element τ_t este chiar τ_z și este nul. Cum ecuația (1) trebuie să neapărat satisfăcută, urmează că τ_z nu se distribuie uniform pe secțiune.

2. Distribuția rezistențelor τ_z pe secțiune.

Ne ocupăm, bine înțeles, de cazul când conturul barei nu este supus la rezistențe.

Din elementul de bară de lungime dx , separăm un element de volum (fig. 272) mărginit de planul $AB A_1 B_1$, paralel cu zOx , care conține axa neutră a secțiunii, și de conturul exterior al barei $ABC A_1 B_1 C_1$.

Să scriem ecuația de echilibru a acestui element de volum proiectând toate forțele după axa Ox .

Pe fața ABC avem o rezistență $\mathcal{R}$, care

ne dă o forță $N = \int_{ABC} \mathcal{R} d\Omega$; pe fața opusă, *presupusă egală cu precedenta*, și deci facem ipoteza că *secțiunea barei rămâne constantă*

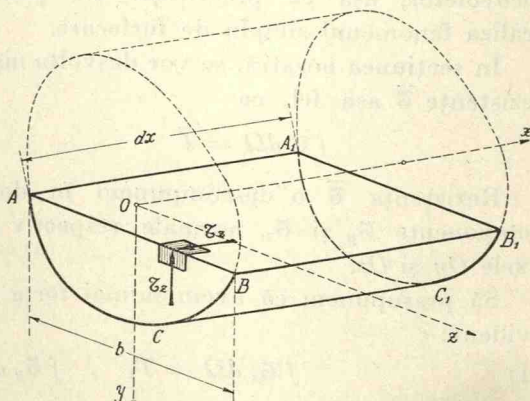


Figura 272

în intervalul dx , vom avea rezistența $\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}$. Rezultanta lor va fi $dN = \int_{ABC} d\mathfrak{X} d\Omega$. Celelalte rezistențe din fața ABC dau forțe a căror proiecție pe axa Ox este nulă. Pe conturul $ACBA_1C_1B_1$ nu mai avem nicio altă forță. Pe fața ABA_1B_1 vom avea o rezistență $\mathfrak{S}_z$, dirijată către $-x$, egală și simetric dispusă față de muchia AB , cu rezistența $\mathfrak{S}_z$, din fața ABC .

Dacă $AB = b$ și dacă presupunem că $\mathfrak{S}_z$ se distribuie uniform pe lungimea b , vom avea forța $-b\mathfrak{S}_z dx$ și deci

$$dN = \int d\mathfrak{X} d\Omega = b\mathfrak{S}_z dx.$$

După formula lui Navier, $\mathfrak{X} = My/I$, dacă presupunem secțiunea constantă, avem:

$$d\mathfrak{X} = (y/I) dM = (y/I) T dx$$

și deci:

$$b\mathfrak{S}_z = T \int y d\Omega / I$$

Însă, $\int y d\Omega$ nu este altceva decât momentul static al suprafeții ABC în raport cu axa neutră și pe care-l notăm cu litera S . Deci

$$(2) \quad b\mathfrak{S}_z = TS/I$$

Aceasta-i formula lui Jurawski.

Se vede de aci, că legea de variație pe secțiune a lui $\mathfrak{S}_z$ este dată de variația razului S/b .

Observația 1-a. În cazul când am avea și o forță tăietoare T_y , am calcula la fel pe $\mathfrak{S}_y$. Când avem ambele forțe tăietoare, atunci avem evident

$$\vec{\mathfrak{S}} = \vec{\mathfrak{S}}_y + \vec{\mathfrak{S}}_z$$

Formula (2) stabilită este aproximativă, pentru că am presupus dela început că $\mathfrak{S}_z$ se distribuie uniform pe lățimea b .

Observația 2-a. Am spus că în punctul B , de pe contur, $\vec{\mathfrak{S}}$ este dirijat totdeauna după tangenta la contur (fig. 273). Componenta acestei rezistențe după axa Oy este $\mathfrak{S}_z$, deci

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_z / \cos \varphi$$

Dacă lucrul este așa, atunci în acest punct există și o componentă $\mathfrak{S}_y$, a cărei valoare este $\mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}_z \operatorname{tg} \varphi$.

Care-i valoarea lui $\mathfrak{S}_y$ într'un punct E de pe dreapta AB ? Asta nu se poate ști.

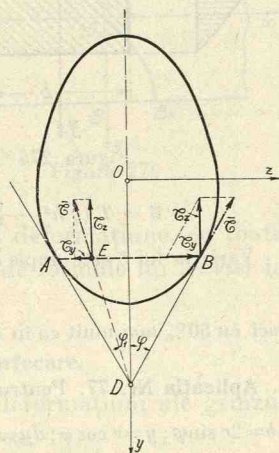


Figura 273

Se admite pentru secțiunile pentru cari axa Oy este axă de simetrie, că rezultanta lui $\bar{\sigma}_z$ și $\bar{\sigma}_y$, din acel punct, trece prin punctul de intersecție, D , al tangentelor la contur, duse prin punctele A și B și că deci:

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_z \operatorname{tg} \varphi_1$$

în care φ_1 este unghiul EDO .

Așa dar, rezistența maximă $\bar{\sigma}$ este în punctul A sau B , are valoarea

$$(3) \quad \bar{\sigma} = TS/bI \cos \varphi$$

și este dirijată după tangenta la contur.

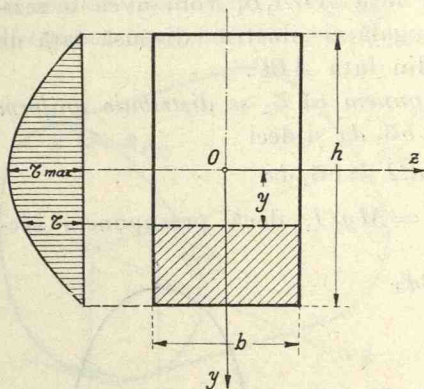


Figura 274

Aplicația Nr. 76. Să presupunem că avem de-a-face cu o secțiune dreptunghiulară (fig. 274).

Aci $\varphi = 0$, deci:

$$\bar{\sigma} = T \left(\frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) 12 b / b^2 h^3 = 1,5 (T/\Omega) (1 - 4 y^2/h^2)$$

Variația lui $\bar{\sigma}$ este după o parabolă și are valoarea maximă în axa neutră:

$$\bar{\sigma}_{max} = 1,5 T/\Omega$$

deci cu 50% mai mult ca în cazul când am presupune că se distribuie uniform.

Aplicația Nr. 77. Pentru o secțiune circulară avem (fig. 275):

$b = 2r \sin \varphi$; $y = r \cos \varphi$; $dy = -r \sin \varphi d\varphi$; $S = \int_0^\varphi 2r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \varphi$
și deci:

$$S/b = \frac{1}{3} r^2 \sin \varphi$$

Dacă ținem seamă că $I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \Omega r^2$, avem:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} T \sin^2 \varphi / \Omega$$

a cărei valoare maximă este pentru $\varphi = \frac{1}{2} \pi$:

$$\bar{\sigma}_{max} = \frac{4}{3} T/\Omega$$

și deci cu 33% mai mare ca în cazul când am considera T uniform distribuit.

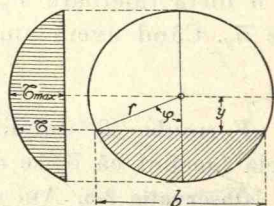


Figura 275

Observația 3-a. Dacă ținem seamă că avem $I = S_c y_r$, atunci formula (2) putem să o punem și sub forma:

$$b \bar{\sigma}_z = TS/y_r S_c = TS/y_r S_t$$

În cazul când căutăm pe $\bar{\sigma}_z$ în axa neutră, avem:

$$(4) \quad b \bar{\sigma}_z = T/y_r$$

formulă comodă în special la calculul grinzilor de beton armat.

3. Deformarea prin forfecare.

a) Deformarea secțiunilor prin forfecare.

Rezistențele $\mathfrak{T}_z$ produc deformațiunile γ_z . Aceste deformațiuni sunt maxime în axa neutră și nule acolo unde $\mathfrak{T}_z = 0$. Variația lui γ_z va fi dată de variația lui S/b .

O secție verticală plană se va deforma ca în fig. 276.

Prin urmare, secțiunea plană nu mai rămâne plană, căci există deplasări u în sensul axei Ox , și cari sunt date de ecuația

$$du/dy = \gamma_z = T_z S/b G I_z$$

În cazul unei secțiuni dreptunghiulare avem:

$$du/dy = 1,5 T_z (1 - 4 y^2/h^2)/G \Omega$$

$$\text{și: } u = 1,5 T_z y (1 - \frac{4}{3} y^2/h^2)/G \Omega$$

Așa dar, secțiunea nu rămâne plană după deformațiune, cu toate că la stabilirea acestei formule ne-am servit de formula lui Navier la baza căreia stă ipoteza lui Bernoulli.

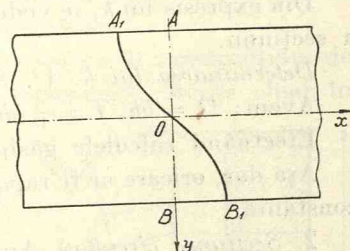


Figura 276

b) Deformația grinzilor prin forfecare.

Din cauza rezistențelor $\mathfrak{T}_z$ se produc și deformațiuni ale grinzii, axa ei deplasându-se.

Să considerăm un element de grindă dx . De pe fig. 277 avem:

$$dv = \gamma dx.$$

Nu putem găsi deplasarea decât cu ajutorul lucrului mecanic.

Lucrul mecanic al forței tăietoare este: $\frac{1}{2} T \gamma dx$, pe când lucrul mecanic interior este:

$$\frac{1}{2} \int \mathfrak{T}_z^2 dV/G = \frac{1}{2} \int \mathfrak{T}_z^2 d\Omega dx/G = \frac{1}{2} (T_z^2/G I_z^2) \int S^2 d\Omega dx/b^2$$

Egalând cele două expresii și notând:

$$(5) \quad k = (\Omega/I_z^2) \cdot \int S^2 d\Omega/b^2$$

Găsim:

$$(6) \quad \gamma = kT/G\Omega$$

și deci:

$$dv/dx = kT/G\Omega$$

Dacă derivăm această expresie și ținem seama că $dT/dx = -p$, avem:

$$(7) \quad d^2v/dx^2 = -kp/G\Omega$$

formă sub care se prezintă orice deplasare. Integrând aceeași ecuație, avem:

$$(8) \quad v - v_0 = (M_x - M_0) k/G\Omega$$

Din expresia lui k , se vede că aceasta este o constantă geometrică a secțiunii.

Determinarea lui k . 1°. Secțiunea dreptunghiulară.

Avem: $\Omega = bh$, $I = \frac{1}{12}bh^3$, $S = \frac{1}{8}bh^2(1 - 4y^2/h^2)$.

Efectuând calculele găsim $k = 1, 2$.

Așa dar, oricare ar fi raportul între b și h , k păstrează o valoare constantă.

2. *Secțiunea circulară.* Am avut:

$$S/b = \frac{1}{3}r^2 \sin^2 \varphi, \quad d\Omega = bdy = -2r^2 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi$$

și deci:

$$\int S^2 d\Omega/b^2 = r^2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5/2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 8$$

și ținând cont că:

$$\Omega = \pi r^2 \quad \text{și} \quad I_z = \frac{1}{4}\pi r^4,$$

scoatem:

$$k = 10/9 \approx 1, 11$$

Dacă am fi ținut seama la calculul săgeții și de $\mathfrak{S}_y$, calculul ar fi fost mai complicat și am fi obținut

$$k = 1, 186 \approx 1, 2$$

Așa dar, putem lua pentru orice fel de secțiune $k = 1, 2$.

4. Lucrul mecanic.

După cele ce s'au arătat până acum, avem:

$$(9) \quad dL/dx = \frac{1}{2}T_z \gamma_z = \frac{1}{2}k T_z^2/G\Omega = \frac{1}{2}G\Omega \gamma_z^2/k$$

Adică de forma tipică avută până acum:

5. Comparația rezultatelor teoretice cu datele experiențelor.

S'a văzut că la stabilirea formulei care dă pe $\mathfrak{S}_z$ s'au făcut oarecari ipoteze, cari au simplificat calculul, precum a fost de exemplu faptul că am admis că $\mathfrak{S}_z$ se distribuie uniform pe lățimea b . Coker, prin

procedee optice, determinând deformațiile unor plăci de nitroceluloză, a găsit că pentru secțiuni dreptunghiulare, formulele stabilite mai sus sunt exacte, atâta timp cât $h < 2b$. Dacă $h > 2b$, atunci distribuția se face după o curbă care are două maxime în apropierea extremităților și un minim la mijloc și de aceea el recomandă ca pentru $h > 2b$ să se considere τ_z uniform distribuit pe secțiune (fig. 278).

Pentru piese mici, precum buloane, nituri, pene, în practică se presupune că τ se distribuie uniform pe secțiune.

Pentru aceste piese, cari sunt foarte curențe în construcțiuni de orice natură, există experiențe foarte numeroase, făcute chiar în împrejurările în cari ele au să lucreze, așa încât nu are nicio importanță faptul dacă cunoaștem sau nu distribuția reală a rezistențelor, pentru că limita lor de ruptură s'a stabilit presupunând τ uniform distribuit pe secțiune.

Rezistențele admisibile se stabilesc pe aceeași bază, adică:

$$\tau = T/\Omega.$$

Pentru secțiuni mari, vom calcula totdeauna τ cu ajutorul formulelor stabilite.

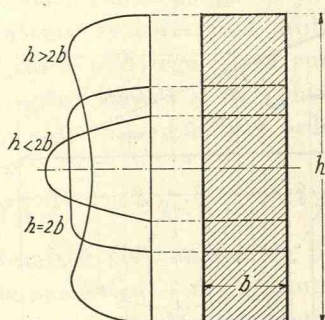


Figura 278

6. Calculul secțiunilor la forfecare.

Secțiunile formate dintr'o singură piesă nu se calculează la forfecare. Fiarele profilate sunt astfel dimensionate, încât rezistența τ_{max} rămâne totdeauna sub rezistențele admisibile. Chiar secțiunile de lemn, la cari rezistența admisibilă în lungul fibrelor este destul de mică — $\tau = 10 \text{ kg/cm}^2$ —, în cazurile practice, satisfac această condițiune.

Calculul pe baza rezistențelor τ intervine însă, atunci când compunem o secțiune din mai multe piese. Pentru ca acestea să formeze o singură secțiune, trebuie ca lunecarea între diferitele elemente componente ale secțiunii să fie împiedicată. Pentru a le solidariza între ele întrebuițăm diverse piese auxiliare, precum nituri, buloane, pene, etc.

Ele vor trebui astfel calculate, încât să împiedice lunecarea pieselor componente ale secțiunii între ele.

Formula (2) ne dă valoarea rezistenței la lunecare pe centimetru liniar de grindă.

În cazul secțiunilor constante, valoarea forței care produce lunecarea pe intervalul $x_0 - x$, și pe care o notăm T_l , este:

$$(10) \quad T_l = \int_{x_0}^x b \sigma_z dx = (S/I) \int_{x_0}^x T dx = S [M_x - M_0] / I$$

Dacă rezistența unui nit, a unui bulon sau a unei pene, etc., este R , atunci pe intervalul $x - x_0$ ne trebuie:

$$(11) \quad n = T_l / R$$

asemenea piese.

Din formula (10), se vede că $\int T dx$ este suprafața curbei forței

tăietoare în intervalul $x - x_0$. Dacă vom ca fiecare piesă de solidarizare (nit, pană, etc.) să se încarce egal, vom împărți această suprafață în n părți egale, sau ceea ce este tot una cu a împărți diferența $M_x - M_0$, în același număr de părți egale.

Să se observe că T_l va fi pozitiv atâta timp cât T este pozitiv, adică M crește. Dacă M ajunge la un maxim și apoi scade, atunci T și T_l schimbă de semn. Împărțirea suprafeței $\int T dx$ în părți egale, în cazuri simple, se poate face și prin calcul.

Să presupunem că pe intervalul $x - x_0 = a$, forța tăietoare variază după o dreaptă, T fiind nul în x (fig. 279).

10. Ordonatele care împart triunghiul în n părți egale, se găsesc la distanțele $a_1, a_2, \dots$ de vârful triunghiului și sunt date de relația:

$$(12) \quad a_1^2 / 1 = a_2^2 / 2 = \dots = a_i^2 / i = \dots = a^2 / n$$

Această împărțire se poate face și grafic cu ajutorul unui cerc așa cum se arată pe figură, fără nicio altă explicație.

20. Căpătăm exact același rezultat dacă împărțim $M_x - M_0$ în n părți egale.

Punctele de diviziune ale suprafeței $\int T dx$ se găsesc în dreptul absciselor de pe curba momentelor — parabolă în acest caz — co-

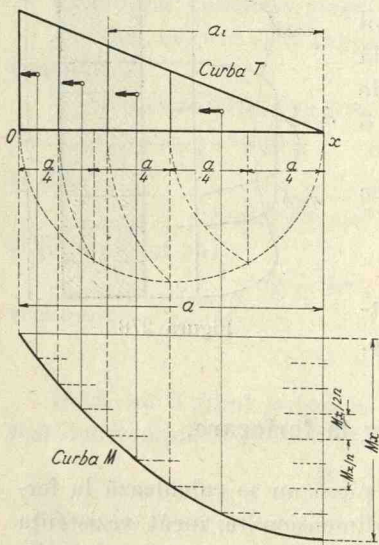


Figura 279

respunzând punctelor de diviziune ale momentului, așa cum se arată pe figură. Această metodă convine în special în cazul când curba momentelor și a forțelor tăietoare sunt curbe oarecari.

Pieșele de solidarizare se pun în dreptul centrelor de greutate ale suprafețelor astfel determinate.

În cazul nostru, distanța dela vârful triunghiului până la centrul de greutate al trapezului cuprins între ordonatele i și $i + 1$, este:

$$(13) \quad 2 (a^3_{i+1} - a^3_i) / 3 (a^2_{i+1} - a^2_i)$$

sau

$$(13) \quad [(i+1) \sqrt{i+1} - i \sqrt{i}] 2 a / 3 \sqrt{n}$$

În cazul când utilizăm curba momentelor, atunci penele se pun în dreptul absciselor de pe curba momentelor, ce corespund mijlocului diviziunilor care împarte $M_x - M_0$ în n părți egale, așa cum se arată pe figură. Această metodă este aproximativă și dă pentru distanța dela vârful triunghiului până la pana cuprinsă între ordonatele i și $i + 1$ valoarea:

$$(14) \quad a \sqrt{(1+2i)/2n}$$

Având în vedere că formula aproximativă (14), dă pentru poziția penelor, distanțe cari diferă de cele exacte cu + 5,7% pentru prima pană și cu cel mult + 0,48% pentru toate celelalte, în practică se întrebuințează în mod indiferent una din cele două metode.

În cazul când căutăm forța de lunecare în axa neutră, atunci formula (10) se simplifică dând

$$(15) \quad T_l = (M_x - M_0) / y_r = N_{tx} - N_{to}$$

și în cazul când în origine $M_0 = 0$, deci $N_{to} = 0$, rezultă:

$$(15) \quad T_l = N_{tx}$$

formulă de altfel evidentă.

Dacă din calcul ne iese pentru grinda de lemn o dimensiune ce nu se găsește ușor în comerț, atunci facem grinda din mai multe grinzi mai mici, suprapuse.

Pentru ca secțiunile să lucreze ca o secțiune singură, trebuie să împiedecăm lunecarea lor. Aceasta se face cu ajutorul dinților sau al penelor, ca în fig. 280.

În genere înălțimea penelor și a dinților ni se dă. Pentru pene de ex., dacă înălțimea unei grinzi este h , atunci înălțimea penei se

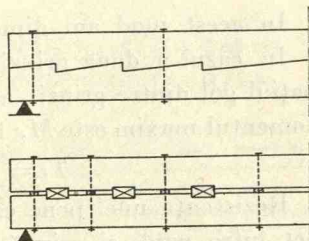


Figura 280

ia $0,3 h$, iar creștătura în o grindă se face de $h_1 = 0,1 h$. Lățimea penei se ia cam de două ori înălțimea ei. Cele două fețe laterale ale penei se fac ușor inclinate una față de alta, cam cu $1/10$, ca să poată fi înțepenite în grindă prin baterea cu ciocanul (fig. 281).

Evident că ele se fac ceva mai lungi decât lățimea b a grinzii pentru a le bate din timp în timp, când lemnul scade prin uscare.

În acest mod, în cazul a două grinzi cu pene, înălțimea totală a grinzii este $H = 2,1 h$.

Grinzile se solidarizează între ele cu buloane al căror diametru

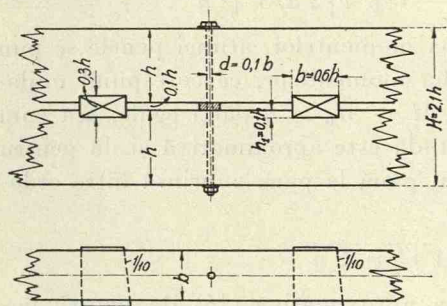


Figura 281

d este cam $0,1 b$ și cari se pun în intervalul dintre pene. În aceste condiții, secțiunea cea mai slăbită este totdeauna în dreptul buloanelor, unde momentul rezistent este $W = \frac{1}{6} (b-d) H^2$, făcând aproximația că se neglijează momentul de inerție al părții centrale înaltă de $0,1 h$.

Pentru că lucrările de dulgherie nu se pot executa cu precizie, în calcul nu se ia valoarea de mai sus, ci ea se reduce precum urmează:

pentru două grinzi cu dinți se ia $0,8 W$

» » » » pene » » $0,7 W$

» trei » » dinți » » $0,6 W$

» » » » pene » » $0,5 W$.

În acest mod am dimensionat grinzile.

În cazul a două grinzi cu pene, axa neutră fiind tocmai în spațiul gol dintre grinzi, avem $S/I = 1,5/H$, iar $y_r = H/1,5$. Dacă momentul maxim este M , formula (15) ne dă:

$$T_l = M/y_r = 1,5 M/H$$

Rezistența unei pene este dată de rezistența suprafeței de contact între pană și grindă, care este:

$$R = 0,1 h b \mathfrak{X} = h_1 b \mathfrak{X}$$

Pentru că penele se fac din lemn de esență tare, pentru $\mathfrak{X}$ se ia valoarea rezistenței în lungul fibrelor din grinzi.

Numărul de pene se deduce numai decît cu ajutorul formulei (11), iar poziția lor cu ajutorul formulei (13).

Aplicația Nr. 78. O grindă simplă rezemată la ambele extremități, de 8 m. deschidere, suportă o sarcină totală uniform distribuită de $p = 260 \text{ kg/m}$.

Să se dimensioneze grinda, dacă $\mathcal{K}a = 80 \text{ kgr./cm}^2$ și $\mathcal{C}a = 10 \text{ kg/cm}^2$ și să se solidarizeze secțiunile.

Avem:

$$M = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} 260 \cdot 8^2 = 2080 \text{ kg m.} = 208000 \text{ kg cm.}$$

$$W = M / \mathcal{K}a = 208000 / 80 = 2600 \text{ cm}^3$$

Dacă grinda se face din două grinzi cu pene și dacă pentru fiecare grindă luăm $h = b \sqrt{2}$ și diametrul bulonului $d = 2 \text{ cm.}$, avem:

$$W \text{ necesar} = W / 0,7 = 2600 / 0,7 = 3714 \text{ cm}^3$$

$$\text{și } \frac{1}{6} (b - 2) \cdot 2 \cdot b^2 = 3714 \text{ sau } b^3 = 3714 / 1,47 (1 - 2/b)$$

care rezolvată prin încercări dă:

$$b = 14,34 \text{ cm.}; h = 20,3 \text{ cm.}$$

valori pe cari le rotunjim la:

$$b = 20 \text{ cm.} \quad \text{și} \quad h = 15 \text{ cm.}$$

Să verificăm secțiunea.

$$\text{Avem:} \quad H = 2,1 h = 42 \text{ cm}, \quad W = \frac{1}{6} (b - d) H^2 = 3822 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{K}_e = M / W = 208000 / 3822 \cdot 0,7 = 77,7 \text{ kg/cm}^2,$$

deci în limita impusă.

Să determinăm numărul și poziția penelor.

Avem: $Tl = 1,5 M / H = 1,5 \cdot 208000 / 42 = 7430 \text{ kg}$, cu $h_1 = 0,1 h = 2 \text{ cm}$,
avem: $R = 15 \cdot 2 \cdot 80 = 2400 \text{ kg}$ și $n = Tl / R = 7430 / 2400 = 3,1$.

Pentru că nu putem lua decât un număr întreg de pene, luăm $n = 4$.

Poziția penelor o fixăm cu ajutorul celei de a doua formulă (13). Cu:

$$2 a / 3 \sqrt{n} = 2 a_1 / 3 = 2 \cdot 4 / 3 \cdot 2 = 1,333 m$$

distanțele dela vârful triunghiului până la pana întâia, a doua, a treia, etc. vor fi:

$$1,333 (1 \sqrt{1} - 0 \sqrt{0}) = 1,33 m \quad ; \quad 1,333 (2 \sqrt{2} - 1 \sqrt{1}) = 2,44 m$$

$$1,333 (3 \sqrt{3} - 2 \sqrt{2}) = 3,16 m \quad ; \quad 1,333 (4 \sqrt{4} - 3 \sqrt{3}) = 3,75 m$$

iar distanțele între pene, între extremitatea grinzii și mijlocul ei, sunt cele din fig. 282.

Lățimea b_1 , a penei, se verifică la forfecare după un plan orizontal AB (fig. 283), deci:

$$b_1 b \mathcal{C}a = h_1 b \mathcal{K}a$$

Pentru această forfecare se ia

$$\mathcal{C}a = 0,3 \mathcal{K}a,$$

deci: $b_1 = h_1 / 0,3 = 2 / 0,3 = 6,67 \text{ cm}$, dimensiune prea mică; în practică luăm cam de două ori înălțimea penei, deci: $b_1 = 12 \text{ cm}$.

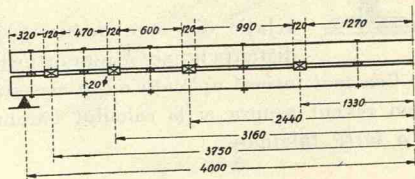


Figura 282

Tot ca verificare, trebuie ca creștăturile să nu provoace forfecarea după suprafețele CD , C_1D_1 și EF (fig. 283), deci:

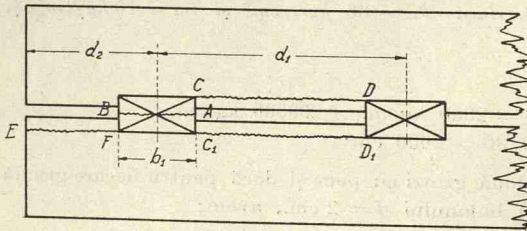


Figura 283

$$\sigma_a b (d_1 - b_1) \geq b h_1 \kappa_a;$$

$$\sigma_a b (d_2 - \frac{1}{2} b_1) \geq b h_1 \kappa_a$$

Rezistența admisibilă în lungul fibrelor se ia

$$\sigma_a = 10 \text{ kg/cm}^2$$

și cu

$$\kappa_a = 80 \text{ kg/cm}^2$$

din relațiile de mai sus deducem:

$$d_1 \geq 8 h_1 + b_1 = 8.2 + 12 = 28 \text{ cm.}$$

$$d_2 \geq 8 h_1 + \frac{1}{2} b_1 = 8.2 + \frac{1}{2} 12 = 22 \text{ cm.}$$

Dacă se inspectează distanțele între pene, se constată că satisfac acestor condiții. Dacă n'ar satisface, atunci se pun penele înclinat (fig. 284). Dacă nici așa n'am rezolva chestiunea, atunci se modifică dimensiunile grinzii.

Calculul se face absolut identic când solidarizarea celor două grinzi se face cu ajutorul dinților sau altor piese speciale făcute din oțel.

Aplicația Nr. 79. Grinzile metalice făcute din mai multe piese, trebuiesc solidarizate așa ca lunecarea unor piese față de altele să fie împiedecată. De exemplu la o grindă în I niturile orizontale, cari fixează grupul de corniere și platbandele de inimă grinzii, trebuiesc puse la așa distanță, încât lunecarea platbandelor și cornierelor față de inimă să fie împiedecată (fig. 285).

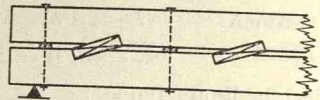


Figura 284

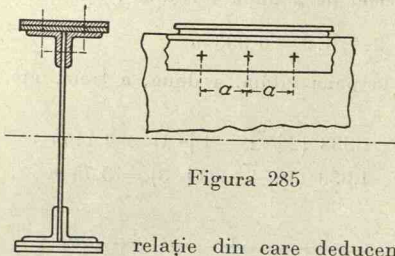


Figura 285

Dacă rezistența unui nit este R , atunci el rezistă pe un interval oarecare a . Pentru că distanța între nituri este relativ mică, putem considera $T = ct$ pe intervalul a , și deci:

$$T_l = Ta S/I = R$$

relație din care deducem pe a (distanța între nituri). În genere distanța la care se pun niturile de obicei satisface aceste condițiuni.

Cea mai întinsă aplicație o are această chestiune la grinzile de beton armat. Vom reveni asupra ei la calculul barelor supuse la un moment încovoiător și o forță tăietoare.

XIX. DETERMINAREA REZISTENȚELOR LA GRINZILE SUPUSE LA MOMENTE DE RĂSUCIRE.

1. Generalități.

a) Starea rezistențelor

Și în acest caz, ne vom conduce după indicațiile pe care ni le dă experiența. Să presupunem că avem o bară supusă la cele două capete la două momente de răsucire, M_r , egale și de sens contrar, după axa piesei (fig. 286).

Mai întâi se face observația, că *dacă secțiunea barei este constantă, nu este niciun motiv ca toate secțiunile barei să nu se deformeze la fel între cele două capete ale sale.*

Din bară, printr'un plan paralel cu axa ei, să separăm o porțiune, $ABC A_1 B_1 C_1$. În fața ABC neexistând forță normală N , nu vor exista rezistențe $\mathcal{R}_x$, ci numai rezistențe $\mathcal{G}$, pe cari le descompunem după direcțiile Oy și Oz . Să presupunem că planul $ABA_1 B_1$ este paralel cu planul zOx .

Dacă în fața $ABA_1 B_1$ ar exista o rezistență $\mathcal{R}_y$, trebuie să avem

$$\int \mathcal{R}_y d\Omega = 0$$

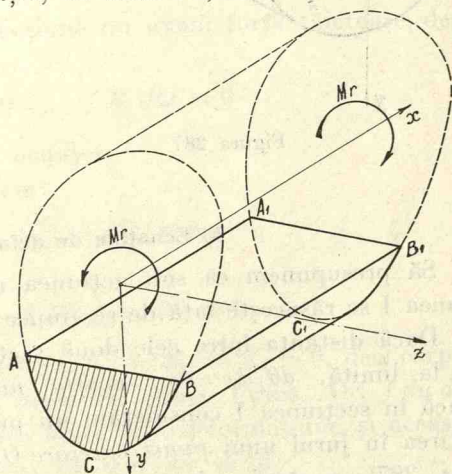


Figura 286

pentru că rezistențele din fețele ABC și $A_1B_1C_1$ fiind egale și de sens contrar, dau după axa Oy o componentă nulă. Cum relația de mai sus trebuie să fie satisfăcută, oricare ar fi poziția planului ABA_1B_1 , rezultă:

$$\mathcal{K}_y \equiv 0$$

Dacă am duce planul paralel cu xOy , pentru aceleași motive găsim:

$$\mathcal{K}_z \equiv 0$$

Dacă în fața ABA_1B_1 ar exista și o rezistență $\mathfrak{T}_x$, pentru aceleași motive găsim și

$$\mathfrak{T}_x \equiv 0$$

Pe de altă parte, dacă toate secțiunile se comportă la fel în lungul barei, atunci și creșterile rezistențelor în raport cu x sunt nule, deci:

$$\partial \dots / \partial x = 0.$$

În aceste condiții, ecuațiile (35) ale lui *Cauchy* se reduc la:

$$(1) \quad \partial \mathfrak{T}_z / \partial y + \partial \mathfrak{T}_y / \partial z = 0$$

Așa dar, rezistențele $\mathfrak{T}_y$ și $\mathfrak{T}_z$ trebuie să satisfacă acestor condiții.

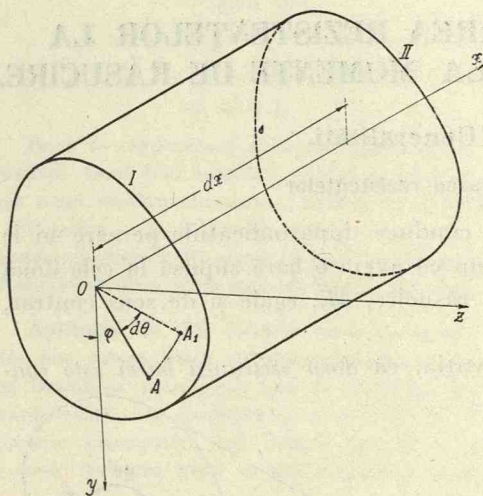


Figura 287

b) Ecuațiile de deformațiuni.

Să presupunem că sub acțiunea momentului de răsucire secțiunea I se răsucește față de secțiunea II cu un unghi oarecare θ .

Dacă distanța între cele două secțiuni este l , atunci $\theta / l = \omega$ și la limită, $d\theta / dx = \omega$, poartă numele de *răsucire specifică*. Dacă în secțiunea I considerăm un punct oarecare A , acesta prin rotirea în jurul unui punct oarecare O , va parcurge drumul AA_1 , (fig. 287). a cărui valoare este

$$AA_1 = r \omega dx$$

dacă notăm $OA = r$.

În deplasarea sa, punctul A parcurge drumurile u , v și w , paralele cu cele trei axe de coordonate.

Dacă notăm cu φ unghiul yOA , avem

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

și deci:

$$(2) \quad d\varphi = -z \omega dx, \quad d\omega = y \omega dx$$

Însă

$$(3) \quad \begin{aligned} \tau_y &= G \gamma_y = G (\partial \omega / \partial x + \partial u / \partial z) = G (y \omega + \partial u / \partial z) \\ \tau_z &= G \gamma_z = G (\partial \varphi / \partial x + \partial u / \partial y) = G (-z \omega + \partial u / \partial y) \end{aligned}$$

Dacă în ecuația (1) introducem aceste valori, căpătăm:

$$(4) \quad \partial^2 u / \partial z^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$$

Prin urmare, deformațiunile u în sensul axei Ox , trebuie să satisfacă ecuația (4). Din această ecuație rezultă că există deformațiuni în lungul axei Ox , deci secțiunile în genere nu rămân plane, ceea ce experiența confirmă.

Din ecuația (3), mai deducem:

$$(5) \quad \partial \tau_y / \partial y - \partial \tau_z / \partial z = 2 G \omega$$

c) Ecuațiile de echilibru.

1°. *Poligonul forțelor.* În secțiune nu avem forță tăietoare, deci rezultă:

$$\int \tau_y d\Omega = 0 \quad ; \quad \int \tau_z d\Omega = 0$$

Să ne ocupăm de prima ecuație.

Ținând seamă de (3), avem:

$$\int \omega y d\Omega + \int \partial u d\Omega / \partial z = 0$$

sau

$$\omega \int y d\Omega + (\partial / \partial z) \int u d\Omega = 0$$

Am văzut însă dela început că $\mathcal{K}_x = \mathcal{K}_y = \mathcal{K}_z = 0$, deci corpul nu-și mărește volumul, ci își modifică numai forma. Or, $\int u d\Omega$ este tocmai creșterea volumului barei prin deformațiune, și aceasta este nulă. Rezultă din expresia de mai sus că și:

$$\int y d\Omega = 0.$$

Analog se arată că și $\int z d\Omega = 0$. Așa dar, punctul O se găsește în centrul de greutate al secțiunii. Deci, axul în jurul căruia se face rotirea trece prin centrul de greutate al secțiunii.

2°. *Ecuatia de momente.* Ținând seamă de (3), avem succesiv:

$$(6) \quad *) M = \int (z \bar{\sigma}_z - y \bar{\sigma}_y) d\Omega$$

$$M/G = -\omega I_p + \int (z \partial u / \partial y - y \partial u / \partial z) d\Omega$$

Relațiile deduse până aci ne arată că dacă într'un mod oarecare am găsi expresia lui u , atunci avem toate cantitățile cari ne interesează. Aceasta depinde de integrala ecuației (4) și care va diferi după natura conturului și forma secțiunii.

Expresiunii momentului i se mai poate da și altă formă. Să presupunem că avem o secțiune inelară a cărei grosime h , în diferite puncte, este variabilă (fig. 288). Să presupunem că din această bară luăm o lungime dx , mărginită la două plane meridiane.

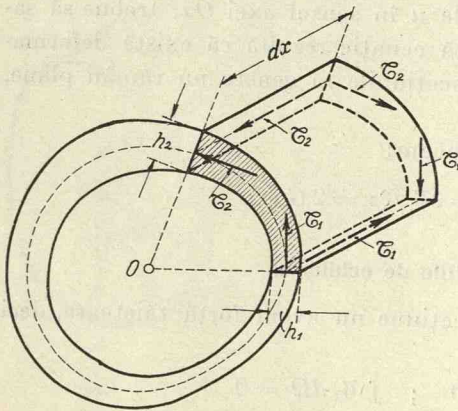


Figura 288

Pe fețele sale se dezvoltă niște rezistențe $\bar{\sigma}$, arătate în figură. Dacă scriem echilibrul acestui element de volum, proiectând toate forțele după axa Ox , avem

$$\bar{\sigma}_1 h_1 = \bar{\sigma}_2 h_2$$

și în genere

$$\bar{\sigma}_i h_i = ct$$

Dacă presupunem grosimile inelului foarte mici, atunci $\bar{\sigma}$ este dirijat totdeauna după tangenta la curba mediană, adică la curba care împarte în două grosimile inelului.

Momentul rezistențelor $\bar{\sigma}$ în raport cu centrul de greutate, este

$$dM = \bar{\sigma} h r ds$$

dacă presupunem că de pe inel luăm o lungime ds . Aci r este distanța dela centrul de greutate la tangenta la curba mediană a inelului, adică la $\bar{\sigma}$.

Momentul total va fi

$$M = \bar{\sigma} h \int r ds$$

*) Pentru acest capitol vom nota momentul de răsucire cu M , fără indicele r pentru a nu complica scrierea inutil.

Or, $\int r ds$ este dublul suprafeței Ω , mărginită de curba mediană, deci

$$(7) \quad M = 2 \bar{\sigma} \Omega h$$

Pentru un inel de grosime dh vom avea:

$$(8) \quad dM = 2 \Omega \bar{\sigma} dh$$

Să revenim acum la o secțiune plină.

S'a arătat că dacă pe conturul unei secțiuni nu avem nicio rezistență, atunci rezistențele $\bar{\sigma}$ sunt totdeauna dirijate după tangenta la contur (fig. 289).

Așa dar, pe conturul secțiunii avem totdeauna

$$(9) \quad \bar{\sigma}_z / \bar{\sigma}_y = -\partial y / \partial z$$

Să presupunem că avem o funcțiune φ de y și z , așa fel ca:

$$(10) \quad \partial \varphi / \partial y = \bar{\sigma}_y, \quad \partial \varphi / \partial z = -\bar{\sigma}_z$$

și în genere așa fel ca:

$$(11) \quad \partial \varphi / \partial h = \bar{\sigma}$$

adică, derivata după o direcțiune oarecare, să ne dea valoarea lui $\bar{\sigma}$ ce corespunde acelei direcțiuni.

Dacă se pun valorile din (10) în (9) se obține o identitate. Deci, pentru conturul secțiunii, funcția φ este chiar ecuația conturului secțiunii.

Dacă valoarea lui $\bar{\sigma} dh$ din (11) se pune în (8), avem

$$(12) \quad dM = 2 \Omega d\varphi$$

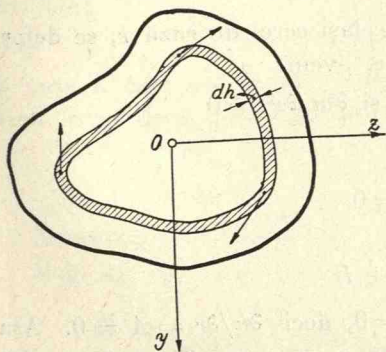


Figura 290

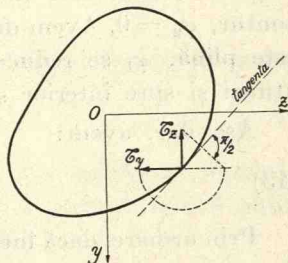


Figura 289

2. Distribuția rezistențelor pe secțiune. Generalități.

Să presupunem că într'un mod oarecare am găsit valoarea și direcția rezistenței $\bar{\sigma}$ în fiecare punct al secțiunii (fig. 290). Să considerăm o curbă închisă în interiorul secțiunii la conturul căreia rezistențele $\bar{\sigma}$ sunt tangente.

Dacă considerăm două curbe infinit vecine la distanța dh , acestea mărginesc un inel și căruia putem să-i aplicăm ecuațiile (8) și (12). Să presupunem că prin asemenea curbe am împărțit suprafața într-o serie de inele de grosime dh .

Dacă integrăm ecuația (12) avem:

$$M = 2 (\Omega_2 \varphi_2 - \Omega_1 \varphi_1) - 2 \int \varphi d\Omega.$$

Primul termen este nul pentru că la limita superioară, adică pe contur, $\varphi_2 = 0$. Avem de asemenea $\varphi_1 = 0$, pentru că dacă secțiunea este plină, φ_1 se reduce la un punct, dacă secțiunea este inelară, atunci și spre interior secțiunea este limitată de o curbă $\varphi_1 = 0$.

Așa dar, avem:

$$(13) \quad M = -2 \int \varphi d\Omega$$

Prin urmare, dacă într'un mod oarecare avem funcțiunea φ , atunci din formula (11) avem și valorile lui $\bar{\mathfrak{G}}$.

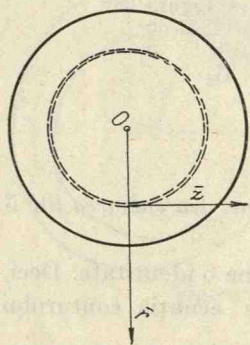


Figura 291

a) Secțiuni circulare.

Pentru simplificarea calculelor vom lua ca axă Oy direcția razei ce pleacă din O , iar coordonatele z le măsurăm pe cercul ce trece prin extremitatea razei (fig. 291).

În acest caz formulele (3) se pun sub forma :

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}} &= G (\omega r + \partial u / \partial z) \\ \bar{\mathfrak{G}}_z &= G \partial u / \partial r \end{aligned}$$

Pentru că toate punctele de pe același cerc de rază r , se deformează la fel din motive de simetrie, avem:

$$\partial u / \partial z = 0, \text{ și deci și } \partial^2 u / \partial z^2 = 0$$

În virtutea relației (4) rezultă:

$$\partial^2 u / \partial r^2 = 0$$

care ne dă

$$u = A r + B$$

Pe conturul secțiunii avem $\bar{\mathfrak{G}}_z = 0$, deci $\partial u / \partial r = A = 0$. Așa dar, $u = B = ct$, dar cum pe de altă parte avem $\mathfrak{U}_x = 0$, rezultă și $u = 0$.

Deci, la secțiunile circulare, secțiunile plane înainte de deformare rămân plane și după deformare.

În acest caz, formulele (14) ne dau:

$$(15) \quad \tau_r = G \omega r, \quad \tau_z = 0$$

iar din (6) deducem:

$$(16) \quad \omega = -M/G I_p$$

și deci

$$(17) \quad \tau_r = -Mr/I_p$$

Dacă se notează $I_p/r_{max} = W_p$ și făcând abstracție de semn avem:

$$(18) \quad \tau_{max} = M/W_p$$

Formulele (16) și (18) servă la dimensionarea arborilor circulari. Pentru deformarea ω se prescrie în genere să nu treacă de $1/4$ până la $1/5$ dintr'un grad sexagesimal pe metru de lungime de arbore.

b) Secțiuni dreptunghiulare. Soluția aproximativă.

Conturul secțiunii (fig. 292) e format din drepte

$$y = \pm \frac{1}{2} h \quad \text{și} \quad z = \pm \frac{1}{2} b.$$

Ecuția conturului este deci:

$$(y^2 - \frac{1}{4} h^2) (z^2 - \frac{1}{4} b^2) = 0.$$

Familia de curbe care împarte suprafața dreptunghiului o vom presupune dată de formula:

$$(19) \quad \varphi = k (y^2 - \frac{1}{4} h^2) (z^2 - \frac{1}{4} b^2)$$

în care k este un factor constant și în aceasta stă aproximația. Vom avea deci conform formulei (10):

$$\tau_y = \partial \varphi / \partial y = 2 k y (z^2 - \frac{1}{4} b^2)$$

$$\tau_z = -\partial \varphi / \partial z = -2 k z (y^2 - \frac{1}{4} h^2)$$

Ne rămâne să determinăm pe k .

Vom aplica fie ecuația (6) fie (13). Aplicând ultima avem:

$$M = -2k \int (y^2 - \frac{1}{4} h^2) (z^2 - \frac{1}{4} b^2) d\Omega = k \Omega^3 / 18$$

deci:

$$k = 18 M / \Omega^3$$

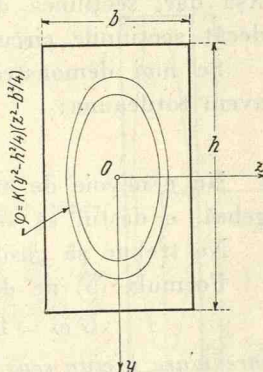


Figura 292

în care am notat $\Omega = bh$.

Așa dar:

$$(20) \quad \begin{aligned} \tau_y &= 36 M y (z^2 - \frac{1}{4} b^2) / \Omega^3 \\ \tau_z &= -36 M z (y^2 - \frac{1}{4} h^2) / \Omega^3 \end{aligned}$$

Am găsit deci distribuția și valoarea rezistențelor pe secțiune.

Dacă admitem $h > b$, se vede că rezistențele maxime au loc respectiv pentru $y = 0$, $z = \frac{1}{2} b$ și $y = \frac{1}{2} h$, $z = 0$, unde au valorile:

$$\tau_z = 4,5 M / \Omega b, \quad \tau_y = -4,5 M / \Omega h$$

din care cea mai mare se vede că este

$$(20)' \quad \tau_{max} = \tau_{zmax} = 4,5 M / \Omega b$$

Din examinarea formulelor de mai sus se vede că rezistențele τ sunt nule la colțurile secțiunii și maxime la mijlocul laturilor, deci în punctele cele mai apropiate de centrul de greutate al secțiunii. Așa dar, secțiunea dreptunghiulară se comportă cu totul altfel decât secțiunile circulare.

Se mai demonstrează, că într'un punct oarecare al secțiunii avem totdeauna:

$$\tau_y^2 + \tau_z^2 < \tau_{max}^2$$

Nu e nevoie de această demonstrație, care e chestiune de algebră, e destul să se știe aceasta.

Ne trebuie să găsim unghiul ω , adică răsucirea specifică.

Formula (5) ne dă

$$G \omega = 18 M (y^2 + z^2 - \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} b^2) / \Omega^3$$

care n'are niciun sens, întru cât unghiul cu care se răsucește secțiunea nu depinde de coordonatele unui punct de pe secțiune.

După această formulă, ar rezulta că muchiile barei nu se răsucesc de loc, pe când centrul de greutate se răsucește cu

$$\omega = 4,5 M (b^2 + h^2) / G \Omega^3$$

ceea ce nu este exact.

Determinarea lui ω se face pe baza lucrului mecanic și anume: se scrie că lucrul mecanic acumulat de un element de bară de lungime 1 și care este $\frac{1}{2} M \omega$ este egal cu lucrul mecanic interior al aceluiași element de bară și anume $\frac{1}{2} \int \tau^2 d\Omega / G$, și deci avem:

$$M \omega = \int \tau^2 d\Omega / G$$

în care $\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2$.

Dacă se pun valorile lui $\bar{\sigma}_y$ și $\bar{\sigma}_z$ găsite și se face integrala pe toată suprafața, se găsește

$$\int \bar{\sigma}^2 d\Omega = [36 M / \Omega^3]^2 \int [y^2 (z^2 - \frac{1}{4}b^2)^2 + z^2 (y^2 - \frac{1}{4}h^2)] d\Omega$$

care ne dă:

$$(21) \quad \omega = 3,6 M (b^2 + h^2) / G \Omega^3$$

Se obișnuiește a se pune această formulă sub forma dela încovoire, sau dela secțiunile circulare și anume sub forma

$$(21_1) \quad \omega = M / G I_r$$

în care I_r este un moment de inerție convențional care să ne dea aceeași deformație ca și formula (21). Se observă că:

$$b^2 = 12 i_y^2, \quad h^2 = 12 i_z^2$$

și dacă se ține seamă că: $i_y^2 + i_z^2 = i_p^2$ și că $i_p^2 \Omega = I_p$, se capătă:

$$I_r = \Omega^4 / 43,2 I_p.$$

În practică se ia rotund:

$$I_r = \Omega^4 / 40 I_p$$

după cum a stabilit-o *de Saint Venant*.

c) Secțiuni dreptunghiulare subțiri.

Calculul se face ca mai sus, însă se pot face oarecări simplificări chiar dela început (fig. 293).

Din formula (5) se vede că în acest caz $\partial \bar{\sigma}_y / \partial y$ este relativ foarte mic față de $\partial \bar{\sigma}_z / \partial z$, pentru că b este foarte mic față de h .

Așa dar, avem aproximativ:

$$\partial \bar{\sigma}_z / \partial z = -2 G \omega$$

și deci:

$$(22) \quad \bar{\sigma}_z = -2 G \omega z$$

Avem distribuția rezistențelor $\bar{\sigma}$, ne mai trebuie să aflăm pe ω .

În ecuația (8) introducem valoarea aproximativă a lui $\Omega = 2 h z$ și deci

$$M = 8 G \omega h \int_0^{\frac{1}{2}b} z^2 dz = \frac{1}{3} G \omega \Omega b^2$$

și prin urmare:

$$(23) \quad \omega = 3 M / G \Omega b^2$$

Rezistența maximă în acest caz este

$$(22_1) \quad \bar{\sigma} = 3 M / \Omega b$$

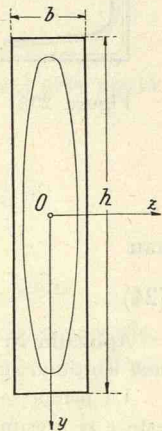


Figura 293

d) Alte secțiuni.

Calculul de mai sus ne permite să trecem la calculul altor secțiuni. Să avem de exemplu un fier $\square$ (fig. 294). Dacă la acesta se aplică ecuația (8) și dacă diferitele dreptunghiuri în care se poate descompune secțiunea au lățimile b_1 și secțiunea Ω_1 , atunci urmând calea de mai sus găsim

$$(23) \quad \omega = 3 M / G \Sigma \Omega_1 b_1^2$$

iar valoarea lui τ după formula (22) este

$$(22_2) \quad \tau = 3 M b / \Sigma \Omega_1 b_1^2$$

și este maximă la mijlocul laturei unde avem lățimea b maximă.

Aceeași formulă se aplică cornierelor și fiarelor I.

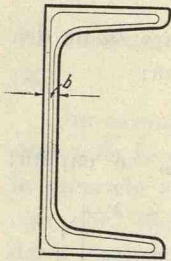


Figura 294

e) Secțiuni inelare închise oarecari.

Pentru calculul rezistențelor τ se întrebuințează formula (7) stabilită anterior.

Ne rămâne de aflat valoarea lui ω . Aceasta o deducem cu ajutorul lucrului mecanic.

$$\frac{1}{2} M \omega = \int M^2 d\Omega / 4 G \Omega^2 h^2$$

sau

$$(24) \quad \omega = (M / 4 \Omega^2 G) \int ds / h$$

Aplicația Nr. 80. Cari sunt rezistențele la răsucire la două secțiuni inelare una continuă și alta tăiată după o generatoare (fig. 295).

La prima secțiune dacă raza medie este r și grosimea h , după (7), avem:

$$\tau = \frac{1}{4} M / \pi r h$$

pe când la a doua, după formula (22), avem:

$$\tau = \frac{3}{2} M / \pi r h$$

Deci, în al doilea caz, rezistența este de 6 ori mai mare pentru același M .

În privința deformațiunilor, în primul caz avem după formula (24):

$$\omega = \frac{1}{2} M / \pi r^3 h G$$

pe când în al doilea:

$$\omega = \frac{3}{2} M / \pi r h^3 G$$

decă de $3 r^2 / h^2$ ori mai mare pentru același moment M .

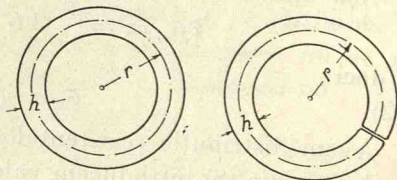


Figura 295

f) Soluția exactă pentru secțiuni dreptunghiulare.

Soluția dată pentru cazul acesta este o soluție aproximativă pentru că, pentru funcțiunea φ , s'a luat una aproximativă și care nu este exactă decât pe conturul secțiunii.

De aceea s'au și observat oarecari nepotriviri mai ales la calculul răsucirii specifice ω .

Integrala completă a ecuației (4), care va satisface pe contur ecuația (9), va fi soluțiunea problemei.

Vom lua pentru funcțiunea u :

$$(25) \quad u = Y Z$$

în care Y și Z sunt respectiv funcțiuni numai de y și z .

Introducând aceasta în (4), căpătăm:

$$Z (\partial^2 Y / \partial y^2) + Y (\partial^2 Z / \partial z^2) = 0$$

sau:

$$(\partial^2 Y / \partial y^2) / Y + (\partial^2 Z / \partial z^2) / Z = 0$$

Această ecuație este satisfăcută când fiecare din părți este egală respectiv cu $+\alpha^2$ și $-\alpha^2$, în care α este o constantă.

Deci

$$(26) \quad \partial^2 Y / \partial y^2 - \alpha^2 Y = 0 \quad , \quad \partial^2 Z / \partial z^2 + \alpha^2 Z = 0$$

care ne dă:

$$Y = A \text{ shay} + A_1 \text{ chay} \quad , \quad Z = B \sin z + B_1 \cos z.$$

În centrul de greutate al secțiunii $u = 0$, deci A_1 și B_1 sunt nule.

O soluție a problemei este și $u = y z$, așa că o soluție completă ar fi :

$$u = A \text{ shay} \sin z + B y z.$$

Introducând această valoare în (3), avem:

$$\mathfrak{G}_y / G = y (\omega + B) + A a \text{ shay} \cos z$$

$$\mathfrak{G}_z / G = z (-\omega + B) + A a \text{ chay} \sin z$$

Rezistențele însă trebuie să satisfacă condițiile:

$$\mathfrak{G}_y \equiv 0 \text{ pentru } z = \pm \frac{1}{2} b \text{ oricare ar fi } y$$

$$\mathfrak{G}_z \equiv 0 \text{ pentru } y = \pm \frac{1}{2} h \text{ oricare ar fi } z,$$

deci trebuie să avem:

$$y (\omega + B) + A a \text{ shay} \cos(\frac{1}{2} ab) = 0$$

$$z (-\omega + B) + A a \text{ ch}(\frac{1}{2} ah) \sin z = 0$$

Prima relație este satisfăcută când: $B = -\omega$, $\cos(\frac{1}{2} ab) = 0$, deci $ab = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Relația doua, în forma de mai sus, nu poate fi satisfăcută. Dacă însă luăm pentru u soluția mai generală:

$$u = -\omega y z + A_1 shay \sin az + A_3 sh3ay \sin 3az + \dots$$

care ne dă:

$$\mathfrak{G}_z/G = -2\omega z + A_1 a chay \sin az + 3A_3 ch3ay \sin 3az + \dots$$

care pentru a satisface condiția doua trebuie să avem:

$$az = (a^2/2\omega) [A_1 ch(\frac{1}{2}ah) \sin az + 3A_3 ch(\frac{3}{2}ah) \sin 3az + \dots]$$

Se pot oricând găsi coeficienții constanți $A_1, A_3, \dots$ așa fel ca această egalitate să subsiste în intervalul $-\frac{1}{2}b \leq z \leq \frac{1}{2}b$ adică pentru unghiul az cuprins între $-\frac{1}{2}\pi \leq az \leq \frac{1}{2}\pi$.

Dacă se pune:

$$\frac{1}{2} (a^2\omega) A_1 ch(\frac{1}{2}ah) = B_1$$

$$\frac{3}{2} (a^2\omega) A_3 ch(\frac{3}{2}ah) = B_3$$

atunci expresia de mai sus o înlocuim cu seria *Fourier*:

$$az = B_1 \sin az + B_3 \sin 3az + \dots$$

ai cărei coeficienți B sunt:

$$B_1 = 4/\pi, \quad B_3 = -4/\pi 3^2, \quad B_5 = 4/\pi 5^2, \dots$$

De aci deducem pe $A_1, A_3, \dots$ cari introduse în valoarea lui u ne dau:

$$u/\omega = -yz + (8/a^2\pi) [shay \sin az / ch(\frac{1}{2}ah) - sh3ay \sin 3az / 3^2 ch(\frac{1}{2}ah) + \dots]$$

Aceasta e soluția dată de *St. Venant*. Se vede de aci, că în lungul barei există deplasări u , deci secțiunea se deformează.

Având valoarea lui u , avem și valoarea rezistențelor, introducând această valoare în (3):

$$\mathfrak{G}_y/G \omega = (8/a\pi) \Sigma shay \cos az / ch(\frac{1}{2}ah)$$

$$\mathfrak{G}_z/G \omega = -2z + (8/a\pi) \Sigma chay \sin az / ch(\frac{1}{2}ah)$$

În aceste expresii avem toate elementele cunoscute afară de ω , răsucirea specifică.

Determinarea lui ω . Vom aplica ecuația (6) de momente, adică

$$M = \int (z \mathfrak{G}_z - y \mathfrak{G}_y) d\Omega$$

Să efectuăm aceste însumări.

Avem:

$$\int z \, \mathfrak{C}_z \, d\Omega = G \, \omega \left(-\frac{1}{6} h b^3 + 32 A / a^4 \pi \right)$$

$$\int y \, \mathfrak{C}_y \, d\Omega = G \, \omega \, 32 (B - A) / a^4 \pi$$

în care:

$$A = th \left(\frac{1}{2} ah \right) + (1/3^5) th \left(\frac{3}{2} ah \right) + (1/5^5) th \left(\frac{5}{2} ah \right) + \dots$$

$$B = \left(\frac{1}{2} ah \right) (1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \dots) = ah\pi^4/192$$

Dacă se ține seamă că $ab = \pi$ și dacă se notează:

$$k = 1 - 192 Ab / \pi^5 h$$

atunci avem:

$$\omega = -3 M/G h b^3 k = -3 M/G \Omega b^2 k$$

Valoarea lui k se calculează aproximativ în modul următor.

Se observă mai întâi că $th \left(\frac{1}{2} ah \right) = th(\pi h/2b)$ variază între 0 și 1.

Dacă se ține seamă că:

$$th \varphi = sh \varphi / ch \varphi = (e^\varphi - e^{-\varphi}) / (e^\varphi + e^{-\varphi}) \simeq 1 - 2 e^{-2\varphi}$$

atunci avem:

$$th(\pi h/2b) \simeq 1 - 2 e^{-\pi h/b}$$

Ceilalți termeni cari se împart cu 3^5 , 5^5 , etc. se neglijează și deci avem:

$$A \simeq 1 - 2 e^{-\pi h/b}$$

și prin urmare:

$$k = 1 - 0,63 (b/h) (1 - 2 e^{-\pi h/b})$$

Așa dar, valoarea lui k depinde de raportul h/b .

Pentru valori ale lui $h/b \geq 3$ se ia:

$$k = 1 - 0,63 b/h$$

și când b este foarte mic se ia $k = 1$.

Dacă se calculează ω pentru o secțiune pătrată, se găsește:

$$(27) \quad \omega = 7,014 M/G \Omega^2$$

pe când după formula aproximativă (21) avem:

$$(27') \quad \omega = 7,2 M/G \Omega^2$$

deci diferența nu e mai mare de 2,65%. Pentru secțiuni foarte plate rezultatele coincid.

Valorile rezistențelor. S'a găsit expresia lor. Ne interesează valorile maxime cari au loc la mijlocul laturilor.

$$\max \tau_y / G \omega = (8/a \pi) \Sigma th(\frac{1}{2} ah)$$

$$\max \tau_z / G \omega = -b + (8/a\pi) \Sigma [1/ch(\frac{1}{2} ah)]$$

Dacă ne mulțumim cu primii termeni ai seriilor, avem:

$$\max \tau_y = G \omega b (8/\pi^2) (1 - 2 e^{-\pi h/b})$$

$$\max \tau_z = G \omega b [-1 + 8/\pi^2 ch(\frac{1}{2} ah)]$$

și dacă se ține seamă că aci $ch(\frac{1}{2} ah) \simeq \frac{1}{2} e^{ah/2}$ avem:

$$(28) \quad \max \tau_z = 3 k_1 M/b^2 h$$

în care

$$k_1 = (1 - 1,62 e^{-\pi h/2b}) / [1 - 0,63 (b/h)(1 - 2 e^{-\pi h/b})]$$

O valoare și mai aproximativă e și

$$(29) \quad 3 k_1 = 3 + 2,6/(0,45 + h/b)$$

Pentru o secțiune patrată găsim valoarea exactă

$$(28) \quad \tau_z = 4,74 M/h^3$$

pe când pe calea aproximativă s'a găsit $\tau_z = 4,5 M/h^3$.

Pentru secțiuni plate, introducând valoarea lui τ_z , se găsește aproximativ:

$$\max \tau_z = 3 M/\Omega b (1 - 0,63 b/h)$$

iar pentru cele foarte plate, neglijând termenul b/h , cădem peste formula (22) găsită pe calea aproximativă.

Formulele acestea găsite de *St. Venant* dau, confruntate cu datele experiențelor, abateri de maximum 1,5%.

Aplicația Nr. 81. Să se dimensioneze un arbore care transmite 180 cai cu 120 rotații pe minut. Rezistența admisibilă fiind $\tau_a = 500 \text{ kg/cm}^2$, iar răsucirea specifică $\omega = (1/5)^0/\text{m}$. Momentul de răsucire se află împărțind P — puterea — prin iuțea de rotație:

$$P = 180 \text{ cai} = 180 \times 75 = 13500 \text{ kg m/sec}$$

Iuțea de rotație este $\omega = 2\pi n/60 = 120.2 \pi/60 = 4 \pi/\text{sec}$.

$$M = P/\omega = 13500/4 \pi = 1074 \text{ kg m} = 107400 \text{ kg cm}.$$

Deci: $W_p = M/\tau_a = 107400/500 = 214,8 \text{ cm}^3 = \frac{1}{2} \pi r^3$ și $r^3 = 136,6, \dots$

$$r \simeq 5,15 \text{ cm, deci un diametru: } d = 11 \text{ cm.}$$

Pentru ca deformația să nu treacă limita cerută, ea trebuie să fie mai mică decât $(1/5)^0/\text{m} = 2 \pi/360.5 = 0,00349 \text{ rad/m} = 34,9.10^{-6} \text{ rad/cm}$.
Avem: $I_p = M/G\omega = 107400/0,8.34,9 = 3852 = \frac{1}{2} \pi r^4$, în care am luat $G=0,8.10^6 \text{ kg/cm}^2$. De aci scoatem $r=7 \text{ cm}$, deci un diametru: $d=14 \text{ cm}$.

Prin urmare, dimensionarea se face pe baza deformațiunii.

Putem recunoaște dela început pe ce bază trebuie să facem dimensionarea.

Intr'adevăr, pe baza rezistenței obținem:

$$\sigma = 2Mr_1/\pi r_1^4 \text{ și deci } r_1^4 = 2M r_1/\pi \sigma$$

Pe baza deformațiunilor obținem raza r_2 :

$$\omega = 2M/G\pi r_2^4 \text{ și deci } r_2^4 = 2 M/\pi G \omega$$

Dacă $r_2 > r_1$, atunci avem și $r_2^4 > r_1^4$ și deci: $\sigma > G \omega r_1$. Așa dar, ori de câte ori această relație este satisfăcută și aceasta e cazul general la arbori, dimensionarea se face pe baza deformațiunii, nu pe baza rezistenței.

3. Calculul resoartelor helicoidale.

Un resort helicoidal este o bară curbă a cărei axă este o elice înfășurată pe un cilindru sau un con. Se fac și resoarte în spirală.

Ne vom ocupa de resoartele helicoidale al căror ax este înfășurat pe un cilindru și solicitate la o forță dirijată după axa cilindrului.

Chestiunea care se pune este să se găsească secțiunea resortului și deformația lui, adică cu cât se întinde sau se scurtează când după axa cilindrului avem o forță $F = 1$.

Aceasta se exprimă prin așa zisa flexibilitate, care este raportul între deformație și forță și care se exprimă în genere în mm/t .

Să presupunem că pasul elicei face unghiul α cu tangenta la cilindru normală pe axa cilindrului.

Dacă transportăm forța F în centrul de greutate al secțiunii vom avea:

1. O forță tăietoare a cărei valoare este $F \cos \alpha$.
2. O forță axială a cărei valoare este $F \sin \alpha$.
3. Un moment de răsucire a cărui valoare este $F r \cos \alpha$ și
4. Un moment încovoietor $F r \sin \alpha$.

Unghiul α în genere este mic, așa că la dimensionare nu se ține seama decât de momentul de răsucire, pentru care se ia $M \approx Fr$.

Dacă ni se dă forma secțiunii barei și rezistența admisibilă, găsim numaidecât dimensiunile necesare.

Pentru a găsi deformațiunea resortului, ar trebui să ținem seama de toate deformațiunile produse de solicitările de mai sus. E complicat și de aceea se ține seamă numai de deformațiunea datorită momentului de răsucire. Pentru a ține seamă în o măsură oarecare și de celelalte deformațiuni, pentru G se iau valori cuprinse între $0,7 \cdot 10^6$ și $0,75 \cdot 10^6$ în loc de $0,8 \cdot 10^6$ kg/cm^2 , cât se ia de obicei la oțelurile obișnuite pentru resoarte.

Să presupunem că avem două secțiuni A și B la distanța ds măsurată pe lungimea resortului (fig. 296). Ele se rotesc între ele cu unghiul ωds . Să presupunem secțiunea A fixă. Dacă distanța

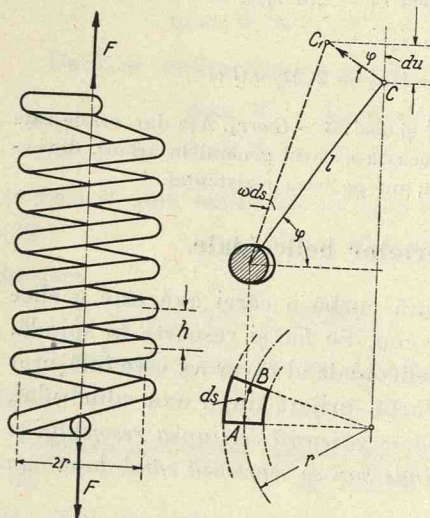


Figura 296

dela secțiunea B la extremitatea resortului C este l și dacă aceasta face cu orizontala unghiul φ , atunci avem $l \cos \varphi = r$. Deplasarea lui C va fi $l \omega ds$, iar proiecția ei după axa resortului va fi: $l \omega ds \cos \varphi = r \omega ds$. Deplasarea extremităților resortului va fi $r \omega s$, în care s este lungimea totală a resortului.

Și aci se face o aproximație. Dacă n este numărul spirelor, atunci se ia aproximativ:

$$s = 2 \pi r n,$$

și deci deplasarea totală u — dată de altfel — este

$$(30) \quad u = 2 \pi r^2 \omega n$$

din care deducem numărul de spire n .

Aplicația Nr. 82. Un resort elicoidal cilindric are $r = 6$ cm, secțiunea pătrată (fig. 297) și are de suportat sarcina de $F = 800$ kg. Să se determine elementele geometrice dându-se $\tau_a = 700$ kg/cm², flexibilitatea $u_0 = 70$ mm/t și $G = 0,75 \cdot 10^6$ kg/cm².

Momentul de răsucire este:

$$M = Fr = 800 \cdot 6 = 4800 \text{ kg.cm.}$$

Secțiunea fiind pătrată, avem:

$$\tau_a = 4,74 \text{ M/h}^3 = 4,74 \cdot 4800 / h^3$$

și deci $h = 3,19 \approx 3,2$ cm.

Deplasarea u este $u = u_0 F = 7.800 / 1000 = 5,6$ cm., iar:

$$\omega = 7,014 \text{ M/G}\Omega^2 = 7,014 \cdot 4800 / 0,75 \cdot 10^6 \cdot 3,2^4 = 4,28 \cdot 10^{-3} / \text{cm.}$$

și deci din (30) avem:

$$n = u / 2 \pi r^2 \omega = 5,6 / 2 \pi \cdot 6^2 \cdot 4,28 \cdot 10^{-3} = 5,78 \text{ spire.}$$

Când resortul este supus la tensiune, spațiul liber între spire se lasă de obicei egal cu zero, când este supus la compresiune, spațiul liber între spire trebuie să fie așa fel încât cel mult, sub sarcina de 800 kg., resortul să se blocheze. Deci, acest spațiu va fi de minimum $5,6 / 5,78 = 0,975$ cm.

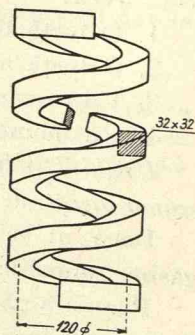


Figura 297

4. Secțiuni formate din materiale neomogene.

Grinzi de beton armat.

Am văzut că în o secțiune se dezvoltă rezistențe $\mathfrak{C}$, rezistențele $\mathfrak{X}_x$ fiind nule.

În direcții făcând 45° cu normala la secțiune, se dezvoltă rezistențe $\mathfrak{X}$ ale căror valori sunt $\mathfrak{X} = \pm \mathfrak{C}$.

Dacă materialul nu rezistă la tensiune cum este cazul betonului, atunci în direcția tensiunilor vom pune fiare cari să reziste la aceste tensiuni. Să presupunem că în direcția lui $\mathfrak{C}$, pe o lățime db și lungime ds , vom să evaluăm forța de lunecare (fig. 298).

Ea va fi

$$dT_l = \mathfrak{C} \cdot dh \cdot ds$$

Valoarea forței dirijate la 45° va fi evident, după figură.

$$dN_{45} = \mathfrak{C} \cdot dh \cdot ds / \sqrt{2} = dT_l / \sqrt{2}$$

În sensul tensiunilor vom pune fiare la 45° cari să ia această forță, iar în sensul compresiunilor nu punem nimic, pentru că betonul rezistă.

Putem înlocui acest sistem de fiare cu un altul echivalent.

Dacă nu punem fiare la 45° , atunci, în sensul axei barei, se dezvoltă o tensiune a cărei valoare este egală cu rezultanta celor două componente la 45° care este tocmai dT_l . În acest caz, și în sensul lui $\mathfrak{C}$, se dezvoltă o tensiune egală de asemenea cu dT_l .

În aceste direcțiuni vom pune fiare care să ia aceste forțe.

Să presupunem că avem o secțiune inelară (fig. 299). Pentru întreaga secțiune avem:

$$T_l = \mathfrak{C} h s \quad , \quad N_{45} = T_l / \sqrt{2}$$

Însă ținând cont de (7), avem:

$$(31) \quad T_l = Ms / 2\Omega \quad , \quad N_{45} = Ms / 2\sqrt{2}\Omega$$

Se admite că atât timp cât $\mathfrak{C} \leq 4 \text{ kg/cm}^2$, betonul rezistă singur și nu e nevoie să se ia vreo precauțiune.

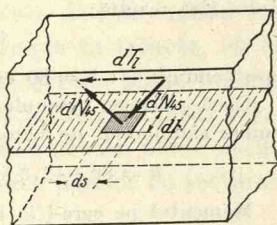
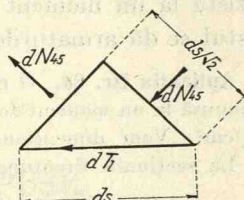


Figura 298

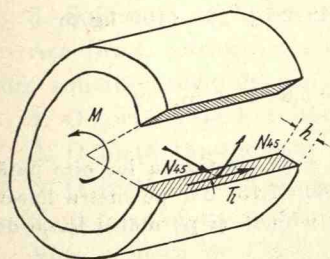


Figura 299

Dacă $\bar{\sigma} \geq 15 \text{ kg/cm}^2$ pentru grinzi făcute cu cimenturi obișnuite sau $\bar{\sigma} \geq 20 \text{ kg/cm}^2$ pentru acelea făcute cu cimenturi speciale, atunci se modifică dimensiunile grinzii așa ca aceste rezistențe să nu fie întrecute.

Dacă însă, $4 < \bar{\sigma} < 15 \div 20$, atunci se consideră că betonul rezistă la un moment ce corespunde rezistenței $\bar{\sigma} = 4 \text{ kg/cm}^2$, iar restul se dă armaturilor de fier.

Aplicația Nr. 83. O grindă de secțiune dreptunghiulară la care $h/b = 1,5$ e supusă la un moment de răsucire de $M = 800000 \text{ kg cm}$; se impune $\mathcal{R}_f = 1200 \text{ kg/cm}^2$. Vom dimensiona grinda de beton simplu așa ca $\bar{\sigma} = 15 \text{ kg/cm}^2$.

La secțiunile dreptunghiulare supuse la răsucire am avut (29):

$$3k_1 = 3 + 2,6/(0,45 + h/b) = 3 + 2,6/(0,45 + 1,5) = 4,33$$

și din (28) rezultă:

$$15 = 4,33 \cdot 800000 / 1,5 b^3$$

care conduce la: $h = 80 \text{ cm}$. și $b = 54 \text{ cm}$.

Dacă grosimea betonului care acoperă vergelele este $2,5 \text{ cm}$., atunci dimensiunile sâmburelui de beton cuprins între armături este:

$$h = 80 - 2 \cdot 2,5 = 75 \text{ cm}; \quad b = 54 - 2 \cdot 2,5 = 49 \text{ cm}.$$

Momentul pe care-l ia betonul singur cu $\bar{\sigma}_z = 4 \text{ kg/cm}^2$, din (28), este:

$$M = \bar{\sigma}_z b^2 h / 3k_1 = 4 \cdot 49^2 \cdot 75 / 4,33 = 166400 \text{ kg cm}.$$

Restul momentului, $800000 - 166400 = 633600 \text{ kg cm}$, se ia prin compresiunea în beton și tensiunea fiarelor la 45° care, pe *metru linear* de axă a grinzii, este dată de ecuația (31), în care luăm $s = 100 \text{ cm}$. Se aplică formula (31) pentru că fierăria se așează pe limita sâmburelui de beton.

$$N_{45} = M_s / 2 \sqrt{2} \Omega = 633600 \cdot 100 / 75 \cdot 49 \cdot 2 \sqrt{2} = 6100 \text{ kg/m}$$

Ne trebuie o secțiune de fier:

$$\Omega_f = N_{45} / \mathcal{R}_f = 6100 / 1200 = 5,08 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

Luăm deci $6 \text{ } \varnothing \text{ } 11 \text{ mm} = 5,70 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Dacă punem numai vergele longitudinale și scări, secțiunea lor este dată de forța $N_{45} \sqrt{2} = 8600 \text{ kg/m}$; $\Omega_f = 8600 / 1200 = 7,13 \text{ cm}^2$ pe *metru linear* de perimetru a sâmburelui pentru fierăria longitudinală și pe *metru linear* de grindă pentru scări.

Pentru scări, secțiunea se limitează între centrul de greutate și periferie.

Vom pune deci în sensul lungimii barei $10 \text{ } \varnothing \text{ } 15 \text{ mm} = 17,67 \text{ cm}^2$ pe întreaga secțiune, iar ca scări $6 \text{ } \varnothing \text{ } 13 \text{ mm} = 7,96 \text{ cm}^2/\text{m}$.

XX. REZISTENȚE COMPUSE.

Până acum ne-am ocupat de solicitări care dădeau numai rezistențe $\mathcal{R}$ sau numai rezistențe $\mathcal{G}$. Vom remarca în treacăt, că la determinarea rezistențelor $\mathcal{R}$ am admis că secțiunile plane înainte de deformare rămân plane și după, pe când la determinarea rezistențelor $\mathcal{G}$ s'a văzut că secțiunile plane nu mai rămân plane decât într'un caz cu totul special și anume la răsucirea barelor cu secțiune circulară.

În practică întâlnim și cazuri când o secțiune este supusă la mai multe solicitări.

Vom grupa aceste solicitări în modul următor:

1. Solicitări care dau numai rezistențe $\mathcal{R}$.
2. Solicitări care dau numai rezistențe $\mathcal{G}$.
3. Solicitări care dau rezistențe $\mathcal{R}$ și $\mathcal{G}$.

Așa fiind, putem avea numai următoarele cazuri când sistemul care solicită secțiunea se reduce la:

1. O forță axială și un moment încovoietor.
2. O forță tăietoare și un moment de răsucire.
3. O forță axială sau un moment încovoietor } și { o forță tăietoare sau moment de răsucire.

Vom cerceta pe rând aceste cazuri.

A) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se reduce la o forță axială și un moment încovoietor sau o forță excentrică.

1. Determinarea rezistențelor.

Cazul acesta este echivalent, cum se spune și în titlul acestui paragraf, cu o forță normală pe secțiune care nu ar fi aplicată în

centrul de greutate, ci într'alt punct A (fig. 300). Intr'adevăr, dacă în punctul A se aplică forța N normală pe secțiune, atunci rezultanta aplicată în centrul de greutate este N și momentul

$$(1) \quad M = N \varrho.$$

Grupul de solicitări, N , aplicat în centrul de greutate și momentul M , este echivalent cu forța N aplicată în punctul A , la distanța ϱ dată de relația (1). Punctul A poartă numele de *punctul de aplicație al forței N* .

Ca ipoteză de calcul, vom admite și aci că secțiunile plane înainte de deformație, rămân plane și după deformație.

În aceste condiții, secțiunea nedeformată o putem aduce în poziția deformată, fie printr'o rotație în jurul unei axe oarecare, fie prin o translație paralelă cu axul Ox și o rotație în jurul unui ax oarecare trecând prin centrul de greutate al secțiunii, fie în fine prin o translație paralelă cu axul Ox și două rotații în jurul axelor principale cari trec prin centrul de greutate al secțiunii.

Vom da mai la vale dezvoltările necesare în cele trei cazuri arătate mai sus.

a) Primul caz.

Să presupunem că forța N se aplică în punctul A și că rotirea secțiunii se face în jurul axei oarecare $O_1 z_1$ (fig. 301). Să presupunem că încovoierea specifică este ω .

Făcând același raționament ca la încovoiere, lungirea specifică a unei fibre, care se găsește la distanța y_1 de axa $O_1 z_1$, va fi

$$(2) \quad \varepsilon = \omega y_1$$

și deci rezistența, în ipoteza legii lui Hooke:

$$(2) \quad \mathcal{R} = E \omega y_1$$

Așa dar, am găsit legea de distribuție a rezistențelor.

Vom aplica acum ecuațiile de echilibru. Vom scrie că suma rezistențelor multiplicată cu $d\Omega$ este egală cu N , deci

$$(3) \quad E \omega \int y_1 d\Omega = N$$

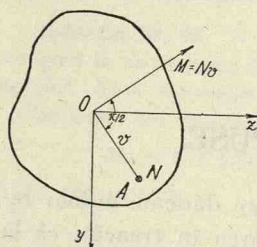


Figura 300

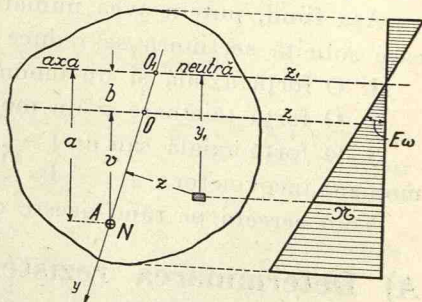


Figura 301

Însă $\int y_1 d\Omega = S_1$, este momentul static al secțiunii în raport cu axa neutră O_1z_1 , pe care notându-l cu S_1 , avem:

$$(3) \quad E \omega S_1 = N.$$

Să luăm momentul tuturor forțelor în raport cu axa Oy , care trece prin O și A , adică prin centrul de greutate al secțiunii și punctul de aplicație al forței.

Avem:

$$(4) \quad E \omega \int y_1 z d\Omega = 0$$

pentru că momentul lui N este zero, N întâlnind axa Oy .

Așa dar, O_1z_1 este o axă conjugată direcțiunii cunoscute Oy .

Să luăm momentul în raport cu axa O_1z_1 . Vom avea

$$(5) \quad E \omega \int y_1^2 d\Omega = Na$$

în care a este distanța dela punctul A la axa O_1z_1 . Însă $\int y_1^2 d\Omega$ este momentul de inerție în raport cu axa O_1z_1 , deci I_{z1} , și deci

$$(5) \quad E \omega I_{z1} = Na$$

Dacă împărțim (5) cu (3), avem

$$(6) \quad I_{z1}/S_1 = a$$

adică distanța dela punctul de aplicație A al forței N , până la axa neutră O_1z_1 , este egală cu raportul I_{z1}/S_1 , ambele momente fiind luate în raport cu axa neutră a secțiunii.

Să presupunem că prin centrul de greutate O ducem o axă Oz paralelă cu axa neutră O_1z_1 .

De pe figură se vede că avem

$$a = b + v$$

în care b este distanța între cele două axe și v distanța dela A la axa Oz , care trece prin centrul de greutate.

Dacă Ω este valoarea secțiunii și I_z momentul de inerție în raport cu axa Oz , avem

$$I_{z1} = i_{z1}^2 \Omega = (i_z^2 + b^2) \Omega \quad ; \quad S_1 = b \Omega$$

și atunci formula (6) se reduce la

$$i_z^2 = b v$$

Distanța b am socotit-o pozitivă măsurată dela O_1z_1 spre Oz . Dacă o socotim în sens invers, va trebui să luăm semnul —, deci:

$$(7) \quad i_z^2 = -b v$$

Dacă valoarea lui $E \omega$ din (3) o punem în (2), avem:

$$(8) \quad \mathfrak{X} = N y_1 / S_1$$

Așa dar, *axa neutră* $O_1 z_1$ este o *direcțiune conjugată direcțiunii* Oy și poziția ei este fixată prin relația (7).

b) Al doilea caz.

Vom presupune deci că secțiunea nedeformată o aducem în poziția deformată printr'o translație în lungul axei Ox și o rotație ω , în jurul unui ax oarecare trecând prin centrul de greutate al secțiunii.

Să notăm această axă cu Oz (fig. 302). Din translație rezultă o lungire specifică ε_0 , iar din rotație ωy , dacă y este distanța unui element de suprafață la axa Oz . Lungirea specifică totală va fi:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \omega y,$$

și deci:

$$(9) \quad \mathfrak{X} = E (\varepsilon_0 + \omega y)$$

Așa dar, am găsit distribuția rezistențelor pe secțiune. Vom scri acum ecuațiile de echilibru.

Avem:

$$E \int (\varepsilon_0 + \omega y) d\Omega = N$$

Pentru că axa Oz trece prin centrul de greutate, avem $\int y d\Omega = 0$ și deci rezultă:

$$(10) \quad E \varepsilon_0 \Omega = N$$

Momentul tuturor forțelor, în raport cu axa Oy pe care se găsește punctul de aplicație A , este nul, deci:

$$E \int (\varepsilon_0 + \omega y) z d\Omega = 0$$

și cum $\int z d\Omega = 0$, rezultă și $\int y z d\Omega = 0$, deci axa Oz este o axă conjugată direcțiunii Oy . Momentul în raport cu Oz ne dă:

$$E \int (\varepsilon_0 + \omega y) y d\Omega = N \nu_1 \cos \delta = N \nu$$

care ne dă:

$$(11) \quad E \omega I_z = N \nu_1 \cos \delta = N \nu$$

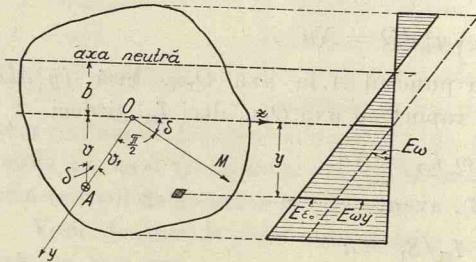


Figura 302

Valorile din (10) și (11) le punem în (9) și dacă ținem seama că:

$$I_z = i_z^2 \Omega, \quad N/\Omega = \mathfrak{X}_0$$

Avem:

$$(12) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 (1 + y v_1 \cos \delta / i_z^2) = \mathfrak{X}_0 (1 + v y / i_z^2)$$

Axa neutră va fi acolo unde $\mathfrak{X} = 0$ și deci distanța ei b dela centrul de greutate este dată de relația:

$$(7) \quad 1 + v b / i_z^2 = 0$$

găsită anterior.

c) Al treilea caz.

Vom presupune că secțiunea nedeformată o aducem în poziția deformată, printr'o translație în lungul axei Ox și două rotații ω_y și ω_z , în jurul axelor principale Oy și Oz care trec prin centrul de greutate al secțiunii. O fibră care se găsește la distanțele y și z de axe, va avea lungirea specifică (fig. 303).

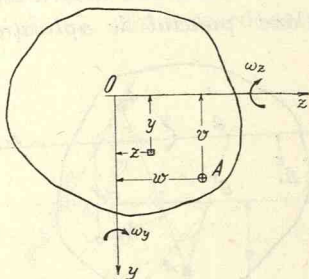


Figura 303

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \omega_z y - \omega_y z$$

și deci

$$(13) \quad \mathfrak{X} = E (\varepsilon_0 + \omega_z y - \omega_y z)$$

Dacă scriem ecuațiile de echilibru și dacă v și w sunt coordonatele punctului A , avem:

$$E \varepsilon_0 \Omega = N$$

$$E \omega_z I_z = N v$$

$$- E \omega_y I_y = N w$$

Dacă punem aceste valori în (13) și dacă se ține seamă că:

$$I_z = i_z^2 \Omega; \quad I_y = i_y^2 \Omega; \quad N/\Omega = \mathfrak{X}_0,$$

avem:

$$(14) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 (1 + v y / i_z^2 + w z / i_y^2)$$

Axa neutră este dată de condiția:

$$(15) \quad 1 + v y / i_z^2 + w z / i_y^2 = 0$$

în care y și z sunt coordonatele ei curente.

Observare. Formula (14) ne arată că dacă secțiunea unei bare este supusă la forța axială N și momentele încovoietoare N_v și N_w , atunci rezistența totală este suma rezistențelor date de fiecare solicitare în parte, deci efectele se suprapun.

d) Relația între poziția punctului de aplicație A al forței N și poziția axei neutre.

1°. Dacă punctul de aplicație A se mișcă pe dreapta OA (fig. 304), axa neutră, $O_1 z_1$, va rămâne mereu paralelă cu ea însăși, în virtutea relației (4), iar poziția ei rămâne mereu dată de relația (7). Aceasta ne arată că, *dacă punctul de aplicație se apropie de centrul de greutate, axa neutră se îndepărtează și invers. Când A coincide cu O, atunci axa neutră este la infinit, deci avem cazul forțelor axiale. Când punctul de aplicație este la infinit și dacă $N = 0$, însă $N_v = 0 \cdot \infty = M$, atunci axa neutră trece prin centrul de greutate și avem cazul încovoierii simple.*

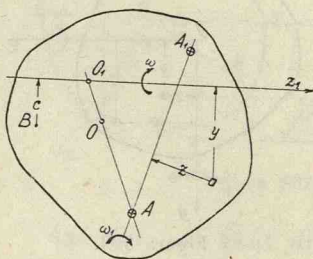


Figura 304

Să presupunem că punctul de aplicație al forței se mișcă pe o dreaptă oarecare AA_1 (fig. 304). Punctului A îi corespunde evident o axă neutră z_1 , a cărei poziție și direcție se determină cum s'a arătat mai sus. În acest caz, rezistența într'un punct oarecare al secțiunii, este $\mathcal{R} = E\omega y$. Dacă luăm momentul forțelor elementare în raport cu dreapta AA_1 , avem:

$$E\omega \int y z d\Omega = 0,$$

pentru că forța N se găsește mereu pe această dreaptă.

Să presupunem că AA_1 ar fi o axă neutră a secțiunii și căreia i-ar corespunde ca punct de aplicație al forței, punctul B. Dreapta AA_1 fiind dată, punctul B este și el determinat.

Să presupunem că axa z_1 se găsește la distanța c de B. În acest caz, rezistența într'un punct oarecare al secțiunii este $\mathcal{R} = E\omega_1 z$, iar momentul tuturor forțelor de pe secțiune în raport $O_1 z_1$, este

$$E\omega_1 \int y z d\Omega + Nc = 0$$

Comparând aceste două relații, rezultă $c = 0$, deci axa neutră z_1 trece prin punctul B. Așa dar, *toate axele neutre ce corespund punc-*

telor de pe dreapta AA_1 , se rotesc în jurul punctului B , care nu este altceva decât punctul de aplicație al forței căruiua îi corespunde axa neutră AA_1 .

Și reciproca este adevărată și anume: când axele neutre se rotesc în jurul unui punct, punctul de aplicație al forței descrie o dreaptă.

Să găsim rezistența în centrul de greutate al secțiunii. Pentru acest punct:

$$y = b \text{ și cu } S_1 = b \Omega$$

din formula (8) avem:

$$\varkappa = N/\Omega = \varkappa_0$$

deci, rezistența în centrul de greutate al secțiunii este independentă de poziția punctului de aplicație al forței pe secțiune.

2°. Relația între punctul de aplicație A , ale cărui coordonate sunt v și w și poziția axei neutre, se pot studia și pe ecuația (15) și se ajunge la rezultatele arătate mai sus.

Ecuația (15) ne dă posibilitatea de a construi ușor, pe cale grafică, poziția axei neutre, după cum se arată în fig. 305. În adevăr, ca să găsim punctul unde axa neutră taie pe Oy , facem $z = 0$ și avem:

$$1 + v/i_z^2 = 0,$$

deci i_z este medie proporțională între v și m și așa construim pe m .

În mod cu totul analog construim pe n . Dacă în (15) punem valorile lui $v/i_z^2 = -1/m$ și $w/i_y^2 = -1/n$, avem pentru ecuația axei neutre expresia

$$1 - y/m - z/n = 0$$

care se construiește numai decît.

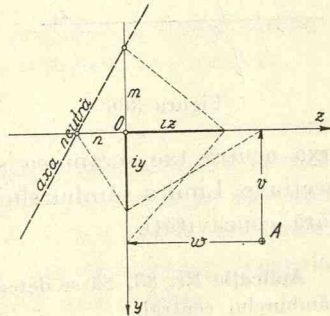


Figura 305

2. Sâmburele central.

Când ni se dă punctul de aplicație A al unei forțe axiale N , atunci avem o poziție determinată a axei neutre. Când axa neutră taie secțiunea, atunci avem o porțiune de secție întinsă și alta comprimată. Materialul din care este făcută bara va trebui să reziste

la tensiune și compresiune. Sunt însă unele materiale, precum piatra, cărămida, etc. cari nu rezistă la tensiune.

La asemenea corpuri, va trebui ca întreagă secțiunea să reziste numai la compresiune, prin urmare axa neutră nu va trebui, în niciun caz, să taie secțiunea. Dacă se iau drept axe neutre toate tangentele la conturul secțiunii, *tangente cari nu taie secțiunea*, atunci

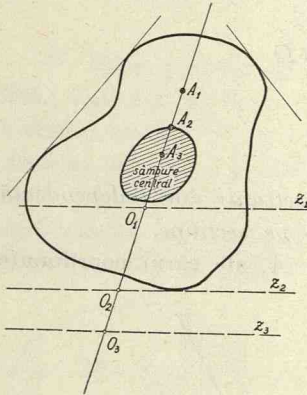


Figura 306

fiecăreia îi corespunde câte un punct de aplicație A (fig. 306). Succesiunea punctelor A determină o curbă care poartă numele de *limita sâmburelui central*, iar suprafața cuprinsă în interiorul ei se numește *sâmburele central*.

Pentru orice secțiune, se poate construi sâmburele central. Conform acestei definiții, dacă A se găsește pe limita sâmburelui central, axa neutră este tangentă la contur; dacă A este în interiorul sâmburelui central, atunci axa neutră nu atinge secțiunea; dacă A este în afara sâmburelui central, atunci axa neutră taie secțiunea și deci avem tensiuni și compresiuni pe secțiune. Limita sâmburelui central este oricând o curbă convexă, fără concavități.

Aplicația Nr. 83. Să se determine pentru o secțiune dreptunghiulară limita sâmburelui central.

Luăm ca axa neutră dreaptă AB (fig. 307). Punctul ce-i corespunde ca punct de aplicație, este dat de relația:

$$\frac{1}{12} h^2 = \left(\frac{1}{2} h\right) \nu$$

dedusă din (7), deci:

$$\nu = \frac{1}{6} h$$

care ne dă punctul p . Laturei BC îi corespunde punctul r , la distanța $-\frac{1}{6} b$.

Tuturor axelor neutre cari se rotesc în jurul punctului B le corespunde o dreaptă care trece prin punctele p și r corespunzătoare lui AB și BC . Continuând, găsim rombul $prqs$. Dacă forța ar parcurge axa Oy vedem că pentru a avea același fel de rezistențe, trebuie ca punctul de aplicație să rămână în intervalul $-\frac{1}{6} h$ și $\frac{1}{6} h$, deci în regiunea $\frac{1}{3} h$, în jurul centrului de greutate, ceea ce se exprimă zicând că trebuie să rămână în treimea mijlocie.

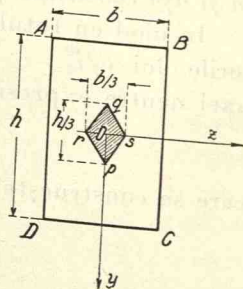


Figura 307

3. Calculul rezistențelor la încovoiere cu ajutorul sâmburelui central.

La încovoierea simplă am avut (formula 6):

$$\mathcal{R} = M y \cos \delta / I_z$$

Rezistența maximă are loc la distanța cea mai mare y_{max} , deci în punctul unde o paralelă la axa neutră este tangenta la contur (fig. 308).

Avem

$$y_{max} / I_z = y_{max} / i_z^2 \Omega = 1 / \rho \Omega$$

și deci

$$y_{max} \cos \delta / I_z = \cos \delta / \rho \Omega = 1 / \rho_1 \Omega$$

și deci

$$\mathcal{R} = M / \rho_1 \Omega$$

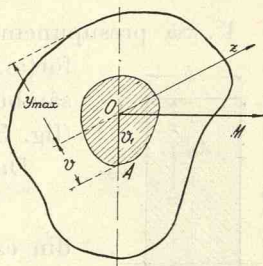


Figura 308

în care ρ_1 este distanța de la centrul de greutate la limita sâmburelui central, măsurată pe direcțiunea conjugată axei neutre.

În acest caz, putem pune $W = \rho_1 \Omega$.

Așa dar, *momentul rezistent este egal cu suprafața Ω multiplicată cu distanța centrului de greutate la limita sâmburelui central măsurată după normala la moment*. Cel mai mare W va corespunde distanței maxime ρ_1 . Pentru a utiliza cât mai bine o secțiune la încovoiere, vom așeza-o așa ca ρ_{1max} să coincidă cu direcțiunea normală momentului care se știe că este conjugată axei neutre.

4. Calculul masivelor de zidărie.

Construcțiunile făcute din zidărie, în genere, nu rezistă la tensiune. Prin urmare, ori de câte ori vom avea de făcut o construcțiune de zidărie, ne vom aranja în așa fel, ca în nicio parte a ei să nu se desvolte tensiuni, căci acolo se ivesc crăpături. Această regulă se menține cu rigoare la calculul barajelor de apă.

La alte construcțiuni de zidărie, menținând această normă, ne-ar da dimensiuni cu totul exagerate, cari ar fi contrare experienței care a arătat că în aceste cazuri sunt suficiente dimensiuni mai reduse. Pentru un zid de sprijin sau un coș de zidărie, nu există nici un inconvenient dacă o porțiune de zidărie ar fi supusă la tensiune. Aci se va produce eventual o crăpătură, însă rezemarea se face pe restul secțiunii. În acest caz, *porțiunea de zidărie supusă la*

tensiune o considerăm ca neexistentă, rămânând să reziste numai porțiunea de secțiune supusă la compresiune și care poartă numele de secțiune activă.

Vom determina secțiunea activă în câteva cazuri simple.

a) Secțiuni dreptunghiulare și circulare.

1°. Să presupunem că avem o secțiune dreptunghiulară și că forța N este aplicată pe o axă principală, în afara sâmburelui central, la distanța e de una din laturi (fig. 309).

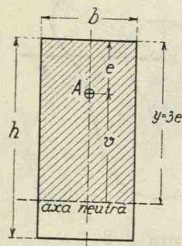


Figura 309

După ecuația (6) avem

$$\rho = I_1/S_1 = \frac{2}{3} by^3/by^2 = y - e$$

din care scoatem:

$$y = 3e$$

iar valoarea rezistenței maxime după (8) este:

$$\mathfrak{R}_{max} = 2 Ny/by^2 = 2 \mathfrak{R}_0$$

Așa dar, avem toate elementele cerute.

2°. Pentru secțiunea circulară utilizăm tot ecuația (6), deci din punct de vedere teoretic chestiunea este foarte simplă. E mai grea din punctul de vedere al efectuării calculelor.

După *Keck* avem aproximativ (fig. 310):

$$y/e = 2,33 + 0,58 e^2/r^2$$

iar rezistența maximă:

$$\mathfrak{R}_{max} = (0,372 + 0,056 e/r) N/e \sqrt{er}$$

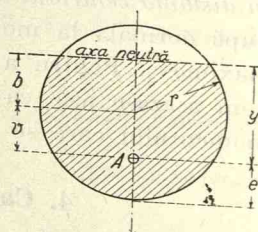


Figura 310

b) Secțiuni cu o axă de simetrie pe care se găsește punctul de aplicație al forței.

În acest caz, problema nu se poate rezolva decât grafic. Axa neutră va fi normală pe axa de simetrie, pentru că aceasta este direcțiunea conjugată direcțiunii OA (fig. 311).

Oricare ar fi secțiunea activă trebuie să avem, în raport cu axa neutră:

$$I/S = a$$

Avem deci nevoie de I și S , în raport cu axa neutră. Pentru aceasta, împărțim suprafața în fâșii paralele cu axa neutră, și cu ele construim un poligon de forțe, și cu distanța polară H un poligon funicular, a cărui primă latură este BC , iar celelalte formând conturul $BEFD$.

Momentul static al secțiunii active — secțiunea hașurată, — este

$$S = H \cdot CD$$

iar momentul de inerție al aceleiași suprafețe este:

$$I = 2 H \Omega_1$$

în care Ω_1 este suprafața mărginită de conturul $CBEFDC$.

Dacă ținem seama de prima relație, avem:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} a \cdot CD.$$

Dacă, din A , ducem AA_1 paralelă la axa neutră, atunci partea doua a egalității de mai sus reprezintă tocmai suprafața triunghiului A_1DC .

Dacă din ambele suprafețe se scade partea comună A_1EFC , se găsește:

$$\text{supr. } BA_1E = \text{supr. } DEF.$$

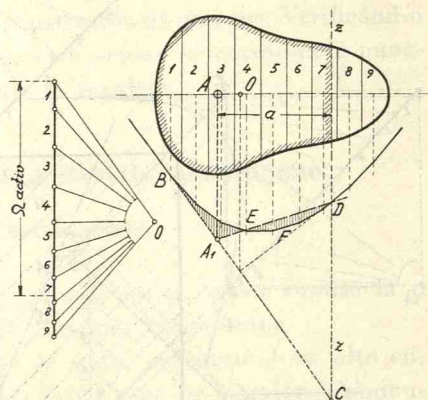


Figura 311

Așa dar, dacă $z-z$ este axa neutră a secțiunii, urmează ca cele două suprafețe să fie egale.

De aci rezultă următoarea normă de calcul. Se construiește, ca pentru aflarea momentului de inerție, un poligon funicular al întregii secțiuni, se ia intersecția dreptei AA_1 cu prima latură a funicularului și prin A_1 vom duce, prin încercări, o dreaptă A_1D care să facă cele două suprafețe egale. Punctul D , unde dreapta A_1D taie poligonul funicular, ne fixează poziția axei neutre.

Partea de secțiune cuprinsă până la axa $z-z$ este secțiunea activă, restul ca și când n'ar exista.

Centrul de greutate al acestei secțiuni se găsește la intersecția laturilor extreme de poligon funicular corespunzând secțiunii active. Se găsește centrul de greutate în O .

c) Cazul general (secțiuni oarecari).

Să presupunem că avem o secțiune oarecare, sau o secțiune cu axe de simetrie, însă punctul de aplicație nu se găsește pe nicio axă de simetrie.

Chestiunea se rezolvă cu ajutorul cazului precedent. Să presupunem că A este punctul de aplicație (fig. 312).

Luăm pentru axa neutră o direcțiune absolut arbitrară, cât se poate mai aproape de realitate, și repetând construcția precedentă, găsim poziția axei neutre ce corespunde acestei direcțiuni.

Dacă aceasta ar fi axa neutră adevărată, atunci rezultanta forțelor

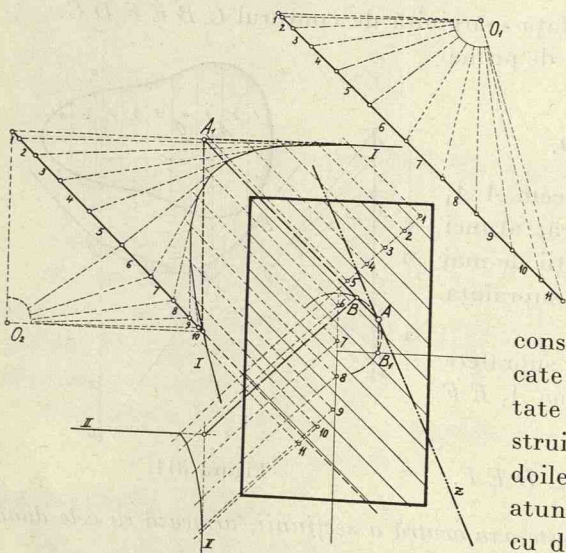


Figura 312

interioare ar trece
chiar prin A . Forțele
interioare sunt pro-
porționale cu $y d\Omega$,
deci cu segmentele
interceptate de laturile
primului poligon
funicular pe axa
neutră.

Da ă cu acestea, considerate ca for e, aplicate în centrele de greutate ale suprafețelor, construim cu polul O_2 un al doilea poligon funicular, atunci pe dreapta paralelă cu direcția luată  i care trece prin intersecția laturilor extreme, se va găsi rezultanta forțelor.

Se constată că această dreaptă nu trece prin A , dar taie dreapta AA_1 în punctul B . Aşa dar, axa neutră aleasă corespunde punctului B ca punct de aplicație al forței N . Dacă am lua altă direcție pentru axa neutră am căpăta — repetând aceeași construcție — alt punct, B_1 . Punctele B , astfel construite, descriu o curbă. Adevărata axă neutră va fi aceea pentru care segmentul AB va fi nul și deci va coincide cu tangenta în A la curba descrisă de punctul B . Nu cunoaștem această curbă. Dacă de o parte și alta a punctului A cunoaștem două puncte B și B_1 , construite ca mai sus, prin aceste trei puncte, $B A$ și

B_1 , putem duce o curbă oarecare, de exemplu un cerc. Tangenta în A la acest cerc ne dă direcțiunea axei neutre. Această direcțiune va fi cu atât mai exactă cu cât punctele B și B_1 vor fi mai aproape de A .

În cazul fig. 312 s'a luat o secțiune dreptunghiulară și la care am presupus că forța se aplică în punctul A , în afara sâmburelui central. Pentru o primă încercare luăm ca direcție a axei neutre, direcția care face 45° cu laturile dreptunghiului, și făcând construcțiile indicate, găsim punctul B . Dacă axa neutră ar fi paralelă cu laturile verticale, punctul B s'ar găsi în B_1 , pe axa de simetrie orizontală a dreptunghiului, la aceeași distanță de latura verticală ca și punctul A . Așa dar, avem două puncte B și B_1 , de o parte și alta a lui A . Tangenta în A la cercul ce trece prin aceste trei puncte este Az , pe care o verificăm repetând construcția de mai sus. Verificând-o se constată că este sensibil direcția axei neutre ce corespunde punctului A . Metoda duce foarte repede la rezultat.

5. Secțiuni formate din materiale neomogene.

Secțiuni de beton armat.

În această categorie intră *grinzile de beton armat* supuse la o forță axială de compresiune și un moment încovoiător.

În cazul când axa neutră este în afara secțiunii — cu alte cuvinte dacă punctul de aplicație al forței este în interiorul sâmburelui central — atunci toată secțiunea de beton este comprimată, și aplicăm formulele stabilite până aci și anume:

$$(16) \quad \mathfrak{K}_b = -N/\Omega \pm My/I ; \quad \mathfrak{K}_f = n \mathfrak{K}_b$$

în care:

$$\Omega = \Omega_b + n\Omega_f ; \quad I = I_b + nI_f$$

a căror demonstrație nici nu e nevoie să o mai facem.

În cazul când axa neutră taie secțiunea, o parte din ea va fi supusă la tensiune și nu vom ține seamă în calcul de rezistența ei.

a) Secțiune cu două axe de simetrie.

Ne vom ocupa mai întâiu de cazul când punctul de aplicație se găsește pe o axă de simetrie a secțiunii (fig. 313). Forța N fiind

aplicată în O , centrul de greutate al întregii secțiunii de beton, raportul $M/N = \nu$ ne dă poziția forței N față de acest punct, aplicată excentric pe secțiune.

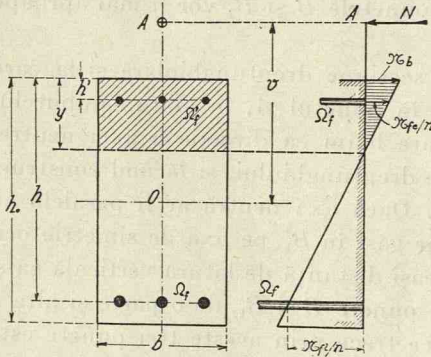


Figura 313

Distanța dela axa neutră până la punctul de aplicație fiind cunoscută, în virtutea relației (6), cu notațiile din figură, scriem:

$$(17) \quad I/S = y + \nu - \frac{1}{2} h_0$$

o ecuație de gradul al treilea în y care se rezolvă prin încercări, fie sub forma de aci, fie sub formă explicită.

Din punct de vedere al calculelor numerice este absolut indiferent. Aci avem:

$$(18) \quad I = \frac{1}{3} by^3 + n\Omega_f'(y - h')^2 + n\Omega_f(h - y)^2$$

$$(19) \quad S = \frac{1}{2} by^2 + n\Omega_f'(y - h') - n\Omega_f(h - y)$$

Rezistențele în beton și fier vor fi:

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_b &= N y / S = N / \left[\frac{1}{2} by + n(\Omega_f + \Omega_f') - n(h\Omega_f + h'\Omega_f') / y \right] \\ \mathfrak{X}_f &= n \mathfrak{X}_b (h - y) / y \end{aligned}$$

Rezistența la compresiune în fier este satisfăcută, cum lesne se poate vedea.

În cazul când $\Omega_f = \Omega_f'$ și ambele armături se găsesc la aceeași distanță h' dela marginea betonului, avem:

$$(18) \quad I = \frac{1}{3} by^3 + n\Omega_f [(y - h')^2 + (h - y)^2]$$

$$(19) \quad S = \frac{1}{2} by^2 + n\Omega_f (2y - h_0)$$

$$(20) \quad \mathfrak{X}_b = N / \left[\frac{1}{2} by + n\Omega_f (2 - h_0/y) \right]$$

În calcule, până la stabilirea dimensiunilor definitive ale secțiunii, se ia $h' = 0,07h$.

Când $\Omega_f' = 0$, avem:

$$(18) \quad I = \frac{1}{3} by^3 + n\Omega_f(h - y)^2$$

$$(19) \quad S = \frac{1}{2} by^2 - n\Omega_f(h - y)$$

$$(20) \quad \mathfrak{X}_b = N / \left[\frac{1}{2} by + n\Omega_f(1 - h/y) \right]$$

Prin urmare, când ni se dă M , N , și dimensiunile secțiunii, putem face verificarea rezistențelor.

În practică problema se pune invers și anume, dându-se M , N și $\mathfrak{X}_b$ — în cazul pieselor comprimate — să se găsească dimensiunile secțiunii.

În genere, rezistența în fier la tensiune și compresiune este satisfăcătoare, așa că secțiunile de fier se determină numai prin condiția ca rezistența în beton să nu fie întrecută.

Secțiunea de fier rămânând nedeterminată, se impune condiția ca să fie minimă.

În genere, înălțimea secțiunii de beton, ne-o luăm, sau o determinăm prin mijloace cu totul aproximative.

Pentru determinarea secțiunilor de fier, luăm momentul tuturor forțelor în raport cu centrele de greutate ale celor două armături de fier și avem:

$$M_t = \frac{1}{2} \mathfrak{X}_b b y (h - \frac{1}{3} y) + \mathfrak{X}_{fc} \Omega_f' (h - h')$$

$$M_c = -\frac{1}{2} \mathfrak{X}_b b y (\frac{1}{3} y - h') + \mathfrak{X}_{ft} \Omega_f (h - h')$$

În care:

$$M_t = M + N (h - \frac{1}{2} h_0) \quad ; \quad M_c = M - N (\frac{1}{2} h_0 - h')$$

Dacă ținem seamă că avem:

$$\mathfrak{X}_{fc}/\mathfrak{X}_b = n (y - h')/y \quad \text{și} \quad \mathfrak{X}_{ft}/\mathfrak{X}_b = n (h - y)/y,$$

și dacă notăm:

$$\varphi = \Omega_f/bh \quad \text{și} \quad \varphi' = \Omega_f'/bh$$

căpătăm:

$$\varphi = [M_c/bh^2 \mathfrak{X}_b + \frac{1}{2} k (\frac{1}{3} k - h'/h)] k/n (1 - h'/h) (1 - k)$$

$$\varphi' = [M_t/bh^2 \mathfrak{X}_b - \frac{1}{2} k (1 - \frac{1}{3} k)] k/n (1 - h'/h) (k - h'/h)$$

Prin încercări găsim valoarea lui k care face minimă valoarea lui $\varphi + \varphi'$.

În cazul când nu avem armătură în regiunea comprimată, avem:

$$M_c = M - \frac{1}{2} N h_0$$

$$M_c = -\frac{1}{6} \mathfrak{X}_b b y^2 + \mathfrak{X}_{ft} \Omega_f h$$

$$\varphi = [M_c/bh^2 \mathfrak{X}_b + \frac{1}{6} k^2] k/n (1 - k)$$

cari prin încercări ne dau pe k pentru care φ este minim.

Aplicația Nr. 85. Să presupunem că avem un stâlp de beton armat supus la $M = 18000$ kgm, și $N = 20000$ kg, cu condiția ca $\mathfrak{X}_b \leq 40$ kg/cm² și $\mathfrak{X}_f \leq 1200$ kg/cm².

Lățimea stâlpului este $b = 40$ cm. Pentru a găsi o valoare cu totul apro-

ximativă a înălțimii, vom presupune că betonul lucrează la fel la tensiune și compresiune.

Avem deci:

$$\mathfrak{X}_b = M/W + N/\Omega = 6M/bh_0^2 + N/bh_0$$

care ne dă $h_0 = 86,35$ cm.

Luăm $h_0 = 80$ cm, $h' = 0,07 \times 80 \simeq 5$ cm, $h = 75$ cm, $h'/h = 1/15$.

$$M_t = 18000 + 20000 (0,75 - 0,40) = 25000 \text{ kgm.}$$

$$M_c = 18000 - 20000 (0,75 - 0,40) = 11000 \text{ kgm}$$

$$M_t/bh^2 \mathfrak{X}_b = 0,277778 \quad ; \quad M_c/bh^2 \mathfrak{X}_b = 0,122222$$

Cu aceste valori avem:

$$\varphi = [0,122222 + \frac{1}{6} k (k - 0,20)]k/14(1 - k)$$

$$\varphi' = [0,277778 - \frac{1}{6} k (3 - k)]k/14(k - 1/15)$$

Valoarea lui k pentru care $\varphi + \varphi'$ este minimă, o găsim prin încercări.

Luăm pentru k valori simple și la intervale destul de mari pentru a le calcula ușor, de exemplu:

$$k = 0,30 \therefore \varphi + \varphi' = 0,369 + 1,311 = 1,680\%$$

$$k = 0,42 \therefore \varphi + \varphi' = 0,712 + 0,825 = 1,537\%$$

$$k = 0,54 \therefore \varphi + \varphi' = 1,281 + 0,459 = 1,740\%$$

Valoarea cea mai mică corespunde lui $k = 0,42$, dar nu știm dacă este minimă. Dacă am avea valori intermediare suficiente, am putea descrie curba lui $\varphi + \varphi'$ în funcție de k , și deci găsi mai exact valoarea lui k pentru care avem $\varphi + \varphi'$ minim. Ne vom mărgini la încercări mai puține, bazați și pe faptul că în jurul minimului valorile lui $\varphi + \varphi'$ variază puțin.

Din inspectarea valorilor de mai sus, pare că minimum are loc între $k = 0,30$ și $k = 0,42$ și foarte aproape de acesta din urmă. Încercăm cu $k = 0,414$ și avem:

$$k = 0,414 \therefore \varphi + \varphi' = 0,691 + 0,846 = 1,537\%$$

Așa dar, minimum are loc între $k = 0,414$ și $0,420$ și are valoarea sensibil egală cu $\varphi + \varphi' = 1,537$. Ne oprim în mod indiferent la una din cele două valori, de exemplu la $k = 0,42$.

Avem deci:

$$\Omega_f = 0,712\% \times 40 \times 75 = 21,26 \text{ cm}^2$$

$$\Omega_f' = 0,825\% \times 40 \times 75 = 24,75 \text{ „}$$

$$\Omega_f' + \Omega_f = 46,11 \text{ cm}^2.$$

Avem $y = kh = 31,5$ cm. Din valoarea lui $k = n\mathfrak{X}_b/(n\mathfrak{X}_b + \mathfrak{X}_f)$, deducem

$$\mathfrak{X}_f = + 829 \text{ kg/cm}^2.$$

Așa dar, minimum secțiunii de fier nu are loc pentru rezistența maximă a acestuia.

Acest caz și mai sunt și altele, ne arată, că pentru a îmbunătăți rezistența unei piese nu este suficient numai să adăugăm material, ci de a ști unde și cât anume trebuie adăugat.

b) Alte secțiuni.

1^o. Să presupunem că avem o secțiune care are o axă de simetrie și că punctul de aplicație se găsește pe ea.

În acest caz, axa neutră va fi evident normală pe axa de simetrie și ceea ce va trebui determinat este numai poziția ei.

Se împarte secțiunea de beton în fâșii paralele cu axa neutră și se construiește poligonul suprafețelor de beton și fier și primul lor poligon funicular, exact după norma care s'a indicat la încovoierea barelor de beton armat (fig. 314).

Să presupunem că EF este axa neutră. În acest caz, momentul de inerție în raport cu axa neutră este:

$$I = 2 H \text{ supr. } BCDEFB, \text{ iar } S = H \cdot EF$$

Din relația $I / S = a$, găsim:

$$\text{supr. } BCDEFB = \text{supr. } A_1DE$$

Prin urmare, prin încercări ducem dreapta A_1E așa ca cele două suprafețe hașurate să fie egale.

2^o. În cazul și mai general, când secțiunea nu are o axă de simetrie sau când punctul de aplicație nu se găsește pe o axă de simetrie, procedăm prin încercări. Ne luăm o direcțiune oarecare drept axă neutră și găsim poziția ei, așa cum s'a indicat în exemplul precedent. Numai un singur punct B , de pe dreapta AA_1 , este punctul de aplicație al forței N , căruia îi corespunde direcția axei neutre luate. Să găsim acest punct. Cu elementele $y\Omega_{1b}...$, dirijate după o direcțiune oarecare, construim un nou poligon funicular. Rezultanta forțelor proporționale cu $y\Omega_{1b}...$ taie dreapta AA_1 în punctul B . Prin urmare, axa neutră luată corespunde acestui punct B . Facem o nouă încercare cu altă direcție și obținem alt punct, B_1 . De aci încolo, repetăm construcția cu cercul ce trece prin cele trei puncte BAB_1 , a cărui tangentă în A ne dă o direcție pentru axa neutră mai aproape de cea reală. Putem repeta construcția până ajungem la soluția definitivă, cu gradul de exactitate pe care poate să ni-l dea o construcție grafică.

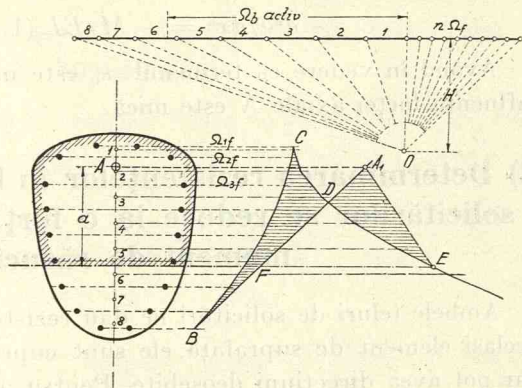


Figura 314

6. Ecuația axei deformate a barei.

În acest caz, din cauza forței axiale N , axa piesei se lungeste cu cantitatea $\varepsilon_0 ds$ și expresia razei de curbura r_c este:

$$ds (1 + \varepsilon_0) = r_c d\theta \quad \therefore 1/r_c = d\theta/ds (1 + \varepsilon_0) = \omega/(1 + \varepsilon_0)$$

Vom avea deci:

$$d^2v/dx^2 = -M/EI (1 + \varepsilon_0)$$

Având în vedere că termenul ε_0 este mic față de 1, se vede că influența forței axiale N este mică.

B) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se reduce la o forță tăietoare și un moment de răsucire.

Ambele feluri de solicitări ne dau rezistențe la lunecare. Pentru același element de suprafață, ele sunt cuprinse în planul secțiunii, dar pot avea direcțiuni deosebite. Pentru a avea rezistența într'un punct, vom compune geometric cele două rezistențe. Vom căuta pe secțiune să găsim unde această rezultantă are valoarea maximă. N'avem nimic deosebit în acest fel de solicitări.

C) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se reduce la o forță axială sau un moment încovoietor și o forță tăietoare sau un moment de răsucire.

Observăm că primele două feluri de solicitări produc în bară rezistențe normale $\mathcal{R}_x$, iar cele de al doilea rezistențe tangențiale $\mathcal{G}$.

Așa fiind, în fiecare punct putem determina fie valoarea rezistențelor normale principale, sau rezistențele maxime tangențiale:

$$(1) \quad \mathcal{R}_{1,2} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_x \pm \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + 4 \mathcal{G}^2})$$

$$(2) \quad \mathcal{G}_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + 4 \mathcal{G}^2}$$

fie aceleași rezistențe reduse:

$$(3) \quad \mathcal{R}_{1,2red} = \frac{1}{2} [(1 - \mu) \mathcal{R}_x \pm (1 + \mu) \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + 4 \mathcal{G}^2}]$$

$$(4) \quad \mathcal{G}_{1,2red} = \pm \frac{1}{2} (1 + \mu) \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + 4 \mathcal{G}^2}.$$

În fiecare punct, de asemenea putem deduce direcția axelor principale cu ajutorul formulelor date la variația rezistențelor. În cazul rezistențelor în plan avem:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2\mathfrak{T}/\mathfrak{X}_x$$

care ne fixează direcția axelor principale față de direcția axei Ox .

1. Cazul când avem un moment încovoietor și o forță tăietoare.

În acest caz, rezistențele maxime $\mathfrak{X}_x$ se produc la periferia secțiunii, deci tocmai acolo unde $\mathfrak{T}$ este nul și invers $\mathfrak{T}_z$ este maxim în axa neutră unde $\mathfrak{X}_x = 0$.

Pentru orice element de secțiune cuprins între axa neutră și fibra cea mai depărtată, vom avea un $\mathfrak{X}_x$ și un $\mathfrak{T}_z$, cu ajutorul cărora putem găsi rezistențele principale $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$, precum și direcțiunile axelor principale.

Dacă am construi liniile isostatice pentru o grindă simplu rezemată, încărcată cu o sarcină uniformă, am căpăta curbele din fig. 315.

După direcția unor linii avem numai tensiuni, după direcția celorlalte numai compresiuni.

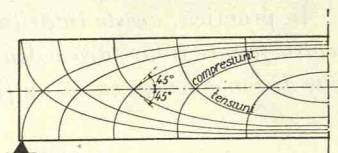


Figura 315

Pentru secțiunile obișnuite, făcute din fiare profilate sau secțiuni dreptunghiulare obișnuite de lemn, $\mathfrak{X}_1$ sau $\mathfrak{X}_2$ maxime, dintr'un punct oarecare al secțiunii, nu trec peste valoarea lui $\mathfrak{X}_x$ dela periferia secțiunii, așa că, dimensionarea acestor secțiuni se face numai pe baza rezistențelor $\mathfrak{X}_x$ maxime la periferia secțiunii.

Sunt însă unele cazuri, când în dimensionarea grinzilor trebuie să ținem seamă și de rezistențele $\mathfrak{X}_1$ din cuprinsul secțiunii. Aci avem două cazuri mai importante.

a) Grinzi de fier cu inimă plină.

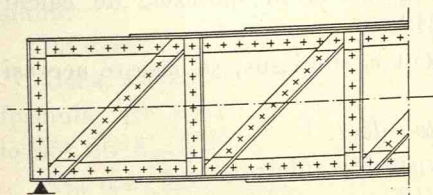


Figura 316

Acestea se alcătuiesc dintr'o inimă, corniere și platbande. Inima în genere este foarte înaltă față de grosimea ei (fig. 316).

Dacă se construiesc liniile isostatice, se constată că în

dreptul axei neutre, la 45° , avem într'un sens tensiuni, iar în celălalt sens compresiuni.

Tabla de fier rezistă bine la tensiuni, însă nu rezistă la compresiuni; ea fiind subțire se scofâlcește. Pentru aceasta se întărește cu fiare profilate cari se nituesc pe inimă.

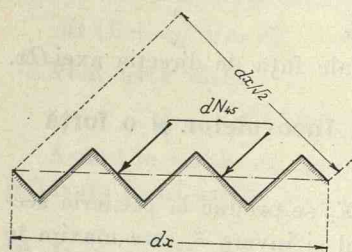


Figura 317

Rezistența la compresiune la 45° în axa neutră, este egală cu σ_z , iar forța corespundătoare intervalului dx , este (fig. 317):

$$(6) \quad dN_{45} = b \sigma_z dx / \sqrt{2}$$

iar pe intervalul finit $x - x_0$, va fi:

$$(7) \quad N_{45} = S [M_x - M_0] / I \sqrt{2} = (M_x - M_0) / y_r \sqrt{2}$$

Dacă I este variabil pe acest interval, se va ține seamă de aceasta luând pentru fiecare interval intermediar valoarea lui I respectiv.

În practică, aceste întărituri se pun la distanțe egale. Se calculează pentru fiecare întăritură valoarea lui N_{45} de pe intervalul ce-i aparține, și se dimensionează ca să nu flambeze lateral.

b) Grinzi de beton armat.

1°. *Cazul secțiunilor constante.* La acestea lucrul se petrece tocmai invers decât la grinzi cu inimă plină. Betonul nu ține la tensiune și deci tensiunile la 45° trebuiesc luate de fiare speciale, dirijate după această direcție (fig. 318).

În toată regiunea întinsă a betonului avem aceeași rezistență σ_z , deci aceeași rezistență la tensiune și compresiune egală cu σ_z .

Liniiile isostatice în această regiune și în ipotezele de calcul admise, se prezintă ca în figura 318.

Dacă se face același raționament ca mai sus, se găsește aceeași expresie pentru N_{45} .

Dăm în cele ce urmează norma de calcul.

Se calculează mai întâi cu ajutorul formulei:

$$(8) \quad b \sigma_z = T / y_r$$

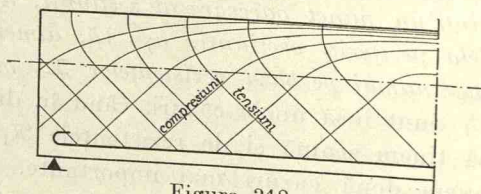


Figura 318

valoarea maximă a lui $\mathfrak{G}_z$. Dacă această rezistență trece de 14 kg/cm² atunci se modifică dimensiunile grinzii schimbând pe b sau y_r până obținem $\mathfrak{G}_z \leq 14$ kg/cm².

Pentru grinzile făcute cu cimenturi obișnuite și la cari $\mathfrak{G}_z \leq 4$ kg/cm² sau $\mathfrak{G}_z \leq 5,5$ kg/cm² pentru acelea făcute cu cimenturi speciale, se admite că betonul suportă singur aceste rezistențe și nu e nevoie să se ia vreo precauțiune în această privință.

În cazul când aceste rezistențe sunt depășite, toată tendința la lunecare se dă pe seama scărilor și a fiarelor la 45° ridicate în sensul tensiunilor principale din axa neutră.

Pe regiunea din grindă, pe care nu putem pune fiare inclinate la 45°, există compresiuni la 45° cari tind să îndepărteze armătura de fier întinsă de regiunea comprimată a betonului. Pe această regiune se pun scări (fiare verticale) cari să împiedice această tendință de îndepărtare (fig. 319). Valoarea tensiunii dN_y este tocmai rezultanta componentelor lui dN_{45} pe o verticală, care din cauza înclinării de 45° este egală cu cea orizontală adică cu dT_l . Așa dar, pe intervalul $x - x_0 = a$ vom avea:

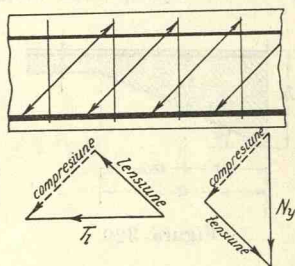


Figura 319

$$(9) \quad N_y = T_l = (M_x - M_0)/y_r$$

Dacă secțiunea orizontală totală a unei scări este Ω_s , dacă rezistența la tensiune a fierului din care sunt făcute scările este $\mathfrak{X}_f$, atunci pe intervalul a ne trebuie:

$$(10) \quad n = N_y / \Omega_s \mathfrak{X}_f$$

scări.

Ele se distribuie exact după norma indicată pentru pene la grinzile de lemn.

Pe porțiunea de grindă unde putem ridica fiare la 45°, tendința la lunecare se ia prin scări și prin fiare ridicate la 45° în sensul tensiunii.

Pe acest interval, scările se așează de obicei la distanțe egale.

Dacă dimensiile și numărul scărilor este cunoscut, atunci din formula (10) deducem pe N_y . Această forță echivalează, în sensul la 45°, cu $N_y/\sqrt{2}$.

Așa dar, din N_{45} dat de formula (7) vom scădea pe $N_y/\sqrt{2}$ și diferența va trebui să fie suportată de fiarele care se ridică la 45°.

Așa dar, ele se calculează la forța

$$(11) \quad N_{45} = N_y / \sqrt{2}$$

Scările, astfel puse, iau pe seama lor o rezistență la lunecare:

$$(12) \quad \tau_o = N_y / ab$$

a fiind intervalul pe care sunt puse.

Fiarele la 45° se ridică numai pe regiunea unde $\tau > \tau_o$ și distribuția lor se face ca la pene.

Fixarea cotelor poziției scărilor și fiarelor la 45° se face pe o dreaptă care împarte înălțimea h_o a grinzii de beton, în două părți egale.

2°. *Cazul secțiunilor variabile.* La grinzile de beton armat, în special în apropierea reazimilor încastrate complet sau parțial (fig. 320), secțiunea de beton variază foarte mult, așa că formulelor de mai sus trebuie să li se aducă oarecare corecțiuni.

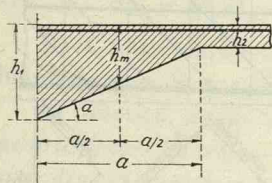


Figura 320

La studiul lunecării longitudinale, am găsit că în axa neutră valoarea tendinței la lunecare a fost, după formula (15):

$$T_l = (M_x - M_o) / y_r$$

de unde pentru secțiuni variabile scoatem

$$(13) \quad dT_l = d(M/y_r) = dN_t = dN_c$$

sau

$$(13) \quad dT_l = dM/y_r - M \cdot dy_r/y_r^2$$

Dacă se împarte cu dx , dacă se ține seama ca $dM/dx = T$, că raportul între y_r și h , rămâne aproape constant și că deci avem:

$$dy_r/dx = y_r \cdot dh/h \cdot dx$$

că $dh/dx = \operatorname{tg} \alpha$, și că $dT_l/dx = b \tau$, atunci avem:

$$(14) \quad b \tau = (T - \operatorname{tg} \alpha \cdot M/h) / y_r$$

Așa dar, rezistenții la lunecare în axa neutră i se aduce o corecțiune față de ceea ce avem la grinzile cu secțiune constantă.

O corecțiune trebuie adusă și rezistențelor $\mathcal{R}_b$ și τ la marginea comprimată a betonului.

În adevăr, rezistența principală în beton $\mathcal{R}_{1b}$ este dirijată după tangenta la contur (fig. 321) și avem deci:

$$\mathcal{R}_b = \mathcal{R}_{1b} \cos^2 \alpha ; \quad \tau = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_{1b} \sin 2\alpha$$

Aşa dar:

$$\mathfrak{K}_{1b} = \mathfrak{K}_b / \cos^2 a, \quad \mathfrak{C} = -\mathfrak{K}_b \operatorname{tg} a$$

Pentru înclinări mari trebuie să se țină seama de aceste corecțiuni.
Pentru găsirea tendinței la lunecare T_l avem două căi.

Prima. Cu ajutorul formulei (14) calculăm pe $\mathfrak{C}$ în diferite puncte ale grinzii și găsim curba rezistențelor $\mathfrak{C}$, a cărei suprafață ne dă tocmai pe T_l pe intervalul considerat, conform formulei $T_l = \int b \mathfrak{C} dx$.

A doua. Cu una din metodele aproximative integrăm ecuația (13). Pe intervalul considerat luăm 3 secțiuni, două la capete și alta la mijlocul intervalului. Dacă în cele trei secțiuni avem respectiv $M_o, y_{ro}, h; M_m, y_{rm}, h_m; M_x, y_{rx}, h_x$, atunci primul termen din formula (13) ne dă, cu ajutorul formulei lui Simpson:

$$(15) \quad (M_x - M_o) / y_r$$

în care am notat:

$$(16) \quad 1/y_r = \frac{1}{6} (1/y_{ro} + 4/y_{rm} + 1/y_{rx})$$

În același mod, al doilea termen ne dă:

$$(17) \quad M_c / y_r$$

dacă notăm:

$$(18) \quad M_c = \frac{1}{6} (y_{rx} - y_{ro}) y_r (M_o / y_{ro}^2 + 4 M_m / y_{rm}^2 + M_x / y_{rx}^2)$$

În aceste condiții:

$$(19) \quad T_l = (M_x - M_o - M_c) / y_r$$

Sub această formă, se vede că primii doi termeni sunt ca la grinzele cu secțiune constantă; al treilea este un termen de corecțiune și de aceea l-am notat cu M_c .

Pentru calcule mai aproximative ne mulțumim cu:

$$(16') \quad y_r \simeq y_{rm}$$

și fiindcă pentru secțiunile dreptunghiulare avem între y_r și h un raport aproape constant, a cărui valoare este circa $y_r/h = 7/8$, atunci formula (18) putem s'o punem sub forma:

$$(18') \quad M_c = \frac{1}{6} (h_x - h) h_m (M_o / h^2 + 4 M_m / h_m^2 + M_x / h_x^2)$$

care pentru calcule și mai aproximative, putem s'o luăm sub forma:

$$(18'') \quad M_c = (h_x - h) M_m / h_m$$

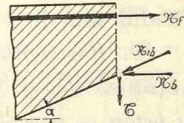


Figura 321

Astfel pregătită, formula (19) ne permite, numai cu ajutorul curbei momentelor, să găsim atât pe T_1 cât și distribuția scărilor și a fiarelor la 45°.

De aci încolo se urmează întocmai ca la grinzile cu secțiune constantă.

Intervalele a se fixează între punctele în care secțiunea schimbă modul său de variație.

30. *Rezistența la adeziune.* Fiarele supuse la tensiune tind, sub acțiunea forței N_x , să fie smulse din beton, deci la contactul între fier și beton se dezvoltă o rezistență la lunecare pe care o numim rezistență la adeziune și o notăm $\mathfrak{S}_a$.

Dacă perimetrul tuturor fiarelor din secțiunea considerată este s , atunci avem:

$$\mathfrak{S}_a = T/y_r s$$

Valoarea astfel calculată nu trebuie să depășească 5 kg/cm^2 . Evident, valoarea maximă are loc acolo unde T este maxim.

În cazul când T_1 este luat în întregime de scări și fiare la 45°, atunci pentru calculul lui $\mathfrak{S}_a$ se ia numai $\frac{1}{2} T$.

În cazul grinzilor simplu rezemate, aceste condiții ne fixează numărul minim de fiare ce trebuie să avem pe reazim, deși din punctul de vedere al momentului încovoietor am putea să nu avem nici un fier.

40. *Aranjarea fierăriei în secție transversală.* Fierăria trebuie acoperită cu un strat de beton de 2 cm sau 1,5 cm, după cum grinda este supusă sau nu la intemperii, adică dacă este afară sau în interiorul unei clădiri. Pentru suprafețele verticale, această acoperire se recomandă să fie 2,5 cm.

Distanța între axele vergelelor de diametru $\varnothing$ trebuie să fie $\geq 2 \varnothing \geq \varnothing + 2 \text{ cm}$.

În cazul când vergelele sunt aranjate în șiruri orizontale sau verticale, se recomandă ca această distanță să fie $2 \frac{3}{4} \varnothing$. Când fiarele unui șir sunt așezate la mijlocul intervalului celui alt șir, atunci pentru distanța între axele celor două șiruri se recomandă $1 \frac{2}{3} \varnothing$.

Aplicația Nr. 86. O grindă de beton armat, simplu rezemată la extremități, de 8 m deschidere, suportă o sarcină totală de 10 t/m. Grinda este în T , cu $b = 1,80 \text{ m}$, $d = 12 \text{ cm}$. (fig. 322). Ca rezistențe se impune: $\mathfrak{K}_b = 40 \text{ kg/cm}^2$, $\mathfrak{K}_f = 1200 \text{ kg/cm}^2$, $\mathfrak{S} = 4 \text{ kg/cm}^2$ și $\mathfrak{S}_a = 5 \text{ kg/cm}^2$. Se cere să se dimensioneze grinda. Dimensionarea secțiunii se face la încovoiere.

Momentul maxim și forța tăietoare maximă sunt respectiv:

$$M = \frac{1}{8} 10.8^2 = 80 \text{ tm și } V_0 = \frac{1}{2} 10.8 = 40 \text{ t}$$

Mai avem: $k = n\mathfrak{X}_b / (n\mathfrak{X}_b + \mathfrak{X}_f) = 15.40 / (15.40 + 1200) = \frac{1}{3}$ și
 $p = (1 + k) d/2 k + M/bd\mathfrak{X}_b = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}) 12.3 + 8000000/180.12.40 = 116,59$
 cm, după formulele dela încovoierea secțiunilor neomogene.

După metoda aproximativă găsim $h \simeq 115$ cm. După metoda exactă înălțimea va fi mai mică, să zicem cu 13%. Luăm rotund $h = 100$ cm pe care o vom verifica ulterior. Pentru a găsi pe b_0 , trebuie să avem dimensiunea fierăriei. Avem $y_r \simeq 100 - \frac{1}{2} 12 = 96$ cm, $\Omega_f = M/y_r \mathfrak{X}_f = 8000000/96.1200 = 69,5 \text{ cm}^2$ pentru care e nevoie de 10 Øa 30 mm = 70,69 cm². Pentru aranjarea fierăriei acesteia, dacă luăm scări de Ø = 8 mm. avem nevoie de o lățime $b_0 = 2.25 + 2.8 + 30 + 4.30.2,75 = 42,6 \simeq 43$ cm. Trebuie să ne asigurăm, grosso modo, că τ nu depășește 14 kg/cm². Avem în adevăr $\tau = 40000/96.43 = 9,7 \text{ kg/cm}^2$.

Deci b_0 este bun și pe baza lui putem stabili celelalte dimensiuni. Să găsim valoarea lui h . Vom aplica procedeul, exact cum s'a indicat la dimensionarea grinzilor în T.

Dacă plecăm dela $h = 100$ cm și facem corecțiunea indicată acolo, găsim $h = 102,3$ cm, $y = 34,1$ cm, $y_r = 94,7$ cm. E nevoie de o secțiune de fier de $\Omega_f = 70,4 \text{ cm}^2$. Așa dar, secțiunea de fier din 10 Øa 30 mm. = 70,69 cm² și lățimea $b_0 = 43$ cm sunt bine alese.

Pentru ca adeziunea să nu fie întrecută, în dreptul reazimului trebuie să avem, acolo:

$$n = T/2 y_r.s. \tau a = 40000/2.94,7.9,42.5 = 4,48 \text{ fiare;}$$

9,42 este perimetrul unui fier. Prin urmare, vom păstra în dreptul reazimului 5 Ø, iar 5 le vom putea ridica la 45%.

Nu putem ridica niciun fier pe regiunea în care sunt necesare 10 Ø. Putem ridica acolo unde 9 Ø sunt suficiente pentru moment, adică acolo unde momentul a scăzut cu partea corespondentă unui fier.

Abcisa a corespondentă, măsurată dela mijlocul grinzii, este dată de relația:

$$p (2a)^2/8 = pl^2/8.10$$

admițând aproximativ că un fier ia a 10-a parte din moment.

Deci:

$$a = l/2\sqrt{10} = 1,26 \text{ m.}$$

Pe această regiune:

$$N_y = \Delta M/y_r = 8000000/10.94,7 = 8450 \text{ kg.}$$

Dacă punem scări cu 2 secțiuni și de 8 mm diametru, cu $\mathfrak{X}_f = 1200 \text{ kg}$ avem nevoie de:

$$n = N_y/\Omega_s \mathfrak{X}_f = 8450/2.0,5.1200 \simeq 7 \text{ scări}$$

care se distribuie după regula dela pene (fig. 323).

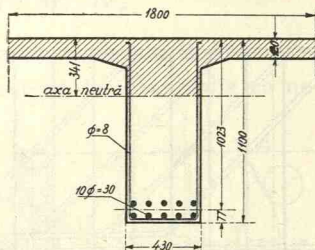


Figura 322

Pe restul intervalului $4,00 - 1,26 = 2,74$ m, avem:

$$N_y = \Delta M / y_r = 8000000.9 / 10.94,7 = 76000 \text{ kg.}$$

Fiarele la 45° iau o tensiune:

$$N_{45} = n_r \Omega_{f1} \mathfrak{X}_f = 5.7,069.1200 = 42400 \text{ kg.}$$

Valoarea lui N_y corespundentă este:

$$N_{y15} = N_{45} / \sqrt{2} = 60.000 \text{ kg.}$$

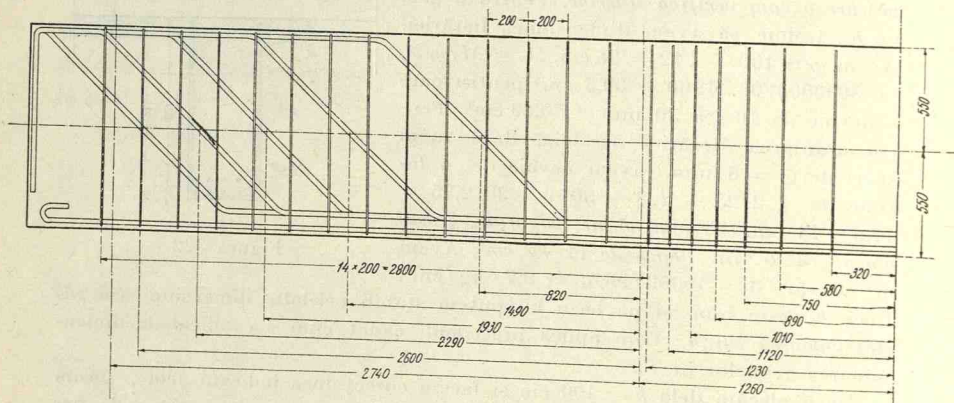


Figura 323

Rămâne să dăm pe seama scărilor:

$$76000 - 60000 = 16000 \text{ kg}$$

pentru care este nevoie de:

$$n = 16000 / 2.0,5.1200 = 13,32 \sim 14 \text{ scări}$$

cari se pun la distanțe egale de:

$$274 / 14 = 19,5 \text{ cm.} \sim 20 \text{ cm.}$$

Pe figura 323 sunt indicate aceste distribuții. Aceasta putem să o facem și grafic cu ajutorul curbei momentelor.

2. Cazul când avem un moment încovoietor și unul de răsucire.

În cazul general se urmează după normele indicate. În punctul cel mai obosit al secțiunii, se calculează $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{T}$ după formulele date până aci, apoi găsim pe $\mathfrak{X}_{red}$ sau $\mathfrak{T}_{red}$ după formulele (3) și (4).

În cazul arborilor circulari căpătăm formule simple. Într'adevăr, în punctul cel mai obosit al secțiunii avem:

$$\mathfrak{X} = M_i / W \quad \text{și} \quad \mathfrak{T} = M_r / W_p$$

Dacă aceste valori le introducem în (3) și (4) și dacă ținem seamă că $W_p = 2W$, avem:

$$\mathfrak{K}_{red} = M_i \left[\frac{1}{2} (1 - \mu) + \frac{1}{3} (1 + \mu) \sqrt{1 + M_r^2/M_i^2} \right] / W = \xi M_i / W$$

Unde ξ este funcție numai de μ și M_r/M_i și se poate lua din tabele sau calcula direct.

$$\mathfrak{G}_{red} = M_r (1 + \mu) \sqrt{1 + M_i^2/M_r^2/W_p}.$$

În acest caz, calculăm arborele sau la încovoiere sau la forfecare după formulele de mai sus, așa fel ca rezistențele admisibile ce ne sunt impuse, să nu fie întrecute.

Aplicația Nr. 87. Se dă un vinciu de mașină de ridicat, ca în fig. 324. El trebuie să poată ridica o greutate de 1t. Se cere dimensionarea arborelui mijlociu al vinciului, când neglijăm frecările și rezistențele admisibile sunt:

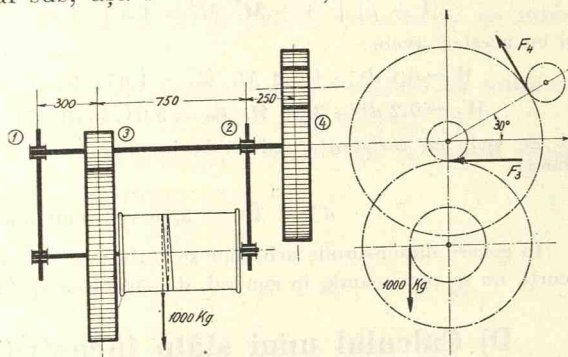


Figura 324

$$\mathfrak{K}_a = 600 \text{ kg/cm}^2 \text{ și } \mathfrak{G}_a = \mathfrak{K}_a / \sqrt{3} \approx 350 \text{ kg/cm}^2.$$

Vom determina mai întâi forțele care acționează arborele, avem:

$$F_3 = 1000 \cdot 200 / 450 = 444 \text{ kg, dirijată după orizontală.}$$

$$F_4 = 444 \cdot 100 / 500 = 88,8 \text{ kg, făcând } 30^\circ \text{ cu verticala. Reacțiunea din (1)}$$

are două componente (orizontală și verticală):

$$V_{10} = 444 \cdot 750 / 1050 - 88,8 \cdot 250 / 2 \cdot 1050 \approx 306 \text{ kg.}$$

$$V_{1v} = -88,8 \cdot \sqrt{3} \cdot 250 / 2 \cdot 1050 \approx 18 \text{ kg.}$$

și

$$V_1 = \sqrt{V_{10}^2 + V_{1v}^2} = \sqrt{306^2 + 18^2} \approx 308 \text{ kg.}$$

În mod analog pentru reacțiunea din (2), deși nu intervine în calculul nostru de dimensionarea arborelui, avem:

$$V_{20} = 444 \cdot 300 / 1050 + 88,8 \cdot 1300 / 2 \cdot 1050 \approx 182 \text{ kg}$$

$$V_{2v} = 88,8 \cdot \sqrt{3} \cdot 1300 / 2 \cdot 1050 \approx 95 \text{ kg}$$

și

$$V_2 = \sqrt{V_{20}^2 + V_{2v}^2} = \sqrt{182^2 + 95^2} \approx 205 \text{ kg.}$$

Momentele încovoietoare, variind liniar, sunt maxime, cum se recunoaște ușor, în (2) și (3) și avem valorile:

$$M_{i2} = 88,8 \cdot 25 = 2220 \text{ kgcm și } M_{i3} = 308 \times 30 = 9240 \text{ kgcm.}$$

Momentul de răsucire este constant pe intervalul (3) — (4) și are valoarea :

$$M_r = 444 \times 10 = 88,8 \times 50 = 4440 \text{ kgcm.}$$

Aplicând formulele rezistențelor reduse:

$$\mathfrak{X}_{red} = M_i \left[\frac{1}{2}(1 - \mu) + \frac{1}{2}(1 + \mu) \sqrt{1 + M_r^2/M_i^2} \right] / W \leq \mathfrak{X}_a$$

$$\mathfrak{S}_{red} = M_r (1 + \mu) \sqrt{1 + M_i^2/M_r^2} / W_p \leq \mathfrak{S}_a.$$

Vom determina respectiv pe: W sau W_p .

Cu $\mu = 0,3$, $M_r/M_i = 4440/9240 = 0,48$, în secțiunea (3) cea mai solicitată, cu $M_i = 9240 \text{ kgcm}$ și $M_r = 4440 \text{ kgcm}$, rezultă:

$$\frac{1}{2}(1 - \mu) + \frac{1}{2}(1 + \mu) \sqrt{1 + M_r^2/M_i^2} = 0,35 + 0,65 \sqrt{1 + 0,48^2} \approx 1,071$$

$$(1 + \mu) \sqrt{1 + M_i^2/M_r^2} = 1,3 \sqrt{1 + 1/0,48^2} \approx 3,01$$

și cu acestea avem:

$$W \approx 0,1 \text{ d}^3 \geq 1,071 M_i / \mathfrak{X}_a = 1,071 \cdot 9240 / 600 = 16,5 \text{ cm}^3$$

$$W_p \approx 0,2 \text{ d}^3 \geq 3,01 M_r / \mathfrak{S}_a = 3,01 \cdot 4440 / 350 = 38,2 \text{ cm}^3$$

Se vede că rezistența redusă la lunecare este aceea care dimensionează, dând:

$$d \geq \sqrt[3]{191} = 5,76 \text{ cm} \approx 60 \text{ mm.}$$

În genere dimensiunile arborilor se rotunjesc la 5 mm. La vinciuri cu arbori scurți, nu se ține seamă, în general, de răsucirea specifică.

D) Calculul unui stâlp încastrat în pământ.

Cu ajutorul cunoștințelor căpătate până acum, putem trata diverse probleme dintre cari una este și cea enunțată prin titlul de mai sus.

Vom considera un stâlp bătut în pământ și solicitat la niște forțe normale pe el (fig. 325 a), cari în secțiunea stâlpului dela nivelul terenului, se reduc la un moment M și o forță tăietoare T (fig. 325 b). Sub acțiunea lor, porțiunea de stâlp de sub nivelul terenului se va roti în jurul unui punct oarecare necunoscut, O .

La acest calcul se admite că deformațiunile porțiunii de stâlp din interiorul pământului sunt neglijabile față de cele ale pământului și că, prin urmare, putem admite că stâlpul, drept înainte

de deformațiunea pământului, rămâne drept și după aceasta. În aceste condițiuni, admitem că se aplică legea lui *Hooke* și că deci presiunile pe stâlp vor fi proporționale cu distanța x_1 dela punctul de rotație O .

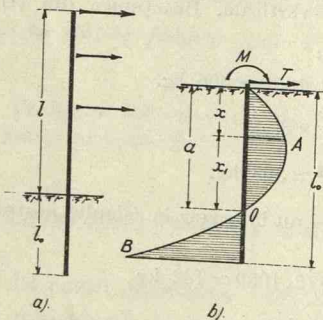


Figura 325

Pe de altă parte, se știe dela împingerea pământului că rezistența ce acesta poate opune, este proporțională cu x , adică cu adâncimea dela fața terenului.

Cea mai simplă lege a presiunilor pe stâlp, care satisface în același timp ambele condiții, este:

$$(1) \quad p = k b x x_1$$

în care b este lățimea stâlpului.

În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul când $b = ct$ pe lungimea l_0 , a porțiunii de stâlp din pământ.

Legea de distribuție a încărcării p fiind cunoscută — o *parabolă* — putem afla chiar valoarea ei în diferite puncte ce ne interesează.

Pentru aceasta vom scri ecuațiile date de statică și anume:

$$(2) \quad T = k b \int x x_1 dx, \quad — M = k b \int x^2 x_1 dx$$

Dacă notăm $M/T = l_1$ și cu a distanța dela fața terenului până la punctul de rotație O și observăm că:

$$(3) \quad x + x_1 = a,$$

atunci găsim:

$$\int x x_1 dx = \frac{1}{6} (3a^3 - 2l_0^3) \quad \int x^2 x_1 dx = \frac{1}{12} (4a^3 - 3l_0^3)$$

și împărțind ecuațiile (2) între ele, avem:

$$(5) \quad a = \frac{1}{2} l_0 (3 l_0 + 4 l_1) / (2 l_0 + 3 l_1)$$

Am găsit astfel poziția punctului O .

Se observă că, pentru $M = 0$, avem $l_1 = 0$ și deci $a = \frac{3}{4} l_0$, iar pentru $F = 0$, $l_1 = \infty$ și deci $a = \frac{2}{3} l_0$. Așa dar, în cazurile practice, poziția lui O variază într'un interval relativ restrâns ($l_0/12$).

Găsim apoi:

$$(6) \quad \int x x_1 dx = l_0^4 / 12 (2 l_0 + 3 l_1)$$

Introducând această valoare în prima ecuație (2), avem:

$$(7) \quad k b = T \cdot 12 (2 l_0 + 3 l_1) / l_0^4$$

Așa dar, avem toate elementele pentru determinarea lui p .

10. Ne interesează *presiunile maxime cari au loc în A și B*. Aceste valori nu trebuie să întrecă rezistența dată de împingerea pământului în cele două puncte. Se poate lesne arăta, că dacă ea nu este întrecută în punctul A , adică la adâncimea $\frac{1}{2} a$, atunci nu este întrecută nici aceea din punctul B , dela adâncimea l_0 . În aceste condițiuni ne ocupăm numai de p dela adâncimea $\frac{1}{2} a$, a cărei valoare este:

$$(8) \quad p_{max} = \frac{1}{4} k b \cdot a^2 = a T$$

în care

$$(9) \quad a = 3 (3 l_0 + 4 l_1)^2 / 4 l_0^2 (2 l_0 + 3 l_1)$$

Această valoare a lui p , se compară cu valoarea lui p , dată de împingerea pământului, la adâncimea $\frac{1}{2} a$.

2°. Ne mai interesează *momentul maxim din stâlp*. El va avea loc în secțiunea în care:

$$T - k b \int_0^x x x_1 dx = 0$$

și care ne dă

$$(10) \quad x^2 (3a - 2x) = l_0^2/2 (2l_0 + 3l_1).$$

Iar valoarea momentului maxim este:

$$M + T x (4a - 3x)/2 (3a - 2x)$$

Cum x are valori mici față de a , putem să-i neglijăm valoarea lui în paranteze și atunci obținem:

$$(11) \quad M + \frac{2}{3} x T$$

formulă destul de exactă pentru trebuințele practice. De aci rezultă, că, *pentru calculul secțiunii stâlpului, putem să-l considerăm încastrat la $\frac{2}{3} x$ sub fața terenului.*

Probleme de acest fel asupra stâlpilor se prezintă foarte multe și variate.

Aplicația Nr. 88. Un stâlp de lemn de $\varnothing$ 20 cm este îngropat în pământ pe o lungime de 1,80 m. Greutatea specifică a pământului este de $\gamma = 1,8 \text{ t/m}^3$, iar taluzul natural de $\psi = 45^\circ$. Ce forță orizontală aplicată la 6 m dela fața terenului poate suporta stâlpul?

În acest caz avem: $l_0 = 1,80 \text{ m}$, $l_1 = 6 \text{ m}$ și deci cu formulele (5), (9) și (10) avem: $a = 1,225 \text{ m}$, $\alpha = 9,263/\text{m}$, $x = 0,280 \text{ m}$ și $\frac{2}{3} x = 0,187 \text{ m}$.

Într-o parte a stâlpului se exercită acțiunea pasivă a pământului, în cealaltă parte cea activă, așa că numai diferența lor va contribui la stabilitatea stâlpului. Vom avea deci, la $\frac{1}{2} a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \gamma h [tg^2 (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi) - tg^2 (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi)] \\ &= 1800 \cdot 1,225 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6237 \text{ kg/m}^2 \end{aligned}$$

Stâlpul fiind rotund, se socotește că presiunea pe suprafața mediană, considerată uniform distribuită, este $\frac{2}{3}$ din cea maximă, și cum diametrul stâlpului este 0,20 m vom avea

$$p = \frac{2}{3} \mathcal{X} b = \frac{2}{3} 0,20 \cdot 6237 = 832 \text{ kg/m}$$

Din formula (8) deducem:

$$T = p/a = 832/9,263 = 89,8 \simeq 90 \text{ kg.}$$

Momentul maxim produs de această sarcină este

$$M_{max} = T (l_1 + \frac{2}{3} x) = 90 \cdot 6,187 = 55700 \text{ kg cm}$$

care dă în lemn o rezistență de

$$\mathcal{X} = M/W = 55700/785,4 = 70,8 \simeq 71 \text{ kg/cm}^2$$

XXI. DETERMINAREA REZISTENȚELOR CÂND ELE DEPĂȘESC LIMITA DE PROPORȚIONALITATE.

1. Distribuția și calculul rezistențelor pe secțiune la grinzi supuse la încovoiere.

Și pentru acest calcul, vom admite ipoteza lui *Bernouli* și anume că secțiunile plane înainte de deformațiune rămân plane și după și că prin urmare avem:

$$\varepsilon = \omega y$$

S'a arătat că, pentru corpurile făcute din materiale plastice, avem relația:

$$d\mathcal{K}/d\varepsilon = D$$

în care D — coeficientul de plasticitate — este o funcție oarecare de $\mathcal{K}$. Noi vom presupune în cele ce urmează că D este constant și că deci avem:

$$\mathcal{K} = D \varepsilon$$

S'a arătat, că *materialele supuse la încercări dincolo de limita de elasticitate* — care coincide aproape cu limita de proporționalitate — *se comportă ca un material plastic*, adică pentru orice solicitare în plus, corespunde o lungire permanentă în plus.

Prin urmare, dacă $\mathcal{K}_p$ este limita de proporționalitate, atunci valoarea rezistenței va fi:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_p + D \varepsilon$$

Din curba caracteristică se vede că $d\mathcal{K}/d\varepsilon = D$, dincolo de limita de proporționalitate, este foarte variabil.

Vom lua în cele ce urmează pe intervalul $\mathcal{K}_p - \mathcal{K}_t$, pentru D , valoarea medie:

$$D = (\mathcal{K}_t - \mathcal{K}_p)/\varepsilon_r$$

valoare, de sigur, foarte discutabilă. De aci încolo îl vom presupune nul cum de fapt și este.

La grinzile supuse la încovoiere, se știe că există o axă neutră, și că în apropierea ei rezistențele sunt mici (fig. 326). Dacă este așa, atunci în apropierea axei neutre există totdeauna o regiune în care rezistențele sunt sub limita de proporționalitate, regiune limitată de două drepte, în tot lungul cărora avem $\varkappa = \varkappa_p$. Această regiune

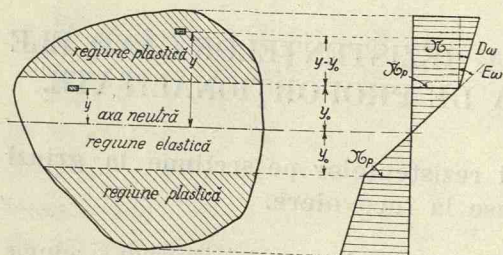


Figura 326

poartă numele de regiunea elastică a secțiunii și în ea legătura între rezistențe și deformațiuni este dată evident de relația:

$$(1) \quad \varkappa = E\omega y$$

Dincolo de aceste drepte, rezistențele sunt mai mari decât $\varkappa_p$ și regiunea poartă numele de regiunea plastică a secțiunii.

Dacă notăm cu y_0 distanțele liniilor de separațiune ale celor două regiuni, măsurate dela axa neutră, atunci valoarea rezistenței în regiunea plastică este dată de formula:

$$(2) \quad \varkappa = \pm \varkappa_p + D\omega (y - y_0)$$

Vom lua semnele plus sau minus după cum suntem respectiv în regiunea întinsă sau în cea comprimată.

Se vede numaidecât că y_0 este același, atât pentru regiunea întinsă cât și pentru cea comprimată a secțiunii și că are valoarea absolută:

$$(3) \quad \varkappa_p = E\omega y_0.$$

Ținând seama de (3), ecuația (2) putem s'o punem și sub forma:

$$(4) \quad \varkappa = (E - D)\omega y_0 + D\omega y$$

y și y_0 fiind pozitivi sau negativi după cum suntem respectiv în regiunea întinsă sau comprimată. În practică, se ia în mod curent pentru rezistența din regiunea plastică, pur și simplu, valoarea:

$$\varkappa = \pm \varkappa_p$$

presupunând în acest caz $D = 0$, ceea ce nu este exact, decât în anumite puncte ale curbei caracteristice.

Odată ce avem legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune, putem afla și valoarea lor. Vom aplica deci ecuațiile curente de echilibru.

În cele ce urmează, elementele geometrice relative la regiunea elastică sau plastică, le vom afecta respectiv de indicii e sau p .

Vom presupune deocamdată că secțiunea este supusă la un moment încovoiător și că ținem seamă de formula (2) sau (4).

Vom avea deci:

$$\int \mathcal{K} d\Omega = 0 \quad \text{și} \quad \int \mathcal{K} y d\Omega = M$$

cari ne dau:

$$(6) \quad E\omega \int_e y d\Omega \pm \mathcal{K}_p \int_p d\Omega + D\omega \int_p (y - y_0) d\Omega = 0$$

$$(7) \quad E\omega \int_e y^2 d\Omega \pm \mathcal{K}_p \int_p y d\Omega + D\omega \int_p (y - y_0) y d\Omega = M$$

aceste două ecuații, împreună cu (3), ne fixează poziția axei neutre și valorile lui y_0 și ω .

Să efectuăm sumele indicate în formulele (6) și (7).

Vom nota:

$$\int_e y d\Omega = S_e, \quad \int_e y^2 d\Omega = I_e, \quad \int_p y d\Omega = S_p, \quad \int_p y^2 d\Omega = I_p$$

cari nu sunt altceva decât momentele statice și de inerție, ale regiunii elastice și ale celei plastice, în raport cu axa neutră a secțiunii.

Mai notăm:

$$\pm \int_p d\Omega = \Omega_{ap} \quad \text{și} \quad \pm \int_p y d\Omega = S_{ap}$$

Prima expresie nu reprezintă de fapt decât diferența între suprafața întinsă și cea comprimată a regiunii plastice și deci suma *algebrică* a lor, afectând pe cea întinsă de semnul $+$, iar pe cea comprimată de semnul $-$.

Expresia doua, care nu-i altceva decât un moment static, are semnul $+$ atât în regiunea întinsă cât și cea comprimată, și este deci momentul static *absolut* al regiunii plastice, adică făcând abstracție de semn.

Pentru aceste motive ambele cantități au fost afectate de indicii a .

În aceste condițiuni, ecuațiile (6) și (7), ținând seamă și de (3), se transformă în:

$$(8) \quad [(E - D)(S_e + y_0 \Omega_{ap}) + DS] \omega = 0$$

$$(9) \quad [(E - D)(I_e + y_0 S_{ap}) + DI] \omega = M$$

în care am notat cu S și I momentul static și de inerție al întregii secțiuni în raport cu axa neutră.

În cazul când $D = 0$, avem:

$$(10) \quad E\omega (S_e + y_o \Omega_{ap}) = 0$$

$$(11) \quad E\omega (I_e + y_o S_{ap}) = M$$

formule ce se pot stabili și direct plecând dela ecuațiile (1), (3) și (5).

Formulele (8) și (10) ne arată lămurit că axa neutră nu trece prin centrul de greutate al secțiunii decât în cazul când axa Oz este o axă de simetrie a ei.

Aceste ecuații sunt în genere greu de rezolvat, așa că ne vom mulțumi cu soluții deduse prin încercări.

Dacă se notează:

$$I_e + y_o S_{ap} = W_p y_o$$

în care:

$$(12) \quad W_p = S_{ap} + I_e/y_o = S_{ap} + W_e = S_a + W_e - S_{ae}$$

atunci găsim:

$$(9_1) \quad (1 - D/E) W_p \mathfrak{X}_p + D \omega I = M$$

din care scoatem:

$$(13) \quad \omega = (M - W_p \mathfrak{X}_p)/DI + W_p \mathfrak{X}_p/EI$$

Se observă că pentru valori ale lui y_o cari tind către zero, $W_p = S_a$, iar când suntem la limita de proporționalitate $W_p = W$. Așa dar, pentru toate valorile posibile ale lui y_o , avem relația:

$$W \leq W_p \leq S_a$$

unde W este momentul rezistent al secțiunii întregi. Am găsit, prin urmare, limitele între cari se găsește cuprins W_p .

Pentru un dreptunghi, de exemplu, avem:

$$\frac{1}{6} b h^2 \leq W_p \leq \frac{1}{4} b h^2$$

iar pentru un fier I Nr. 30:

$$653 \text{ cm}^3 \leq W_p \leq 762 \text{ cm}^3$$

Această circumstanță ne ușurează foarte mult rezolvarea problemei.

În cazul când regiunea elastică are lățimea b constantă, atunci:

$$(12_1) \quad W_p = S_a - \frac{1}{3} b y_o^2$$

2. Ecuația axei deformate a grinzii.

a) Metoda exactă.

Mai întâi este evident că pe porțiunea de grindă în care rezistențele sunt sub sau cel mult la limita de proporționalitate, vom aplica ecuația dela corpurile elastice și anume:

$$(14) \quad \omega = M/EI$$

Să vedem ce se întâmplă pe porțiunea de grindă unde rezistențele au întrecut limita de proporționalitate.

Dacă notăm:

$$(15) \quad M_p = W_p \mathfrak{K}_p$$

atunci ecuația (13) se transformă în:

$$(16) \quad \omega = (M - M_p)/EI + M_p/EI$$

Aceste ecuații împreună cu (3) ne determină valorile lui ω , W_p și M_p .

Ecuațiile sunt simple, însă dificultatea constă în aceea că W_p este variabil pe grindă.

Aceste ecuații, în cazul cel mai simplu — secțiuni cu regiunea elastică de lățime constantă, — conduc la rezolvarea unei ecuații de gradul al treilea.

Să presupunem că după norma de mai sus am calculat în o secțiune oarecare, x , valoarea lui M_p , care este totdeauna mai mică decât M_x , din acea secțiune.

Curba momentelor fiind dată, putem găsi secțiunea i în care $M_i = M_p$. În acest caz, ecuația (16) ne dă:

$$\omega = M_p/EI$$

Așa dar, încovoierea specifică ω , produsă în secțiunea x , se compune din termenul $(M - M_p)/EI$ la care se adaugă încovoierea specifică produsă de momentul M_p în secțiunea i . Or, în secțiunea i , momentul M_p coincide cu momentul încovoietor din acea secțiune.

Procedând astfel găsim pentru fiecare secțiune x corespondenta sa i .

Să presupunem că avem o grindă încărcată cu o serie de sarcini și că momentul maxim se găsește în secțiunea x . Calculăm valoarea lui M_p care corespunde acestei secțiuni și găsim și secțiunea i de pe grindă, ce corespunde acestui moment.

În loc de a face acest calcul pentru toate secțiunile și a găsi valoarea exactă a lui ω , ne oprim la următoarea metodă aproximativă:

b) Metoda aproximativă.

Pe toată regiunea de grindă, pentru care $M < M_p$, calculăm pe ω după formula (14), iar pentru regiunea unde $M > M_p$ după formula (16).

În acest mod, valoarea lui ω este exactă în secțiunea de moment maxim și acolo unde rezistența atinge limita de proporționalitate. În interval, ω este aproximativ. Eroarea care se face este limitată, pentru că și M_p este cuprins în anumite limite din cauza lui W_p .

Cele două ramuri de curbă se racordează în secțiunea i .

Pentru ca să aflăm ordonatele curbei axei deformate a grinzii, aplicăm apoi ecuația aproximativă.

$$d^2v/dx^2 = -\omega$$

dela grinzile elastice.

În cazul când $D = 0$, formula (11) ne dă:

$$(17) \quad \mathfrak{K}_p W_p = M$$

Dacă facem uz de relațiile (3) și (12) găsim valorile lui y_0 și ω .

Pentru secțiunile, cari au regiunea elastică de lățime constantă, cu ajutorul formulei (12₁) găsim:

$$(18) \quad \omega^2 = b \mathfrak{K}_p^3 / 3 (S_a \mathfrak{K}_p - M) E^2$$

În acest caz, dacă $M < W \mathfrak{K}_p$ aplicăm ecuația (14), iar dincolo de această valoare ecuația (18).

Se vede că grinda se rupe, atunci când $\omega = \infty$, adică atunci când $M = S_a \mathfrak{K}_p$.

Aplicația Nr. 89. Un fier I Nr. 20 are elementele geometrice: $I = 2140 \text{ cm}^2$, $W = 214 \text{ cm}^3$, $S_a = 2.125 = 250 \text{ cm}^3$, grosimea inimei $b = 0,75 \text{ cm}$.

Oțelul din care este făcut are caracteristicile: $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\mathfrak{K}_t = 3700 \div 4500 \simeq 4100 \text{ kg/cm}^2$, $\mathfrak{K}_p = 1800 \div 2300 \simeq 2000 \text{ kg/cm}^2$, lungirea la rupură, măsurată pe eprubeta $l = 10 d$, este $\varepsilon_{10} = 20\%$, iar pe eprubeta $l = 5 d$, $\varepsilon_5 = 25\%$.

Pentru ε_r vom lua valoarea $\varepsilon_r = 2\varepsilon_5 - \varepsilon_{10} = 30\% = 0,3$. În aceste condiții luăm $D = (4100 - 2000)/0,3 = 7000 \text{ kg/cm}^2$.

Se pune prima întrebare: care este momentul încovoietor care provoacă ruperea grinzii?

În secțiunea de rupere, $\varepsilon_r = 0,3$ și din $\varepsilon_r = \omega y_{max}$, deducem $\omega = 0,3/10 = 0,03$.

Aplicând formula (9₂) în care neglijăm raportul D/E și luăm $W_p = S_a$, găsim:

$$M = 2000 \cdot 250 + 7000 \cdot 0,03 \cdot 2140 = 950000 \text{ kg cm}.$$

Aproximațiile făcute sunt justificate, pentru că D/E reprezintă $3,3\%$, iar valoarea lui y_0 , scoasă din $y_0 = \mathfrak{X}_p/E\omega = 2000/2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,3 = 0,0318$ cm., ne dă pentru

$$\frac{1}{3} b y_0^2 = \frac{1}{3} 0,75 \cdot 0,0318^2 = 0,00025 \text{ cm}^3$$

valoare absolut neglijabilă față de $S_a = 250 \text{ cm}^3$.

De aci se vede importanța foarte mică a regiunii elastice, în secțiunea de ruptură.

În acest caz, distribuția rezistențelor este

$$\mathfrak{X} = \pm \mathfrak{X}_p + D\omega y$$

Dacă luăm $D = 0$, găsim că grinda se rupe la un moment

$$M = 2000 \cdot 250 = 500000 \text{ kg cm.}$$

Dacă aplicăm formula lui *Navier* până la limita de ruptură, avem:

$$M = 214 \cdot 4100 = 877400 \text{ kg cm.}$$

Or este evident că grinda trebuie să se rupă la un moment mai mare ca acela dat de formula lui *Navier*.

A doua întrebare: care este rezistența maximă în grindă, când momentul încovoiător depășește pe acel ce corespunde limitei de proporționalitate. Vom lua două cazuri și anume: primul caz când

$$428000 \text{ kg cm} = W \mathfrak{X}_p \leq S_a \mathfrak{X}_p = 500000 \text{ kg cm}$$

și al doilea când $M > 500000 \text{ kg cm}$.

Pentru primul caz, să luăm momentul egal chiar cu 500000 kg cm .

Dacă se rezolvă ecuațiile (3), (15) și (16) se găsește:

$$y_0 = 2,70 \text{ cm} \quad , \quad \omega = 3,5317/10^4 \text{ cm} \quad , \quad W_p = 248,182 \text{ cm}^3$$

$$M_p = 496364 \text{ kg cm.}$$

și deci: $\mathfrak{X} = 2000 + 7000 \cdot 3,5317 \cdot 10^{-4} (10 - 2,70) = 2002 \text{ kg/cm}^2$, pe când formula lui *Navier* ne-ar fi dat

$$\mathfrak{X} = 500000/214 = 2336 \text{ kg/cm}^2$$

Din acest exemplu rezultă că deși momentul a variat cu $500000 - 428000 = 72000 \text{ kg cm}$, rezistența maximă a crescut numai cu 2 kg/cm^2 .

Să luăm, pentru al doilea caz, $M = 700000 \text{ kg cm}$.

În acest caz, W_p este sensibil egal cu S_a , și dacă neglijăm și raportul D/E , avem:

$$D\omega = (700000 - 2000 \cdot 250)/2140 = 93,5 \text{ kg/cm}^3,$$

y_0 fiind neglijabil. Avem deci:

$$\mathfrak{X} = 2000 + 93,5 \cdot 10 = 2935 \text{ kg/cm}^2$$

pe când după formula lui *Navier* am fi căpătat:

$$\mathfrak{X} = 700000/214 = 3270 \text{ kg/cm}^2.$$

Din ambele exemple se vede că formula lui *Navier* da rezultate mai mari, ceea ce și trebuia să fie.

A treia întrebare. Să presupunem că avem o grindă simplu rezemată de 4 m deschidere care suportă la mijlocul ei o sarcină concentrată de 7 t. (fig. 327). Să presupunem că această grindă este făcută din fierul I Nr. 20 de care a fost vorba până acum. Să se găsească săgeata la mijlocul grinzii.

În acest caz s'a văzut că $W_p \simeq S_a$ și deci avem

$$M_p = S_a \cdot x_p = 500000 \text{ kg cm} = 5 \text{ tm.}$$

Momentul maxim pe grindă fiind $M = 7.4/4 = 7 \text{ tm.}$ rezultă că, la distanța 1,43 m dela reazim, avem: $M = M_p = 5 \text{ tm.}$

Așa dar, până la $x = 1,43 \text{ m}$ aplicăm ecuația (14), iar de aci încolo ecuația (16).

Vom face întâiu un calcul *aproximativ* și anume, vom neglija termenii cari au EI la numitor față de cei ce au pe DI .

În acest caz, cele două ramuri de curbă au respectiv ecuațiile:

$$d^2v/dx^2 = 0, \quad d^2v/dx^2 = -(3,5x - 5)/DI$$

Dacă integrăm aceste ecuații punând condițiile ca pentru $x = 0$ și $x = 2 \text{ m}$ să avem respectiv $v = 0$ și $dv/dx = 0$ și pentru $x = 1,43 \text{ m}$, ambele ramuri de curbă să aibă același v și dv/dx , găsim pentru $v_{max} = 68,7 \text{ cm.}$

Dacă facem același calcul, fără însă a neglija termenii cari au pe EI la numitor, găsim $v_{max} = 70,5 \text{ cm.}$

Având în vedere că diferența este numai de 2,5%, putem să ne mulțumim numai cu primul calcul care este mult mai simplu, când axa deformată a grinzii se prezintă ca în figura 327.

Prin experiențe, se poate găsi valoarea lui D din aceste formule.

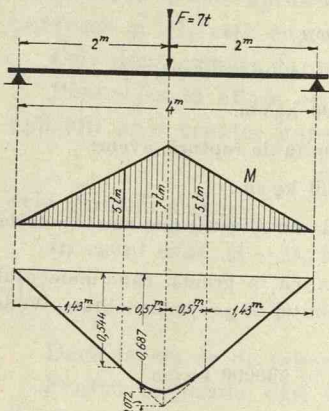


Figura 327

XXII. GRINZI DREPTE STATIC NEDETERMINATE.

Ne-am ocupat până acum numai cu grinzi static determinate. La aceste grinzi, atât reacțiunile cât și forțele tăietoare și momentele încovoietoare se pot deduce numai cu ajutorul ecuațiilor ce ni le dă statica.

Studiul deformațiunii axei barelor drepte, ne permite să rezolvăm și probleme static nedeterminate.

1. Generalități.

a) Grad de nestaticitate și cantități static nedeterminate.

Ne vom ocupa de cazul curent al grinzilor drepte, supuse la forțe compănare, normale pe axa grinzii.

Dintr'o grindă mai mare, să luăm numai un segment de lungime l (fig. 328).

Pentru ca echilibru să existe, vom introduce în extremitățile 0 și 1 ale grinzii forțele tăietoare T_0 și T_1 și momentele încovoietoare M_0 și M_1 .

Avem în total patru necunoscute și în acest caz statica ne dă numai două ecuații. Rezultă deci, că orice bucată de grindă, solicitată în condițiile arătate, este dublu static nedeterminată.

Deocamdată să stabilim, cu ajutorul ecuațiilor din statică, ce relații există între aceste patru cantități.

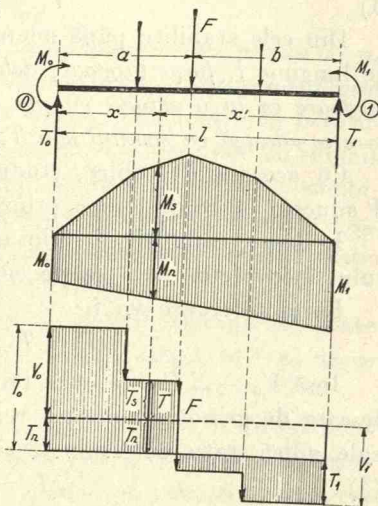


Figura 328

Dacă se ia momentul în raport cu extremitatea (1) a grinzii, avem:

$$M_0 + l T_0 - \Sigma bF - M_1 = 0$$

Presupunem forța tăietoare compusă din două părți:

$$(1) \quad T_0 = V_0 + T_n$$

În acest mod, în locul unei necunoscute acum avem alte două. *Uneia din ele putem să-i impunem o condiție arbitrară.* Impunem de exemplu, lui V_0 condiția ca să fie egală cu reacțiunea în 0, când am considera bucata de grindă de lungime l ca o grindă simplu rezemată în 0 și 1 și de aceeași deschidere l . Această condiție se exprimă evident prin

$$(2) \quad l V_0 - \Sigma bF = 0$$

Dacă în ecuația de momente de mai sus punem valoarea lui T_0 din (1) și ținem seama de condiția (2), căpătăm:

$$(3) \quad l T_n + M_0 - M_1 = 0$$

Dacă în aceleași condițiuni notăm cu V_1 reacțiunea din (1), avem evident:

$$V_0 + V_1 = \Sigma F$$

$$T_0 + T_1 = \Sigma F$$

Dacă le scădem una din alta și ținem seamă de (1) avem:

$$(1) \quad T_1 = V_1 - T_n$$

Din cele stabilite până acum rezultă că, la o bucată de grindă de lungime l , *forța tăietoare dela capetele grinzii este egală cu forța tăietoare ca la o grindă simplu rezemată, de aceeași deschidere l , la care se adaugă cu semnul său T_n , dat de relația (3).*

Cu această deosebire, studiul unei bucăți de grindă oarecare îl aducem la studiul unei grinzi simplu rezemate.

În aceste condiții, să scriem expresia forței tăietoare și a momentului încovoietor în o secție oarecare.

Forța tăietoare va fi:

$$T = T_n + V_0 - \Sigma F$$

Însă $V_0 - \Sigma F$ este forța tăietoare din secțiune, dacă considerăm bucata de grindă ca simplu rezemată la cele două extremități ale sale, adică static determinată și o notăm cu T_s . Vom avea:

$$(4) \quad T = T_s + T_n$$

Să luăm momentul în secțiunea considerată. Avem:

$$M = M_0 + x T_n + x V_0 - \Sigma (x - a) F.$$

Dacă aci punem valoarea lui T_n din (3) și dacă notăm:

$$M_s = x V_0 - \Sigma (x - a) F,$$

adică momentul ce se produce în aceeași secțiune considerând grinda static determinată, avem:

$$(5) \quad M = M_s + x' M_0/l + x M_1/l$$

Așa dar, dacă într'un mod oarecare am cunoaște M_0 și M_1 , atunci cunoaștem toate cantitățile cari ne interesează.

Din cele de mai sus putem scoate câteva concluzii:

1°. Sistemul este dublu static nedeterminat pentru că avem patru necunoscute și statica ne dă numai două ecuații. În mod general, dacă numărul necunoscutelor este n și numărul ecuațiilor date de statică n_0 , diferența $n - n_0$ ne dă gradul de nestaticitate al sistemului, adică numărul cantităților static nedeterminate.

Prin urmare, *numărul cantităților suprimate dintr'un sistem, pentru a-l transforma într'un sistem static determinat, ne dă numărul cantităților static nedeterminate.*

2°. Suprimând cantitățile static nedeterminate, pentru a asigura echilibrul bucății de grindă, ne-am impus condiția arbitrară de a o considera ca simplu rezemată la extremitățile sale. În loc de aceasta, am putea să ne impunem o altă condiție, de exemplu, de a o considera ca o grindă incastrată la o extremitate și liberă la cealaltă, etc.

Prin urmare, după suprimarea cantităților static nedeterminate, avem libertatea de a asigura echilibrul bucății de grindă prin orice sistem static, aplicat extremităților ei.

Mai mult. Într'un sistem oarecare cu n necunoscute, numai $n - n_0$ sunt static nedeterminate și rămâne la libertatea noastră să alegem care din ele anume să le considerăm ca atare. Urmarea e că fiecărui grup de $n - n_0$ cantități static nedeterminate, îi corespunde un anumit sistem static. Vor rezulta deci atâtea sisteme statice, câte combinații putem face cu cele n necunoscute, grupându-le câte $n - n_0$.

Această libertate ne permite de a alege totdeauna sistemul static care ne dă cele mai multe simplificări de calcul.

3°. Din cele de mai sus rezultă că un sistem oarecare se poate considera ca un sistem static, căruia i se mai aplică $n - n_0$ necunoscute static nedeterminate.

În acest caz, o reacțiune oarecare, o forță tăietoare, un moment încovoietor sau orice efort în genere, îl putem considera compus din două părți: una datorită sistemului static pe care, în scris, o vom afecta de indicele s și alta datorită cantităților static nedeterminate pe care o vom afecta de indicele n . Aceasta pe baza principiului suprapunerii efectelor. Vom avea deci totdeauna:

$$(6) \quad V = V_s + V_n, \quad T = T_s + T_n, \quad M = M_s + M_n, \text{ etc.}$$

Pe Fig. 328 se văd reprezentate grafic aceste cantități.

Acestea stabilite, putem trece la rezolvarea câtorva probleme de grinzi static nedeterminate.

b) Considerațiuni generale pentru rezolvirea grinzilor static nedeterminate.

La rezolvarea acestora, vom utiliza ecuațiile de deformațiune a axei barii și anume:

$$EI (d\psi/dx - \operatorname{tg}\theta_0) = -\Omega_{ox} \quad , \quad EI (\psi - \psi_0 - x \operatorname{tg}\theta_0) = -S_{x0}$$

In cazurile ce studiem, vom presupune că EI este constant pe toată lungimea grinzii. In cazul când I este variabil dela o secțiune la alta, având în fiecare secțiune valoarea I_x , atunci punem :

$$\Omega/EI = \int M dx/EI_x$$

Totdeauna E este constant pe lungimea grinzii, iar valoarea lui I o luăm arbitrară.

Dacă notăm $I/I_x = n$, atunci avem

$$\Omega = \int n M dx$$

Prin urmare, dacă reducem momentele M în raportul n , ecuațiile de deformație de mai sus păstrează aceeași formă.

2. Câteva cazuri simple de grinzi static nedeterminate.

a) Grindă încastrată la o extremitate, simplu rezemată la cealaltă și cu reazime de nivel.

Vom presupune grinda supusă la sarcini verticale. (fig. 329).

Vom determina mai întâi gradul de nestaticitate.

In total avem trei necunoscute: două la încastrare și una în

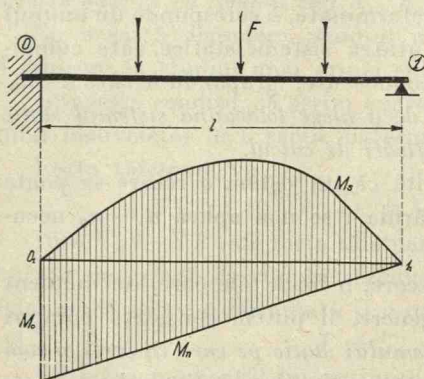


Figura 329

reazimul simplu. In acest caz, statica ne dă două ecuații, deci sistemul este simplu static nedeterminat. Ajungem la același rezultat și pe alte căi. 1°. Dacă suprimăm reazimul simplu, ne rămâne o grindă încastrată la o extremitate și liberă la cealalta, deci static determinată. 2°. Dacă suprimăm momentul din încastrare, ne rămâne o grindă simplu rezemată la ambele capete, static de-

terminată. In ambele cazuri, pentru a ajunge la un sistem static

determinat, am suprimat numai câte o necunoscută, deci sistemul e simplu static nedeterminat.

Vom lua ca necunoscută static nedeterminată momentul M_0 din încastrare.

Să aplicăm ecuațiile de deformație. Luăm originea axelor în încastrare.

Dacă reazimul nu se lasă în jos, și dacă grinda este încastrată, atunci avem: $v_0 = 0$, $tg \theta_0 = 0$. Dacă nici reazimul simplu nu se lasă în jos, atunci și $v_1 = 0$, și deci scriind expresia săgeții în 1 avem:

$$(7) \quad EI(0 - 0 - l \cdot 0) = -S_{10} \quad \dots \quad S_{10} = 0$$

Aceasta este ecuația care ne dă valoarea lui M_0 . N'avem decât să scriem explicit pe S_{10} .

Momentul se compune din două părți: momentul M_s , considerând grinda static determinată, în cazul nostru simplu rezemată la ambele capete, și momentul M_n datorit cantității static nedeterminate. Prima parte ne dă S_{10s} a doua S_{10n} . Aceasta din urmă are valoarea

$$(8) \quad S_{10n} = \frac{1}{2} M_0 l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} M_0 l^2.$$

Introducând această valoare în expresia lui $S_{10} = S_{10s} + S_{10n} = 0$, avem:

$$(9) \quad M_0 = -3 S_{10s} / l^2$$

Să facem câteva aplicații.

1°. Să presupunem că avem o singură sarcină concentrată, F , pe grindă (fig. 330):

$$(10) \quad S_{10s} = \frac{1}{6} Fab(l+b) = \frac{1}{6} Fb(l^2 - b^2)$$

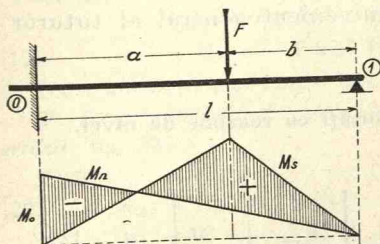


Figura 330

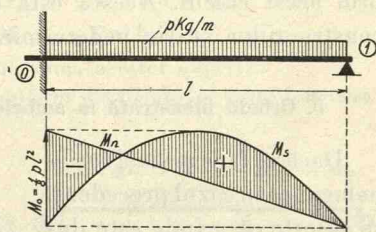


Figura 331

care ne dă

$$(11) \quad M_0 = -F ab(l+b)/2l^2 = -Fb(l^2 - b^2)/2l^2$$

Pentru mai multe sarcini vom avea evident:

$$M_0 = -\Sigma Fab(l+b)/2l^2$$

2°. Să presupunem că avem o sarcină uniform distribuită pe toată grinda (fig. 331).

Avem:

$$(12) \quad S_{10s} = \frac{1}{24} pl^4$$

și deci

$$(13) \quad M_0 = -\frac{1}{8} pl^2$$

3°. Să presupunem că avem o sarcină uniform distribuită pe lungimea c (fig. 332) astfel ca $F = p c$.

$$(14) \quad S_{10s} = \frac{1}{6} F a b (l + b) - \frac{1}{24} F b c^2$$

care ne dă

$$(15) \quad M_0 = -F b [l^2 - b^2 - \frac{1}{4} c^2] / 2 l^2$$

expresie aproape analoagă cu aceia dela o sarcină concentrată.

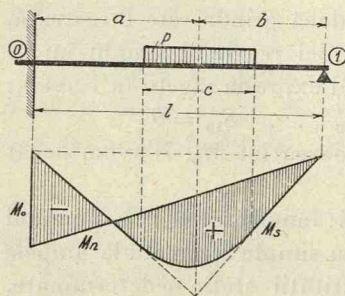


Figura 352

Din cele de mai sus se vede că totul se reduce la a scrie expresia momentului static al suprafeței momentelor grinzii static determinate în raport cu reazimul 1.

Observare importantă. În cazul când reazimile se denivelează și tangenta la axa grinzii s'ar înclina prin deformare cu θ_0 , atunci avem:

$$E I (\varphi_1 - \varphi_0 - l \operatorname{tg} \theta_0) = -S_{10}$$

Cantitățile din partea întâia a egalității fiind cunoscute, putem deduce de asemenea pe M_0 .

Trebuie observat că $E I$ fiind foarte mare, chiar dacă $\varphi_1 - \varphi_0$ sau $l \operatorname{tg} \theta_0$ ar fi mici, influența asupra lui M_0 este mare. Prin urmare, dacă în construcția noastră nu realizăm ipotezele admise aci, adică $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$ și $\operatorname{tg} \theta_0 = 0$, sau $\operatorname{tg} \theta_0 = (\varphi_1 - \varphi_0) / l$, atunci valoarea momentelor în construcția reală va diferi mult de aceia ce am găsit-o prin acest calcul. Acesta este un inconvenient general al tuturor construcțiilor static nedeterminate.

b. Grindă încastrată la ambele extremități cu reazime de nivel.

Dacă se face același raționament ca în cazul precedent, se găsește că grinda este dublu static nedeterminată.

Dacă se suprimă momentele de încadrare dela capetele grinzii, ne rămâne o grindă simplu rezemată (fig. 333).

Prin deformăriune, săgețile și tangentele dela capetele grinzii sunt nule. Dacă

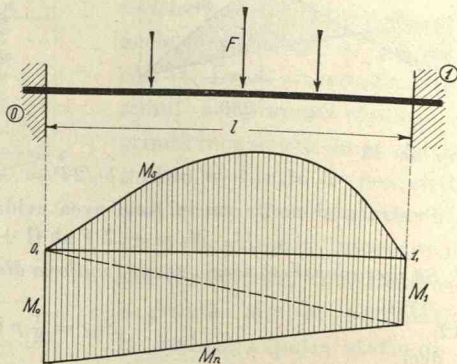


Figura 333

luăm originea axelor odată în O și altă dată în I , obținem:

$$EI(O - O - l.O) = -S_{01} \quad , \quad EI(O - O - l.O) = -S_{10}$$

adică:

$$(16) \quad S_{01} = 0 \quad , \quad S_{10} = 0$$

și deci:

$$(16) \quad S_{01s} + S_{01n} = 0 \quad , \quad S_{10s} + S_{10n} = 0$$

două ecuații cu două necunoscute. De pe figura 333, avem:

$$(17) \quad S_{01n} = \frac{1}{6} (M_0 + 2 M_1) l^2 \quad , \quad S_{10n} = \frac{1}{6} (2 M_0 + M_1) l^2$$

cari ne dau:

$$M_0 + 2 M_1 = -6 S_{01s}/l^2 \quad , \quad 2 M_0 + M_1 = -6 S_{10s}/l^2$$

$$(18) \quad M_0 = -2 (2 S_{10s} - S_{01s})/l^2 \quad \text{și} \quad M_1 = -2 (2 S_{01s} - S_{10s})/l^2$$

Să facem câteva aplicații.

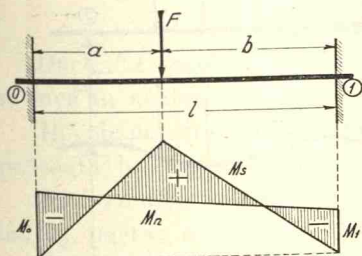


Figura 334

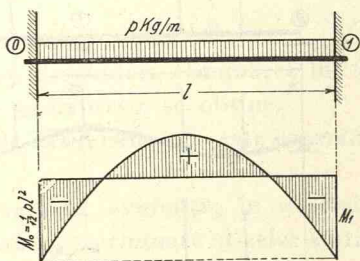


Figura 335

1°. Să presupunem că avem o sarcină concentrată F (fig. 334).

Avem:

$$S_{10s} = \frac{1}{6} F a b (l + b) \quad , \quad S_{01s} = \frac{1}{6} F a b (l + a)$$

$$(19) \quad M_0 = -F a b^2/l^2 \quad , \quad M_1 = -F a^2 b/l^2$$

Dacă am avea mai multe sarcini, facem suma acestor expresii:

2°. Să presupunem că avem o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea grinzii (fig. 335).

Avem:

$$(20) \quad S_{10s} = S_{01s} = \frac{1}{24} p l^4$$

$$M_0 = M_1 = -\frac{1}{12} p l^2$$

3°. Să presupunem că avem o sarcină uniform distribuită pe lungimea c , astfel ca $F = pc$ (fig. 336). Valoarea lui S_{10s} este ca la grinda precedentă și în mod analog avem:

$$(21) \quad S_{01s} = \frac{1}{6} F a b (l + a) - \frac{1}{24} F a c^2$$

cari ne dau:

$$(22) \quad M_0 = -F [a b^2 - (2b - a) c^2/12] / l^2 \quad \text{și} \quad M_1 = -F [a^2 b - (2a - b) c^2/12] / l^2$$

Acestea aflate, din ecuația (3) deducem pe T . Avem deci toate elementele pentru găsirea reacțiunilor, a forțelor tăietoare și a momentelor, în toate secțiunile grinzii.

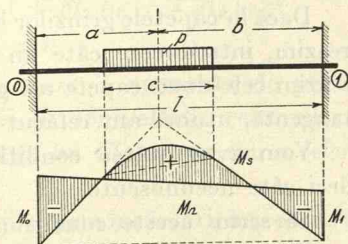


Figura 336

3. Grindă continuă pe mai multe reazime.

a. Ecuația lui Clapeyron.

O grindă se zice că este continuă când se sprijină pe mai mult de două reazime simple. Vom presupune, ca și la exemplele precedente, că avem numai sarcini verticale.

Dacă suprimăm toate reazimile intermediare, grinda se transformă într'o grindă simplu rezemată la cele două extremități. Dacă n este numărul tuturor reazimilor, atunci $n-2$ este gradul său de nestaticitate.

Am putea lua ca necunoscute static nedeterminate reacțiunile de pe reazimile intermediare. E mai comod a lua *momentele ce se*

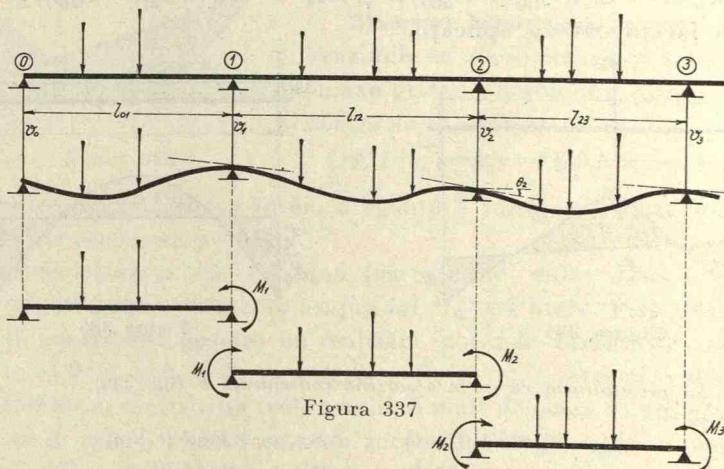


Figura 337

produc în grindă, în dreptul reazimilor. Dacă se taie grinda în dreptul acestora, ea se transformă într'atâtea grinzi simplu rezemate, câte deschideri avem (fig. 337).

Dacă la capetele grinzilor simplu rezemate, care sprijină pe același reazim, introducem câte un moment, așa fel ca în dreptul aceluși reazim cele două capete ale grinzii să aibă aceeași săgeată și aceeași tangentă, atunci am refăcut continuitatea grinzii.

Vom avea atâtea condițiuni câte reazime intermediare avem, deci câte necunoscute.

Să scriem aceste condițiuni.

Vom scri expresia săgeții în reazimile 1 și 3, luând originea axelor în 2. Avem:

$$EI (v_1 - v_2 - l_{12} \operatorname{tg} \theta_2) = -S_{12} \quad , \quad EI (v_3 - v_2 - l_{23} \operatorname{tg} \theta_2) = -S_{32}$$

sau

$$EI [(v_1 - v_2)/l_{12} - \operatorname{tg} \theta_2] = -S_{12}/l_{12} \quad , \quad EI [(v_3 - v_2)/l_{23} - \operatorname{tg} \theta_2] = -S_{32}/l_{23}$$

De pe figură se vede că dacă pentru deschiderea l_{12} unghiul θ_2 este pozitiv, pentru deschiderea l_{23} este negativ și reciproc, și deci, dacă însumăm cele două expresii, $tg\theta_2$ dispăre.

Dacă ținem seamă că S_{12} este momentul static al suprafeței momentelor de pe deschiderea 12 în raport cu reazimul 1 și că deci S_{12}/l_{12} reprezintă reacțiunea acestei suprafețe de momente în reazimul 2, atunci rezultă că:

$$S_{12}/l_{12} + S_{32}/l_{23} = \Omega_2$$

este reacțiunea ce se produce în reazimul 2 de suprafețele de momente de pe cele două deschideri adiacente 12 și 23, considerate ca simplu rezemate la extremitățile lor.

În aceste condițiuni avem:

$$EI [(\nu_1 - \nu_2)/l_{12} + (\nu_3 - \nu_2)/l_{23}] + \Omega_2 = 0.$$

Dacă EI ar fi diferit pe cele două deschideri, eliminarea lui θ_2 se face în același fel, și se vede ușor ce expresie se obține.

În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul când EI este constant pe toată lungimea grinzii.

În formulele de mai sus să punem în evidență, în expresia lui Ω_2 , partea datorită cantităților static determinate și celor static nedeterminate.

Avem evident

$$(23) \quad \Omega_{2s} + \Omega_{2n} = \Omega_2$$

$$(24) \quad S_{12s}/l_{12} + S_{32s}/l_{23} = \Omega_{2s}$$

$$S_{12n} = \frac{1}{6} (M_1 + 2 M_2) l_{12}^2, \quad S_{32n} = \frac{1}{6} (M_3 + 2 M_2) l_{23}^2$$

$$(24) \quad S_{12n}/l_{12} + S_{32n}/l_{23} = \frac{1}{6} (M_1 l_{12} + 2 M_2 l_{13} + M_3 l_{23}) = \Omega_{2n}$$

Introducând aceste valori în expresia de mai sus, obținem:

$$(25) \quad 6 EI [(\nu_1 - \nu_2)/l_{12} + (\nu_3 - \nu_2)/l_{23}] + M_1 l_{12} + 2 M_2 l_{13} + M_3 l_{23} + 6 \Omega_{2s} = 0$$

Această ecuație stabilește legătura între 3 momente de pe 3 reazime consecutive, încărcările grinzii și denivelările reazimilor. Această ecuație poartă numele de ecuația lui *Clapeyron* sau *a celor 3 momente*.

Cazul curent este acela când reazimile, prin încărcări, nu cedează și deci $\nu_1 = \nu_2 = \dots = 0$.

În acest caz, primul termen din ecuație dispăre. Acest termen mai dispăre și când:

$$(\nu_2 - \nu_1)/l_{12} = (\nu_3 - \nu_2)/l_{23} = (\nu_4 - \nu_3)/l_{34} = \dots = C^{td},$$

adică, atunci când, după denivelare, reazimile rămân în linie dreaptă.

Mai este un caz când primul termen este nul. Să considerăm o grindă continuă care ar fi montată dela început sub forma frântă (fig. 338). In momentul când s'a terminat montarea ei, grinda șade pe eșafodaje, așa că nu e supusă la niciun efort. In această stare atât $M_1, M_2 \dots$ cât și cantitățile $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ provenite din încărcări, sunt nule, deci nul este și primul termen din ecuația lui *Clapeyron*. Acest termen rămâne nul și atunci când aplicăm sarcinile pe grindă dacă reazimile nu se mișcă din poziția lor inițială.

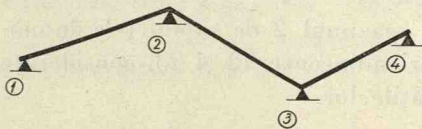


Figura 338

In aceste cazuri, ecuația se reduce la:

$$(26) \quad \Omega_2 = \Omega_{2n} + \Omega_{2s} = 0.$$

sau explicit:

$$(26) \quad M_1 l_{12} + 2 M_2 l_{13} + M_3 l_{23} + 6 \Omega_{2s} = 0$$

Forma completă a ecuației se va aplica numai atunci, când prin încărcare reazimile părăsesc poziția lor inițială.

In genere, grinzile continui sprijină pe reazime făcute din materiale cari se comprimă sau se tasează și deci sub acțiunea încărcărilor se lasă în jos. Cum termenul care modifică momentele din cauza denivelărilor se multiplică cu EI , se vede că importanța denivelărilor este foarte mare.

Denivelarea reazimilor depinde de natura terenului de fundație, de natura materialelor ce constituiesc reazimile, etc. și deci și momentele vor fi influențate de aceste cauze.

La grinzile static determinate aceste circumstanțe n'au nicio influență.

b) Puncte fixe.

Să considerăm o grindă continuă cu o serie de deschideri neîncărcate. Să scriem ecuația (26) pentru primele două deschideri, începând dela extremitatea din stânga a grinzii, în ipoteza $\Omega_1 = 0$. Vom avea:

$$2 M_1 l_{02} + M_2 l_{12} = 0$$

din care scoatem:

$$(27) \quad M_1 = -k_{1s} M_2$$

în care am notat:

$$(28) \quad l_{12}/2 l_{02} = a_{1s}/b_{2s} = k_{1s}$$

Am afectat aceste cantități de indicele s , pentru a arăta că am dedus aceste cantități plecând dela extremitatea din stânga a grinzii.

Din aceasta se vede că, atunci când $\Omega = 0$, momentul dela un reazim la altul schimbă de semn și variază într'un raport k , a cărui valoare depinde de deschideri. Am notat și notăm:

$$(28) \quad a_{1s}/b_{2s} = k_{1s} \quad , \quad a_{2s}/b_{3s} = k_{2s}$$

având evident $k_{0s} = 0$.

Acestea fiind stabilite, să continuăm a scrie ecuația (26) pentru deschiderile următoare, 1—2—3.

Ținând seamă de (28), avem:

$$-k_{1s} M_2 l_{12} + 2 M_2 l_{13} - M_2 l_{23}/k_{2s} = 0$$

care ne dă:

$$(29) \quad k_{2s} = l_{23}/(2 l_{13} - k_{1s} l_{12})$$

formulă care stabilește o recurență între valorile lui k .

Valorile lui k aflate din (28) și cu condiția $a_i + b_{i+1} = l_{i,i+1}$ deducem pe a și b . Avem de exemplu:

$$(28) \quad a_{1s} = l_{12} k_{1s}/(1 + k_{1s}) \quad , \quad b_{2s} = l_{12}/(1 + k_{1s})$$

Aceste distanțe determină niște puncte fixe $f_{1s}, f_{2s}, \dots$ ale căror poziții depind numai de deschideri.

Dacă facem exact aceleași operații plecând însă dela extremitatea din dreapta a grinzii continuei, vom găsi altă serie de cantități a, b, k , și altă serie de puncte fixe, pe cari le vom afecta de indicele d .

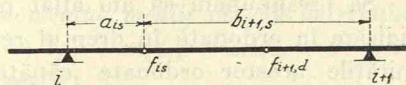


Figura 339

Pe fiecare deschidere vom avea două puncte fixe: f_{is} și $f_{i+1,d}$ (fig. 339) fiecare corespunzând extremității stângi și drepte a grinzii continuei.

Putem da și o construcție grafică a punctelor fixe.

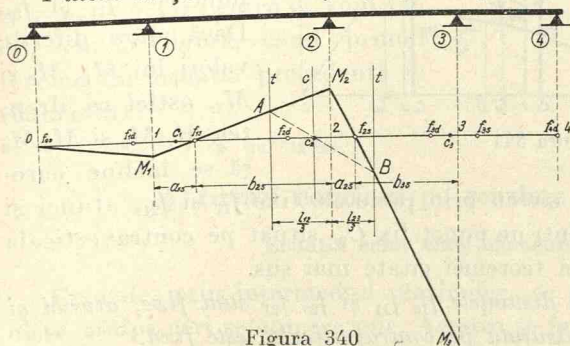


Figura 340

Oricare ar fi valoarea lui M_2 (fig. 340), dreptele $f_{1s} M_2$ și $f_{2s} M_2$ trec mereu prin punctele fixe f_{1s} și f_{2s} . Să considerăm verticalele t , numite *trisectoare*, cari trec prin treimea deschiderilor l_{12} și l_{23} . Aceste verticale taie dreptele

precedente în punctele A și B , iar dreapta AB taie axa grinzii în punctul c_2 . Dând valori diferite lui M_2 , vârfului triunghiului AM_2B se mișcă pe trei drepte fixe și două din laturi (AM_2 și BM_2)

În virtutea relațiilor (26), avem:

$$(30) \quad \frac{1}{2} m_2 l_{13} + \Omega_{2s} = 0, \quad \therefore \quad m_2 = -2 \Omega_{2s} / l_{13}$$

și

$$(31) \quad M_1 l_{12} + 2 M_2 l_{13} + M_3 l_{23} = 3 m_2 l_{13}.$$

Așa dar, momentul mediu m_2 , calculat ca mai sus, are o valoare independentă de valorile lui M_1 , M_2 și M_3 .

Dacă purtăm în ordonată, pe contraverticalele respective, valorile lui m_1 , m_2 , ... căpătăm punctele fixe C_1 , C_2 , ... Așa fiind, putem construi conturul poligonal format de drepte: $0 C_1 f_{11} - f_{11} C_2 f_{21} - f_{21} C_3 f_{31} - f_{31} 4$, care ne permite să refacem conturul de drepte: $4 f_{31} M_3 - M_3 f_{21} M_2 - M_2 f_{11} M_1 - M_1 0$ și deci să aflăm momentele pe reazime.

În această construcție am utilizat punctele fixe corespunzând extremității din stânga a grinzii, de unde am și început construcția. Dacă am fi început-o dela extremitatea din dreapta, am fi utilizat punctele fixe ce corespund acestei extremități. Rezultatele ce se obțin rămân evident aceleași.

Dacă grinda ar fi avut și denivelări, atunci pe contraverticalele pe reazim ridicăm în ordonată momentul mediu m_2 dat de relația:

$$2 EI [(\nu_1 - \nu_2)/l_{12} + (\nu_3 - \nu_2)/l_{23}] + m_2 l_{13} + 2 \Omega_{2s} = 0$$

și procedăm apoi exact ca mai sus.

Se obișnuiește, în acest caz, a raporta deformația grinzii de pe intervalul 1—3 la linia reazimilor 1—3 în poziția lor deplasată (fig. 342). În aceste condiții $\nu_1 = \nu_3 = 0$, iar pentru ν_2 vom lua ν_2' , ca în figură, când primul termen din ecuația precedentă se reduce la:

$$-2 EI \nu_2' l_{13} / l_{12} l_{23}$$

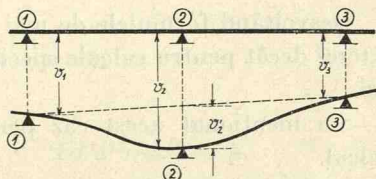


Figura 342

4. Grinzi continui pe reazime elastice.

Ecuția celor cinci momente.

Grinzile, prin intermediul reazimilor, se sprijină în genere pe niște stâlpi, cari se numesc pile. Acestea se fac din zidărie sau oțel, deci tot din materiale cari se deformează. Vom admite, ca totdeauna, că și lor li se aplică legea lui Hooke și anume, că deformația lor este proporțională cu sarcina, cu alte cuvinte, dacă, de exemplu, reazimul 2, sub acțiunea unei sarcini egală cu 1, se lasă în jos cu

cantitatea v_{22} , atunci, sub acțiunea sarcinei V_2 se va lăsa în jos cu:

$$(32) \quad v_2 = V_2 v_{22}$$

Cantitatea v_{22} este independentă de încărcări, depinde de forma și dimensiunile pilei și de materialul din care este făcută. În cazul unei grinzi continue, așezată pe pontoane, v_{22} este cantitatea cu cât se scufundă pontonul de sub reazimul 2 sub acțiunea unei sarcini egală cu 1. Forma și dimensiunile pontonului fiind date, găsim numaidecât pe v_{22} .

În aceste condiții, să scriem ecuația lui *Clapeyron* pentru reazimul 3. Ținând seama de (32) avem:

$$(33) \quad 6 EI (V_2 v_{22}/l_{23} - V_3 v_{33} l_{24}/l_{23} l_{34} + V_4 v_{44}/l_{34}) + M_2 l_{23} + 2 M_3 l_{24} + M_4 l_{34} + 6 \Omega_{3s} = 0$$

Dacă în această formulă introducem valoarea reacțiunilor, a căror expresii sunt de forma:

$$(34) \quad V_2 = V_{2s} - M_1/l_{12} + M_2 l_{13}/l_{12} l_{23} - M_3/l_{23},$$

în care V_{2s} este reacțiunea ce se produce în dreptul reazimului 2 considerând cele două deschideri adiacente ca grinzi simplu rezemate; atunci se capătă o relație între EI , cantitățile v_{22} , v_{33} , ..., cantități care depind numai de încărcările pe deschiderile grinzii considerate ca grinzi simplu rezemate la extremități și momentele de pe cinci reazime consecutive. Ecuația poartă numele de *ecuația celor 5 momente*.

Desvoltând formulele de mai sus, rezultă expresii lungi care n'au interes decât pentru calcule speciale și renunțăm de a le mai transcrie aici.

S'a menționat acest caz pentru a se indica numai norma de calcul.

După această normă se calculează o șină de cale ferată, care reazimă pe traverse care la rândul lor sunt puse pe un pat elastic format de balastul liniei.

Formulele se simplifică sensibil când $v_{22} = v_{33} = \dots = ct$, $l_{12} = l_{23} = l_{34} = \dots = ct$.

5. Grinzi așezate pe un teren elastic.

a) Soluția analitică.

Terenurile de fundație până la o anumită limită, sunt și ele elastice, cu alte cuvinte, dacă sunt supuse la o presiune oarecare, cedează, iar dacă acea presiune încetează ele revin la loc.

Un exemplu este traversa de cale ferată, care sub acțiunea sarcinilor se lasă în mod vizibil în jos, pentru ca după trecerea lor să revină la loc.

O grindă supusă la sarcini și așezată pe un asemenea teren se poate considera ca o grindă continuă așezată pe un număr înfinit de reazime elastice înfinit apropiate.

În aceste cazuri se admite că și terenul ascultă de legea lui Hooke și anume că *deplasarea este proporțională cu presiunea și cu un factor constant care depinde de natura terenului, cu alte cuvinte*

$$(35) \quad \varphi = \mathfrak{K}/E_t$$

Un teren care are o săgeată elastică de 0,25 mm sub acțiunea unei presiuni de $\mathfrak{K} = 1 \text{ kg/cm}^2$, are $E_t = 1/0,025 = 40 \text{ kg/cm}^3$.

Dacă grinda reazimă pe teren pe o lățime b , atunci încărcarea pe unitatea de lungime de grindă va fi $p = b \mathfrak{K}$.

Pentru că presiunea nu se schimbă, vom avea aceeași săgeată și deci:

$$(36) \quad \varphi = p/b E_t$$

Pentru prescurtare, notăm $b E_t = k$, și prin urmare:

$$(36) \quad p = -k \varphi.$$

Am pus semnul minus ca să ținem seamă că p este dirijat de jos în sus.

Din ecuația

$$(37) \quad EI d^2 \varphi / dx^2 = -M$$

prin derivări succesive, deducem:

$$EI d^3 \varphi / dx^3 = -T, \quad EI d^4 \varphi / dx^4 = p.$$

Dacă în ultima ecuație introducem valoarea lui p din (36), avem:

$$(38) \quad EI d^4 \varphi / dx^4 + k \varphi = 0$$

o ecuație diferențială în φ .

Dacă se notează

$$(39) \quad \alpha^4 = k/4 EI$$

$$(40) \quad e^{\alpha x} \cos \alpha x = a_x, \quad e^{\alpha x} \sin \alpha x = b_x, \quad e^{-\alpha x} \cos \alpha x = c_x, \\ e^{-\alpha x} \sin \alpha x = d_x$$

atunci avem:

$$(41) \quad \varphi = A a_x + B b_x + C c_x + D d_x$$

în care A, B, C și D sunt constante de integrare.

Derivând această expresie, obținem:

$$\begin{aligned}
 d\nu/dx &= \alpha [(A+B) a_x - (A-B) b_x - (C-D) c_x - (C+D) d_x] \\
 d^2\nu/dx^2 &= 2 \alpha^2 [B a_x - A b_x - D c_x + C d_x] \\
 d^3\nu/dx^3 &= -2 \alpha^3 [(A-B) a_x + (A+B) b_x - (C+D) c_x + (C-D) d_x] \\
 d^4\nu/dx^4 &= -4 \alpha^4 [A a_x + B b_x + C c_x + D d_x]
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

În calcule avem nevoie și de $\int p dx$ pe un interval oarecare. Dacă se face calculul se găsește:

$$\int_0^x p dx = -k \int_0^x \nu dx = + (k/4 \alpha^4) \left[d^3\nu/dx^3 \right]_0^x
 \tag{42}$$

Ecuatiile (41) sunt valabile pe intervalul dintre două forțe concentrate.

Pe alt interval, vom avea altă ecuație (41) cu alte constante A_1, B_1, C_1 și D_1 și așa mai departe.

În dreptul unei sarcini concentrate, cele două ramuri de curbă au aceleași valori pentru ν , $d\nu/dx$ și $d^2\nu/dx^2$, ultima fiind proporțională cu momentul din dreptul sarcinei. În dreptul forței concentrate, diferența forțelor tăietoare în cele două ramuri de curbă, este egală tocmai cu forța concentrată. Așa dar, avem 4 condiții pentru racordarea celor două ramuri ale curbei, de o parte și alta a sarcinei concentrate.

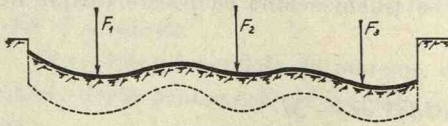


Figura 343

Dacă avem n sarcini pe grindă, vom avea $(n+1)$ ramuri de curbă (fig. 343), deci $4(n+1)$ constante de integrare, din cari $4n$ le

determinăm cum am arătat mai sus. Celelalte patru le determinăm prin condiția ca forța tăietoare și momentele la capătul grinzii sunt nule.

Observare. Principal chestiunea este rezolvată, însă aci se iese o dificultate.

S'a văzut că în expresia lui ν intră funcțiunile circulare $\sin$ și $\cos$. Axa deformată a grinzii va fi un fel de sinusoidă. Se întâmplă însă că, pe unele porțiuni, ν este negativ, adică grinda se ridică în sus. Pe aceste regiuni nu există presiunea p , pentru că pământul nu trage grinda în jos. Prin urmare, vor exista discontinuități și grinda nu va rezema pe teren pe toată lungimea ei. În aceste cazuri calculul este extrem de dificil și are loc atunci când EI al grinzii este mic și deformațiunile mari, ceea ce e cazul de multe ori.

b) Soluția grafică.

Pe această cale se rezolvă prin metoda pozițiilor false, în modul următor. Forțele și grinda fiind date, *presupunem* că p variază liniar, ca în figurile 344. În ambele cazuri, putem deduce p_0 și p_n , sau p_1 și p_3 , cu ajutorul celor două ecuații din statică:

$$\int p \, dx = \Sigma F$$

$$\int x p \, dx = \Sigma aF$$

În orice caz, aceste două ecuații nu ne pot da decât două valori ale lui p , în două puncte alese după voie.

În această ipoteză, am găsit valoarea lui p în orice punct al grinzii. Așa fiind, putem construi curba momentelor încovoietoare și deci și axa deformată a grinzii. Vom căpăta o curbă cam de forma din fig. 345.

Cum între săgeți și sarcini există relația $p = k \nu$, atunci ordonatele acestei curbe măsurate de la dreapta care închipue nivelul terenului înainte de încărcarea grinzii, reprezintă chiar încărcarea p a ei, la o scară oarecare. Să determinăm poziția dreptei.

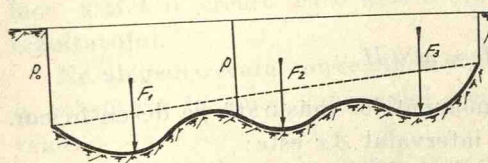


Figura 345

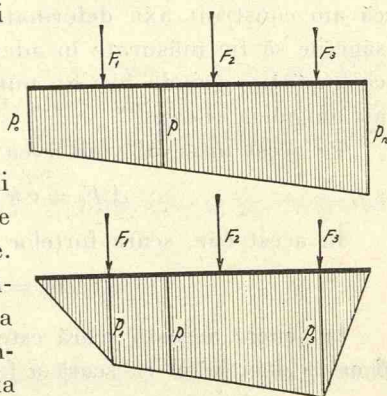


Figura 344

Fie p_0 , p_n și p ordonatele în dreptul extremităților grinzii și într'un punct oarecare al ei. Se observă că p se compune din două segmente: unul cuprins între nivelul terenului și linia extremităților

grinzii deformată și altul cuprins între aceasta din urmă și axa deformată a grinzii. Așa fiind, cu ajutorul celor două ecuații de mai sus, putem afla valorile lui p_0 și p_n și deci o nouă distribuție a lui p .

Având distribuția, deci o nouă curbă de încărcări, putem construi din nou curba momentelor și a axei deformată a grinzii. Urmând calea indicată mai sus, găsim o altă curbă de încărcări și așa mai departe.

Repetăm această operație până ajungem la două curbe de încărcări cari diferă între ele oricât de puțin voim noi. Aceasta este soluția problemei.

În acest mod, am găsit toate valorile lui p și ale momentelor încovoietoare.

Observare. Trebuie să spunem neapărat câteva cuvinte asupra scărilor la care vom executa epura.

Să presupunem că scara lungimilor este $1/a$. Să mai presupunem că am construit axa deformată a grinzii așa că pe epura noastră săgețile să fie măsurate în adevărată mărime. Să mai presupunem că împărțim grinda într'un număr n de părți egale, cari, *pe epură*, au lungimea Δx cm.

Pe acest interval vom avea o forță:

$$\Delta F = \gamma k a \Delta x = p a \Delta x$$

În acest caz, scara forțelor ar fi:

$$1 \text{ cm} = 1 \cdot k a \Delta x \text{ kg}$$

În genere această scară este foarte mică și atunci o mărim de β ori și deci luăm ca scară a forțelor

$$1 \text{ cm} = 1 \cdot k \cdot a \cdot \Delta x / \beta \cdot \text{kg}.$$

Cu o distanță polară de H kg, evaluată la această scară, construim poligonul funicular al forțelor ΔF .

Valoarea acestei distanțe polare în cm, va fi

$$(43) \quad h_1 = 1 \cdot H \cdot \beta / 1 \cdot k \cdot a \cdot \Delta x = H \beta / k a \Delta x$$

Valoarea momentului este:

$$M = m a H$$

dacă m este ordonata curbei momentelor măsurată pe desen în cm.

Suprafața momentelor pe intervalul Δx este:

$$\Omega = m a^2 H \cdot \Delta x$$

și deci scara suprafeței momentelor ar fi:

$$1 \text{ cm} = 1 \cdot a^2 H \cdot \Delta x \text{ kg cm}^2$$

Această scară în genere este mare, o micșorăm de γ ori, și deci scara suprafeței momentelor o vom lua:

$$1 \text{ cm} = 1 \cdot a^2 \gamma H \Delta x \text{ kg cm}^2$$

La această scară, distanța polară $E I$ ar fi reprezentată prin lungimea h_2 , măsurată în cm

$$h_2 = E I / a^2 \gamma H \cdot \Delta x$$

Ca să obținem săgețile în adevărată mărime, trebuie să luăm:

$$h_2 = EI/\alpha^3 \gamma H \Delta x,$$

și pentru a le obține chiar la scara forțelor, deci de β ori mai mari ar trebui să luăm

$$h_2 = EI/\alpha^3 \beta \gamma H \Delta x$$

Această distanță polară în genere este mare, o micșorăm de δ ori, însă atunci ordonatele axei deformate ale grinzii le obținem de δ ori mai mari ca în scara forțelor. Pentru a le introduce în poligonul forțelor le vom micșora de δ ori.

Dacă în h_2 introducem valoarea lui $H \beta$ din (43) și ținem seamă de reducerea δ , obținem relația

$$(44) \quad h_1 h_2 = EI/\alpha^4 \gamma \delta k (\Delta x)^2,$$

h_1 și h_2 măsurându-se în cm.

Cu ajutorul coeficienților de reducere γ și δ , ne putem oricând aranja ca epura să fie executată la dimensiuni convenabile.

În rezumat, operațiunile le conducem în modul următor.

Scara lungimilor se dă pe considerația ca grinda să încapă în cadrul epurii. Împărțim grinda în n intervale de lungime Δx , măsurată în cm *pe epură*. Atât forțele ΔF cât și suprafețele de momente, le vom considera aplicate la jumătatea intervalului Δx . Se face astfel o eroare care însă n'are influență apreciabilă asupra rezultatului.

Ne alegem o scară convenabilă a forțelor și, cu o distanță polară h_1 măsurată în cm și convenabil aleasă, construim curba momentelor.

Cu ordonatele m ale curbei momentelor, măsurate la jumătatea intervalului Δx , reduse de γ ori, construim poligonul suprafeței de momente.

Cu distanța polară h_2 , dată de formula (44), construim axa deformată a grinzii.

Determinăm poziția dreptei AB așa ca suma celor n ordonate, măsurate la jumătatea intervalului Δx , să ne dea — măsurate la scara forțelor — $\delta \Sigma F$. Poziția dreptei AB o vom determina așa ca și ecuația de momente să fie satisfăcută. Odată această operație făcută cu ordonatele axei deformate, reduse de δ ori, construim, la scara forțelor, un nou poligon de forțe.

Procedăm astfel până ajungem la soluție.

Aplicația Nr. 90. O grindă, simplu rezemată la ambele extremități, este formată din mai multe grinzi suprapuse (fig. 346), fiecare din ele fiind caracterizată prin câte un EI diferit. Lunecarea între ele fiind posibilă, cu cât se încarcă fiecare grindă?

Sub acțiunea sarcinilor, în o secțiune oarecare, toate grinzile se lasă în jos cu aceeași cantitate v . Așa fiind, în acea secțiune avem aceeași valoare pentru toate grinzile pentru dv/dx , d^2v/dx^2 și deci pentru ω_z . Dacă fiecare grindă din momentul total M ia $M_1, M_2, \dots$, vom avea evident:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

$$\omega_z = M_1/E_1 I_1 = M_2/E_2 I_2 = \dots = M/\Sigma E_1 I_1$$

relație care ne permite să găsim valorile lui $M_1, M_2, \dots$ adică, cu cât se încarcă fiecare grindă în parte.

Exemplu numeric. O grindă de 4 m deschidere este formată dintr'un profil

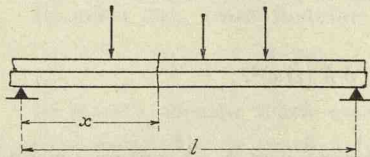


Figura 346

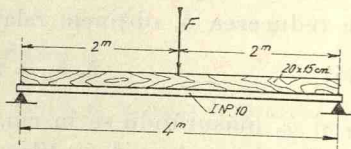


Figura 347

I Nr. 10 peste care este suprapusă o grindă de lemn de 20.15 cm (fig. 347). Ce sarcină concentrată aplicată la mijloc poate suporta grinda, așa ca rezistențele în fier și lemn să nu treacă respectiv de 1200 și 80 kg/cm². Se va lua $E_f = 2 \cdot 10^6$ și $E_l = 0,1 \cdot 10^6$ kg/cm² și cu $I_f = 171$ cm⁴ și $I_l = 10^4$ cm⁴, avem:

$$E_f I_f = 2 \cdot 10^6 \cdot 171 = 342 \cdot 10^6, \quad E_l I_l = 0,1 \cdot 10^6 \cdot 10^4 = 10^9,$$

$$\Sigma EI = 342 \cdot 10^6 + 1000 \cdot 10^6 = 1342 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^2$$

și apoi avem:

$$M_f/M = E_f I_f / \Sigma EI = 342/1342 = 0,255,$$

$$M_l/M = E_l I_l / \Sigma EI = 1000/1342 = 0,745$$

Momentele maxime, ce le pot suporta cele 2 grinzi separat, sunt:

$$M_f = W_f \cdot \mathfrak{R}_f = 34,2 \times 1200 = 41040 \text{ kgcm.}$$

$$M_l = W_l \cdot \mathfrak{R}_l = 1000 \times 80 = 80000 \text{ kgcm.}$$

Din aceste relații deducem pentru M valorile:

$$M = 41040/0,255 = 160800 \text{ și } M = 80000/0,745 = 107400 \text{ kgcm}$$

Așa dar, ca să avem în grinda de lemn rezistența $\mathfrak{R} = 80$ kg/cm², avem nevoie de un moment total de 1074 kgm, dacă depășim această valoare vom depăși $\mathfrak{R} = 80$ kg/cm². Așa dar, rezistența ansamblului este condiționată de rezistența din grinda de lemn.

Sarcina maximă este dată de relația $M = \frac{1}{4} F l$ sau

$$F = 4 M/l = 4 \cdot 1074/4 = 1074 \text{ kg.}$$

Rezistența în grinda de fier va fi numai:

$$\mathfrak{R}_f = 1200 \cdot 1074/1608 = 802 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația Nr. 91. O grindă încadrată în reazimile 0 și 2, are o articulație în secțiunea 1 (fig. 348). Să se găsească reacțiunea din 1.

Dacă n'ar exista articulația, sub acțiunea sarcinilor, cele două bucăți de grindă, din dreapta și din stânga, în secțiunea 1, s'ar lăsa în jos cu cantitățile v_d și v_s . Pentru că grinzile sunt articulate, va trebui să introducem reacțiunile V_1 — ca în figură — așa fel, ca, în dreptul articulației 1, să avem aceeași săgeată, deci $v_s - V_1 l_0^3/3 E_0 I_0 = v_d + V_1 l_2^3/3 E_2 I_2$ de unde scoatem:

$$v_s - v_d = V_1 (l_0^3/E_0 I_0 + l_2^3/E_2 I_2)$$

relație care ne dă valoarea lui V_1 .

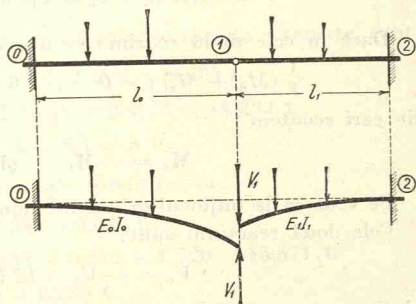


Figura 348

Aplicația Nr. 92. Grinzile 01, 02, ... sunt articulate în punctele 1, 2, ... și încadrate între ele în punctul 0 întocmai ca spițele în butucul unei roți (fig. 349). În 0 se aplică un moment M , normal pe planul grinzilor. Cum se distribuie acest moment la fiecare din grinzii?

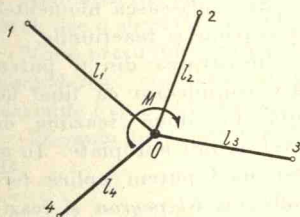


Figura 349

Grinzile fiind încadrate în 0, sub acțiunea lui M , acest punct, și deci toate capetele grinzilor încadrate în 0, se vor roti cu același unghi θ . Vom avea deci:

$$E_1 I_1 l_1 \operatorname{tg} \theta = S_{10} \quad , \quad E_2 I_2 l_2 \operatorname{tg} \theta = S_{20} \dots$$

sau

$$S_{10}/E_1 I_1 l_1 = S_{20}/E_2 I_2 l_2 = \dots$$

Dacă notăm cu $M_1, M_2, \dots$ momentele ce ia fiecare braț, atunci avem:

$$S_{10} = \frac{1}{3} M_1 l_1^2 \quad , \quad S_{20} = \frac{1}{3} M_2 l_2^2, \dots$$

Dacă introducem aceste valori în relația de mai sus și dacă ținem seama că: $M_1 + M_2 + \dots = M$ și notăm:

$$(E_1 I_1/l_1)/\Sigma (E I/l) = k_1 \quad , \quad (E_2 I_2/l_2)/\Sigma (E I/l) = k_2, \dots$$

găsim

$$M_1 = k_1 M \quad , \quad M_2 = k_2 M, \dots$$

cu relația evidentă:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$$

Aplicația Nr. 93. Capătul unei grinzi încadrate la ambele extremități (fig. 350) se lasă în jos, față de celălalt, cu cantitatea v . Grinda fiind neîncărcată, ce momente se dezvoltă în cele două reazime?

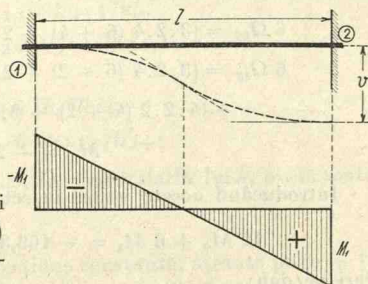


Figura 350

După enunț, grinda rămânând tot încastrată și după deformație vom avea:

$$EI (tg \theta_1 - tg \theta_0) = -\Omega_{10} = 0$$

$$EI (\nu - \nu_0 - l tg \theta_0) = EI \nu = -S_{10}$$

Dacă în cele două reazime se dezvoltă momentele M_0 și M_1 , vom avea:

$$\frac{1}{2} (M_0 + M_1) l = 0 \quad , \quad 6 EI \nu = -(2 M_0 + M_1) l^2$$

din cari scoatem

$$M_0 = -M_1 \quad \text{și} \quad M_1 = 6 EI \nu / l^2$$

Se vede că la mijlocul grinzii momentul este nul.

Cele două reacțiuni sunt:

$$V_0 = -V_1 = 12 EI \nu / l^3 = 2 M_1 / l$$

relație care ne permite să găsim valoarea lui M_1 , când cunoaștem reacțiunea V_0 .

Aplicația Nr. 94. O grindă continuă este încărcată cu sarcinile și are dimensiunile din figura 351. Ea este încastrată în reazimul 0 și simplu rezemată pe celelalte. Toate reazimile sunt de nivel, și $EI = ct$ pe toată lungimea grinzii.

Să se găsească momentele pe reazime și reacțiunile.

Incastrarea din 0 putem să o considerăm ca fiind făcută din două reazime de nivel infinit apropiate. În acest mod putem aplica formula lui Clapeyron și reazimului 0, considerând că la

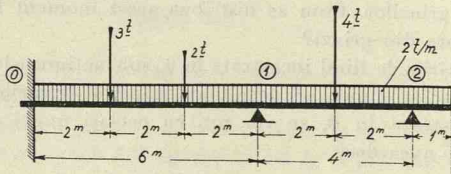


Figura 351

stânga lui am o deschidere $l = 0$. În trecut, amintim că în acest mod putem aplica formula lui Clapeyron și grinzilor încastrate la ambele capete sau grinzii încastrate la un cap și simplu rezemată la celălalt.

Vom avea deci:

$$2.6. M_0 + 6 M_1 + 6 \Omega_{0s} = 0$$

$$6 M_0 + 2.10 M_1 + 4 M_2 + 6 \Omega_{10} = 0$$

în care:

$$6 \Omega_{0s} = [3.2.4 (6 + 4) + 2.2.4 (6 + 2) + 2.6^4/4]/6 = 169,33$$

$$6 \Omega_{1s} = [3.2.4 (6 + 2) + 2.2.4 (6 + 4) + 2.6^4/4]/6$$

$$+ [4.2.2 (4 + 2) + 2.4^4/4]/4 = 222,67$$

$$M_2 = -2.1.1/2 = -1 \text{ tm.}$$

Introducând aceste valori în ecuațiile de mai sus căpătăm:

$$12 M_0 + 6 M_1 = -169,33 \quad \text{și} \quad 6 M_0 + 20 M_1 = -218,67$$

cari ne dau:

$$M_0 = -10,17 \text{ tm} \quad \text{și} \quad M_1 = -7,88 \text{ tm}$$

Necunoscutele static nedeterminate T , pe deschiderile respective, sunt:

$$T_{01n} = (M_1 - M_0)/l_{01} = (10,17 - 7,88)/6 = 0,382 \text{ t}$$

$$T_{12n} = (M_2 - M_1)/l_{12} = (7,88 - 1)/4 = 1,720 \text{ t}$$

Reacțiunile în reazimile 0, 1, 2, considerând grinzile simplu rezemate, sunt:

$$V_{0s} = 2 \times 6/2 + 3.4/6 + 2.2/6 = 8,667 \text{ t}$$

$$V_{1s} = (6.2 + 2 + 3 - 8,667) + (4 + 2.4)/2 = 14,333 \text{ t}$$

$$V_{2s} = (4 + 2.4)/2 + 2.1 = 8 \text{ t}$$

Ținând cont de cantitățile T_n , reacțiunile totale devin:

$$V_0 = V_{0s} + T_{01n} = 8,667 + 0,382 = 9,049 \text{ t.}$$

$$V_1 = V_{1s} - T_{01n} + T_{12} = 14,333 - 0,382 + 1,720 = 15,671 \text{ t.}$$

$$V_2 = V_{2s} - T_{12n} = 8 - 1,720 = 6,280 \text{ t.}$$

Dacă se adună toate reacțiunile se găsește valoarea sarcinilor adică 31 t. Cu elementele găsite putem construi curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare.

Aplicația Nr. 95. O grindă continuă cu secțiune constantă, pe n reazime de nivel, are o singură deschidere încărcată. Să se găsească momentele pe reazime.

Vom presupune încărcată deschiderea cuprinsă între reazimile i și $i + 1$ (fig. 352).

Formula lui *Clapeyron* ne dă:

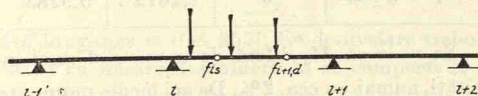


Figura 352

$$M_{i-1} l_{i-1,i} + 2 M_i l_{i-1,i+1} + M_{i+1} l_{i,i+1} = -6 \Omega_{is}$$

$$M_i l_{i,i+1} + 2 M_{i+1} l_{i,i+2} + M_{i+2} l_{i+1,i+2} = -6 \Omega_{i+1,s}.$$

Deschiderile fiind date, putem afla poziția punctelor fixe și deci valorile lui k_{is} , k_{id} .

Ecuția (27) ne dă:

$$M_{i-1} = -k_{i-1,s} M_i, \quad M_{i+2} = -k_{i+2,d} M_{i+1}$$

Dacă introducem aceste valori în ecuațiile de mai sus și dacă ținem seamă de ecuația (29) care ne dă:

$$2 l_{i-1,i+1} - k_{i-1,s} l_{i-1,i} = l_{i,i+1}/k_{is}$$

$$2 l_{i,i+2} - k_{i+2,d} l_{i+1,i+2} = l_{i,i+1}/k_{i+1,d}$$

căpătăm:

$$M_i/k_{is} + M_{i+1} = -6 \Omega_{is}/l_{i,i+1}$$

$$M_i + M_{i+1}/k_{i+1,d} = -6 \Omega_{i+1,s}/l_{i,i+1}$$

două ecuații din cari scoatem pe M_i și M_{i+1} . Având valorile lui k , avem toate celelalte valori ale momentelor.

Aplicația Nr. 96. O grindă continuă, cu secțiune constantă, așezată pe $(n + 1)$ reazime de nivel, este încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea ei. Deschiderile fiind egale, să se găsească momentele pe reazime.

Formula lui *Clapeyron* ne dă:

$$M_{i-1} + 4 M_i + M_{i+1} + \frac{1}{2} p l^2 = 0,$$

o ecuație diferențială cu diferențe finite a cărei soluție este:

$$M_i = A \alpha^i + B \beta^i - p l^2 / 12$$

în care α și β sunt rădăcinile ecuației caracteristice, $x^2 + 4x + 1 = 0$ și anume:

$$\alpha = -2 + \sqrt{3}, \quad \beta = -2 - \sqrt{3},$$

i este rangul reazimului, iar A și B două constante de integrare pe cari le determinăm prin condiția că pentru $i = 0$ și $i = n$ să avem $M_0 = M_n = 0$, adică:

$$A + B = \frac{1}{12} p l^2 \quad \text{și} \quad A \alpha^n + B \beta^n = \frac{1}{12} p l^2$$

Să ne ocupăm de cazul când numărul reazimilor este foarte mare. În acest caz $\alpha^n \simeq 0$ și β^n fiind foarte mare, rezultă și $B \simeq 0$, și deducem $A = \frac{1}{12} p l^2$.

Apoi:

$$M_i = -\frac{1}{12} (1 - \alpha^i) p l^2$$

Să dăm câteva valori ale lui $(1 - \alpha^i)$ începând dela extremitatea grinzii. Avem:

$i =$	0	1	2	3	4	5
$1 - \alpha^i =$	0	1,2679	0,9283	1,0192	0,9949	1,0014

Se vede că M_3 diferă de momentul unei grinzi incastrate la ambele extremități numai cu cca. 2%. De aci încolo momentele sunt sensibil egale cu $-\frac{1}{12} p l^2$.

Aplicația Nr. 97. O grindă continuă cu două deschideri egale (fig. 353) suportă două sarcini F , simetric așezate față de reazimul din mijloc.

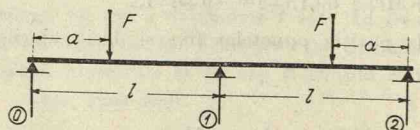


Figura 353

Ce poziție trebuie să ocupe sarcinile pentru ca cele 3 reacțiuni să fie egale?

Dacă reacțiunile sunt egale, atunci fiecare din ele este egală cu $\frac{2}{3} F$ și avem de exemplu $V_0 = \frac{2}{3} F$. Inșă

$$V_0 = (l - a) F / l + M_1 / l$$

Formula lui *Clapeyron* ne dă:

$$4 M_1 + 6 \Omega_{1s} / l = 0$$

în care

$$6 \Omega_{1s} = 2 F a (l - a) (l + a) / l$$

Dacă se pun aceste valori în expresia lui V_0 și dacă notăm $a/l = \alpha$, obținem:

$$3 \alpha^3 - 9 \alpha + 2 = 0$$

a cărei rădăcină acceptabilă este:

$$\alpha = a/l = 0,226$$

Aplicația Nr. 98. O grindă continuă cu două deschideri egale, suportă două sarcini F , așezată fiecare la mijlocul deschiderii respective.

Ce denivelare trebuie dată reazimului din mijloc pentru ca cele trei reacțiuni să fie egale (fig. 354)?

Dacă în ecuația (25) punem:

$$6 \Omega_{1s} = \frac{3}{4} F l^3$$

găsim:

$$M_1 = -\frac{3}{16} F + 3 EI v_1 / l^3$$

Reacțiunea V_0 trebuind să fie egală cu $\frac{2}{3} F$, vom avea

$$\frac{2}{3} F = \frac{1}{2} F - \frac{3}{16} F + 3 EI v_1 / l^3$$

de unde:

$$v_1 = 17 F l^3 / 144 EI.$$

Aplicația Nr. 99. O grindă continuă cu două deschideri egale, suportă o

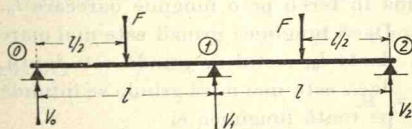


Figura 354

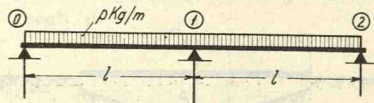


Figura 355

sarcină uniform distribuită pe toată lungimea ei (fig. 355). Ce denivelare trebuie să dăm reazimului din mijloc, pentru ca fiecare deschidere să se comporte ca o grindă independentă?

Pentru aceasta este suficient ca să avem $M_1 = 0$.

Dacă în ecuația (25) ținem cont de această condiție și dacă punem:

$$6 \Omega_{1s} = \frac{1}{2} p l^3,$$

obținem:

$$v_1 = p l^4 / 24 EI = p (2 l)^4 / 384 EI$$

Dacă grinda ar fi simplu rezemată pe deschiderea $2 l$, adică dacă n'ar exista reazimul din mijloc, atunci săgeata în dreptul aceluia reazim ar fi

$$5 p (2 l)^4 / 384 EI$$

Prin urmare, dacă reazimul cedează numai cu a cincea parte din această săgeată, care și ea este destul de mică, atunci $M_1 = 0$. De aci se vede marea importanță a denivelării reazimilor.

Aplicația Nr. 100. O grindă orizontală, infinit de lungă, așezată pe un teren elastic, suportă undeva o sarcină verticală F (fig. 356). Să se găsească presiunea pe teren și momentul încovoietor.

Vom determina constantele de integrare, curbă axei deformate a barei fiind simetrică față de F (ecuațiile: 40, 41 și 42).

Pentru $x = \infty$, adică $a_x = b_x = \infty$, $c_x = d_x = 0$ trebuie să avem: $v = 0$, $dv/dx = 0$, $T = 0$ și $M = 0$, de unde rezultă $A = B = 0$.

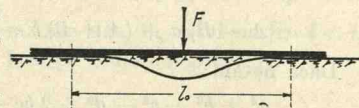


Figura 356

Pentru $x = 0$, adică $a_x = c_x = 1$, $b_x = d_x = 0$, trebuie să avem: $dv/dx = 0$, $T = -\frac{1}{2} F$, din cari scoatem $C = D = aF/2k$.

Așa dar, avem:

$$\begin{aligned} v &= a F e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) / 2k \\ M &= F e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) / 4a \end{aligned}$$

cari în origine ne dau valorile maxime:

$$p = -\frac{1}{2} a F, \quad M = F/4a$$

Problema nu este reală pentru că dincolo de $ax = \frac{3}{4}\pi$, p este pozitiv ceea ce nu este cazul în realitate.

Aplicația Nr. 101. Aceeași problemă presupunând că grinda de lungime l suportă la mijlocul ei sarcina F (fig. 357).

Vom face abstracție de greutatea grinzii.

Sub acțiunea forței F , grinda se înfundă în teren pe o lungime oarecare l_0 .

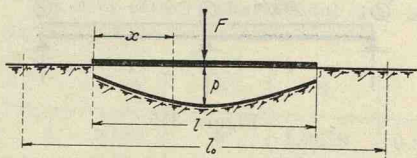


Figura 357

Dacă lungimea grinzii este mai mare decât l_0 , restul de grindă este inutil, dacă este mai mică grinda se înfundă pe toată lungimea ei.

Calculul nostru va fi corect ori de câte ori vom găsi, pe tot intervalul dela mijlocul grinzii până la capetele ei, $v \geq 0$.

Lungimea l_0 corespunde cazului când în aceste condițiuni avem la capetele grinzii $v = 0$. Așa dar, în calculele noastre va trebui să avem oricând $l \leq l_0$.

Axa deformată a grinzii va fi o curbă simetrică față de mijlocul ei.

Luăm originea axelor în extremitatea grinzii.

Pentru $x = 0$, adică $a_x = c_x = 1$, $b_x = d_x = 0$, avem $T = 0$, $M = 0$, și deci:

$$A - B = C + D, \quad B = D$$

Pentru $x = \frac{1}{2} l$, avem $dv/dx = 0$, și deci:

$$(A + B)a - (A - B)b - (C - D)c - (C + D)d = 0$$

unde a, b, c și d sunt valorile corespunzătoare mijlocului grinzii.

Dacă notăm:

$$n = b + c + d - a$$

avem:

$$A = D(a + b + 3c + d)/n, \quad C = D(3a - b + c - d)/n$$

Tot pentru $x = \frac{1}{2} l$, imediat la stânga forței F , avem: $T = \frac{1}{2} F$, deci:

$$(A - B)a + (A + B)b - (C + D)c + (C - D)d = aF/k$$

Dacă notăm:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2bc + 2ad = 2(\sin al + \sin al) = 2\gamma$$

găsim:

$$D/n = aF/4k\gamma$$

Așa dar, am găsit valoarea constantelor de integrare.

Să găsim acum valoarea lui ν , deci a lui p , la extremitatea grinzii și în dreptul sarcinei. Le notăm respectiv cu ν_0 , p_0 și ν , p .

Pentru $x = 0$, adică $a_x = c_x = 1$, $b_x = d_x = 0$, făcând calculele și notând

$$\beta_0 = 4 ch \left(\frac{1}{2} al \right) \cos \left(\frac{1}{2} al \right) / \gamma$$

găsim:

$$p_0 = -\frac{1}{2} a \beta_0 F$$

În dreptul sarcinei dacă se face calculul și se notează:

$$\beta = (2 + ch al + \cos al) / \gamma$$

găsim:

$$p = -\frac{1}{2} a \beta F$$

Să găsim valoarea momentului în dreptul sarcinei.

Dacă în expresia $EI d^2\nu/dx^2 = -M$ introducem valorile a , b , c , d cari corespund lui $x = \frac{1}{2} l$ și constantele de integrare și dacă notăm:

$$\mu = (chal - \cos al) / \gamma$$

găsim:

$$M = \mu F / 4a$$

Valoarea lui p_0 va fi nulă atunci când vom avea $\cos \left(\frac{1}{2} al \right) = 0$. Valoarea lui l , dată de această condiție, este tocmai l_0 și deci

$$al_0 = \pi$$

Am găsit, așa dar, lungimea maximă utilă a grinzii. Dacă se urmăresc formulele, se constată că pentru această lungime, l_0 , valoarea lui p atinge un minim iar M un maximum. În cazul când $l = l_0$, avem $\beta = \mu = 1,09$.

Dacă se compară rezultatele, din acest caz, cu acelea ale grinzii infinit de lungă, se constată că ele diferă numai cu 9%. Așa dar, n'avem niciun interes să dăm grinzii o lungime mai mare ca l_0 .

Aplicație numerică. O grindă de lemn cu secțiunea $20 \times 15 \text{ cm}^2$ și lungă de 1,20 m este așezată pe lat pe un teren elastic. Ea suportă la mijlocul ei o sarcină concentrată de $F = 4,5 \text{ t}$. Dacă terenul se lasă în jos cu 0,25 mm pentru fiecare kg/cm^2 și dacă $E_l = 0,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, să se găsească presiunile pe teren și valoarea momentului maxim.

După formulele (35) și (36) avem:

$$E_l = 1/0,025 = 40 \text{ kg/cm}^3, \quad k = 20 \cdot E_l = 800 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{Mai avem } I = 20 \cdot 15^3 / 12 = 5625 \text{ cm}^4.$$

Calculăm:

$$a^4 = k/4 EI = 800/4 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 5625 = 35,56 \cdot 10^{-8} / \text{cm}^4 \quad \therefore a = 2,44 \cdot 10^{-2} / \text{cm}.$$

Valoarea lui l_0 este: $l_0 = \pi/a = 1,287 \text{ m}$. Așa dar, în cazul nostru $l < l_0$, deci contactul între grindă și teren se va face pe toată lungimea ei.

Avem:

$$al = 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 120 = 2,928, \quad \frac{1}{2} al = 1,464$$

$$ch al = 9,372; \quad \cos al = -0,977; \quad sh al = 9,318; \quad \sin al = 0,212$$

$$ch \left(\frac{1}{2} al \right) = 2,277; \quad \cos \left(\frac{1}{2} al \right) = 0,107.$$

Cu aceste valori găsim:

$$\gamma = 9,530 \quad , \quad \beta_0 = 0,102 \quad , \quad \beta = 1,091 \quad , \quad \mu = 1,088$$

$$p_0 = -5,62 \text{ kg/cm.} \quad ; \quad p = -60 \text{ kg/cm.} \quad ; \quad M = 50200 \text{ kg. cm.}$$

$$\varkappa_0 = -0,28 \text{ kg/cm}^2. \quad ; \quad \varkappa = -3 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă se verifică rezistența în grinda de lemn, se găsește $\varkappa = 66,8 \text{ kg/cm}^2$.

Dacă am considera grinda rigidă și o distribuție uniformă a presiunilor găsim $\varkappa = 1,87 \text{ kg/cm}^2$, deci un rezultat care diferă cu circa 40 % de cel real.

Acest exemplu numeric justifică utilitatea calculului indicat.

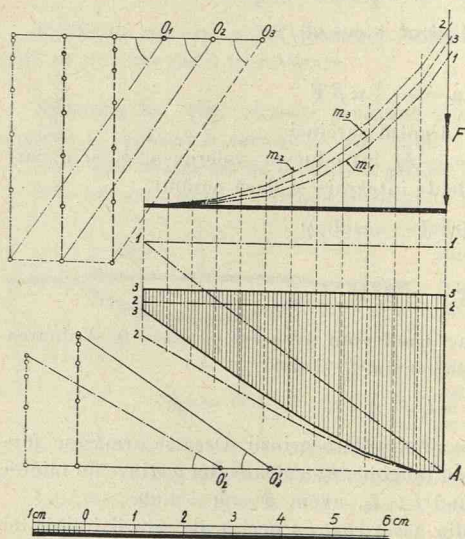


Figura 358

Rezolvarea grafică. Incărcarea și grinda fiind simetrice față de mijlocul grinzii, vom face construcția numai pentru o jumătate de grindă (fig. 358). Avem $l/2 = 60 \text{ cm}$. Luăm scara lungimilor $1/10$, deci $a = 10$. Impart grinda în 6 părți egale, deci pe desen avem $\Delta x = 1 \text{ cm}$.

Luăm scara forțelor $1 \text{ cm} = 500 \text{ kg}$. La această scară forța $A \frac{1}{2} F = 2250 \text{ kg}$ este reprezentată prin $4,5 \text{ cm}$. Distanța polară o luăm pe desen $h_1 = 3 \text{ cm}$.

În aceste condițiuni din formula (44) deducem:

$$h_2 = EI/h_1 \alpha^4 \gamma \delta k (\Delta x)^2 = 5625 \cdot 0,1 \cdot 10^6 / 3 \cdot 10^4 \cdot \gamma \cdot \delta \cdot 800 \cdot 1^2 = 23,4375 / \gamma \delta \text{ cm.}$$

Dacă ordonatele curbei de momente le împart prin $\gamma = 2$, ca să avem poligonul suprafeței de momente și dacă distanța polară o iau de $\delta = 3$ ori mai mică, atunci obținem: $h_2 = 3,90625 \text{ cm}$.

Prin urmare ordonatele axei deformată a grinzii împărțite prin $\delta = 3$ și evaluate la scara forțelor ne dă valoarea forțelor ΔF , care acționează pe intervalul Δx de pe desen.

Acestea fiind stabilite procedăm la executarea epurei.

Presupunem întâi că distribuția lui p se face după triunghiul A11. Valoarea maximă a lui p va fi $2 \cdot 2250 / 60 = 75 \text{ kg/cm}$. Forța ΔF corespundătoare este:

$$\Delta F = p \alpha \Delta x = 75 \cdot 10 \cdot 1 = 750 \text{ kg}$$

care evaluată la scara forțelor ne dă pe epura $\Delta F = 1,5 \text{ cm}$. În poligonul axei deformată vom lua $A1 = \delta \cdot 1,5 = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ cm}$. Așa dar, am găsit dimensiunile triunghiului A11. Cu ordonatele acestui triunghi măsurate la jumătatea intervalului Δx și împărțite prin $\delta = 3$, facem primul poligon de forțe și primul lor poligon funicular care ne dă momentele încovoietoare m_1 .

Cu ordonatele acestui poligon de momente măsurate la jumătatea intervalului

lului Δx și împărțite la $\gamma = 2$, căpătăm poligonul suprafeței momentelor. Cu distanța polară h_2 , construim prima axă deformată a grinzii: curba $A 2$. Vom duce acum dreapta 22 așa fel ca suma ordonatelor măsurate în același fel și împărțite prin $\delta = 3$ să ne dea 2250 kg, adică 4,5 cm.

Odată fixată linia 22, putem face al doilea poligon funicular de momente m_2 .

Pentru a micșora numărul încercărilor poligonul suprafeței de momente îl construim cu ordonatele $m_2 - \frac{1}{3}(m_2 - m_1)$, pe cari le împărțim evident prin $\gamma = 2$. Obținem axa deformată $A 3$ și în aceleași condițiuni obținem dreapta 33. Construim apoi poligonul de momente m_3 .

Judecând după poziția dreptelor 11, 22, și 33 din încercările făcute, bănuim că dreapta 44 va fi foarte apropiată de 33 și deci ne oprim aci cu încercările.

Pe epură cetim: $A 3 = 3,54$ cm, $33 = 0,33$ cm, cari împărțite prin $\delta = 3$, ne dau $A 3 = 1,18$ cm și $33 = 0,11$ cm. Acestea evaluate la scara forțelor ne dau respectiv: $\Delta F = 590$ kg, $\Delta F = 55$ kg, din care deducem $p = 59$ kg/cm și $p_0 = 5,5$ kg/cm. Acestea ne dau $\pi = 2,95$ kg/cm² și $\pi_0 = 0,28$ kg/cm².

Ordonata maximă a curbei momentelor m_3 , este 3,34 cm, care ne dă momentul $M = 1500 \cdot 10 \cdot 3,34 = 50100$ kg cm.

Dacă se compară aceste rezultate cu acelea ale calculului exact se constată că chiar dela a treia încercare obținem rezultate aproape exacte, și că metoda grafică duce relativ foarte repede la soluția definitivă.

XXIII. GRINZI CURBE SAU ARCE.

A) Determinarea rezistențelor în secțiunea unui arc.

Ne vom ocupa de arcele plane, solicitate la sarcini situate în planul lor.

Vom presupune că rezultanta grupului de forțe dela stânga secțiunii considerate se reduce la o forță axială N și un moment încovoietor M , ambele pozitive.

Semnele lor pozitive sunt fixate după normele stabilite până acum și sunt cele indicate pe figura 359.

Ca și la grinzile drepte, vom presupune și aci că avem de aface cu corpuri cari *ascultă de legea lui Hooke și că ipoteza lui Bernoulli este de asemenea aplicabilă.*

Vom mai presupune că $\bar{M}$ coincide cu o axă principală a secțiunii.

Vom presupune că axa arcului — adică succesiunea centrelor de greutate a secțiunilor — are raza r .

1. Determinarea rezistențelor.

a) Legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune.

De pe figură se vede că secțiunea B_0B o aducem în poziția deformată, DC_0 , prin o *deplasare de translație* B_0C_0 după axa arcului și apoi *printr'o rotație în jurul centrului de greutate*, care produce unghiul CC_0D .

În aceste condițiuni, lungirea specifică a fibrei AB va fi:

$$\varepsilon = BD/AB = (BC + CD)/AB.$$

Să evaluăm cantitățile din această formulă.

De pe figură se vede că: $AB = (r - y) d\theta$.

Dacă axa piesei are lungirea specifică ε_0 , atunci se vede că

$$BC = B_0C_0 = \varepsilon_0 ds = \varepsilon_0 r d\theta.$$

Vom denumi încovoiere specifică, întocmai ca la grinzile drepte, unghiul cu care se rotesc între ele două secțiuni cari se găsesc la distanța $ds = 1$, și atunci unghiul $C-C_0D$ are valoarea ωds . În aceste condițiuni: $CD = y \omega ds$.

Deducem:

$$(1) \quad \varepsilon = (\varepsilon_0 + \omega y) r / (r - y)$$

Așa dar, am găsit legea de distribuție a lungirilor specifice pe secțiune.

Dacă corpul ascultă de legea lui Hooke, avem evident

$$(2) \quad \mathfrak{X} = E \varepsilon = E(\varepsilon_0 + \omega y) r / (r - y)$$

Deci rezistențele nu se mai distribuiesc linear pe secțiune, ci după o hiperbolă.

Să găsim valoarea lor.

Vom scri ecuațiile de echilibru:

$$(3) \quad \int \mathfrak{X} d\Omega = N \text{ și } \int \mathfrak{X} y d\Omega = M$$

în cari introducem valoarea lui $\mathfrak{X}$.

Dacă notăm:

$$(4) \quad \int y d\Omega / (r - y) = k \Omega$$

atunci rezultă:

$$(4) \quad \int r d\Omega / (r - y) = (1 + k) \Omega, \quad \int y^2 d\Omega / (r - y) = k r \Omega$$

pentru că $\int y d\Omega = 0$, într-un câmp y se măsoară dela axa z care trece prin centrul de greutate al secțiunii. Ultima formulă (4) putem s'o punem și sub forma:

$$(4) \quad r \int y^2 d\Omega / (r - y) = k r^2 \Omega = I_1$$

pentru că nu-i altceva decât un moment de inerție în raport cu centrul de greutate al secțiunii, însă a cărei ordonată y se multiplică cu raportul $r/(r - y)$.

Coeficientul k , definit ca mai sus, este funcțiune de forma și dimensiunile secțiunii și arcului.

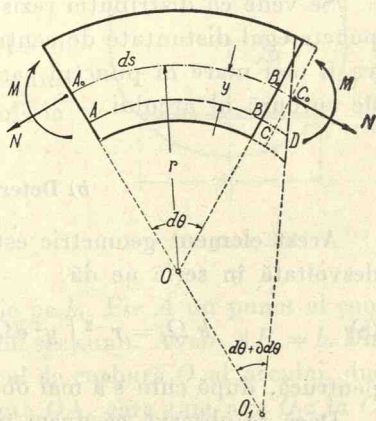


Figura 359

Dezvoltând ecuațiile (3) avem:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 (1 + k) + \omega r k &= N/E\Omega \\ \varepsilon_0 k + \omega r k &= M/rE\Omega \end{aligned}$$

din cari scoatem:

$$(6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= (N - M/r)/E\Omega \\ \omega &= M/EI_1 - (N - M/r)/r E\Omega \\ \varepsilon_0 + \omega r &= M r/EI_1 \end{aligned}$$

cari, introduse în (2), ne dau:

$$(7) \quad \mathcal{X} = (N - M/r)/\Omega + My r/I_1 (r - y)$$

valoarea rezistenței în fiecare punct al secțiunii.

Se vede că distribuția rezistențelor nu este liniară și că în două puncte egal distanțate de centrul de greutate al secțiunii, rezistența va fi mai mare în punctul care se găsește mai aproape de centrul de curbura al arcului.

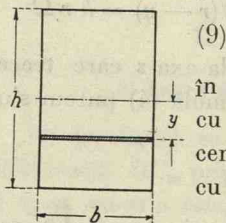
b) Determinarea lui k .

Acest element geometric este definit de prima ecuație (4), care dezvoltată în serie ne dă:

$$(8) \quad k \Omega = r^{-2} \int y^2 d\Omega + r^{-3} \int y^3 d\Omega + \dots$$

pentru că, după cum s'a mai observat, $\int y d\Omega = 0$.

Dacă se observă că avem totdeauna $y/r < 1$, și dacă se neglijează termenii ce conțin pe y/r la o putere mai mare ca 2, obținem pentru k valoarea aproximativă:



$$(9) \quad k = i^2/r^2$$

în care i este raza de girație a secțiunii în raport cu o axă paralelă cu axa neutră trecând prin centrul de greutate. Foarte adeseaori ne mulțumim cu această valoare.

Figura 360

Pentru secțiuni simple, găsim și pentru k valori exacte, relativ simple.

De exemplu, pentru un dreptunghi (fig. 360) făcând calculele arătate de (4), obținem direct:

$$(10) \quad k = (1/bh) \int [y b/(r - y)] dy = (r/h) \lg [(2r + h)/(2r - h)] - 1$$

Pentru o secțiune circulară (fig. 361), de diametru d , aplicând dezvoltarea (8), cu:

$$y = \frac{1}{2} d \sin \alpha, \quad b = d \cos \alpha, \quad d\Omega = \frac{1}{2} d^2 \cos^2 \alpha \cdot d\alpha$$

căpătăm:

$$\int y^2 d\Omega = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^4; \quad \int y^4 d\Omega = \frac{1}{8} \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^6; \quad \int y^6 d\Omega = \frac{5}{64} \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^8$$

cari ne dau:

$$(11) \quad k = \frac{1}{4} (d/2)^2 + \frac{1}{8} (d/2)^4 + \frac{5}{64} (d/2)^6 + \dots$$

Determinarea lui k pentru secțiuni mai complicate e mai dificilă.

Grafic aceasta se face foarte ușor, căci n'avem decât să efectuăm pe această cale, integrala arătată de ecuația (4).

Dacă împărțim suprafața secțiunii în fâșii paralele cu axa $O_1 z$ (fig. 362), atunci avem $d\Omega = b dy$ și termenul de sub integrală are valoarea:

$$dy \cdot b \cdot y / (r - y) = b_1 dy$$

în care am notat:

$$b_1 = b y / (r - y)$$

N'avem decât să construim grafic pe b_1 . Fie A un punct al conturului secțiunii. Avem $AB = b$. Din centrul de curbura O al arcului, duc dreapta OA , care taie axa $O_1 z$ în C . Din C duc o paralelă la $O_1 y$ care taie pe AB în A_1 .

De pe figură se vede că AA_1 este tocmai b_1 , și deci:

$$k \Omega = \int b_1 dy$$

Așa dar, suprafața cuprinsă între conturul secțiunii—descriș de punctul A —și între curba descrișă de punctul A_1 , construit cum s'a indicat, ne dă valoarea lui $k \Omega$.

În regiunea lui $+y$, suprafața este pozitivă, în aceea a lui $-y$, negativă, deci se va face diferența lor.

Valoarea lui k este în genere mică,

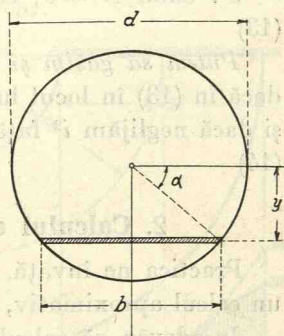


Figura 361

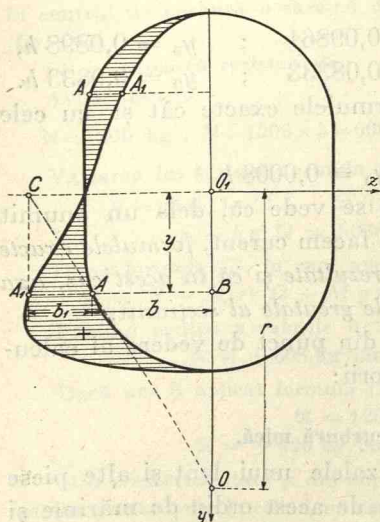


Figura 362

c) Poziția axei neutre.

Axa neutră va fi acolo unde $\mathfrak{X} = 0$, și ecuația (7) ne dă ordonata y_0 a poziției axei neutre:

$$(12) \quad y_0 = k r (M - r N) / [M + (M - r N) k]$$

Avem de făcut câteva observațiuni.

1^o. Se vede că $y_0 = 0$ când $M = r N$, adică, atunci când avem o forță N aplicată în centrul de curbură al arcului.

2^o. Când $M = 0$, găsim $y_0 = r$, adică axa neutră trece prin centrul de curbură al arcului.

3^o. Când $N = 0$, căpătăm:

$$(13) \quad y_0 = k r / (1 + k)$$

Putem să găsim și o valoare aproximativă a lui y_0 . În adevăr, dacă în (13) în locul lui k punem valoarea sa aproximativă din (9) și dacă neglijăm i^2 față de r^2 , găsim:

$$(14) \quad y_0 = i^2 / r$$

2. Calculul exact și aproximativ al arcelor.

Practica ne învață, că pentru anumite arce, putem să aplicăm un calcul aproximativ, care să fie foarte apropiat de cel exact.

În adevăr, să calculăm valorile lui k și y_0 pentru un arc de secțiune dreptunghiulară, de înălțime h , în două cazuri, pentru $r = h$ și $r = 10 h$, cu formulele exacte (10) și (13) și cu formulele aproximative (9) și (14) și să comparăm rezultatele.

1^o. În cazul $r = h$, avem:

Cu formulele exacte: $k = 0,09861$; $y_0 = 0,0898 h$,

Cu formulele aproximative: $k = 0,08333$; $y_0 = 0,0833 h$.

2^o. În cazul $r = 10 h$, atât cu formulele exacte cât și cu cele aproximative, obținem:

$$k = 0,0008 \quad , \quad y_0 = 0,0008 h$$

Din comparația acestor rezultate se vede că, dela un anumit raport r/h , în limita aproximațiilor ce facem curent, *formulele exacte și cele aproximative ne duc la aceleași rezultate și că în acest caz, axa neutră trece foarte aproape de centrul de greutate al secțiunii.*

Bazați pe această considerațiune, din punct de vedere al calculului, arcele se împart în două categorii:

a) Arce cu raza de curbură mică.

Așa sunt cârligele de tracțiune, zalele unui lanț și alte piese similare la cari raportul r/h este cam de acest ordin de mărime și pe cari le vom calcula după formulele exacte.

b) Arce cu raza de curbura mare.

Așa sunt arcele unui pod boltit și alte piese similare, la cari raportul r/h este cam de acest ordin de mărime și pe cari le vom calcula cu formulele aproximative ce le stabilim precum urmează:

Dacă în expresia lui I_1 din formula (4), punem valoarea aproximativă a lui k din (9), avem:

$$I_1 = i^2 \Omega = I$$

adică, I_1 este egal cu I : momentul de inerție al secțiunii în raport cu centrul ei de greutate.

În acest caz, formula (7) se transformă în:

$$(15) \quad \mathfrak{K} = (N - M/r)/\Omega + M y r / I(r - y)$$

Dacă, în această formulă, se neglijează valoarea lui y față de r , și a lui M/r față de N , se obține:

$$(16) \quad \mathfrak{K} = N/\Omega + M y / I$$

adică, tocmai formula după care calculăm grinzile drepte.

În practică pentru arcele cu raza de curbura mare se aplică formula (16).

Aplicația Nr. 102. Un arc de secțiune 5×4 cm, cu raza de $r = 5$ cm, are aplicat în centrul de curbura o sarcină de 1200 kg (fig. 363).

Să se găsească rezistențele.

Avem deci:

$$N = 1200 \text{ kg}, \quad M = 1200 \times 5 = 6000 \text{ kgcm.}$$

Valoarea lui k după formula (10), este

$$k = (5/5) \lg [(2.5 + 5)/(2.5 - 5)] - 1 = \lg 3 - 1 = 0,09861$$

$$I_1 = k r^2 \Omega = 0,09861 \times 5^2 \times 4.5 = 49,305 \text{ cm}^4$$

După formula (7), în care avem $N - M/r = 0$, găsim:

$$\mathfrak{K} = (N - M/r)/\Omega + M y r / I_1 (r - y) = 6000.5.y / 49,305 (5 - y)$$

Punând pentru y valorile $\pm 2,5$ cm, avem

$$\mathfrak{K} = +608 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{și} \quad \mathfrak{K} = -203 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă am fi aplicat formula (16) am fi căpătat:

$$\mathfrak{K} = 1200/20 \pm 6000/16,67$$

$$\mathfrak{K} = +420 \text{ kg/cm}^2, \quad \mathfrak{K} = -300 \text{ kg/cm}^2$$

Din aceste rezultate și din curbele trasate pe figura 363, unde se arată variația rezistențelor în cele două cazuri, se vede că rezultatele diferă foarte mult, formula aproximativă dând erori până la 50%.

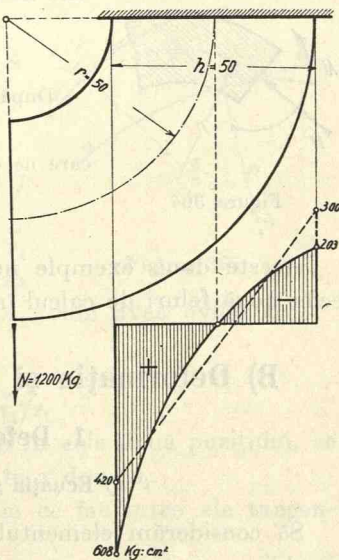


Figura 363

Aplicația Nr. 103. Un arc de beton simplu, cu secțiunea $b h = 1 \times 0,6 \text{ m}^2$, este supus la un moment $M = 6 \text{ tm}$ și o forță axială $N = -75 \text{ t}$ (fig. 364). În secțiunea considerată avem $r = 20 \text{ m}$.

După calcul exact, avem:

$$k = \frac{1}{5}(0,6/2 \cdot 20)^2 + \frac{1}{5}(0,6/2 \cdot 20)^4 + \dots = 75,010125 \cdot 10^{-6}$$

După calculul aproximativ, avem:

$$k = 0,6^2/12 \cdot 20^2 = 75 \cdot 10^{-6}$$

deci sensibil egale. În acest caz avem

$$I_1 = I = 1 \cdot 0,6^3/12 = 180 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

După formula (15) avem:

$$\varkappa = -(75 + 6/20)/0,6 \pm 6 \cdot 0,3 \cdot 20 \cdot 10^4/180 (20 \mp 0,3)$$

care ne dă rezistențele maxime

$$\varkappa_1 = -125,5 - 98,5 = -224 \text{ t/m}^2$$

$$\varkappa_2 = -125,5 + 101,5 = -24 \text{ t/m}^2$$

După formula aproximativă (16), avem:

$$\varkappa = -75/0,6 \mp 6 \cdot 0,3 \cdot 10^4/180$$

care ne dă:

$$\varkappa_1 = -125 - 100 = -225 \text{ t/m}^2$$

$$\varkappa_2 = -125 + 100 = -25 \text{ t/m}^2$$

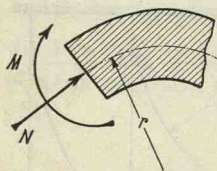


Figura 364

Aceste două exemple numerice dau justificarea întrebuirii celor două feluri de calcul în fiecare caz.

B) Deformația și lucrul mecanic al arcelor.

1. Deformația arcelor.

a) Ecuația generală de deformare.

Să considerăm elementul de arc $ds = r d\theta$ care formează axa arcului.

După deformație toate elementele componente au variat și vom avea:

$$\partial ds = \partial r \cdot d\theta + r \partial d\theta$$

Însă $\partial ds = \varepsilon_0 ds$ și $\partial d\theta = -\omega ds$. Aceasta din urmă se vede că este negativă pentru că $d\theta$ scade când M este pozitiv (fig. 359).

Dacă punem aceste valori în ecuația de mai sus și dacă ținem seamă de ultima ecuație (6), avem:

$$(17) \quad \partial r/r^2 = M/E I_1$$

Dacă notăm cu r_1 raza de curbura a arcului după deformație, și ținem seamă că $\partial r/r^2 = -\partial(1/r)$ avem:

$$(18) \quad 1/r - 1/r_1 = M/E I_1$$

ecuație identică cu aceea dela grinzile drepte, la cari, în starea nedeformată, avem $r = \infty$.

b) Ecuția axei deformate a arcului.

În mod obișnuit, această ecuație este complicată, pentru că depinde de ecuația arcului în starea lui nedeformată. Chestiunea se simplifică dacă luăm ca reper chiar axa arcului în starea lui inițială.

Ecuția arcului în stare nedeformată, este:

$$(19) \quad \bar{r}'' = \bar{v}/r,$$

în care $\bar{r}$ este raza vectoare care unește un reper oarecare O cu A , r raza de curbură și $\bar{v}$ direcțiunea normalei în A (fig. 365).

Prin deformațiunea arcului, punctul A ajunge în A_1 parcurgând drumul

$$(20) \quad AA_1 = \vec{j} = u\bar{\theta} + v\bar{v}$$

în care u și v sunt componentele lui $\vec{j}$ după direcțiile $\bar{\theta}$ și $\bar{v}$.

Dacă în starea deformată notăm cu $\bar{r}_1$ raza vectoare dela acelaș reper O , r_1 raza de curbură și $\bar{v}_1$ direcția normalei din A_1 vom avea evident:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \vec{j}$$

și

$$(19) \quad \bar{r}_1'' = \bar{r}'' + \vec{j}'' = \bar{v}_1/r_1$$

Comparând ecuațiile (19) ale arcului în cele două pozițiuni, se vede că în prima avem variabila s , iar în a doua s_1 .

Dacă notăm cu θ unghiul foarte mic ce fac între ele tangentele în A și A_1 , atunci avem:

$$(21) \quad ds_1^2 = (1 + du/ds)^2(1 + tg^2\theta)ds^2 \simeq ds^2$$

neglijând în paranteze valorile lui $du/ds = \varepsilon_0$ și $tg^2\theta$ față de 1.

În aceste condițiuni, din (20), deducem:

$$(22) \quad \vec{j}' = \bar{\theta} du/ds + \bar{v} u/r + \bar{v} dv/ds - \bar{\theta} v/r$$

Momentul încovoietor pozitiv, după convențiile admise până acum, rotește tangenta $\vec{j}'$ în sensul dela $\bar{v}$ către $\bar{\theta}$ și la noua derivare ce o facem trebuie să ținem seama că avem $d\bar{v}/ds = \bar{\theta}/r$ și $d\bar{\theta}/ds = -\bar{v}/r$. Avem deci

$$(23) \quad \vec{j}'' = \bar{\theta} (d^2u/ds^2 + u/r^2) + \bar{v} (d^2v/ds^2 + v/r^2)$$

Introducând această expresie în a doua ecuație (19) căpătăm

$$(24) \quad \bar{\theta}(d^2u/ds^2 + u/r^2) + \bar{v}(d^2v/ds^2 + v/r^2) = \bar{v}_1/r_1 - \bar{v}/r.$$

Dacă multiplicăm această ecuație pe rând scalar cu $\bar{\theta}$ și $\bar{v}$, dacă

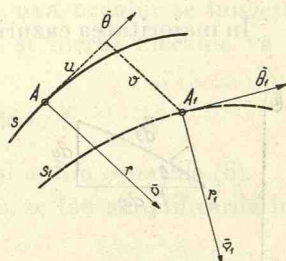


Figura 365

facem aproximația $\bar{v} \bar{v}_1 \simeq 1$, $\bar{\theta} \bar{v}_1 = \sin \theta = \operatorname{tg} \theta = dv/ds$ și ținem seama de ecuația (18), avem:

$$(25) \quad \begin{aligned} d^2u/ds^2 + u/r^2 &= dv/r_1 ds \\ d^2v/ds^2 + v/r^2 &= -M/EI_1 \end{aligned}$$

ecuații absolut similare celorla dela grinzile drepte, cărora li s'au adăugat termenii de corecție u/r^2 și v/r^2 .

În prima ecuație (25) se face evident și aproximația punând $r_1 \simeq r$.

* * *

În majoritatea cazurilor, arcul în stare nedeformată este raportat la un sistem de axe rectangular și ne propunem să găsim deformația arcului în raport cu aceste axe. Deplasările după cele două axe, Ox și Oy , le notăm respectiv cu u și v .

Avem:

$$(26) \quad dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta$$

Dacă luăm variația acestor două expresii, avem:

$$\begin{aligned} \partial dx &= \partial ds \cdot \cos \theta - ds \sin \theta \cdot \partial \theta \\ \partial dy &= \partial ds \cdot \sin \theta + ds \cos \theta \cdot \partial \theta \end{aligned}$$

Dacă integrăm aceste expresiuni între limita inferioară, zero și o limită superioară fixată prin x , y sau s , dacă ținem seamă că $\int \partial dx = u$, $\int \partial dy = v$, dacă mai ținem seamă că $\partial ds = \varepsilon_0 ds$, $\partial \theta = \omega ds$, și dacă facem integrarea prin părți, obținem:

$$(27) \quad u = \int_0^x \varepsilon_0 dx + \int_0^s y \omega ds - \left[y \partial \theta \right]_0^y$$

$$(28) \quad v = \int_0^y \varepsilon_0 dy - \int_0^s x \omega ds + \left[x \partial \theta \right]_0^x$$

în cari introducem valorile lui ε_0 și ω din ecuațiile (6).

Dacă voim să aflăm cu cât se rotesc cele două secțiuni dela capetele arcului una față de alta prin deformațiuni, n'avem decât să efectuăm suma:

$$(29) \quad \theta = \int \omega ds$$

Dacă, de exemplu, capetele arcului nu se rotesc de loc, atunci în (27) și (28) vom avea $\partial \theta = 0$, iar în (29), $\theta = 0$.

Dacă cele două capete ale arcului sunt, de exemplu, încastrate, atunci avem:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \theta = 0,$$

cari ne dau trei condițiuni între forțele ce acționează arcul.

Cu ajutorul deformațiunilor putem rezolva și la arce probleme static nedeterminate întocmai ca la grinzile drepte.

2. Lucru mecanic.

Am văzut că sub acțiunea lui N și M , axa arcului se lungeste cu $\varepsilon_0 ds$, iar secțiunea se rotește cu ωds , și lucrul mecanic va fi evident:

$$(30) \quad L = \frac{1}{2} \int N \varepsilon_0 ds + \frac{1}{2} \int M \omega ds$$

expresie în care introducem valorile lui ε_0 și ω din ecuațiile (6).

Pentru arcele cu rază de curbură mare, se fac simplificările indicate anterior.

Aplicația Nr. 104. O grindă în formă de cerc, de rază r , este supusă la două forțe egale și de sens contrar $2F$ (fig. 367). Elementele secțiunii barei sunt E , Ω , etc. cari rămân constante pe toată lungimea barei. Să se găsească curba momentelor încovoietoare.

Din cauza simetriei barei și a sarcinilor, deformațiunea se va face ca'n figură, și anume, secțiunile diametrale AA_1 și BB_1 înainte și după deformațiune vor păstra aceeași orientare și deci pe intervalul AB , avem:

$$(29) \quad \theta = \int \omega ds = 0$$

În expresia lui ω intră valoarea lui N și M din o secțiune oarecare a grinzii. Să le determinăm.

Mai întâi observăm că dacă facem secțiunea diametrală BB_1 constatăm că, în secțiunile B și B_1 , nu există componente normale pe secțiune. La fel, dacă facem secțiunea diametrală AA_1 , tot din motive de simetrie, forța normală în secțiunile A și A_1 este F .

În aceste condiții, să scriem echilibrul sfertului de cerc AB . Pentru ca echilibru să existe, trebuie ca în secțiunea A să introducem momentul M_0 , ca'n figură.

Problema, după cum se vede, este static nedeterminată și ecuația (29) servă la determinarea cantității static nedeterminate M_0 .

Se va vedea mai în urmă că, în general, această problemă este triplu static nedeterminată și că numai din cauza simetriei încărcărilor și a construcției s'a redus la una simplu static nedeterminată.

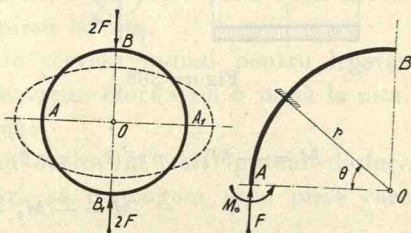


Figura 367

În aceste condiții, putem scri valoarea lui N și M în o secțiune oarecare. Avem:

$$N = -F \cos \theta \quad \text{și} \quad M = -M_0 + F r (1 - \cos \theta)$$

și deci:

$$EI \omega = F r (1 + i^2/r^2 - \cos \theta) - M_0 (1 + i^2/r^2).$$

Aci am făcut aproximația

$$I_1 = I = i^2 \Omega.$$

Se observă că, dacă se neglijează termenul i^2/r^2 , căpătăm valoarea lui ω dată de formula (6), în care am fi neglijat ultimul termen din expresia acestuia.

Introducând această valoare în ecuația (29) și integrând între θ și $\frac{1}{2}\pi$, căpătăm:

$$M_0 = F r [1 - 2/\pi (1 + i^2/r^2)]$$

și deci

$$M = F r [2/\pi (1 + i^2/r^2) - \cos \theta]$$

În cazul când neglijăm i^2/r^2 , și asta se face totdeauna, obținem pentru momentele în A și B , respectiv:

$$M_A = -0,363 F r \quad , \quad M_B = +0,637 F r$$

Aplicația Nr. 105. Să presupunem că aceeași grindă este supusă la o sarcină

uniform distribuită p (fig. 368). Și în acest caz chestiunea se tratează absolut analog.

Din aplicația precedentă se vede că neglijearea ultimului termen din expresia lui ω revine la neglijearea, în expresia lui M , a termenului i^2/r^2 față de 1. Vom face această aproximație chiar dela început. În aceste condiții:

$$\theta = \int \omega ds = (1/EI) \int M ds = 0$$

De pe figură se vede că avem:

$$M = -M_0 + p r^2 (1 - \cos \theta) - \int_0^\theta p r^2 (\cos \alpha - \cos \theta) \sin \alpha d\alpha$$

$$M = -M_0 + \frac{1}{2} p r^2 \sin^2 \theta$$

care introdusă în expresia lui θ ne dă:

$$M_0 = \frac{1}{4} p r^2$$

și deci

$$M = -\frac{1}{4} p r^2 \cos 2\theta$$

Momentele în A și B sunt respectiv:

$$M_A = -\frac{1}{4} p r^2 \quad , \quad M_B = +\frac{1}{4} p r^2$$

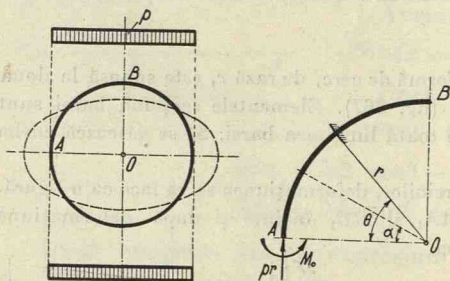


Figura 368

XXIV. ÎMBINĂRI.

O construcție, oricare ar fi ea, nu se poate face dintr'o singură piesă, ci din mai multe. Aceste piese trebuiesc îmbinate, legate sau asamblate, așa ca împreună să formeze construcția ce ni se cere.

La îmbinarea a două sau mai multe piese, trebuie să luăm anume precauțiuni.

Mai întâi, trebuie să amenajăm anumite suprafețe de contact între piese, pentru ca să putem face legătura lor.

În genere aceasta nu este suficient și mai avem nevoie și de anumite piese auxiliare. Acestea poartă numele de *piese de îmbinare*.

Îmbinările le putem grupa în mai multe feluri. O primă grupare ar fi:

1. *Îmbinări de rezistență*. Se numesc așa când prin intermediul lor se transmite un efort dela o piesă la alta.

2. *Îmbinări de solidarizare*. Ele servesc numai pentru legarea pieselor între ele, fără a transmite vreun efort dela o piesă la alta.

O ală grupare ar fi următoarea:

1. *Îmbinări demontabile*. Sunt acelea la cari putem desface legătura între diversele piese, fără să distrugem vreo piesă care servește pentru îmbinare.

2. *Îmbinări nedemontabile*, sunt acelea la cari, pentru a desface îmbinarea, suntem nevoiți a distruge o parte din piesele de îmbinare.

La îmbinări trebuie să mai ținem seamă de unele considerațiuni.

1°. *Contactul între piese se face pe anume suprafețe, cari*, în genere, *sunt mai mici decât suprafețele brute ale secțiunilor*. Apoi, pentru a putea îmbina piesele le găurim sau le tăiem.

Prin aceste operațiuni, micșorăm secția brută a piesei. În calculul pieselor va trebui neapărat să ținem cont de aceste slăbiri ale secțiunilor.

Pentru a avea o îmbinare economică, trebuie ca ea să fie cât mai scurtă și să necesite cât mai puține piese de îmbinare.

Această condiție de economie însă, este contrabalansată în mare măsură de condițiile de rezistență. În adevăr, prin o îmbinare se transmit eforturi cari prezintă oarecari desaxări, deci produc momente. Cu cât eforturile și desaxările vor fi mai mari, cu atât se vor desvolta eforturi secundare mai importante.

Pentru a le reduce, va trebui ca transmiterea lor să se facă cât mai răspândit, cât mai diluat, deci îmbinarea să fie cât mai lungă posibil.

Aceste două elemente: *economia și reducerea cât mai mult a eforturilor secundare*, nu se pot pune într'o formulă și nici nu se pot da principii generale, cari să fie urmate. Numai după o experiență oarecare se ajunge la o dimensionare justă a îmbinărilor, împăcând astfel, pe cât practicește este posibil, și o condiție și cealaltă.

2^o. Piese de îmbinare, în genere, sunt mici și transmiterea eforturilor se face de asemenea pe suprafețe mici. *Legile de distribuție ale rezistențelor, pentru diversele solicitări stabilite până aci, nu se pot aplica întocmai ca la bare.*

Totuși, în lipsă de alte legi, le vom aplica pe acestea, însă vom face o serie de corecțiuni, adoptând pentru rezistențele admisibile valorile pe cari foarte numeroase experiențe le-au fixat pentru solicitările din îmbinări. În genere, rezistențele pentru bare lungi nu se aplică pentru barele scurte ce intră în o îmbinare și de aceea în chestie de îmbinări ne vom conduce în genere după normele practice.

A) Piese de îmbinare.

Cele mai curențe sunt: *buloanele, penele, niturile, eclisele, sudura*, etc.

Cu unele din ele se fac îmbinări demontabile (buloanele și penele), cu altele nedemontabile (niturele și sudura).

Ne vom ocupa pe rând cu aceste elemente și numai din punctul de vedere al rezistenței materialelor.

1. Buloane.

a) Dimensiunile buloanelor.

Bulonul se compune dintr'o tijă cilindrică care la o extremitate are un cap, iar cealaltă extremitate este ghiventată pe o lungime oarecare și în care se înșurubează o piuliță sau mutelcă (fig. 369).

Capul bulonului poate fi pătrat, exagonal sau de altă formă. Mutelca, de asemenea, poate fi patrată exagonală, rotundă cu urechi, etc.

Ghevindul are secțiune triunghiulară, pătrată sau alte secțiuni și este născut prin mișcarea acestei secțiuni pe o elice cilindrică, cu pas constant.

Ghevindul bulonului cu al mutelcii se îmbucă perfect. Prin rotire, mutelca se deplasează în lungul axei bulonului.

În construcții și în special la mașini, bulonul este de o întrebuințare curentă.

Astăzi buloanele sunt normalizate și uzinele nu fabrică decât anumite tipuri.

Din cauză că ghevintul se sapă în capul tijei bulonului, secțiunea acestuia, în dreptul ghevintului, este mai mică.

Se notează totdeauna diametrul tijei cilindrice a bulonului cu d și toate celelalte dimensiuni se exprimă în funcție de d .

10. Diametrul secțiunii bulonului, măsurat în fundul ghevintului este d_1 . Pentru buloanele normale, cu ghevind *Whitworth*, raportul $\varphi = d/d_1$, pentru buloane cu $d \leq 1'' = 2,54$ cm, este:

$$\varphi = 1,03 + 2,4/(5 + 4d)$$

iar pentru $d \geq 1''$

$$\varphi = 0,89 + 30/(90 + 4d)$$

d fiind exprimat în cm.

Raportul suprafețelor celor două secțiuni va fi φ^2 , care pentru cele două intervale are valorile

$$\text{Pentru } d \leq 1'' \quad \varphi^2 = 1 + 6/(5 + 4d)$$

$$\text{Pentru } d \geq 1'' \quad \varphi^2 = 0,8 + 60/(90 + 4d)$$

Pentru dimensionarea celorlalte elemente ale bulonului, se admite că dacă rezistența la tensiune este $\mathcal{R}$, atunci

$$\bar{\sigma} = \mathcal{R} \sqrt{3}/3 = 0,577 \mathcal{R}.$$

20. Înălțimea h_c a capului bulonului se determină prin condiția ca tija bulonului să nu se smulgă din capul lui după secțiunea cilindrică $A A$ fig. 370. Construind liniile isostatice, ele se prezintă ca în figură. Din ele se constată că, în apropiere de punctele A și A ,

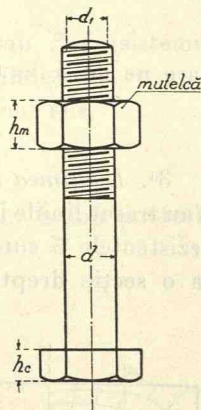


Figura 369

valoarea lui ζ este aproape nulă și are o valoare maximă spre mijlocul distanței AA .

Vom presupune că distribuția lor pe distanța AA are loc ca la secțiunea dreptunghiulară, deci

$$\pi d h_c \zeta = 1,5 \frac{1}{4} \pi d^2$$

care ne dă $h_c = 0,65 d$. Practica însă a consfințit:

$$h_c = 0,7 d$$

30. Înălțimea h_m a mutelcii se calculează în același fel. Pe fig. 371 s'au trasat liniile isostatice. Din ele se vede, că la fundul ghevintului rezistențele ζ sunt nule. Vom admite și aci că distribuția se face ca la o secție dreptunghiulară. Forfecarea însă nu se face în secția

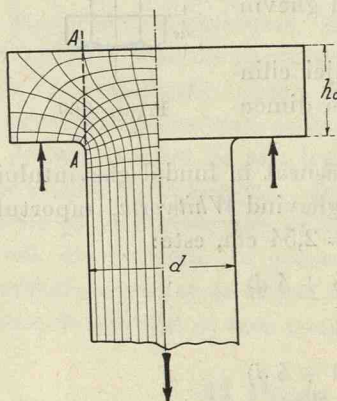


Figura 370

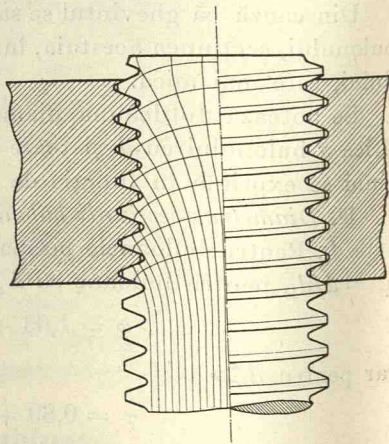


Figura 371

de la fundul ghevintului, ci în secțiunea în care se face contactul între ghevintul mutelcii și al șurubului. Înălțimea ghevintului pentru profilele Whitworth, în acel punct, este sensibil egal cu $\frac{3}{4}$ din înălțimea pasului.

Vom avea deci

$$\frac{3}{4} \pi d_1 h_m \cdot \zeta = 1,5 \frac{1}{4} \pi d_1^2 \varphi$$

și deci:

$$h_m = 0,867 d_1 = 0,867 d / \varphi$$

Pentru întreaga scară de profile Whitworth se obține

$$0,65 d \leq h_m \leq 0,80 d$$

În practică se ia

pentru $d \leq 2'' = 5,08 \text{ cm}$, $h_m = d$,
iar pentru $d \geq 2'' = 5,08 \text{ cm}$, $h_m = 1,5 + 0,7 d$,
totul exprimat în cm.

Mai sunt și alte profile de șuruburi: *Sellers* sau *S.I* (sistemul internațional), trapezoidale, dreptunghiulare, rotunde, etc.

Dimensionarea lor se face pe bazele arătate mai sus.

b) Dimensionarea buloanelor.

1°. *Buloane solicitate axial.* Într'o îmbinare, un bulon poate fi solicitat la o tensiune după axa sa.

În acest caz, dacă N este forța axială, avem:

$$\frac{1}{4} \pi d_1^2 = N$$

sau:

$$\frac{1}{4} \pi d^2 / \varphi^2 = N$$

Observare importantă. Din cauza prelucrării ghevintului, materialul din apropierea lui, adică tocmai acela prin intermediul căruia se face transmiterea efortului, este deteriorat și de aceea se admite $\mathcal{R} = 600 \text{ kg/cm}^2$ pentru buloanele făcute la strung sau mașina de buloane. În cazul când ele sunt făcute în mod rudimentar, cu filiera, se ia numai 80% din valoarea de mai sus, adică $\mathcal{R} = 480 \text{ kg/cm}^2$.

Dacă bulonul se strânge sub efort și există din această cauză un moment de răsucire, atunci din valorile de mai sus în cele două cazuri se ia numai $\frac{3}{4}$, adică 450 și 360 kg/cm^2 .

Aplicația Nr. 106. 1°. Un bulon este supus la o tensiune de 3000 kg. Cu o rezistență admisibilă de 600 kg/cm^2 , se cere diametrul.

Avem:

$$\Omega_1 = N/\mathcal{R}_a = 3000/600 = 5 \text{ cm}^2 , d_1 = 2,52 \text{ cm}$$

$$d = d_1 \varphi = d_1 [0,89 + 30/(90 + 4 d)] \simeq 3,00 \text{ cm}.$$

Se ia ca diametru dimensiua imediat superioară care se găsește în comerț.

2°. Ce sarcină suportă un bulon de $\varnothing 22 \text{ mm}$, dacă $\mathcal{R}_a = 480 \text{ kg/cm}^2$.

Avem:

$$\Omega = 3,80 \text{ cm}^2 , \varphi^2 = 1 + 6/(5 + 4 d) = 1,435$$

$$\Omega_1 = \Omega/\varphi^2 = 2,65 \text{ cm}^2 , N = \mathcal{R}_a \Omega_1 = 1272 \text{ kg}.$$

2°. *Buloane solicitate la forfecare.* În cele mai multe cazuri, buloanele sunt supuse la forfecare după una sau două secțiuni.

Se știe că, în acest caz, rezistența τ nu este uniform distribuită pe secțiune. Avem:

$$\tau = T S / b I = \frac{1}{3} T / \Omega$$

în care

$$\Omega = \frac{1}{4} \pi d^2$$

La calculul buloanelor, se face convențiunea că τ se distribue uniform pe secțiune și deci și rezistențele admisibile se fixează în consecință.

În acest caz, pentru o secțiune de forfecare (fig. 372 a), vom avea

$$(1) \quad \frac{1}{4} \tau \pi d^2 = T$$

iar pentru două (fig. 372 b):

$$(2) \quad 2 \frac{1}{4} \pi d^2 \tau = T$$

și așa mai departe.

Prin secțiunile de forfecare efortul se transmite bulonului și

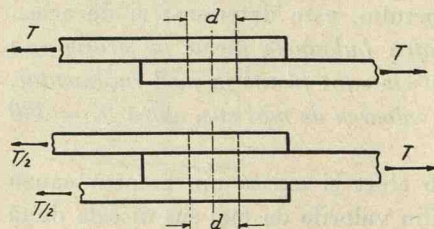


Figura 372

acesta, prin suprafața de contact între tija bulonului și pereții găurii, îl transmite pieselor ce se leagă.

Presiunea pe suprafața de contact variază după o lege oarecare. Pentru simplificare, în mod convențional, se ia drept suprafață de

contact suprafața diametrală a bulonului, adică $d h$, în care d este diametrul bulonului și h grosimea piesei pe care are loc contactul.

În aceste condițiuni, experiența arată că pentru rezistența la contact, pe care o notăm cu $\mathcal{R}_c$, putem lua: $\mathcal{R}_c = (1,5 \div 2) \mathcal{R}$, în care $\mathcal{R}$ este rezistența la compresiune simplă.

Rezistența îmbinării va fi deci:

$$(3) \quad d h \mathcal{R}_c = T$$

În cazul unei singure secțiuni de forfecare, cea mai mică din valorile lui T , date de (1) și (3), dau forța la care poate rezista îmbinarea, iar în cazul a două secțiuni de forfecare, cea mai mică din valorile date de (2) și (3).

c) Dimensionarea bulonării platbandelor.

Pentru ca să putem transmite efortul dela o bară la alta, cu ajutorul unui bulon supus la forfecare, va trebui să găurim cele două piese și prin gaură să introducem bulonul.

Să ne ocupăm de cazul când bulonul este supus la o singură secțiune de forfecare.

Să presupunem că efortul se transmite unei platbande, a cărei secțiune este $b h$ (fig. 373).

Dacă efortul de transmis este N , atunci forța tăietoare în bulon este $T = N$ și cu ajutorul formulei (1) determinăm diametrul d .

1^o. Grosimea h a platbandei va fi așa, ca suprafața de contact să nu se strivească sub acest efort și din ecuația (3) deducem pe h .

Dacă se ia $\mathfrak{X}_c = 1,5 \mathfrak{X}$ și se pune în (3) se obține:

$$h = 0,3 d.$$

Se recomandă ca h să nu se coboare sub această valoare; astfel, presiunea pe tija bulonului nu este niciodată întrecută.

2^o. Lățimea b a platbandei va fi așa, ca ea să nu se rupă după secțiunea cea mai redusă și deci va trebui să avem:

$$(b - d) h \mathfrak{X} \geq N.$$

Experiența arată însă, că rezistențele nu se distribuiesc uniform pe secțiune, căci ruperea are loc ca în figura 373, din care rezultă că rezistențele lângă peretele găurii sunt mai mari ca în restul secțiunii. Calculul exact

este mai complicat și de aceea se admite, în mod practic, că această secțiune trebuie să reziste la un efort cu 50% mai mare și deci să avem:

$$(b - d) h \mathfrak{X} = 1,5 N.$$

relație din care deducem pe b .

Dacă se ține seamă că rezistențele σ nu se distribuiesc uniform

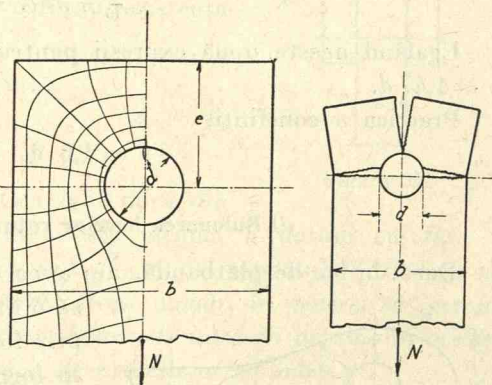


Figura 373

pe secțiunea bulonului, ($\mathfrak{T}_{max} = \frac{4}{3} \mathfrak{T}_m$) și dacă rezistența la forfecare maximă este $\mathfrak{T} = 0,577 \mathfrak{K}$, atunci:

$$1,5 N = 1,5 \cdot 3 \pi d^2 \cdot 0,577 \mathfrak{K} / 16$$

Din această relație și precedenta în cazul când $h = 0,3 d$, obținem:

$$b = 2,7 d.$$

Practica a consfințit

$$b = 3 d$$

30. Trebuie să găsim acum *distanța găurii dela capul platbandei*. După cum se arată în fig. 373, ruperea are loc prin tensiune, totuși, pentru că acest calcul este dificil, se admite că platbanda să nu se foarfece pe la marginea bulonului pe distanța e .

Din trasarea liniilor isostatice, se vede că $\mathfrak{T}$ nu se distribuie uniform pe distanța e și dacă admitem distribuția lui $\mathfrak{T}$ ca la o secțiune dreptunghiulară, atunci cele două secțiuni rezistă la un efort de

$$\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot e h \mathfrak{T}$$

care trebuie să fie egal cu efortul din bulon:

$$\frac{3}{16} \pi d^2 \mathfrak{T}$$

Egalând aceste două expresii pentru cazul $h = 0,3 d$, scoatem $e = 1,47 d$.

Practica a consfințit

$$e = 1,5 d.$$

d) Bulonarea barelor rotunde (ochiu).

Dacă, în loc de platbandă, am avea o bară rotundă care am voi să o îmbinăm în acest fel, atunci, prin forjare, un cap al barei se face în formă de ochiu, în care se dă o gaură de diametru d (fig. 374).

Relația între d_0 , diametrul barei și diametrul bulonului, se scoate scriind că rezistența bulonului la forfecare este egală cu rezistența la tensiune a barei, deci

$$3 \pi d^2 \cdot 0,577 \mathfrak{K} / 16 = \frac{1}{4} \pi d_0^2 \mathfrak{K}$$

din care scoatem: $d_0 = 0,658 d \simeq \frac{2}{3} d$.

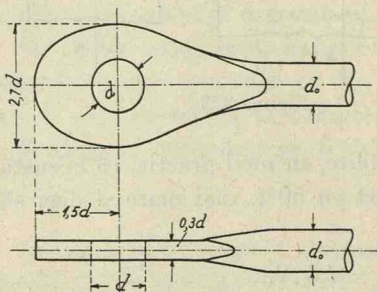


Figura 374

Pe baza dimensiunilor de mai sus, pe fig. 374 am schițat un asemenea ochiu.

După aceleași norme se stabilesc dimensiunile când am avea un bulon cu două secțiuni de forfecare.

e) Bulonarea pieselor de lemn.

Cu ajutorul buloanelor putem îmbina și piese de lemn. Diametrul buloanelor se fixează pe considerația că lemnul prin găurire să nu se slăbească prea mult. În genere se ia diametrul egal cu $d = b/10$, dacă b este dimensiunea străbătută de bulon (fig. 375).

Barele de lemn le găurim și prin ele trecem buloanele.

Normele de calcul sunt aceleași de până acum. Vom lua un exemplu. Să avem de îmbinat la tensiune barele de lemn din fig. 375 b.

Rezistența unui bulon va fi sau rezistența lui la forfecare:

$$2 \frac{1}{4} \pi d^2 \tau$$

sau presiunea pe lemn:

$$d h \mathfrak{X}$$

în care $\mathfrak{X} = 80 \text{ kg/cm}^2$. Cea mai mică din aceste valori, care în genere este ultima, o notăm cu R .

Dacă efortul de transmis este N , atunci raportul $N/R = n$, ne dă numărul necesar de buloane. Acest număr, în genere, se sporește cu 20%, din cauză că nu toate buloanele intră în acțiune în același moment, din cauza imperfecției de execuție a îmbinării.

Distanța e , din axul bulonului până la extremitatea barei, se fixează ca lemnul să nu se foarfece după secțiunile $m-n$. Avem:

$$2 e h \tau = d h \mathfrak{X}$$

Pentru rezistența de forfecare a lemnului, în lungul fibrelor, se ia $\tau = 10 \text{ kg/cm}^2$. Rezultă deci: $e = 4 d$. Se ia mai bine $e = 4,5 d$ pe considerația că efortul e transmis complet lemnului la marginea bulonului. Pe aceeași considerație, se găsește că distanța între două buloane consecutive așezate pe același șir este $t = 5 d$.

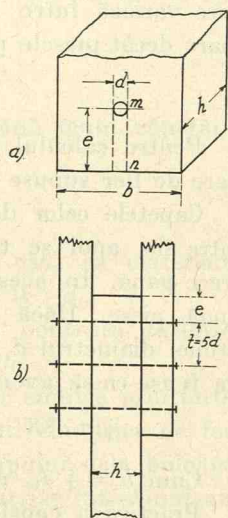


Figura 375

2. Pene.

Cu ajutorul lor se fac îmbinări demontabile. Ele sunt niște piese paralelipipedice, cu muchiile rotunjite și de grosime constantă (fig. 376). Grosimea lor în genere este $\frac{1}{4}$ din dimensiua pe care o străbate.

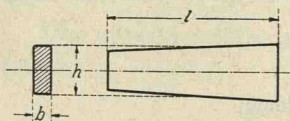


Figura 376

Înălțimea lor nu este constantă, ci pe toată lungimea prezintă o înclinare care variază între $1/10$ — $1/40$. Lungimea lor se face ceva mai mare decât piesele pe cari să le străbată.

a) Pene metalice.

Pentru calculul lor vom da un exemplu de prelungire a două bare de fier supuse la tensiune (fig. 377).

Capetele celor două bare se amenajează așa ca să se îmbuce între ele, apoi se taie în ele o gaură prin care trece pana. În acest mod s'au solidarizat cele două piese. Dacă diametrul barelor este d , atunci diametrul d_1 , al capului barei interioare, va fi așa ca să avem:

$$\frac{1}{4} \pi d^2 \mathcal{K} = \left(\frac{1}{4} \pi d_1^2 - b d_1 \right) \mathcal{K}$$

Cum $b = \frac{1}{4} d_1$, rezultă $d_1 = 1,21 d$.

Practica a consfințit

$$d_1 = \frac{4}{3} d.$$

Pentru ca pana să nu se distrugă, va trebui ca la contactul între bară și pană, $\mathcal{K}$ să nu treacă de $\mathcal{K}_c$, deci să avem:

$$b d_1 \mathcal{K}_c = \frac{1}{4} \pi d^2 \mathcal{K}$$

Dacă aci se pun valorile aflate, găsim:

$$\mathcal{K}_c = 1,77 \mathcal{K}$$

așa dar, această rezistență este asigurată pentru că am văzut că pentru $\mathcal{K}_c$ putem lua $\mathcal{K}_c = 1,5 \mathcal{K} \div 2 \mathcal{K}$.

Înălțimea h a penei va fi așa ca să nu se taie după cele două secțiuni de forfecare, deci să avem:

$$2 \cdot \frac{2}{3} b h \tau = \frac{1}{4} \pi d^2 \mathcal{K}$$

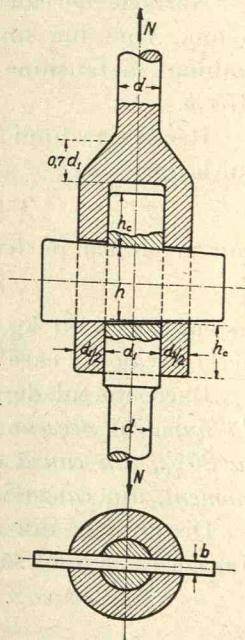


Figura 377

Dacă aci punem valorile găsite și luăm $\bar{\sigma} = 0,577 \mathcal{K}$, găsim $h = 2,3 d_1$. Practica arată că este suficient

$$h = \frac{4}{3} d_1$$

Asta înseamnă că fenomenul este mai complex de cum l'am considerat aci, că $\bar{\sigma}$ se distribuie aproape uniform pe secțiune și că pentru el putem lua rezistențe mai mari decât $0,577 \mathcal{K}$.

Pentru a termina cu capul interior, mai trebuie ca distanța dela până până la extremitatea capului barei să nu se foarfece după cele două secțiuni, deci:

$$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot d_1 h_c \bar{\sigma} = \frac{1}{4} \pi d^2 \mathcal{K}$$

Punând în această expresie valorile găsite până acum, căpătăm: $h_c = 0,43 h$. Practica a consfințit

$$h_c = \frac{2}{3} h \div \frac{3}{4} h = \frac{8}{9} d_1 \div d_1.$$

Grosimea păretelui capului exterior va fi așa, ca materialul la contact cu pana să nu se strivească, deci va fi $\frac{1}{2} d_1$.

Înălțimea până la extremitate va fi tot h_c , pentru că la forfecare avem aceeași suprafață ca la capul interior.

Pentru ca tija manșonului exterior să nu se smulgă prin forfecare din manșon, trebuie ca înălțimea secțiunii cilindrice de forfecare să fie $0,7 d_1$, adică tocmai înălțimea capului dela buloane.

Când capul exterior e greu de confecționat, se întrebuițează un manșon cilindric cu două pene.

b) Pene de lemn.

La piesele de lemn nu putem amenaja capetele decât prin creștături făcute cu ferăstrăul și dalta. Piesele de îmbinat se crestează în mod identic, în creștătură se introduce o pană care împiedică lunecarea celor două piese una față de alta. Pentru ca îmbinarea să nu se desfacă, este nevoie și de buloane, cari să o solidarizeze (fig. 378), cum s'a văzut la solidarizarea grinzilor cu pene de lemn.

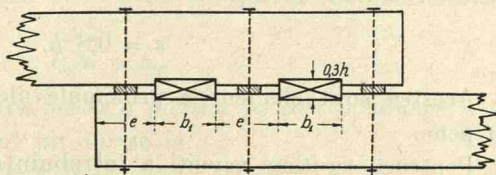


Figura 378

Dimensiunile penelor, în genere, sunt date. Când piesele cari se îmbină sunt lipite, atunci grosimea penei este $0,2 h$, în care h este grosimea piesei de îmbinare. Când între piese se lasă un spațiu liber de $0,1 h$, atunci grosimea penei se face $0,3 h$. În orice caz, contactul între pană și una din piese se face pe o înălțime de $0,1 h$ și i se dă o înclinare de 10% , pentru ca pana prin batere să se poată înțepeni bine. Aceeași înclinare se dă și creștăturilor în care se bate pana. Lungimea ei se face mai mare decât a pieselor ce le străbate, pentru ca contactul să se facă pe toată lățimea pieselor de îmbinare, și pentru ca atunci când lemnul se usucă să le mai putem bate.

Penele se fac, în genere, dintr'un lemn de esență mai tare ca a pieselor de îmbinat.

Rezistența unei pene este efortul ce-l poate transmite dela o piesă la alta. Dacă $\mathcal{X} = 80 \text{ kg/cm}^2$, este rezistența la compresiune a lemnului piesei ce se îmbină, și b lățimea ei, atunci:

$$0,1 b h \mathcal{X} = R$$

ne dă efortul ce se transmite printr'o pană.

Dacă efortul de transmis este N , atunci $n = N/R$, ne dă numărul de pene de care avem nevoie pentru a transmite întreg efortul.

Acest număr se sporește, în genere, cu 20% , pentru a ține seamă de imperfecțiunile de executare a îmbinării.

Distanța între pene sau distanța dela o pană la extremitatea barei se va lua așa ca lemnul să nu se foarfece în lungul fibrelor.

Dacă rezistența la forfecare a lemnului este $\mathcal{G}$, și dacă distanța liberă între cele două pene este e , atunci trebuie să avem:

$$\mathcal{G} b e = 0,1 b h \mathcal{X}$$

și cum $\mathcal{G} = 10 \text{ kg/cm}^2$, vom avea

$$e = 0,8 h.$$

Acestea sunt elementele principale ale unei îmbinări de lemn cu pene.

Pentru că suntem nevoiți a întrebuința și buloane la solidarizarea pieselor, în calculul îmbinării vom pune la contribuție și rezistența lor.

În loc de pene de lemn se pot întrebuința și piese metalice, care pătrund în cele două bare și le împiedică a luneca.

3. Nituri.

Nitul se compune din o tijă tronconică cu o înclinare foarte mică a generatoarei de 1%, deci din o tijă aproape cilindrică, care la extremitatea mai groasă are un cap în formă de calotă sferică sau altă formă (fig. 379). După forma capului, niturile care au capul în formă de calotă sferică se zic *circulare* pentru că curba generatoare este un cerc. Acelea la care această curbă este o elipsă se zic *eliptice*. Avem și nituri cu capul înecat în piesele pe care le strânge; acestea se zic *nituri cu cap înecat* sau *frezate*. Racordarea între capul nitului și tijă lui, văzută într-o secție longitudinală este o dreaptă sau un mic cerc. În primul caz, se zice că nitul are gât.

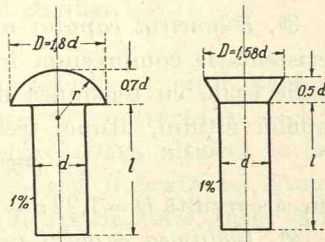


Figura 379

Niturile se fac din *oțel moale*, care trebuie să îndeplinească condițiunea ca între temperaturile ce corespund culorilor *roș-alb*, până la *roșu cireșiu închis*, subț acțiunea ciocanului, să ia orice formă, fără să prezinte vreo crăpătură sau fisură, atât capul cât și tijă lui.

Oțelul barelor din care se confecționează niturile se mai supune și la alte încercări tehnologice, prescrise de caietele de sarcini.

Niturile se fac cu mașina de presat, le găsim gata în comerț sau se comandă. Ele sunt normalizate.

a) Dimensionarea niturilor.

Diametrul nitului. Dacă grosimile pieselor pe cari le strânge nitul sunt $h_1, h_2, \dots$, atunci:

$$(1) \quad h_1 + h_2 + h_3 + \dots = l_s$$

poartă numele de *lungimea de strâns a nitului*. Dacă nitul strânge n piese, atunci:

$$l_s/n = h_m$$

poartă numele de *grosimea medie a pieselor pe cari le strânge*.

După *Bach*, diametrul nitului se ia:

$$(2) \quad d = \sqrt{5 h_m} - (0,2 \div 0,4) \text{ sau } d = \sqrt{5 h_m} - (0,4 \div 0,7)$$

totul exprimat în cm.

Prima formulă se întrebuițează la construcții în genere, a doua la rezervoare și în definitiv la toate îmbinările la cari voim să obți-

nem o etanșeitate oarecare. Diametrul astfel obținut, va trebui să îndeplinească și condițiunea $d \geq \frac{1}{4} l_s$.

2^o. Lungimea l , a tijei nitului, trebuie să fie astfel încât din surplusul de lungime peste l_s , să se poată confecționa capul nitului. În practică se ia:

$$(3) \quad l = 1,1 l_s + \frac{4}{3} d$$

3^o. Diametrul capului nitului se fixează pe considerațiunea, ca rezistența la compresiune între capul nitului și piesele ce le strânge să fie egală cu tensiunea din tija nitului. Dacă D este diametrul capului nitului, atunci trebuie să avem:

$$\frac{1}{4} \pi d^2 \mathcal{K} = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) \mathcal{K}_c$$

din care rezultă $D = 1,22 d - 1,29 d$. În practică se ia $D = 1,5 d - 1,8 d$.

4^o. Înălțimea capului nitului se ia așa ca, tija fiind supusă la tensiune, capul să nu se foarfece după o secțiune cilindrică de diametru d . Se găsește $h_c = 0,65 d$ ca la capul buloanelor. Înălțimea totală a capului se ia $h_c = 0,7 d$. Raza calotei sferice se ia:

$$r = \frac{1}{2} D + 5 \text{ mm.}$$

La niturile cu cap înneecat se face $D = 1,58 d$ până la $d = 25 \text{ m}$, iar dela $d = 28 \text{ mm}$ în sus $D = 1,41 d$.

Înălțimea capului se ia $h_c = 0,5 d$.

5^o. Diametrul găurii nitului se face totdeauna mai mare cu 1 mm ca diametrul nitului. În tot ce urmează notăm cu d diametrul găurii nitului.

b) Efectuarea nituirii.

Piesele ce urmează a se niti, după ce au fost vopsite cu minium de plumb și găurite, se strâng cu șuruburi așa ca ondulația pieselor să dispară și contactul între ele să fie cât mai perfect. Când nu avem buloane, strângerea se face cu clești.

După ce piesele s'au solidarizat, se scoate un bulon și în locul lui se introduce un nit încălzit la roș-alb.

Capul nitului se ține în poziție fixă cu un ciocan — *contra nituitoarea* — care are forma capului nitului. Cu un ciocan de mână se turtește celălalt capăt al tijei, până se obține un cap de formă neregulată. Peste acest cap se pune nituitoarea — care are forma capului nitului — și aceasta se bate puternic cu un alt ciocan până se formează și acest cap al nitului. O nituire se zice că este bine făcută, când ridicând nituitoarea de pe capul făcut al nitului acesta are în centrul capului încă o culoare roșie-vișinie închisă. Se lasă

apoi nitul să se răcească și surplusul de material rămas în jurul capului, care se numește *bavură*, se taie cu dalta. Asta este nituirea cu mâna. Nituirea se face și cu *ciocane cu aer comprimat* sau cu *prese hidraulice*.

c) Modul de a rezista al niturilor.

Din felul cum se execută o nituire, rezultă că nitul, până la răcirea lui la temperatura ambiantă, se va contracta și deci în tija lui se va desvolta o tensiune oarecare. Dacă nituirea se termină la o temperatură mai ridicată ca cea indicată aci, atunci tensiunea care se desvoltă în tijă poate fi așa de mare, încât să se rupă capul nitului.

Din cauza contractiunii prin răcire, și diametrul tijei se contractă, așa că un contact între nit și pereții găurii, oricât de mult am fi refulat materialul prin batere, *nu există* (fig. 380). Tensiunea nitului în schimb este așa de mare, în cât asperitățile unei piese *pătrund în cealaltă*. Nituirea făcându-se în aceste condiții, ne putem da acum seama cum rezistă o îmbinare nituită.

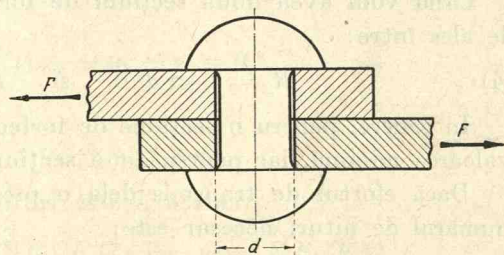


Figura 380

Se vede mai întâi, că în prima perioadă când sarcina F crește, ca să distrugem înădăirea, va trebui ca acest contact intim, care s'a făcut între cele două suprafețe ale pieselor nituite, să fie distrus, adică să se învingă frecarea ce se produce la contactul lor din cauza tensiunii din tija nitului. *Această frecare este foarte mare și este ade-vărată cauză a rezistenței îmbinărilor nituite*. Valoarea acestei frecări, precum și regiunea pe care se întinde ea, depinde de modul cum s'a făcut nituirea.

Cu cât temperatura la care s'a terminat nituirea este mai mare și cu cât piesele au fost mai bine strânse înainte de nituire, cu atât frecarea va fi mai mare și regiunea pe care se exercită va fi mai întinsă. Așa dar, elementul de care ar trebui să ținem seamă la o nituire, este tensiunea din tija nitului. Acest element este foarte nesigur.

d) Numărul de nituri necesar unei nituiri.

Să presupunem că F crește și că lunecarea între cele două suprafețe a fost învinsă. Atunci se stabilește un contact între pereții găurii și pereții nitului și îmbinarea se poate distruge în două moduri: sau secțiunea nitului se foarfecă, sau materialul, la contactul între nit și gaură, se strivește. Dacă aceasta a avut loc, atunci îmbinarea se distruge. La calculul unei nituiri vom ține seamă numai de aceste două elemente. Aci se fac următoarele simplificări:

Se presupune că τ se distribue uniform pe secțiunea nitului și deci și rezistența admisibilă se stabilește în consecință; apoi se admite că și $\mathcal{R}_c$, adică presiunea între nit și pereții găurii, se distribue uniform pe suprafața diametrală a tijei nitului. Dacă h este grosimea piesei de strâns, atunci rezistența unui nit va fi cea mai mică valoare a expresiilor:

$$(4) \quad R_f = \frac{1}{4} \pi d^2 \tau \quad \text{și} \quad R_c = d h \mathcal{R}_c$$

Când vom avea două secțiuni de forfecare, vom avea evident de ales între:

$$(4) \quad R_f = 2 \frac{1}{4} \pi d^2 \tau \quad \text{și} \quad R_c = d h \mathcal{R}_c$$

În genere, pentru o secțiune de forfecare, prima expresie ne dă valoarea minimă, iar pentru două secțiuni de forfecare, ultima.

Dacă efortul de transmis dela o piesă la alta este F , atunci numărul de nituri necesar este:

$$n = F/R.$$

Când se pun mai multe nituri într'un șir, atunci numărul lor trebuie sporit din faptul că niturile nu se încarcă toate în mod uniform.

Bach și alții au arătat prin experiențe că într'adevăr lucrul se

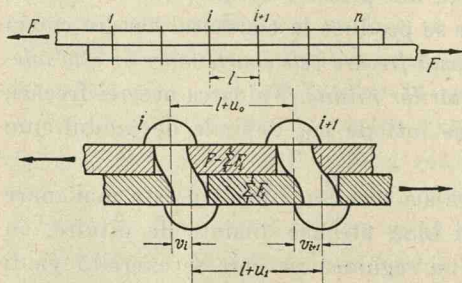


Figura 381

petrece așa. D-l Profesor I. Ionescu, dela școala Politehnică din București, în cursul său de poduri, a demonstrat aceasta în modul următor:

Să presupunem că avem două platbande identice, nituite cu un număr n de nituri (fig. 381). Prin fiecare nit se transmite

dela o platbandă la alta câte un efort diferit $F_1, F_2, \dots, F_i, F_{i+1}, \dots, F_n$.

Vom avea evident:

$$(5) \quad F = \sum F_i$$

Se observă, din motive de simetrie, că niturile simetric dispuse față de mijlocul îmbinării, se încarcă în mod egal.

Se mai observă că până la nitul i inclusiv, s'a transmis dela o platbandă la alta un efort $\sum_1^i F_i$, așa că o platbandă este încărcată cu acest efort, iar cealaltă cu restul, adică $F - \sum_1^i F_i$.

Repartiția efortului pe diferitele nituri se deduce cu ajutorul deformației, din cauza căreia niturile nu vor mai rămâne drepte, ci vor avea cam forma din figură. Cele două capete ale nitului i , se deplasează unul față de altul cu cantitatea v_i , iar ale nitului $i + 1$ cu v_{i+1} . În intervalul i și $i + 1$, platbanda supusă la efortul $F - \sum_1^i F_i$ se lungește cu u_0 , iar cealaltă platbandă, în același interval, se lungește cu u_1 .

Avem evident:

$$u_0 + v_{i+1} - u_1 - v_i = 0$$

sau

$$(6) \quad u_0 - u_1 = v_i - v_{i+1}$$

Dacă distanța între nituri este l , atunci:

$$(7) \quad u_0 = l (F - \sum_1^i F_i) / E \Omega, \text{ iar } u_1 = l \sum_1^i F_i / E \Omega,$$

în care Ω este secțiunea platbandei.

Cantitatea cu care se deplasează capul nitului, este:

$$(8) \quad v_i = F_i k h / G \Omega_1, \quad v_{i+1} = F_{i+1} k h / G \Omega_1,$$

în care Ω_1 , este secțiunea nitului, iar h = lungimea lui.

Deformațiunea nitului este mai complicată, însă putem spune că este proporțională cu h și un coeficient oarecare k . Chiar dacă am presupune că deformația nitului se produce și prin încovoiere, atunci am avea v_i de o formă mai complicată, în care la numărător ar intra h la o putere oarecare, iar la numitor ar intra momentul de inerție al secțiunii nitului. Oricum ar fi, ele vor avea toate o aceeași expresie a deformației.

Introducând aceste valori în (6), avem:

$$(F - 2 \sum_1^i F_i) / (F_i - F_{i+1}) = (k h / G \Omega_1) / (l / E \Omega)$$

Notăm:

$$u = l/E \Omega \quad , \quad v = k h/G \Omega_1$$

adică lungirea platbandei și deplasarea capului nitului sub acțiunea unui efort egal cu 1.

Expresia de mai sus o putem pune sub forma:

$$(9) \quad (F - 2 \sum_i^i F_i)/(F_i - F_{i+1}) = v/u = \alpha$$

În cazul când am presupune că avem deaface cu platbande rigide și nituri deformabile, atunci $u = 0$, și deci rezultă $F_i = F_{i+1}$.

Așa dar, numai în acest caz, toate niturile se încarcă în mod uniform. Să presupunem, invers, că niturile sunt rigide și platbandele elastice, atunci trebuie să avem:

$$F - 2 \sum_i^i F_i = 0$$

Dacă scriem această relație pe primul interval 1 — 2, avem:

$$F = 2 F_1$$

Așa dar, primele nituri, adică nitul 1 și n , iau tot efortul F și deci celelalte nu se încarcă cu nimic.

Realitatea însă este între aceste două cazuri extreme. Așa dar, *eforturile nu se distribuiesc uniform la diferitele nituri ale aceluiaș șir.*

D-l Profesor I. Ionescu în Buletinul Societății Politehnice (Nr. 10 din 1929) rezolvă această chestiune în modul următor:

Dacă se scrie ecuația (9) pentru intervalele $(i-1) - i$ și $i - (i+1)$ și se scade una din alta, se obține ecuația diferențială cu diferențe finite:

$$(10) \quad F_{i+1} - 2(1 + 1/\alpha) F_i + F_{i-1} = 0.$$

În cazul când cele două platbande nu au secțiuni egale și dacă raportul secțiunii platbandei de sus (așa cum este făcută figura 381) către cea de jos este φ , atunci se obține:

$$(10) \quad F_{i+1} - 2[1 + (1 + \varphi)/2 \alpha] F_i + F_{i-1} = 0.$$

În cazul platbandelor egale, adică $\varphi = 1$, d-l Ionescu calculează repartitia eforturilor pe fiecare nit în parte pentru diferite valori ale lui n .

Din tabloul dat de d-sa, rezultă că primul nit se încarcă cu aproximativ $(n-2)/7$ mai mult decât în cazul când am presupune că efortul se repartizează egal la toate niturile.

După Bleich, rezultă că această încărcătură suplimentară pentru primul nit, adică cel mai solicitat, este $(n-2)/15$.

După cum se vede rezultatele variază dela simplu la dublu. Aceasta depinde evident de ipoteza ce se face asupra raportului $a = v/u$.

De o cam dată, vom presupune că nitul cel mai obosit se încarcă cu $(n-2)/k$ mai mult, în care pentru k vom lua o valoare cuprinsă între 7 și 15.

În aceste condițiuni efortul în nitul cel mai obosit, va trebui să fie egal cel mult cu rezistența nitului, deci vom avea:

$$F/n + (n-2) F/k n = R.$$

Dacă notăm cu $n_1 = F/R$, numărul de nituri necesar când am presupune că efortul se distribuie uniform la toate niturile, atunci din relația de mai sus scoatem:

$$(11) \quad n_1 = k n / (k - 2 + n) \quad \therefore \quad n = (k - 2) n_1 / (k - n_1)$$

Sporul de nituri cerut de aceste formule este foarte însemnat.

Dacă fixăm rezistența îmbinării nituite în raport cu rezistența la rupere, atunci observăm că dacă rezistența în nituri trece de limita de proporționalitate, fără ca în platbande această rezistență să fie întrecută, atunci raportul $a = v/u$ capătă valori foarte mari. Dacă în ecuația (10) neglijăm $1/a$ față de valoarea 1, atunci avem:

$$F_{i+1} - 2 F_i + F_{i-1} = 0$$

a cărei soluții sunt: $F_1 = \dots = F_i = F_{i+1} = \dots = ct.$

Așa dar, în aceste condițiuni — în apropierea ruperii — eforturile în nituri tind să se egalizeze.

Pentru aceste motive, numărul n_1 de nituri se sporește pur și simplu cu 20%.

* * *

În unele îmbinări se poate ca nitul să fie supus la o tensiune după tija lui.

În acest caz, se știe că rezistența redusă are valoarea:

$$\mathcal{K}_{red} = 0,35 \mathcal{K} + 0,65 \sqrt{\mathcal{K}^2 + 4 \mathcal{T}^2}$$

care nu va trebui să întreacă rezistența admisibilă la tensiune.

Sporul care se dă, în acest caz, este de cel puțin 20% și ajunge după cazuri până la 100%.

B) Diferite probleme de îmbinări nituite.

1. Imbinări pentru construcții și poduri metalice.

Vom da câteva exemple de nituirile cele mai curențe, întrebuințate în construcții și poduri metalice.

1^o. Diametrul nitului se calculează cu formula lui Bach: $d = \sqrt[3]{5 h_m} - 0,2$, totul exprimat în cm. Această valoare a lui d se rotunjește la dimensiunea normală cea mai apropiată, care este de forma $d = 2 \pm 0,3 k$, în care k este un număr întreg.

În secțiunea de îmbinare a unei piese avem în genere grupul de solicitări N , T , M , cari prin îmbinarea nituită vor trebui să fie transmise dela o piesă la alta.

2^o. Imbinarea se poate face legând piesele direct între ele (fig. 382 a). În acest caz niturile sunt supuse la o singură secțiune de forfecare.

Imbinarea este simplă și economică, are însă desavantajul că nici N nici T nu se transmit după axele lor, ci desaxate, ceea ce dă loc la momente suplimentare, cari măresc rezistențele în piese.

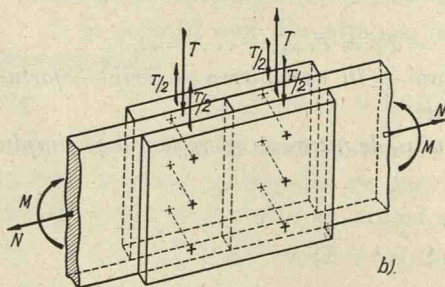
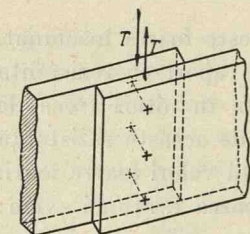


Figura 382

Imbinarea se poate face și cu ajutorul ecliselor ca în figura 382 b, când niturile sunt supuse la două secțiuni de forfecare.

Imbinarea cu eclise simetrice remediază inconvenientul semnalat, însă este mai scumpă.

Se poate întrebuința și o singură eclisă, mai ales

acolo unde din ansamblul îmbinării, dezvoltarea momentelor suplimentare este împiedicată.

3^o. La calculul nituirilor vom întrebuința metoda generală a secțiunilor.

Dacă în cazul figurii 382 a, facem o secțiune printre cele două piese, ea va întâlni numai tijile niturilor și deci în dreptul lor sec-

țiunea se compune numai din secțiunea niturilor (fig. 383). Prin urmare, această secțiune va trebui să transmită grupul de solicitări N , T , M dela o piesă la alta. În cazul ecliselor, dacă ducem două secțiuni printre eclise și piese, secțiunea se compune tot numai din secțiunea niturilor, însă în acest caz nitul are două secțiuni de forfecare. Și într'un caz și în celălalt secțiunea în dreptul îmbinării se compune numai din secțiunea niturilor.

4°. Pentru ca la calculul niturilor să putem aplica normele de până acum, vom reduce sistemul de solicitări la o rezultantă aplicată în centrul de greutate al secțiunii niturilor și la un moment ce rezultă în raport cu acest punct.

Așa dar, N și T le vom considera aplicate în centrul de greutate al secțiunii niturilor.

Fig.
383

5°. Așa fiind, după normele de până acum, putem calcula valoarea lui $\bar{\sigma}$ în fiecare punct al secțiunii niturilor.

Secțiunea unui nit fiind mică, vom presupune că $\bar{\sigma}$ se distribuie uniform.

6°. Dacă se multiplică $\bar{\sigma}$ astfel calculat, cu secțiunea nitului, se obține o forță R la care nitul este solicitat și care o presupunem aplicată în centrul de greutate al secțiunii nitului.

R astfel calculat va trebui să satisfacă condițiilor date de ecuația (4).

a) Nituri cari transmit o forță axială N .

1°. Vom lua cazul cel mai simplu, în care niturile sunt solicate la o singură secțiune de forfecare și sunt așezate într'un singur șir ca în figura 384.

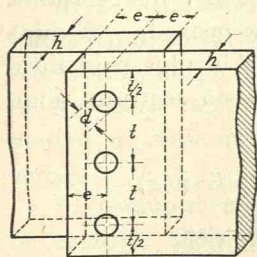


Figura 384

Unui nit îi revine efortul de pe o lățime t , egală cu distanța între axele a două nituri.

Va trebui să avem:

$$(t - d) h \mathcal{R} = d h \mathcal{R}_c = \frac{1}{4} \pi d^2 \bar{\sigma}.$$

Din prima egalitate rezultă:

$$t = (1 + \mathcal{R}_c / \mathcal{R}) d$$

care, pentru valori ale lui $\mathcal{R}_c$ cuprinse între $1,5 \mathcal{R}$ și $2 \mathcal{R}$, ne dă pentru t valori cuprinse între $2,5 d$ și $3 d$. Practica a consfințit ca distanță minimă între nituri: $t = 3 d$.

Această condițiune satisfăcută, n'avem să ne ocupăm de presiunea pe părțile găurii.

Prin nituire, secțiunea platbandelor se slăbește. Raportul α între rezistența $\mathfrak{K}_b$, din secțiunea brută a barei, către rezistența $\mathfrak{K}_n$, din secțiunea netă, poartă numele de *coeficient de utilizare*.

Avem evident:

$$N = \mathfrak{K}_b t h = \mathfrak{K}_n (t - d) h$$

care ne dă

$$\alpha = \mathfrak{K}_b / \mathfrak{K}_n = (t - d) / t.$$

De acest coeficient va trebui să ținem seamă la determinarea grosimei h a platbandelor.

În cazul îmbinării din figură ($t = 3d$) acest coeficient este $(t - d)/t = \frac{2}{3}$, deci destul de mic.

Distanța e , pe baza considerațiunilor dela calculul ochiului pentru buloane, se ia $e = 1,5d$.

Această îmbinare convine pentru cazul când avem de transmis eforturi mici.

2°. Când eforturile de transmis sunt mai mari, atunci așezăm niturile pe două sau mai multe șiruri (fig. 385).

În cazul când le așezăm pe două șiruri avem evident:

$$(t - d) h \mathfrak{K} = 2 d h \mathfrak{K}_c = 2 \frac{1}{4} \pi d^2 \mathfrak{C}.$$

În această relație s'a presupus că ruperea platbandei s'a făcut după secțiunea AB . Ruperea ei însă se poate face și după secțiunea ACB , slăbită în plus prin nitul

C . Pentru ca ruperea să nu aibă loc după această secțiune sinuoasă, trebuie să avem:

$$(t - d) \mathfrak{K} \leq 2 (t/2 \cos \varphi - d) (\mathfrak{K} \cos \varphi + \mathfrak{C} \sin \varphi).$$

Distanța e_1 între șiruri dată de formula empirică:

$$e_1 = 1,6 t (1 - 0,2 t/d)$$

este acoperitoare aceleia dată de formula teoretică.

Formula empirică este valabilă în intervalul:

$$2,5 d \leq t \leq 4 d.$$

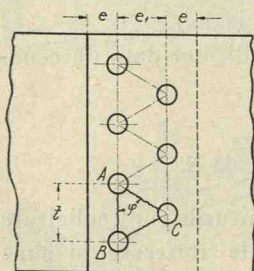


Figura 385

Aceeași normă se păstrează și când avem mai multe șiruri de nituri.

În acest caz, niturile se vor dispune așa fel ca să obținem cel mai mare coeficient de utilizare.

În cazul figurii 386, în care numărul niturilor dela un șir la altul crește cu câte unul, vom avea rezistența maximă în secțiunea 1 când efortul R , ce transmite un nit dela o platbandă la alta, este mai mare decât efortul ce corespunde slăbirii piesei prin o gaură de nit, deci când $R > d h \mathfrak{X}$. În acest caz, rezistența maximă este în secțiunea 1 și coeficientul de utilizare este $\alpha = (b - d)/b$.

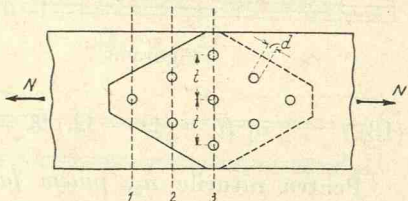


Figura 386

În cazul când $R < d h \mathfrak{X}$, atunci rezistența maximă este în secțiunea 3 și coeficientul de utilizare este

$$\alpha = (b - 3d)/b (1 - 3R/N),$$

pentru că, până în secțiunea 3, s'a transmis, dela o platbandă la alta, efortul corespunzător a 3 nituri.

Numai în cazul special când $R = d h \mathfrak{X}$ avem aceeași rezistență în cele trei secțiuni 1, 2 și 3.

b) Îmbinarea mai multor platbande cu ajutorul unei eclise.

Această îmbinare se întrebuițează, atunci când din ansamblul îmbinării rezultă că momentele ce se produc din cauza dezaxării eforturilor, nu pot lua naștere. Este, de exemplu, cazul platbandelor ce formează talpa unei grinzii cu inimă plină. În celelalte cazuri, pentru a evita nașterea acestor momente, vom întrebuiți două eclise.

Să presupunem că avem de îmbinat platbandele a căror secțiuni nete sunt: $\Omega_1 + \Omega_2 + \dots = \Omega$, cu ajutorul unei eclise a cărei secțiune netă este Ω_e , așa cum se arată pe figura 387.

1°. Să determinăm secțiunea eclisei. Dacă facem o secțiune dreaptă prin rostul în care este întreruptă platbanda Ω_i , avem:

$$\mathfrak{X} (\Omega - \Omega_i + \Omega_e) = \mathfrak{X} \Omega \quad \therefore \quad \Omega_e = \Omega_i$$

adică, secțiunea eclisei trebuie să fie egală cu cel puțin secțiunea celei mai mari platbande.

2°. Să determinăm numărul de nituri pe diferite porțiuni.

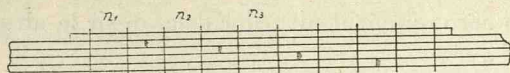


Figura 387

Pentru niturile n_1 , vom face secțiunea care foarfecă aceste nituri și trece prin primul rost. Vom avea:

$$(13) \quad n_1 R + (\Omega - \Omega_1) \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \Omega \quad \therefore \quad n_1 R = \Omega_1 \mathfrak{X}.$$

Pentru niturile n_2 , putem face două secțiuni.

Prima prin eclisă, prin rostul platbandelor 1 și 2 și prin niturile n_2 . Vom avea:

$$(13) \quad n_2 R + (\Omega_e + \Omega - \Omega_1 - \Omega_2) \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \Omega \quad \therefore \quad n_2 R = (\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_e) \mathfrak{X}$$

a doua secțiune o facem prin niturile n_1 , n_2 , și rostul plathandelor 1 și 2, care ne dă:

$$(n_1 + n_2) R + (\Omega - \Omega_1 - \Omega_2) \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \Omega \quad \therefore \quad (n_1 + n_2) R = (\Omega_1 + \Omega_2) \mathfrak{X}$$

în care punând valoarea lui n_1 , găsim:

$$(13) \quad n_2 R = \Omega_2 \mathfrak{X}$$

Acest număr, n_2 , este mai mare decât cel găsit cu ajutorul primei secțiuni pentru că totdeauna avem $\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_e \leq \Omega_2$ din cauză că Ω_e este egală cu secțiunea platbandei celei mai mari.

Procedând la fel găsim:

$$(13) \quad n_3 R = \Omega_3 \mathfrak{X}$$

și așa mai departe.

În fine, avem evident

$$n_4 R = \Omega_4 \mathfrak{X}.$$

Dacă facem o secțiune în scară, așa ca să taie toate niturile, se vede că avem:

$$(14) \quad (n_1 + n_2 + n_3) R = (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) \mathfrak{X} = \Omega \mathfrak{X}$$

relație dela sine satisfăcută.

Valorile lui n , astfel obținute, se măresc cu 20%. Evident se vor lua pentru n valori întregi.

c) Îmbinarea a două corniere.

Aceasta se face cu ajutorul ecliselor corniere ca în figura 388.

Ca să determinăm secțiunea ecliselor corniere vom face o secțiune printr'un rost. Dacă secțiunile nete, a fiecărei corniere de îmbinat și a fiecărei corniere eclisă, sunt Ω și Ω_e , vom avea:

$$(\Omega + 2 \Omega_e) \mathfrak{X} = 2 \Omega \mathfrak{X} \quad \therefore \quad \Omega_e = \frac{1}{2} \Omega,$$

deci, secțiunea eclisei va fi cel puțin jumătate din aceea a unei corniere.

Pentru calculul numărului de nituri vom face mai multe secțiuni cari să taie niturile.

Prima secțiune o facem printr'un rost, așa

fel, ca să taie niturile n_1 și n'_1 . Cum niturile n_1 și n'_1 se așează unele în intervalul celorlalte, vom avea oricând $n'_1 = n_1 \pm 1$.

Deci:

$$(15) \quad (2 n_1 \pm 1) R + (\Omega + \Omega_e) \mathfrak{X} = 2 \mathfrak{X} \Omega \quad \therefore \quad (2 n_1 \pm 1) R = (\Omega - \Omega_e) \mathfrak{X}$$

care ne dă numărul de nituri n_1 .

A doua secțiune o facem așa ca să taie toate niturile. Vom avea:

$$[2 (2 n_1 + 1) + n_2] R = 2 \Omega \mathfrak{X},$$

care, ținând seamă de relația precedentă, ne dă:

$$(16) \quad n_2 R = 2 \Omega_e \mathfrak{X}$$

Valorile lui n astfel găsite se sporesc ca în cazul precedent cu 200/0.

d) Nituri cari transmit o forță tăietoare.

Să presupunem cazul foarte simplu al îmbinării a două platbande cu câte un singur șir de nituri.

Se știe că, în cazul secțiunilor dreptunghiulare, rezistențele $\mathfrak{C}$ se distribuie după o parabolă (fig. 389).

Dacă, la limită, niturile s'ar pune la distanța dy , atunci unui nit i-ar reveni de transmis efortul:

$$dR = dy \cdot 1,5 T (h^2 - 4 y^2) / h^3.$$

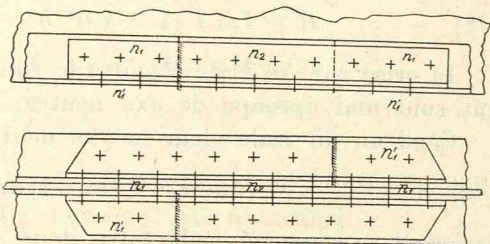


Figura 388

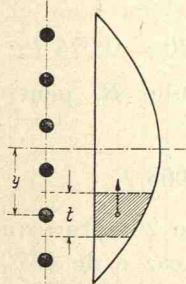


Figura 389

Dacă distanța între nituri este t , atunci unui nit care se găsește la distanța y de axa neutră, îi revine efortul de pe intervalul dela $y - \frac{1}{2}t$ până la $y + \frac{1}{2}t$, deci:

$$(17) \quad R = 1,5 T (t/h) (1 - 4 y^2/h^2 - t^2/3 h^2).$$

Dacă niturile sunt așezate la distanțe egale, atunci $h/t = n$, adică numărul niturilor din șirul considerat, și deci:

$$(18) \quad R = 1,5 T (1 - 4 y^2/h^2 - 1/3 n^2)/n.$$

În orice caz, se vede că niturile sunt cu atât mai sollicitate cu cât sunt mai aproape de axa neutră.

Când un nit cade chiar în axa neutră, avem:

$$(19) \quad R = 1,5 T (1 - 1/3 n^2)/n$$

iar când axa neutră cade între două nituri, atunci

$$(20) \quad R = 1,5 T (1 - 4/3 n^2)/n.$$

Pentru $n \geq 5$, putem lua

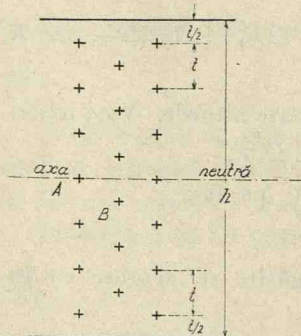


Figura 390

$$R \approx 1,5 T/n.$$

Dacă nituirea e pe mai multe șiruri (fig. 390), atunci efortul R se determină cu ajutorul formulei (18) în care n este numărul total de nituri.

În cazul figurii, avem: $n = 20$.

Efortul ce revine unui nit A , din axa neutră, este:

$$R = 1,5 T (1 - 1/3 \cdot 20^2)/20 = 0,074 T.$$

Efortul ce revine nitului B , pentru care $y/h = 1/14$, este:

$$R = 1,5 T (1 - 4/14^2 - 1/3 \cdot 20^2)/20 = 0,068 T.$$

Dacă am împărți forța tăietoare uniform la cele 20 nituri am obține $R = 0,05 T$, eroarea care se face în acest caz e de 48%.

e) Nituri cari transmit un moment încovoietor.

Este cazul îmbinării inimii unei grinzi cu inimă plină. Axa momentului încovoietor este normală pe secțiunea de tăiere a

niturilor. Deci, secțiunea niturilor este supusă la un moment de răsucire, egal cu momentul încovoietor. Avem deci:

$$\mathfrak{S} = M r / I_p$$

și deci efortul unui nit, dacă Ω este secțiunea lui de forfecare, va fi:

$$(21) \quad R = M r \Omega / I_p$$

Direcția lui $\bar{R}$ este evident normală pe $\bar{r}$. Componentele după axele Ox și Oy vor fi:

$$(22) \quad R_x = M y \Omega / I_p \quad \text{și} \quad R_y = M x \Omega / I_p$$

avem evident încă: $I_p = I_x + I_y$.

Să facem câteva aplicații.

10. Să presupunem că avem un singur șir de nituri (fig. 391). Dacă distanța între niturile extreme este h , atunci $t = h/(n-1)$ și deci:

$$(23) \quad I_x = [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2/4] 2 h^2 \Omega / (n-1)^2 \\ = \Omega h^2 n (n+1) / 12 (n-1) \\ I_y = 0.$$

Efortul în nitul cel mai obosit, $y = \frac{1}{2} h$, este:

$$(24) \quad R_x = R = \alpha M / h$$

în care:

$$(25) \quad \alpha = 6 (n-1) / n (n+1).$$



Figura 391

Pentru două sau mai multe șiruri de nituri verticale, obținem în mod analog rezultatele din tabloul:

$\alpha = \frac{3(n-1)}{n(n+1)}$	$\alpha = \frac{6(n-1)}{n(2n-1)}$	$\alpha = \frac{2(n-1)}{n^2}$	$\alpha = \frac{2(n-1)}{(n-1)^2 + 1}$	$\alpha = \frac{3(n-1)}{n(2n-1)}$	$\alpha = \frac{6(n-1)}{5n^2 - 7n + 6}$

În practică se ia de obicei $I_y = 0$.

În cazul când h este mic și avem multe șiruri de nituri, atunci valoarea lui I_y nu este neglijabilă și va trebui să ținem neapărat seama de valoarea lui în valoarea lui I_p .

În practică de obicei ni se dă valoarea momentului M și h . Dacă ni se dă diametrul niturilor, atunci avem distanța t între nituri și deci n , de pe un șir de nituri. Ceea ce căutăm apoi este numărul de șiruri, adică valoarea lui a . Pentru a ține cont de sporul de nituri ce trebuie dat, îmbinarea se calculează la $1,2 M$.

Când avem mai multe feluri de solicitări, vom aduna efectele ce ele produc asupra aceluiași nit.

2°. *Îmbinări nituite la rezervoare și căldări.* Diametrul niturilor se calculează tot cu formula lui Bach, care aci este: $d = \sqrt{5 h_m} - 0,4$.

La căldări, când se întrebuințează două eclise de îmbinare, adică atunci când niturile sunt solicitate la două secțiuni de forfecare, dimensiua lui d se reduce cu câte 1 mm, pentru fiecare șir de nituri, până la maximum 3 mm.

De exemplu, pentru o îmbinare cu eclise, cu două secțiuni de forfecare a niturilor și cu două șiruri de nituri vom lua $d = \sqrt{5 h_m} - 0,4 - 0,2$. Această valoare se rotunjește la dimensiunile normale după aceeași normă ca la construcțiile metalice.

Îmbinările transmit aci numai eforturi axiale N .

Distanța între șiruri și aci trebuie să satisfacă condiția dată de relația (12).

Dispoziția niturilor va fi așa ca să avem cea mai bună utilizare a tablelor de îmbinare.

Acestea-s normele din punctul de vedere al rezistenței materialelor.

Cursurile speciale prescriu pe lângă acestea și norme pentru o bună etanșitate.

Aplicația Nr. 107. Îmbinarea unui arbaletrier cu coarda. Un arbaletrier, în

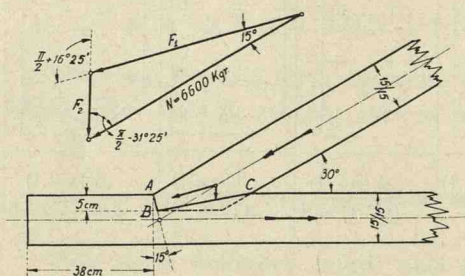


Figura 392

care am $N = 6600$ kg, face cu coarda un unghi de 30° . Să se îmbine aceste două piese, știind că $\sigma = 80$ kg/cm², $\sigma_L = 24$ kg/cm² și $\tau = 10$ kg/cm². Îmbinarea se face cu prag și cep, ca în figura 392. Luăm ca lățime pentru ambele piese $b = 15$ cm. Înălțimea pragului se face cel mult $1/3$ din înălțimea corzii.

În mod aproximativ, acest prag va transmite efortul din coardă, adică $N_1 = 6600 \cos 30^\circ = 5716 \text{ kg}$.

Înălțimea lui aproximativă va fi $h_1 = N_1 / \varpi \cdot b = 5716 / 80 \cdot 15 = 4,76 \text{ cm}$. Așa dar, înălțimea corzii o vom lua $h = 3 h_1 = 3 \cdot 4,76 = 14,2 \simeq 15 \text{ cm}$.

Să presupunem că și înălțimea arbaletrierului este 15 cm.

Pragul se face după bisectoarea unghiului pe o adâncime de $15/3 = 5 \text{ cm}$. În aceste condițiuni, avem:

$$AC = 15 / \sin 30^\circ = 30 \text{ cm} \quad , \quad AB = 5 / \cos 15^\circ = 5 / 0,966 = 5,18 \text{ cm}.$$

$$BC = 29,09 \text{ cm} \quad , \quad ACB = 9^\circ 54'$$

Forța N , din arbaletrier, o descompunem după normală la mijlocul pragului AB și o normală la BC . Pentru a ușura pragul AB vom ține seamă că după BC se desvoltă o frecare oarecare. Vom presupune că avem un coeficient de frecare $\tan \varphi = 0,2$ și deci $\varphi = 11^\circ 19'$. În aceste condiții, N și componentele sale, F_1 și F_2 , fac între ele unghiurile din figură, de unde rezultă:

$$6600 / \cos 16^\circ 25' = F_1 / \cos 31^\circ 25' = F_2 / \sin 15^\circ \quad \therefore \quad F_1 = 5870 \text{ kg} \text{ și } F_2 = 1780 \text{ kg}.$$

Rezistența pe pragul AB este: $\varpi = 5870 / 15 \cdot 5,18 = 75,5 \text{ kg/cm}^2$. Rezistența admisibilă pe pragul AB care face cu normala la cele două grinzi unghiul $\varphi = 15^\circ$ este: $\varpi_a = \frac{1}{2} (80 + 24) + \frac{1}{2} (80 - 24) \cos 2\varphi = 76,3 \text{ kg/cm}^2$. Prin urmare, rezistența admisibilă nu este întrecută.

Să ne ocupăm de rezistențele de pe fața BC . Această suprafață are lățimea $15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ cm}$, pentru că pe partea centrală se face un cep pentru a împiedica deplasările laterale. Nu se poate conta că pe fundul cepului s'ar putea face vreun contact.

Forța F_2 face cu normala la BC unghiul $11^\circ 19'$ și deci

$$N_2 = 1780 \cos 11^\circ 19' = 1780 \cdot 0,981 = 1750 \text{ kg}.$$

Ne mai trebuie punctul de aplicație a lui F_2 , pe fața BC . Se poate găsi grafic sau analitic. Se găsește prin calcul că excentricitatea lui F_2 este $\nu = 3,61 \text{ cm}$. Rezistența maximă este deci $\varpi = 1750 (1 + 6 \cdot 3,61 / 29,09) / 10 \cdot 29,09 = 10,5 \text{ kg/cm}^2$, deci mai mică decât rezistența admisibilă care e: $\varpi_a = \frac{1}{2} (80 + 24) - \frac{1}{2} (80 - 24) \cos 2 \cdot 9^\circ 54' = 25,6 \text{ kg/cm}^2$.

Pentru ca îmbinarea să reziste, mai trebuie ca rezistența la forfecare în planul orizontal din coardă trecând prin B să nu treacă de $\varpi // = 10 \text{ kg/cm}^2$. Forța orizontală care solicită această secțiune este $F_1 \cos 15^\circ = 5870 \cdot 0,966 = 5670 \text{ kg}$. Așa dar, distanța dela B la capătul corzii trebuie să fie minimum $5670 / 15 \cdot 10 = 39,1 \text{ cm}$ sau dela A la capătul corzii să avem 38 cm. Componenta orizontală din coardă, 5720 kg, diferă de efortul 5670 kg la care am calculat secțiunea de forfecare numai cu 50 kg; rezultă deci că frecarea nu aduce o mare ameliorare și că dimensionarea pe baza calculului aproximativ făcut la început, este aproape suficientă.

Aplicația Nr. 108. Talpa unei grinzi cu inima plină este formată din 3 plat-bande de 710 și 14 mm grosime și late de 220 mm.

Niturile se așează pe două șiruri. Rezistențele admisibile sunt $\varpi_a = 1000$, $\varpi_c = 1500$ și $\varpi_a = \varpi / \sqrt{3/3} \simeq 600 \text{ kg/cm}^2$.

Diametrul nitului se ia $d = \sqrt[3]{5(0,7 + 1,0 + 1,4)/3} = 0,2 \approx 2$ cm. Efortul ce poate transmite un nit prin forfecare este: $R_f = \frac{1}{4} \pi 2^2 \cdot 600 = 1,89$ t, iar prin presiunea pe gaura platbandei celei mai subțiri: $R_c = 0,7 \cdot 2 \cdot 1500 = 2,1$ t, deci $R = 1,89$ t.

Secțiunile nete ale celor trei platbande sunt:

$$\Omega_1 = 0,7(22 - 2,2) = 12,6 \text{ cm}^2, \Omega_2 = 18,0 \text{ cm}^2 \text{ și } \Omega_3 = 25,2 \text{ cm}^2.$$

Înălțimea eclisei se va lua 14 mm.

Numărul de nituri corespunzător va fi: $n_1 = 1000 \cdot 12,6 / 1,89 = 6,67$, $n_2 = 9,54$, $n_3 = 13,34$ și sporite cu 20% vor fi:

$$n_1 = 2,4 \quad , \quad n_2 = 2,6 \quad , \quad n_3 = 2,8.$$

Dacă niturile din același șir se așează la distanța $t = 3d = 6$ cm, atunci lungimea eclisei de îmbinare va fi $(4 + 6 + 8 + 8) \cdot 6 = 156$ cm.

Aplicația Nr. 109. În condițiile aplicației 108, să se îmbine două corniere, de $90 \times 90/11$, cu ajutorul a două eclise corniere de $70 \times 70/9$. Secțiunile nete sunt respectiv: $\Omega = 18,7 - 2,1 \cdot 1 = 16,5 \text{ cm}^2$ și $\Omega_e = 10,1 \text{ cm}^2$.

Dacă îmbinarea se face ca în figura 388 unde $n'_1 = n_1 - 1$, atunci avem:

$$(2n_1 - 1)R = (\Omega - \Omega_e) \mathcal{K} \therefore n_1 = 2,24 \text{ și}$$

$$n_2 R = 2\Omega \mathcal{K} \therefore n_2 = 10,68.$$

Aceste nituri sporite cu 20% ne dau:

$$n_1 = 3 \quad , \quad n'_1 = 2 \quad , \quad n_2 = 13.$$

Lungimea eclisei de îmbinare, dacă se așează niturile ca în figura 388 va fi $(13 + 2,3) \cdot 6 = 114$ cm.

Aplicația Nr. 110. Să presupunem că platbandele și cornierele din exemplele

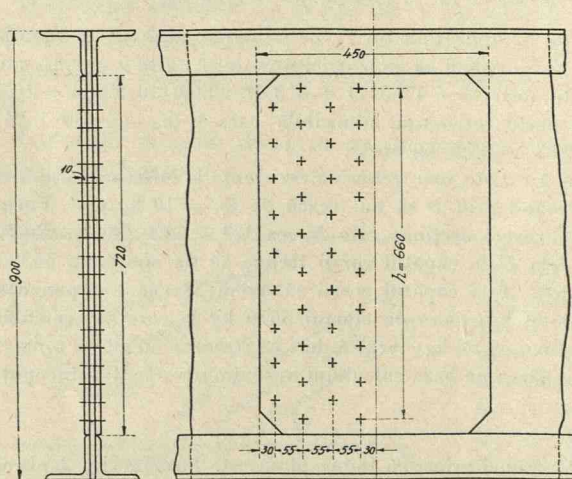


Figura 393

precedente formează talpa unei grinzi cu inimă plină a cărei inimă este 90×1 cm (fig. 393).

Se admite că inima din cauza nituirii are momentul de inerție slăbit cu 15% și deci $I = \frac{1}{12} 0,85 \cdot 90^3 = 51640 \text{ cm}^4$, $W = 51640 / 45 = 1148 \text{ cm}^3$.

Momentul încovoietor la care poate rezista inima este $M = W \mathcal{K}_a = 1148 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{cm} =$

11,48 tm și care va trebui să fie transmis prin îmbinare.

Efortul ce poate transmite un nit, de $\varnothing$ 2 cm prin forfecare, este $R_f = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi 2^2 \cdot 600 = 3,77$ t, iar prin presiunea pe gaură $R_c = 2 \cdot 1.1500 = 3$ t. Așa dar, $R = 3$ t.

Îmbinarea se face cu ajutorul a două eclise așezate pe inima grinzii, între cornierele ce formează talpa.

Înălțimea ecliselor este $90 - 2.9 = 72$ cm. Distanța între niturile extreme va fi $72 - 2.1,5 d = 66$ cm, deci $h = 66$ cm.

Pe această distanță putem așeza exact $n = 12$ nituri. Să găsim câte șiruri de nituri putem pune.

Pentru a ține seamă că vom mări numărul niturilor cu 20% vom calcula îmbinarea la momentul 1,2 M , și din formula (24) deducem:

$$a = R h / 1,2 M = 3,00 \cdot 0,66 / 1,2 \cdot 11,48 = 0,1436$$

O îmbinare cu 4 șiruri de nituri din care două șiruri cu câte 12 nituri și alte două cu câte 11 nituri, ne dă $a = 0,1196$, deci o îmbinare mai puternică. Vom păstra aceeași nituire, însă vom micșora numărul niturilor. Prin încercări găsim că îmbinarea care convine se compune din 4 șiruri de nituri, din care două șiruri cu câte 10 nituri și alte două cu câte 9 nituri, așezate în zig-zag. Această îmbinare are $a = 0,1421$.

Să găsim grosimea ecliselor. Notăm cu b grosimea fiecăreia din ele. Momentul de inerție al secțiunii brute este:

$$I = 2 \cdot \frac{1}{12} b h^3 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot 72^3 = 62208 b.$$

Eclisele sunt slăbite printr'un șir de 10 nituri de $\varnothing$ 2 cm care după formula (23) dau un moment de inerție:

$$I_n = 2 \cdot b \cdot 2.66^2 \cdot 10 \cdot 11 / 12.9 = 17747 b.$$

Momentul de inerție al secțiunii nete este:

$$(62208 - 17747) b = 44461 b; W = 44461 b / 36 = 1235 b.$$

Trebue să avem: $1235 b \cdot 1000 = 1148000$, deci $b = 0,93$ cm $\sim$ 10 mm. Celelalte elemente sunt cele din fig. 393.

Aplicația Nr. 111. Talpa unei grinzii cu zăbrele este formată din o inimă de $60 \times 1,2$ cm, două corniere $110 \times 110 / 12$ și o serie de platbande (fig. 394). Inima, în cursul ei, este slăbită cu 8 nituri de $\varnothing$ 23 mm.

Să se îmbine inima cu ajutorul a două eclise.

Înălțimea ecliselor va fi $60 - 11 = 49$ cm. Rezistențele vor fi acelea din exemplele precedente.

Eforturile ce poate transmite un nit prin forfecare sau presiunea pe gaură sunt:

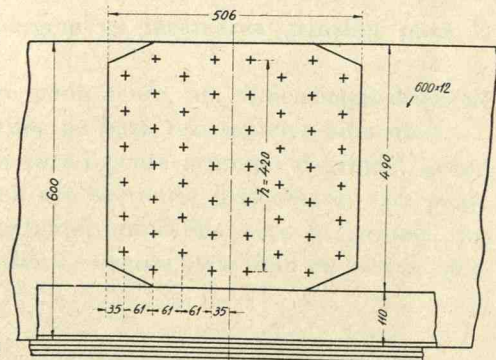


Figura 394

$$R_f = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi 2,3^2 \cdot 600 \approx 5$$
 t; $R_c = 2,3 \cdot 1,2 \cdot 1500 = 4,14$ t.

Pentru că îmbinarea trebuie să fie cu 20% mai puternică, efortul în nitul cel mai oboșit nu va trebui să treacă de $4,14/1,2 = 3,45$ t.

Efortul din inimă este $N = (60 - 8.2,3) 1,2.1000 = 49,92$ t. Acest efort se transmite îmbinării cu excentricitatea $(60 - 49)/2 = 5,5$ cm, care dă un moment $M = 49,92.0,055 = 2,75$ tm.

Îmbinarea va transmite deci efortul de $N = 49,92$ t și momentul $M = 2,75$ tm.

O îmbinare pe 4 șiruri de nituri, din cari două șiruri cu câte 7 nituri și două de câte 6 nituri, cu $a = 3(n - 1)/n(2n - 1)$, ne dă:

$$R = 49,92/26 + 3.6.2,75/0,42.7.13 = 3,22 \text{ t.}$$

O îmbinare cu un nit mai puțin la șir dă un efort mai mare de 3,45 t. E de observat că nitul cel mai puțin oboșit are un efort 0,62 t.

Să găsim grosimea b a fiecărei eclise. Secțiunea lor netă este

$$2(49 - 7.2,3). b = 65,8 \text{ b.}$$

Momentul de inerție al secțiunii brute este $I = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot 49^3 = 19608 \text{ b}$; momentul de inerție al găurilor de nit este $2 \cdot b \cdot 42^2 \cdot 2,3 \cdot 7 \cdot 8/6 \cdot 12 = 6311 \text{ b}$, deci momentul de inerție al secțiunii nete este $19608 \text{ b} - 6311 \text{ b} = 13297 \text{ b}$. Momentul rezistent este $13297 \text{ b}/24,5 = 543 \text{ b}$. Așa dar:

$$b = (49920/65,8 + 275000/543)/1000 = 0,76 + 0,51 = 1,26 \text{ cm.}$$

Vom lua $b = 13 \text{ mm}$.

Se va observa că, din cauza slăbirii prin nituri și a transmiției excentrice a efortului, grosimea unei eclise este mai mare decât inima.

XXV. STABILITATEA CONSTRUCȚIUNILOR.

A) Principiul stabilității și aplicarea lui.

1. Ecuația principiului stabilității construcțiilor.

S'a arătat că o grindă se găsește în echilibru atâta timp cât între lucrul mecanic L_e , al forțelor exterioare, și lucrul mecanic L_i acumulat de grindă prin deformațiune, există relația:

$$(1) \quad L_e = L_i$$

Valoarea maximă a lui L_i este aceea pe care a acumulat-o grinda, până în momentul ruperii. Dacă această valoare este L_{ir} , atunci echilibru va exista atâta timp cât

$$(2) \quad L_e \leq L_{ir}$$

În practică însă nu mergem cu încărcarea grinzilor până la limita de ruptură.

În toate calculele făcute până acum, am dimensionat diferitele elemente ale secțiunii grinzilor pe baza rezistențelor admisibile.

Dacă lucrul mecanic pe care-l poate acumula o grindă, având în vedere rezistența maximă din secțiunea periculoasă care poate avea cel mult valoarea rezistenței admisibile, este L_{ia} , atunci, din punct de vedere practic, echilibru va exista atâta timp cât avem relația:

$$(3) \quad L_e \leq L_{ia}$$

Fără a ieși în evidență, am utilizat de fapt în toate calculele noastre de până acum această ecuație.

Să presupunem că avem o grindă sau o construcțiune oarecare, solicitată de un sistem de sarcini F , în care rezistențele efective *n'au ajuns* la limita de rupătură dacă aplicăm ecuația (2), sau la rezistențele admisibile dacă aplicăm ecuația (3).

În acest caz, echilibru există și se aplică ecuația (1).

Să mai presupunem că dăm sarcinilor F niște creșteri infinit mici dF , sau că aplicăm construcției un sistem oarecare de sarcini infinit mici dF . Sub acțiunea lor construcțiunea se va deforma și cele două expresii ale lucrului mecanic vor crește respectiv cu dL_e și dL_i .

În aceste condițiuni, întru cât există relația (1), construcția *va fi* sau *nu* în echilibru, sau zicem că *va avea* sau *nu* stabilitate, după cum:

$$dL_e \leq dL_i$$

Condițiunea:

$$(4) \quad dL_e = dL_i$$

ne determină valoarea sarcinei, sau a sarcinilor F , când construcția se găsește la limita de stabilitate.

Aceste valori ale sarcinilor F poartă numele de *sarcini critice*.

Din cele de mai sus rezultă că ecuația (3) este necesară dar nu și suficientă.

Pentru ca echilibru să existe trebuie ca să fie satisfăcută și inegalitatea:

$$(5) \quad dL_e < dL_i$$

Cantitățile dL_e și dL_i se vor calcula în funcțiune de deformațiunea construcției, căpătată sub acțiunea sistemului de sarcini dF .

Din cele de mai sus rezultă *că pot exista construcțiuni în cari rezistențele admisibile nu sunt întrecute și cu toate acestea ele nu sunt în echilibru.*

Vom ilustra aceasta printr'un exemplu. Să presupunem că avem un cablu (o funie) de oțel, lung de 10 m și supus la o forță axială de 1 t. Dacă rezistența admisibilă este $\mathfrak{R}_a = 1400 \text{ kg/cm}^2$, atunci avem nevoie de o secțiune $\Omega = 1000 : 1400 = 0,715 \text{ cm}^2$.

Prin urmare, dacă $\Omega \geq 0,715 \text{ cm}^2$, am satisfăcut ecuația (3) indiferent dacă forța axială este tensiune sau compresiune. Experiența de toate zilele arată însă, că dacă forța axială este o tensiune, atunci există echilibru, iar dacă este o compresiune, atunci nu există echilibru.

Să aplicăm acestui caz criteriul de mai sus.

Să presupunem că sub acțiunea unor sarcini infinit mici dF normale pe direcția cablului acesta s'a deplasat în poziția infinit vecină, ca în figura 395, cele două capete apropiindu-se între ele cu cantitatea u .

Poziția cablului fiind infinit vecină liniei drepte, și forța de la extremități rămânând aceeași, egală cu 1 t., dL_i produs în cablu de tensiune sau compresiune va fi egal cu zero. Pentru că la cable admitem $M = 0$, pe toată lungimea lui, atunci și dL_i produs din încovoierea cablului este nul. În acest caz avem $dL_i = 0$.

Să evaluăm pe dL_e . În cazul când avem tensiune $dL = -1 \cdot u$, iar în cazul când avem compresiune $dL_e = +1 \cdot u$.

În acest caz, se vede că rezultatul experiențelor coincide cu rezultatul dat de ecuația (5).

Se pot da multe exemple de acest fel.



Figura 395

2. Aplicarea principiului stabilității construcțiilor.

Avem două metode la îndemână.

a) **Prima metodă.** Ecuația (4) fixează limita între stabilitatea și instabilitatea construcției.

Dacă sarcina critică F_c , dată de această ecuație, este depășită cu o cantitate oricât de mică vom noi, construcția devine instabilă, adică poate avea deodată mai multe poziții de echilibru.

De aci rezultă definiția:

Sarcina critică F_c , este cea mai mare sarcină pentru care construcția are o singură poziție de echilibru.

Din aplicațiile ce vom face, vom vedea cum traducem în calculul matematic această definiție.

b) **A doua metodă.** Pentru simplitatea expunerii, vom presupune că avem de-a face cu o singură forță, F .

Vom presupune construcția dată solicitată de un sistem de sarcini arbitrar, infinit mic, sub acțiunea căruia ea primește o deplasare infinit vecină celeia în care se găsește, compatibilă cu legăturile sale. Vor rezulta atunci o serie de deformațiuni ale construcției și o serie de deplasări ale punctelor sale.

Creșterea dL_i , a lucrului mecanic interior, se va exprima în funcție de aceste deformațiuni.

Pentru forța F va rezulta o deplasare infinit mică $\bar{j}$, și creșterea dL_e , a lucrului mecanic exterior, va fi $\bar{F} \bar{j}$. În acest caz, ecuația (4) se pune sub forma

$$(4) \quad \bar{F} \bar{j} = dL_i$$

din care deducem valoarea sarcinei critice F_c .

Din exemplele ce vom trata, se va vedea cum se aplică și această formulă.

Observație. Am spus că vom da construcției o deplasare infinit vecină poziției inițiale. În acest mod, rezultatele deduse din ecuația (4) nu se pot aplica și pozițiilor depărtate finit de poziția inițială.

Orice metodă am aplica, această observație rămâne valabilă.

B) Flambajul barelor supuse la compresiune.

1. Definiția flambajului.

O bară dreaptă, supusă la compresiune sub acțiunea a două forțe N , egale și de sens contrar, aplicate la extremitățile ei, rămâne în echilibru atâta timp cât N rămâne sub o anumită limită, N_f . Poziția de echilibru e chiar poziția inițială.

Dacă N depășește această limită, bara părăsește poziția inițială și ocupă o poziție oarecare curbă, după cum se arată în figura 396.

Acesta este un fenomen fizic asupra căruia nu încapem nicio discuțiune.

El poartă numele de *flambaj*, și despre bară se zice în acest caz că *a flambat*.

Sarcina critică N_f , care a provocat flambajul, poartă numele de sarcină de flambaj.

Se vede, din cele de mai sus, că chestiunea flambajului e o chestiune de stabilitate.

În cele ce urmează, vom determina pe baza considerațiilor expuse, sarcina de flambaj în câteva cazuri curenți întâlnite în practică.



Figura 396

2. Grindă articulată la ambele extremități.

Vom presupune grinda supusă la o forță de compresiune aplicată la extremitățile ei. Vom mai presupune că una din articulații se

poate deplasa după direcția extremităților grinzii (fig. 397), și că grinda s'a deplasat față de poziția inițială luând forma curbei din figură.

a) Prima metodă.

Raportăm axa deformată a grinzii la axele Oxy . O secțiune la distanța x de origine are săgeata φ . Momentul încovoiător în această secțiune este pozitiv și are valoarea: $M = N\varphi$.

Ecuția axei deformată a grinzii este

$$(6) \quad EI \, d^2\varphi/dx^2 = -N\varphi$$

Dacă notăm:

$$(7) \quad N/EI = \alpha^2,$$

ecuția (6) devine:

$$(8) \quad d^2\varphi/dx^2 + \alpha^2\varphi = 0$$

a cărei soluțiune este:

$$(9) \quad \varphi = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Cele două constante le determinăm prin condiția că pentru $x = 0$, $\varphi = 0$ care ne dă $A = 0$, și prin condiția că pentru $x = l$, $\varphi = 0$, și deci:

$$B \sin \alpha l = 0$$

Constanta B nu poate fi nulă. Dacă ar fi așa, atunci am avea $\varphi \equiv 0$, ceea ce corespunde liniei drepte, adică poziției inițiale.

Experiența arată însă că grinda a părăsit această pozițiune, și deci există săgeți φ . În aceste condiții, trebuie să avem neapărat $\sin \alpha l = 0$, deci αl trebuie să aibă valorile:

$$\alpha l = 0; \pi; 2\pi; \dots$$

Prima valoare nu este posibilă, iar a doua ne dă numaidecât:

$$(10) \quad \alpha l = \pi$$

și prin urmare:

$$(11) \quad N_f = \pi^2 EI/l^2$$

Așa dar, pentru această valoare a lui N , bara părăsește prima poziție de echilibru, și deci N_f este sarcina de flambaj.

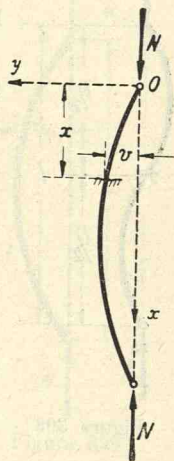


Figura 397

A treia valoare pentru care avem $\sin al = 0$ este 2π , care ne dă pentru sarcina de flambaj

$$N_f = \pi^2 EI / (\frac{1}{2} l)^2$$

valoare care corespunde cazului când mijlocul grinzii ar fi împiedecat să se depărteze lateral (fig. 398).

Valoarea următoare $al = 3\pi$ corespunde cazului când grinda ar fi împiedecată de a se deplasa lateral la $\frac{1}{3}$ din lungimea ei și când avem

$$N_f = \pi^2 EI / (\frac{1}{3} l)^2$$

și analog cu celelalte valori.

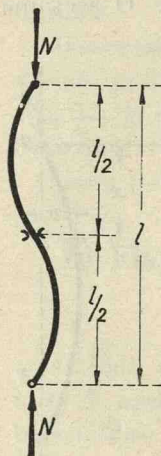


Figura 398

b) A doua metodă.

Să presupunem că grinda a părăsit prima poziție de echilibru din o cauză oarecare.

1°. Sarcina nu se aplică în centrul de greutate al secțiunii, ci cu o excentricitate oarecare înfinit mică, care, pentru acest motiv, o presupunem egală cu zero. În acest caz, grinda e supusă în poziția deformată la un moment $N\varphi$. Așa dar, axa deformată a grinzii și momentul încovoietor, în acest caz, au aceeași ecuație, diferind între ele numai prin factorul constant $N/EI = \alpha^2$.

O ecuație a axei deformată, care satisface această condițiune, este (9) pe care o punem sub forma:

$$(12) \quad \varphi = \varphi_m \sin \alpha x$$

și în care φ_m este săgeata maximă dela mijlocul grinzii.

Această ecuație trebuie să satisfacă condițiilor că pentru $x = 0$, $x = l$ să avem $\varphi = 0$, și deci să avem:

$$(10) \quad \alpha l = \pi$$

vom avea evident și:

$$d\varphi/dx = \alpha \varphi_m \cos \alpha x, \quad d^2\varphi/dx^2 = -\alpha^2 \varphi_m \sin \alpha x$$

Să evaluăm pe dL . Vom avea:

$$(13) \quad dL_i = \frac{1}{2} EI \int_0^l (d^2\varphi/dx^2)^2 dx = \frac{1}{4} \pi EI \alpha^3 \varphi_m^2$$

Să evaluăm pe dL_e . Dacă u este deplasarea infinit mică a articulației în sensul lui N , (fig. 399) avem:

$$dL_e = N u$$

La « Deformația grinzilor prin încovoiere » (pag. 354) s'a stabilit că deplasarea infinit mică u , în sensul lungimii barei, este dată de formula (24):

$$du/dx = -\frac{1}{2} (dv/dx)^2 + C.$$

În cazul nostru pentru $x = \frac{1}{2} l$ avem $du/dx = 0$ de unde rezultă $C = 0$.

Din faptul că originea axelor se mișcă în sensul lungimii barei, rezultă că trebuie să luăm semnul plus înaintea expresiunii. Deci avem

$$du/dx = (dv/dx)^2$$

și prin urmare

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} (dv/dx)^2 dx$$

Cum l_0 diferă de l cu cantitatea foarte mică u , facem aproximația punând, pentru limita superioară $l \approx l_0$, aproximație care de altfel am făcut-o și când am dedus formula (13), și găsim:

$$(14) \quad u = \frac{1}{2} \int_0^l (dv/dx)^2 dx = \frac{1}{4} \pi a v_m^2$$

și deci

$$(15) \quad dL_e = \frac{1}{4} N_f \pi a v_m^2$$

Dacă, în virtutea ecuației (4), egalăm cele două expresii, (13) și (15), găsim tocmai ecuația:

$$(7) \quad N_f/EI = a^2$$

Dacă se compară ecuațiile (7) și (10) găsite pe această cale, se vede că sunt identice cu acelea găsite pe prima cale; așa dar, avem aceleași rezultate.

Aci am făcut ipoteza că grinda părăsește poziția de echilibru din cauză că sarcina N se aplică excentric pe secțiune.

2°. *Bara părăsește poziția sa de echilibru din cauza unei sarcini uniforme distribuite p aplicată normal pe grindă, oricât de mică vom noi, cum ar fi de exemplu adierea unui vânt.*

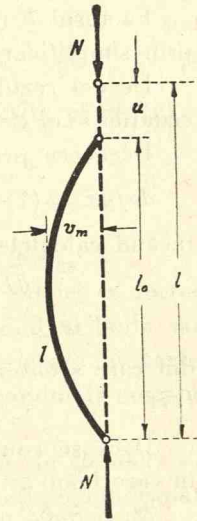


Figura 399

Ecuatia axei deformată în acest caz este:

$$\nu = k (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4)$$

în care am notat pentru prescurtare:

$$k = \frac{1}{24} p l^4 / EI, \quad \xi = x/l$$

Factorul k n'are de altfel nicio importanță pentru că el dispare prin simplificare.

De aci rezultă că ceea ce importă în acest calcul, este forma ecuației axei deformată.

De aceea presupunem $k = 1$, și cu:

$$d\nu/dx = (1 - 6 \xi^2 + 4 \xi^3)/l, \quad d^2\nu/dx^2 = -12 \xi (1 - \xi)/l^2,$$

făcând calculele găsim:

$$dL_i = \frac{1}{2} EI \int (d^2\nu/dx^2)^2 dx = 2,4 EI/l^3,$$

$$dL_e = N_f u = \frac{1}{2} N_f \int (d\nu/dx)^2 dx = 1,7 N_f/7 l,$$

din care scoatem:

$$(17) \quad N_f = 9,88 EI/l^2$$

Dacă se compară acest rezultat cu acela dat de formula (14), în care luăm $\pi^2 = 9,87$, se vede că diferența este numai de 0,1%.

30. Grinda părăsește poziția ei de echilibru din cauza unei sarcini concentrate, aplicată normal pe grindă la mijlocul ei, sarcina fiind oricât de mică voim noi.

Dacă se ține seama de cele spuse mai sus, luăm pentru ecuația axei deformată ecuația:

$$\nu = \xi (3 - 4 \xi^2), \quad d\nu/dx = 3 (1 - 4 \xi^2)/l, \quad d^2\nu/dx^2 = -24 \xi/l^2$$

valabile numai în intervalul $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$.

Dacă se fac calculele de mai sus se găsește:

$$(18) \quad N_f = 10 EI/l^2$$

rezultat care diferă de cel dat de formula (11) cu 0,3%.

De aci se vede că pe această cale — a doua — putem face o infinitate de ipoteze în ceea ce privește modul cum grinda ajunge instabilă. Este evident că sarcina de flambaj va fi dată de acea ipoteză care ne dă valoarea cea mai mică a lui N_f .

Bazați pe această considerațiune putem presupune:

40. Grinda părăsește poziția de echilibru prin aplicarea unei sarcini uniforme distribuite și a unei sarcini concentrate la mijlocul grinzii, ambele infinit mici, însă găsindu-se într'un raport α . Acest raport îl vom determina prin condiția ca N_f să fie minim.

În aceste condițiuni pentru axa deformată a grinzii luăm ecuația:

$$v = \xi (1 - 2 \xi^2 + \xi^3) + \kappa \xi (3 - 4 \xi^2) = (1 + 3 \kappa) \xi - 2 (1 + 2 \kappa) \xi^3 + \xi^4$$

Dacă se fac calculele se găsește:

$$N_f = f(\kappa) EI/l^2$$

în care:

$$f(\kappa) = 10 [1 - (7 \kappa + 0,8)/(672 \kappa^2 + 427 \kappa + 68)]$$

Această expresie este minimă pentru $\kappa = 0,08976$, când $f(\kappa) = 9,8722$.

Avem deci:

$$(19) \quad N_f = 9,872 EI/l^2$$

rezultat care diferă de cel dat de formula (11) cu $0,26\%$.

Din cele de mai sus rezultă că aplicarea excentrică a forței, aplicarea normal pe grindă a unei sarcini uniform distribuite sau concentrate, etc., oricât de mici ar fi ele, luate fiecare în parte, sau toate la un loc, sunt sisteme de solicitări cari conduc la nestabilitatea grinzii.

Observăm în treacăt că cea mai mică sarcină de flambaj s'a obținut în ipoteza că forța se aplică excentric în secțiunea de capăt.

Metoda doua dă exact aceleași rezultate ca și prima, *când luăm ca ecuație a axei deformată a grinzii o soluție a ecuației diferențiale stabilită prin prima metodă.*

În cazul însă, când luăm pentru axa deformată o ecuație apropiată, dată de un sistem de sarcini suplimentar, infinit mic, atunci găsim rezultate foarte apropiate celor date de soluția exactă. S'a arătat cum se pot îmbunătăți aceste rezultate.

Pentru noi rezultă următoarea *normă de calcul. În genere vom aplica prima metodă care este simplă și expeditivă.*

Numai în cazul când prima metodă ne conduce la ecuații diferențiale greu de integrat, vom aplica metoda doua, care ne dă rezultate, practic vorbind, exacte.

Prima metodă se datorește lui Euler, a doua lui Timocenko.

3. Alte cazuri de flambaj.

a) Grinda incastrată la o extremitate și liberă la cealaltă.

Săgeata la distanța x de origine este v , și momentul în aceea secțiune este $M = N v$ (fig. 400).

Procedând ca la exemplul precedent obținem aceleași ecuații (6) — (9). Aci vom pune condiția ca pentru $x = 0$ să avem $v = 0$, de unde rezultă $A = 0$, și pentru $x = l$ să avem $dv/dx = 0$, din care rezultă

$$aB \cos al = 0$$

Pentru aceleași considerațiuni ca la exemplul precedent, trebuie să avem:

$$al = \frac{1}{2} \pi, \frac{2}{3} \pi, \frac{5}{2} \pi \dots$$

Prima valoare ne dă

$$N_f = \pi^2 EI / (2l)^2$$

Valoarea doua ne dă

$$N_f = \pi^2 EI / (\frac{2}{3} l)^2$$

și corespunde cazului când punctul dela $\frac{2}{3}$ din lungimea barei nu se poate deplasa lateral.

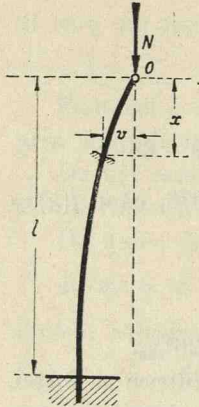


Figura 400

b) Grindă încastrată la ambele extremități.

Vom presupune evident că unul din reazimile încastrate se poate deplasa pe direcția celor două extremități ale barei (fig. 401).

În acest caz vom pune condiția ca pentru $x = 0$, și $x = \frac{1}{2} l$ să avem $dv/dx = 0$.

Cu:

$$dv/dx = a(-A \sin ax + B \cos ax)$$

Rezultă:

$$B = 0 \text{ și } A \sin (\frac{1}{2} al) = 0$$

și deci

$$\frac{1}{2} al = 0, \pi, 2\pi, \text{ etc.}$$

Prima valoare este imposibilă, a doua ne dă:

$$N_f = \pi^2 EI / (\frac{1}{2} l)^2$$

Din motive de simetrie, se vede că distanța între punctele de inflexiune este $\frac{1}{2} l$.

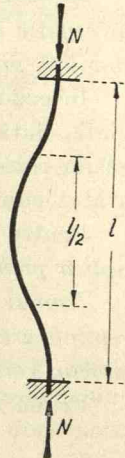


Figura 401

c) Grindă încastrată la o extremitate și articulată la cealaltă.

Vom presupune, bine înțeles, că articulația se poate deplasa pe direcția extremităților grinzii (fig. 402).

Dacă extremitatea barei s'ar putea deplasa și lateral, atunci grinda ar ocupa poziția punctată. Pentru a o aduce pe prelungirea tangentei din încastrare, va trebui să introducem o reacțiune V necunoscută.

În asemenea condițiuni avem:

$$EI \, d^2 v / dx^2 = -N \, v + V \, x$$

a cărei soluție este:

$$v = A \cos ax + B \sin ax + V \, x / N$$

$$dv/dx = a (-A \sin ax + B \cos ax) + V/N$$

Pentru determinarea constantelor A , B și V , avem condițiile: pentru $x=0$ să avem $v=0$, iar pentru $x=l$ să avem $v=0$, și $dv/dx=0$ și deci:

$$1. \, A + 0. \, B + 0. \, V/N = 0$$

$$\cos al. \, A + \sin al. \, B + l \, V/N = 0$$

$$-a \sin al. \, A + a \cos al. \, B + V/N = 0$$

Pentru ca să avem valori diferite de zero pentru A , B și V , trebuie ca determinantul coeficienților acestor necunoscute să fie nul, deci:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos al & -a \sin al \\ 0 & \sin al & a \cos al \\ 0 & l & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$al = \operatorname{tg} al$$

care este satisfăcută pentru o primă valoare $al = 4,49$, de unde deducem $a^2 l^2 = 20,16$. În calculele curente se ia $\pi^2 \simeq 10$, facem și aci aproximația luând $20,16 \simeq 2 \pi^2$ și atunci:

$$N_f = \pi^2 E I / (l / \sqrt{2})^2$$

d) Grindă articulată la ambele extremități și împiedecată a se deplasa lateral într'un punct oarecare al ei.

Se înțelege totdeauna că cele două extremități se pot deplasa după direcția forței N și că ele și reazimul intermediar sunt în linie dreaptă (fig. 403).

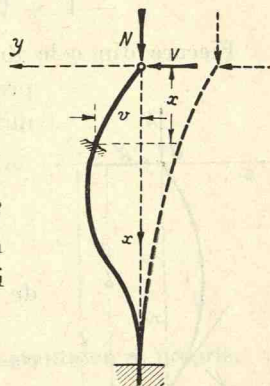


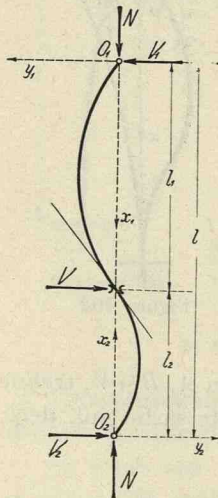
Figura 402

Pentru ca reazimul din mijloc să împiedice deplasarea laterală, el va dezvolta o reacțiune V .

Pentru ca echilibru să existe, se va dezvolta și la cele două capete două reacțiuni V_1 și V_2 , între cari există evident relațiunile:

$$-V + V_1 - V_2 = 0 \text{ și } V_1 l_1 + V_2 l_2 = 0$$

Fiecare din cele două ramuri de curbe se prezintă ca în cazul precedent și a căror ecuații—luând fiecare extremitate ca origine—sunt:



$$v_1 = A_1 \cos \alpha x_1 + B_1 \sin \alpha x_1 + V_1 x_1 / N$$

$$v_2 = A_2 \cos \alpha x_2 + B_2 \sin \alpha x_2 + V_2 x_2 / N$$

Pentru $x_1 = x_2 = 0$ trebuie să avem $v_1 = v_2 = 0$, de unde rezultă $A_1 = A_2 = 0$.

În reazimul intermediar, avem de asemenea $v = 0$, deci:

$$B_1 \sin \alpha l_1 + V_1 l_1 / N = 0 ; B_2 \sin \alpha l_2 + V_2 l_2 / N = 0$$

În reazimul intermediar axa grinzii din cele două ramuri de curbă are aceeași tangentă. Pentru că am luat originea axelor în cele două extremități, rezultă că tangenta dintr-o ecuație este egală și de același semn cu cealaltă, diferența lor e nulă și deci avem:

$$\alpha B_1 \cos \alpha l_1 - \alpha B_2 \cos \alpha l_2 + V_1 / N - V_2 / N = 0$$

Avem de determinat cantitățile V , V_1 , V_2 , B_1 și B_2 . Pentru ca acestea să fie diferite de zero, deci să existe o altă poziție de echilibru în afară de linia dreaptă pentru care $v \equiv 0$, trebuie ca determinantul acestor necunoscute să fie nul, deci:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_1 & l_1 & 0 & 1 \\ -1 & l_2 & 0 & l_2 & -1 \\ 0 & 0 & \sin \alpha l_1 & 0 & \alpha \cos \alpha l_1 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha l_2 - \alpha \cos \alpha l_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dacă se dezvoltă acest determinant se găsește

$$1/\alpha l_1 + 1/\alpha l_2 = \operatorname{ctg} \alpha l_1 + \operatorname{ctg} \alpha l_2$$

Valoarea lui α care satisface această relație ne dă pe N_f . Aceasta depinde de valorile lui l_1 și l_2 .

Pentru calcul este comod a nota:

$l_1 = \xi_1 l$, $l_2 = \xi_2 l$, și a pune expresia de mai sus sub forma:

$$a l = \sin \xi_1 a l \sin \xi_2 a l / \xi_1 \xi_2 \sin a l$$

din care prin încercări deducem pe $a l$.

Aplicația Nr. 112. Să presupunem că avem:

$$\xi_1 = 0,8 \text{ și } \xi_2 = 0,2$$

Rezultă numai decît :

$$a l = 6,25 \sin 0,8 a l \sin 0,2 a l / \sin a l$$

de unde avem:

$$a l = 5,2 \simeq 5 \pi / 3$$

și

$$N_f = EI a^2 = \pi^2 EI / (\frac{3}{5} l)^2$$

e) Grindă incastată la o extremitate, supusă la greutatea ei proprie.

Avem ecuația

$$EI d^3 v / dx^3 = -T$$

Însă forța tăietoare în secțiunea x este (fig. 404) $p x dv/dx$, și deci avem

$$EI d^3 v / dx^3 + p x dv/dx = 0,$$

o ecuație diferențială care se rezolvă cu ajutorul funcțiilor *Bessel*. Condițiile pentru găsirea soluției sunt: pentru $x=0$ să avem $v=0$, $M=0$, iar pentru $x=l$, $dv/dx=0$. În aceste condiții se capătă

$$pl = 7,91 EI / l^2$$

f) Grindă articulată la ambele extremități, însă cu secțiune variabilă.

Ne vom da o lege de variație a secțiunii. Notăm $\xi = x/l$, și ne dăm de exemplu următoarea lege:

$$I = I_0 / [1 - \kappa \xi (1 - \xi)]$$

în care I_0 este momentul de inerție dela extremitatea barei.

Vom utiliza metoda doua, luând ca sistem suplimentar de sarcini, cari provoacă flambajul, o sarcină uniform distribuită și normală pe grindă.

Vom lua deci:

$$M = \frac{1}{2} p l^2 \xi (1 - \xi),$$

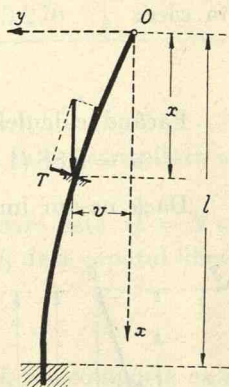


Figura 404

și avem:

$$dL_i = \frac{1}{2} \int M^2 dx/EI = p^2 l^3 \int_0^1 f(\xi) d\xi / 8 EI_0$$

în care am notat:

$$f(\xi) = \xi^2 (1 - \xi)^2 [1 - \kappa \xi (1 - \xi)]$$

Avem apoi:

$$d^2 v/dx^2 = -M/EI = -p l^2 \xi (1 - \xi) [1 - \kappa \xi (1 - \xi)] / 2 EI_0$$

Dacă integrăm odată și punem condiția ca la mijlocul grinzii, adică pentru $\xi = \frac{1}{2}$, să avem $d v/dx = 0$, găsim:

$$d v/dx = -p l^3 f_1(\xi) / 2 EI_0$$

în care am notat:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{60} (\kappa - 5) + \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{3} (1 + \kappa) \xi^3 + \frac{1}{2} \kappa \xi^4 - \frac{1}{5} \kappa \xi^5$$

În aceste condiții avem:

$$dL_e = \frac{1}{2} N \int (d v/dx)^2 dx = N p^2 l^7 \int_0^1 [f_1(\xi)]^2 d\xi / 8 E^2 I_0^2$$

Aplicând ecuația (4) găsim:

$$N_f = \alpha EI_0 / l^3$$

în care:

$$\alpha = \int_0^1 f(\xi) d\xi / \int_0^1 [f_1(\xi)]^2 d\xi$$

Făcând calculele numerice indicate de această formulă găsim:

$$\alpha = 9,88 (1 - 3 \kappa / 14) / (1 - 22 \kappa / 51 + 917 \kappa^2 / 19635)$$

Dacă ne-am impune de exemplu ca momentul de inerție maxim I dela mijlocul grinzii să fie $I = 2 I_0$, atunci găsim:

$$N_f = 8,71 EI / l^3$$

g) Grindă rigidă pe o lungime oarecare.

Să presupunem că avem o grindă încastrată la un cap și liberă la celălalt (fig. 405). Să mai presupunem că pe lungimea l_1 , măsurată dela articulație, grinda este rigidă, adică are $EI = \infty$, iar pe rest are un EI oarecare constant.

Pe cele două porțiuni de grindă, ecuațiile axei deformație vor fi:

$$d^2 v/dx^2 = 0 \quad d^2 v_1/dx_1 + \alpha^2 v = 0$$

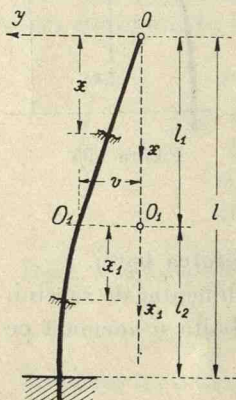


Figura 405

Pentru ușurința calculului originea lui x_1 o luăm în O_1 , adică acolo unde grinda schimbă de secțiune.

Vom pune condițiile ca pentru $x = 0$ să avem $\varphi = 0$, pentru $x = l_1$ și $x_1 = 0$, ambele ramuri de curbă să aibă același φ și $d\varphi/dx$, și în fine pentru $x_1 = l_2$ să avem $d\varphi_1/dx_1 = 0$. În aceste condiții găsim:

$$al_1 \operatorname{tg} al_2 = 1$$

Dacă punem $l_1 = \xi_1 l$, $l_2 = \xi_2 l$, cu condiția evidentă $\xi_1 + \xi_2 = 1$, avem încă

$$al \xi_1 \operatorname{tg} al \xi_2 = 1$$

ecuație care ne permite să găsim pe al , când ni se dau rapoartele ξ_1 și ξ_2 .

Pentru ușurința calculului dăm tabloul:

$\xi_1 = 0,0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$al = \frac{1}{2} \pi$	1,5736	1,5837	1,6025	1,6474	1,7206
$\xi_1 =$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$al =$	1,8387	2,0382	2,4004	3,270	∞

h) Grindă cu o regiune plastică.

Să presupunem că avem o grindă incastată la o extremitate și liberă la cealaltă.

S'a văzut că momentul într'o secțiune oarecare este $M = N \varphi$. Să presupunem că în secțiunea O_1 , la distanța l_1 dela capătul liber, avem:

$$N \varphi = M_p = W_p \mathfrak{K}_p$$

Dacă este așa, atunci grinda pe porțiunea l_1 se comportă ca o grindă elastică, iar pe rest, adică pe lungimea l_2 , ca o grindă în care rezistențele au trecut de limita de proporționalitate, deci ca o grindă care are o regiune plastică.

Așa fiind, cele două ramuri de curbă ale axei deformată a grinzii, vor avea ecuațiile:

$$d^2\varphi/dx^2 = -N\varphi/EI \quad , \quad d^2\varphi_1/dx_1^2 = -(N\varphi - M_p)/DI - M_p/EI$$

Dacă notăm

$$N/EI = \alpha^2 \quad , \quad N/DI = \beta^2 \quad , \quad \alpha^2/\beta^2 = D/E = 1/\gamma^2,$$

atunci avem:

$$d^2v/dx^2 + a^2v = 0 \quad d^2v_1/dx_1^2 + \beta^2v = (1 - 1/\gamma^2) M_p/DI$$

cari integrate ne dau:

$$v = A \cos ax + B \sin ax; \quad v_1 = A_1 \cos \beta x_1 + B_1 \sin \beta x_1 + (1 - 1/\gamma^2) M_p/N$$

$$dv/dx = -a(A \sin ax - B \cos ax); \quad dv_1/dx_1 = -\beta(A_1 \sin \beta x_1 - B_1 \cos \beta x_1)$$

$$\omega = a^2(A \cos ax + B \sin ax); \quad \omega_1 = \beta^2(A_1 \cos \beta x_1 + B_1 \sin \beta x_1)$$

Dacă procedăm exact ca în cazul precedent, punând în plus condiția ca pentru $x = l$ și $x_1 = 0$, ambele ramuri de curbă să aibă același ω , căpătăm relațiile:

$$A = 0, \quad B \sin al_1 = A_1 + (1 - 1/\gamma^2) M_p/N; \quad B \cos al_1 = B_1 \gamma$$

$$M_p/EI = a^2 B \sin al_1 = \beta^2 A_1; \quad A_1 \sin \beta l_2 = B_1 \cos \beta l_2$$

din care scoatem:

$$\tan al_1 \tan \beta l_2 = 1$$

sau

$$al_1 + \beta l_2 = \frac{1}{2} \pi$$

și

$$\omega_{1max} = M_p/EI \cos \beta l_2$$

Cu notațiile din exemplul precedent, avem:

$$al = \pi/2 (\xi_1 + \gamma \xi_2)$$

$$\omega_{1max} = M_p/EI \cos (al \cdot \gamma \xi_2)$$

Dacă luăm o grindă articulată la ambele extremități de lungime l , în care l_1 și l_2 sunt respectiv lungimile totale ale regiunii elastice și a celei plastice, atunci căpătăm:

$$al = \pi/(\xi_1 + \gamma \xi_2)$$

care ne dă:

$$(20) \quad N_f = \pi^2 EI/l^2 (\xi_1 + \gamma \xi_2)^2$$

$$(21) \quad \omega_{1max} = M_p/EI \cos (al \cdot \frac{1}{2} \gamma \xi_2)$$

Observații generale. 1°. Toate valorile lui N_f găsite până aci se pot pune sub forma unică:

$$(22) \quad N_f = \pi^2 EI/l_f^2$$

adică toate se pot aduce la tipul formulei (11).

Această expresie poartă numele de formula lui *Euler*.

Valoarea lui l_f poartă numele de *lungime de flambaj*.

Dacă expresia (22) se egalează pe rând cu fiecare din formulele găsite până aci, aflăm, pentru fiecare caz în parte, care este valoarea

lui l_f . De ex. dacă se egalează valoarea lui N_f dată de formula (22) cu aceea găsită la o grindă articulată la ambele capete, dată de formula (11), găsim $l_f = l$ și zicem, în acest caz, că lungimea de flambaj este egală chiar cu lungimea barei. Dacă facem același lucru și cu cazul când avem o grindă incastrată la o extremitate și liberă la cealaltă, găsim $l_f = 2l$, ș. a. m. d.

2°. Din formula (22) se vede că dacă l_f este constant pentru toate direcțiunile, atunci sarcina de flambaj N_f cea mai mică, va avea loc pentru acea direcțiune pentru care I este *minim*.

Se întâmplă adesea că într'o direcțiune oarecare avem o lungime de flambaj, iar într'o direcțiune normală pe ea o altă lungime de flambaj.

De ex. o bară a unei grinzi cu zăbrele — din cauza fixării capetelor — se consideră ca incastrată la capete pentru flambajul în planul grinzii și articulată pentru flambajul în plan normal pe grindă.

Să presupunem că flambajul în planul grinzii are loc în jurul axei Oy a secțiunii, căreia îi corespunde I_y și lungimea de flambaj l_{fy} , pe când în sens normal pe grindă avem respectiv I_z și l_{fz} .

Bara noastră va fi dimensionată așa ca să reziste în cele două sensuri. Deci momentele de inerție se vor determina pe baza relațiilor:

$$N_f = \pi^2 EI_y / l_{fy}^2 \text{ și } N_f = \pi^2 EI_z / l_{fz}^2.$$

Să presupunem că am dimensionat secțiunea ca să reziste strict la sarcina N_f . Din cele două relații de mai sus avem:

$$I_y / l_{fy}^2 = I_z / l_{fz}^2 = k$$

Să presupunem că I_z , I_y și l_{fz} și l_{fy} sunt momentele de inerție și lungimile de flambaj maxime și minime.

Acum se pune întrebarea: nu există o direcțiune intermediară pentru care bara ar putea flamba?

Se știe legea după care variază I după o direcțiune oarecare când avem I_{zmax} și I_{ymin} . Lungimile de flambaj s'au dedus pe baza deformațiunii barelor, deci urmează legea variației deformațiunilor care este aceeași ca pentru momentele de inerție. Dacă I este momentul de inerție după o direcțiune oarecare și l_f lungimea de flambaj corespondentă acelei direcțiuni, se găsește că avem și:

$$I / l_f^2 = k$$

Așa dar, în aceste condițiuni, bara rezistă la fel în toate direcțiunile și nu mai este nevoie să facem calculul pentru direcțiuni intermediare.

3. Limita de valabilitate a formulei lui Euler. Formulele lui Rankine, Johnson și Tetmajer.

În cele ce urmează rezistența $\mathfrak{R}_f = N_f / \Omega$ o vom numi *rezistența la flambaj*, iar raportul $\lambda = l_f / i$ *coeficient de subțirime*.

Dacă în formula (20)

$$N_f = \pi^2 EI / l^2 (\xi_1 + \gamma \xi_2)^2$$

introducem aceste valori și ținem seamă că $I = i^2 \Omega$, găsim:

$$(23) \quad \mathfrak{R} \lambda^2 (\xi_1 + \gamma \xi_2)^2 = \pi^2 E$$

Vom deosebi trei cazuri distincte.

a) Cazul întâiu. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$

În acest caz, rezistența în grindă nu depășește în niciun punct al ei limita de proporționalitate și vom zice că grinda este complet elastică.

Formula (23) care se reduce la:

$$(24) \quad \mathfrak{R}_f \lambda^2 = \pi^2 E$$

nu e valabilă decât atâta timp cât $\mathfrak{R}_f \leq \mathfrak{R}_p$.

La limită avem $\lambda_0^2 = \pi^2 E / \mathfrak{R}_p$. Să presupunem că avem un oțel moale cu caracteristicile: $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² și $\mathfrak{R} = 1800$ kg/cm². Din formula de mai sus obținem $\lambda_0 = 110$.

Prin urmare, formula (23) nu este aplicabilă când $\lambda < \lambda_0$.

b) Cazul al doilea. $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$

În acest caz, rezistența în grindă depășește în toate punctele ei limita de proporționalitate și vom zice că grinda este complet plastică. Formula (23) se reduce la:

$$(25) \quad \mathfrak{R}_f \lambda^2 = \pi^2 D$$

și se aplică corpurilor plastice.

c) Cazul al treilea. $0 < \xi_1 < 1$.

Formulele lui Rankine, Johnson și Tetmajer.

În acest caz, grinda, pe o lungime l_1 , se comportă ca o grindă elastică, iar pe rest ca una plastică.

Nu cunoaștem deocamdată alte relații între cantitățile din partea întâia a ecuației (23) și deci nu putem scoate concluziuni din ea.

Față de acest inconvenient experimentatorii și-au propus să găsească, pe baza experiențelor, formule directe de flambaj.

Rankine a plecat dela compresiunea excentrică, care ne dă:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 (1 + \nu y / i^2)$$

Rezistența maximă care are loc la $y = y_{max}$ nu trebuie să înțreacă rezistența totală la compresiune $\mathfrak{R}_t$. În acest caz $\mathfrak{R}_0 = N_f / \Omega = \mathfrak{R}_f$ este rezistența la flambaj. Excentricitatea ν nu este cunoscută, el însă admite:

$$\nu y_{max} = a l_f^2$$

în care a este un coeficient ce se determină prin experiență. Avem deci:

$$(26) \quad \mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_t / (1 + a \lambda^2)$$

Johnson a pus această formulă sub forma

$$(27) \quad \mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_t (1 - a \lambda^2)$$

în care a se determină prin experiențe.

Tetmajer a luat următoarea formulă:

$$(28) \quad \mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_t (1 - a \lambda + b \lambda^2)$$

determinând de asemenea pe a și b prin experiențe directe. El a găsit $b = 0$ pentru toate materialele afară de fontă.

C) Dimensionarea secțiunilor.

Pentru aflarea secțiunilor, diferiți tehnicieni întrebunțează diferite formule. Unii întrebunțează numai formule de tipul *Rankine*, *Johnson* sau *Tetmajer*, alții întrebunțează formula lui *Euler* în domeniul în care ea este valabilă și celelelalte formule, de preferință *Johnson* sau *Tetmajer*, în domeniul în care nu e valabilă formula lui *Euler*.

După *circularea prusiană din 1925*, vom urma aci calea ultimă și vom admite că pentru toate materialele se aplică formula lui *Euler* atâta timp cât $\lambda \geq 100$, iar pentru fontă: $\lambda \geq 80$.

Valorile limită ale lui λ , pentru care este valabilă formula lui *Euler*, le vom nota cu λ_0 .

1. Primul caz $\lambda \geq \lambda_0$.

Dacă am calcula barele cu formula (22) sau (24), atunci le-am dimensiona strict pentru flambaj, căci oricât de mică ar fi creșterea

lui N_f sau $\mathfrak{X}_f$, bara ar flamba. De aceea, se lasă oarecare margine între sarcina reală pe care trebuie să o suporte bara și sarcina sub care flambează în realitate. Bara se calculează ca să reziste la o sarcină de c ori mai mare. Așa dar, o bară de anumite dimensiuni o vom socoti că rezistă la o sarcină de flambaj numai de:

$$(29) \quad N_f = \pi^2 E I / c l^2_f \quad \text{sau} \quad \mathfrak{X}_f \lambda^2 = \pi^2 E / c$$

Coeficientul c poartă numele de *coeficient de siguranță*.

Coeficientul de siguranță se fixează după felul materialului și natura construcției. Circulara prusiană din 1925 fixează pentru construcțiuni, pentru toate materialele $c = 3,5$, afară de fontă, pentru care stabilește $c = 6$. Proiectul de circulară română întocmit de d-l Prof. I. Ionescu, pentru oțelul moale în construcțiuni, fixează $c = 4$.

Pentru calculul pieselor supuse la eforturi repetate variind între 0 și N se ia $c = 8 - 14$, iar pentru cele alternative variind între $-N$ și $+N$ se ia $c = 18 - 21$.

Circulara prusiană mai prescrie ca să avem oricând $\lambda \leq 150$, pentru ca bara să nu fie prea deformabilă. În cazul când rezultă din calcul $\lambda > 150$, vom modifica forma secțiunii așa ca să avem $\lambda \leq 150$.

2. Al doilea caz $\lambda < \lambda_0$.

În acest caz, rezistența maximă din grindă nu trebuie să treacă de rezistența admisibilă la compresiune simplă $\mathfrak{X}_c$. Formulele lui Johnson și Tetmajer iau respectiv forma:

$$(30) \quad \mathfrak{X}_f = \mathfrak{X}_c (1 - a \lambda^2) \quad \text{și} \quad \mathfrak{X}_f = \mathfrak{X}_c (1 - a \lambda + b \lambda^2)$$

$\mathfrak{X}_f$ din aceste formule poartă numele de *rezistență admisibilă la flambaj*. Se vede că avem oricând $\mathfrak{X}_f < \mathfrak{X}_c$.

a) Coeficientul de flambaj.

În vederea dimensionării secțiunilor, formulele (29) și (30) se pot pune sub o singură formă pe baza considerațiilor ce urmează.

Dacă bara ar fi supusă numai la compresiune simplă, am avea nevoie de o secțiune:

$$\Omega_0 = N / \mathfrak{X}_c,$$

prin faptul însă că intervine flambajul, pentru aceeași sarcină N avem nevoie de o secțiune mai mare și anume de:

$$\Omega_f = N / \mathfrak{X}_f$$

Împărțind între ele aceste două relații, obținem:

$$(31) \quad \Omega_f = n \Omega_0 \quad ; \quad \mathfrak{K}_c = n \mathfrak{K}_f$$

Raportul n poartă numele de *coeficient de flambaj*.

În cele ce urmează notăm:

$$(32) \quad n_0 = c \mathfrak{K}_c \lambda_0^2 / \pi^2 E$$

cantitate cunoscută și care nu este altceva decât coeficientul de flambaj la limita la care este aplicabilă formula lui *Euler*.

Putem exprima oricând pe n în funcție de n_0 .

1°. Să presupunem că $\lambda \geq \lambda_0$, adică suntem în regiunea în care este aplicabilă formula lui *Euler*.

Dacă împărțim ecuația doua (29) prin (32) și dacă ținem seamă de ecuația doua (31), obținem:

$$(33) \quad n = n_0 (\lambda / \lambda_0)^2$$

valoare pe care o introducem în ecuația (31).

2°. Să presupunem $\lambda < \lambda_0$. În acest caz, ecuațiile lui *Johnson* și *Tetmajer*, în care luăm $b = 0$, ținând seama de (31), se transformă respectiv în:

$$(34) \quad \Omega_f = \Omega_0 / (1 - a \lambda^2) \quad \text{și} \quad \Omega_f = \Omega_0 / (1 - a \lambda)$$

în cari va trebui să determinăm valorile lui a .

Observăm că pentru $\lambda = \lambda_0$, aceste formule trebuie să ne dea același rezultat ca și formula lui *Euler*, deci trebuie să avem:

$$n_0 \Omega_0 = \Omega_0 / (1 - a \lambda_0^2) \quad \text{și} \quad n_0 \Omega_0 = \Omega_0 / (1 - a \lambda_0)$$

cari ne dau respectiv:

$$(35) \quad a = (1 - 1/n_0) / \lambda_0^2 \quad \text{și} \quad a = (1 - 1/n_0) / \lambda_0$$

din cari deducem:

$$(36) \quad 1 - 1/n = (1 - 1/n_0) (\lambda / \lambda_0)^2 \quad \text{și} \quad 1 - 1/n = (1 - 1/n_0) \lambda / \lambda_0$$

Valori cari le ducem în prima ecuație (31).

În acest caz chestiunea se reduce la determinarea coeficientului de flambaj, n .

b) Coeficient de răspândire.

Putem pune oricând:

$$i^2 = \xi \Omega \quad \text{sau} \quad I = \xi \Omega^2$$

Coeficientul ξ poartă numele de *coeficient de răspândire* și el ne arată că pentru o aceeași valoare a secțiunii Ω vom avea o rază de

girație sau un moment de inerție cu atât mai mare cu cât secțiunea va fi mai răspândită, adică cu cât ξ va fi mai mare.

Această noțiune este utilă pentru calcul pentru că ξ , pentru anumite forme de secțiuni, are o valoare constantă.

De exemplu, pentru cerc avem:

$$\xi = i^2/\Omega = I/\Omega^2 = 1/4 \pi$$

pentru patrat

$$\xi = 1/12$$

pentru un dreptunghi pentru I_{min} și pentru $h > b$, avem:

$$\xi = b/12 h$$

care păstrează o valoare constantă pentru același raport h/b .

Pentru celelalte forme de secțiuni, ξ variază foarte încet când secțiunea își schimbă valoarea însă păstrându-și forma. De exemplu, pentru un fier I când trecem de la profilul 20 la 30 secțiunea variază de la 33,5 cm² la 69,1 cm², pe când ξ de la 1/9,59 la 1/10,6.

Această circumstanță ne ușurează mult calculul secțiunilor.

Toate formulele de până aci se pot exprima în funcție de ξ .

Formula lui Johnson de dă:

$$(37) \quad \Omega_f = \Omega_0 + a l_f^2/\xi$$

iar a lui Tetmajer, dacă notăm

$$(38) \quad k = 4 \Omega_0 \xi / a^2 l_f^2,$$

ne dă:

$$(39) \quad \Omega_f = \Omega_0 [1 + 2 (\sqrt{k+1} + 1)/k]$$

Observare importantă. Norma pentru calcule numerice este următoarea:

În genere ni se dă N_f , l_f și c și ni se cere secțiunea. Aplicăm mai întâi prima formulă (29) care ne dă pe I . Căutăm apoi valoarea lui λ . Dacă $\lambda_0 \leq \lambda \leq 150$, valoarea lui I este bună. Dacă $\lambda > 150$, mărim pe I până ajungem la $\lambda \leq 150$.

Dacă $\lambda < \lambda_0$ aplicăm formulele (34) ale lui Johnson sau Tetmajer, rezolvindu-le prin încercări directe sau cu ajutorul coeficientului de flambaj n , dat de formulele (36). Când avem la îndemână valorile lui ξ e avantajos a utiliza formulele 37—39.

c) Influența formei secțiunilor.

În toate formulele de până acum intervine cantitatea $\lambda = l_f/i$, deci raza de girație a secțiunii în raport cu axa în jurul căreia secțiunea se rotește prin deformarea provenită din flambaj.

Se știe că raza de girație depinde de distribuția suprafeței pe secțiune.

În figura 406, pe baza formulelor de mai sus, s'au trasat curbele lui $\mathcal{R}_f$ și n pentru cazul când $\mathcal{R}_c = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $c = 4$, $\pi^2 = 10$ și $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, după formula lui Euler pentru $\lambda > \lambda_0$ și după formulele lui Johnson și Tetmajer, pentru $\lambda < \lambda_0$.

Din examinarea curbelor se constată că cu cât i este mai mare, adică cu cât materialul este mai răspândit pe secțiune, cu atât n este mai mic, deci avem nevoie de o secțiune mai redusă. Asta se vede și din modul cum variază $\mathcal{R}_f$ față de i .

De aci se mai vede că pentru a satisface condiția de rezistență, trebuie ca secțiunea $\Omega_f \geq \Omega_0$, iar pentru a satisface condiția de

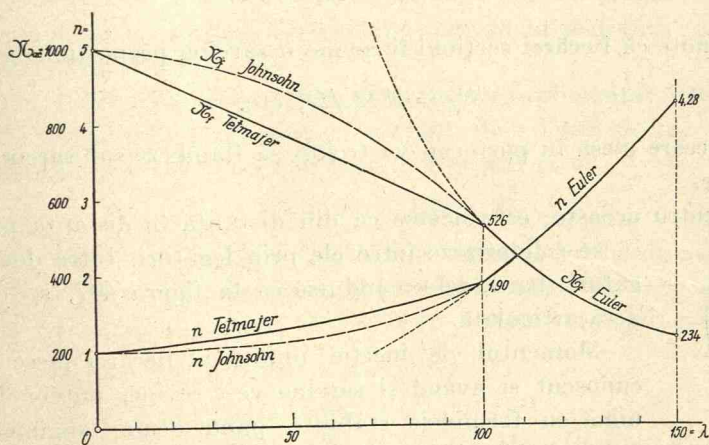


Figura 406

stabilitate dată de formulele arătate, trebuie ca raza de girație să fie mai mare decât o anumită cantitate.

Așa fiind, orice secțiune care îndeplinește aceste două condiții satisface problema ce ni s'a pus. Deci avem o infinitate de soluțiuni. Chestiunea este de a alege pe cea mai economică, adică pe cea mai mică.

În cazul când secțiunea se compune din mai multe elemente, dacă voim să avem pe cea mai economică va trebui să așezăm elementele componente cât mai departe unele de altele, solidarizându-le între ele cu piese de legătură care vor fi cu atât mai voluminoase cu cât elementele secțiunii sunt mai depărtate și deci măresc cantitatea de material ce intră în compunerea barei.

În această privință nu se pot da reguli precise; numai compararea diferitelor soluțiuni ne dă experiența necesară în găsirea soluțiunilor celor mai economice.

d) Secțiuni formate din mai multe elemente.

Pentru eforturi mari rezultă și secțiuni mari pe care nu le putem face din o singură piesă, ci le vom compune din două sau mai multe alătura. Acestea vor trebui solidarizate între ele cu legături, pentru ca secțiunile lor să formeze un bloc.

Distanța între legături va fi așa ca fiecare bară în parte, care compune bara noastră, să nu flambeze.

Dacă secțiunea totală Ω se compune din secțiunile $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ așa că:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$$

se admite că fiecărei secțiuni îi revine o sarcină proporțională, deci

$$N_1 = N \Omega_1 / \Omega, \text{ etc.}$$

Fiecare piesă în parte nu va trebui să flambeze sub sarcina ce-i revine.

Pentru aceasta, este nevoie ca din distanță în distanță piesele să se solidarizeze între ele prin legături. Intre două legături, bara deformându-se ca în figura 407, se consideră articulată.



Momentul de inerție minim al fiecărei piese fiind cunoscut și având și sarcina ce-i revine, putem determina cu formulele stabilite până acum lungimea de flambaj și deci *distanța între legături*.

La ce forțe calculăm aceste legături? Pentru ca secțiunea compusă să reziste ca una singură, trebuie ca lunecarea longitudinală să fie împiedicată. Pentru aceasta, avem nevoie de forța tăietoare din secțiune.

Fig. 407 Această forță tăietoare nu apare decât în momentul când grinda a flambat, căci numai atunci având $v \neq 0$, putem deduce forța tăietoare din ecuația:

$$T = -EI d^3v/dx^3$$

În acest moment, în secțiunea dela mijlocul grinzii, adică aceea în care avem solicitarea cea mai mare — vorbim de grinzile articulate la ambele extremități — rezistența maximă este $\mathfrak{X}_c$, deci:

$$\mathfrak{X}_c = (N_f / \Omega) (1 + v_m y_{max} / i^2)$$

din care scoatem:

$$(40) \quad v_m = (n - 1) W / \Omega$$

În cazul când sistemul de sarcini suplimentare care produce flambajul este sarcina N_f aplicată excentric, s'a văzut că ecuația axei deformată a grinzii este dată de formula (12). Dacă în această ecuație introducem valoarea lui v_m din (40) și dacă ținem seamă de ecuația (7), obținem:

$$\begin{aligned} M &= \mathfrak{K}_f (n - 1) W \sin ax \\ (41) \quad T &= \alpha \mathfrak{K}_f (n - 1) W \cos ax \\ p &= M \mathfrak{K}_f / E i^2 \end{aligned}$$

Aceste formule ne arată că forța tăietoare într-o secțiune oarecare corespunde unei încărcări sinusoidale, care dă în secțiunea cea mai obosită rezistența $\mathfrak{K}_c - \mathfrak{K}_f$.

Dacă însă considerăm ca sistem de sarcini suplimentar, care produce flambajul grinzii, o sarcină uniform distribuită pe tot lungul grinzii, atunci ecuația axei deformată a grinzii este:

$$v = 3,2 v_m (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4)$$

Dacă în această ecuație introducem valoarea lui v_m de mai sus, dacă facem derivările necesare, dacă ținem seamă de ecuația (17) și dacă facem aproximația: $3,2 \cdot 12 / 9,88 = 3,89 \sim 4$, obținem:

$$\begin{aligned} M &= 4 (\mathfrak{K}_c - \mathfrak{K}_f) W \xi (1 - \xi) \\ (42) \quad T &= 4 (\mathfrak{K}_c - \mathfrak{K}_f) W (1 - 2 \xi) / l \\ p &= 8 (\mathfrak{K}_c - \mathfrak{K}_f) W / l^2 = 8 M_{max} / l^2 \end{aligned}$$

Odată ce avem M , T și p în fiecare secțiune a grinzii, putem calcula legăturile între diferitele elemente ale secțiunii.

Practica a consfințit uzul formulelor (42) ca fiind mai simple, deși mai puțin exacte.

3. Stâlpi de beton armat.

Circulara prusiană din 1932 prevede că atâta timp cât $\lambda > \lambda_0 = 25\sqrt{12} = 86,6$, stâlpii să se calculeze cu formula lui Euler, în care se ia $c = 9$ și $E = 0,14 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Ea mai prescrie că nu se admit stâlpi cu $\lambda > 140$. Pentru stâlpii cu $\lambda \leq 15\sqrt{12} = 52$ nu se mai face verificarea la flambaj și deci pentru ei se admite $\mathfrak{K}_f = \mathfrak{K}_c$. Pentru stâlpii cu $52 \leq \lambda \leq 86,6$ circulara adoptă pentru calcul o formulă de tipul Rankine, modificată pe baza experiențelor lui Bach și a cărei expresie este

$$(43) \quad \mathfrak{K}_f = 1,25 \mathfrak{K}_c / [1 + (\lambda/100)^2]$$

Această dispoziție a circularii are inconvenientul că pentru $\lambda = \lambda_0$ formula lui *Euler* și formula (43) nu dau aceleași rezultate.

Coeficienții de flambaj pe intervalul în care este aplicabilă formula lui *Euler* sunt dați de ecuațiile (32) și (33), iar pe intervalul în care este valabilă formula lui *Rankine*, din (43) deducem:

$$(44) \quad n = 0,8 [1 + (\lambda/100)^2]$$

Valoarea lui n care remediază inconvenientul semnalat și care dă valori apropiate și acoperitoare față de cele date de circulară, este:

$$(45) \quad n = (25 - 9 n_0)/16 + (n_0 - 1) \lambda^2/4800.$$

Pentru secțiunile dreptunghiulare, circulara prusiană, pentru înlesnirea calculelor, face aproximația: $i^2 = I/\Omega \simeq \frac{1}{12} h b^3/bh = \frac{1}{12} b^2$ și în loc de a introduce în calcul pe λ , introduce cantitatea $\lambda_d = l_f/b$, având relația evidentă $\lambda = \lambda_d \sqrt{12}$.

În aceste condițiuni formula lui *Euler*

$$(46) \quad \mathfrak{X}_f = \pi^2 E/12 c \lambda_d^2$$

este valabilă în intervalul $\lambda_{od} = 25 \leq \lambda_d \leq 40$, iar formula lui *Rankine*

$$(47) \quad \mathfrak{X}_f = 1,25 \mathfrak{X}_c/[1 + 12 (\lambda_d/100)^2]$$

este valabilă în intervalul $15 \leq \lambda_d \leq 25 = \lambda_{od}$.

Pentru primul interval, coeficienții de flambaj au valoarea:

$$(48) \quad n = n_0 (\lambda_d/\lambda_{od})^2$$

în care

$$(49) \quad n_0 = 12 c \mathfrak{X}_c \lambda_{od}^2 / \pi^2 E$$

iar pentru al doilea, după formula lui *Rankine*:

$$(50) \quad n = 0,8 [1 + 12 (\lambda_d/100)^2]$$

Dacă întrebuițăm formula corectată (45), găsim:

$$(51) \quad n = (25 - 9 n_0)/16 + (n_0 - 1) (\lambda_d/20)^2$$

Pentru stâlpii cercuiți, dacă d este diametrul sâmburelui și dacă $\lambda_d = l_f/d$, circulara prusiană prescrie pentru n valorile date de formula:

$$(52) \quad n = 1 + (\lambda_d - 8) (\lambda_d - 13)/120$$

valabilă în intervalul: $13 \leq \lambda_d \leq 25$.

Pentru valori ale lui $\lambda_d \leq 13$ nu se mai face verificarea la flambaj, iar stâlpi cu $\lambda_d > 25$ nu se admit.

Pentru acești stâlpi se pot utiliza și formulele lui *Euler* și *Rankine*. Se face și aci aproximația $i^2 = I/\Omega \simeq d^2/16$ și în acel caz $\lambda = 4 \lambda_d$. În formula lui *Euler* se ia $c = 10$ și avem

$$\mathfrak{R}_f = \pi^2 E / 16 c \lambda_d^2$$

valabilă în intervalul $20 = \lambda_{od} \leq \lambda_d \leq 30$, iar pentru *Rankine*:

$$n = 0,8 [1 + 16 (\lambda_d/100)^2]$$

valabilă în intervalul $13 \leq \lambda_d \leq 20 = \lambda_{od}$.

Valorile date de aceste formule sunt mai mici ca cele prescrise de circulară.

O observare. În cazul când un stâlp sau o grindă supusă la flambaj suportă și un moment încovoietor, atunci rezistența

$$\mathfrak{R} = n N / \Omega + M / W$$

nu va trebui să depășească rezistența admisibilă $\mathfrak{R}_a$.

4. Aplicații numerice.

Aplicația Nr. 113. Un stâlp de 10 m înălțime, articulat la ambele extremități, în toate sensurile, suportă o sarcină axială de 3t.

Să se determine secțiunea lui considerând, că-l facem din oțel moale pentru care $\lambda_0 = 100$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm², rezistența admisibilă $\mathfrak{R}_c = 1200$ kg/cm², iar coeficientul de siguranță $c = 3,5$.

Aplicăm direct formula lui *Euler*. Avem:

$$(29) \quad I = N_f c l_f^2 / \pi^2 E = 3000 \cdot 3,5 \cdot 1000^2 / \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 = 500 \text{ cm}^4$$

Dacă formăm secțiunea din două fiare $\square$ așezate $\square \square$, se vede că avem nevoie de profilul Nr. 12, care are $I = 2.364 = 728 \text{ cm}^4$, $\Omega = 2.17 = 34 \text{ cm}^2$. Distanța între fiare va fi astfel, ca I în ambele sensuri să fie același.

Să vedem dacă este în intervalul în care este aplicabilă formula lui *Euler*.

Avem:

$$i^2 = I/\Omega = 728/34 = 21,4 \text{ cm}^2 \quad \text{și} \quad i = 4,62 \text{ cm}$$

$$\lambda = l_f/i = 1000/4,62 = 216,3$$

Circulara nu admite $\lambda > 150$. Vom modifica deci secțiunea, așa fel ca această condiție să fie îndeplinită. Așa dar, minimum lui i trebuie să fie $i = l_f/150 = 1000/150 = 6,67$; $i^2 = 44,5$ care ne dă ca secțiune $\square \square$ profil Nr. 18, care are $i^2 = 1350/28 = 48,3 \text{ cm}^2$.

Rezistența efectivă în bară este $\mathfrak{R}_e = 3000/2.28 = 53,5 \text{ kg/cm}^2$, iar secțiunea necesară numai pentru compresiune este $\Omega_0 = 3000/1200 = 2,5 \text{ cm}^2$. Se vede dar ce spor enorm de secțiune ne trebuie, pentru a asigura stabilitatea stâlpului.

Aplicația Nr. 114. Să presupunem că același stâlp (ap. Nr. 113) are de suportat $N = 23 \text{ t}$.

În aceleași condițiuni ca mai sus, găsim $I = 3833 \text{ cm}^4$. Convine secțiunea formată din □□ Nr. 20 care are: $I = 2.1911 = 3822 \text{ cm}^4$, diferând numai cu 0,03% de momentul de inerție necesar și $\Omega = 2.32,2 = 64,4 \text{ cm}^2$:

Să vedem dacă intră în limita de aplicabilitate a formulei lui Euler.

Avem:

$i^2 = I/\Omega = 3822/64,4 = 59,4 \text{ cm}^2$, și $i = 7,7 \text{ cm}$, deci $\lambda = l_f/i = 1000/7,7 = 129,8$, fiind cuprins între 100 și 150.

Rezistența efectivă este:

$$\mathcal{R}_e = N/\Omega = 23000/2.32,2 = 356 \text{ kg/cm}^2,$$

iar $\Omega_0 = 19,2 \text{ cm}^2$, față de $64,4 \text{ cm}^2$ cât ne trebuie pentru flambaj.

Aplicația Nr. 115. Să presupunem că același stâlp are de suportat $N = 175 \text{ t}$. Dacă aplicăm aceiași formulă a lui Euler, găsim

$$I_{ne} = 29200 \text{ cm}^4$$

care ne cere o secțiune formată din două fiare I profil Nr. 34, care are $I_{ef} = 2.15700 = 31400 \text{ cm}^4$ și $\Omega = 2.86,7 \text{ cm}^2$.

Să vedem dacă este în intervalul în care este aplicabilă formula lui Euler.

Avem:

$$i^2 = I/\Omega = 15700/86,8 = 180,7 \text{ cm}^2; i = 13,4 \text{ cm}, \lambda = l_f/i = 74,5 < 100.$$

a) Vom aplica să zicem, formula (37) a lui Johnson.

Ne trebuie n_0 , a , etc.

Avem:

$$n_0 = c \mathcal{R}_c \lambda_0^2 / \pi^2 E = 3,5 \cdot 1200 \cdot 100^2 / \pi^2 2,1 \cdot 10^6 = 2$$

$$a = (1 - 1/n_0) / \lambda_0^2 = 0,5/10^4$$

Secțiunea necesară pentru compresiune este:

$$\Omega_0 = N/\mathcal{R}_c = 175000/1200 = 146 \text{ cm}^2$$

Avem deci:

$$\Omega_f = \Omega_0 + a l_f^2 / \xi = 146 + 50/\xi.$$

N'avem valoarea lui ξ . Vom presupune că este aproximativ constant și-l vom lua ca pentru secțiunea precedent găsită. Vom mai presupune că cele două fiare I le așezăm la așa distanță, încât momentele de inerție să fie egale în cele două sensuri. Avem, dacă I și Ω sunt momentul de inerție și secțiunea unui fier I :

$$\xi = \frac{2I}{4\Omega^2} = 15700/2.86,8^2 = 1,04.$$

Avem nevoie deci de

$$\Omega_f = 146 + 50/1,04 = 194 \text{ cm}^2.$$

Așa dar, secțiunea $2.86,8 = 173,6 \text{ cm}^2$ este insuficientă. Vom lua fiare a căror secțiune să fie $194/2 = 97 \text{ cm}^2$. Găsim în table fiarele **I Nr. 36**, cari au:

$$\xi = 19610/2.97,1^2 = 0,9869$$

deci:

$$\Omega_f = 146 + 50/0,9869 = 196,7 \text{ cm}^2$$

Cu toate că avem o diferență de 1,3%, ne mulțumim cu acest profil, deoarece următorul, care are $\Omega = 2 \times 107 = 214 \text{ cm}^2$, ne dă pentru $\Omega_f = 194,6 \text{ cm}^2$, deci profilul 36. Rezistența efectivă este $\mathfrak{K}_e = N/\Omega = 175000/194,2 = 902 \text{ kg/cm}^2$.

Din acest exemplu se vede cât de repede suntem conduși la soluția definitivă.

b) *Să utilizăm formula lui Tetmajer.*

O luăm de exemplu sub forma din formula (34), adică:

$$(18) \quad \Omega_f = \Omega_0 / (1 - a\lambda)$$

avem:

$$a = 0,5/100$$

și deci:

$$\Omega_f = \Omega_0 / (1 - 5/i)$$

Formula lui Euler ne-a dat profilul I Nr. 34, care are $i = 13,4$, deci am avea nevoie de o secțiune:

$$\Omega_f = 146 / (1 - 5/13,4) = 233 \text{ cm}^2.$$

Așa dar, secțiunea luată de $2.86,8 = 173,6$ este insuficientă, rezultând una de 233 cm^2 . Vom încerca cu una care este media lor și anume $\frac{1}{2} (173,6 + 233) = 203 \text{ cm}^2$. Cel mai apropiat profil este I. Nr. 38, care are $\Omega = 2 \times 107 = 214 \text{ cm}^2$ și care are $i = 15$.

Avem:

$$\Omega_f = 146 / (1 - 5/15) = 219 \text{ cm}^2$$

Având în vedere apropierea, ne vom mulțumi cu acest profil, deoarece profilul următor, care are $\Omega = 2 \times 118 = 236$, ne dă $\Omega_f = 214 \text{ cm}^2$.

Așa dar, formula lui Tetmajer ne dă secțiuni mai mari.

Putem utiliza formula lui Tetmajer și sub forma (39).

Din formula lui Euler am găsit profilul I Nr. 34, care are $\xi = 1,04$.

Avem:

$$k = 4.146.1,04/0,005^2.1000^2 = 24$$

Găsim apoi $\Omega_f = 1,5 \Omega_0$, care ne dă $\Omega_f = 219 \text{ cm}^2$, deci ne-a dus direct la soluția definitivă fără să mai facem vreo încercare.

Aplicația Nr. 116. Un stâlp de lemn de 4 m lungime de flambaj în toate sensurile, are secțiunea pătrată și este supus la o compresiune axială de $N = 6t$. Dacă $c = 6$, $\mathfrak{K}_c = 80 \text{ kg/cm}^2$ și $E = 0,1.10^6 \text{ kg/cm}^2$, ce secțiune trebuie să-i dăm?

Formula (29) a lui Euler ne dă:

$$I = 6000.6.400^2/10.0.1.10^6 = 5760 \text{ cm}^4 \therefore h = 16,22 \text{ cm}.$$

Să vedem dacă formula lui Euler este bine aplicată. Avem:

$$i = h/\sqrt{12} = 16,22/3,462 = 4,68 \text{ cm și } \lambda = l_f/i = 400/4,68 = 85,5,$$

deci nu putem aplica această formulă.

Aplicăm de exemplu formula (37) a lui Johnson, pentru că aci cunoaștem $\xi = 1/12$ (constant).

avem:

$$n_0 = 6.80.100^2/10.0.1.10^6 = 4,8; a = (1 - 1/4,8)/100^2$$

$$\Omega_0 = 6000/80 = 75 \text{ cm}^2;$$

$$\Omega_f = \Omega_0 + a l_f^2/\xi = 75 + 3,8.400^2.12/4,8.100^2 = 227 \text{ cm}^2;$$

$$h = \sqrt{\Omega} = 15,07 \approx 15 \text{ cm}.$$

Să presupunem că voim să dimensionăm acest stâlp cu formula lui *Tetmajer*.

Avem:

$$a = (1 - 1/4,8)/100 = 0,792/10^2,$$

$$k = 4.75/12.0,792^2.4^2 = 2,49$$

și deci:

$$\Omega = 3,3 \Omega_0 = 248 \text{ cm}^2, \quad h = 15,75 \simeq 16 \text{ cm}.$$

Aplicația Nr. 117. Un stâlp de lemn de $\varnothing 20$ cm, are 6 m lungime de flambaj. Ce sarcină poate suporta dacă $c = 3,5$, $\mathfrak{K}_c = 80 \text{ kg/cm}^2$ și $E = 0,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$?

Avem:

$$i = r/2 = 5 \text{ cm} \quad \text{și} \quad \lambda = 600/5 = 120,$$

deci se aplică formula lui Euler și găsim:

$$N_f = 6,25t \quad \text{și} \quad \mathfrak{K}_f = 19,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația Nr. 118. Același stâlp (aplicația Nr. 117), în aceleași condiții, însă având lungimea de flambaj 3 m.

În acest caz $\lambda = 300/5 = 60$.

După formula lui *Johnson* avem:

$$\mathfrak{K}_f = \mathfrak{K}_c (1 - a \lambda^2)$$

$$n_0 = c \mathfrak{K}_c \lambda_0^2 / \pi^2 E = 3,5 \cdot 80 \cdot 10^4 / 10 \cdot 0,1 \cdot 10^6 = 2,8$$

$$a = (1 - 1/2,8)/10^4 = 0,643/10^4 \quad ; \quad a \lambda^2 = 0,231$$

$$\mathfrak{K}_f = 80 \cdot (1 - 0,231) = 61,4 \text{ kg/cm}^2 \quad ; \quad N_f = 19,3 t$$

După formula lui *Tetmajer*:

$$\mathfrak{K}_f = \mathfrak{K}_c (1 - a \lambda)$$

Avem:

$$a = 0,643/10^2 \quad ; \quad a \lambda = 0,379$$

$$\mathfrak{K}_f = 80 (1 - 0,379) = 49,7 \text{ kg/cm}^2, \quad N_f = 15,6 t.$$

Aplicația Nr. 119. Să se solidarizeze între ele piesele formând secțiunea dela aplicația Nr. 113.

a) *Distanța între legături.* Sarcina ce revine unui fier care are $I_{min} = 114 \text{ cm}^4$ este de $3000/2 = 1500 \text{ kg}$. Aplicând formula (29) avem:

$$l_f^2 = 10.2,1 \cdot 10^6 \cdot 114 / 3,5 \cdot 1500 = 0,456 \cdot 10^6 \therefore l_f = 6,75 \text{ m}$$

E suficient să punem câte o legătură la capetele grinzii și una la mijlocul ei. Pentru a nu slăbi prea mult această secțiune, vom pune două legături intermediare împărțind grinda în trei părți egale.

b) *Calculul legăturilor.* Fiecare legătură va consta din câte două eclise, cari leagă aripile fiarelor $\square$ între ele (fig. 408). Ne trebuie I , i , W , $\mathfrak{K}_f$.

Avem:

$$I = 2.1350 = 2700 \text{ cm}^4, \quad I^2 = 48,3 \text{ cm}^2$$

Dacă e este distanța dela axa care trece prin centrul de greutate al secțiunii totale până la centrul de greutate al unui fier $\square$, avem:

$$1350 = 114 + e^2 \cdot 28 \text{ care ne dă } e = 6,67 \text{ cm}$$

$$y_{\max} = 6,67 - 1,92 + 7,00 = 11,75 \text{ cm}; \quad W = I/y_{\max} = 2700/11,75 = 230 \text{ cm}^3$$

$$S = 28 \cdot 6,67 = 186,2 \text{ cm}, \quad \lambda^2 = 1000^2/48,3 = 2,07 \cdot 10^4$$

$$\mathcal{K}_f = 10 \cdot 2,1 \cdot 10^6 / 3,5 \cdot 2,07 \cdot 10^4 = 290 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mathcal{K}_c - \mathcal{K}_f = 910 \text{ kg/cm}^2$$

și deci:

$$M = 910 \cdot 230 \sin \alpha = 209300 \sin \alpha \text{ kgcm.}$$

Admitem că legăturii dela cap îi revine forța tăietoare de pe distanța de 1,67 m, când $\sin \alpha = \sin 30^\circ = 0,5$. Așa dar, suprafața forței tăietoare ce revine fiecărei legături este $209300 \cdot 0,5 = 104650 \text{ kgcm}$.

Tendința de lunecare ce revine fiecărei legături este:

$$2N = (S/I) \int T dx =$$

$$186,2 \cdot 104650 / 2700 = 7210 \text{ kg.}$$

și unei eclise îi revine:

$$N = \frac{1}{2} \cdot 7210 = 3605 \text{ kg.}$$

Eclisa o vom considera încastrată în secțiunea șirului de nituri. Distanța între șirurile de nituri este:

$$l = 2 (6,67 - 1,92 + \frac{1}{2} 7 + 0,5) = 17,5 \text{ cm,}$$

iar momentul încovoetor în eclisă, cu care se încarcă șirul niturilor:

$$M = \frac{1}{2} l N = \frac{1}{2} \cdot 17,5 \cdot 3605 = 31500 \text{ kgcm.}$$

Cum niturile trebuiesc sporite cu 20% vom spori în consecință solicitările N și M , calculând îmbinarea la: $1,2 N$ și $1,2 M$.

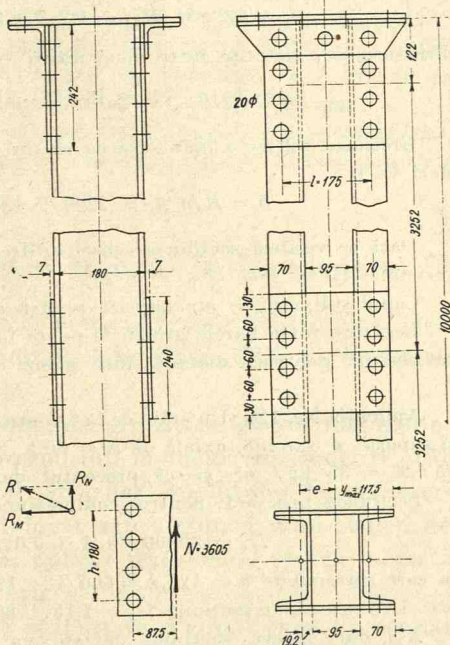


Figura 408

Rezistența unui nit la forfecare (nituri de 20 mm $\varnothing$) este:

$$R = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2 \cdot \sigma_a = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 \cdot 700 = 2200 \text{ kg/nit.}$$

Din 1,2 N nitul se încarcă cu

$$R_N = 1,2 N/4 = 1,2 \cdot 3605/4 = 1082 \text{ kg/nit.}$$

deci din încovoare nitul cel mai obosit se mai poate încărca (fig. 408) cu:

$$R_M = \sqrt{R^2 - R_N^2} = \sqrt{2200^2 - 1082^2} \simeq 1915 \text{ kg/nit}$$

Din formula $R_M = 1,2 aM/h$, cunoscând pe a corespunzător lui $n = 4$ nituri: $a = 6(n-1)/n(n+1) = 6 \cdot 3/4 \cdot 5 = 0,9$ rezultă distanța între niturile extreme:

$$h = 1,2 aM/R_M = 1,2 \cdot 0,9 \cdot 31500/1915 \simeq 18 \text{ cm.}$$

Prin urmare, distanța între două nituri vecine va fi de:

$$t = h/(n-1) = 18/(4-1) = 6 \text{ cm} = 60 \text{ mm.}$$

Grosimea eclisei o luăm așa ca să nu să strivească sub presiunea nitului, deci va fi

$$\delta = R/d \cdot \kappa_c = 2200/2 \cdot 1800 = 0,61 \sim 0,7 \text{ cm.}$$

Dacă se verifică secțiunea eclisei în dreptul șirului de nituri se vede că rezistă.

Capul stâlpului se amenajează pentru a primi sarcinile ce-l solicită.

Legătura între barele grinzii se poate face și cu zăbrele. Aci acest sistem nu convine pentru că distanța între grinzi este prea mică.

Aplicația Nr. 120. Un stâlp de beton armat, cu secțiune pătrată, are $l_f = 8$ m și suportă o sarcină axială de $N = 80$ t. Să se găsească secțiunea, în ipoteza că $\kappa_c = 35$ kg/cm² și că procentul de armare este $\varphi = 2\%$.

Secțiunea necesară pentru compresiune simplă este:

$$\Omega_0 = 80000/35 (1 + 0,02 \cdot 15) = 1760 \text{ cm}^2$$

la care corespunde $h = 42$, $\lambda = 800/42 = 19$ și după formula (50) corespunde $n = 1,15$ care cere o secțiune $\Omega_f = 1,15 \cdot 1760 = 2024 = 45,45 \text{ cm}^2$.

Așa dar, latura secțiunii patrute va fi între 42 cm și 45 cm. Incercăm cu $h = 44$ cm ca fiind mai apropiat de 45. Vom avea $\lambda_d = 800/44 = 18,2$ la care corespunde $n = 1,12$, care cere o secțiune $\Omega_f = 1,12 \cdot 1760 = 1970 = 44,3 \cdot 44,3 \text{ cm}^2$.

Soluția problemei va fi între $h = 44$ și $h = 44,3$ cm. Dacă încercăm de exemplu cu $h = 44,2$ cm găsim tot 44,3 cm; așa dar, aceasta este soluția problemei.

Aplicația Nr. 121. Să presupunem că același stâlp (aplicația 120), în aceleași condițiuni, suportă o sarcină numai de 8 t. Să se găsească secțiunea.

Secțiunea necesară pentru compresiune simplă este $\Omega_0 = 176 \text{ cm}^2 = 13,3 \cdot 13,3 \text{ cm}^2$ și deci $\lambda_d = 800/13,3 = 60 > 40$. Luăm atunci secțiunea ce corespunde lui $\lambda_d = 40$. Din formula (46) deducem:

$$n = 12 \cdot c \cdot \kappa_c \lambda_d^2 / \pi^2 E$$

care pentru

$$c = 9 \quad \text{și} \quad \mathfrak{K}_c = 35 \text{ Kg/cm}^2$$

ne dă

$$n = 2,74 \lambda_d^2 \cdot 10^{-3}$$

Pentru $\lambda_d = 40$, căpătăm $n = 4,38$, și rezultă o secțiune

$$\Omega_f = n \Omega_o = 176.4,38 = 772 = 27,8.27,8 \text{ cm}^2.$$

Soluția problemei va fi între $h = 13,3$ și $h = 27,8$ cm, însă mai apropiată de aceasta din urmă. Încercăm cu $h = 23$ cm, care este cam la $2/3$ din intervalul $13,3 - 27,8$.

Aceasta ne dă: $\lambda_d = 800/23 = 34,8$; $n = 3,32$ și $\Omega_f = 176.3,32 = 584 = 24,2.24,2 \text{ cm}^2$. După norma de mai sus încercăm $h = 23,8$ cm. Avem $\lambda_d = 800/23,8 = 33,6$; $n = 3,10$ și $\Omega_f = 176.3,10 = 545 = 23,4.23,4 \text{ cm}^2$. Așa dar, soluția problemei se găsește între $23,4$ și $23,8$ cm. Vom lua-o: $h = 23,6$ cm pe care o vom rotunji după necesitățile practice, să zicem la **$h = 24$ cm**.

Dacă se calculează rezistența efectivă la flambaj, se găsește $\mathfrak{K}_{fb} = 11 \text{ kg/cm}^2$.

Și din acest exemplu se vede sporul enorm de secțiune necesar pentru a asigura stabilitatea stâlpului.

D. Stabilitatea grinzilor supuse la încovoiere.

O grindă supusă la încovoiere, poate să reziste foarte bine dacă rezistențele interioare nu trec limitele admisibile. Asta nu înseamnă că stabilitatea ei este asigurată.

În adevăr, din motive de economie, grinzile se fac cât mai înalte, așa ca să avem, cu același material, un moment rezistent, W , cât mai mare. Or, dând înălțimi mari grinzilor, rigiditatea lor transversală poate ajunge așa de mică încât sub acțiunea unui sistem de sarcini, oricât de mic vom noi, aplicat transversal grinzii, aceasta să părăsească poziția de echilibru.

Aceasta este o chestiune de stabilitate. Primul care s'a ocupat cu această chestiune a fost *Prandtl*.

Pentru studiul acestei chestiuni dispunem de cele două metode expuse la începutul acestui capitol.

1. Prima metodă.

Să presupunem că avem o grindă orizontală supusă la sarcini verticale. Dacă sarcinile trec de o anumită limită, grinda părăsește poziția de echilibru deplasându-se lateral.

Întocmai ca și la flambajul grinzilor supuse la compresiune, vom presupune că poziția deplasată este infinit vecină celei inițiale.

Odată cu această deplasare, și secțiunile se rotesc în jurul axei grinzii cu un unghi oarecare θ , de asemenea infinit mic.

La studiul grinzilor curbe supuse la forțe normale pe planul lor, am văzut că într-o secțiune oarecare există un moment de răsucire și un moment încovoiător, între cari există relația:

$$(1) \quad dM_r/ds = M_i/r$$

Secțiunea înclinându-se cu unghiul foarte mic θ , după axa Oy vom avea un moment $M_y = M_i \sin \theta = M_i \theta$, și vom avea deci:

$$(2) \quad \omega_y = 1/r = M_i \theta / E I_y$$

Pe de altă parte, răsucirea specifică știm că are valoarea

$$(3) \quad \omega_x = d\theta/dx = -M_r/G I_r$$

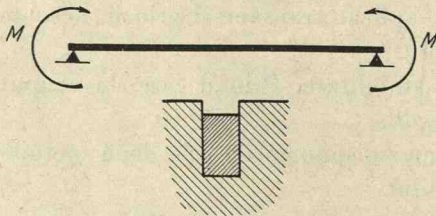
Dacă derivăm această expresie și ținem seamă de (1) și (2), găsim:

$$(4) \quad d^2\theta/dx^2 + \theta M_i^2/G I_r E I_y = 0$$

ecuația diferențială care, integrată și ținând seamă de legăturile grinzii, ne dă condițiile de stabilitate ale ei. Constantele de integrare, două la număr, le vom fixa prin valorile lui θ și ω_x în diferitele puncte ale grinzii, acestea depinzând evident de sistemul de rezemare.

Din exemplele ce vom trata, se va vedea modul de aplicare.

Aplicația Nr. 122. Grindă simplu rezemată la extremități supusă la un moment constant (fig. 409).



Eigura 409

Extremitățile grinzii sunt fixate, așa că în dreptul reazimilor grinda nu se poate înclina.

În acest caz, momentul M_i fiind constant pe toată lungimea grinzii, avem:

$$(5) \quad d^2\theta/dx^2 + \alpha^2\theta = 0$$

în care am notat:

$$(6) \quad M_i^2/G I_r E I_y = \alpha^2$$

și care ne dă:

$$(7) \quad \theta = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Pentru că secțiunile de pe reazim nu se pot roti, vom avea $\theta = 0$, pentru $x = 0$ și $x = l$. Pe baza aceluiași raționament ca la flambajul grinzilor supuse la compresiune, deducem:

$$(8) \quad \sin \alpha l = 0 \quad \therefore \quad \alpha l = \pi, 2\pi, \dots$$

Prima valoare ne dă:

$$(9) \quad M_i = \pi \sqrt{G I_r E I_y} / l$$

Aplicația Nr. 123. Grindă încastrată la o extremitate, liberă la cealaltă și supusă la un moment încovoietor constant (fig. 410).

Momentul fiind constant avem aceleași ecuații, (6) și (7).

Vom pune aici condiția ca pentru $x = 0$, $\omega_x = 0$ și pentru $x = l$, $\theta = 0$, cari ne dau $B = 0$, $al = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, ... de unde rezultă:

$$M_i = \pi \sqrt{G I_r E I_y} / 2 l$$

Din cele două exemple se recunoaște numaidecât analogia cu formulele ui *Euler*.

Aplicația Nr. 124. Grindă încastrată la o extremitate și suportând o sarcină F la extremitatea liberă (fig. 411).

Momentul încovoietor M_i într'o secțiune oarecare este:

$$M_i = -F x = -F l \cdot x/l = -M_{imax} \cdot \xi$$

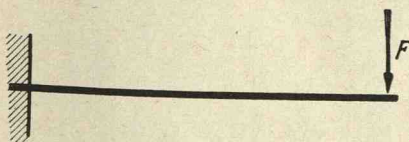


Figura 411

Dacă introducem această valoare în ecuația (4), dacă ținem seamă că $\xi = x/l$ și dacă notăm:

$$(10) \quad M_{imax}^2 l^2 / G I_r E I_y = a^2$$

găsim:

$$(11) \quad d^2\theta/d\xi^2 + \theta \cdot a^2 \xi^2 = 0$$

ecuație care se integrează cu ajutorul funcțiilor lui *Bessel*.

Dacă se notează:

$$a^2 \xi^2 = u$$

$$(12) \quad \varphi(u) = 1 - u^2/3.4 + u^4/3.4.7.8 - u^6/3.4.7.8.11.12 + \dots$$

$$\psi(u) = 1 - u^2/4.5 + u^4/4.5.8.9 - u^6/4.5.8.9.12.13 + \dots$$

atunci avem:

$$(13) \quad \theta = A \varphi(u) + B \xi \psi(u)$$

$$l \omega_x = 2 a \xi [A \varphi'(u) + B \xi \psi'(u)] + B \psi(u)$$

Constantele A și B le determinăm prin condițiile ca pentru $\xi = 0$ să avem $\omega_x = 0$ și pentru $\xi = 1$ să avem $\theta = 0$.

Acestea ne dau:

$$B = 0, \quad \varphi(a) = 0, \quad \text{deci} \quad a = 4,0126$$

Introdusă această valoare în (10), ne dă

$$(14) \quad M_{imax} = 4,0126 \sqrt{G I_r E I_y} / l$$

Aplicația Nr. 125. Grindă simplu rezumată la ambele extremități și încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc (fig. 412). Capetele grinzii sunt astfel fixate încât să nu se poată roti în jurul axei grinzii.

Momentul încovoietor într'o secțiune oarecare x , este:

$$(15) \quad M_i = \frac{1}{2} F x = 2 M_{imax} \cdot \xi$$

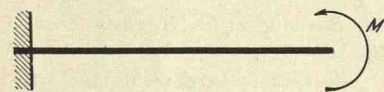


Figura 410

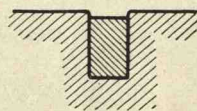
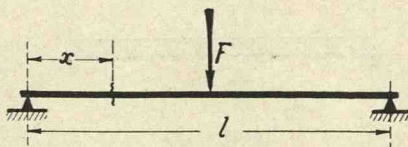


Figura 412

Dacă $\xi = x/l$, în care l este deschiderea grinzii, și dacă notăm:

$$(16) \quad 4 M_{imax}^2 l^2 / G I_r E I_y = \alpha^2$$

și le introducem în (4), găsim ecuația (11), care are aceeași soluție (13) cu notațiile din (12).

Constantele le determinăm prin condițiile ca pentru $x = 0$, adică $\xi = 0$, să avem $\theta = 0$ și pentru $x = \frac{1}{2}l$, adică $\xi = \frac{1}{2}$, să avem $\omega_x = 0$.

Acestea ne dau $A = 0$, $\psi(u) + 2u\psi'(u) = 0$, din care deducem $\frac{1}{4}\alpha = 2,1178$, care ne dă:

$$(17) \quad M_{imax} = 4,2356 \sqrt{G I_r E I_y} / l$$

Aplicația Nr. 126. Grindă încastrată la o extremitate și încărcată cu o sarcină uniformă p pe toată lungimea ei.

Momentul încovoietor M_i într-o secțiune oarecare este:

$$(18) \quad M_i = -\frac{1}{2} p x^2 = -\frac{1}{2} p l^2 \cdot x^2 / l^2 = -M_{imax} \xi^2$$

Ținând seama de ecuația (10), obținem:

$$(19) \quad d^2\theta/d\xi^2 + \theta \alpha^2 \xi^4 = 0$$

Dacă se notează:

$$\alpha \xi^3 = u$$

$$(20) \quad \varphi(u) = 1 - u^2/5.6 + u^4/5.6.11.12 - u^6/5.6.11.12.17.18 + \dots$$

$$\psi(u) = 1 - u^2/6.7 + u^4/6.7.12.13 - u^6/6.7.12.13.18.19 + \dots$$

atunci avem:

$$(21) \quad \theta = A \varphi(u) + B \xi \psi(u)$$

$$l \omega_x = 3 \alpha \xi^2 [A \varphi'(u) + B \xi \psi'(u)] + B \psi(u)$$

Constantele de integrare se determină prin condițiile, ca pentru $x = 0$ să avem $\omega_x = 0$ și pentru $x = l$ să avem $\theta = 0$. Acestea ne dau $B = 0$, $\varphi(\alpha) = 0$, deci $\alpha = 6,43$ și prin urmare:

$$(22) \quad M_{imax} = 6,43 \sqrt{G I_r E I_y} / l$$

Aplicația Nr. 127. Grindă simplu rezemată cu o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea ei (fig. 413).

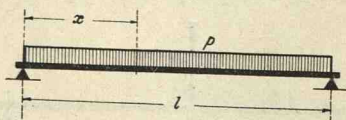


Figura 413

Bine înțeles că și aci s'au luat precauțiunile la reazime, ca secțiunile grinzii din dreptul lor să nu se rotească.

Dacă l este deschiderea grinzii, atunci momentul încovoietor într-o secțiune oarecare este:

$$(23) \quad M_i = \frac{1}{2} p x (l - x) = \frac{1}{2} p l^2 \xi (1 - \xi) = 4 M_{imax} \cdot \xi (1 - \xi)$$

Dacă punem

$$(24) \quad 16 M_{imax}^2 l^2 / G I_r E I_y = \alpha^2$$

găsim

$$(25) \quad d^2\theta/d\xi^2 + \theta \alpha^2 \xi^2 (1 - \xi)^2 = 0.$$

Făcând calculele ca în cazurile precedente, găsim:

$$(26) \quad M_{imax} = 3,586 \sqrt{G I_r E I_y} / l.$$

VERIFICAT
2017

VERIFICAT
2017

BIBLIOTECA

VERIFICAT
1987