

Statica

și

Rezistența

de

Gh. Em. Filipescu

I



Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului
Imprimeria Națională
București
1935



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI

Cota

63919

Inventar

430440

Statica construcțiunilor

și

Rezistența materialelor

curs predat de

Inginer Gh. Em. Filipescu

Profesor la Școala Politehnică din București

260923



Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului

Imprimeria Națională

București

1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

BUCUREȘTI

Cota

Inventar

63919

430440

RC 96/03

cont.
63919

B.C.U. Bucuresti



C430440

I. GENERALITĂȚI.

A) Elemente de construcție.

Toate construcțiunile ce le avem de făcut le confecționăm din diferite corpuri ce le avem la îndemână. Materiile prime sau prelucrate, de cari ne servim la facerea construcțiilor, sunt: lemnul, piatra, cărămida, cimentul, fierul, fonta, oțelul, arama, bronzul, aluminiul, etc. Ele poartă numele de *materiale de construcție*. Cu ajutorul lor confecționăm piese de diferite forme, cu cari, combinându-le între ele în anumite moduri, legându-le și îmbinându-le după anumite norme, ajungem să facem orice construcție de care avem nevoie, precum: case, poduri, mașini, etc.

Formele geometrice ale acestor piese diferă după nevoile ce le avem și după proprietățile materialelor din cari le facem. În acest mod, avem o varietate nemăsurat de mare de forme de piese.

Toate acestea le putem grupa în trei mari categorii:

1. Piese cari au o lungime relativ mare iar lățimea și grosimea mică. Această categorie de piese poartă numele de *bare, grinzi, stâlpi, coloane, cable, fire*, etc. Dacă facem o secțiune plană transversală în piesă, *normală* pe axa ei, aceasta poartă numele de *secțiunea piesei*. Ea are o valoare oarecare, pe care o notăm cu litera grecească Ω și care se exprimă de obicei în cm^2 , mm^2 și uneori în m^2 . Secțiunea aceasta are și diferite forme ca: dreptunghi, cerc, coroană circulară, în forma literelor L, U, T sau Z, etc.

Forma secțiunii se măsoară, după cazuri, prin momentele ei statice, prin momentele de inerție equatoriale sau polare, sau prin alte elemente cari se vor vedea ulterior în curs.

Succesiunea centrelor de greutate, a diferitelor secțiuni a unei bare, ne fixează *axa barei*. Această axă poate fi o linie dreaptă

sau curbă și vom avea corespunzător: *bare drepte*, *bare curbe*, în plan sau în spațiu, cărora le zicem tot așa de bine *grinzi drepte*, *grinzi curbe*, etc.

Secțiunile plane transversale le vom considera totdeauna normale pe axa piesei.

Prin urmare, elementele cari vor caracteriza din punct de vedere geometric o grindă sau o bară vor fi: *axa*, ca lungime și formă și *secțiunea*, ca valoare și formă.

Exemplu: o bucată de lemn de 4 m lungime și cu o secție transversală în formă de dreptunghi și cu laturi de 20×15 cm, este o grindă sau o bară.

2. A doua categorie de piese sunt acelea la cari lungimea și lățimea lor este mare față de grosime. Ele poartă numele de *plăci*, *table*, *tole*, *dale*, *păreți*, *tuburi*, etc. Suprafața care împarte peste tot grosimea plăcii în două părți egale, este *suprafața mediană* a plăcii. Grosimea se măsoară totdeauna *normal* pe această suprafață. Suprafața mediană a plăcii poate fi un plan, un cilindru, un con, o sferă, etc.

Elementele cari vor caracteriza din punct de vedere geometric o placă vor fi: forma și dimensiunile suprafeței mediane și grosimea.

O piesă de oțel plană, de 3 m lungime, lată de 1,50 m și groasă de 8 mm, este o placă sau o tablă.

3. A treia categorie de forme de piese sunt acelea cari au o lungime, lățime și grosime cam de același ordin de mărime. Ele poartă numele de *piese masive* sau *blocuri*. Exemplu o bucată de piatră de formă paralelipipedică, de $1,20 \text{ m} \times 1,00 \text{ m} \times 0,80 \text{ m}$, este un bloc sau un masiv. Același lucru este și cu o bilă sferică plină.

Sunt însă multe cazuri, când nu putem hotărî limite distincte pentru fiecare categorie de piese, și nu o să putem spune dela început dacă o piesă face parte din cutare sau cutare categorie. După oarecare practică vom putea face această clasificare, rămânându-ne totuși un mare număr de cazuri în cari nu ne vom putea pronunța.

Această clasificare este necesară, din punctul nostru de vedere, fiindcă pentru fiecare categorie de piese avem o anumită normă de calcul.

Datele geometrice, arătate mai sus, nu sunt suficiente pentru a caracteriza o piesă oarecare. Pentru a o caracteriza complet va trebui să spunem și materialul din care este făcută. Fiecare material are o serie de constante, cari rezultă din proprietățile sale.

Aceste constante, împreună cu cele ce rezultă din dimensiunile geometrice ale piesei, o vor caracteriza complet din punctul de vedere al *Rezistenței Materialelor*.

B) Noțiuni asupra vectorilor.

1. Definiții și notații.

În toate științele aplicate avem de făcut operațiuni asupra unor *mărimi* sau *cantități*.

Acestea se pot grupa în două categorii: *mărimi scalare* și *mărimi vectoriale*.

a) O *mărimă scalară* sau un *scalar* este acea mărime sau cantitate care este *complet definită numai prin valoarea ei*.

Valoarea unui scalar este numărul care ne arată de câte ori acel scalar cuprinde unitatea de măsură respectivă.

Cantități scalare sunt: masa, densitatea, temperatura, lucrul mecanic, cantitatea de căldură, etc.

Scalarul fiind un simplu număr urmează legile algebrei și analizei obișnuite.

b) O *mărimă vectorială* sau un *vector* este acea mărime sau cantitate care este *complet definită prin valoarea și direcțiunea ei*.

Prin urmare pentru a defini un vector avem nevoie de *două elemente*.

Valoarea vectorului este, ca și la cantitățile scalare, numărul care ne arată de câte ori unitatea de măsură respectivă se cuprinde în mărimea vectorului.

Direcțiunea ne arată sensul în care, sau linia după care, este dirijată mărimea vectorială. Exemple de vectori avem: drumul parcurs de un mobil, iuțeala, accelerația, forța, fluxul magnetic, fluxul de căldură, etc.

Vectorul care are ca valoare unitatea poartă numele de *vector unitate* sau pur și simplu *direcțiunea* vectorului.

c) Ca să facem diversele operațiuni asupra mărimilor trebuie să le reprezentăm sau să adoptăm o notațiune care să reprezinte acele cantități.

Pentru cantitățile scalare s'au adoptat notațiunile din algebră cari reprezintă numerile. Se întrebuițează literile mari sau mici ale alfabetului latin. De exemplu 3° temperatură se notează în mod general cu t^0 ; 7 m^3 se notează cu $V \text{ m}^3$, etc.

Vectorii au o valoare sau o parte scalară. Aceasta este natural să fie notată întocmai ca și cantitățile scalare.

În privința notării sau reprezentării direcțiunilor vectorilor nu s'a căzut până acum de acord asupra unei notațiuni unitare.

Pentru a putea reprezenta direcțiunea vectorului evident că nu se dispune de alte semne decât tot de literile diferitelor alfabete.

Pentru a marca direcțiunea vectorului și a o deosebi de cantitățile scalare, se întrebuintează diferite semne distinctive ce se aplică literilor alfabetului.

Autorii germani, în cărțile tipărite, notează direcțiile vectorilor cu literile grase ale alfabetului lor ($\mathbf{a}$); alții cu literile grase ale alfabetului latin cu indicele ($\mathbf{a}_0$), alții cu notația de mai sus cu o liniuță sau o săgeată mică deasupra ($\overline{\mathbf{a}}$), alții cu literile alfabetului grec (α), etc.

Fiecare din ele au avantajile și inconvenientele lor. În cele ce urmează vom nota o direcțiune oarecare în spațiu, cu o literă a alfabetului grec cu o liniuță deasupra, de ex. $\overline{\alpha}$. O altă direcțiune se reprezintă de exemplu cu $\overline{\beta}$.

Dacă vectorul care are valoarea 1 se notează astfel, atunci vectorul a cărui valoare va fi a se va nota $a\overline{\alpha}$.

Această notațiune are și ea inconvenientul că pentru a reprezenta un vector avem nevoie de două litere, și avantajul că ne arată distinct elementele componente ale unui vector. Se notează atunci prescurtat acest vector cu o literă cu o liniuță deasupra, deci

$$(1) \quad \overline{a} = a\overline{\alpha}$$

d) Grafic un vector se reprezintă printr'o dreaptă pe care se ia la scara stabilită un segment egal cu a . Dreapta are un sens pozitiv, sensul opus fiind cel negativ. Segmentul de dreaptă are două capete A și B . Dacă sensul pozitiv este dela A spre B se zice că A este *originea* vectorului iar B *extremitatea* lui. Pe desen sensul se însemnează cu o săgeată pusă chiar pe direcția vectorului.

2. Algebra vectorială.

a) Egalitatea vectorilor.

Doi vectori unitate sau două direcțiuni se zic că sunt egale atunci când sunt paralele.

Doi vectori sunt egali când au aceeași valoare și aceeași direcțiune adică sunt și paraleli.

Doi vectori sunt egali și de sens contrar, atunci când au aceeași valoare însă direcția unuia este opusă direcției celuilalt.

Dacă $\vec{a}$ este un vector, atunci vectorul egal și de sens contrar va fi $-\vec{a}$.

b) Adunarea și scăderea vectorilor.

Dacă la extremitatea unui vector $\vec{a}$ punem originea altui vector $\vec{b}$, atunci vectorul $\vec{c}$ care unește originea lui $\vec{a}$ cu extremitatea lui $\vec{b}$ este, prin definiție, suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și se scrie:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Diferența $\vec{a} - \vec{b}$ este suma lui $\vec{a}$ cu $-\vec{b}$. În însumarea mai multor vectori recunoaștem dacă îi adunăm sau îi scădem, parcurgând în același sens, din origine spre extremitate, atât vectorul sumă cât și vectorii adunați sau scăzuți. Vectorii parcurși în sens pozitiv se adună, cei în sens negativ se scad.

Fig. 1 ne reprezintă:

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$$

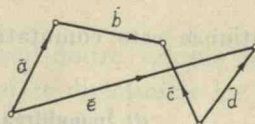


Figura 1

Se demonstrează că suma vectorilor este independentă de ordinea în care se face însumarea și că putem înlocui doi sau mai mulți vectori prin sumele lor parțiale, adică:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{d}$$

dacă:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Însumarea mai multor vectori este o operație comutativă și asociativă sau distributivă.

Dacă, însumând mai mulți vectori, ajungem cu extremitatea ultimului în originea celui dintâiu suma este nulă.

Pentru un contur închis avem totdeauna:

$$(2) \quad \oint \vec{ds} = 0,$$

când integrala se face plecând dintr'un punct și parcurgând întreg conturul în același sens, revenim în punctul de plecare.

c) Înmulțirea unui vector cu un scalar.

Când vectorul are valoarea egală cu unitatea el se reprezintă numai prin direcțiunea lui: $\bar{a}$.

Dacă are valoarea a atunci vectorul va fi:

$$(1) \quad \bar{a} = a\bar{a}$$

De aci rezultă chiar regula înmulțirii unui vector cu o cantitate scalară oarecare m .

Rezultatul va fi:

$$ma\bar{a}$$

Vectorul va fi paralel cu vectorul inițial, însă valoarea lui va fi de m ori mai mare.

Rezultă evident și:

$$m a \bar{a} = a m \bar{a}$$

$$m(\bar{a} + \bar{\beta}) = m\bar{a} + m\bar{\beta}$$

$$(m + a)\bar{a} = m\bar{a} + a\bar{a}$$

Operațiunea este comutativă și asociativă.

d) Înmulțirea scalară a doi vectori.

Produsul scalar a doi vectori este o mărime scalară care rezultă din înmulțirea valorilor numerice a celor doi vectori cu cosinul unghiului pe care îl fac între ele direcțiile lor positive. Este exact definiția care se dă lucrului mecanic.

Acest produs se notează

$$(3) \quad \bar{a}\bar{b} \text{ sau } (\bar{a}\bar{b})$$

Așa dar:

$$(4) \quad \bar{a}\bar{b} = ab \cos(\bar{a}, \bar{\beta}),$$

Din aceasta rezultă imediat:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$$

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$$

Să considerăm în special două direcțiuni, vom avea:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \cos(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

deci produsul scalar a două direcțiuni este egal cu cosinul unghiului celor două direcțiuni, bine înțeles a sensurilor positive.

Avem deci:

$$\bar{a}^2 = 1$$

$$\bar{a}^2 = a^2 \bar{a}^2 = a^2$$

Dacă două direcțiuni sunt paralele, avem evident:

$$(5) \quad \bar{a} \bar{b} = 1$$

Se mai zice în acest caz, că cele două direcțiuni sunt egale. Această este și condiția de paralelism a două direcțiuni.

Dacă doi vectori sau două direcțiuni sunt perpendiculare, avem iarăși evident:

$$(5') \quad \bar{a} \bar{b} = 0 \quad \bar{a} \bar{\beta} = 0,$$

care reprezintă condiția de perpendicularitate a doi vectori sau a două direcțiuni.

e) Înmulțirea vectorială a doi vectori.

Produsul vectorial a doi vectori este *vectorul* definit precum urmează:

a) Are ca valoare numerică produsul dintre valorile vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ multiplicat cu sinusul unghiului ce direcțiunile lor positive fac între ele, adică:

$$c = ab \sin (\bar{a}, \bar{b}) = ab \sin (\bar{a}, \bar{b})$$

b) Este normal pe planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

c) Are sensul pozitiv așa fel încât, un observator, cu picioarele în originea lui $\bar{c}$ și cu capul în extremitatea lui, parcurge cu ve-

derea conturul $\bar{a} + \bar{b}$ (fig. 2) în sensul acelor unui ciasornic, sau pentru a suprapune $\bar{a}$ peste $\bar{b}$, observatorul vede rotindu-se $\bar{a}$ spre $\bar{b}$ tot în sensul acelor unui ciasornic.

Ori, aceasta este tocmai definiția momentului unei forțe în raport cu un punct.

Dacă direcțiunea normală pe planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este $\bar{\gamma}$, atunci

$$(6) \quad \bar{c} = \bar{\gamma} ab \sin (\bar{a}, \bar{b})$$

și se notează:

$$(7) \quad \bar{c} = \bar{a} \bar{b} = [\bar{a} \bar{b}]$$

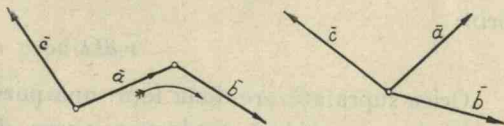


Figura 2

Din figură și din definiție se vede că dacă schimbăm în produs ordinea vectorilor se schimbă sensul de rotire și deci și semnul lui $\bar{c}$, și avem:

$$\bar{c} = -\bar{ba} = -[\bar{b} \bar{a}]$$

Ordinea factorilor nu este indiferentă în acest produs, deci operația nu este comutativă.

Valoarea numerică c este egală, după definiție, cu suprafața paralelogramului format de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, sau cu dublul suprafeței triunghiului format de aceleași laturi și suma lor.

Dacă cei doi vectori sunt paraleli, după definiția dată, avem:

$$(8) \quad \bar{ab} = 0 \quad \bar{a}\bar{b} = 0$$

care reprezintă condiția de paralelism a doi vectori.

Să considerăm două direcțiuni $\bar{a}$ și $\bar{\beta}$, atunci vectorul

$$\bar{\gamma} = \bar{a}\bar{\beta}$$

este vectorul normal pe planul format de cele două direcțiuni și are ca valoare numerică sinusul unghiului celor două direcțiuni.

Să presupunem că luăm un element de suprafață $d\Omega$ și că ne fixăm un sens în care parcurgem conturul ei. Suprafața are o mărime $d\Omega$ și o direcțiune. Direcțiunea ei este perfect cunoscută când cunoaștem direcțiunea normalei $\bar{v}$ la această suprafață. Direcțiunea pozitivă a normalei $\bar{v}$ va fi aceea, din extremitatea căreia privind conturul, îl parcurgem cu vederea în sensul acelor unui cîsornic. Prin urmare, și suprafața este un vector și se poate reprezenta prin:

$$\bar{v} d\Omega$$

Orice suprafață are două fețe: una pozitivă, alta negativă. Fața pozitivă se consideră totdeauna aceea dela suprafața corpurilor și ca față negativă aceea dinspre interiorul lor. În acest condiții:

$$\bar{a} = \int \bar{v} d\Omega$$

reprezintă iarăși un vector.

Pentru o suprafață închisă, cum ar fi suprafața ce mărginește un corp oarecare, avem în virtutea relației (2):

$$(9) \quad \int \bar{v} d\Omega = 0$$

Cu ajutorul acestei relații se demonstrează că produsul vectorial a doi vectori este o operație distributivă și asociativă, deci:

$$\bar{ac} + \bar{bc} = (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = [(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c}]$$

f) Înmulțirea a trei vectori între ei.

Aci avem mai multe cazuri, căci între trei vectori putem face mai multe combinațiuni în ce privește operațiile de înmulțire.

a) Doi dintre vectori putem să-i înmulțim scalar între ei și rezultatul va fi evident un scalar. Această cantitate înmulțită cu al treilea vector ne dă un vector paralel cu acesta din urmă. Deci:

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$$

este un vector paralel cu direcția $\vec{a}$ și a cărui valoare numerică este:

$$d = abc \cos(\vec{b}, \vec{c})$$

și putem deci scrie:

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot abc \cos(\vec{b}, \vec{c})$$

Cu totul altceva este:

$$\vec{d}_1 = \vec{a} \vec{b} \cdot \vec{c}$$

a cărui valoare numerică este:

$$d_1 = abc \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

și ca vector este:

$$\vec{d}_1 = \vec{c} \cdot abc \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

paralel cu $\vec{c}$.

Aceste două produse n'ar putea fi egale decât atunci când $\vec{a}$ ar fi paralel cu $\vec{c}$.

Prin urmare produsul depinde de ordinea în care facem operațiile de înmulțire.

Poziția punctului din produsele:

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}, \vec{d}_1 = \vec{a} \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{d}_2 = \vec{a} \vec{c} \cdot \vec{b}$$

indică modul cum grupăm aceste operații.

Produsele de mai sus sunt trei produse diferite.

b) Doi dintre vectori putem să-i înmulțim vectorial între ei și rezultatul va fi un vector. Acesta putem să-l înmulțim scalar cu al treilea vector și rezultatul va fi un scalar. Deci:

$$(10) \quad V = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} = \vec{a} [\vec{b} \vec{c}]$$

Însă $\vec{b} \vec{c}$ este suprafața paralelogramului format pe laturile $\vec{b}$ și $\vec{c}$ și e reprezentată printr'un vector normal pe această suprafață.

Această suprafață înmulțită scalar cu $\vec{a}$, adică cu proiecția lui $\vec{a}$ pe $\vec{b} \vec{c}$, ne dă tocmai volumul paralelipipedului format de laturile $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Acest volum este unul și același, deci:

$$(10') \quad \begin{aligned} V &= \overline{a \cdot bc} = \overline{b \cdot ca} = \overline{c \cdot ab} \\ &= \overline{ab} \cdot \overline{c} = \overline{bc} \cdot \overline{a} = \overline{ca} \cdot \overline{b} \end{aligned}$$

trecând dela o expresie la alta prin permutări circulare. Dacă schimbăm ordinea factorilor se schimbă și semnul volumului, deci:

$$\overline{ab} \cdot \overline{c} = -\overline{ba} \cdot \overline{c}, \text{ etc.}$$

Pentru că expresia volumului se poate scri conform formulei (10) în 12 moduri diferite, se obișnuiește a se nota mai simplu și anume:

$$V = \overline{abc}$$

în care se suprimă complet punctul și liniuța.

Dacă cei trei vectori sunt complanari, $V = 0$, deci

$$(11) \quad \overline{\overline{abc}} = 0,$$

exprimă condiția ca cei trei vectori să fie cuprinși în același plan.

c) Doi dintre vectori îi înmulțim vectorial între ei și obținem un vector. Acesta la rândul lui putem să-l înmulțim vectorial cu al treilea. Rezultatul va fi evident un vector. Acest produs se notează:

$$\overline{d} = \overline{a \cdot bc} = [\overline{a}, \overline{bc}] = [\overline{a} [\overline{bc}]],$$

Poziția punctului sau parantezelor ne indică modul de grupare al operațiunilor. Formula ne arată că produsul vectorial $\overline{bc}$ îl multiplicăm vectorial cu $\overline{a}$.

Vectorul $\overline{d}$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\overline{a}$ și $\overline{bc}$. Însă vectorul $\overline{bc}$, la rândul lui, este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\overline{b}$ și $\overline{c}$ și deci vectorul $\overline{d}$ este cuprins în planul determinat de $\overline{b}$ și $\overline{c}$. Descompunând pe $\overline{d}$ în acest plan după cele două direcții $\overline{b}$ și $\overline{c}$ vom avea o expresie de forma:

$$\overline{d} = y \overline{b} + z \overline{c},$$

y și z fiind două cantități scalare, deci:

$$\overline{a \cdot bc} = y \overline{b} + z \overline{c}$$

Să înmulțim această relație scalar cu $\overline{a}$.

Produsul $\overline{a \cdot a \cdot bc} = 0$ în virtutea relației (11), deci:

$$y \cdot \overline{ab} + z \cdot \overline{ac} = 0,$$

din care rezultă:

$$y/\overline{ac} + z/\overline{ab} = 0$$

$$y = k.\overline{ac}, z = -k\overline{ab}$$

în care k este un factor de proporționalitate care trebuie determinat.

Vom avea deci:

$$\overline{a.bc} = k(\overline{b.ac} - \overline{c.ab})$$

Această relație este adevărată oricari ar fi valorile și direcțiile celor trei vectori, deci și într'un caz special, și anume când $\overline{b}$ este normal pe $\overline{c}$ și când $\overline{a}$ coincide cu direcție cu $\overline{c}$. Atunci:

$$\overline{a.bc} = \overline{\beta}.abc$$

$$k(\overline{b.ac} - \overline{c.ab}) = k(\overline{\beta}.abc - 0)$$

de unde rezultă $k = 1$, și deci:

$$(12) \quad \overline{a.bc} = \overline{b.ac} - \overline{c.ab}$$

Formula aceasta este foarte importantă și servă de bază pentru înmulțirea grupelor mai mari de trei vectori.

În rezumat avem trei operații distincte de înmulțire a trei vectori:

$$\overline{a.bc}, \overline{a.bc} \text{ și } \overline{a.bc}$$

Să se observe că pentru deosebirea operațiilor plasarea punctului joacă un foarte mare rol, precum și întinderea liniuței de deasupra literilor. Notățiunea $\overline{bc}$ înseamnă că fac produsul scalar al vectorilor $\overline{b}$ și $\overline{c}$, iar $\overline{bc}$ sau $[\overline{bc}]$ înseamnă că fac produsul lor vectorial.

Plasarea punctului sau parantezei ne arată că produsul $\overline{a.bc} = \overline{a}(\overline{bc})$ este distinct de $\overline{ab.c} = (\overline{ab})\overline{c}$. Primul ne dă un vector paralel cu $\overline{a}$, al doilea unul paralel cu $\overline{c}$, prin urmare căpătăm rezultate complet deosebite.

De asemenea produsele:

$$\overline{a.bc} = \overline{b.ac} - \overline{c.ab}$$

$$\overline{b.ca} = \overline{c.ab} - \overline{a.bc}$$

$$\overline{c.ab} = \overline{a.bc} - \overline{b.ac}$$

sunt complet diferite unul de altul.

În treacăt se observă că suma lor e nulă, deci:

$$\overline{a.bc} + \overline{b.ac} + \overline{c.ab} = 0$$

Descompunerea unui vector după o direcție oarecare și o normală la aceasta (fig. 3).

Componenta vectorului $\vec{b}$ după direcția $\vec{a}$ este $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{a}$. Componenta după normala la $\vec{a}$ este $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{a}^\perp$, deci:

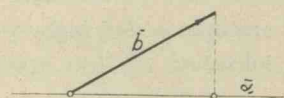


Figura 3

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{a}^\perp$$

Dacă se efectuează produsul vectorial din ultimul termen se obține o identitate.

g) Înmulțirea a patru vectori.

Produsele a trei vectori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}^\perp \text{ și } \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}^\perp$$

le putem înmulți cu al patrulea vector scalar sau vectorial.

a) Produsul $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$ este un vector paralel cu $\vec{a}$. Acesta multiplicat scalar sau vectorial cu $\vec{d}$ ne va da:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d} \text{ și } \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d}^\perp$$

cari sunt respectiv un scalar și un vector. N'au nimic deosebit în ele în afară de faptul, că nu putem schimba între ei vectorii din cele două grupe, fără ca rezultatul să nu se schimbe. Produsele $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$ și $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}^\perp$ sunt complet diferite între ele. Ele nu sunt egale decât în cazul special când $\vec{a}$ este paralel cu $\vec{c}$ sau când $\vec{b}$ este paralel cu $\vec{d}$.

b) Produsul $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$ care este un scalar, multiplicat cu vectorul $\vec{d}$ ne dă un vector paralel cu $\vec{d}$.

Acest produs $(\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}) \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d}$ se poate pune și sub altă formă. Dacă notez $\vec{b} \vec{c} = \vec{e}$, avem: $\vec{a} \cdot \vec{e} \vec{d}$ care după formula (12) ne dă:

$$\vec{d} \cdot \vec{a} \vec{e} = \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{e} - \vec{e} \cdot \vec{a} \vec{d}$$

însă

$$\vec{e} \cdot \vec{a} \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{b} \vec{a} \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{a} \vec{d}$$

și deci:

$$(13) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{a} \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{a} \vec{b} \vec{d}$$

sau:

$$(13) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{a} \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{a} \vec{b} \vec{d} - \vec{d} \cdot \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$$

Aceasta ne servește la descompunerea vectorului $\vec{d}$ după direcțiunile $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

c) Produsul $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$ se poate multiplica scalar cu $\vec{d}$. Dacă notăm $\vec{b} \vec{c} = \vec{e}$, vom avea:

$$\vec{d} \cdot \vec{a} \vec{e} = \vec{d} \cdot \vec{a} \vec{e} = \vec{d} \cdot \vec{a} \vec{e}$$

Pe de altă parte în virtutea relației (12) avem:

$$\bar{d} \cdot \overline{a \cdot bc} = \bar{bd} \cdot \bar{ac} - \bar{c} \bar{d} \cdot \bar{ab} = \begin{vmatrix} \bar{bd} & \bar{ba} \\ \bar{cd} & \bar{ca} \end{vmatrix}$$

și deducem:

$$(14) \quad \bar{d} \cdot \overline{a \cdot bc} = \overline{da} \cdot \bar{bc} = \begin{vmatrix} \bar{bd} & \bar{ba} \\ \bar{cd} & \bar{ca} \end{vmatrix}$$

Coloanele determinantului le formează factorii produsului $\bar{da}$ iar liniile factorii celuiilalt produs $\bar{bc}$.

Se poate acum da o regulă simplă pentru memorarea produsului vectorial a trei vectori. Presupunem că avem simbolul $\bar{d} = 1$ și că acest simbol nu operează prin înmulțire asupra vectorului.

Avem:

$$1 \cdot \overline{a \cdot bc} = \overline{1a} \cdot \bar{bc} = \begin{vmatrix} 1 \bar{b} & 1 \bar{c} \\ \bar{a} \bar{b} & \bar{a} \bar{c} \end{vmatrix} = \bar{b} \cdot \bar{ac} - \bar{c} \cdot \bar{ab}$$

Putem face acum și $\overline{ab^2}$. Vom avea:

$$(\bar{ab})^2 = \overline{ab} \cdot \bar{ab} = \begin{vmatrix} \bar{a} \bar{a} & \bar{a} \bar{b} \\ \bar{b} \bar{a} & \bar{b} \bar{b} \end{vmatrix} = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2 - (\bar{ab})^2$$

d) Se vede de asemenea numaidecât că:

$$[\overline{ab}, \bar{cd}] = \bar{b} \cdot \bar{acd} - \bar{a} \cdot \bar{bcd} = \bar{c} \cdot \bar{dab} - \bar{d} \cdot \bar{abc}$$

Acesta este un vector dirijat după intersecția planelor determinate de $\bar{a}$ cu $\bar{b}$ și $\bar{c}$ cu $\bar{d}$.

h) Produse de mai mult de patru vectori.

Mai interesant este produsul:

$$V V_1 = \overline{abc} \cdot \overline{a_1 b_1 c_1}$$

a cărui valoare se găsește:

$$(15) \quad V V_1 = \begin{vmatrix} \bar{a} \bar{a}_1 & \bar{a} \bar{b}_1 & \bar{a} \bar{c}_1 \\ \bar{b} \bar{a}_1 & \bar{b} \bar{b}_1 & \bar{b} \bar{c}_1 \\ \bar{c} \bar{a}_1 & \bar{c} \bar{b}_1 & \bar{c} \bar{c}_1 \end{vmatrix}$$

în care liniile sunt formate din termenii lui V , iar coloanele din termenii lui V_1 .

Pentru a efectua acest produs procedăm astfel: produsul scalar $\overline{a_1 \cdot b_1 c_1}$, trebuie multiplicat cu scalarul V . Pentru aceasta e suficient să multiplicăm unul din vectori și vom avea:

$$\overline{a_1 \cdot b_1 c_1} \cdot V$$

conform formulei (13) avem:

$$\begin{aligned}\overline{b_1c_1} \cdot V &= \overline{a} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{b} \cdot \overline{ca} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{c} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{b_1c_1} \\ &= \overline{a} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{b} \cdot \overline{ca} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{c} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{b_1c_1} \\ VV_1 &= \overline{a} \overline{a_1} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{b} \overline{a_1} \cdot \overline{ca} \cdot \overline{b_1c_1} + \overline{ca_1} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{b_1c_1}\end{aligned}$$

Dacă se dezvoltă produsele $\overline{bc} \cdot \overline{b_1c_1}$ după formula (14), se găsesc termenii determinantului arătat.

Observație.

Cu cunoștințele căpătate până acum putem transforma orice expresie vectorială în una scalară.

Pentru ca din expresiunile vectoriale să deducem valori numerice, se caută a le transforma prin operațiunile indicate până aci în expresiuni scalare. Aceasta este norma generală și este totdeauna posibilă.

Să presupunem că am găsit vectorul $\overline{a}$. Ca să-i avem valoarea îl multiplicăm scalar cu o direcție cunoscută să zicem $\overline{\beta}$. Atunci căpătăm $\overline{a\beta} = \overline{a} \cdot \overline{a\beta}$ adică proiecția lui $\overline{a}$ pe $\overline{\beta}$. E mai simplu dacă ridicăm la patrat: $\overline{a^2} = a^2 \overline{a^2} = a^2$.

De asemenea $\overline{a b}$ ridicat la pătrat ne dă $\overline{a^2 b^2} - (\overline{ab})^2$, expresie scalară.

Având două direcțiuni $\overline{a}$ și $\overline{\beta}$.

Vectorul

$$c \overline{\gamma} = \overline{a \beta}$$

are valoarea egală cu $\sin(\overline{a}, \overline{\beta})$.

În cazul nostru ajungem la rezultat ridicând expresia de mai sus la pătrat și avem:

$$c^2 \overline{\gamma^2} = (\overline{a \beta})^2 = \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{a} \\ \overline{\beta} & \overline{a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{\beta} \\ \overline{\beta} & \overline{\beta} \end{vmatrix} = 1 - (\overline{a \beta})^2$$

Deci

$$c^2 = 1 - \cos^2(\overline{a}, \overline{\beta}) = \sin^2(\overline{a}, \overline{\beta})$$

cunoscuta relație trigonometrică.

Analog $V = \overline{abc}$ pentru a o transforma în o expresie scalară n'avem decât să o ridicăm la patrat și avem după formula (15):

$$V^2 = \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{a} & \overline{a} \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{a} & \overline{c} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{b} & \overline{c} \\ \overline{c} & \overline{b} & \overline{c} \end{vmatrix} = \overline{a^2 b^2 c^2} + 2 \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} - \overline{a^2} (\overline{bc})^2 - \overline{b^2} (\overline{ca})^2 - \overline{c^2} (\overline{ab})^2$$

Așa putem proceda cu orice expresie.

3. Operațiuni diferențiale.

Operațiunile diferențiale se fac asupra mărimilor scalare sau vectoriale. Acestea la rândul lor sunt funcțiuni de o mărime scalară sau vectorială.

Chestiunea care se pune este de a găsi creșterea cantității scalare, sau vectoriale, când variabila de care depinde, scalară sau vectorială, a crescut cu o cantitate oarecare.

Se vede că aceste operațiuni sunt de natura calculului diferențial.

Se deosebesc două cazuri principale: când variabila este o cantitate scalară sau vectorială.

Operațiuni diferențiale în raport cu o variabilă scalară.

Aci vom deosebi iarăși alte două cazuri.

a) Când funcțiunea este o cantitate scalară. Să presupunem că mărimea scalară b este funcțiune de cantitatea scalară a .

Se poate găsi în acest caz o funcție $db/da = b'$ așa fel încât, multiplicată cu creșterea da a variabilei să ne dea creșterea funcțiunii b , adică pe db .

Litera d , pusă înaintea funcțiunii b , înseamnă că trebuie să facem o anumită operațiune asupra funcțiunii b .

Raportul db/da poartă numele de derivata funcțiunii b în raport cu a , iar db este diferențiala funcțiunii b .

Aceasta nu e decât calculul diferențial obișnuit.

b) Când funcțiunea este un vector oarecare b . Să presupunem că vectorul $\vec{b} = b \vec{\beta}$ este funcție de scalarul a . Dacă variabila a a crescut cu cantitatea da , atunci vectorul a a crescut cu o cantitate oarecare $d\vec{b}$.

Se definește:

$$d\vec{b}/da = \vec{b}', \quad d^2\vec{b}/da^2 = \vec{b}'', \text{ etc.}$$

Să vedem mai de aproape creșterea vectorului $\vec{b}$. Avem evident:

$$d\vec{b} = (b + db) (\vec{\beta} + d\vec{\beta}) - b \vec{\beta} = db \cdot \vec{\beta} + b \cdot d\vec{\beta}$$

dacă se neglijează infinitul mic: $db \cdot d\vec{\beta}$ (fig. 4).

Dacă împărțim ambele părți ale egalității cu da , avem:

$$(16) \quad \vec{b}' = b' \vec{\beta} + b \vec{\beta}' = (b \vec{\beta})' = d(\vec{\beta} b)/da$$



Din aceasta se vede că diferențierea, sau derivarea unui vector în raport cu un scalar, urmează regula obișnuită a calculului diferențial.

Să considerăm în special un vector de lungime constantă, avem:

$$b^2 = \bar{b}^2 \quad \beta^2 = \bar{\beta}^2 = ct$$

De aci rezultă:

$$(17) \quad d\bar{b}^2 = 2\bar{b} \cdot d\bar{b} = 0$$

sau dacă am considera o direcțiune $\bar{\beta}$ a cărei lungime este egală cu 1, atunci

$$(17') \quad \bar{\beta} \cdot d\bar{\beta} = 0$$

Relațiile (17) și (17') arată că diferențiala, sau creșterea unei direcțiuni sau vector, este o direcție sau un vector normal pe direcția dată.

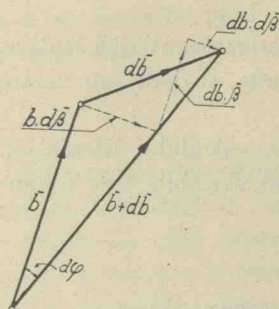


Figura 4

De pe fig. 4 se vede că partea scalară a lui $d\bar{\beta}$ este unghiul $d\varphi$, care-l fac între ele direcțiunile $\bar{\beta}$ și $\bar{\beta} + d\bar{\beta}$, sau ceea ce este tot una cu unghiul între $\bar{\beta}$ și $\bar{\beta} + d\bar{\beta}$.

Tot de pe figură rezultă că $d\bar{b}$ este suma celor doi vectori $b d\bar{\beta} + \bar{\beta} db$, dacă se neglijează infinitul mic $db \cdot d\bar{\beta}$ de care am pomenit mai sus.

O aplicație. Să avem o curbă oarecare. Ea este perfect determinată dacă cunoaștem, în fiecare punct al ei, valoarea și direcțiunea razei vectoare $\bar{r}$, ce pleacă dintr'un pol O arbitrar ales, la fiecare din punctele P ale curbei. Când trecem dela punctul P la P_1 , arcul s măsurat dela o origine oarecare a variat cu cantitatea ds . La limită când punctele se confundă direcția $P P_1$, coincide cu tangenta $\bar{\theta}$ la curbă, (fig. 5) și putem scri:

$$d\bar{P} = \bar{\theta} ds = d\bar{r}$$

sau

$$d\bar{P} / ds = \bar{\theta} = d\bar{r} / ds$$

sau (18)

$$\bar{P}' = \bar{\theta} = \bar{r}'$$

căci putem scri că și un punct este un vector de o direcțiune oarecare și a căru valoare sau mărime este zero.

Dacă mai derivăm încă odată, avem:

$$(19) \quad d^2 \bar{P} / ds^2 = d^2 \bar{r} / ds^2 = d\bar{\theta} / ds$$

$$\bar{P}'' = \bar{r}'' = \bar{\theta}'$$

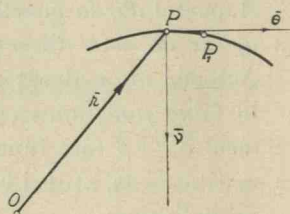


Figura 5

însă vectorul $d\bar{\theta}$ este normal pe $\bar{\theta}$, deci coincide cu normala $\bar{\nu}$ la curbă și are ca mărime unghiul $d\varphi$, ce-l fac tangentele $\bar{\theta}$ și $\bar{\theta} + d\bar{\theta}$ infinit vecine, ceea ce este tot una cu unghiul normalelor în punctele P și P_1 , deci

$$(20) \quad d\bar{\theta} = \bar{\nu} d\varphi$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu r_c raza de curbură, se știe că avem:

$$(21) \quad ds = r_c d\varphi$$

Rezultă deci

$$d\bar{\theta} / ds = \bar{\nu} / r_c$$

și atunci relațiile de mai sus se completează precum urmează:

$$(19') \quad \begin{aligned} d^2 \bar{P} / ds^2 &= d^2 \bar{r} / ds^2 = \bar{\nu} / r_c, \\ \bar{P}'' &= \bar{r}'' = \bar{\theta}' = \bar{\nu} / r_c, \end{aligned}$$

ecuația generală a oricărei curbe plane.

Altă aplicație. Să avem un arc de curbă și un sistem de axe rectangular format din tangenta $\bar{\theta}$, normala principală $\bar{\nu}$ și binormala $\bar{\beta}$ la curbă, mobil pe curbă. Se știe că planul determinat de $\bar{\theta}$ și $\bar{\nu}$ este planul osculator.

Avem evident:

$$\bar{\beta} = \bar{\theta} \bar{\nu}, \quad \bar{\nu} = \bar{\beta} \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} = \bar{\nu} \bar{\beta}$$

Când parcurgem arcul în sensul lui pozitiv aceste direcțiuni vor varia.

Din prima relație deducem:

$$\bar{\beta}' = \bar{\theta}' \bar{\nu} + \bar{\theta} \bar{\nu}'$$

$\bar{\theta}$ fiind paralel cu $\bar{\nu}$, produsul $\bar{\theta}' \bar{\nu} = 0$, deci

$$\bar{\beta}' = \bar{\theta} \bar{\nu}'$$

Aceasta ne arată că $\bar{\beta}'$, perpendicular pe $\bar{\beta}$, deci cuprins în planul osculator e normal și pe $\bar{\theta}$, deci dirijat după normala $\bar{\nu}$ la curbă.

Unghiul între $\bar{\beta}$ și $\bar{\beta} + d\bar{\beta}$ îl notăm cu $d\psi$, și dacă r_r este raza de răsucire, atunci se definește:

$$ds = r_r d\psi$$

și deci:

$$\bar{\beta}' = \bar{\nu} / r_r$$

Dacă derivăm relația doua și ținem cont de relațiile de până aci, avem:

$$\bar{\nu}' = -\bar{\theta} / r_c - \bar{\beta} / r_r$$

În rezumat pentru orice curbă avem:

$$\bar{\theta}' = \bar{\nu} / r_c; \quad \bar{\beta}' = \bar{\nu} / r_r; \quad \bar{\nu}' = -\bar{\theta} / r_c - \bar{\beta} / r_r$$

Acestea sunt formulele lui *Frenet*.

Am avut și avem:

$$\bar{r}' = \bar{\theta}; \quad \bar{r}'' = \bar{\nu} / r_c; \quad \bar{r}''' = \bar{\nu}' / r_c - \bar{\nu} \bar{r}' / r_c^2$$

Dacă formăm produsul $\bar{r} \bar{r}'' \bar{r}'''$, găsim:

$$\bar{r} \bar{r}'' \bar{r}''' \cdot r_c^2 r_r + 1 = 0$$

ecuația generală a curbelor în spațiu.

C) Forțele care acționează construcțiunile.

Cu ajutorul pieselor arătate mai sus facem orice construcție. Ceea ce trebuie să avem în vedere, este ca ea să nu se dărâme sau să se distrugă. Aceasta are loc, sau din faptul că ea nu are stabilitate și atunci se mișcă într'o direcțiune oarecare, sau din cauză că e prea slabă și atunci se rupe în un punct oarecare, fapt care determină distrugerea unei porțiuni sau a construcției întregi.

Pentru ca aceasta să nu se întâmple, trebuie ca în orice moment *construcția să fie în echilibru*, sub acțiunea forțelor cari lucrează asupra ei.

Să evaluăm aceste forțe:

1. Înainte de toate, orice construcție are o greutate a ei, pentru că e făcută din materiale cari toate au proprietatea de a fi grele. Prin urmare, o construcție va trebui să nu se dărâme sau să nu se turtească, cel puțin sub acțiunea forțelor cari rezultă din greutatea ei. Acțiunea acestor forțe este continuă, permanentă (tot timpul cât durează construcțiunea) și de aceea ele se numesc *forțe permanente*, sau *sarcini permanente* sau încă *încărcări permanente*.

2. Orice construcție are o utilitate oarecare, nu e făcută numai pentru a-și susține greutatea ei, ci trebuie să susțină și alte încărcări. De ex. un pod trebuie să mai susțină și greutatea trenului sau a camioanelor cari trec pe el. Aceste forțe poartă numele de *forțe mobile*, sau *sarcini mobile*, sau *încărcări mobile*. Se numesc așa pentru că ele se mișcă pe construcție. Ele nu lucrează continuu ci intermitent.

3. În afară de acestea mai avem o serie de forțe cari lucrează în mod inutil pentru noi, dar pentru a asigura stabilitatea și soliditatea construcțiunilor trebuie neapărat să ținem seamă de ele. În această categorie intră greutatea zăpezii și presiunea vântului. În special aceasta din urmă, pentru unele construcții, precum coșuri de fabrică sau poduri de mari deschideri, are o importanță covârșitoare. Ele poartă numele de *forțe accidentale*.

4. Mai există o serie de forțe, cari lucrează în mod deosebit asupra construcțiunilor sau numai asupra unor părți din ele. În special organele în mișcare ale mașinilor dau naștere, datorită accelerației, la forțe ce acționează asupra diferitelor piese. Acestea poartă numele de *forțe dinamice*. Exemplul îl avem în o tocilă de gresie, că-

reia i se dă mișcarea de rotație cu un motor. Dacă am învârti-o prea repede, forța centrifugă ar provoca ruperea tocilei.

Uneori avem piese cari lucrează la încărcări cu totul speciale, necesitate de natura destinației lor. Așa avem căldarea cu aburi, țeava de tun, etc. Și solicitările acestor fel de piese le putem clasa în una din categoriile de mai sus.

La calculul pieselor, cari compun o construcțiune, va trebui să ținem seamă de toate aceste încărcări, sarcini sau forțe, cum le numim noi.

Cu toate acestea, de foarte multe ori neglijăm una sau mai multe din ele, din cauză că sunt mici, față de altele cari au o valoare relativ mare. Aceasta o putem face, întru cât calculele noastre, după cum vom vedea, nu sunt riguros exacte și suntem nevoiți a face unele aproximații. În aceste condiții, ne este permis a face chiar dela început unele neglijări, cari dau erori inferioare aproximației calculelor. De ex. o coloană de oțel, care susține un perete de 40 t de deasupra unei vitrine de prăvălie, are după cazuri, să zicem, cel mult o tonă greutate. În calculul coloanei nu vom ține cont de greutatea ei proprie pentru că e mică. Pentru un începător nu se pot da indicații când anume să se facă cutare suprimare, fără a nu face un calcul prea de tot aproximativ. După oarecare experiență de calcul, se capătă o astfel de practică încât, după un timp, putem face suprimările juste, fără a face erori apreciable pentru calcul.

Toate încărcările sau sarcinile arătate mai sus se exprimă în tone, kilograme, tone pe metru, kilograme pe metru, tone pe metru patrat, kilograme pe centimetru patrat, etc., după natura repartiției lor, notându-le respectiv: t, kg, t/m, kg/m, t/m², kg/cm², etc.

Aceste încărcări sunt aplicate în mod continuu, pe anumite suprafețe sau volume. Când ele se aplică pe suprafețe, pot avea diferite valori în diferite puncte ale suprafeții. Când dela un punct la altul ele variază continuu fără discontinuități, zicem că avem de-a-face cu *încărcări continuu repartizate*. Uneori ele se repartizează pe suprafețe mici, cum ar fi de exemplu greutatea unei roți de locomotivă care ar transmite 12 t șinei pe o suprafață de câțiva mm². Aci avem tot o sarcină continuu repartizată. Pentru calcule este comod, de foarte multe ori în aceste cazuri, de a presupune că această încărcare a roții se transmite șinei printr'un singur punct. Aceasta este numai o ipoteză simplificatoare, adoptată în

calculele noastre, însă aceasta nu este în realitate. Când facem această simplificare zicem că avem o *sarcină concentrată*. E bine să se știe dela început că aceasta este numai o convențiune.

Cum evaluăm aceste forțe?

Greutățile proprii ale construcției le evaluăm în modul următor: Facem volumul ei, descompunând-o în figuri geometrice simple pe cari le calculăm cu ușurință. Volumul multiplicat cu greutatea specifică respectivă ne dă greutatea, deci forța căutată. În manualele de inginerie găsim greutatețile specifice ale materialelor de construcție. Mai mult, pentru bare sau plăci, cari se întrebuițează curent, găsim în aceste manuale direct greutatea pe m sau m². Așa găsim că o bară de oțel, de 4 cm × 4 cm secțiune, cântărește 12,56 kg/m. Mai mult, pentru construcțiuni curente, găsim direct în manualele speciale chiar greutatea pe m² a construcției, sau pe metru liniar, ș. a. m. d.

Încărcările mobile ar trebui să le evaluăm prin cântărire. Nu se face așa ci de obicei manualele de inginerie și regulamentele de poliție tehnică, prescriu, pentru fiecare fel de construcție și după destinația ei, ce încărcări mobile trebuie să luăm.

În aceleași manuale găsim datele necesare și asupra încărcărilor accidentale.

Toate aceste încărcări, sarcini sau forțe, pe cari le aflăm imediat ce ni se dă construcția ce avem de calculat și menirea ce are să o îndeplinească, poartă numele de *încărcări*, *sarcini* sau *forțe date*. În problemele de stabilitate și rezistența construcțiilor, acestea vor fi *datele* problemelor noastre.

D) Echilibrul construcțiunilor.

Construcțiunile pe cari le facem se găsesc, după cum am spus, sub *acțiunea forțelor date*. Pentru ca echilibrul să existe va trebui, ca asupra construcțiunii, să mai lucreze o serie de forțe: *reacțiunile*. Natura acestor reacțiuni depinde de modul de rezemare sau sprijinire a construcției date, pe pământ sau pe reazim anume făcute. Oricum s'ar dezvolta aceste reacțiuni, pentru ca construcțiunea noastră să fie în echilibru, trebuie neapărat ca ecuațiile:

$$(1) \quad \Sigma \overline{F} = 0, \quad \Sigma \overline{M} = \Sigma a \overline{F} = 0$$

să fie satisfăcute.

Sub semnul sumei intră evident forțele date și reacțiunile.

Aceste condițiuni sunt necesare, în cazul corpurilor reale din natură, dar nu și suficiente.

O construcție, chiar din cele mai simple, nu se face din o singură bucată ci din mai multe, cari se leagă sau se îmbină între ele. La legătura între ele și după natura acestor legături, unele piese dezvoltă asupra celorlalte niște acțiuni, egale evident cu reacțiunile acestora din urmă asupra primelor. Or, și fiecare piesă în parte trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor date și a reacțiunilor cari acționează numai asupra ei; cu alte cuvinte, fiecare piesă în parte trebuie să satisfacă ecuațiile (1). În definitiv, pentru o construcție din mai multe piese, va trebui să aplicăm de atâtea ori ecuațiile (1) câte piese avem. Rezolvând acest sistem de ecuații, vom găsi condițiile de echilibru a fiecărei piese constitutive și a construcției întregi.

Pentru corpurile reale din natură, aceste condițiuni sunt de asemeni necesare dar nu și suficiente.

Se mai știe, din mecanică rațională, că pentru determinarea reacțiunilor la legături putem să aplicăm și ecuația deplasărilor virtuale sau a lucrului mecanic virtual:

$$(2) \quad \sum \overline{F} \cdot \overline{j} + \sum \overline{M} \cdot \overline{\omega} = 0,$$

care ne permite cu ajutorul deplasărilor infinit mici, compatibile cu legăturile sistemului de piese, să aflăm valoarea reacțiunilor sau a forțelor de legătură.

Dacă în ecuațiile (1) punem în evidență reacțiunile, fie ele forțe pe cari le notăm în mod general V sau momente pe cari le notăm M_v , vom avea:

$$\sum \overline{F} + \sum \overline{V} = 0 \quad , \quad \sum \overline{aF} + \sum \overline{aV} = \sum \overline{M}_f + \sum \overline{M}_v = 0.$$

Însă $\sum \overline{F}$ și $\sum \overline{M}_f$ sunt forța și momentul resultant al sistemului de forțe dat.

Din ecuațiile acestea rezultă că pentru a găsi reacțiunile (fie ele forțe sau momente) într-o construcție dată, sau într'un grup de piese, va trebui să găsim mai întâiu forța și momentul resultant al forțelor date.

Vom vedea în urmă cum din acestea putem găsi reacțiunile.

II. COMPUNEREA ȘI DESCOMPUNEREA FORȚELOR.

A) Coordonatele forței.

Vom reaminti că o forță are o *mărime*, o *direcțiune* și o *poziție* oarecare în spațiu.

Pentru ca să putem supune calculului aceste noțiuni, va trebui să găsim un sistem de reprezentare a lor. Fiecare din aceste noțiuni, fiind reprezentată prin unul sau mai multe simboale, calculele se vor face asupra acestora. Simboalele vor trebui astfel alese ca să le putem introduce în sistemul obișnuit de calcul, pe care ni-l dă algebra, geometria, analiza, etc.

Alegerea simboalelor, cari vor reprezenta aceste noțiuni, nu este altceva decât alegerea sistemului de reprezentare a forței.

Numărul simboalelor cari vor defini forța complet, deci noțiunile indicate mai sus, este numărul de coordonate ce vor defini forța în fiecare sistem de reprezentare.

Putem avea mai multe astfel de sisteme.

1. Sistemul cartezian.

O forță e definită complet prin:

- a) Mărimea și direcțiunea ei, cari se pot fixa prin:
 - a) valoarea numerică a forței și cosinurile directoare ale direcțiunii ei α , β , γ între cari există relația $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, sau
 - β) prin componentele forței după direcțiunile celor 3 axe. Oricum ar fi, avem 3 coordonate.
- b) Pozițiunea ei în spațiu, care se fixează prin:
 - a) Coordonatele x , y , z ale unui punct a liniei de acțiune a forței.
 - β) Dreapta care leagă originea cu un punct oarecare al liniei de acțiune a forței și care se fixează prin mărimea ei și cosinurile

directoare λ , μ , ν , între cari există relația $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, sau prin momentul forței în raport cu reperul și care se fixează prin:

γ) o valoare numerică și o direcțiune, sau prin

δ) componentele aceluși moment după cele 3 axe.

Prin urmare poziția se fixează încă prin 3 coordonate.

Deci avem în total 6 coordonate.

Dacă se urmează același raționament, se găsește că în acest sistem de reprezentare o forță raportată la un sistem de axe din planul ce conține forța are în total 3 coordonate, și anume: două pentru mărimea și direcțiunea ei și una pentru poziția ei. Celelalte trei coordonate definesc poziția și direcția planului în spațiu.

Acest sistem se pretează bine calculului numeric.

2. Sistemul vectorial.

Mărimea forței este o cantitate scalară și se măsoară, ca și în sistemul precedent, în unitățile din mecanică, adică în kgr. sau multiplii și submultiplii săi. Mărimea forței o vom nota în genere cu litera F sau orice altă literă majusculă a alfabetului latin. Direcțiunea forței este un vector pe care îl vom nota în genere cu $\vec{\varphi}$ sau orice altă literă a alfabetului grec. Forța în mărime și direcțiune se notează:

$$(1) \quad \vec{F} = F \vec{\varphi}$$

Poziția forței se fixează față de un reper oarecare. Dacă ne alegem punctul O (fig. 6) ca reper și dacă $\vec{a} = a \vec{\alpha}$, este vectorul care leagă punctul O cu un punct oarecare de pe direcția forței, atunci poziția ei este complet fixată față de reperul O . În acest sistem de reprezentare, forța are patru coordonate: F , $\vec{\varphi}$, a și $\vec{\alpha}$.

Poziția forței F mai poate fi fixată și prin momentul ei în raport cu punctul O , adică prin produsul vectorial:

$$(2) \quad \vec{M} = \vec{a} \vec{F} = M \vec{\mu},$$

în care:

$$M = aF, \quad \vec{\mu} = \vec{a} \vec{\varphi}$$

Am putea reprezenta forța și poziția ei numai prin $\vec{F}$ și $\vec{a}$. În acest caz ea are numai două coordonate.

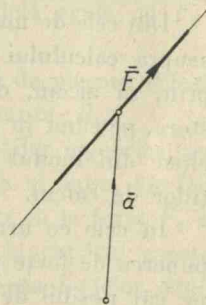


Figura 6

3. Sistemul grafic.

Să presupunem că avem de-a face cu o serie de forțe cuprinse într'un plan. Dacă pe o foaie de hârtie, care ar reprezenta acel plan, tragem o direcție și pe ea fixăm un segment, la o scară oarecare, proporțional cu mărimea forței, atunci acel segment, în mărime, direcție și poziție, ne fixează forța dată. Tot așa, pe altă direcțiune fixăm altă forță, etc.

Pe foaia de hârtie, planul închipuit, avem mărimile, direcțiunile și pozițiile relative ale forțelor.

În acest sistem de reprezentare fiecare forță din plan are câte o coordonată.

Pentru forțele din spațiu, dacă după norma din geometria descriptivă întrebuițăm două plane de proiecție, o forță va fi definită prin două coordonate.

Se vede, din cele de mai sus, că numărul de coordonate al unei forțe, depinde de sistemul de reprezentare. Cu cât vom avea sisteme cu mai puține coordonate, cu atât calculele noastre se vor simplifica. *Grafic, în genere, vom lua sistemul următor: Valoarea și direcțiunea forței o coordonată și poziția forței altă coordonată.* Acestea la rândul lor, când va fi nevoie, le vom fixa prin altele.

Din cele de mai sus, se vede care este avantajul calculului grafic asupra calculului numeric. În calculul grafic o forță fiind fixată prin, să zicem, două coordonate, vom opera numai asupra acestora, pe când în cel numeric asupra a 6 coordonate. Prin urmare, chiar din modul de reprezentare, rezultă o concentrare a operațiilor de calcul.

În cele ce urmează vom căuta a face compunerea și descompunerea de forțe prin metode grafice și prin calcul vectorial, lăsând pe cât posibil de o parte rezolvările în coordonate cartezienne.

B) Forțe concurente.

1. Compunerea forțelor concurente complanare.

Toate forțele trecând prin un același punct și rezultanta lor va trece prin acel punct, prin urmare, poziția rezultantei este fixată, deci cunoscută. Ceea ce trebuie aflat este numai mărimea și direcțiunea ei.

Pe o foaie de desen, care închipue planul ce conține forțele, luăm din un punct O , în o direcție paralelă cu direcția forței $\vec{F}_1$, un segment de dreaptă egal cu F_1 . Pe desen acest segment nu se

poate măsura decât în cm sau mm, pe când forțele se măsoară în kg. Pentru a putea face această reprezentare ne vom fixa o așa numită scară de reprezentare a forțelor, de ex. $1 t = 1 \text{ cm}$. Dacă am o forță de $7,35 t$, pe desen vom lua o lungime de $7,35 \text{ cm}$. Aceasta este scara forțelor.

Compunerea se face după legea paralelogramului. Compunem $\vec{F}_1$ cu $\vec{F}_2$ (fig. 7 a) și căpătăm rezultanta $\vec{R}_{12}$, aceasta la rândul ei o compunem cu $\vec{F}_3$ și căpătăm rezultanta $\vec{R}_{13}$ și așa mai departe până compunem și pe $\vec{F}_n$ și căpătăm rezultanta $\vec{R}_{1n}$. $\vec{R}_{1n}$, în mărime și direcțiune, ne reprezintă rezultanta sistemului de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.

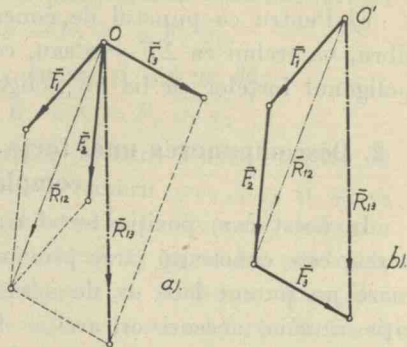


Figura 7

Din modul cum s'a făcut

construcția, se vede că nu este nevoie să completăm paralelogramul, ci n'avem decât, prin extremitatea lui $\vec{F}_1$ să ducem o paralelă egală cu $\vec{F}_2$, la extremitatea acesteia o paralelă egală cu $\vec{F}_3$ și așa mai departe.

Dreapta care unește originea, adică punctul de plecare al forței $\vec{F}_1$, cu extremitatea lui $\vec{F}_n$, este tocmai rezultanta $\vec{R}_{1n}$.

Dacă facem o analogie cu însumarea cantităților algebrice, care se face adăogând la o cantitate oarecare o alta și suma lor fiind valoarea acelor cantități la un loc, se vede și aci că la forța $\vec{F}_1$ am adăogat, în mărime și direcțiune, forța $\vec{F}_2$, iar la capătul acesteia pe $\vec{F}_3$ și așa mai departe. Prin urmare, rezultanta forțelor concurente nu este altceva decât suma lor.

Această sumă mai poartă numele și de sumă geometrică.

Avem de făcut trei observații:

a) Această construcție, în loc să o facem începând din punctul O , putem să o începem din orice alt punct O' (fig. 7 b) arbitrar ales, rezultanta sau ceea ce este tot una cu a zice suma căpătată, este aceeași, însă va trebui să o aplicăm în O .

Aceasta ne aduce adesea simplificări în operațiunile noastre.

b) Dacă înșirăm forțele una după alta așa cum s'a spus și dacă cu extremitatea lui $\vec{F}_n$ ajungem în originea lui $\vec{F}_1$, atunci suma forțelor este nulă.

Această construcție grafică a adunării forțelor, așa cum s'a arătat, poartă numele de poligonul forțelor $\bar{F}$, pentru că înșirând forțele una după alta se capătă un poligon, evident de forțe.

Această sumă, o vom denumi *poligonul forțelor* și prin calcul o vom nota:

$$(3). \quad \bar{R} = \Sigma \bar{F}$$

c) Pentru ca punctul de concurență al forțelor să fie în echilibru, va trebui ca $\Sigma \bar{F} = 0$ sau, ceea ce este tot una cu a zice, ca poligonul forțelor să fie un poligon închis.

2. Descompunerea unei forțe după direcțiuni concurente complanare.

În acest caz, poziția forțelor după care vom face descompunerea, este cunoscută (trec prin punctul de intersecție) și prin urmare nu putem face uz de această dată, pentru că această poziție rămâne aceeași oricare ar fi valoarea componentelor după direcțiile date.

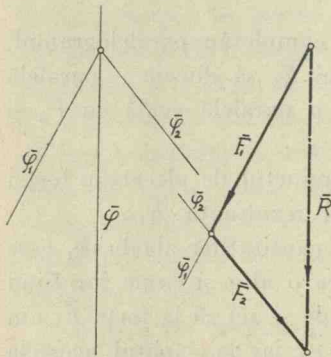


Figura 8

Ceea ce trebuie aflat este valoarea forțelor după direcțiunile date. Observăm însă, că în acest caz *forța dată are două coordonate, mărimea și direcțiunea ei sau, ceea ce este tot una, componentele ei după două axe de coordonate date*. Nimic nu ne împiedică să luăm ca axe de coordonate două din direcțiunile date. Prin urmare, o forță nu se poate descompune în planul ei decât numai după două direcțiuni concurente. Putem descompune o forță și după mai multe

direcțiuni, însă atunci avem o infinitate de soluțiuni. Statica, în acest caz, nu ne dă un număr suficient de ecuații sau date pentru a rezolva problema, adică de a găsi componentele forței după mai mult decât două direcțiuni și se zice că problema este static nedeterminată.

Descompunerea numai după o singură direcțiune este o imposibilitate.

Construcția grafică este simplă. Prin extremitățile forței $\bar{R}$ (fig. 8) se duc două paralele respectiv la direcțiunile φ_1 și φ_2 după care vrem să descompunem forța $\bar{R}$. Acestea se taie într'un punct

care determină pe $\overline{\varphi_1}$ un segment F_1 și pe $\overline{\varphi_2}$ segmentul F_2 . Segmentele F_1 și F_2 , măsurate la scara adoptată, ne dau respectiv mărimea componentelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$, ale forței $\overline{R}$, după $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$.

Construcția aceasta ne dă valori infinite când $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$ sunt paralele, adică sunt aceleași.

Putem face această descompunere și prin calculul vectorial. Avem:

$$(4) \quad \overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} \text{ sau } R \overline{\varphi} = F_1 \overline{\varphi_1} + F_2 \overline{\varphi_2},$$

care multiplicată vectorial succesiv cu $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$, ne dă:

$$(5) \quad R \cdot \overline{\varphi \varphi_1} = F_2 \overline{\varphi_2 \varphi_1} \text{ și } R \cdot \overline{\varphi \varphi_2} = F_1 \overline{\varphi_1 \varphi_2}$$

pentru că $\overline{\varphi_1 \varphi_1} = \overline{\varphi_2 \varphi_2} = 0$. Ecuațiile (5) sunt scalare, pentru că vectorii $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$ fiind complanari, vectorii $\overline{\varphi \varphi_1}$, $\overline{\varphi \varphi_2}$ și $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$ sunt dirijați după normala la planul lor comun. Din ele, deducem valorile componentelor F_1 și F_2 calculând în prealabil produsele vectoriale $\overline{\varphi \varphi_1}$, $\overline{\varphi \varphi_2}$ și $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$, dând sensuri arbitrare direcțiilor $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$, sensul direcției $\overline{\varphi}$ fiind determinat de sensul forței $\overline{F}$. Dacă pentru F_1 și F_2 vom căpăta valori pozitive, înseamnă că ele au același sens cu direcțiile alese, iar dacă vom căpăta valori negative, ele au sensuri contrare.

3. Compunerea forțelor concurente în spațiu.

Vom urma exact metoda arătată la forțele în plan. Dacă compunem pe $\overline{F_1}$ cu $\overline{F_2}$ căpătăm rezultanta $\overline{R_{12}}$, care putem să o căpătăm direct,ducând în extremitatea lui $\overline{F_1}$ un segment egal și paralel cu $\overline{F_2}$ și așa mai departe. Rezultanta va fi și aci linia de închidere a poligonului de forțe $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3} \dots \overline{F_n}$. Vom scrie aceasta totdeauna

$$(3) \quad \overline{R} = \Sigma \overline{F}.$$

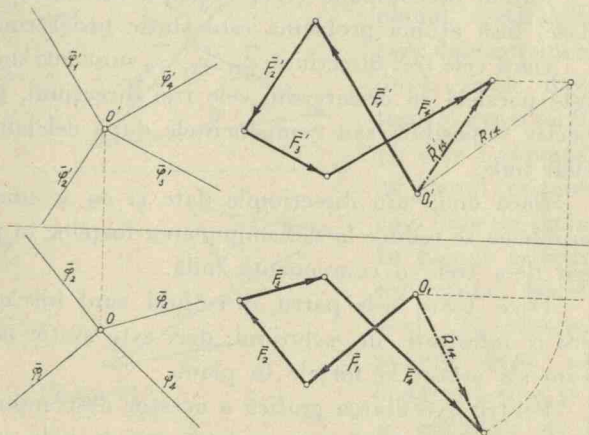


Figura 9

Poligonul de forțe va fi un poligon în spațiu. Construcția lui se face cu ajutorul a două plane de proiecție (fig. 9), întocmai cum

se arată în geometria descriptivă. Valoarea numerică a rezultantei se va găsi proiectând, prin o rotație, pe unul din planele de proiecție rezultanta în adevărata ei mărime.

Se evaluează apoi aceasta numeric cu ajutorul scării forțelor.

Vom avea și aci de făcut observația că dacă poligonul forțelor se închide rezultanta este nulă, deci $\Sigma \vec{F} = 0$.

4. Descompunerea unei forțe în spațiu după direcțiuni concurente.

Pozițiile forței $\vec{R}$ și a componentelor ei $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sunt cunoscute, trec prin același punct. Direcțiunile lor $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sunt date, deci cunoscute. Ceea ce nu cunoaștem sunt valorile componentelor $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Poziția forței $\vec{R}$ și a componentelor ei fiind cunoscută, pentru determinarea acestora *dispunem numai de trei coordonate: mărimea și direcțiunea forței $\vec{R}$, sau ceea ce este tot una cu a zice: componentele ei după trei axe de coordonate oarecare*. Nimic nu ne împiedică să luăm ca axe de coordonate trei din direcțiunile date. *Deci forța nu se poate descompune decât numai după trei direcțiuni.*

Putem descompune forța și după mai mult de trei direcțiuni date, însă atunci problema este static nedeterminată.

Dacă cele trei direcțiuni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sunt într'un plan, sau dacă φ este paralelă cu oricare din cele trei direcțiuni, problema este respectiv imposibilă sau componentele după celelalte două direcțiuni sunt nule.

Dacă două din direcțiunile date și cu φ sunt în același plan, problema se reduce la descompunerea forțelor în plan, dând pentru cea de-a treia o componentă nulă.

Dacă toate cele patru direcțiuni sunt într'un plan, problema are o infinitate de soluțiuni, deci este static nedeterminată, așa cum s'a arătat la forțele în plan.

Pentru executarea grafică a acestor descompuneri întrebuițăm mai multe căi, după cum se arată mai la vale, utilizând cunoștințele din geometria descriptivă.

a) Putem da oricând o rotație întregului sistem așa ca pe unul din planele de proiecție, una din direcțiunile date să se proiecteze

într'un punct (fig. 10). În acest plan de proiecție vom avea de descompus o forță numai după două direcțiuni, ceea ce putem face foarte ușor. Acestea fiind cunoscute, le transpunem în celălalt plan și închizând poligonul vom avea și componenta după direcțiunea ultimă. Găsim acum prin metode descriptive cunoscute mărimile adevărate.

b) Putem deasemenea face ca un plan, determinat de două din direcțiunile date, să se proiecteze după o linie dreaptă pe unul din planele de proiecție. Să presupunem (fig. 11) că planul determinat de φ_1 și φ_2 se proiectează după o linie dreaptă pe planul vertical. În planul vertical, componenta lui $\vec{F}_3$ va fi evident dreapta care pleacă din extremitatea lui $\vec{R}$ la planul determinat de φ_1 și φ_2 , paralelă cu φ_3' .

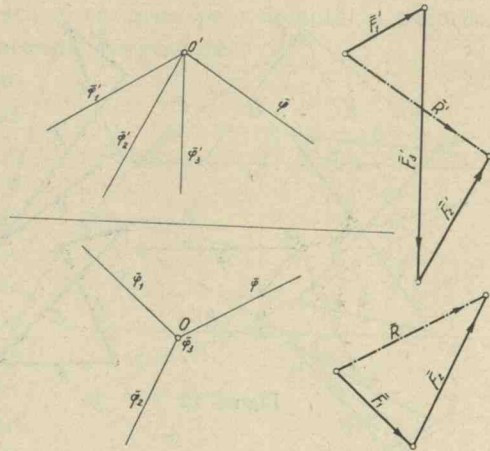


Figura 10

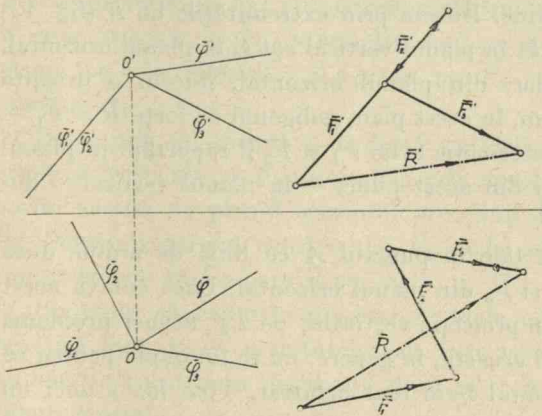


Figura 11

Prin urmare, în planul vertical, facem descompunerea după două direcțiuni și avem pe $\vec{F}_3'$, pe care o raportăm în planul orizontal cu o linie de ordine. În planul orizontal rezultanta forțelor $\vec{R}$ și $-\vec{F}_3$ o descompunem după cele două direcții φ_1 și φ_2 și căpătăm pe $\vec{F}_1$

și $\vec{F}_2$, pe cari le raportăm în planul vertical.

Aceste două metode sunt foarte simple, însă necesită operațiuni prealabile de aducere a sistemului în pozițiile indicate.

Nu vom întrebuița aceste metode decât atunci când problema propusă direct prezintă una din aceste două particularități, pentru motivul că avem și alte metode mai simple indicate mai la vale.

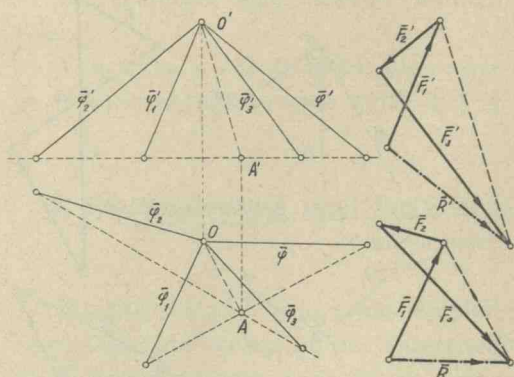


Figura 12

c) Ducem câte un plan prin direcțiile $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$ $\overline{\varphi_3}$, cari se taie evident după o dreaptă OA (fig. 12).

În planul $\overline{\varphi_1}$, putem descompune pe $\overline{R}$ după OA și $\overline{\varphi_1}$ și avem astfel pe $\overline{F_1}$. Componenta după OA , care este și în planul $\overline{\varphi_2}$ $\overline{\varphi_3}$, o descompunem după $\overline{\varphi_2}$ și $\overline{\varphi_3}$ și astfel avem și com-

ponentele după aceste direcțiuni.

Metoda este foarte simplă și convine mai ales atunci, când putem lesne construi intersecția celor două plane. Pe fig. 12 se vede foarte lesne mersul operațiilor.

d) Putem construi poligonul forțelor direct, care fiind unul și același, are proiecțiile vârfurilor lui, pe cele două plane de proiecție, pe aceleași linii de ordine. Ducem prin extremitățile lui $\overline{R}$ (fig. 13) paralele cu $\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_3}$, atât în planul vertical cât și în planul orizontal.

În poligonul forțelor, din planul orizontal, ducem o dreaptă paralelă cu $\overline{\varphi_2}$ și formăm, în acest plan, poligonul de forțe $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$. Punctul de intersecție a lui $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ îl raportăm în planul vertical pe forța $\overline{F_1'}$ și din acest punct — în planul vertical — ducem o paralelă cu $\overline{\varphi_2'}$.

Această dreaptă se taie în punctul A cu linia de ordine dusă prin intersecția lui $\overline{F_2}$ și $\overline{F_3}$ din planul orizontal. Dacă cumva acest punct A ar fi căzut, în proiecție verticală, pe $\overline{F_3'}$, atunci problema ar fi fost rezolvată. Ori aceasta, în genere, nu se întâmplă pentru că pe F_2 din planul orizontal l-am luat arbitrar. Vom lua atunci un alt F_2 și vom repeta aceeași construcție. Când repetăm această nouă construcție, observăm că poligonul format de cele două linii de ordine, cari trec prin intersecțiile lui $\overline{F_1} \overline{F_2}$ și $\overline{F_2} \overline{F_3}$, precum și dreptele $\overline{F_2}$ și $\overline{F_2'}$ rămân mereu paralele și că trei din vârfurile lui se mișcă pe trei drepte date, $\overline{F_1}$, $\overline{F_3}$ și $\overline{F_1'}$.

Există o teoremă, pe care o vom demonstra mai târziu și care sună astfel: Dacă în plan — aci planul epurei — un poligon de n laturi se deformează astfel încât, toate laturile sale rămân paralele cu ele însăși și dacă $n - 1$ vârfuri se mișcă pe niște drepte date, atunci și vârful al n -lea se va mișca pe o dreaptă, și reciproc.

Vom face uz aci de această proprietate.

În cazul nostru, patrulaterul format de cele două linii de ordine, de $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_2'$, când trecem de la prima construcție la a doua, se deformează așa fel încât laturile lui rămân mereu paralele între ele și trei din vârfurile lui se mișcă pe niște drepte date, atunci și cel de al patrulea vârf, adică punctul A , se va mișca pe o dreaptă.

Un punct al acestei drepte este A , e destul să mai găsim încă unul. Am

putea repeta aceeași construcție și să găsim alt punct, A_1 . Putem simplifica și aceasta ducând pe $\bar{F}_2$ în planul orizontal prin intersecția lui $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_3$; atunci cele două linii de ordine se confundă în una singură și la intersecția lor cu $\bar{F}_1'$ din planul vertical găsim pe A_1 . Dreapta AA_1 taie pe $\bar{F}_3'$, în planul vertical, în punctul A_2 .

Dacă prin A_2 ducem o dreaptă paralelă cu φ_2' căpătăm în proiecție verticală pe $\bar{F}_2'$, limitat la cele două drepte, $\bar{F}_1'$ și $\bar{F}_3'$. Coborîm acestea în planul orizontal prin linii de ordine și găsim pe $\bar{F}_2$. Pentru controlul construcției, $\bar{F}_2$, astfel obținut, în planul orizontal trebuie să fie paralel cu φ_2 .

Cu toate că expunerea acestei metode este cea mai lungă, în practică însă ne dă rezultatele cele mai rezezi și cu cel mai mic număr de construcții auxiliare, dacă ne raportăm, bine înțeles, la cazul general.

e) *Analitic cu ajutorul vectorilor putem proceda astfel:*

Ecuția:

$$(6) \quad R\bar{\varphi} = F_1 \bar{\varphi}_1 + F_2 \bar{\varphi}_2 + F_3 \bar{\varphi}_3$$

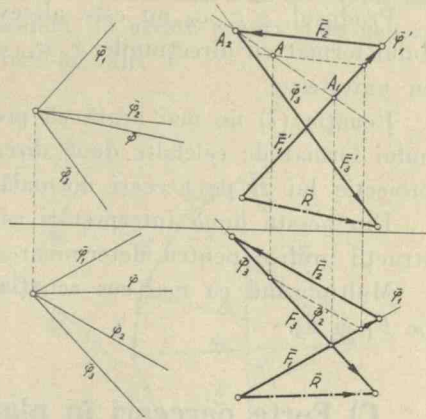


Figura 13

o multiplicăm scalar cu produsul vectorial $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$, și pentru că:

$$\overline{\varphi_1 \varphi_1 \varphi_2} = \overline{\varphi_2 \varphi_1 \varphi_2} = 0,$$

căpătăm:

$$(7) \quad R \overline{\varphi \varphi_1 \varphi_2} = F_3 \cdot \overline{\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2}$$

Produsele $\overline{\varphi \varphi_1 \varphi_2}$ și $\overline{\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2}$ fiind niște cantități scalare, deducem numai decât pe F_3 .

Produsul $\overline{\varphi \varphi_1 \varphi_2}$ nu este altceva decât volumul paralelipipedului format cu direcțiunile $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\varphi_2}$ și ale cărui laturi sunt egale cu unitatea.

Ecuția (7) ne mai arată că proiecția lui $\overline{F_3}$ pe normala planului format de celelalte două direcțiuni ($\overline{\varphi_1}$ și $\overline{\varphi_2}$) este egală cu proiecția lui $\overline{R}$ pe aceeași normală.

Din aceste două interpretări se poate scoate încă două construcții grafice pentru determinarea componentelor F_1 , F_2 și F_3 .

Multiplicând ca mai sus ecuația (6) cu $\overline{\varphi_2 \varphi_3}$ și $\overline{\varphi_3 \varphi_1}$, găsim pe F_1 și F_2 .

C) Forțe oarecari în plan. Poligon funicular.

1. Compunerea unui sistem de forțe oarecari în plan; poligonul funicular.

Să presupunem că avem forțele $\overline{F_1}, \overline{F_2} \dots \overline{F_n}$ ale căror valori numerice sunt $F_1, F_2 \dots F_n$ și ale căror direcțiuni și pozițiuni oarecari sunt $\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2} \dots \overline{\varphi_n}$.

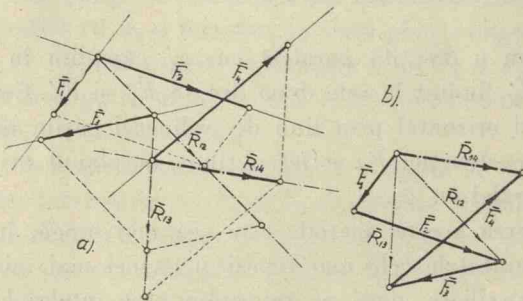


Figura 14

Pentru a le putea compune procedăm în modul obișnuit (fig. 14 a), adică, aflăm intersecția lui $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ și le compunem ca două forțe concurente, găsind în mărime, direcție și poziție pe $\overline{R_{12}}$.

Aflăm apoi intersecția lui $\overline{R_{12}}$ cu $\overline{F_3}$ și le compunem într-o rezultantă $\overline{R_{13}}$, a cărei mărime și direcțiune rezultă din construcție, iar ca pozițiune trece prin punctul de intersecție a lui $\overline{R_{12}}$ și $\overline{F_3}$. Conti-

nuând astfel putem găsi rezultanta unui sistem oarecare de forțe. Examinând modul cum am aflat rezultanta, observăm că valoarea și direcțiunea ei putem s'o căpătăm direct și anume, construind poligonul forțelor (fig. 14 b). Ceea ce ne dă în plus construcția indicată mai sus este poziția rezultantei.

Această construcție însă are desavantaje, precum ar fi cazul când o serie de forțe s'ar întâlni în afara cadrului desenului sau am avea de-a face cu forțe paralele. În aceste cazuri și în general se procedează cum se indică mai la vale.

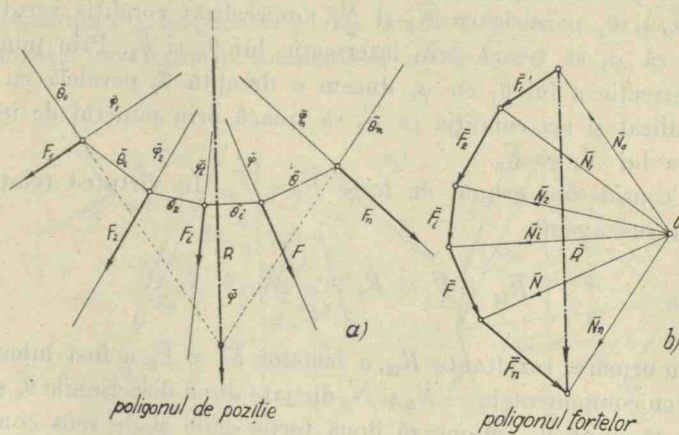


Figura 15

Se construiește poligonul forțelor (fig. 15 b) și în planul lui se ia un punct arbitrar O , pe care îl numim *pol* și pe care îl unim cu vârfurile poligonului forțelor. Fie $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_1$ laturile ce pleacă din *pol* la cele două extremități ale forței $\bar{F}_1$. Forța $\bar{F}_1$ putem să o considerăm înlocuită cu componentele sale $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_1$ ale căror sensuri sunt indicate cu săgeți în figură și din care rezultă

$$\bar{F}_1 = -\bar{N}_0 + \bar{N}_1$$

Procedând la fel cu celelalte forțe, avem:

$$\bar{F}_2 = -\bar{N}_1 + \bar{N}_2$$

:

$$\bar{F}_n = -\bar{N}_{n-1} + \bar{N}_n.$$

pe cari adunându-le, obținem:

$$(8) \quad \Sigma \bar{F} = \bar{R} = -\bar{N}_0 + \bar{N}_n$$

Prin urmare, întregul poligon de forțe se poate înlocui cu două componente, — $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_n$, alese absolut arbitrar, pentru că și polul O a fost luat arbitrar. Aceste forțe — $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_n$ sunt evident componentele lui $\bar{R}$.

Să facem operația corespondentă în figura în care este indicată direcțiunea și poziția forțelor. Această figură o vom denumi *poligonul de poziție* al forțelor.

În această figură, forța $\bar{F}_1$ fiind rezultanta lui — $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_1$ va trece neapărat prin intersecția lor.

Dacă printr'un punct arbitrar ales pe $\bar{\varphi}_1$ ducem două direcțiuni $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_1$, paralele cu $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_1$, am realizat condiția cerută și anume că $\bar{\varphi}_1$ să treacă prin intersecția lui $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_1$. Prin punctul de intersecție a lui $\bar{\theta}_1$ cu $\bar{\varphi}_2$, ducem o dreaptă $\bar{\theta}_2$ paralelă cu $\bar{N}_2$. Am realizat și aci condiția ca $\bar{F}_2$ să treacă prin punctul de intersecție a lui $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$.

Să considerăm grupul de forțe $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$. În virtutea relațiilor de mai sus avem:

$$\bar{R}_{12} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = -\bar{N}_0 + \bar{N}_2$$

Prin urmare, rezultanta $\bar{R}_{12}$, a forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, a fost înlocuită numai cu componentele — $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_2$ dirijate după direcțiunile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_2$, pentru că după $\bar{\theta}_1$ acționează două forțe egale și de sens contrar $\bar{N}_1$ și — $\bar{N}_1$ a căror rezultantă este nulă.

Dacă continuăm această operație până la fine, ajungem la rezultatul, că întregul grup de forțe $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_n$ având pozițiile $\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n$ l'am înlocuit cu două forțe — $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_n$, având pozițiile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$.

Poziția rezultantei $\bar{\varphi}$ va trece evident prin intersecția direcțiunilor $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$ și va fi paralelă cu $\bar{R}$.

Poligonul format din direcțiile $\bar{\theta}_0 \dots \bar{\theta}_n$ care reazimă pe $\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n$ și paralele cu *razele polare* $\bar{N}_0 \dots \bar{N}_n$ poartă numele de *poligonul funicular al forțelor* $\bar{F}$.

Direcțiunile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$, adică prima și ultima latură, poartă numele de *laturi extreme ale poligonului funicular*. Așa dar, *rezultanta trece prin intersecția laturilor extreme de poligon funicular*.

Construcția este generală și se poate aplica la orice sistem de forțe.

În rezumat, poligonul forțelor ne fixează mărimea și direcțiunea rezultantei, iar poligonul funicular poziția ei.

2. Câteva observațiuni asupra poligonului funicular.

a) Momentul unui sistem de forțe în raport cu un punct.

Să luăm, în poligonul de poziție (fig. 16 a), un punct A în raport cu care să luăm momentul tuturor forțelor. Dacă se notează distanța dela A la un punct oarecare de pe $\bar{\varphi}_1$ cu $\bar{a}_1$, și în mod analog respectiv la $\bar{\varphi}$ și $\bar{\theta}$ cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$, afectați de indici vom avea:

$$(9) \quad \Sigma \bar{a}_i F_i = -\bar{b}_0 N_0 + \bar{b}_n N_n = \bar{a}\bar{R}$$

Din ecuația (8) pag. 35 se vede că putem considera oricând $\bar{N}_n$ ca rezultantă a forțelor $\bar{R} + \bar{N}_0$, iar din (9) vedem că $\bar{b}_n \bar{N}_n$ este momentul rezultat al momentelor $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}_0 \bar{N}_0$.

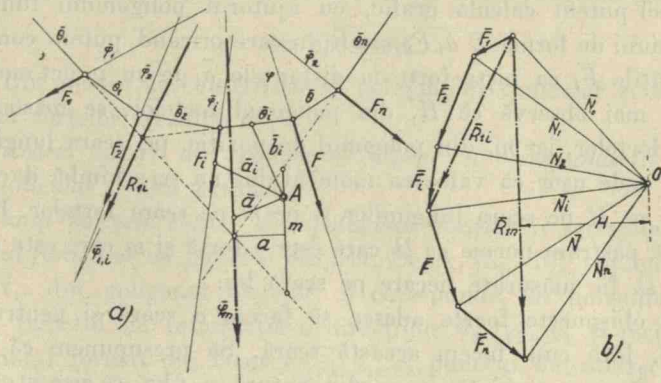


Figura 16

Această observație își are importanța sa, căci ne dă posibilitatea să impunem poligonului funicular anumite condiții. De ex. Poziția lui $\bar{\theta}_n$ fiind arbitrară, putem s'o facem să treacă prin punctul A și momentul grupului de forțe $\bar{R} + \bar{N}_0$ în raport cu A este nul.

b) Calcularea grafică a momentului.

Să ducem prin A o dreaptă paralelă cu $\bar{\varphi}$ pe care să o mărginim la direcțiile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$. Să notăm segmentul astfel interceptat cu m . Din punctul de intersecție a lui $\bar{\theta}_0$ cu $\bar{\theta}_n$ coborim o perpendiculară a pe m , iar în poligonul forțelor (fig. 16 b) ducem din pol o perpendiculară pe $\bar{R}$, a cărei valoare este H , și care poartă numele de *distanță polară*.

$\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_n$, a și m fiind respectiv paralele cu $\bar{N}_0$, $\bar{N}_n$, H și $\bar{\varphi}$, rezultă imediat:

$$(10) \quad \begin{aligned} a/H &= m/R \\ \text{sau } aR &= mH \end{aligned}$$

adică: *momentul unui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare este egal cu segmentul de dreaptă, paralel cu rezultanta sistemului, trecând prin punctul considerat, interceptat între laturile extreme de poligon funicular, ale acelui sistem, multiplicat cu distanța polară corespunzătoare.*

E de observat că dacă am fi considerat numai sistemul de forțe $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_i$, atunci am avea rezultanta $\bar{R}_i$, distanța polară ar fi normala din O pe $\bar{R}_i$, iar m ar fi paralela la $\bar{R}_i$ ce trece prin A și mărginită de $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_i$, cari sunt laturi extreme de poligon funicular al grupului $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_i$.

Deci putem calcula grafic, cu ajutorul poligonului funicular, expresiuni de forma $\sum a_i \bar{F}_i = \bar{aR}$, în care oricând putem considera cantitățile $\bar{F}_i$ ca niște forțe la distanțele $\bar{a}_i$ de un punct oarecare.

Se mai observă că H , din poligonul forțelor, se măsoară pe scara forțelor, iar m , din poligonul de poziție, pe scara lungimilor.

Se vede ușor, că valoarea momentului nu se schimbă dacă măsurăm pe H pe scara lungimilor și pe m pe scara forțelor. E bine însă să păstrăm norma ca H , care este o forță și m care este o lungime, să fie măsurate fiecare pe scara lui.

Se obișnuiește foarte adesea să facem o scară și pentru momente. Iată cum facem această scară. Să presupunem că 1 cm de pe desen reprezintă a cm din natură și f kg, se zice atunci că scara lungimilor este $1/a$, și scara forțelor este 1 cm = f kg. A găsi o scară pentru moment, este a o găsi astfel încât m , măsurat pe acea scară, să ne dea direct valoarea momentului. Observăm, că dacă distanța polară ar fi 1 cm, atunci 1 cm de pe m ar reprezenta af kg cm, cum însă distanța polară este de h cm, atunci momentul va fi afh kg cm. Prin urmare, 1 cm, de pe epură măsurat pe m , reprezintă afh kg cm. Aceasta este scara momentelor.

c) Reducerea unui sistem de forțe'n plan.

În cazul când rezultanta $\bar{R}$ este nulă, atunci

$$\bar{N}_0 = \bar{N}_n,$$

deci laturile extreme din poligonul forțelor se suprapun căci $\sum \bar{F}_i$ este un poligon închis.

În acest caz ecuația (9) se reduce la

$$(\bar{b}_n - \bar{b}_0) \bar{N}_0 = a \bar{R}$$

Putem avea două cazuri:

a) $\bar{b}_n - \bar{b}_0 \neq 0$; în acest caz laturile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$ sunt paralele între ele, însă în poligonul de poziție nu se suprapun, rămânând între ele distanța $\bar{b}_n - \bar{b}_0$, rezultanta se reduce la un moment a cărui expresie este $(\bar{b}_n - \bar{b}_0) \bar{N}_0$.

β) $\bar{b}_n - \bar{b}_0 = 0$; în acest caz laturile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_n$ se suprapun și în poligonul de poziție, așa că poligonul $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_n$ formează un poligon închis și se vede că $\sum \bar{a}_i \bar{F}_i = 0$.

Știm că, pentru ca un sistem de forțe să fie în echilibru trebuiesc satisfăcute ecuațiile (1) pag. 22, ceea ce grafic se traduce prin: poligonul de forțe și poligonul funicular să fie două poligoane închise.

d) Alte observații.

1°. Din modul de construcție al poligonului funicular și al poligonului forțelor, rezultă că:

a) *fiecărei laturi din poligonul forțelor îi corespunde în poligonul funicular o alta paralelă.*

β) *unui poligon închis din poligonul forțelor îi corespunde în poligonul funicular un punct și reciproc.* De ex. (fig. 16), triunghiului $\bar{N}_0 \bar{F}_1 \bar{N}_1$, din poligonul forțelor, îi corespunde, în poligonul de poziție, punctul de intersecție a direcțiilor $\bar{\theta}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\theta}_1$ și reciproc, triunghiului format din laturile $\bar{\varphi}_1, \bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_2$, punctul, de intersecție al laturilor $\bar{F}_1, \bar{N}_1, \bar{F}_2$; poligonului $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_n$ îi corespunde polul O .

O figură, care se găsește față de alta în aceeași corespondență, ca poligonul funicular față de poligonul forțelor, se zice că una este reciproca celeilalte.

2°. Rezultanta unui sistem de forțe, când nu se reduce la un moment, este o forță unică atât ca mărime și direcțiune cât și ca poziție.

Să presupunem că am construit poligonul funicular al acestui sistem de forțe. Când am făcut această construcțiune n'am impus nici-o restricțiune poligonului funicular. Prin urmare, putem construi o infinitate de poligoane funiculare cu același pol O . Observăm că toate laturile acestor poligoane funiculare sunt paralele cu razele polare respective, iar vârfurile lor se mișcă pe direcțiile $\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n$.

Laturile extreme ale acestor poligoane funiculare se vor întâlni pe direcțiunea rezultantei care este deasemenea o dreaptă. Așa dar, putem enunța: *când un poligon se deformează astfel că, laturile*

rile lui rămân mereu paralele cu niște direcțiuni date și $n-1$ vârfuri descriu niște drepte, și vârful al n -lea va descrie o dreaptă, și reciproc.

De această proprietate am făcut uz la descompunerea forțelor concurente în spațiu.

3°. Să presupunem că am construit poligonul funicular al unui sistem de forțe cu ajutorul unui pol oarecare O , cu razele polare $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots$ și laturile poligonului funicular $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n$ (fig. 17).

Să presupunem că am construit și un al doilea poligon funicular cu un pol oarecare O' , cu razele $\bar{N}'_0, \bar{N}'_1, \bar{N}'_2$ și laturile poligonului funicular $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_1$, etc. Vom demonstra că punctele $A, B, C, \dots$

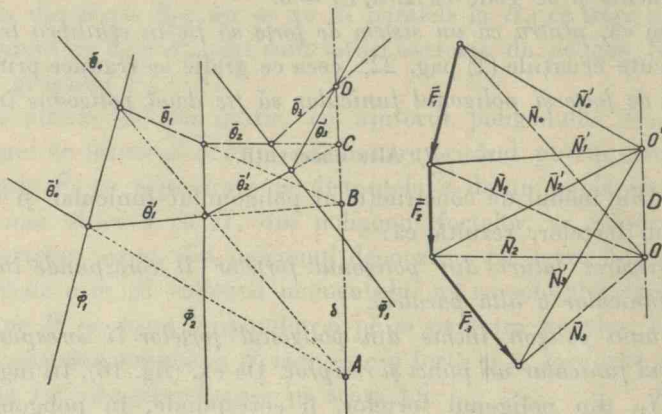


Figura 17

de intersecție a laturilor corespondente, se găsesc pe o dreaptă D , paralelă cu linia polilor OO' .

În adevăr, dacă considerăm în poligonul forțelor perechile de triunghiuri $\bar{N}_0 \bar{F}_1 \bar{N}_1$ și $\bar{N}'_0 \bar{F}_1 \bar{N}'_1$, cu baza comună $\bar{F}_1$, iar în poligonul funicular perechile de triunghiuri $\bar{\theta}_0 \bar{\varphi}_1 \bar{\theta}'_0$ și $\bar{\theta}_1 \bar{\varphi}_1 \bar{\theta}'_1$, cu baza comună $\bar{\varphi}_1$, observăm că ele sunt asemenea ca având toate laturile paralele. Urmează atunci că și dreptele unind vârfurile acestor perechi de triunghiuri vor fi paralele și deci $AB \parallel OO'$. Deci punctul B se găsește pe o dreaptă paralelă cu OO' trecând prin A . Tot așa demonstrăm că și punctul C se găsește pe o dreaptă paralelă cu OO' trecând prin B , și așa mai departe.

Așa dar: toate laturile corespunzătoare a două poligoane funiculare, construite cu două poluri diferite, se întâlnesc pe o dreaptă paralelă cu linia polurilor.

Invers. Să presupunem că luăm intersecțiile $A, B, C, \dots$ a laturilor poligonului funicular, descris cu polul O , cu o dreaptă δ oarecare.

Prin punctele $A, B, C \dots$ ducem laturile unui al doilea poligon funicular $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_1, \bar{\theta}'_2 \dots$ așa ca vârfurile lui să fie respectiv pe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$. Dacă în poligonul forțelor se duce prin polul O o dreaptă D paralelă cu δ și dacă, din vârfurile poligonului funicular, se duc drepte respectiv paralele cu $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_1, \bar{\theta}'_2 \dots$ se poate demonstra foarte ușor, urmând exact calea indicată mai sus, că toate razele polare $\bar{N}'_0, \bar{N}'_1, \bar{N}'_2 \dots$ se taie într'un punct O' , situat pe dreapta D . Din cele de mai sus se desprinde următoarea proprietate:

Dacă un poligon se deformează astfel încât, n vârfuri ale lui descriu niște drepte date și $n - 1$ laturi se rotesc în jurul a $n - 1$ puncte fixe situate pe o dreaptă, atunci și latura n^a se va roti în jurul unui punct fix situat pe această dreaptă și reciproc:

Dacă un poligon se deformează astfel încât, toate laturile lui rotindu-se trec prin niște puncte fixe situate pe o dreaptă și dacă $n - 1$ vârfuri descriu niște drepte, atunci și vârful al n -lea va descrie o dreaptă.

Dacă se consideră că dreptele paralele se rotesc în jurul unor puncte fixe, situate pe dreapta dela infinit, se vede numai decăt că prima proprietate nu este decăt un caz particular al celei de-a doua.

De această proprietate, sub oricare din formele enunțate, vom face foarte des uz în problemele ce vom avea de rezolvat cu ajutorul poligoanelor funiculare.

Mai sunt și alte proprietăți, însă cele indicate până aci ne sunt suficiente pentru trebuințele noastre curente.

3. Câteva aplicațiuni asupra poligoanelor funiculare.

Din modul de construcție al poligonului funicular rezultă că n'am impus nici o restricție în ce privește poziția polului și nici poziției vreuneia din laturile poligonului funicular, acestea fiind cu totul arbitrare. Prin urmare, putem construi poligoane funiculare cărora să le impunem anumite condiții.

a) Poligon funicular trecând printr'un punct dat.

Poligonul funicular, a cărei latură $\bar{\theta}_i$ trece prin punctul dat I , se construiește începând cu latura $\bar{\theta}_i$. Avem o infinitate de soluțiuni.

b) Polygon funicular trecând prin două puncte date.

Să se construiască un polygon funicular ale cărui două laturi $\bar{\theta}_i$ și $\bar{\theta}_n$ să treacă prin două puncte date B și C .

Construim un polygon funicular $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_1 \dots$ cu un pol oarecare O' (fig. 18). Laturile θ'_i și θ'_n , fiind laturi extreme de polygon funicular pentru forțele $\bar{F}_{i+1} \dots \bar{F}_n$, se vor întâlni totdeauna pe rezultanta acestui grup de forțe. Dacă, prin intersecția $\bar{\theta}'_i$ cu $\bar{\theta}'_n$, ducem o paralelă la rezultanta $\bar{R}_{i+1, n}$ din polygonul forțelor, avem poziția $\varphi_{i+1, n}$ a ei. Dacă printr'un punct oarecare al ei ($\varphi_{i+1, n}$) ducem $\bar{\theta}_i$ și $\bar{\theta}_n$, prin punctele B și C , avem polygonul funicular cerut.

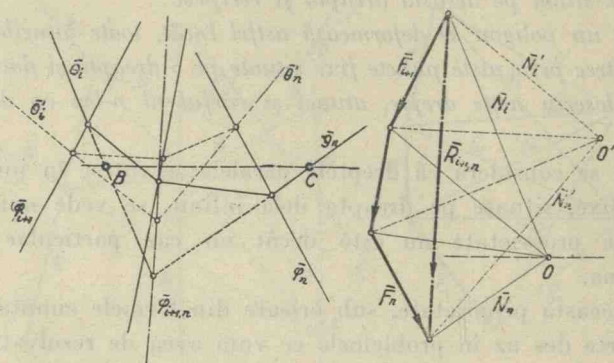


Figura 18

În polygonul forțelor, ducând paralelele respective $\bar{N}_i$ și $\bar{N}_n$, găsim polul O cerut. N'avem decât să completăm restul de polygon funicular.

După cum se vede avem o infinitate de soluțiuni.

Se mai observă, că dacă prin acest pol, astfel determinat, ducem o dreaptă paralelă cu BC și dacă cu poluri situate pe această dreaptă construim poligoane funiculare, toate laturile corespundente se vor tăia pe drepte paralele cu BC . În special poligoanele funiculare a căror latură $\bar{\theta}_i$ trece prin B , vor avea punctele de intersecție a laturilor corespundente pe BC și latura $\bar{\theta}_n$ va trece prin C , aceasta conform celor demonstrate anterior.

c) Polygon funicular trecând prin trei puncte date.

Să se construiască un polygon funicular ale cărui laturi $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_i$ și $\bar{\theta}_n$ să treacă prin trei puncte date A, B și C .

Construim un poligon funicular $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_1 \dots \bar{\theta}'_i \dots \bar{\theta}'_n$ cu un pol oarecare O' (fig. 19).

Laturile $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_i$, fiind laturi extreme de poligon funicular al grupului de forțe $\bar{F}_0 \dots \bar{F}_i$, se vor întâlni pe poziția rezultantei $\bar{\varphi}_{1,i}$, a acestui grup de forțe. În mod analog, laturile $\bar{\theta}'_i, \bar{\theta}'_n$ și $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_n$ se întâlnesc respectiv pe $\bar{\varphi}_{i+1,n}$ și $\bar{\varphi}_{1,n}$. Aceste rezultante le avem din poligonul forțelor, iar poziția lor o fixăm imediat cu poligonul funicular.

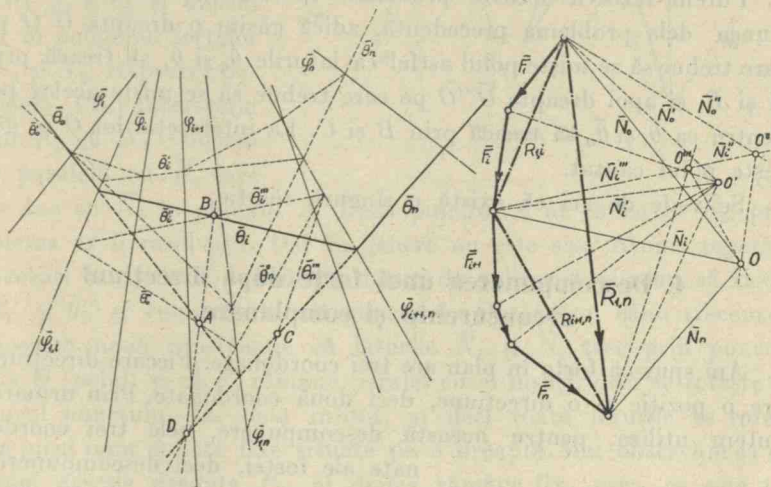


Figura 19

Putem oricând înlocui un grup de forțe prin rezultantele lor parțiale, adică putem reduce poligonul forțelor la $\bar{R}_{1,i}$, $\bar{R}_{i+1,n}$ și $\bar{R}_{1,n}$, când poligonul funicular se reduce la dreptele $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_i, \bar{\theta}'_n$. Oricum am construi poligonul funicular, triunghiul format de $\bar{\theta}'_0, \bar{\theta}'_i, \bar{\theta}'_n$ își are vârfurile pe $\bar{\varphi}_{1,i}$, $\bar{\varphi}_{i+1,n}$, $\bar{\varphi}_{1,n}$.

Construim un al doilea poligon funicular $\bar{\theta}''_0, \bar{\theta}''_i, \bar{\theta}''_n$, așa ca latura $\bar{\theta}''_0$ și $\bar{\theta}''_i$ să treacă prin punctele A și B, și vârfurile lui să fie evidente pe $\bar{\varphi}_{1,i}$, $\bar{\varphi}_{i+1,n}$ și $\bar{\varphi}_{1,n}$. Latura treia, $\bar{\theta}''_n$, evident nu va trece prin C, pentru că acest poligon a fost luat la întâmplare. Luăm intersecția D a dreptei AB cu $\bar{\theta}''_n$. Observăm, după o teoremă demonstrată, că la toate poligoanele funiculare a căror laturi $\bar{\theta}''_0$ și $\bar{\theta}''_i$ vor trece prin A și B, latura $\bar{\theta}''_n$ va trece totdeauna prin D. Prin urmare, dreapta DC va fi tocmai $\bar{\theta}_n$ căutat. Completăm poli-

gonul funicular cu restul de laturi $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_0$, cari vor trece evident prin punctele A și B . Acesta este poligonul funicular cerut, căruia putem să-i completăm restul de laturi $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2 \dots$ dacă am cunoaște polul care îi corespunde.

Dacă, în poligonul forțelor, ducem razele polare corespondente $\bar{N}_0, \bar{N}_i, \bar{N}_n$ acestea ne determină polul căutat. Pentru controlul construcției, aceste trei laturi trebuie să se taie într'un singur punct O . Dacă această condiție nu este îndeplinită executarea desenului a fost greșită.

Putem rezolva această problemă aplicând de două ori soluțiunea dela problema precedentă, adică găsim o dreaptă $O'O$ pe care trebuie să se miște polul astfel ca laturile $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_i$ să treacă prin A și B , și apoi dreapta $O''O$ pe care trebuie să se miște acelaș pol pentru ca $\bar{\theta}_i$ și $\bar{\theta}_n$ să treacă prin B și C . La intersecția lor O se găsește polul căutat.

Se vede de aci că există o singură soluție.

4. Descompunerea unei forțe după direcțiuni neconcurente și complanare.

Am spus că forța în plan are trei coordonate. Fiecare direcțiune are o poziție și o direcțiune, deci două coordonate. Prin urmare, putem utiliza, pentru această descompunere, cele trei coordonate ale forței, deci descompunerea nu putem să o facem decât după trei direcțiuni neconcurente în plan. După mai puține direcțiuni problema este imposibilă, după mai multe este nedeterminată.

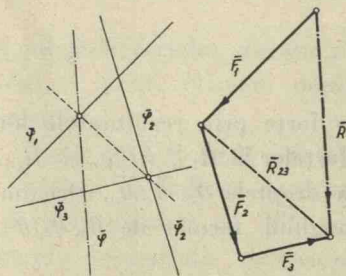


Figura 20

a) Soluții grafice.

a) Când forțele se întâlnesc în cadrul epurei se procedează astfel (fig. 20).

Se descompune forța dată $\bar{R}$, după una din direcțiuni $\bar{\varphi}_1$ și după dreapta ce unește punctele de intersecție ale lui $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}_1$ cu $\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$. Această ultimă componentă o descompunem după $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$. Ducând paralele respective în poligonul forțelor avem cele trei componente.

b) În cazul când cele patru direcțiuni nu se întâlnesc în cadrul epurei vom utiliza poligonul funicular (fig. 21).

Luăm un pol oarecare O , și ducem razele polare $\bar{N}_0, \bar{N}_3$, laturile extreme de poligon funicular $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_3$ și în poligonul forțelor direcțiile $\bar{\varphi}_1$ și $\bar{\varphi}_3$, prin extremitățile lui $\bar{R}$.

Directiile $\bar{\theta}_1$ și $\bar{\theta}_2$, în poligonul funicular, trebuie să se întâlnească pe $\bar{\varphi}_2$. Ducem în poligonul funicular două direcțiuni oarecari $\bar{\theta}'_1$ și $\bar{\theta}'_2$ și ducem și în poligonul forțelor $\bar{N}'_1$ și $\bar{N}'_2$, respectiv paralele. Prin intersecția lui $\bar{F}_1$ cu $\bar{N}'_1$ ducem o paralelă cu $\bar{F}_2$ care

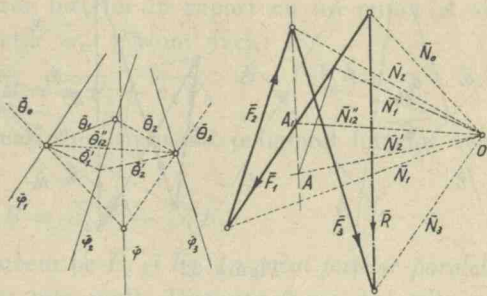


Figura 21

se taie cu $\bar{N}'_2$ în punctul A . Dacă punctul A ar cădea pe $\bar{F}_3$, problema ar fi rezolvată. Dar în genere nu este așa. Atunci repetăm aceeași construcție, luând alte laturi de poligon funicular, să zicem $\bar{\theta}'_1$ și $\bar{\theta}'_2$ și vom căpăta alt punct, A_1 . Observăm, când trecem la această nouă construcție că laturile $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ trec prin punctul fix O (polul) și că $\bar{F}_2$ rămâne paralel cu el însuși, deci se rotește în jurul punctului fix dela infinit, și deci toate laturile se rotesc în jurul unor puncte fixe situate pe o dreaptă. Mai observăm că un vârf descrie dreapta $\bar{F}_1$, al doilea rămâne fix, ceea ce este tot una din punctul nostru de vedere ca și când s'ar mișca pe o dreaptă, atunci rezultă, după o teoremă demonstrată, că și A va descrie o dreaptă. Un punct al ei îl avem, este A , ne mai trebuie unul. Luăm de preferință $\bar{\theta}''_1$ și $\bar{\theta}''_2$ în prelungire și atunci căpătăm pe A_1 pe dreapta $\bar{F}_1$. Unind A cu A_1 și luând intersecția lui AA_1 cu $\bar{F}_3$ am rezolvat problema, căci avem pe $\bar{F}_3$ și deci ne întoarcem și aflăm pe $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_1$.

Putem proceda și invers (fig. 22).

Luăm în poligonul forțelor pentru $\bar{F}_1$ o valoare oarecare, atunci pentru $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$, completând acest poligon, rezultă niște valori bine definite. Ducem razele polare $\bar{N}'_1$ și $\bar{N}'_2$ și laturile de poligon funicular $\bar{\theta}'_1$ și $\bar{\theta}'_2$. Dacă intersecția lui $\bar{\theta}'_2$ cu $\bar{\theta}_3$ ar cădea pe $\bar{\varphi}_3$ problema ar fi rezolvată. Dacă nu, repetăm aceeași construcție cu altă valoare a lui $\bar{F}_1$ și vom căpăta alte laturi de poligon funicular $\bar{\theta}'_1$ și $\bar{\theta}'_2$. Observăm însă că $\bar{\theta}'_1$ și $\bar{\theta}'_2$ trec mereu printr'un punct fix, iar vârfurile poligonului funicular, astfel construit, rămân mereu

pe două drepte ($\bar{\varphi}_1$ și $\bar{\varphi}_2$), atunci și intersecția laturilor $\bar{\theta}_2$, $\bar{\theta}'_2$ va fi un punct fix A . Dacă unim acest punct cu inter-

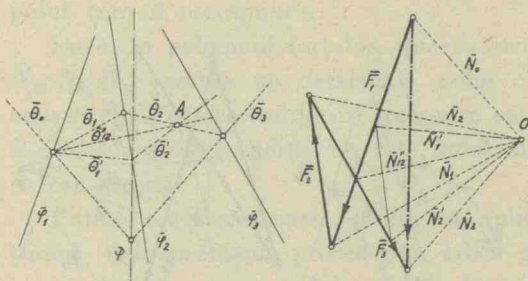


Figura 22

secția dreptelor $\bar{\varphi}_3$ cu $\bar{\theta}_3$, obținem pe $\bar{\theta}_2$ căutat. Avem atunci numaidecât și pe $\bar{\theta}_1$. Ducând în poligonul forțelor paralelele $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$, obținem componentele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ căutate.

În cazul particular când avem de descompus o forță după direcțiuni paralele cu forța, se vede că nu putem utiliza coordonata de direcție ci numai celelalte două, adică mărimea și poziția. Deci o forță n-o putem descompune decât numai după două direcțiuni paralele.

Forțele neîntâlnindu-se în cadrul epurei, evident că suntem forțați a utiliza construcția cu poligonul funicular, exact ca în cazul precedent, însă mult mai simplu (fig. 23).

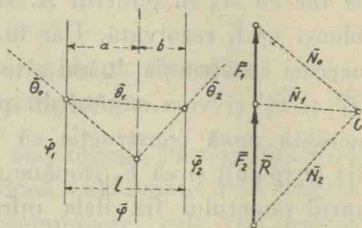


Figura 23

În poligonul forțelor luăm un pol O și ducem $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_2$, iar în poligonul funicular $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_2$. Latura $\bar{\theta}_1$ rezultă imediat. Dacă în poligonul forțelor ducem pe $\bar{N}_1$, găsim pe $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$.

b) Soluția analitică.

Cazul general este foarte simplu. Avem evident:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

și momentul în raport cu un punct A , arbitrar ales:

$$\bar{a} \bar{R} = \bar{a}_1 \bar{F}_1 + \bar{a}_2 \bar{F}_2 + \bar{a}_3 \bar{F}_3$$

Punctul A , fiind cu totul arbitrar, putem să-l luăm la intersecția direcțiunilor $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ și atunci $\bar{a}_2 = \bar{a}_3 = 0$, și din ecuația de mai sus ne rămâne

$$\bar{a} \bar{R} = \bar{a}_1 \bar{F}_1$$

din care deducem pe $\overline{F}_1$. Aşa procedăm şi pentru celelalte componente $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$.

În cazul când nu putem utiliza punctele de intersecţie procedăm astfel.

Luăm momentul tuturor forţelor în raport cu un punct A situat de exemplu pe direcţia $\overline{\varphi}_1$, şi vom avea:

$$a \overline{R} = \overline{a}_2 \overline{F}_2 + \overline{a}_3 \overline{F}_3$$

Căpătăm o a doua ecuaţie multiplicând poligonul forţelor vectorial cu $\overline{\varphi}_1$ şi avem:

$$\overline{\varphi}_1 \overline{R} = \overline{\varphi}_1 \overline{F}_2 + \overline{\varphi}_1 \overline{F}_3$$

Din aceste ecuaţii deducem pe $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$. În cazul forţelor paralele cheştiunea se simplifică şi mai mult. Distanţa între direcţiile $\overline{\varphi}_1$ şi $\overline{\varphi}_2$ o notăm cu $\overline{l}$ iar cu $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ distanţele dela $\overline{\varphi}$ la $\overline{\varphi}_1$ şi respectiv $\overline{\varphi}_2$.

Dacă luăm momentele în raport cu un punct situat pe $\overline{\varphi}_1$ avem:

$$\overline{a} \overline{R} = \overline{l} \overline{F}_2$$

Când $\overline{a}$ şi $\overline{l}$ sunt normale pe $\overline{\varphi}$, atunci avem ecuaţia scalară:

$$a R = l F_2$$

din care deducem pe F_2 . În mod analog deducem pe F_1 . Pentru control trebuie să avem:

$$R = F_1 + F_2$$

D) Forţe oarecari în spaţiu.

1. Compunerea forţelor în spaţiu.

a) Consideraţiuni generale.

În general, un sistem de forţe în spaţiu se reduce la o rezultantă unică şi un moment. Numai în cazuri particulare se poate reduce numai la o rezultantă sau numai la un moment.

Un sistem de forţe se mai poate reduce şi la un grup de două forţe nesituate în acelaşi plan.

În primul caz se procedează aşa cum s'a indicat în mecanică, adică, se alege un punct arbitrar O , şi în el se aplică forţe egale şi de sens contrar $\overline{F}_1, -\overline{F}_1, \overline{F}_2, -\overline{F}_2, \dots$. Forţa $-\overline{F}_1$ din punctul O şi cu forţa dată $\overline{F}_1$ ne dau un moment $\overline{a}_1 \overline{F}_1$, a cărui valoare şi direcţiune este perfect determinată.

Dacă procedăm la fel și cu celelalte forțe, vom avea în definitiv o serie de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ aplicate în punctul arbitrar O , pe cari le compunem după regulile cunoscute, și o serie de momente $\vec{a}_1 \vec{F}_1, \vec{a}_2 \vec{F}_2, \dots$ pe cari le compunem după aceleași reguli.

Se observă că, oricare ar fi punctul O arbitrar ales, rezultanta $\vec{R}$ va rămâne mereu aceeași pentru că este rezultanta aceluiași sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ concurente în punctul O ales.

Ceea ce se schimbă cu alegerea punctului O , este valoarea și direcțiunea momentului.

Să presupunem că luăm un alt punct O_1 , așa ca distanța $OO_1 = \vec{a}_o$ și aflăm valoarea momentului în raport cu el, vom avea:

$$(12) \quad \vec{M}_1 = \sum (\vec{a}_i - \vec{a}_o) \vec{F}_i = \sum \vec{a}_i \vec{F}_i - \sum \vec{a}_o \vec{F}_i = \vec{M} - \vec{a}_o \vec{R}.$$

Să multiplicăm această ecuație, scalar cu $\vec{R}$, vom avea:

$$\vec{R} \vec{M} = \vec{R} \vec{M}_1,$$

pentru că: $\vec{a}_o \vec{R} \cdot \vec{R} = 0$

Prin urmare, *proiecția momentului pe direcția rezultantei este constantă*, oricare ar fi punctul ales O . Se vede deci că $\vec{R} \vec{M}$ este un invariant al sistemului de forțe dat.

Din cele de mai sus se vede că $\vec{M}_1$ va avea o valoare minimă, și anume atunci când direcțiunea lui va coincide cu direcția lui $\vec{R}$. În acest caz avem așa zisul *răsucitor sau dinam*. Axa lui va fi evident paralelă cu $\vec{R}$ și se numește *axa centrală a sistemului*.

Să-i găsim poziția. Dacă multiplicăm relația (12) scrisă sub forma:

$$(12') \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{a}_o \vec{R}$$

vectorial cu $\vec{R}$, avem:

$$\vec{R} \vec{M} = \vec{R} \vec{M}_1 + \vec{a}_o \cdot R^2 - \vec{R} \cdot \vec{a}_o \vec{R},$$

Dacă $\vec{M}_1$ este momentul care are direcția lui $\vec{R}$, atunci $\vec{R} \vec{M}_1 = 0$, și dacă măsurăm pe $\vec{a}_o$ pe o direcție normală lui $\vec{R}$, atunci și $\vec{a}_o \vec{R} = 0$, și deci:

$$(13) \quad \vec{a}_o = \vec{R} \vec{M} / R^2$$

Ori $\vec{R} \vec{M}$ este un vector, normal pe planul determinat de $\vec{R}$ și $\vec{M}$ și a cărui valoare este $R \cdot M \cdot \sin \alpha$, dacă notez cu R valoarea numerică a rezultantei, cu M valoarea numerică a momentului și α unghiul ce fac între ele direcțiile lor în sensul dela $\vec{R}$ către $\vec{M}$. Atunci valoarea numerică a lui $\vec{a}_o$, va fi:

$$a_o = M \sin \alpha / R.$$

Sensul în care măsurăm pe a_o este dat de formula (13).

Dacă prin punctul astfel determinat, ducem o dreaptă paralelă cu $\bar{R}$, aceasta va fi axa centrală a sistemului. Valoarea momentului după axa centrală va fi evident $M \cos \alpha$.

Din ecuațiunea (12') se mai vede că $\bar{M}_1 = \bar{M}$, ori de câte ori $a_o \bar{R} = 0$, adică ori de câte ori O_1 se mișcă pe o dreaptă paralelă cu $\bar{R}$ trecând prin O .

Când $\bar{R}\bar{M} = 0$, atunci sistemul de forțe se reduce la o singură rezultantă. Poziția ei este dată de ecuația (13) și este tocmai axa centrală a sistemului.

În al doilea caz se procedează astfel: momentul putem să-l înlocuim cu două forțe egale și de sens contrar, situate în planul normal pe axa lui, plan pe care-l vom denumi *planul momentului* și-l vom nota cu μ . Fie $\bar{F}_i$ și $-\bar{F}_i$ cele două forțe echivalente momentului, situate în planul μ care trece prin O (fig. 24). Aceste două forțe sunt supuse, la singura condiție: $\bar{M} = \bar{a}\bar{F}_i$, dacă $\bar{a}$ este distanța între ele. Poziția lor este de asemenea arbitrară în acest plan μ . Dacă facem ca $-\bar{F}_i$ să treacă prin O , și dacă o compunem cu $\bar{R}$, obținem:

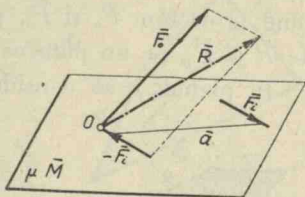


Figura 24

$$\bar{F}_o = \bar{R} - \bar{F}_i$$

În acest mod, sistemul, compus din o rezultantă $\bar{R}$ și un moment $\bar{M}$, l'am înlocuit cu un sistem echivalent de două forțe $\bar{F}_o$ și $\bar{F}_i$, nesituate în același plan și neconcurente, pentru că distanța $\bar{a}$ este diferită de zero. Mărimea și direcția lui $\bar{F}_i$, din planul μ , sunt cu totul arbitrare. Oricare ar fi acestea, forța $\bar{F}_o$ va trece mereu prin punctul O iar $\bar{F}_i$ va fi mereu conținută în planul μ .

Planul μ se zice că este conjugat punctului O , iar $\bar{F}_o$ conjugat lui $\bar{F}_i$. Pentru un același punct O avem un singur plan conjugat și o infinitate de valori $\bar{F}_o$, $\bar{F}_i$ conjugate.

Dacă alegem un alt punct O' , acestuia îi corespunde un alt plan μ' și altă serie de drepte conjugate $\bar{F}_o'$ și $\bar{F}_i'$.

Se mai observă că, pentru un sistem dat de forțe și un punct dat O , există o singură valoare pentru $\bar{R}$ și $\bar{M}$.

Invers, dacă ne dăm perechea de valori $\bar{F}_o$ și $\bar{F}_i$, și un punct O , putem deduce pe $\bar{R}$ și $\bar{M}$.

Se mai observă că pentru orice dreaptă, care trece prin punctul O și e conținută în planul μ , momentele lui $\bar{F}_0$ și $\bar{F}_i$ sunt nule. De aceea se zice că punctul O și planul μ formează un *sistem nul*. Aceasta este foarte important, căci ne arată că *există oricând un grup de drepte în raport cu care momentul întregului sistem de forțe este nul*.

*
* *
*

$\bar{F}_0$ este evident în planul determinat de $\bar{R}$ și $-\bar{F}_i$, iar proiecția lui $\bar{F}_0$ pe planul μ , prin un plan conținând pe $\bar{R}$, va fi o dreaptă paralelă cu $\bar{F}_i$ din planul μ . Acest paralelism subsistă și atunci când proiectăm $\bar{F}_0$ și $\bar{F}_i$, prin plane paralele cu planul determinat de $\bar{R}$ și $\bar{F}_0$, pe un plan oarecare.

În planul μ să considerăm o serie de forțe $\bar{F}_i$ cari formează un poligon închis. Conjugatele acestor forțe, anume $\bar{F}_0$, vor forma un fascicol trecând prin O . Să considerăm un al doilea punct O' căruia îi corespunde planul conjugat μ' .

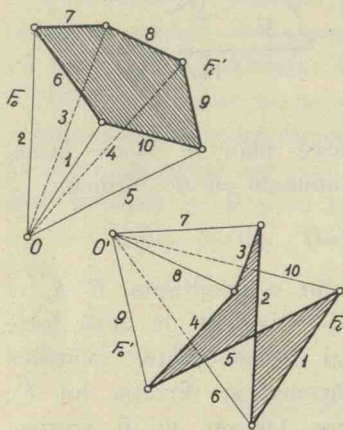


Figura 25

Intersecția acestui plan cu fascicolul $\bar{F}_0$ determină un poligon închis cu laturile $\bar{F}_i'$ căruia îi corespunde un fascicol $\bar{F}_0'$ trecând prin punctul O' (fig. 25). Am format două piramide conjugate și se poate foarte ușor arăta că fiecărui vârf din o piramidă îi corespunde în cealaltă o față și reciproc. Tot așa putem forma două poliedre oarecari conjugate între ele.

Dacă proiectăm muchiile celor două poliedre, pe un plan oarecare, prin plane paralele cu planul trecând prin $\bar{R}$, vom căpăta două figuri în cari proiecțiile laturilor conjugate vor fi paralele, iar laturile concurente într-o figură formează poligoane închise în cealaltă și reciproc.

Aceste două figuri se zic că sunt *reciproce* și aceasta este chiar definiția lor.

Așa dar, figurile reciproce în plan sunt proiecția a două poliedre conjugate din spațiu.

b) Executarea grafică a compunerii unui sistem de forțe din spațiu.

Nu vom face altceva decât să traducem grafic operațiunile de mai sus.

Soluția 1-a: Pentru aceasta utilizăm planele de proiecție determinate de 3 axe de coordonate $Oxyz$ (fig. 26).

Să presupunem că avem trei forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, cari acționează după direcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. În planul de proiecție yoz , adică normal pe ox , cele trei direcțiuni ca poziție și direcțiune se proiectează

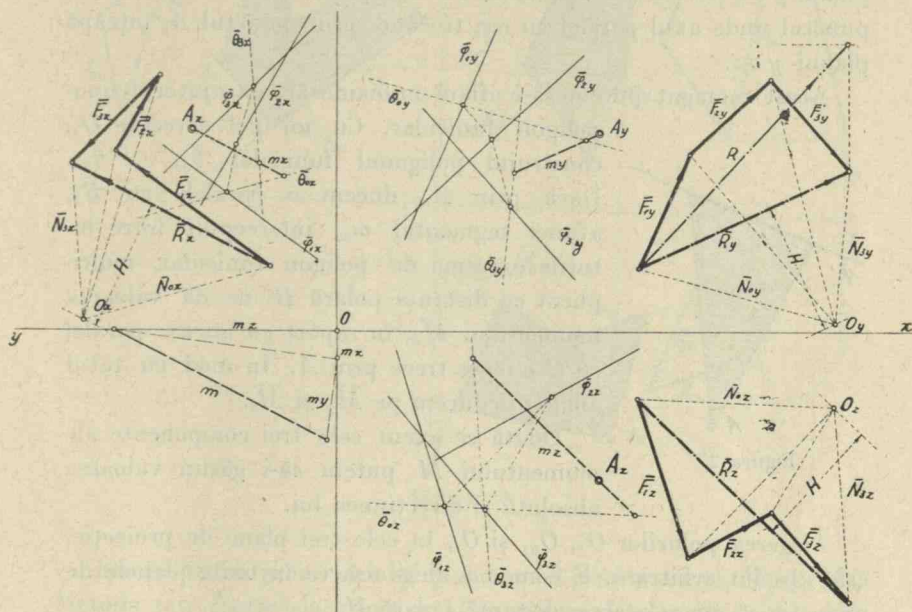


Figura 26

după $\varphi_{1x}, \varphi_{2x}$ și φ_{3x} . În mod analog pe celelalte plane. Cu forțele date formăm, în planul yoz , poligonul de forțe $\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} = \vec{R}_y$.

Cu aceeași normă de a nota forțele, obținem și în celelalte două plane de proiecție:

$$\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} = \vec{R}_y$$

$$\vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \vec{F}_{3z} = \vec{R}_z$$

Se știe că rezultanta unui sistem de forțe oarecare rămâne aceeași, ca mărime și direcțiune, oricare ar fi punctul în raport cu care am face reducerea sistemului. Așa dar, avem cea mai mare

libertate în alegerea poziției unde vom desena aceste poligoane pe epura noastră. Odată ce am găsit cele trei proiecții, putem găsi mărimea rezultantei și direcțiunea ei și prin urmare, prima parte a problemei e rezolvată.

Să trecem la partea doua. Se știe că momentul în raport cu un ax, a unui sistem de forțe, este egal cu momentul proiecției forțelor pe un plan normal pe axul dat, în raport cu punctul unde axul înțeapă planul. Dacă vrem să găsim momentul în raport cu un ax paralel cu ox și trecând prin punctul A , vom proiecta forțele pe planul yoz și vom lua momentul lor în raport cu punctul A_x , adică punctul unde axul paralel cu ox , trecând prin punctul A , înțeapă planul yoz .

Acest moment putem să-l aflăm numaidecât, cu ajutorul unui poligon funicular. Cu un pol oarecare O_x , construim poligonul funicular $\bar{\theta}_{0x} \dots \bar{\theta}_{3x}$. Dacă prin A_x ducem o paralelă cu $\bar{R}_x$, atunci segmentul m_x , interceptat între laturile extreme de poligon funicular, multiplicat cu distanța polară H ne dă valoarea momentului $\bar{M}_x$, în raport cu un ax paralel cu Ox , care trece prin A . În mod cu totul analog deducem pe $\bar{M}_y$ și $\bar{M}_z$.

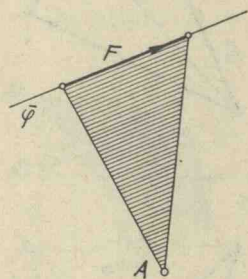


Figura 27

Odată ce avem cele trei componente ale momentului $\bar{M}$ putem să-i găsim valoarea absolută și direcțiunea lui.

Alegerea polurilor O_x , O_y , și O_z , în cele trei plane de proiecție, este absolut arbitrară. E comod a alege așa ca în toate planele de proiecție să avem aceeași distanță polară H .

Găsirea momentului necesită utilizarea celor trei plane de proiecție.

Soluția 2-a se bazează pe observația că momentul este egal cu dublul suprafeței triunghiului format de forță, luată la scara și pe direcția respectivă, și punctul în raport cu care luăm momentul (fig. 27).

Prin urmare, pe planul de proiecție, de ex. yoz (fig. 28), pe linia de acțiune a lui φ_{1x} , luăm o lungime F_{1x} din poligonul forțelor respective. Dacă unim extremitățile acestui segment cu A_x avem un triunghi. Dacă facem aceeași operație și pentru celelalte forțe, căpătăm alte triunghiuri, toate cu vârful în A . Pentru că poziția segmentului F_{1x} , pe linia lui de acțiune, este indiferentă putem

oricând să ne aranjăm așa, ca să căpătăm o suprafață mărginită la un poligon. Dacă evaluăm după normele obișnuite aceste suprafețe și luăm dublul lor, avem momentul în raport cu axa paralelă cu O_x , ce trece prin A , deci pe $\bar{M}_x$.

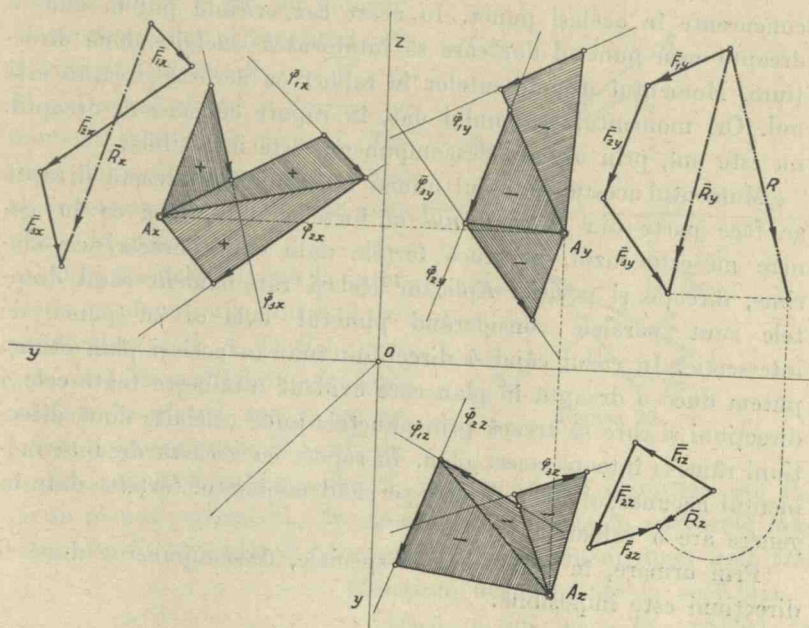


Figura 28

Dacă operăm și în celelalte plane la fel vom avea pe $\bar{M}_y$ și $\bar{M}_z$. Metoda este foarte clară însă evaluarea suprafețelor dă loc la operații de calcule mai multe, așa că se preferă metoda precedentă, cu ajutorul poligonului funicular. Acestea sunt singurele metode practice de compunere a unui sistem de forțe în spațiu.

2. Descompunerea unui sistem de forțe în spațiu.

Am văzut că un sistem de forțe în spațiu, se reduce la o rezultantă unică și un moment, prin urmare are în sine 6 coordonate. Rezultă de aci că, dacă ni se dau 6 direcțiuni ca poziție și direcțiune, adică având numai câte o necunoscută, putem găsi componentele sistemului după cele 6 direcțiuni. După mai puține direcțiuni problema este imposibilă, după mai multe este static nedeterminată.

Mai întâiu vom face câteva observații. *Această descompunere este posibilă numai atunci când cel mult trei din direcțiunile date sunt concurente într'un punct, paralele între ele sau conținute în același plan.*

În adevăr, să presupunem deocamdată că am avea 4 direcțiuni concurente în același punct. În acest caz, oricând putem duce o dreaptă prin punctul dat care să întâlnească celelalte două direcțiuni. Momentul necunoscutelor în raport cu această dreaptă este nul. Or, momentul sistemului dat, în raport cu această dreaptă, nu este nul, prin urmare descompunerea este imposibilă.

Momentul acesta ar fi nul numai în cazul când această dreaptă ar face parte din *sistemul nul* al forțelor date, ceea ce în genere nu este cazul, pentru că forțele date sunt oarecari ca mărime, direcție și poziție. Aplicăm același raționament când dreptele sunt paralele considerând punctul dela ∞ ca punct de intersecție. În cazul când 4 direcțiuni sunt în același plan atunci putem duce o dreaptă în plan care evident întâlnește toate cele 4 direcțiuni și care să treacă prin punctele unde celelalte două direcțiuni rămase înțeapă acest plan. În raport cu această dreaptă momentul necunoscutelor este nul, pe când momentul forțelor date în genere are o valoare.

Prin urmare, în aceste cazuri speciale, descompunerea după 6 direcțiuni este imposibilă.

a) Soluții grafice.

Un caz simplu de descompunere este următorul: *trei din direcțiuni sunt concurente, iar alte trei sunt situate într'un plan dat.*

Reducem sistemul de forțe la o rezultantă trecând prin punctul A , dat de concurența a trei din direcțiuni, și la un moment al cărui plan este planul μ , conjugat lui A . Luăm intersecția acestui plan cu planul dat. Intersecția va fi o dreaptă la distanța a de punctul A și conținută evident în ambele planuri. Dacă presupunem că după direcția ei acționează o forță $\bar{F}_i$, atunci din relația $\bar{M} = a\bar{F}_i$, deducem valoarea și sensul ei.

Această forță $\bar{F}_i$ o descompunem după cele trei direcțiuni, conținute în planul dat. Dacă acum compunem pe $-\bar{F}_i$, aplicată în punctul A , cu $\bar{R}$ căpătăm pe $\bar{F}_0 = \bar{R} - \bar{F}_i$ pe care o descompunem, după regulile obișnuite, după cele trei direcțiuni concurente în A .

Să presupunem că trei direcțiuni sunt concurente în A (A_y , A_z în planele de proiecție), (fig. 29), și cari direcțiuni nu sunt figurate pe epură pentru a nu o complica. Alte trei direcțiuni sunt cuprinse în planul xoy , de asemenea nefigurate.

Să presupunem că reducem sistemul la o rezultantă $\bar{R}$ ($\bar{R}_y$, $\bar{R}_z$) aplicată în A și la un moment $\bar{M}$ ale cărui valori și direcțiuni sunt însemnate pe epură cu $\bar{M}_{xz}$ și $\bar{M}_{xy}$. Ducem planul μ normal pe moment și trecând prin A . Urmele lui sunt $O\mu_y$ și $O\mu_z$, adică chiar intersecțiunile lui cu cele două plane de proiecție.

Distanța dela A până la intersecția cu planul orizontal este perpendiculara dela A_z la $O\mu_z$, care, prin o rotație, o aflăm în adevărată mărime în planul xoz și are valoarea a . Din expresia $\bar{M} = a\bar{F}_i$ deducem sensul și valoarea lui $\bar{F}_i$, care în planul orizontal este $\bar{F}_{iz}$ iar în planul vertical $\bar{F}_{iy}$. În planul orizontal este în adevărată mărime. Pe $\bar{F}_{iz}$ din planul orizontal îl descompunem după cele trei direcțiuni neconcurente în acel plan.

Dacă acum pe $-\bar{F}_i$, aplicat în punctul A , îl compunem cu $\bar{R}$, avem $\bar{F}_0 = \bar{R} - \bar{F}_i$ care în planele de proiecție ne dă pe $\bar{F}_{0y}$ și $\bar{F}_{0z}$ pe care, după regulile obișnuite, o descompunem după cele trei direcțiuni concurente în punctul A , descompunere care nu s'a mai făcut pentru a nu complica epura.

Această problemă se mai poate rezolva și așa:

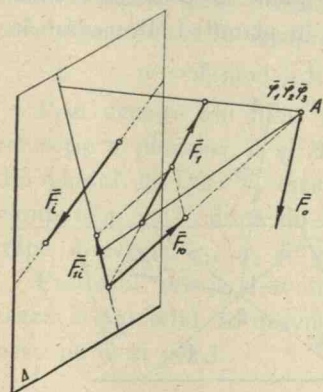


Figura 30

Prin forța F_1 dată și punctul A ducem un plan care taie planul Δ , al celor trei direcțiuni φ_4 , φ_5 , și φ_6 , după o dreaptă oarecare (fig. 30). În planul determinat de $\bar{F}_1$ și A descompunem forța $\bar{F}_1$ după intersecția celor două planuri și după dreapta care unește punctul A cu punctul unde $\bar{F}_1$ înțeapă planul Δ . Procedăm la fel și cu celelalte forțe $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, ... Vom căpăta, în definitiv, o serie de componente

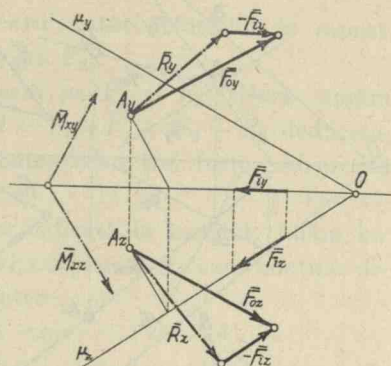


Figura 29

ale forțelor $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots$, concurente în A , a căror rezultantă va fi $\overline{F}_0$ și o altă serie de componente, conținute în planul Δ , a căror rezultantă este $\overline{F}_i$. Le descompunem pe fiecare după regulile obișnuite.

Fie A_y și A_z proiecțiile punctului A , prin care trec cele trei

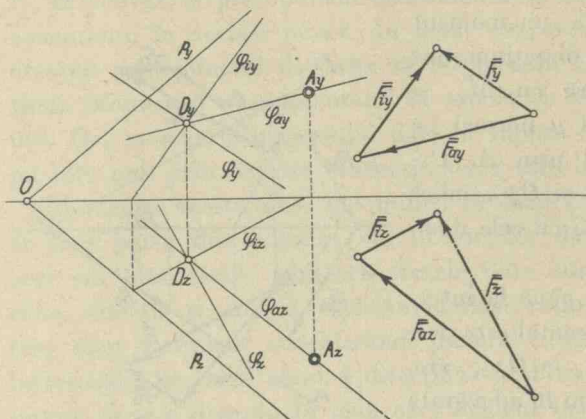


Figura 31

direcțiuni concurente și nefigurate pe epură (fig. 31). Fie $\overline{\varphi}_y, \overline{\varphi}_z$ proiecțiile direcțiunii și liniei de acțiune a forței $\overline{F}$, pe cele două plane de proiecție. Prin punctul A și forța $\overline{F}$ ducem planul a cărui urme sunt p_y și p_z . Intersecția acestui plan

cu Δ , va fi dreapta $\overline{\varphi}_i$ ($\overline{\varphi}_{iy}, \overline{\varphi}_{iz}$) care se va tăia cu forța $\overline{F}$ în punctul D (D_y, D_z). Descompunem forța $\overline{F}$ după direcția $\overline{\varphi}_i$, evident conținută în planul Δ , și dreapta $\overline{\varphi}_a$ ($\overline{\varphi}_{ay}, \overline{\varphi}_{az}$) care unește punctul D cu A . Am obținut astfel în cele două plane de proiecție o componentă trecând prin A și alta conținută în planul Δ . Procedăm la fel și pentru celelalte forțe $F_2, F_3, \dots$ și se urmează cum s'a spus mai sus.

b) Soluția analitică.

Această problemă se poate rezolva în mai multe feluri.

1°. Prin punctul A , ducem dreapta $\overline{a}$, care trece și prin intersecția B a direcțiilor $\overline{\varphi}_4$ și $\overline{\varphi}_5$, conținute în planul Δ (fig. 32). Fie $\overline{c}$ distanța dela B la forța F_6 .

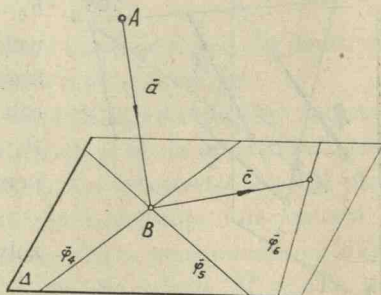


Figura 32

Momentul tuturor forțelor în raport cu A va fi:

$$\overline{M} = \overline{a} F_4 + \overline{a} F_5 + (\overline{a} + \overline{c}) F_6$$

pentru că momentele forțelor $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ concurente în A sunt nule.

Multiplăcăm această ecuație scalar cu $\bar{a}$ și vom avea:

$$\bar{a} \bar{M} = \bar{a} \bar{c} \bar{F}_6$$

Dacă $\bar{a} = a\bar{a}$, $\bar{c} = c\bar{\gamma}$, $\bar{M} = M\bar{\mu}$, $\bar{F}_6 = F_6\bar{\varphi}_6$, avem:

$$M \cdot \bar{a} \bar{\mu} = c F_6 \cdot \bar{a} \bar{\gamma} \bar{\varphi}_6$$

care nu este altceva decât momentul tuturor forțelor în raport cu dreapta $\bar{a}$ și din care deducem pe F_6 .

În mod cu totul analog deducem pe F_4 și F_5 . Dacă notăm $\bar{F}_4 + \bar{F}_5 + \bar{F}_6 = \bar{F}_i$, din relația: $\bar{R} - \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ deducem, după norma indicată anterior, valoarea celor trei forțe concurente în A .

2°. Vom traduce analitic soluția indicată la început. Luăm intersecția planului μ , al momentului, cu planul Δ , care conține direcțiunile $\bar{\varphi}_4$, $\bar{\varphi}_5$ și $\bar{\varphi}_6$ (fig. 33). Intersecția va fi o dreaptă paralelă cu dreapta $\bar{\mu}\Delta$.

Sinusul unghiului planelor μ și Δ este partea scalară a produsului $\bar{\mu}\Delta$ adică mod. $\bar{\mu}\Delta$, prin urmare, cantitate cunoscută. Să notăm cu d distanța dela A la planul Δ măsurată după normala la acest plan. Valoarea distanței $\bar{a}$ dela punctul A la dreapta $\bar{\mu}\Delta$ va fi:

$$a = d / \text{mod } \bar{\mu}\Delta.$$

Prin urmare am fixat direcțiunea și pozițiunea dreptei de intersecție a planelor μ și Δ . Din relația $M = aF_i$ deducem pe F_i din planul Δ . Deci $\bar{F}_i$ este complet determinat. Prin urmare descompunem pe $\bar{F}_i$ după direcțiunile $\bar{\varphi}_4$, $\bar{\varphi}_5$ și $\bar{\varphi}_6$, iar pe $\bar{F}_0 = \bar{R} - \bar{F}_i$ după direcțiunile $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$.

Produsul $\bar{\mu}\Delta$ se dezvoltă potrivit datelor problemei și se pretează la tot felul de dezvoltări în funcție de elementele cari definesc pe μ și pe Δ .

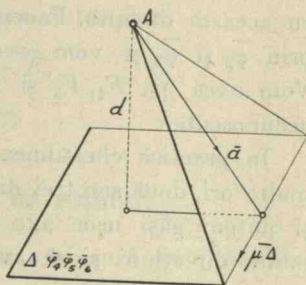


Figura 33

* * *

3°. În cele de mai sus s'au dat exemple de cazuri când descompunerea este imposibilă sau când aceasta se face foarte ușor.

În cazul general chestiunea nu este așa de simplă.

Pentru a găsi cu ușurință componentele, după cele 6 direcțiuni, ar trebui să găsim o axă care să întâlnească 5 direcțiuni.

Luând momentul tuturor forțelor în raport cu această axă și al componentei după a șasea direcțiune, găsim o relație între forțele date și o necunoscută. Aceasta însă în genere nu este posibil.

Se știe că prin trei drepte oarecari se poate duce un hiperboloid riglat, care va intersecta a patra direcțiune în două puncte. Dacă prin aceste două puncte ducem câte o dreaptă aparținând hiperboloidului, și le luăm drept axe de momente, vom putea scri două ecuații de momente și deci vom avea două ecuații între cele două componente după direcțiunile neîntâlnite de cele două axe.

Și această metodă, practic, este greu de aplicat. Atunci se recurge la altele. Se duce un plan prin direcțiunea $\bar{\varphi}_1$, care este înțepat de direcțiile $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ în două puncte. Dreapta care trece prin aceste două puncte întâlnește trei direcțiuni și deci momentul componentelor respective în raport cu ea este nul. Luăm momentul celorlalte trei componente (după $\bar{\varphi}_4$, $\bar{\varphi}_5$, $\bar{\varphi}_6$) în raport cu această dreaptă. Facem aceeași operație ducând succesiv plane prin $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ și vom avea încă două ecuații între F_4 , F_5 și F_6 . Vom avea pe F_4 , F_5 și F_6 prin rezolvirea a trei ecuații cu trei necunoscute.

În practică chestiunea se prezintă mai simplu căci, de foarte multe ori, două sau trei direcțiuni sunt concurente sau complanare și putem găsi ușor axe de momente cari să întâlnească cât mai multe direcțiuni și să avem simplificări și reduceri în rezolvire.

Analitic chestiunea, cu toate că necesită calcule lungi, însă este simplă din punctul de vedere al rezolvării, și nu este altceva decât o traducere în calcul a metodei indicată mai sus.

Să presupunem că luăm momentul tuturor forțelor în raport cu un punct A situat pe direcțiunea $\bar{\varphi}_1$. Să notăm cu $\bar{a}_2 = a_2 \bar{a}_2$, $\bar{a}_3 = a_3 \bar{a}_3$... distanțele tuturor celorlalte forțe dela acest punct A .

Să presupunem că momentul forțelor date în raport cu A este $\bar{M}_1$.

Vom avea:

$$(14) \quad \bar{M}_1 = a_2 F_2 \cdot \bar{a}_2 \bar{\varphi}_2 + \dots + a_6 F_6 \cdot \bar{a}_6 \bar{\varphi}_6$$

Dacă multiplicăm scalar această ecuație pe rând cu $\bar{a}_2$ și $\bar{\varphi}_2$, obținem:

$$\bar{M}_1 \cdot \bar{a}_2 = a_3 F_3 \cdot \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{\varphi}_3 + \dots + a_6 F_6 \cdot \bar{a}_2 \bar{a}_6 \bar{\varphi}_6$$

$$\bar{M}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 = a_3 F_3 \cdot \bar{\varphi}_2 \bar{a}_3 \bar{\varphi}_3 + \dots + a_6 F_6 \cdot \bar{\varphi}_2 \bar{a}_6 \bar{\varphi}_6$$

Dacă între aceste două ecuații eliminăm pe F_3 sau pe $a_3 F_3$, ceea ce este tot una, căpătăm o ecuație între necunoscutele F_4 , F_5 și F_6 .

Putem căpăta direct această ecuație dacă, dela început, multiplicăm ecuația (14) scalar cu produsul vectorial $a_2 \varphi_2 \cdot a_3 \varphi_3$, lucru ce se poate verifica foarte ușor.

Alegem acum un punct B situat pe direcțiunea $\bar{\varphi}_2$ și notăm cu $\bar{b}_1 = b_1 \bar{\beta}_1$, $\bar{b}_3 = b_3 \bar{\beta}_3 \dots$ distanțele la celelalte direcțiuni și cu $\bar{M}_2$ momentul forțelor date în raport cu B . Eliminând în același mod ca mai sus pe F_1 și F_3 , găsim o altă ecuație în F_4 , F_5 și F_6 . Facem aceeași operație în raport cu un punct C situat pe direcția $\bar{\varphi}_3$ și vom găsi o nouă ecuație în F_4 , F_5 și F_6 . În acest mod avem trei ecuații cu trei necunoscute, pe cari le rezolvăm după regulile cunoscute.

Pentru aflarea lui F_1 , F_2 și F_3 procedăm absolut analog. Pentru control facem verificarea utilizând poligonul forțelor:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_6$$

proiectându-l după o direcțiune oarecare.

3. Câteva considerațiuni de reținut.

a) Când un corp este supus numai la o singură forță, echilibru nu poate exista.

b) Când un corp este supus la două forțe, pentru ca echilibru să existe trebuie ca ele să fie egale, de direcții contrare și să acționeze după aceeași linie de acțiune.

c) În cazul a trei forțe, pentru ca echilibru să existe trebuie ca ele să fie concurente în același punct și situate în același plan.

În adevăr, trebuie să avem $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$, adică poligonul forțelor trebuie să fie închis și aceasta nu poate avea loc decât atunci când acest poligon este plan. Cele trei forțe nu pot fi în două sau trei plane paralele, pentru că momentul lor n'ar mai fi nul, deci ele trebuie să fie neapărat situate în același plan.

În alte condițiuni echilibru între cele trei forțe nu poate exista.

d) Să considerăm cazul a 4 forțe. Pentru ca echilibru să existe trebuie ca poligonul de forțe să fie închis, adică să avem: $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = 0$ și momentul lor să fie nul.

Aceasta nu poate avea loc decât atunci când cele 4 direcțiuni aparțin unei suprafețe riglate.

Aci avem două cazuri particulare, când suprafața riglată se reduce la un punct și atunci cele 4 direcțiuni sunt concurente în acel punct sau la un plan când cele 4 direcțiuni sunt conținute în același plan, fără să fie concurente.

În alte condițiuni, echilibru între 4 forțe nu există.

E) Reazime și Reacțiuni.

La contactul între două corpuri se dezvoltă niște reacțiuni. Aceste reacțiuni depind numai de natura contactului între corpuri, care se poate face în următoarele moduri.

1. Reazime simple.

Două corpuri se pot sprijini unul pe altul în așa fel, că o deplasare în planul tangent celor două corpuri nu este prin nimic împiedicată și o rotire în jurul punctului de contact este de asemenea liberă, în orice direcțiune. Singura deplasare, care nu este posibilă, este numai aceea după direcțiunea normalei $\vec{v}$, fie într'un sens fie în celălalt. Este evident că, într'un asemenea caz, o reacțiune se va desvolta numai după această direcțiune (fig. 34).

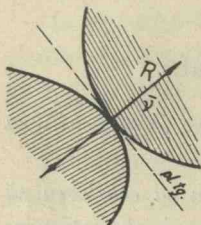


Figura 34

Această reacțiune are prin urmare un punct de aplicație cunoscut și o direcțiune cunoscută.

Ceea ce nu cunoaștem este numai valoarea ei numerică; prin urmare, are un singur element necunoscut. Acest fel de sprijinire sau contact poartă numele de *reazim simplu*. Prin urmare pentru un corp în spațiu este nevoie de 6 astfel de reazime, pentru a-i asigura echilibrul.

Dacă vom întrebuința numai 5 reazime simple, corpul va avea posibilitatea unei mișcări ce depinde de un parametru; dacă vom întrebuința numai 4 reazime simple, corpul va avea un grad de libertate mai mare. Dacă însă am avea 7 reazime grupul (1) de ecuații (cap. I) nu ne dă posibilitatea de a le găsi și în acest caz se zice că reacțiunile sunt static nedeterminate.

Pentru un corp în plan este nevoie numai de trei astfel de reazime simple.

2. Articulații.

Două corpuri se pot sprijini astfel într'un punct, încât o deplasare în nici o direcție nu este posibilă, însă o rotație în jurul punctului de contact, în orice direcțiune, este posibilă. Prin urmare, *în punctul de contact se va desvolta o reacțiune, al cărei punct de aplicație îl cunoaștem, dar nu-i cunoaștem valoarea și direcțiunea*, și nu se va desvolta nici un moment, pentru că rotirea este liberă. Un astfel de contact, rezemare sau sprijinire poartă numele de *articulație*. La un asemenea contact *avem trei necunoscute (valoarea și direcțiunea) ale reacțiunii* (fig. 35).

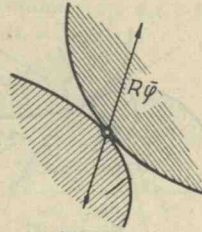


Figura 35

În spațiu ar fi deci suficient două asemenea articulații pentru a asigura echilibrul unui corp. Observăm însă că, dacă luăm momentul tuturor forțelor în raport cu linia articulațiilor, momentul reacțiunilor este nul, pe când al forțelor date în genere nu este nul, așa dar nu vom putea utiliza două articulații, ci o articulație și altfel de reazime, de ex. 3 reazime simple.

În plan, articulația are în sine două necunoscute, deci cu o articulație și un reazim simplu putem asigura echilibrul unui corp.

3. Incastrări.

Când două corpuri se sprijină între ele prin suprafețele lor de contact în un punct, și dacă nici o deplasare și nici o rotație în orice direcțiune nu este posibilă, atunci în acel punct se va desvolta ca reacțiune o *forță*, al cărei punct de aplicație îl cunoaștem (punctul de contact), dar *nu cunoaștem valoarea și direcțiunea ei (3 elemente)*, și un *moment*, a cărui direcțiune și valoare de asemenea nu o cunoaștem (deci alte 3 elemente). În acest mod se vede că o incastrare, prin reacțiunile ce le desvoltă, asigură echilibrul corpului (fig. 36).

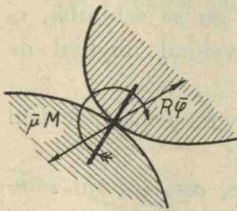


Figura 36

Dacă în acel punct de contact se desvoltă un moment, înseamnă că reacțiunea nu trece prin punctul de contact. Valoarea momentului ne dă posibilitatea de a găsi punctul prin care trece reacțiunea.

Din cele de mai sus se vede că o articulație în spațiu este echivalentă cu trei reazime simple, iar o incastrare cu șase reazime simple.

In plan o articulație este echivalentă cu 2 reazime simple, iar incastrarea cu trei reazime simple sau cu o articulație plus un reazim simplu.

4. Reazime diferite.

In cele de mai sus am avut articulații complete sau incastări complete. Am putea avea însă articulații sau incastări incomplete.

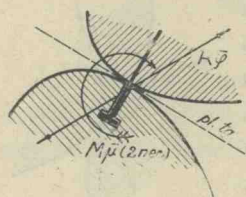


Figura 37

De ex.: o incastrare care permite o rotire după o singură direcție (fig. 37). Asta înseamnă că momentul după aceea direcție este nul. O asemenea legătură are în sine cinci necunoscute. Pentru a-i asigura echilibrul ne mai trebuie un reazim simplu. Alt ex.: putem avea o articulație într'un plan, deplasarea după normala la plan fiind posibilă (fig. 38).

O asemenea legătură are în sine două necunoscute (componentele din plan), deci cu trei asemenea reazime sau legături putem asigura echilibrul unui corp.

Pentru ca să putem găsi reacțiunile, va trebui să alegem astfel de reazime, în cât suma elementelor necunoscute să fie în număr de 6 în spațiu și 3 în plan.

Dacă această sumă este mai mică de 6 în spațiu și 3 în plan, corpul va avea mișcări; iar dacă este mai mare, reacțiunile nu se pot determina cu ajutorul ecuațiilor (1, cap. I), sistemul fiind static nedeterminat.

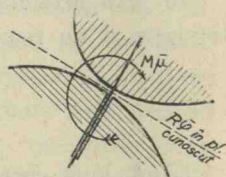


Figura 38

Dacă ținem cont de frecări, nimic esențial nu se schimbă, ci se modifică numai direcția reacțiunilor, intervenind unghiul de frecare.

Incheere. Din acest capitol deducem că vom urma în calcul următoarea normă:

Vom evalua mai întâiu forțele exterioare date, cari le vom compune după indicațiile date, grafic, analitic sau utilizând după cazuri ambele norme, după cum vor rezulta simplificări de calcul.

Vom fixa apoi reazimile, natura și numărul lor suficient pentru asigurarea echilibrului corpului.

După indicațiile date la descompunerea unui sistem de forțe după mai multe direcțiuni, vom găsi reacțiunile în cazul când sunt static determinate.

Odată reacțiunile găsite, am găsit grupul de forțe exterioare care acționează corpul și-i asigură echilibrul.

Numai după aceasta putem trece la studiul echilibrului interior al corpului.

Aplicații.

Aplicația Nr. 1. Să se descompună forța verticală $F = 1000$ kg. după direcțiunile φ_1 , φ_2 și φ_3 (fig. 39). O dreaptă orizontală taie direcțiunile φ_1 , φ_2 , φ și φ_3 în punctele A, B, C, D , așa că $AB = 2$ m, $BC = CD = 1$ m.

Direcțiunea pozitivă AB , pe care o notăm $\bar{a}$, face cu direcțiunile pozitive ale lui φ_1 , φ_2 , φ și φ_3 , socotite de sus în jos, respectiv unghiurile 110° , 100° , 90° și 75° . Avem poligonul forțelor:

$$(1) \quad F\varphi = F_1\varphi_1 + F_2\varphi_2 + F_3\varphi_3$$

Și luând momentele în raport cu punctul A , avem:

$$(2) \quad 3.1000.\bar{a}\varphi = 2F_2\bar{a}\varphi_2 + 4F_3\bar{a}\varphi_3$$

Din ecuația (1), înmulțită vectorial cu

φ_1 , avem:

$$(3) \quad 1000\varphi_1\varphi = F_2\varphi_1\varphi_2 + F_3\varphi_1\varphi_3,$$

și cu:

$$\bar{a}\varphi = \sin(\bar{a}, \varphi) = \sin 90^\circ = 1,00000$$

$$\bar{a}\varphi_3 = \sin(\bar{a}, \varphi_3) = \sin 75^\circ = 0,96593$$

$$\varphi_1\varphi_2 = \sin(\varphi_1, \varphi_2) = \sin 10^\circ = 0,17365$$

$$\bar{a}\varphi_2 = \sin(\bar{a}, \varphi_2) = \sin 100^\circ = 0,98481$$

$$\varphi_1\varphi = \sin(\varphi_1, \varphi) = \sin 20^\circ = 0,34202$$

$$\varphi_1\varphi_3 = \sin(\varphi_1, \varphi_3) = \sin 35^\circ = 0,57358$$

introduse în ecuațiile (2) și (3), obținem prin rezolvare: $F_2 = 870$ kg., $F_3 = 333$ kg. Dacă luăm momentele în raport cu B , găsim o relație între F_1 și F_3 . Procedând la fel găsim $F_1 = -190$ kg.

Pentru control multiplicăm ecuația (1) scalar cu φ și avem:

$$(4) \quad F = F_1\varphi\varphi_1 + F_2\varphi\varphi_2 + F_3\varphi\varphi_3$$

în care:

$$\varphi\varphi_1 = \cos(\varphi, \varphi_1) = \cos 20^\circ = 0,93969$$

$$\varphi\varphi_2 = \cos(\varphi, \varphi_2) = \cos 10^\circ = 0,98481$$

$$\varphi\varphi_3 = \cos(\varphi, \varphi_3) = \cos 15^\circ = 0,96593$$

Introducând aceste valori și valorile lui F_1, F_2 și F_3 în ecuația (4) se obține $F = 1000$ kg. cu o aproximație mai mică de 1 kg.

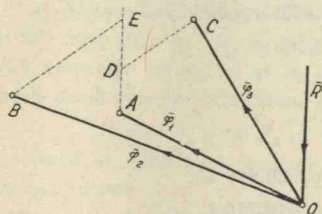


Figura 40

Aplicația Nr. 2. Un punct este fixat de un perete vertical cu ajutorul a trei bare OA , OB și OC (fig. 40). Bara OA de 4 m. lungime este orizontală și normală pe perete. Punctul B este mai sus și la stânga punctului A , la distanțele $AE = 2$ m. și $BE = 3$ m., punctul C este mai sus și la dreapta punctului A , la distanțele $AD = 1$ m.

și $DC = 2$ m. Punctele A, B, C sunt în planul peretelui. În O se aplică o forță verticală de 7 t. Să se găsească eforturile în cele trei bare OA, OB și OC .

a) *Soluția grafică.* Așezăm dela început sistemul de bare în planele de proiecție așa ca OA să fie normal pe planul vertical (fig. 41 a) și notăm direc-

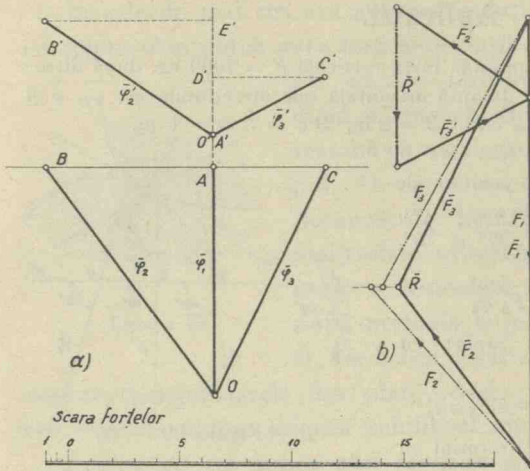


Figura 41

țiile barelor și sensurile lor ca în figură. În planul vertical al forțelor, (fig. 41 b) descompunem forța, $\bar{R}' = 7t$, după direcțiile $\bar{\varphi}_2'$ și $\bar{\varphi}_3'$ și căpătăm $\bar{F}_2'$ și $\bar{F}_3'$. În planul orizontal forța $\bar{R}$ se proiectează într'un punct $\bar{R}$. Cu ajutorul liniilor de ordine și cu proiecțiile verticale deducem, în proiecție orizontală, pe $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$. Ca să aflăm pe $\bar{F}_1$ n'avem decât să închidem poligonul forțelor în planul orizontal și așa găsim pe $\bar{F}_1$ care se proiectează în adevărată mărime în acest plan.

Dând o rotație forțelor $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ le găsim în planul orizontal proiectate în adevărată mărime. Astfel găsim $F_1 = 19,98$ t, $F_2 = 10,88$ t și $F_3 = 13,58$ t.

b) *Soluția analitică.* Vom aplica de trei ori ecuația (7) dela pag. 34. Pentru aceasta ne trebuie volumul paralelipipedelor formate de direcțiile $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$, luate câte trei și pentru lungimi de laturi egale cu 1 (unitatea).

Avem lungimile laturilor OA, OB, OC :

$$OA = 4 \text{ m}; OB = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = 5,385 \text{ m}; OC = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = 4,583 \text{ m}.$$

Iar volumele căutate, ținând seamă și de sensul direcțiilor $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$, arătate în fig. 40, sunt:

$$\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = -(3 \times 1 + 2 \times 2) \frac{4}{6} \times 4 \times 5,385 \times 4,583$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = -4 \times 5 \times \frac{1}{6} \times 1 \times 4,583 \times 5,385$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 = +4 \times 2 \times \frac{1}{6} \times 4 \times 1 \times 4,583$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = +3 \times 4 \times \frac{1}{6} \times 4 \times 1 \times 5,385$$

Deducem:

$$F_1 = F \cdot \bar{\varphi} \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 / \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = + 20,000 \text{ t}$$

$$F_2 = F \cdot \bar{\varphi} \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 / \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 = - 10,770 \text{ t}$$

$$F_3 = F \cdot \bar{\varphi} \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 / \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = - 13,749 \text{ t}$$

Se vede deci că pe figură trebuie schimbat sensul direcțiilor $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$, pentru că le-am căpătat aci cu minus.

Comparând rezultatele obținute pe cale grafică cu cele obținute analitic se constată o deosebire variind între $-1,2\%$ și $+1,0\%$. Aceste diferențe sunt

inevitabile, căci în calculul grafic se fac erori de așezări de puncte, de evaluări de distanțe, de paralelism, etc. *Calculul grafic are însă avantajul că operațiile sunt simple, se pot urmări cu ușurință și nu este așa de supus erorilor grosolane. Calculul analitic, are avantajul că putem împinge aproximațiile până unde voim, însă este supus erorilor grosolane; este suficient să uităm o cifră din noianul de cifre de mai sus, pentru ca rezultatul să fie complet eronat. Mai are des-avantajul că eroarea nu se poate urmări așa de ușor ca în calculul grafic.*

Se întrebuințează după împrejurări unul sau altul.

Aplicația Nr. 3. În aplicația Nr. 2 să presupunem că forța $\overline{R}$ este constantă ca mărime și variabilă ca direcțiune. Se cere să se găsească direcțiunea ei așa fel încât efortul F_1 , în bară OA , să fie maximum.

Din expresiunea lui F_1 , adică:

$$F_1 = R \frac{\overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}}{\overline{\varphi_1} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}}$$

se vede că singurul termen variabil este $\overline{\varphi}$, și pentru ca F_1 să fie maxim trebuie ca $\overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}$ să fie maximum. Aceasta are loc când cei doi vectori $\overline{\varphi}$ și $\overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}$ sunt paraleli, adică atunci când $\overline{\varphi}$ este normal pe planul determinat de $\overline{\varphi_2}$ și $\overline{\varphi_3}$.

Construcția grafică care rezultă este foarte simplă: descompun pe $\overline{R}$ după $\overline{\varphi_1}$ și după o dreaptă normală pe R . Dacă unghiul între φ (normal pe planul determinat de φ_2 și φ_3) și $\overline{\varphi_1}$ este θ atunci $F_1 = R/\cos \theta$.

Analitic, va trebui să găsim volumul paralelipipedului $\overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}$. El este egal cu baza (triunghiul OBC) înmulțit cu $1/3$ din înălțime, adică din 1.

Suprafața triunghiului de bază cu laturile $OB = 5,385$ m., $OC = 4,583$ m., $BC = 5,099$ m. este $10,7788$ m².

Deci:

$$F_1 = 7 \frac{10,7788 \times 1}{3 \times 5,385 \times 4,583} \times \frac{6 \times 4 \times 5,385 \times 4,583}{7 \times 4} = 21,558 \text{ t.}$$

Putem proceda la fel și cu celelalte direcțiuni.

Aplicația Nr. 4. Un trepid, $OABC$, susține în punctul O o forță de 10 tone (fig. 42). Lungimea picioarelor OA , OB , și OC este de 6 m.

Distanțele între picioarele A , B și C sunt: $AB = 6$ m., $BC = 5$ m. și $CA = 7$ m. Să se decompună forța verticală de $R = 10$ t după cele trei direcțiuni OA , OB și OC .

a) *Soluția analitică.* Notăm direcțiile OA , OB și OC respectiv cu $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\varphi_2}$ și $\overline{\varphi_3}$, iar AC , CB și BA respectiv cu $\overline{a_2}$, $\overline{a_1}$ și $\overline{a_3}$. Forța R descompusă după cele trei direcțiuni ne dă:

$$R \overline{\varphi} = F_1 \overline{\varphi_1} + F_2 \overline{\varphi_2} + F_3 \overline{\varphi_3}$$

Dacă se multiplică această ecuație scalar cu $\overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3}$, avem:

$$R \overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3} = F_1 \overline{\varphi_1} \cdot \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3},$$

așa, dar o singură ecuație cu o singură necunoscută.

În mod analog avem:

$$R \overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_3} \cdot \overline{\varphi_1} = F_2 \overline{\varphi_2} \cdot \overline{\varphi_3} \cdot \overline{\varphi_1}$$

$$R \overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi_1} \cdot \overline{\varphi_2} = F_3 \overline{\varphi_3} \cdot \overline{\varphi_1} \cdot \overline{\varphi_2}$$

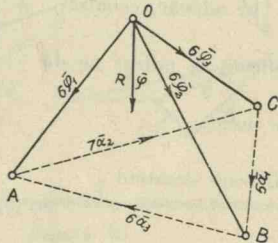


Figura 42

Deci, avem cele trei componente după cele trei direcțiuni.

Rămâne să evaluăm volumele făcute pe unitățile de direcțiuni $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}_1$, etc.

Să evaluăm mai întâiu volumul $\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3$. Nu-l putem evalua direct ci evaluăm patratul lui a cărui valoare este:

$$(\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3)^2 = \begin{vmatrix} \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_3 \end{vmatrix}$$

Ne trebuiesc produsele scalare indicate aci. Din triunghiul AOB avem de exemplu:

$$6 \bar{a}_3 = -6 \bar{\varphi}_2 + 6 \bar{\varphi}_1$$

sau:

$$\bar{a}_3 = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2$$

care ridicată la patrat ne dă:

$$1 = 1 + 1 - 2 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$$

din care deducem:

$$\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = 1/2$$

În mod absolut analog din triunghiurile BOC și COA , deducem:

$$\bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = 47/72 \text{ și } \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 = 23/72$$

Dacă dezvoltăm determinantul, îl evaluăm și extragem rădăcina patrată, găsim:

$$\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = 0,656 \text{ m}^3.$$

Să evaluăm volumul $\bar{\varphi} \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3$.

Vectorul $\bar{\varphi}$ este vertical și dirijat de sus în jos, adică normal pe planul orizontal determinat de triunghiul ABC .

După sensul săgeților din fig. 42 și vectorul $\bar{a}_3 \bar{a}_1$ este normal pe planul orizontal și identic dirijat. Acești doi vectori diferă numai cu partea lor scalară, căci $\bar{\varphi}$ are lungimea egală cu unitatea pe când $\bar{a}_3 \bar{a}_1$ are ca parte scalară sinusul unghiului acestor doi vectori.

Or, din triunghiul ABC putem deduce cosinul unghiului dintre $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_3$.

În adevăr, ecuația:

$$7 \bar{a}_2 = -6 \bar{a}_3 - 5 \bar{a}_1$$

ridică la patrat ne dă

$$49 = 36 + 25 + 60 \bar{a}_1 \bar{a}_2$$

de unde:

$$\bar{a}_1 \bar{a}_3 = -1/5$$

din care scoatem

$$\sin(\bar{a}_1, \bar{a}_3) = 2\sqrt{6}/5 = 1/1,0206$$

Pentru ca vectorul $\bar{a}_3 \bar{a}_1$ să aibă lungimea egală cu unitatea trebuie împărțit cu $\sin(\bar{a}_1, \bar{a}_3)$ și deci avem:

$$\bar{\varphi} = 1,0206 \bar{a}_3 \bar{a}_1$$

Prin urmare:

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = 1,0206 \bar{a}_3 \bar{a}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = 1,0206 \begin{vmatrix} \bar{a}_3 \bar{\varphi}_2 & \bar{a}_3 \bar{\varphi}_3 \\ \bar{a}_1 \bar{\varphi}_2 & \bar{a}_1 \bar{\varphi}_3 \end{vmatrix}$$

Ne trebuiesc produsele scalare indicate de determinant.

Procedând cum s'a arătat, obținem produsele din alăturatul tablou:

	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$
$\bar{a}_1$	13/60	5/12	-5/12
$\bar{a}_3$	1/2	-1/2	-1/3

Cu ajutorul acestor valori, găsim:

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3 = 0,354$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_1 = 0,139$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = 0,323$$

și

$$F_1 = 5,402 \text{ t}, \quad F_2 = 2,118 \text{ t}, \quad F_3 = 4,927 \text{ t}.$$

b) *Soluția grafică.* Vom dispune epura așa ca să avem simplificări de construcție (fig. 43 a). În planul orizontal luăm BC perpendiculară pe linia de pământ și construim cu laturile date triunghiul ABC . În plan punctul O este punctul de intersecție al medianelor. În proiecție verticală O' este la o înălțime așa ca OC să fie egal cu 6 m.

În aceste condiții $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ în proiecție verticală se proiectează după o dreaptă și $\bar{\varphi}_1$ prin altă dreaptă. În planul vertical descompunem sarcina de $R = 10 \text{ t}$ după cele două direcții, având astfel proiecția verticală a lui $\bar{F}_1$. În planul orizontal o deducem numai decât. În acest plan descompunem F_1 după $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ pe cari le ridicăm și în planul vertical, terminând astfel epura. Prin rotații deducem valorile forțelor în adevărată mărime.

S'a obținut:

$$F_1 = 5,52 \text{ t}, \quad F_2 = 2,12 \text{ t}, \quad F_3 = 4,96 \text{ t}$$

Eroarea maximă este de 2,2% pentru că în planul orizontal $\bar{\varphi}_1$ și $\bar{\varphi}_3$ se întâlnesc sub un unghi relativ ascuțit.

Aplicația Nr. 5. O grindă $OABC$, făcută dintr'o singură bucată, este articulată în O (fig. 44), sprijinită în A și B de proptelele AD și BE (articulate

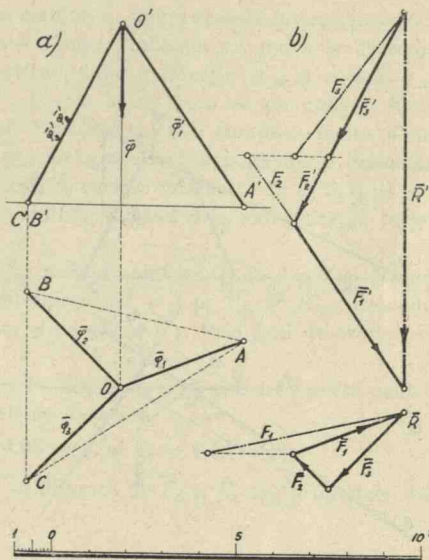


Figura 43

la extremități) și solicitată în C de o forță verticală, $\bar{R} = 3$ tone. Dându-se: $OA = 5$ m, $AB = BC = 1$ m, $AD = 2$ m, $BE = 3$ m, $OD = 4$ m, $OE = 6$ m și $DE = 3$ m, și știind că punctele O , D și E sunt într'un plan orizontal, se cer eforturile în proptele și reacțiunea din O .

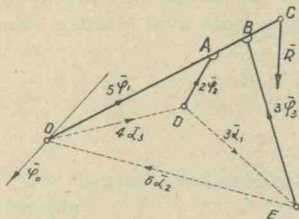


Figura 44

a) *Soluția grafică.* Punem mai întâiu construcția în epură (fig. 45 a). Luând ca plan orizontal planul triunghiului ODE , construiesc acest triunghi. Consider punctul E_1 , care împarte pe OE în același raport în care A împarte pe OB . Construiesc acum triunghiurile OA_1D și DA_2E_1 (cari sunt rabaterile triunghiurilor OAD și DAE_1 respectiv în jurul laturilor OD și DE_1 , pe planul orizontal), cunoscând toate laturile. Observ că punctul A , proiecția orizontală a articulației A , în rabaterile efectuate, s'a mișcat pe drepte A_1a_1 și A_2a_2 , normale respectiv pe OD și DE_1 , în jurul cărora s'a făcut rabaterile și deci A se va găsi la intersecția lor. Pentru controlul construcției, se poate considera și triunghiul OA_1E_1 , rabătat în jurul laturii OE_1 și punctul A va trebui să se găsească pe nor-

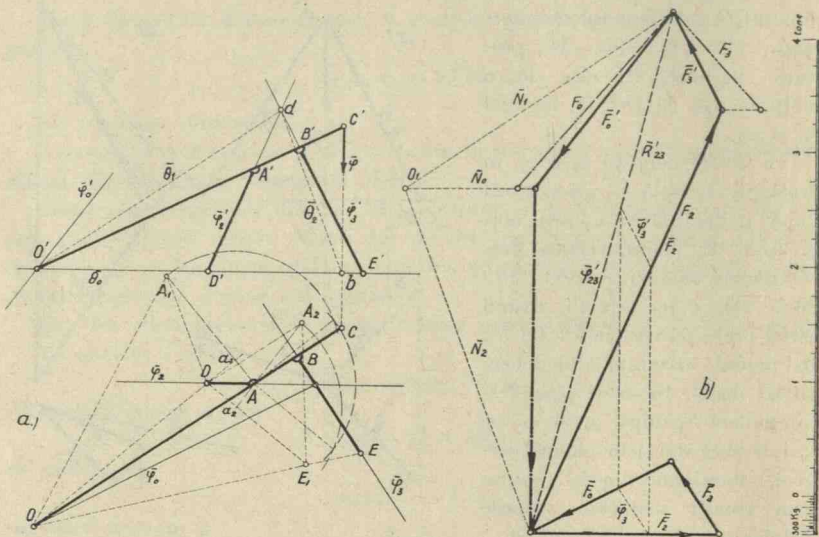


Figura 45

mala prin A_3 la OE_1 (în epură nu este arătat). Odată aflată proiecția orizontală A , găsim pe B și C utilizând relațiile metrice date și avem întreaga construcție în proiecție orizontală. Aleg planul vertical astfel ca propteaua AD să fie o frontală. Cotele punctelor O , D și E fiind nule, proiecțiile lor verticale sunt în O' , D' și E' , pe linia de pământ. Cota punctului A este egală cu distanța de la A la cercul cu raza A_1a_1 , cu centrul în a_1 ,

măsurată paralel cu OD , lucru ce se vede ușor. Ca verificare, în epură am găsit cota aceluiași punct, ca distanța dela A la cercul cu rază $A_2 a_2$, cu centrul în a_2 , măsurată paralel cu DE_1 , și am găsit aceeași cotă, pe care luând-o pe linia de ordine a lui A am găsit pe A' și apoi foarte ușor întreaga proiecție verticală a construcției.

Să trecem acum la chestiunea de statică. Bara $OABC$ este în echilibru sub acțiunea forței verticale R și a reacțiunilor: F_0 aplicată în O după o direcție oarecare φ_0 , F_2 aplicată în A după direcția proptelii AD (φ_2) și F_3 , aplicată în B după direcția proptelii BE (φ_3). Problema generală revine deci la descompunerea unei forțe R în spațiu după direcțiile cunoscute φ_2 și φ_3 și după direcția φ_0 necunoscută trecând prin O . Știm că poligonul forțelor își păstrează proprietățile prin proiecție. În planul orizontal $\bar{R}$ are proiecția nulă și deci proiecțiile $\bar{F}_0$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ trebuind să-și facă echilibru vor fi concurente. Prin urmare, proiecția orizontală $\bar{\varphi}_0$ rezultă unind pe O cu intersecția proptelilor. Să trecem la poligonul forțelor (fig. 45 b). În proiecție orizontală el se reduce la un triunghi cu laturile paralele direcțiilor φ_0 , φ_2 și φ_3 . În proiecție verticală găsim numaidecât direcția rezultantei proiecțiilor $\bar{F}'_2$ și $\bar{F}'_3$, $\bar{\varphi}'_2$, utilizând un triunghi oarecare (asemenea cu cel real) ca poligon de forțe în plan, deoarece direcțiile φ'_2 și φ'_3 se cunosc. Această rezultantă va trece în proiecție verticală prin intersecția d a direcțiilor φ_2 și φ_3 și dacă ea ar întâlni în cadrul epurei direcția φ' a forței $\bar{R}'$, ar rezulta $\bar{\varphi}_0$, unind această intersecție cu O' . În general nu se întâmplă așa, și nici acum. Problema s'a redus la descompunerea unei forțe $\bar{R}'$ (în planul vertical) după o direcție φ'_{23} și o altă φ'_0 , necunoscută, însă care trece prin O' . Facem acest lucru cu un poligon funicular trecând prin O' cu $\bar{\theta}_0$ orizontal. Pentru a nu mai complica figura n'am pus în poligonul de poziție nici pe φ'_{23} , deoarece impun poligonului funicular să treacă și prin d și am astfel și direcția $\bar{\theta}_2$ care se întâlnește cu $\bar{\theta}_0$ în b pe φ' . Trecând la poligonul forțelor găsim polul O_1 , ducând prin extremitățile forței $\bar{R}'$ paralelele $\bar{N}_0$ și $\bar{N}_2$ la $\bar{\theta}_0$ și $\bar{\theta}_2$.

Direcția $\bar{\theta}_1$, rezezând pe φ'_0 și φ'_{23} , rezultă unind pe O' cu d și deci N_1 determină, în poligonul forțelor prin intersecția cu φ'_{23} pe $\bar{F}'_0$ și $\bar{R}'_{23}$. Descompunând pe ultima după φ'_2 și φ'_3 am și pe $\bar{F}'_2$ și $\bar{F}'_3$. Prin linii de ordine rezultă poligonul de forțe în plan.

Prin rotații în jurul unei axe verticale pentru $\bar{F}_0$ și $\bar{F}_3$ și citire directă pentru $\bar{F}_2$ (fiind frontală) am adevăratele valori la scară:

$$F_0 = 2,1 \text{ tone}, \quad F_3 = 4,08 \text{ tone}, \quad \text{și } F_2 = 1,14 \text{ tone}$$

b) *Soluția analitică.* Forța $\bar{R}$ este echilibrată de $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ din proptelele AD și BE și de reacțiunea $\bar{F}_0$ din O .

Vom avea deci:

$$\bar{R} + \bar{F}_0 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

Toate acestea făcându-și echilibru trebuie ca și momentul lor, luat de ex. în raport cu punctul O , să fie nul, deci:

$$a_2 \bar{F}_2 + a_3 \bar{F}_3 + a \bar{R} = 0,$$

distanțele $\bar{a}$ putându-le măsura oricum deci și după dreapta OC .

Însă după figură:

$$\bar{a}_2 = 5 \bar{\varphi}_1, \quad \bar{a}_3 = 6 \bar{\varphi}_1, \quad \bar{a} = 7 \bar{\varphi}_1, \quad \bar{F}_2 = F_2 \bar{\varphi}_2, \quad \bar{F}_3 = F_3 \bar{\varphi}_3, \quad \bar{R} = R \bar{\varphi}$$

și atunci ultima ecuație se transformă în:

$$5 F_2 \overline{\varphi_1 \varphi_2} + 6 F_3 \overline{\varphi_1 \varphi_3} + 7 R \overline{\varphi_1 \varphi} = 0,$$

care multiplicată scalar cu $\overline{\varphi_3}$ și $\overline{\varphi_2}$ ne dă:

$$5 F_2 \overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + 7 R \overline{\varphi_1 \varphi \varphi_3} = 0,$$

$$6 F_3 \overline{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2} + 7 R \overline{\varphi_1 \varphi \varphi_2} = 0,$$

sau:

$$5 F_2 \overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} = 7 R \overline{\varphi \varphi_1 \varphi_3},$$

$$6 F_3 \overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} = 7 R \overline{\varphi \varphi_2 \varphi_1}.$$

Pentru a găsi valorile lui F_2 și F_3 n'avem decât să evaluăm volumele indicate în aceste formule.

În expresia volumelor vor intra produse de forma $\overline{\varphi_1 \varphi_1}$, $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$, etc. a căror valori va trebui să le calculăm din dimensiunile geometrice ale fig. 44.

Mai întâiu se știe că $\overline{\varphi_1 \varphi_1} = \overline{\varphi_2 \varphi_2} = \dots = 1$.

Apoi din triunghiul OAD , de ex., după sensurile din figură, avem:

$$5 \overline{\varphi_1} - 2 \overline{\varphi_2} - 4 \overline{a_3} = 0,$$

care pusă sub forma:

$$5 \overline{\varphi_1} = 2 \overline{\varphi_2} + 4 \overline{a_3}$$

și ridicată la patrat ne dă:

$$25 = 4 + 16 + 16 \overline{\varphi_2 a_3}$$

din care deducem: $\overline{\varphi_2 a_3} = 5/16$

Aceeași ecuație pusă sub forma:

$$5 \overline{\varphi_1} - 2 \overline{\varphi_2} = 4 \overline{a_3}$$

și făcând aceeași operație ne dă $\overline{\varphi_1 \varphi_2} = 13/20$.

Dacă operăm în acest mod asupra triunghiurilor OAD , OBE și ODE precum și asupra patrulaterului $ABED$ a cărui ecuație este:

$$2 \overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_1} - 3 \overline{\varphi_3} - 3 \overline{a_1} = 0,$$

prin multiplicări scalare convenabile sau ridicări la patrat, găsim toate produsele cari ne interesează și cari sunt trecute în tabloul ce urmează:

	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{\varphi_3}$	$\overline{\varphi_2}$
$\overline{\varphi_1}$	37/40	- 7/8	1/4	13/20
$\overline{\varphi_2}$	5/16	-19/48	61/120	
$\overline{\varphi_3}$	7/120	1/4		
$\overline{a_2}$	-43/48			

Să evaluăm deocamdată volumul $\overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}$.

Cu datele de mai sus putem calcula patrutul lui, care este:

$$(\overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3})^2 = \begin{vmatrix} \overline{\varphi_1 \varphi_1} & \overline{\varphi_1 \varphi_2} & \overline{\varphi_1 \varphi_3} \\ \overline{\varphi_2 \varphi_1} & \overline{\varphi_2 \varphi_2} & \overline{\varphi_2 \varphi_3} \\ \overline{\varphi_3 \varphi_1} & \overline{\varphi_3 \varphi_2} & \overline{\varphi_3 \varphi_3} \end{vmatrix} = 0,4218,$$

deci:

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} = 0,650$$

Să evaluăm volumul $\overline{\varphi} \overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_3$.

Vectorul $\overline{\varphi}$ este normal pe planul ODE ; vectorul $\overline{a_2 a_3}$ este de asemenea normal pe același plan și dirijat în sens contrar.

Am putea să înlocuim unul cu altul, însă $\overline{\varphi}$ are lungimea 1 pe când $\overline{a_2 a_3}$ are o altă. Partea scalară a acestui vector este sinusul unghiului vectorilor $\overline{a_2}$ și $\overline{a_3}$ și deci:

$$\sqrt{1 - \overline{a_2 a_3}^2} = \sqrt{455/48} = 1/2,250$$

Așa dar, vectorul a cărui lungime este 1 va fi $-2,250 \overline{a_2 a_3}$ și deci avem:

$$\overline{\varphi} = -2,250 \overline{a_2 a_3}.$$

Volumul cerut va fi:

$$\overline{\varphi} \overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_3 = -2,250 \overline{a_2 a_3} \cdot \overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_3 = -2,250 \begin{vmatrix} \overline{a_2} \overline{\varphi}_1 & \overline{a_2} \overline{\varphi}_3 \\ \overline{a_3} \overline{\varphi}_1 & \overline{a_3} \overline{\varphi}_3 \end{vmatrix} = 0,635$$

Analog găsim:

$$\overline{\varphi} \overline{\varphi}_2 \overline{\varphi}_1 = 0,209$$

Cu aceste valori căpătăm:

$$F_2 = 4,103 \text{ t} \quad , \quad F_3 = 1,125 \text{ t}.$$

Ne mai rămâne să aflăm pe F_0 , căreia nu-i cunoaștem nici valoarea nici direcțiunea. Ecuația:

$$-F_0 \overline{\varphi}_0 = R \overline{\varphi} + F_2 \overline{\varphi}_2 + F_3 \overline{\varphi}_3$$

multiplicată scalar succesiv cu $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$, ne dă componentele lui F_0 după aceste direcțiuni. Chestiunea este clară, e vorba numai de calcule.

Ne propunem aci să-i găsim numai valoarea numerică. Dacă ridicăm la patrat ecuația precedentă avem:

$$F_0^2 = \Sigma F^2 + 2 \Sigma F F_2 \overline{\varphi} \overline{\varphi}_2$$

care ne dă pe F_0 .

Ne trebuiesc produsele de forma $\overline{\varphi} \overline{\varphi}_2$.

Avem:

$$\overline{\varphi} \overline{\varphi}_2 = -2,250 \overline{a_2 a_3} \overline{\varphi}_2 = -0,913$$

$$\overline{\varphi} \overline{\varphi}_3 = -2,250 \overline{a_2 a_3} \overline{\varphi}_3 = -0,731$$

iar din tablou avem:

$$\overline{\varphi}_2 \overline{\varphi}_3 = 61/120 = 0,508$$

Cu aceste valori căpătăm:

$$F_0 = 2,093 \text{ t}.$$

Aproximația cu care am găsit aceste rezultate este aceea care rezultă din faptul că am făcut calculele cu trei zecimale.

Comparând aceste rezultate cu cele grafice se observă deosebiri până la 1,2% ceea ce este admisibil.

III. CURBE FUNICULARE.

A) Ecuația curbei funiculare.

Am văzut cum se construiește poligonul funicular al unui sistem de forțe finite $\bar{F}$ cari ocupă anumite poziții în plan.

Să presupunem că am avea un sistem de forțe infinit mici, $d\bar{F}$, între cari distanțele, măsurate după o curbă oarecare s_0 , ar fi ds_0 (fig. 46).

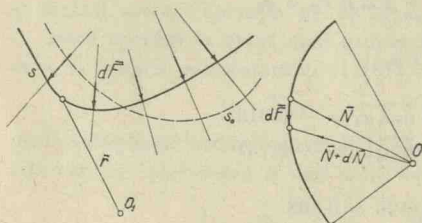


Figura 46

În aceste condiții, dacă se construiește poligonul de forțe, se capătă o curbă a forțelor $d\bar{F}$, iar poligonul funicular se transformă într-o curbă funiculară s .

Din curba forțelor rezultă imediat:

$$(1) \quad d\bar{F} = d\bar{N} = d(N\bar{\theta})$$

Să presupunem că raza vectorie care unește un pol O_1 , luat ca reper, cu un punct oarecare al curbei funiculare s , este $\bar{r}$. Se știe că avem:

$$(2) \quad d\bar{r}/ds = \bar{\theta} \quad , \quad d^2\bar{r}/ds^2 = \bar{r}/r_c$$

Or, fiecărei raze polare $\bar{N}$, care are direcția $\bar{\theta}$, îi corespunde un element $d\bar{s}$ de aceeași direcție în curba funiculară și deci valoarea lui $\bar{\theta}$ din (2) putem s'o ducem în (1) și căpătăm:

$$(3) \quad d\bar{F} = d(N d\bar{r}/ds)$$

sau:

$$(4) \quad d\bar{F} = \bar{\theta} dN + \bar{r} N ds/r_c$$

Ecuatiile (1) și (2) sau numai (3) sau (4), definesc curba funiculară în cazul cel mai general.

Ecuatia (4) dă componentele lui $d\bar{F}$ după tangenta și normala la curba funiculară.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazurile simple cari le întâlnim în practică și anume când avem de-a-face cu sarcini $d\bar{F}$ verticale și când raportăm curba funiculară la un sistem de axe rectangulare, format dintr'o orizontală și o verticală.

Dacă sistemul de axe este ales ca în fig. 47, avem evident:

$$(5) \quad d\bar{F} = \bar{\eta} dF$$

Ducând această valoare în (1), avem:

$$(6) \quad \bar{\eta} dF = d(N\bar{\theta})$$

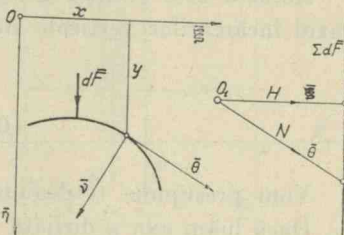


Figura 47

Dacă multiplicăm această ecuație scalar cu $\bar{\xi}$, avem:

$$(7) \quad d(N \cdot \bar{\theta} \bar{\xi}) = 0$$

însă expresia din paranteză nu este decât proiecția lui $\bar{N}$ pe o orizontală, pe care o notăm:

$$(8) \quad N \cdot \bar{\theta} \bar{\xi} = H$$

și care în cazul nostru nu este altceva decât distanța polară, pentru că poligonul de forțe s'a redus la o dreaptă verticală.

Din ecuațiile (7) și (8) rezultă:

$$(9) \quad dH = 0, \text{ deci } H = C^{ta}$$

Așa dar, în cazul forțelor verticale, pentru toate curbele funiculare, proiecția lui $\bar{N}$ pe axa orizontală $\bar{\xi}$ este o constantă.

Dacă multiplicăm ecuația (6) scalar cu $\bar{\eta}$, avem:

$$(10) \quad dF = d(N \cdot \bar{\theta} \bar{\eta})$$

Din modul cum s'au ales axele de coordonate, avem:

$$(11) \quad \overline{\theta\xi} = \cos(\overline{\theta}, \overline{\xi}) = dx/ds$$

$$\overline{\theta\eta} = \cos(\overline{\theta}, \overline{\eta}) = \sin(\overline{\theta}, \overline{\xi}) = dy/ds$$

Dacă se ține seamă de (8) și (11) ecuația (10) se transformă în:

$$(12) \quad dF = H d(dy/dx)$$

Aceasta este ecuația generală a tuturor curbelor funiculare în cazul încărcărilor verticale situate într'un plan.

Observație.

Vom presupune totdeauna forța $d\overline{F}$ dirijată de sus în jos.

Dacă luăm axa $\overline{\eta}$ dirijată de jos în sus și dacă refacem calculul ca mai sus, găsim aceleași ecuații (10) sau (12) însă cu semnul minus înaintea lui dF .

Este bine să se precizeze dela început când obținem plus și când minus.

Mai întâiu se observă că de îndată ce ne-am fixat direcția pozitivă a lui $\overline{N}$, rezultă și sensul pozitiv al arcului $d\overline{s}$ de curbă funiculară.

Să notăm cu θ unghiul pe care direcțiunea $+\overline{\theta}$ îl face cu $+\overline{\xi}$.

Se mai observă că atunci când parcurgem curba funiculară în sensul pozitiv, dacă avem $\overline{\theta r} = \overline{\xi\eta}$, unghiul θ crește și obținem semnul plus înaintea ecuațiilor (10) și (12) și minus când $\overline{\theta r} = -\overline{\xi\eta}$.

Așa dar, vom avea:

$$\pm dF = d(N \cdot \overline{\theta\eta}) = H d(dy/dx)$$

după cum avem:

$$\overline{\theta r} = \pm \overline{\xi\eta}$$

Cu această observație, ecuațiile (10) și (12) sunt generale.

B) Curba funiculară a unei suprafețe de încărcări verticale.

1. Generalități.

Vom lua cazul foarte simplu când suprafața de încărcări reprezintă niște sarcini verticale, cari se distribuiesc oarecum după o dreaptă orizontală Ox (fig. 48).

Dacă valoarea încărcării într'un punct oarecare este $p \text{ kg/m}$, atunci avem $dF = p \, dx$.

Introducând această valoare în ecuația (12) avem:

$$p \, dx = H \, d(dy/dx)$$

sau

$$(13) \quad H \, d^2y/dx^2 = p$$

care este ecuația diferențială a curbei funiculare.

Să integrăm această ecuație într'un interval oarecare $O - x$, O fiind luat ca origine.

Vom avea:

$$(14) \quad H(dy/dx - \operatorname{tg} \theta_0) = F$$

în care $\operatorname{tg} \theta_0$ este valoarea lui dy/dx în origine, iar

$$(15) \quad F = \int_0^x p \, dx$$

adică suma forțelor între O și x .

Ecuația (14) ne arată că diferența tangentelor, între două puncte oarecari, este egală cu F/H .

Dacă integrăm și ecuația (14), avem:

$$H(y - y_0 - x \operatorname{tg} \theta_0) = \int_0^x F \, dx$$

Partea doua integrată prin părți și ținând seamă de (15), ne dă:

$$\int_0^x F \, dx = \left[x F \right]_0^x - \int_0^x x \, dF = x F - \int_0^x x p \, dx$$

pentru că în origine atât x cât și F sunt nule.

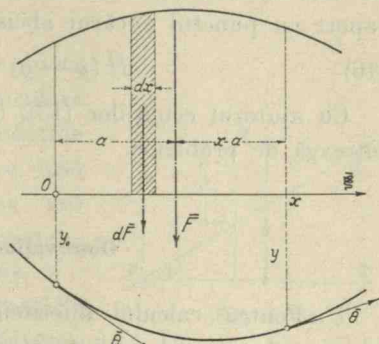


Figura 48.

Însă $\int_0^x x p \, dx$ este momentul forțelor $p \, dx$ în raport cu originea.

Dacă rezultanta lor, F , este la distanța a de origine, atunci

$$\int_0^x x p \, dx = aF$$

și deci

$$\int_0^x F \, dx = (x - a) F = M$$

nu este altceva decât momentul forțelor din intervalul $0 - x$ în raport cu punctul a cărui abscisă este x , și avem deci:

$$(16) \quad H(y - y_0 - x \operatorname{tg} \theta_0) = M$$

Cu ajutorul ecuațiilor (13), (14) și (16) putem rezolva o serie întreagă de probleme.

Observațiuni importante.

1°. Pentru calculul diferitelor elemente ale curbei funiculare, adesea este comod a lua ca variabilă cantitatea φ definită de relația:

$$(17) \quad sh \varphi = \operatorname{tg} \theta = dy/dx$$

care ne dă:

$$(17) \quad dy = sh \varphi \cdot dx$$

În funcțiune de φ putem exprima și celelalte elemente ale curbei funiculare.

De ex. dacă ținem seamă că:

$$ch^2 \varphi - sh^2 \varphi = 1$$

$$\text{deci} \quad 1/\cos \theta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = ch \varphi$$

$$(18) \quad \cos \theta \cdot ch \varphi = 1$$

iar expresia lungimii arcului este:

$$(19) \quad ds = dx/\cos \theta = ch \varphi \cdot dx$$

ecuațiile (12), (14) și (16) se transformă în:

$$(20) \quad H ch \varphi \cdot d\varphi = dF$$

$$(21) \quad H (sh \varphi - sh \varphi_0) = F$$

$$(22) \quad H (y - y_0 - x sh \varphi_0) = M$$

2°. De asemenea adesea este comod a raporta curba funiculară la un sistem de axe oblice, format precum urmează: axa $\bar{\eta}$ rămâne verticală iar axa $\bar{\xi}_1$ face cu orizontala $\bar{\xi}$, unghiul β .

Abscisele x se măsoară după axa $\bar{\xi}$ și ordonatele y , tot după $\bar{\eta}$, însă dela dreapta $\bar{\xi}_1$.

După fig. 49 avem:

$$y = y_1 + x \operatorname{tg} \beta$$

care derivată în raport cu x și notând $dy_1/dx = sh a$, ne dă:

$$(23) \quad sh \varphi = \operatorname{tg} \beta + sh a$$

și prin diferențierea acestuia:

$$(24) \quad ch \varphi d\varphi = cha da$$

Ecuția diferențială a curbei funiculare păstrând forma neschimbată și ecuațiile (20), (21), (22) vor rămâne identice, însă unghiurile corespunzând lui a se vor măsura în raport cu axa $\bar{\xi}_1$ iar ordonatele, dela această dreaptă luată ca reper.

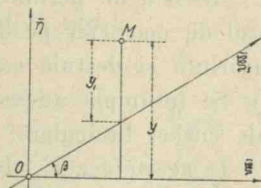


Figura 49

3°. Prin integrarea ecuației diferențiale (13), care are două constante arbitrare, $\operatorname{tg} \theta_0$ și H , se mai introduce o constantă arbitrară, y_0 . Așa dar, avem în total trei constante arbitrare și deci putem impune curbei funiculare trei condiții, ca de ex. să treacă prin trei puncte date.

4°. Ecuția (13) ne arată că poligonul funicular ne dă posibilitatea să integrăm grafic, ecuații diferențiale de această formă.

5°. Grafic nu putem obține o curbă funiculară pentru că nu putem face diviziunile dx înfinit mici.

Este o imposibilitate materială.

Practic se ia diviziuni finite Δx , cari multiplicare cu p , ne dau niște forțe concentrate, ΔF , finite și aplicate în centrele de greutate ale suprafețelor de încărcări respective. Prin urmare, suprafața continuă de încărcări o înlocuim cu o serie de forțe concentrate.

6°. Din ecuația (14) se vede că tangenta într'un punct oarecare al curbei funiculare, este dată de suma forțelor cuprinse între origină și punctul considerat. Ori suma forțelor concentrate ΔF este aceeași cu suma forțelor continui, $p dx$, numai în dreptul punctelor de diviziune. Așa dar, tangenta la curba funiculară coincide cu latura poligonului funicular, făcut cu forțele concentrate, ΔF numai în dreptul punctelor de diviziune.

Mai mult. Ecuația (16) ne arată că momentul forțelor concentrate, ΔF , este același cu momentul forțelor continui, $p dx$, numai în dreptul punctelor de diviziune. Deci și *ordonatele curbei funiculare în dreptul punctelor de diviziune sunt aceleași cu ordonatele poligonului funicular*. Prin urmare atât tangenta cât și ordonata curbei funiculare coincid cu latura și cu ordonata respectivă a poligonului funicular în punctele de diviziune.

Acest fapt își are importanța sa, căci poligonul funicular ne dă ordonatele exacte și tangentele exacte ale curbei funiculare, în dreptul punctelor de diviziune.

Prin urmare, curba funiculară este o curbă înscrisă în poligonul funicular, punctele de contact fiind bine stabilite.

Aceasta ne permite, pe de o parte să luăm diviziunile Δx destul de mari, iar pe de altă parte să trasăm curba funiculară cu ușurință și destulă exactitate.

Se întâmplă adesea că ne interesează numai anumite puncte ale curbei funiculare.

În aceste cazuri, observația aceasta ne dă posibilitatea să facem mari simplificări, atât în calculul grafic cât și în cel analitic.

2. Parabola.

În cazul când încărcătura p este uniform distribuită, deci constantă pe unitatea de lungime măsurată după $\bar{x}$, atunci curba funiculară este o parabolă.

În acest caz $dF = p dx$ și ecuația (20) se transformă în:

$$(25) \quad H \operatorname{ch} \varphi d\varphi = p dx.$$

Dacă notăm:

$$(26) \quad H/p = c$$

atunci ecuațiile (25), (17) și (19) se transformă în:

$$(27) \quad dx = c \operatorname{ch} \varphi d\varphi$$

$$(28) \quad dy = c \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi$$

$$(29) \quad ds = c \operatorname{ch}^2 \varphi d\varphi$$

cari integrate nedefinit, ne dau:

$$(30) \quad x = c \operatorname{sh} \varphi + C_1$$

$$(31) \quad y = \frac{1}{2} c \operatorname{sh}^2 \varphi + C_2$$

$$(32) \quad s = \frac{1}{2} c \left(\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi \right) + C_3$$

Dacă raportăm parabola la axele $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}$, ținând cont de relația (24) avem:

$$(33) \quad dx = c \, cha \, da$$

$$(34) \quad dy_1 = c \, sha \, cha \, da$$

$$(35) \quad ds = c \, ch\varphi \, cha \, da$$

Să presupunem că parabola trece prin punctele A și B între cari distanța este l_1 , diferența de nivel h , iar distanța orizontală între ele l . Lungimea parabolei este s . Ordonata maximă măsurată dela axa $\bar{\xi}$, o notăm cu v , iar dela axa $\bar{\xi}_1$ cu v_1 , originea fiind în A (fig. 50).

Dacă integrăm ecuațiile (33) și (34) în intervalul AB , avem:

$$l = c (sha_1 - sha_0)$$

$$0 = \frac{1}{2} c (sh^2 a_1 - sh^2 a_0) = \frac{1}{2} l (sha_1 + sha_0)$$

în care a_0 și a_1 sunt valorile lui a în A și B . Din ultima relație deducem că a_0 și a_1 sunt egale și de sens contrar. Notăm cu a_0 valoarea lor comună. Dacă în origine are valoarea $-a_0$, în B va avea valoarea $+a_0$, și în acest caz prima relație se reduce la:

$$(36) \quad l = 2 c sha_0$$

Ordonata maximă v_1 , va fi acolo unde tangenta la parabolă este paralelă cu AB . Integrând ecuațiile (33) și (34) între A și acolo unde tangenta este 0, avem:

$$x = c (0 + sh a_0) = c sh a_0 = l/2$$

$$(37) \quad v_1 = -\frac{1}{2} c sh^2 a_0 = -\frac{1}{4} l sh a_0 = -l^2/8c$$

Ordonata maximă v va fi acolo unde tangenta la parabolă este orizontală.

Ținând seama de semnul lui a_0 în origine, avem:

$$(38) \quad sh \varphi_0 = tg \beta - sha_0$$

$$sh \varphi_1 = tg \beta + sha_0$$

Abscisa și ordonata punctului unde v este maxim sunt:

$$(39) \quad x = -c sh \varphi_0$$

$$v = -\frac{1}{2} c sh^2 \varphi_0$$

cari ținând seama de (38), ne dau:

$$(40) \quad l sha_0 = h - 2v + 2 \sqrt{v(v-h)}$$

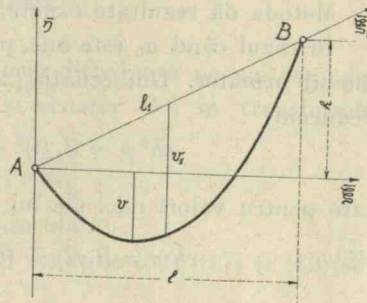


Figura 50

Să exprimăm lungimea arcului s în funcție de $sh a_0$.

Dacă scriem lungimea arcului s între A și B , adică între φ_0 și φ_1 avem din (32):

$$(41) \quad s = \frac{1}{2} c [\varphi_1 - \varphi_0 + \frac{1}{2} (sh 2 \varphi_1 - sh 2 \varphi_0)]$$

Dacă se ține seama de (36) și (38) și se formează și notează expresia:

$$(42) \quad (s - l)/l = \varepsilon$$

se obține:

$$(43) \quad \varphi_1 - \varphi_0 + \frac{1}{2} (sh 2 \varphi_1 - sh 2 \varphi_0) - 4 (1 + \varepsilon) sha_0 = 0$$

o ecuație transcendentă în a_0 , care se rezolvă prin încercări, corecțiunile făcându-se cu formula:

$$(44) \quad \Delta sha_0 = \Delta/4 [1 + \varepsilon - \frac{1}{2} (ch \varphi_0 + ch \varphi_1)]$$

Metoda dă rezultate exacte, însă necesită calcule multe.

În cazul când a_0 este mic, putem face un calcul aproximativ în modul următor. Din ecuația (23), ținând seamă că avem $tg \beta = h/l$, deducem:

$$ch^2 \varphi = (l_1/l)^2 + sh^2 a + 2 h sha/l$$

care pentru valori mici ale lui a , ne dă:

$$(45) \quad ch \varphi = (l_1/l) + (l sh^2 a + 2 h sha)/2 l_1$$

Introducând această valoare în (35) și integrând între A și B adică între $-a_0$ și $+a_0$ și dacă notăm:

$$(46) \quad (s - l_1) l_1/l^2 = \varepsilon_1$$

obținem:

$$(47) \quad sh^2 a_0 = 6 \varepsilon_1$$

Această formulă, pentru valori apreciabile ale lui sha_0 , ne dă aproximații prea mari.

*) Ecuația (43) este de forma $(a) f(sha_0) = 0$. Luând o valoare apropiată, înseamnă că avem: $(b) sha'_0 = sha_0 - \Delta sha_0$ și prin înlocuire $f(sha'_0) = f(sha_0 - \Delta sha_0) = \Delta \neq 0$, care prin scădere membru cu membru din (a) și împărțire cu Δsha_0 conduce la:

$$[f(sha_0) - f(sha_0 - \Delta sha_0)] / \Delta sha_0 = -\Delta / \Delta sha_0$$

și fiindcă suntem în vecinătatea soluției avem valoarea corecțiunii ce rezultă din (b) : $\Delta sha_0 = -\Delta / f'(sha_0)$.

Avem și o formulă intermediară între (43) și (47) și anume:

$$(48) \quad a_0 + sha_0 [cha_0 - 2(1 + \varepsilon_1)] = 0$$

care este exactă pentru cazul, $h = 0$. Și aceasta se rezolvă prin încercări corecțiunile făcându-se cu formula:

$$(49) \quad \Delta sha_0 = \Delta/2 (1 + \varepsilon_1 - cha_0)$$

Gradul de aproximație al formulelor (47) și (48) îl apreciem comparând rezultatele cu cele date de formula (43) (vezi aplicația Nr. 6).

Cum se vede, cu oricare din ecuațiile (43), (47) sau (48) găsim valoarea parametrului a_0 care introdusă în ec. (36) ne dă valoarea constantei c și din ec. (26) avem tensiunea orizontală $H = p.c$, etc.

3. Lănțișorul.

a) Când încărcătura p este uniform distribuită pe unitatea de lungime de arc, atunci $dF = p ds$, și ecuația (20) se transformă în:

$$(50) \quad H ch \varphi d\varphi = p ds,$$

care este ecuația diferențiată a lănțișorului.

Dacă se ține seama de (26) atunci ecuațiile (50), (17) și (19) se transformă în:

$$(51) \quad dx = c d\varphi$$

$$(52) \quad dy = c sh \varphi d\varphi$$

$$(53) \quad ds = c ch \varphi d\varphi$$

cari integrate nedefinit, ne dau:

$$(54) \quad x = c \varphi + C_1$$

$$(55) \quad y = c ch \varphi + C_2$$

$$(56) \quad s = c sh \varphi + C_3$$

Dacă lănțișorul trece prin punctele A și B cărora corespund φ_0 și φ_1 , atunci avem:

$$(57) \quad l = c (\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$(58) \quad h = c (ch \varphi_1 - ch \varphi_0)$$

$$(59) \quad s = c (sh \varphi_1 - sh \varphi_0)$$

În loc de variabila φ luăm alta, α , așa fel ca:

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi_0 + \alpha \\ \varphi_0 &= \psi_0 - \alpha_0 \\ \varphi_1 &= \psi_0 + \alpha_0 \end{aligned} \quad (60)$$

În aceste condiții ecuațiile precedente în intervalul AB , adică între $-\alpha_0$ și $+\alpha_0$, iau forma:

$$(61) \quad l = 2c \alpha_0$$

$$(62) \quad h = 2c \operatorname{sh} \psi_0 \operatorname{sha}_0$$

$$(63) \quad s = 2c \operatorname{ch} \psi_0 \operatorname{sha}_0$$

Dacă se ridică la patrat ultimile două ecuații, se scad una din alta, se ține cont de (61) și se notează:

$$(64) \quad \sqrt{s^2 - h^2}/l = 1 + \varepsilon_1$$

căpătăm:

$$(65) \quad \operatorname{sha}_0 - (1 + \varepsilon_1) \alpha_0 = 0$$

ecuație transcendentă care se rezolvă prin încercări. Odată ce am găsit o valoare aproximativă a lui α_0 corecțiunea o facem cu ajutorul formulei:

$$(66) \quad \Delta \alpha_0 = \Delta / (1 + \varepsilon_1 - \operatorname{cha}_0)$$

Pentru valori mici ale lui α_0 , avem aproximativ:

$$(67) \quad \alpha_0^2 = 6 \varepsilon_1$$

Dacă se împarte (62) prin (61) sau (63), se obține:

$$(68) \quad \operatorname{sh} \psi_0 = \operatorname{tg} \beta / (1 + \varepsilon_1) \text{ sau } \operatorname{th} \psi_0 = h/s$$

Cu ajutorul formulelor (60) — (68) putem găsi toate elementele curbei funiculare.

b) Lănțisor trecând prin trei puncte, A, B și C.

Vom aplica ecuațiile (61) — (63) punctelor B și C . Dacă punctului C , de coordonate x , y , îi corespund elementele ψ și α , atunci, din primele ecuații (61), rezultă:

$$(69) \quad \alpha_0/l = \alpha/x = k = 1/2c$$

de unde:

$$(69) \quad \alpha_0 = lk, \quad \alpha = xk$$

conform ecuației (60), în origine avem:

$$(60) \quad \varphi_0 = \psi_0 - \alpha_0 = \psi - \alpha$$

Dacă pentru ambele puncte (B și C) împărțim (62) prin (61) și ținem seama de ecuațiile (69) și (60), avem:

$$(70) \quad \begin{aligned} h k / sh lk &= sh (\varphi_0 + lk) \\ yk / sh xk &= sh (\varphi_0 + xk) \end{aligned}$$

care ne dă ecuația în k :

$$(71) \quad ar sh (hk / sh lk) - ar sh (yk / sh xk) - (l - x) k = 0$$

Obținem o valoare aproximativă a lui k dezvoltând (71) în serie și păstrând termenii la puterea întâia:

$$(72) \quad h/l - y/x = (l - x) k$$

Dacă voim valori mai exacte, rezolvăm prin încercări ec. (71) corectând pe k cu ajutorul formulei aproximative:

$$(73) \quad \Delta k = \Delta / [(h l + xy) k/6 + l - x]$$

Din cel mult două încercări ajungem la valoarea aproape exactă a lui k .

c) Lănțisor trecând prin punctele A și B și cu tensiunea N în B cunoscută.

Avem $N = H ch (\psi_0 + \alpha_0)$. Dacă notăm cantitatea cunoscută $N/p = c_1$, atunci:

$$c = c_1 / ch (\psi_0 + \alpha_0).$$

Din ecuațiile (61) și (62), deducem

$$\begin{aligned} l ch (\psi_0 + \alpha_0) &= 2 c_1 \alpha_0 \\ h ch (\psi_0 + \alpha_0) &= 2 c_1 sh \psi_0 sh \alpha_0 \end{aligned}$$

Eliminând pe ψ_0 între aceste ecuații obținem ecuația:

$$(74) \quad l^2 / \alpha_0^2 + h^2 / sh^2 \alpha_0 - (2 c_1 - h)^2 / ch^2 \alpha_0 = 0$$

în α_0 , care se rezolvă prin încercări.

O valoare aproximativă a lui α_0 , pentru valori mici ale lui, este:

$$(75) \quad \alpha_0^2 = (l^2 + h^2) / (2 c_1 - h)^2$$

Corecțiunea lui α_0 se face cu ajutorul formulei

$$(76) \quad \Delta \alpha_0 = \Delta / 2 [l^2 / \alpha_0^3 + h^2 ch \alpha_0 / sh^3 \alpha_0 - (2 c_1 - h)^2 sh \alpha_0 / ch^3 \alpha_0]$$

Calculul urmează după norma indicată mai sus.

Având pe α_0 , din formula (68) deducem $sh \psi_0$, H , etc.

4. Alte curbe funiculare.

a) Să se găsească curba funiculară pentru o încărcătură de formă:

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

aşa fel ca în originea A , să avem: $x = 0$, $y = 0$, $\operatorname{tg} \theta_0 = 0$, iar în punctul B , $x = l$, $y = h$.

Avem

$$(77) \quad H d^2 y / dx^2 = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

care în condițiile problemei, ne dă:

$$(78) \quad H dy / dx = p_0 x + p_1 x^2 / 2 + p_2 x^3 / 3 + \dots$$

$$(79) \quad H y = p_0 x^2 / 2 + p_1 x^3 / 6 + p_2 x^4 / 12 + \dots$$

Pe H îl determinăm din condiția:

$$(80) \quad H h = p_0 l^2 / 2 + p_1 l^3 / 6 + p_2 l^4 / 12 + \dots$$

Avem deci toate elementele pentru determinarea curbei funiculare.

b) Să se găsească curba funiculară ale cărei ordonate, măsurate dela o linie orizontală, multiplicare ca un factor oarecare, să reprezinte chiar încărcătura curbei funiculare.

Vom avea deci

$$(81) \quad H d^2 y / dx^2 = \gamma y$$

Dacă punem

$$(82) \quad \gamma / H = \alpha^2$$

căpătăm ecuația

$$(83) \quad d^2 y / dx^2 - \alpha^2 y = 0$$

a cărei integrală este:

$$(84) \quad y = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x$$

în care A și B sunt două constante de integrare. Dacă ne impunem condiția ca în origine să avem: $y = y_0$ și $dy/dx = \operatorname{tg} \theta_0$ găsim:

$$A = y_0 \text{ și } B = \operatorname{tg} \theta_0 / \alpha$$

Și dacă în B avem $x = l$ și $y = h$ rezultă:

$$(85) \quad h = y_0 \operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{sh} \alpha l / \alpha$$

ecuație în α , care se rezolvă prin încercări. Când $\operatorname{tg} \theta_0 = 0$ avem:

$$(86) \quad y = y_0 \operatorname{ch} \alpha x \text{ și } h = y_0 \operatorname{ch} \alpha l$$

C) Aplicații.

Aplicația Nr. 6. Se dă un cablu (fig. 51) suspendat între punctele A și B situate la distanță orizontală și verticală respectiv de $l = 10$ m și $h = 1$ m și care trece prin punctul C , situat la mijlocul deschiderii l și cu $0,5$ m sub orizontala lui A . El este încărcat cu o sarcină verticală uniform distribuită $p = 1t/m$ de proiecție orizontală și cu trei forțe concentrate: $F_1 = 3t$, $F_2 = 5t$ și $F_3 = 7t$ situate respectiv la 2, 3 și 7 m de punctul A . Se cere: a) Tensiunea orizontală H și tensiunile în A și B . b) Ordonatele cablului în dreptul forțelor concentrate. c) Coordonatele punctului cel mai de jos al cablului. d) Punctul cel mai depărtat al cablului de dreapta AB .

a) Luăm originea axelor de coordonate în A , cu axa $\bar{\eta}$ verticală de jos în sus și $\bar{\xi}$ orizontală. Avem astfel $\theta' = \bar{\xi} \bar{\eta}$ și vom lua semnul plus înaintea

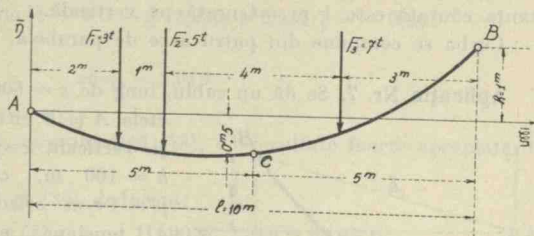


Figura 51

forței elementare dF . Ecuația (22) în punctele B și C , cu:

$$M_B = \frac{1}{2} 10 \cdot 1 \cdot 10 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 130 \text{ tm};$$

$$M_C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 31,5 \text{ tm}.$$

ne dă:

$$H(1,00 - 0 - 10 \operatorname{sh} \varphi_0) = 130 \text{ și } H(-0,50 - 0 - 5 \operatorname{sh} \varphi_0) = 31,5$$

din cari:

$$\operatorname{sh} \varphi_0 = -193/670 = -0,288 \text{ și } H = 33,5 \text{ t}.$$

Avem apoi:

$$\operatorname{ch} \varphi_0 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \varphi_0} = \sqrt{1 + 0,288^2} = 1,041$$

Și din ec. (21) aplicată punctului B , cu $F = 1 \cdot 10 + 3 + 5 + 7 = 25 \text{ t}$

$$\operatorname{sh} \varphi_1 = \operatorname{sh} \varphi_0 + F/H = -0,288 + 25/33,5 = 0,458$$

și

$$\operatorname{ch} \varphi_1 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \varphi_1} = \sqrt{1 + 0,458^2} \approx 1,100$$

și cu acestea:

$$N_A = H \operatorname{ch} \varphi_0 = 33,5 \cdot 1,041 = 34,87 \text{ t}; \quad N_B = 36,85 \text{ t}.$$

Componentele verticale le găsim ușor cu:

$$V_A = H \operatorname{tg} \theta_0 = H \operatorname{sh} \varphi_0 = 33,5 \cdot 0,288 = 9,65 \text{ t} \text{ și } V_B = 15,35 \text{ t}.$$

sau, pur și simplu, luând momentele în raport cu A și B .

b) Ecuația (22) ne dă ordonatele în dreptul celor trei forțe. Cu: $M_1 = \frac{1}{2} 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \text{ tm}$, $M_2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 7,5 \text{ tm}$ și $M_3 = 48,5 \text{ tm}$ avem:

$$y_1 = M_1/H + x_1 \operatorname{sh} \varphi_0 = 2/33,5 - 2 \cdot 0,288 = -0,516 \text{ m}.$$

și analog:

$$y_2 = -0,640 \text{ m}; \quad y_3 = -0,240 \text{ m}.$$

c) Punctul cel mai de jos al cablului este caracterizat prin $dy/dx = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{sh} \varphi = 0$ și ecuația (21) ne dă:

$$F = H (0 - \operatorname{sh} \varphi_0) = 33,5 \cdot 0,288 \simeq 9,65 \text{ t}$$

Aceasta are loc în dreptul forței F_2 , deoarece până la ea avem $F' = 3,1 + 3 = 6$ tone și după ea $F'' = 6 + 5 = 11$ tone.

d) Punctul cel mai depărtat al cablului de dreapta AB este caracterizat prin $dy/dx = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{sh} \varphi = h/l$ și ec. (21) ne dă:

$$F = H (h/l - \operatorname{sh} \varphi_0) = 33,5 (1/10 + 0,288) = 13 \text{ t}$$

și punctul, în dreptul căruia avem aceasta, este din întâmplare chiar C . Distanța căutată este 1 m măsurată pe verticală.

Curba se compune din patru arce de parabolă.

Aplicația Nr. 7. Se dă un cablu, lung de $s = 600$ m, suspendat între punctele A și B , situate la distanță orizontală și verticală respectiv de: $l = 400$ m și $h = 100$ m, care suportă o încărcare $p = 1 \text{ t/m}$ orizontal (fig. 52). Se cere: a) tensiunea orizontală H ; b) săgeata maximă v și c) tensiunea maximă N .

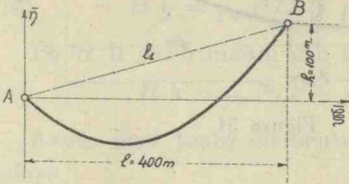


Figura 52

Calculăm mai întâiu parametrul a_0 . Vom utiliza pe rând cele trei formule (47), (48) și (43) în ordinea aproximațiilor ce

ni le dau.

1) Prima formulă cu

$$l_1 = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{400^2 + 100^2} = 412,311 \text{ m.}$$

și

$$\varepsilon_1 = (s - l_1) l_1 / l^2 = (600 - 412,311) 412,311 / 400^2 = 0,484$$

ne dă:

$$\operatorname{sh} a_0 = \sqrt{6 \varepsilon_1} = \sqrt{6 \cdot 0,484} = 1,7$$

2) Această valoare aproximativă o introducem în a doua formulă aproximativă (48). Pentru că e vorba de un calcul aproximativ ne mulțumim cu valori cu câte două cifre zecimale și cu calculul cu rigla. Avem:

$$\operatorname{sh} a_0 = 1,70; a_0 = 1,30, \operatorname{ch} a_0 = 1,97$$

$$\Delta = 1,30 + 1,70 [1,97 - 2 (1 + 0,484)] = -0,40$$

$$\Delta \operatorname{sh} a_0 = -0,40 / 2 (1 + 0,484 - 1,97) = 0,41$$

$$\text{Așa dar } \operatorname{sh} a_0 = 1,70 + 0,41 = 2,11$$

Pentru că este vorba de calcul aproximativ pentru $\operatorname{sh} a_0$ vom lua valoarea din tabele care se apropie cel mai mult de 2,11. Așa avem valorile

$$\operatorname{sh} a_0 = 2,106; a_0 = 1,490; \operatorname{ch} a_0 = 2,331$$

pentru cari avem:

$$\Delta = 1,490 + 2,106 [2,331 - 2,968] = 0,148$$

$$\Delta \operatorname{sh} a_0 = 0,148 / 2 [1,484 - 2,331] = -0,088$$

care ne dă $\operatorname{sh} a_0 = 2,106 - 0,088 = 2,018$.

Această valoare sau una apropiată cum ar fi de exemplu $sh a_0 = 2,02$, ca să avem calcule numerice mai ușoare, o introducem în formula (43). Ținând cont de (38) avem:

$$sh \varphi_0 = 100/400 - 2,02 = -1,770; ch \varphi_0 = 2,033,$$

$$sh 2\varphi_0 = -7,196; \varphi_0 = -1,336$$

$$sh \varphi_1 = 100/400 + 2,02 = 2,270; ch \varphi_1 = 2,481$$

$$sh 2\varphi_1 = 11,262; \varphi_1 = 1,558$$

și cu $\varepsilon = (600 - 400)/400 = 0,5$, avem:

$$\Delta = 1,336 + 1,558 + \frac{1}{2} (7,196 + 11,262) - 4 (1 + 0,5) \cdot 2,02 = 0,003$$

$$\Delta sh a_0 = 0,003/4 [1 + 0,5 - \frac{1}{2} (2,033 + 2,481)] = -0,001$$

Obținem deci:

$$sh a_0 = 2,019$$

Ne oprim la această valoare.

Se observă că formula aproximativă (48), dă rezultate foarte apropiate de cea exactă, (43).

a) Din formulele (26) și (36) deducem:

$$H = p c = p l/2 sha_0 = 1.400/2 \cdot 2,019 \approx 99,05 \text{ t}$$

b) Din ecuația (39) și (26) cu:

$$sh \varphi_0 = 100/400 - 2,019 = -1,769$$

rezultă:

$$v = -l sh^2 \varphi_0 / 4 sha_0 = -400 \cdot 1,769^2 / 4 \cdot 2,019 = -155 \text{ m}$$

c) Cu relațiile (38) avem:

$$sh \varphi_1 = 100/400 + 2,019 = 2,269 \text{ și } ch \varphi_1 = 2,4780$$

și

$$N_B = H ch \varphi_1 = 99,05 \cdot 2,4780 = 245,6 \text{ t}$$

Aplicația Nr. 8. Se dă un cablu, lung de $s = 370 \text{ m}$, suspendat între A și B (fig. 53), situate la distanțele $l = 350 \text{ m}$ și $h = 50 \text{ m}$, măsurate respectiv orizontal și vertical și încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe unitatea de lungime a cablului $p = 2 \text{ kg/m}$. Se cere: a) Tensiunile H , N_A și N_B , b) Coordonatele vârfului.

a) Ne alegem axele ca în fig. 53, Ecuația (64) ne definește:

$$1 + \varepsilon_1 = \sqrt{s^2 - h^2} / l = \sqrt{370^2 - 50^2} / 350 = 1,04745$$

și cu aceasta, formula aproximativă (67) ne dă:

$$a_0 = \sqrt{6 \varepsilon_1} = \sqrt{6 \cdot 0,04745} = 0,534$$

Rezolvăm acum ecuația (65) începând cu:

$$a_0 = 0,53; sha_0 = 0,55516; cha_0 = 1,14377$$

Rezultă:

$$\Delta = 0,55516 - 1,04745 \cdot 0,53 = +0,00001$$

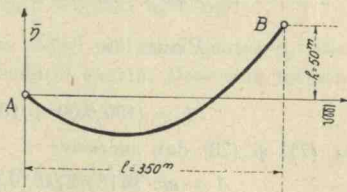


Figura 53

și din (66):

$$\Delta a_0 = 0,00001 / (1,04745 - 1,14377) = -0,00010$$

și deci

$$a_0 = 0,53 - 0,00010 \simeq 0,52990$$

iar formula (61) ne dă:

$$c = l/2 a_0 = 350/2 \cdot 0,52990 = 330,24 \text{ m}$$

și

$$H = cp = 2 \cdot 330,24 = 660,5 \text{ kg}$$

Din (68) avem:

$$tgh \psi_0 = h/s = 50/370 = 0,135135; \therefore \psi_0 = 0,13583$$

și deci:

$$\varphi_0 = \psi_0 - a_0 = -0,39410; sh \varphi_0 = -0,40438; ch \varphi_0 = 1,07868$$

$$\varphi_1 = \psi_0 + a_0 = 0,66570; sh \varphi_1 = 0,71598; ch \varphi_1 = 1,22990$$

și:

$$N_A = H ch \varphi_0 = 660,5 \cdot 1,07868 \simeq 712 \text{ kg, analog } N_B = 811 \text{ kg.}$$

b) Pentru vârf avem: $tg \theta = sh \varphi = 0$ și ecuațiile (54) și (55) ne dau:

$$x = c (\varphi - \varphi_0) = 330,24 \cdot 0,39410 \simeq 130,148 \text{ m}$$

$$y = c (ch \varphi - ch \varphi_0) = 330,24 (1 - 1,07868) \simeq -25,933 \text{ m}$$

Aplicația Nr. 9. Se dau trei puncte A , B și C prin cari trece un cablu ce

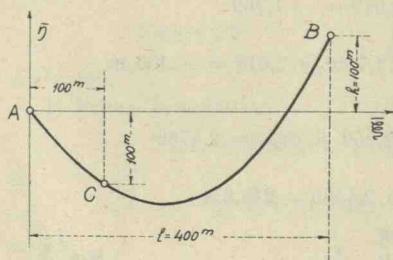


Figura 54

este încărcat cu o sarcină uniformă distribuită pe lungimea cablului, $p=5 \text{ kg/m}$. Distanța între punctele A și B este de $l=400 \text{ m}$ și $h=100 \text{ m}$, măsurate pe orizontală și verticală (fig. 54). Coordonatele lui C , față de A ca origine, sunt: $x=100 \text{ m}$ și $y=-100 \text{ m}$. Se cer: a) Tensiunile H , N_A și N_B , b) lungimea cablului s și c), coordonatele punctului cel mai de jos al cablului.

a) Aplicând formula aproximativă (72) avem:

$$k = (100/400 + 100/100)/(400 - 100) \simeq 0,0042$$

ar (71) și (73) dau succesiv:

$$\Delta = ar. sh [0,42/sh (0,42)] - ar. sh [-0,42/sh (0,42)] \\ - (400 - 100) \cdot 0,0042 = -0,238$$

$$\Delta k = -0,238 / [(100 \cdot 400 - 100 \cdot 100) 0,0042/6 + 400 - 100] = -0,0007$$

și deci:

$$k = 0,0042 - 0,0007 = 0,0035$$

analog avem:

$$\Delta = -0,000156; \Delta k = -5 \cdot 10^{-7} \simeq 0$$

și deci:

$$k = 0,0035$$

Rezultă:

$$c = 1/2 k = 1/2 \cdot 0,0035 = 142,9 \text{ m}$$

și

$$H = cp = 142,9 \cdot 5 = 714,5 \text{ kg}$$

Din (69) avem:

$$a_0 = lk = 400 \cdot 0,0035 = 1,4 \text{ și } sha_0 = 1,90430$$

și din (62):

$$sh\psi_0 = hk/sh a_0 = 100 \times 0,0035 / 1,90430 = 0,1838; \psi_0 = 0,1828$$

și cu:

$$\varphi_0 = \psi_0 - a_0 = -1,2172; ch \varphi_0 = 1,8369$$

$$\varphi_1 = \psi_0 + a_0 = 1,5828; ch \varphi_1 = 2,5370$$

avem:

$$N_A = H ch \varphi_0 = 714,5 \cdot 1,8369 = 1312 \text{ kg}; \text{ analog } N_B = 1813 \text{ kg}$$

b) Cu $tg h \psi_0 = 0,1808$, formula (68) ne dă:

$$s = h / tg h \psi_0 = 100 / 0,1808 = 553,1 \text{ m}$$

c) Pentru vârf avem: $tg \theta = sh \varphi = 0$ și formulele (54) și (55) ne dau:

$$x = c (\varphi - \varphi_0) = 142,9 \cdot 1,2172 = 173,8 \text{ m}$$

$$y = c (ch \varphi - ch \varphi_0) = 142,9 (1 - 1,8369) = -119,6 \text{ m}$$

Aplicația Nr. 10. Un cablu este suspendat între punctele A și B situate la distanțele $l = 300 \text{ m}$ și $h = 120 \text{ m}$, măsurate respectiv pe orizontală și verticală (fig. 55). El este încărcat cu o sarcină $p = 8 \text{ kg/m}$ de cablu și rezistă la o tensiune maximă de $N = 3000 \text{ kg}$. Se cere: a) tensiunea orizontală în cablu, H . b) lungimea cablului s și c) coordonatele vârfului.

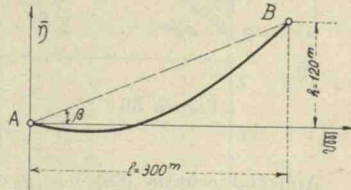


Figura 55

a) Căutăm mai întâiu valoarea parametrului a_0 . O valoare aproximativă ne-o dă ec. (75).

$$a_0^2 = (300^2 + 120^2) / (2 \cdot 3000 / 8 - 120)^2 = 0,263; a_0 = 0,51$$

Formulele aproximative ne dau totdeauna valori mai mici pentru a_0 . Ele ne indică numai regiunea în care se găsește soluția exactă. Deci vom încerca cu valori ale lui $a_0 > 0,51$.

Transcriem încercarea făcută cu

$$a_0 = 0,6; sh a_0 = 0,63665; ch a_0 = 1,18547$$

O parte din calcule sunt făcute cu rigla de 25 cm. Avem:

$$\Delta = 300^2 / 0,6^2 + 120^2 / 0,63665^2 - (2 \cdot 3000 / 8 - 120)^2 / 1,18547^2 = 3104$$

$$\Delta a_0 = 3104 / 2 [300^2 / 0,6^3 + 120^2 \cdot 1,18547 / 0,63665^3 - (2 \cdot 3000 / 8 - 120)^2 \cdot 0,63665 / 1,18547^3] = 0,0047$$

Dacă încercăm $a_0 = 0,6047$ găsim:

$$a_0 = 0,60475; sh a_0 = 0,64230;$$

soluție la care ne oprim.

Din formula (61) avem:

$$c = l / 2 a_0 = 300 / 2 \cdot 0,60475 = 248,04 \text{ m}; H = cp = 248,04 \cdot 8 = 1984 \text{ kg}.$$

b) Din formula (65) și (68) avem:

$$\operatorname{sh} \psi_0 = a_0 h / l \operatorname{sh} a_0 = 0,60475 \cdot 120 / 300 \cdot 0,6230 = 0,37662$$

și cu

$$\psi_0 = 0,36824; \operatorname{tg} \psi_0 = 0,35244$$

din (68) avem:

$$s = h / \operatorname{tg} \psi_0 = 120 / 0,35244 = 340,48 \text{ m}$$

c) Vârful e caracterizat prin $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sh} \varphi = 0$.

Cu $\varphi_0 = \psi_0 - a_0 = -0,23651$; $ch \varphi_0 = 1,02811$ din (54) și (55) rezultă:

$$x = c(\varphi - \varphi_0) = 248,04 \cdot 0,23651 = 58,66 \text{ m}$$

$$y = c(ch \varphi - ch \varphi_0) = 248,04(1 - 1,02811) = -6,97 \text{ m}$$

Aplicația Nr. 11. Să se construiască curba funiculară, raportată la DE ca ax ξ , trecând prin $A(0_m, 1_m)$ și $B(6_m, 3_m)$, cu tangenta în A orizontală (fig. 56), a încărcărilor proporționale cu ordonatele ei proprii, $p = \gamma y = 1,8 \text{ yt/m}$ orizontal. Aceasta reprezintă o încărcătură de pământ. Vom presupune că normal pe planul curbei luăm o grosime de pământ egală cu 1_m .

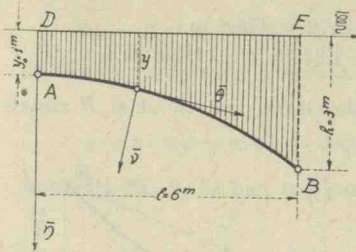


Figura 56

56), a încărcărilor proporționale cu ordonatele ei proprii, $p = \gamma y = 1,8 \text{ yt/m}$ orizontal. Aceasta reprezintă o încărcătură de pământ. Vom presupune că normal pe planul curbei luăm o grosime de pământ egală cu 1_m .

a) *Soluția analitică.* Luăm axa η verticală de sus în jos pentru ca $\bar{\eta} = \xi\eta$. Ecuația (86) aplicată în B ne dă:

$$3 = 1 \cdot ch 6a$$

care prin rezolvare ne dă:

$$a = 0,29379$$

Aplicând ecuația (86) $y = y_0 ch ax$ din metru în metru avem:

$$x = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \text{ m}$$

$$y = 1; 1,043; 1,178; 1,414; 1,774; 2,287; 3,000 \text{ m}$$

Impingerea orizontală este dată de formula (82):

$$H = \gamma/a^2 = 1,8/0,29379^2 = 20,854 \text{ t}$$

Putem evalua și încărcătura totală:

$$(87) \quad F = \int_0^l \gamma y dx = \gamma y_0 \int_0^l ch ax dx = \gamma y_0 \operatorname{sh} a l / a$$

sau numeric:

$$F = 1,8 \cdot 1 \cdot \sqrt{3^2 - 1} / 0,29379 = 17,329 \text{ t}$$

b) *Soluția grafică.* Pe epură (fig. 57) s'au dus dreptele AC și DE paralele la distanța de 1 m . Curba funiculară va trece prin A și B și va fi tangentă în A la dreapta AC .

Pentru curba AB luăm o curbă *absolut arbitrară*, care însă să corespundă condițiilor de mai sus. În aceste condiții luăm cercul tangent în A și care trece prin B . Dacă aceasta este curba funiculară, atunci încărcătura este dată de ordonatele y , mărginite la dreapta DE și acest cerc. Împărțim DE în 6 părți și vom lua ordonatele la mijlocul jumătății diviziunilor. Acele ordonate y multiplicăm cu 1 m dau forțele $F_1, F_2, F_3 \dots F_6$, după ce le-am multiplicat cu γ .

În poligonul forțelor am luat jumătate din aceste ordonate pentru a nu eși poligonul prea mare.

Aceste forțe le vom presupune aplicate la mijlocul fiecărei diviziuni, deși de fapt ele ar trebui aplicate în centrul de greutate al fiecărui trapez, căci suprafața individuală este un trapez cu 2 laturi verticale, o latură orizontală și alta arcul funicularului. Această aproximație, după cum se va vedea, n'are mare importanță asupra rezultatului.

Cu ajutorul polului O și deci cu distanța polară $OC_1 = 4,5$ m, construim poligonul auxiliar $A_1 B_1$. Măsurăm pe epură la scară $B_1 C_1 = 2,64$ m. Pentru ca să avem $B_1 C_1 = 2$ m, trebuie să luăm altă distanță polară H , așa fel ca:

$$2 \cdot H = 2,64 \times 4,50$$

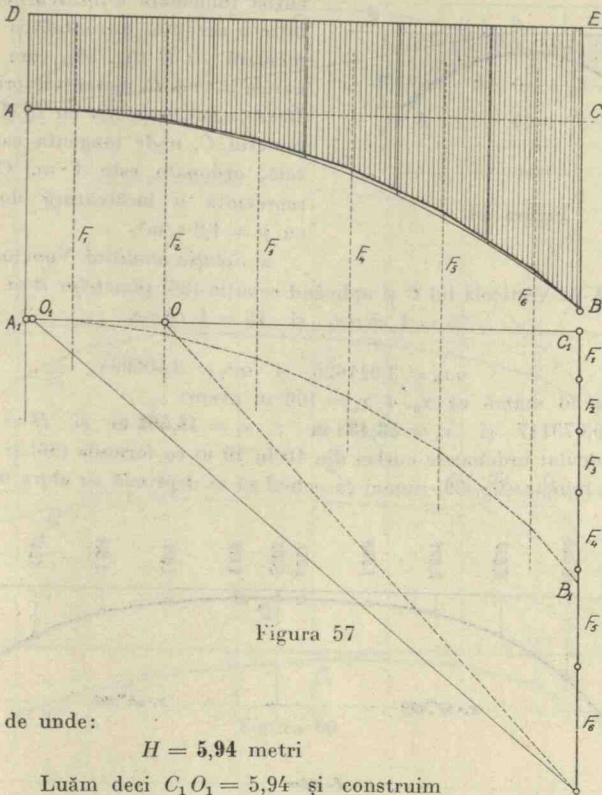


Figura 57

de unde:

$$H = 5,94 \text{ metri}$$

Luăm deci $C_1 O_1 = 5,94$ și construim

al doilea poligon funicular — în figura de sus — care trece prin A și B .

Se observă că acest poligon funicular este foarte apropiat de cerc.

Dacă se măsoară ordonatele din metru în metru se găsește:

$$x = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$y = 1; 1,04; 1,18; 1,40; 1,77; 2,28; 3,00$$

deci valori foarte apropiate de cele calculate.

Ar trebui să luăm ca încărcări ordonatele noii curbe funiculare. Dacă se evaluează această încărcătură, pe baza ordonatelor de mai sus, se găsește 9,67 γ , când prin calcul s'a găsit 9,63 γ și ar trebui să construim un nou po-

lignon funicular AB . Când două asemenea poligoane funiculare coincid, atunci acestea reprezintă soluția definitivă.

Diferențele fiind mici, ne mulțumim cu poligonul funicular AB ca soluție definitivă.

Avem deci:

$$\gamma \int y dx = 1,8 \cdot 9,63 = 17,33 \text{ t}$$

iar

$$H = 2,5,94 \cdot \gamma = 21,38 \text{ t}$$

care diferă cu 2,5% de valoarea exactă.

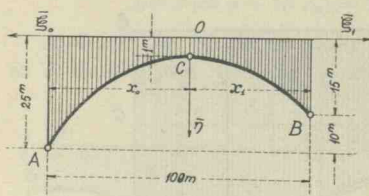


Figura 58

Aplicația Nr. 12. Să se găsească curba funiculară a încărcărilor cuprinse între o dreaptă orizontală și curba funiculară ACB (fig. 58), care are ordonatele în A și B , distanțate orizontal cu 100 m, egale respectiv cu 25 și 15 m. În punctul C , unde tangenta este orizontală, ordonata este 1 m. Ordonatele reprezintă o încărcătură de pământ cu $\gamma = 1,8 \text{ t/m}^3$.

a) *Soluția analitică.* Vom lua originea axelor în O , pe verticala lui C și aplicând ecuația (86) punctelor A și B avem:

$$25 = 1 \cdot ch ax_0 \quad \text{și} \quad 15 = 1 \cdot ch ax_1$$

de unde:

$$ax_0 = 3,911625 \quad \text{și} \quad ax_1 = 3,400084$$

și deci ținând seamă că $x_0 + x_1 = 100 \text{ m}$ avem:

$$a = 0,073117 \quad \text{și} \quad x_0 = 53,498 \text{ m} ; \quad x_1 = 46,502 \text{ m} \quad \text{și} \quad H = 336,7 \text{ t}$$

S'au calculat ordonatele curbei din 10 în 10 m cu formula (86) și s'a trasat curba prin puncte (fig. 59) numai ca ochiul să se deprindă cu alura unor astfel

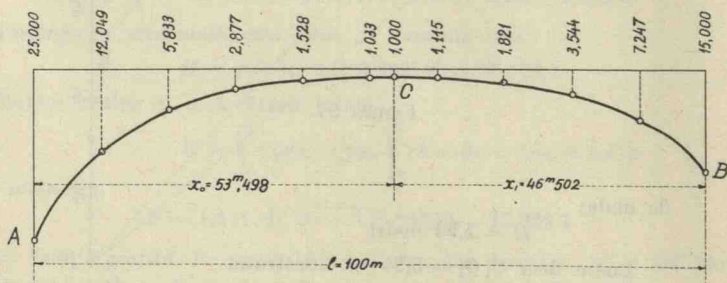


Figura 59

de curbe. Până la ordonata $y = 15 \text{ m}$ curba este simetrică în raport cu verticala punctului C . Valoarea încărcăturii conform formulei (87) dela aplicația Nr. 11, este:

$$F = \gamma y_0 (sh ax_0 + sh ax_1) / a = 983,41 \text{ t}$$

Observație. Am avut ecuația:

$$H d^2 y / dx^2 - \gamma y = 0$$

care trebuie să fie omogenă. Primul termen are dimensiunile:

$$t \cdot m / m^2 = t / m$$

Al doilea termen, pentru că γ este exprimat în t/m^3 , are dimensiă:

$$t m/m^3 = t/m^2.$$

Pentru ca să se facă formula omogenă, vom presupune că luăm normal pe figură o fâșie de încărcătură de 1 m lățime și atunci avem:

$$t m/m^2 = t/m$$

ceea ce face formula omogenă.

Astăzi când podurile în arc, cu deschideri mari, sunt curente, metodele grafice, pentru determinarea curbelor funiculare necesare, nu sunt suficiente

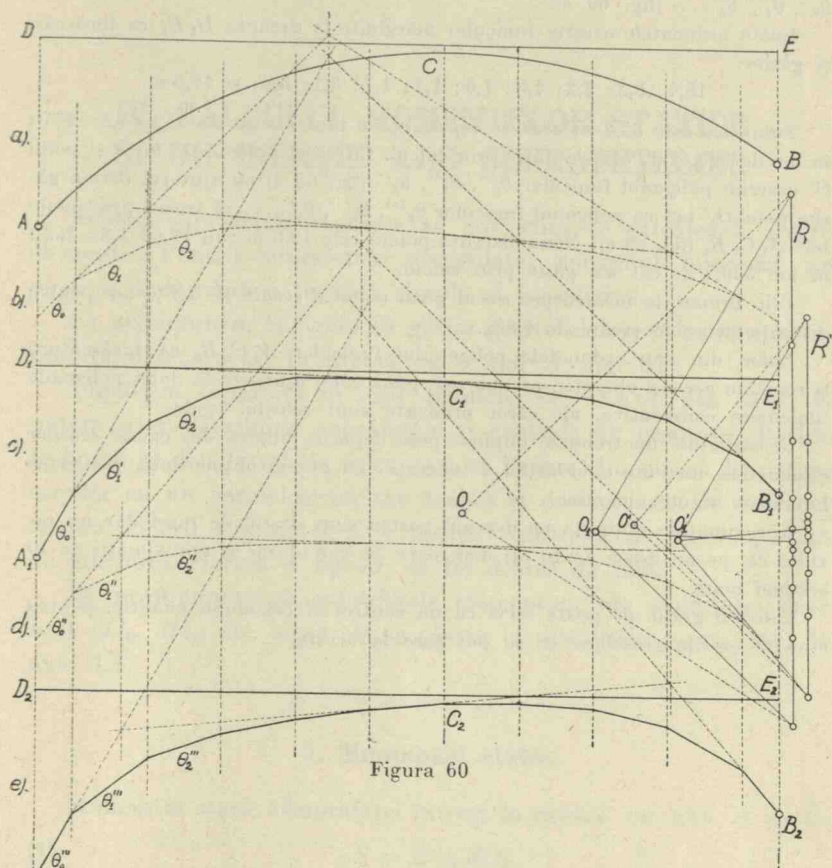


Figura 60

pentru a ne da aproximația ce ni se cere. Din exemplele date se vede că se poate întinde aproximația oricât de departe vom, atunci când întrebuițăm calculul analitic în locul celui grafic.

b) *Soluția grafică.* Prin punctele ACB facem să treacă o curbă arbitrară, de ex. un cerc (fig. 60 a). Acest cerc trece prin A și B și este tangent la o dreaptă orizontală paralelă cu DE și situată cu 1 m mai jos ca aceasta.

Ordonatele între DE și cercul ACB le luăm ca încărcări. Măsurând pe desen aceste ordonate, la scară, găsim respectiv:

20,4; 12,8; 7,4; 3,8; 1,6; 1,0; 1,4; 3,4; 6,8; și 12,0 m.

Suma lor este 70,6 ceea ce ne dă o suprafață de 706 m², pentru că ordonatele sunt măsu ate la mijlocul panourilor de câte 10 m. Aceasta ne dă o încărcătură totală de $706 \times 1,8 = 1271$ tone, în loc de 983,41 t cât este în realitate.

Cu aceste forțe construim poligonul de forțe R și cu o distanță polară oarecare construim poligonul funicular $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ având polul în O (fig. 60 b).

După regulile arătate la poligoanele funiculare găsim polul O_1 , așa că poligonul funicular să treacă prin punctele $A_1 C_1 B_1$ și găsim poligonul funicular $\theta_0', \theta_1', \theta_2' \dots$ (fig. 60 c).

Luăm ordonatele acestui funicular mărginite la dreapta $D_1 E_1$ ca încărcări și găsim:

18,4; 8,3; 3,2; 1,3; 1,0; 1,1; 1,7; 3,1; 5,8; și 11,3 m.

Suma lor este 55,2 m ceea ce reprezintă o încărcătură de $552 \times 1,8 = 994$ t în loc de 983,41 t, cât s'a găsit prin calcul. Cu acest poligon de forțe și polul O' descriem poligonul funicular $\theta_0'', \theta_1'', \theta_2''$ (fig. 60 d) cu ajutorul căruia găsim polul O_1' așa ca poligonul funicular $\theta_0''', \theta_1''', \theta_2''' \dots$ să treacă prin punctele $A_2 C_2 B_2$ (fig. 60 e). Noua distanță polară este 19,6 m sau $19,6 \times 1,8 = 353$ t în loc 336,7 t, cât s'a găsit prin calcul.

Prin urmare la încărcătură avem până acum o eroare de 1,1% iar pentru distanța polară o eroare de 4,8%.

Luăm din nou ordonatele poligonului funicular $A_2 C_2 B_2$ ca încărcătură și repetăm aceeași operație, ca mai sus, până când ajungem la două poligoane funiculare consecutive, ale căror ordonate sunt sensibil egale.

Construcțiile nu trebuie împinse prea departe, fiindcă din cauza erorilor sistematice, inerente unor astfel de operații, nu putem obține două poligoane funiculare riguros identice.

Aproximațiile obținute pe desenul nostru sunt destul de mari dar nu rezultă că, pe un desen de 10 ori mai mare, se vor obține și aproximații de 10 ori mai mari.

Calculul grafic ne poate servi ca un control al calculului analitic, pentru a evita erorile grosolane ce se pot face la acesta.

IV. CALCULUL MOMENTELOR STATICE ȘI DE INERȚIE ALE SUPRAFETELOR.

Pentru suprafețele regulate se știe cum se calculează aceste elemente. Pentru suprafețele neregulate, poligonul funicular ne pune la îndemână o metodă simplă și expeditivă.

Să presupunem că voim să găsim aceste elemente pentru o suprafață oarecare Ω , în raport cu o axă A (fig. 61).

Impărțim suprafața în fâșii paralele cu axa A , așa ca să le putem ușor determina suprafețele și centrele de greutate. Fâșiile trebuiesc să fie destul de mici, așa ca fiecare din ele să le putem asimila cu un paralelogram sau trapez și deci eroarea ce o facem asupra valorii suprafeței și a poziției centrelor de greutate, față de adevărata formă a figurii, să fie destul de mici.

Să presupunem că suprafețele elementare ale suprafeței date sunt $d\Omega_0$, $d\Omega_1$, etc. și că ele se găsesc la distanțele x_0 , x_1 , etc. de axa AA .

1. Momentul static.

Momentul static al suprafeței întregi în raport cu axa A va fi:

$$(1) \quad S = \sum x_0 d\Omega_0$$

Ca să putem utiliza proprietățile poligonului funicular vom presupune că $d\Omega_0$ sunt niște forțe paralele cu axa A și deci vom afla momentul lor în raport cu această axă.

Construim poligonul forțelor $d\Omega_0$, etc. și cu o distanță polară, oarecare H , construim un poligon funicular.

Pentru prima forță elementară $d\Omega_0$, momentul static, în raport cu axa A , este egal cu distanța polară H , multiplicată cu

segmentul interceptat de laturile extreme de poligon funicular corespundente acestui element, pe axa A , care pe figură este da_0 . Deci:

$$(2) \quad x_0 d\Omega_0 = H da_0$$

Așa dar:

$$(3) \quad \Sigma x_0 d\Omega_0 = H \Sigma da_0 = H \cdot CD$$

căci de pe figură se vede că $\Sigma da_0 = CD$.

Dacă voim să găsim centrul de greutate al suprafeței, n'avem decât să găsim intersecția laturilor extreme de poligon funicular, al întregii suprafețe (punctul E) și prin acel punct să ducem o paralelă cu axa A . Pe acea dreaptă se găsește centrul de greutate, pentru că segmentul interceptat pe laturile extreme de poligon funicular a întregii suprafețe, este nul.

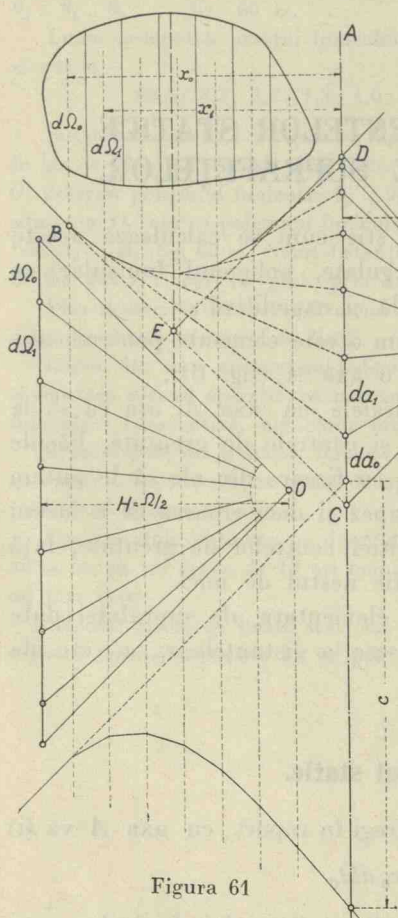


Figura 61

2. Momentul de inerție.

Momentul de inerție în raport cu aceeași axă, A , este:

$$(4) \quad I = \Sigma x_0^2 d\Omega_0$$

În virtutea relației (2) avem:

$$(5) \quad I = \Sigma x_0 \cdot x_0 d\Omega_0 = \Sigma x_0 \cdot H da_0 = H \Sigma x_0 da_0$$

Însă, $x_0 da_0$ este dublul suprafeței triunghiului care are drept bază latura da_0 și ca înălțime pe x_0 .

Notăm această suprafață cu $d i^2_0$. Pentru $d\Omega_1$ vom avea analog $2 d i^2_1 = x_1 da_1$, etc.

Suma suprafețelor acestor triunghiuri elementare o notăm cu i^2 , și nu este altceva decât suprafața cuprinsă între poligonul

funicular, între prima lui latură BC și segmentul CD de pe axa A .

Deci:

$$(6) \quad \Sigma x_0 da_0 = 2 i^2.$$

Punând aceasta în ecuația (5) avem:

$$I = 2 H \cdot i^2$$

Dacă luăm distanța polară egală cu $\Omega/2$, deci $H = \Omega/2$, atunci rezultă:

$$(7) \quad I = \Omega i^2$$

În acest caz ($H = \Omega/2$), i^2 , adică suprafața limitată de conturul BCD , reprezintă pătratul razei de girație a suprafeței Ω în raport cu axa A .

Această metodă de a determina momentul de inerție se datorește lui *Mohr*, și-i și poartă numele.

Mai putem determina momentul de inerție și în alt mod.

Relația:

$$(5) \quad I = H \Sigma x_0 da_0$$

ne arată că putem, cu ajutorul unui poligon funicular, determina $\Sigma x_0 da_0$ considerând da_0 ca niște forțe la distanțele x_0 . Poligonul forțelor da_0 îl avem gata făcut și n'avem decât să luăm un pol O_1 , și cu ajutorul acestui poligon de forțe, să construim un nou poligon funicular. Segmentul interceptat între laturile extreme de poligon funicular pe axa A , multiplicat cu distanța polară respectivă, ne dă $\Sigma x_0 da_0$. Să notăm această nouă distanță polară cu b , și segmentul interceptat pe A cu c , atunci avem:

$$\Sigma x_0 da_0 = bc$$

și deci:

$$I = H bc$$

Această metodă se datorește lui *Culmann*. Metoda lui *Culmann* se poate generaliza și să ne servească pentru determinarea de expresii de forma: $\Sigma x_0^3 d\Omega_0$, $\Sigma x_0^4 d\Omega_0$, etc.

Observație.

Expresia exactă a momentului de inerție al suprafeței $d\Omega_0$ în raport cu axa A , este:

$$I_0 + x_0^2 d\Omega_0$$

în care I_0 este momentul de inerție al fâșiei în raport cu un ax paralel cu A și care trece prin centrul de greutate al fâșiei.

Momentul total al suprafeței întregi este:

$$(4') \quad I = \Sigma I_0 + \Sigma x_0^2 d\Omega_0$$

Prin urmare, metodele grafice arătate mai sus și cari dau valoarea expresiei (4), nu dau rezultate exacte ci aproximative, pentru că și formula (4) este o formulă aproximativă.

Pentru ca cele două formule să dea rezultate sensibil egale, trebuie ca ΣI_0 să fie neglijabil față de $\Sigma x_0^2 d\Omega_0$ și aceasta nu se întâmplă decât în cazul când fâșiile sunt foarte înguste.

În cazul când aceasta nu se poate realiza, va trebui ca la rezultatele căpătate pe cale grafică, și cari nu reprezintă decât valoarea formulei (4), să adăugăm termenul de corecțiune ΣI_0 , dacă acesta are o valoare mai mare decât aceea a aproximațiilor ce se obțin de obicei grafic.

Aplicația Nr. 13. a) Să presupunem că vrem să găsim *momentul static* al suprafeței din fig. 61 în raport cu axa A .

Împărțim suprafața în fâșii largi de câte 500 mm în realitate. Valorile suprafețelor calculate sunt:

$$0,83; 1,05; 1,12; 1,12; 1,06; 0,94 \text{ și } 0,53 \text{ m}^2.$$

Suprafața întreagă este $6,65 \text{ m}^2$.

Luăm un poligon de forțe, și cu o distanță polară $H = \frac{\Omega}{2} = 3,325 \text{ m}^2$ descriem poligonul funicular BD .

Momentul static este:

$$S = H \cdot CD = 3,325 \text{ m}^2 \cdot 4,46 \text{ m} = 14,8 \text{ m}^3.$$

b) Să găsim *momentul de inerție*. Evaluăm de pe epură cantitățile x_0, da_0 etc. și facem suprafața coprinsă între poligonul funicular și laturile BC și CD și avem:

$$x_0 da_0 = 3,66 \text{ m} \cdot 0,94 \text{ m} = 3,440 \text{ m}^2$$

$$x_1 da_1 = 3,18 \text{ m} \cdot 0,94 \text{ m} = 2,988 \text{ m}^2$$

$$x_2 da_2 = 2,68 \text{ m} \cdot 0,88 \text{ m} = 2,360 \text{ m}^2$$

$$x_3 da_3 = 2,18 \text{ m} \cdot 0,72 \text{ m} = 1,568 \text{ m}^2$$

$$x_4 da_4 = 1,68 \text{ m} \cdot 0,52 \text{ m} = 0,873 \text{ m}^2$$

$$x_5 da_5 = 1,18 \text{ m} \cdot 0,36 \text{ m} = 0,425 \text{ m}^2$$

$$x_6 da_6 = 0,70 \text{ m} \cdot 0,10 \text{ m} = 0,070 \text{ m}^2$$

$$\Sigma x_0 da_0 = 11,724 \text{ m}^2$$

Deci:

$$2 i^2 = 11,724 \text{ m}^2$$

și

$$i^2 = 5,812 \text{ m}^2$$

Prin urmare:

$$I = \Omega i^2 = 6,65.5,812 = 38,64 \text{ m}^4$$

(calculule făcute cu rigla).

Aceasta prin *metoda lui Mohr*.

Cu ajutorul poligonului de forțe și cu o distanță polară $b = 2 \text{ m}$, construim al doilea poligon funicular și obținem $c = 5,93 \text{ m}$. Avem după *metoda lui Culmann*:

$$I = H.b.c = 3,325.2.5,93 = 39,43 \text{ m}^4$$

Există o diferență între ele, de aproape 2%, diferență inerentă, care provine din aproximațiile de aprecieri de distanțe și de construcție grafică.

Să evaluăm valoarea maximă al lui ΣI_0 . Cea mai mare fâșie este de $2,24 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}$ al cărei I_0 este:

$$I_0 = 2,24 \times 0,50^3 / 12 = 0,0233 \text{ m}^4$$

Chiar dacă fiecare fâșie ar avea acest I_0 , cele 7 fâșii ar avea cel mult:

$$\Sigma I_0 = 7 I_0 = 0,14 \text{ m}^4,$$

deci mai puțin decât 0,36% și deci inferior aproximației cu erorile a calculului grafic îngrijit, care este de 1%.

V. GRINZI DREPTE.

A) Momente încovoietoare și forțe tăietoare.

Chiar la începutul cursului s'a definit ceea ce este o grindă. S'a mai arătat că, dându-se forțele exterioare și modul de sprijinire al grinzilor, pe considerațiuni de echilibru putem găsi valoarea și direcțiunile reacțiunilor.

Aceasta nu este suficient. Pentru ca echilibru să existe trebuie ca și fiecare parte din grindă să fie de asemenea în echilibru.

Pentru a studia această chestiune ne servim de o metodă generală numită *metoda secțiunilor*.

1. Metoda secțiunilor. Definiții.

Iată în ce constă această metodă. Ne închipuim că tăiem grinda în două părți printr'o secțiune normală la axa grinzii (fig. 62). Grinda

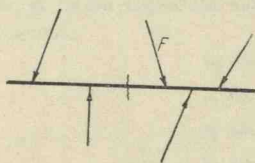


Figura 62

va fi separată astfel în două bucăți. Pentru ca echilibru să subsiste și mai departe, va trebui ca bucata din dreapta, de ex., să se găsească iarăși în echilibru sub acțiunea forțelor ce acționează asupra ei. Pentru aceasta este absolut necesar ca *în secțiunea considerată* să aplicăm un sistem echi-

valent grupului de forțe și momente dela stânga acestei secțiuni.

Sistemul echivalent este rezultanta tuturilor forțelor dela stânga secțiunii și momentul resultant al tuturilor momentelor și forțelor dela stânga secțiunii.

Momentul forțelor se ia totdeauna în raport cu centrul de greutate al secțiunii.

Așadar în rezumat, asupra secțiunii considerate acționează o rezultantă R , aplicată în centrul de greutate al secțiunii și un moment, M , luat în raport cu acest punct (fig. 63).

În acest mod am asigurat din nou echilibrul părții de grindă din dreapta secțiunii.

Orice secțiune din grindă va trebui să satisfacă și această condiție.

În secțiunea considerată, descompunem pe R în două componente: una normală pe secțiune pe care o notăm cu N și alta cuprinsă în planul secțiunii pe care o notăm cu T . Prima poartă numele de *forță axială*, pentru că are direcția axei piesei sau *forță normală*, pentru că este normală pe planul secțiunii, care secțiune am spus că se ia totdeauna normală pe axa piesei. A doua poartă numele de *forță tăietoare* pentru că fiind în planul secțiunii are tendința de a tăia bara.

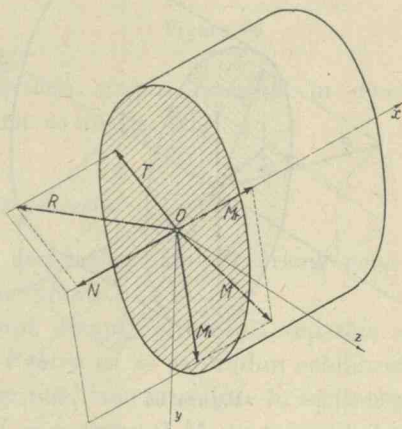


Figura 63

Momentul la rândul lui îl descompunem într-o componentă după axa barei pe care o notăm M_r și alta în planul secțiunii pe care o notăm M_i .

Prima componentă, M_r , poartă numele de *moment de răsucire* sau de *torsiune* pentru că are tendința de a răsuci bara, iar a doua componentă, M_i , poartă numele de *moment încovoietor* sau de *încovoier* pentru că are tendința de a încovoia bara.

2. Fixarea semnelor cantităților N , T , M_i și M_r .

Pentru aceasta este nevoie să raportăm bara la un sistem de axe de coordonate. Axa barei o vom lua ca axă Ox , și trece evident prin centrul de greutate al secțiunii. În planul secțiunii luăm axele Oy și Oz , normale între ele. Aceste axe se iau de obicei axele principale ale secțiunii. Axele se iau așa ca să parcurgem extremitățile x , y , z în sensul mișcării acelor unui ceasornic.

Semnele se fixează precum urmează și ulterior vom da justificarea necesară.

N este pozitiv atunci când este dirijat din interiorul corpului către exterior, adică așa cum este în fig. 64.

În acest caz N poartă numele și de *forța de tensiune*, pentru că are tendința de a întinde, de a lungi bara. — N poartă numele de *forța de compresiune* și este dirijată evident în sens invers.

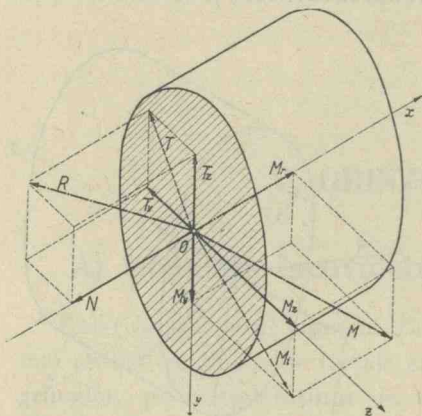


Figura 64

Forța tăietoare T o descompunem în două componente: una normală pe axa Oy , pe care o notăm T_y și alta normală pe Oz , pe care o notăm T_z . Semnele lor sunt pozitive atunci când sunt dirijate către $-z$ și $-y$.

Momentul de răsucire M_r este pozitiv când învârtă secțiunea în sensul pozitiv adică dela y către z .

M_i , adică momentul încovoietor îl descompunem în două componente: una după Oy , M_y , și alta după Oz , M_z .

Semnele lor vor fi pozitive, ori de câte ori rotesc secțiunea în sens pozitiv. Pe fig. 64 sunt indicate sensurile lor pozitive.

În secțiunea opusă, adică în secțiunea care aparține părții din stânga, sensurile lor pozitive vor fi tocmai sensurile contrare, aceasta în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii.

3. Teoreme generale.

a) Definiții

În cele ce urmează ne vom ocupa de grinzile drepte acționate de sarcini cuprinse în planul vertical al grinzii. În acest caz, toate forțele sunt cuprinse în planul vertical al grinzii, iar momonetul va avea totdeauna aceeași direcțiune normală pe planul forțelor.

În acest caz, echilibrul grinzii este asigurat prin o articulație și un reazim simplu (fig. 65). Articulația mai poartă și numele de reazim fix, iar reazimul simplu se mai numește și reazim mobil pentru că punctul de sprijin al grinzii pe acest reazim se poate deplasa după o dreaptă oarecare.

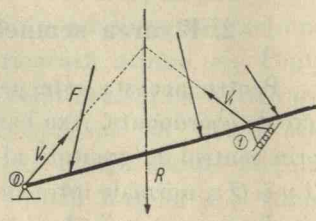


Figura 65

Sistemul este static determinat. În cazul special când avem deaface numai cu grinzi orizontale, solicitate numai de sarcini verticale și dacă reacțiunea din reazimul simplu este verticală, atunci și reacțiunea din articulație va fi tot verticală și deci articulația se comportă ca un reazim simplu care dă o reacțiune verticală.

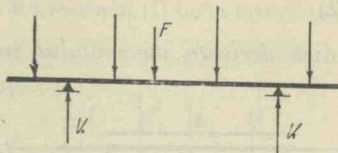


Figura 66

În acest caz special, pentru prescurtare, vom zice că avem o grindă simplu rezemată în două puncte și schematic o vom desemna ca în fig. 66.

b) Teoreme generale.

Înainte de orice aplicație vom demonstra câteva teoreme generale cari se aplică tuturor grinzilor drepte.

Să presupunem că, dintr'o grindă dreaptă orizontală, separăm o porțiune de lungime dx (fig. 67). Pentru ca să restabilim echilibrul în care se găsea acest element de grindă, vom introduce în secțiunea din capătul stâng forța tăietoare T și momentul M , cu sensurile lor pozitive. În extremitatea din dreapta vom avea aceleași elemente, cu sensurile lor pozitive ca în figură, însă valorile lor vor fi respectiv, $T + dT$ și $M + dM$.

Vom presupune grinda încărcată cu o sarcină uniform distribuită p kg/m. Chiar dacă sarcina nu s'ar distribui uniform, putem presupune intervalul dx așa de mic, ca să putem considera pe acest interval că p este constant. Mai mult. Chiar dacă pe grindă avem sarcini concentrate, acestea nu se aplică într'un punct, ci pe un interval oarecare. Și în acest caz putem presupune pe dx , mai mic decât intervalul pe care se distribuie forța concentrată.

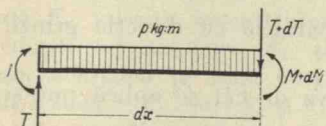


Figura 67

Să proiectăm toate forțele pe o verticală. Avem

$$-T + p dx + T + dT = 0$$

sau

$$(1) \quad dT/dx = -p$$

Adică derivata forței tăietoare în raport cu x este egală cu $-p$.

Luăm momentul tuturor forțelor în raport cu extremitatea din dreapta a elementului de grindă și avem:

$$T dx + M - p dx^2/2 - M - dM = 0$$

Se observă că $p dx^2/2$ este infinit mic de ordin superior în raport cu celelalte cantități și se poate neglija. Ne rămâne deci

$$(2) \quad dM/dx = T$$

adică *derivata momentului încovoietor în raport cu x este egală cu forța tăietoare din secțiune.*

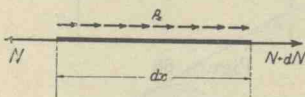


Figura 68

Să presupunem că bucata de grindă ar fi supusă și la o sarcină uniform distribuită în lungul grinzii ca în fig. 68. Dacă proiectăm totul pe axul grinzii avem:

$$-N + p_x dx + N + dN = 0$$

care ne dă

$$(3) \quad dN/dx = -p_x$$

ceia ce se interpretează ușor prin vorbe. Relațiile (1), (2) și (3) se pot generaliza, însă pentru nevoile noastre, deocamdată, nu avem trebuință.

4. Curbele forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare.

Să luăm o dreaptă oarecare așa fel, ca la fiecare punct A de pe axa grinzii, să corespundă un singur punct A_1 pe dreapta considerată, pe care o numim *dreaptă de reper*.

Dacă în A_1 ridicăm în ordonată valoarea forței tăietoare din secțiunea A a grinzii, vom căpăta un punct oarecare B . Dacă facem același lucru pentru toate punctele A ale axei grinzii, punctul B va descri o curbă pe care o numim *curba forțelor tăietoare*. Dacă purtăm în ordonată valoarea momentului obținem *curba momentelor*.

Această definiție se poate generaliza la grinzi de o formă oarecare.

În genere, dreapta de reper se ia paralelă cu direcția grinzii când aceasta este dreaptă.

În cele ce urmează nu se face altceva de cât se aplică pur și simplu definițiile date până acum.

Aplicația Nr. 14. O grindă simplu rezemată încărcată cu sarcini verticale concentrate.

Să considerăm o grindă simplu rezemată pe reazimile (1) și (2) (fig. 69). Distanța între axele reazimilor o numim deschidere și o notăm totdeauna cu l .

Grinda este încărcată cu sarcinile $F_1, F_2, F_3, \dots$ cari se găsesc la distanțele $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots$ de cele două reazime, (1) și (2). Așa vom nota totdeauna aceste

distanțe. Modul de rezemare fiind dat, rezultă neapărat direcțiunea reacțiunilor, adică vor fi verticale, normale pe suprafața de contact a grinzii cu reazimul.

a) *Soluția analitică.* Ca să găsim reacțiunea din reazimul (1) luăm momentul tuturor forțelor în raport cu (2) și avem:

$$V_1 = \Sigma F_i b_i / l$$

Cu V vom nota totdeauna reacțiunile reazimelor. Reacțiunea din reazimul (2) va fi:

$$V_2 = \Sigma F_i a_i / l$$

Să presupunem că vrem să găsim forța tăietoare în secțiunea care se găsește la distanțele x și x' de cele două reazime și căreia îi vom spune scurt: *secțiunea x* . Vom presupune aplicată în acea secțiune rezultanta tuturor forțelor ce lucrează asupra părții din stânga, adică a tuturor forțelor ce se găsesc la stânga secțiunii. Această rezultantă este:

$$T = V_1 - F_1 - F_2 \text{ pe care o notăm și}$$

$$T = V_1 - \Sigma F_s$$

în care prin ΣF_s înțelegem suma forțelor dela stânga secțiunii, exclusiv reacțiunea.

Să vedem ce este cu momentul încovoietor. Când transportăm rezultanta în centrul de greutate al secțiunii, rezultă un moment în raport cu acest punct.

Valoarea momentului este:

$$M = V_1 x - F_1(x - a_1) - F_2(x - a_2)$$

pe care de multe ori îl vom însemna prescurtat:

$$M = V_1 x - M_s$$

înțelegând prin M_s momentul forțelor dela stânga secțiunii, exclusiv momentul reacțiunii.

Să presupunem că voim să construim curba după care variază aceste două cantități în lungul grinzii.

Forța tăietoare. Pentru toate secțiunile coprinse între reazimul (1) și forța F_1 , valoarea forței tăietoare este constantă și egală cu V_1 . Pentru secțiunile coprinse între F_1 și F_2 forța tăietoare este $V_1 - F_1$ și rămâne constantă pe acest interval (fig. 70). În dreptul forței F_1 avem un salt egal cu $-F_1$. Între F_2 și F_3 forța tăietoare este $V_1 - F_1 - F_2$ și așa mai departe. Între ultima forță și reazimul din dreapta forța tăietoare este $V_1 - \Sigma F$. Însă avem:

$$V_1 + V_2 = \Sigma F \text{ și deci } T = -V_2$$

Deci curba reprezentativă a forței tăietoare va fi compusă din o serie de drepte paralele. Pentru că în dreptul reazimului (2) forța tăietoare este negativă, ea schimbă undeva de semn, deci trece prin zero, și acolo va fi momentul maxim, pentru că am avut $dM/dx = T$.

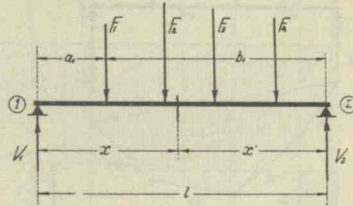


Figura 69

Momentul incovoietor. Pentru o secțiune cuprinsă între reazimul (1) și forța F_1 , avem $M = V_1 x$, deci momentul variază liniar, după o linie dreaptă (fig. 70).

Expresia momentului între forța F_1 și F_2 este $M = V_1 x - F_1(x-a_1)$, deci tot o dreaptă. Din ordonatele $V_1 x$ se scad ordonatele $F_1(x-a_1)$.

Între forțele F_2 și F_3 , expresia este

$$M = V_1 x - F_1(x-a_1) - F_2(x-a_2)$$

adică tot o dreaptă.

În dreptul reazimului (2) avem:

$$M = V_1 l - \sum F_i(l - a_i) =$$

$$V_1 l - \sum F_i b_i = 0$$

pentru că tocmai aceasta a fost condiția cu ajutorul căreia am determinat reacțiunea V_1 .

Prin urmare, curba momentelor variază de la 0 la 0, trece evident printr'un maxim și se compune din o linie poligonală. Suprafața cuprinsă între curba

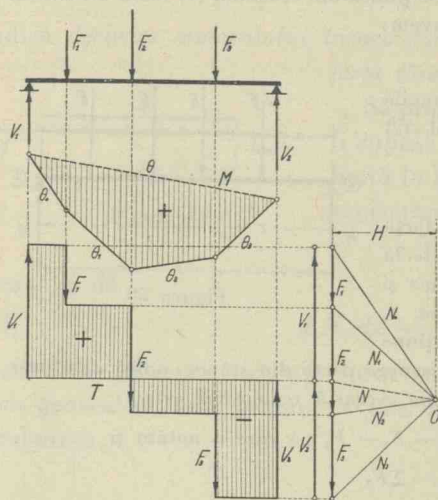


Figura 70

momentelor și axa absciselor poartă numele de *suprafața momentelor*.

b) **Soluția grafică.** Ca să determinăm reacțiunile trebuie să aplicăm o ecuație de momente. Construim deci un poligon de forțe $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$ (fig. 70) care trebuie să fie egal cu $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$, deci:

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

Ceea ce nu cunoaștem sunt valorile V_1 și V_2 . Construim un poligon funicular a cărui laturi sunt $\theta_0 \dots \theta_4$. Latura θ_0 , reazimă pe F_1 și V_1 . Latura θ reazimă pe V_1 și V_2 .

Pentru ca momentul în raport cu reazimul 2 să fie nul, trebuie ca θ și θ_3 să se intersecteze pe verticala reazimului (2), căci numai atunci momentul tuturor forțelor în raport cu acest reazim este nul. Am determinat astfel direcțiunea laturii θ și deci, ducând o paralelă în poligonul forțelor, avem valorile lui V_1 și V_2 . În acest mod avem curba momentelor. Cu ajutorul poligonului de forțe, construim curba forțelor tăietoare așa cum se arată în fig. 70.

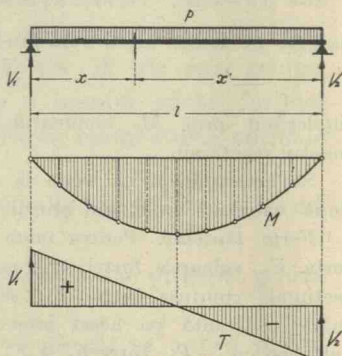


Figura 71

Aplicația Nr. 15. O grindă simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită, p kg/m. (fig. 71).

Avem $V_1 = V_2 = pl/2$. Forța tăietoare în secțiunea x este:

$$T = pl/2 - px$$

și variază după o linie dreaptă.

Momentul forțelor din stânga secțiunii este:

$$M = pl \cdot x/2 - p \cdot x^2/2 = p \cdot x(l - x)/2 = p \cdot x x'/2$$

Momentul încovoiitor variază după o parabolă. Valoarea lui maximă este la mijlocul grinzii, unde forța tăietoare este nulă și unde momentul are valoarea

$$M_{max.} = pl^2/8$$

Variația forței tăietoare și a momentului încovoiitor sunt arătate pe fig. 71 construite prin puncte.

Fig. 72 arată soluția grafică respectivă.

Se obișnuiește adesea a se pune $x/l = \xi$, $x'/l = \xi'$, în care ξ și ξ' variază între 0 și 1, cu condiția evidentă $\xi + \xi' = 1$.

Expresiile forței tăietoare și a momentului încovoiitor au forma:

$$T = (1 - 2\xi) pl/2$$

$$M = \xi \xi' p l^2/2 = \xi(1 - \xi) pl^2/2$$

ξ și ξ' fiind niște numere, coeficienții de mai sus se pot calcula independent de valoarea deschiderii și încărcăturii.

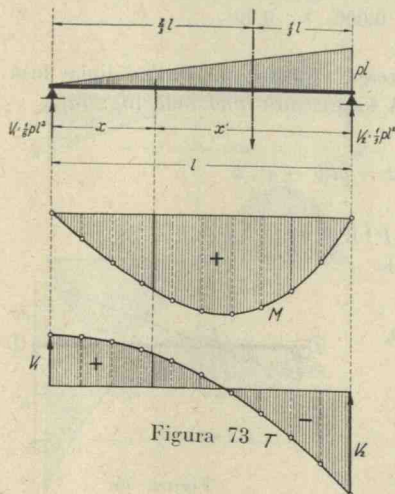


Figura 73

Aplicația Nr. 16. O grindă încărcată cu o sarcină continuă variind liniar dela un cap la altul, având într-o extremitate valoarea zero. Grinda este simplu rezemată la ambele extremități (fig. 73).

Presupunem că valoarea sarcinii la distanța $x = 1$ este p kg/m², atunci la distanța x va fi px kg/m iar la distanța l va fi pl kg/m.

Valoarea întregii încărcături va fi $pl^2/2$ și se aplică în centrul de greutate al triunghiului. Avem:

$$V_1 l - pl^3/6 = 0, \text{ deci } V_1 = pl^2/6, V_2 = 2pl^2/6$$

Forța tăietoare în secțiunea x este:

$$T = pl^2/6 - p x^2/2 = pl^2(1 - 3x^2/l^2)/6 = (1 - 3\xi^2) pl^2/6$$

care se vede că variază după o parabolă. Momentul încovoietor este:

$$M = pl^2x/6 - px^3/6 = p x (l^2 - x^2)/6 = \xi (1 - \xi^2) pl^3/6$$

Variază după o parabolă cubică.

Momentul maxim este acolo unde $T=0$, deci pentru $\xi = 1/\sqrt{3} = 0,5774$ și are valoarea $M_{max.} = 0,385 pl^3$.

Variația forței tăietoare și a momentului încovoietor este arătată în fig. 73.

Pentru ușurința calculelor dăm și valorile expresiilor $1 - 3\xi^2$, $\xi(1 - \xi^2)$ și $\xi(1 - \xi)$ pentru diferite valori ale lui ξ .

Ultima coloană se referă la parabola care rezultă din încărcarea uniform distribuită (aplicația 15).

ξ	$1 - 3\xi^2$	$\xi(1 - \xi^2)$	$\xi(1 - \xi)$
0,0	1,00	0,000	0,00
0,1	0,97	0,099	0,09
0,2	0,88	0,192	0,16
0,3	0,73	0,273	0,21
0,4	0,52	0,336	0,24
0,5	0,25	0,375	0,25
$\sqrt{3}/3$	0,00	0,385	
0,6	-0,08	0,384	0,24
0,7	-0,47	0,357	0,21
0,8	-0,92	0,288	0,16
0,9	-1,43	0,171	0,09
1,0	-2,00	0,000	0,00

Aplicația Nr. 17. Aceiași grindă încărcată cu o sarcină variind liniar însă având și încărcări negative, în punctul A încărcătura fiind nulă (fig. 74).

Încărcătura totală este:

$$R = pb^2/2 - pa^2/2 = pl(b - a)/2$$

Deci:

$$V_1 + V_2 = pl(b - a)/2$$

Pentru a găsi pe V_1 luăm momentele în raport cu reazimul (2) și avem:

$$V_1 l + p a^2 (b + 2a/3)/2 - p b^3/6 = 0,$$

$$V_1 = -p(-b^3 + 2a^3 + 3a^2b)/6l =$$

$$-p(3la^2 - a^3 - b^3)/6l$$

și

$$V_2 = p(-a^3 + 2b^3 + 3ab^2)/6l =$$

$$p(3lb^2 - a^3 - b^3)/6l$$

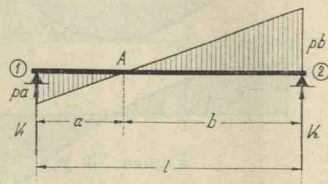


Figura 74

Forța tăietoare și momentul încovoietor în secția A sunt:

$$T_a = p(a^3 + b^3)/6l \text{ și } M_a = pab(b - a)/6$$

Acum putem scrie expresia forței tăietoare și a momentului încovoietor în o secție oarecare luând originea în A. Pentru porțiunea A2 avem (fig. 75).

$$T = T_a - px^2/2, \quad M = M_a + T_a x - px^3/6$$

Pentru porțiunea 1A, avem:

$$T = T_a - px^2/2 \quad \text{și} \quad M = M_a - T_a x + px^3/6$$

Se vede că forțele tăietoare variază după niște parabole, iar momentele după niște parabole cubice, cari se pot ușor construi.

Se mai observă că reacțiunea V_1 este nulă atunci când $b=2a$ și atunci $V_2=pl^2/6$.

Când $a < l/3$ reacțiunea V_1 este pozitivă, adică dirijată de jos în sus, când $a > l/3$, reacțiunea este negativă adică dirijată de sus în jos.

În cazul special când $a=b$, avem $R=0$, $V_1 = -pl^2/12$, $V_2 = pl^2/12$, $T_a = pl^2/24$, $M_a = 0$.

Forța tăietoare și momentul încovoietor pe porțiunea dela dreapta lui A au ca expresie:

$$T = pl^2/24 - px^2/2, \quad M = pxl^2/24 - px^3/6$$

iar pe porțiunea din stânga lui A:

$$T = pl^2/24 - px^2/2, \quad M = -pxl^2/24 + px^3/6$$

Dacă utilizăm notația $x/l = \xi$, avem

$$T = (1 - 12\xi^2) pl^2/24$$

$$M = \pm \xi (1 - 4\xi^2) pl^3/24$$

în care ξ variază între 0 și 0,5.

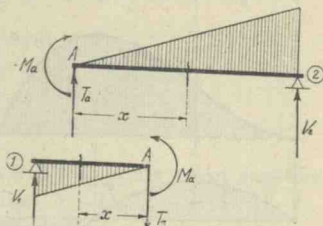


Figura 75

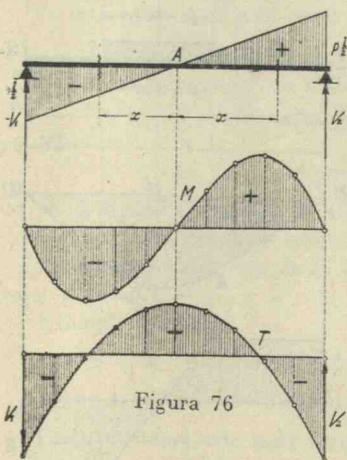


Figura 76

Cu ajutorul acestor coeficienți s'a trasat curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare (fig. 76).

Forța tăietoare maximă este $T = -pl^2/12$, iar momentul maxim

$$M = \pm 0,00804 pl^3.$$

În cazul când $b = 2a$, avem:

$$a = l/3, \quad b = 2l/3, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = pl^2/6.$$

$$T_a = pl^2/18, \quad M_a = pl^3/81$$

Forța tăietoare este

$$T = T_a - px^2/2 = pl^2/18 - px^2/2 = (1 - 9\xi^2) pl^2/18$$

în care ξ variază dela 0 la 1/3 pentru porțiunea din stânga lui A, și dela 0 la 2/3 pentru porțiunea din dreapta. Momentul pentru porțiunea din stânga lui A este:

$$M = pl^3/81 - pl^2x/18 + px^3/6 = (2 - 9\xi + 27\xi^3) pl^3/162$$

iar pentru partea din dreapta este:

$$M = pl^3/81 + pl^2x/18 - px^3/6 = (2 + 9\xi - 27\xi^3) pl^3/162$$

Pe fig. 77 sunt trasate curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare. Valoarea maximă a forței tăietoare este $-pl^2/6 = T_{max}$, iar a momentului $M_{max} = 2pl^3/81$.

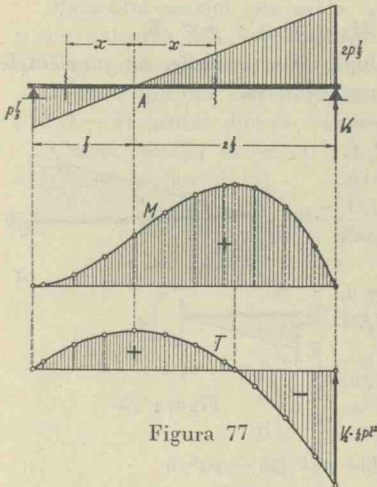


Figura 77

Momentul încovoietor într-o secție x cuprinsă între 1 și A este:

$$M = V_1 x$$

între 2 și B este

$$M = V_2 x'$$

iar în intervalul AB are valoarea

$$M = V_1 x - p x_1^2/2$$

variind după o parabolă. În dreptul mijlocului încărcăturii avem

$$M = pcb/l - p c^2/8$$

Se vede ușor că dacă sarcina pc ar fi concentrată atunci momentul încovoietor ar fi ordonata $CC_1 = pcb/l$.

Se vede iarăși ușor că parabola este tangentă în A_1 și B_1 la dreptele $1C_1$ și $2C_1$. Ordonatele parabolei raportate la coarda $A_1 B_1$ sunt aceleași ca și când porțiunea c ar fi o grindă simplu rezemată în A_1 și B_1 .

Forța tăietoare este nulă în punctul în care $pcb/l - p x_1 = 0$ adică pentru punctul $x_1 = cb/l$ unde M are valoarea:

$$M_{max} = pcb(l - c/2)/l^2$$

În cazul special când $a = 3l/4$, $b = l/4$, $c = l/2$, avem $M_{max} = 9pl^2/128$.

Aplicația Nr. 19. O grindă este încărcată cu o sarcină uniform distribuită p kg/m pe o porțiune c al cărei mijloc se găsește la distanțele a și b de cele

Aplicația Nr. 18. O grindă, simplu rezemată, parțial încărcată cu o sarcină uniform distribuită p , kg/m (fig. 78).

Presupunem că lungimea încărcată este c . Distanțele dela centrul de greutate al încărcăturii la cele două reazime sunt a și b .

$$\text{Avem } V_1 = pcb/l ; \quad V_2 = pca/l.$$

Forța tăietoare pe intervalul 1 A este constantă și egală cu V_1 .

Între A și B are valoarea

$$T = V_1 - p x_1$$

socotind x_1 dela punctul A.

Această expresie este valabilă până în punctul B, unde T are valoarea $-V_2$. În acest interval variază liniar. Dela B la 2 rămâne constantă.

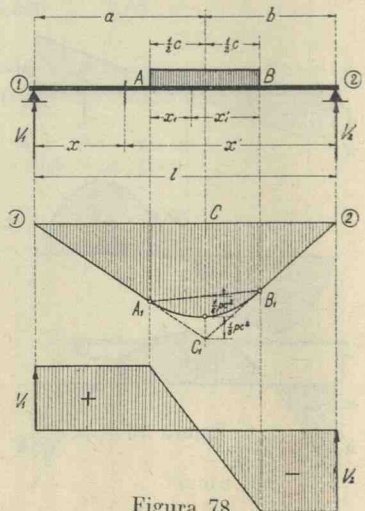


Figura 78

două extremități ale grinzii. Grinda reazimă pe teren. Presupunând grinda rigidă să se găsească presiunile pe teren admitând că aceste presiuni variază liniar dela un cap la celălalt al grinzii (fig. 79).

Fie presiunile la cele două capete ale grinzii $p_1 l$ și $p_2 l$. Prin urmare p_1 și p_2 sunt exprimate în kg/m^2 .

Pentru echilibru trebuie ca:

$$pc = (p_1 + p_2) l^2/2$$

Mai trebuie ca și momentul tuturor forțelor să fie nul, deci: luând momentul în raport cu punctul (1) avem:

$$pc \cdot a = p_1 l^3/6 + 2 p_2 l^3/6$$

Așa dar, avem două ecuații cari ne dau:

$$p_1 = 2 pc (3b - l)/l^3 \quad ; \quad p_2 = 2 pc (3a - l)/l^3$$

Se observă că $p_1 = 0$ pentru $b = l/3$. Pentru $b < l/3$, p_1 are valori negative ceea ce nu este conform realității. Vom presupune $b > l/3$.

Să găsim forța tăietoare pe intervalul 1 A.

Avem

$$T = p_2 x^2/2 - p_1 x'^2/2 + p_1 l^2/2$$

Forța tăietoare variază după o parabolă care se poate construi ușor dacă se pune sub forma:

$$T = l^2 \xi [p_1 (1 + \xi') + p_2 \xi]/2.$$

Pentru porțiunea B2 avem:

$$T = -l^2 \xi' [p_2 (1 + \xi) + p_1 \xi']/2.$$

Pe intervalul A B este egală cu prima expresie mai puțin $p x_1$, în care:

$$x_1 = x - a + c/2 = l [\xi - (a - c/2)/l]$$

Momentul încovoietor pe intervalul 1A este:

$$M = l^3 \xi^2 [p_1 (2 + \xi') + p_2 \xi]/6$$

pe B2:

$$M = l^3 \xi'^2 [p_2 (2 + \xi) + p_1 \xi']/6$$

iar pe A B este egal cu prima expresie din care se scade $p x_1^2/2$.

Variază după parabole cubice.

Momentul maxim este acolo unde $T = 0$, și are loc totdeauna în intervalul A B.

Exemplu numeric.

$$l = 2 \text{ m}, \quad a = 1,20 \text{ m}, \quad b = 0,80 \text{ m}, \quad c = 0,80 \text{ m}, \quad p = 2 \text{ t/m}$$

$$\text{Avem } p_1 = 0,16 \text{ t/m}^2, \quad p_2 = 0,64 \text{ t/m}^2, \quad x_1 = 2 (\xi - 0,40)$$

Forța tăietoare este nulă pentru ξ dat de expresia

$$4 \xi [0,16 (2 - \xi) + 0,64 \xi] - 2,2 (\xi - 0,40) = 0$$

care ne dă:

$$6 \xi^2 - 21 \xi + 20 = 0$$

a cărei singură rădăcină acceptabilă este $\xi = 0,56855$.

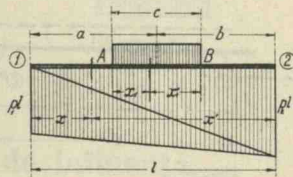


Figura 79

Deci forța tăietoare este nulă pentru

$$x = \xi l = 2 \cdot 0,56855 = 1,1371 \text{ m}$$

$$x_1 = x - a + c/2 = 0,3371 \text{ m}$$

$$M_{max} = 0,324 \text{ tm}$$

În cazul când $b < l/3$, p_1 nu poate avea decât cel mult valoarea zero, căci pământul nu dă reacțiuni negative.

Din relația

$$p_1 = 2pc (3b - l)/l^3 = 0$$

deducem $l = 3b$. Prin urmare contactul între grindă și pământ se face pe o lungime $l = 3b$, când presiunea $p_1 = 0$ iar $p_2 = 2pc/9b^2$, distribuția lor fiind după un triunghi. Presiunea maximă pe teren este $3bp_1 = 2pc/3b = 2pc/l$, deci dublul presiunii medii.

Aplicația Nr. 20. O grindă, articulată la o extremitate și simplu rezemată la cealaltă, suportă o sarcină orizontală $p \text{ kg/m}$, care se aplică la distanța h deasupra grinzii (fig. 80). Grinda este la înălțimea h_1 deasupra reazimelor.

Reacția din reazimul (2) este verticală, și o determinăm luând momentul în raport cu articulația reazimului (1). Avem:

$$p l (h + h_1) - V_2 l = 0$$

$$V_2 = p (h + h_1)$$

$$V_1 = -V_2 = -p (h + h_1)$$

Forța orizontală în articulație este

$$H = p l$$

Forța tăietoare este constantă pentru toate secțiunile grinzii și egală cu:

$$T = V_1 = -p (h + h_1)$$

Forța axială este:

$$N = H - px = px'$$

Momentul în secțiunea x este:

$$M = V_2 x' - p x' h = (V_2 - p h) x' = p h_1 x'$$

Aplicația Nr. 21. O grindă simplu rezemată este acționată de două forțe egale și de sens contrar, așezate la distanța c între ele (fig. 81).

Reacțiunea V_2 de ex. este:

$$-Fc = V_2 l,$$

Deci

$$V_2 = -Fc/l$$

$$V_1 = -V_2 = Fc/l$$

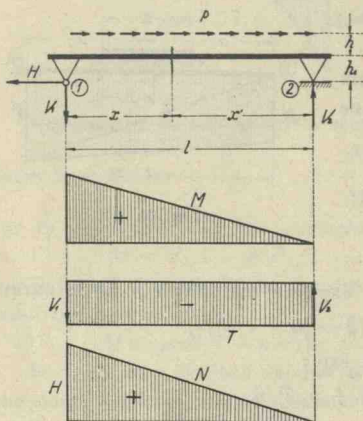


Figura 80

Forța tăietoare pe intervalul dela 1 până la prima forță este:

$$T = V_1, \text{ între cele două forțe este}$$

$$T = V_1 - F$$

iar între ultima forță și reazimul 2

$$T = V_1$$

Momentele pe cele trei intervale sunt:

$$M = V_1 x = F c x / l$$

$$M = V_1 x - F \cdot (x - a + c/2)$$

$$M = V_2 x' = -F c x' / l$$

Momentul este nul la extremitățile grinzii și în punctul:

$$x = l (a - c/2) / (l - c)$$

* * *

Exemplele acestea se pot înmulți la infinit. S'au dat acestea numai pentru a se vedea norma după care se urmează pentru a găsi pe T și M .

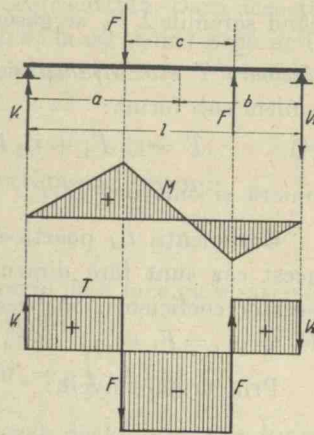


Figura 81

B) Sarcini mobile și linii de influență.

1. Generalități.

Până acum ne-am ocupat cu găsirea forței tăietoare și a momentului încovoietor în o secțiune oarecare a grinzii, când am avut un sistem de sarcini care stau imobile pe grindă. În majoritatea cazurilor sarcinile se mișcă pe grindă. Atunci se pune întrebarea, ce poziție trebuie să ocupe sarcinile pentru ca forțele tăietoare și momentele încovoietoare să fie maxime sau minime, în o secțiune dată oarecare.

Pentru a răspunde la această chestiune utilizăm liniile de influență. Aceste linii sunt tot așa de importante ca și poligonul funicular.

Să ne ocupăm de un caz concret, după care vom arăta în ce constă o linie de influență.

Forța tăietoare, într'o secțiune oarecare a unei grinzi simplu rezemate a avut expresia:

$$T = \sum_{i=1}^n F_i b_i / l$$

când sarcinile sunt la dreapta secțiunii și

$$T = \sum_1^n F_h b_h/l - \sum_1^i F_h$$

când sarcinile $\sum_1^i F_h$ se găsesc la stânga secțiunii. În orice caz, *forța tăietoare T este o funcțiune liniară de forțele F_h și deci putem s'o punem sub forma:*

$$(4) \quad T = t_{x1} F_1 + t_{x2} F_2 + \dots + t_{xi} F_i + \dots + t_{xn} F_n.$$

liniară și omogenă în F .

Coeficienții t_{x1} poartă numele de *coeficienți de influență*, și în acest caz sunt fără dimensiune. Să vedem care este semnificarea acestor coeficienți. Să presupunem $F_1 = 1$, și restul forțelor $F_2 = F_3 = \dots = F_i = \dots = F_n = 0$.

Prin urmare avem:

$$T = t_{x1} \cdot 1$$

adică $t_{x1} \cdot 1$ este forța tăietoare care se produce în secțiunea x , când în secțiunea 1 calcă o sarcină $F_1 = 1$. În mod analog $t_{xi} \cdot 1$ este forța tăietoare care se produce în secțiunea x , când în secțiunea i calcă o sarcină $F_i = 1$.

Dacă facem ca forța $F_i = 1$, să ocupe toate pozițiile posibile și dacă în dreptul forței, ridicăm în ordonată $t_{xi} \cdot 1$, atunci succesiunea punctelor astfel găsite, formează linia de influență a forței tăietoare din secțiunea x .

Dacă avem linia de influență construită, ca să găsim forța tăietoare în secțiunea x , n'avem decât să aplicăm formula (4), adică multiplicăm $F_1, F_2, \dots$ cu ordonatele $t_{x1}, t_{x2}, \dots$ cetite în dreptul lor. Acesta este mijlocul cel mai comod pentru găsirea forțelor tăietoare maxime și minime.

Dacă e vorba de moment, în mod analog avem:

$$(5) \quad M = m_{x1} F_1 + m_{x2} F_2 + \dots + m_{xi} F_i + \dots + m_{xn} F_n$$

În acest caz m este exprimat în unități de lungime. Semnificarea coeficienților de influență este aceeași, și anume, $m_{x2} \cdot 1$ este momentul care se produce în secțiunea x , când în secțiunea 2 este aplicată o forță $F_2 = 1$.

Construcția liniei de influență este identică cu cea precedentă.

Putem avea și:

$$(6) \quad M = m'_{x1} M_1 + m'_{x2} M_2 + \dots + m'_{xi} M_i + \dots + m'_{xn} M_n$$

când pe grindă s'ar aplica momentele $M_1, M_2 \dots$ etc. Aci m' sunt evident niște numere.

În cazul când avem deaface cu sarcini continui, atunci putem considera fiecare sarcină $p \, dx$ ca o sarcină concentrată. Dacă această sarcină ocupă pe grindă intervalul c dela x_1 la x_2 , atunci dacă ar fi vorba de forța tăietoare din secțiunea x , vom avea:

$$(7) \quad T_x = \int_{x_1}^{x_2} p \, dx \, t_{xi}$$

iar dacă ar fi vorba de momentul din secțiunea x , avem:

$$(8) \quad M_x = \int_{x_1}^{x_2} p \, dx \, m_{xi}$$

În cazul când p este constant, adică avem de a face cu o sarcină uniform distribuită, avem în cele două cazuri

$$(7') \, (8') \quad T_x = p \int_{x_1}^{x_2} t_{xi} \, dx \quad ; \quad M_x = p \int_{x_1}^{x_2} m_{xi} \, dx$$

Ori cele două sume nu reprezintă altceva decât *suprafața liniei de influență respective pe intervalul c* .

2. Linia de influență a forței tăietoare T .

Să considerăm o secțiune x , în o grindă simplu rezemată la extremitățile sale (fig. 82).

Să presupunem că forța $F = 1$ calcă în secția i , atunci $1 \cdot t_{xi} = 1 \cdot b/l$, deci:

$$(9) \quad t_{xi} = b/l$$

Când forța calcă la stânga secțiunii, avem:

$$1 \cdot t_{xi} = 1 \cdot b/l - 1 = -1 \cdot a/l$$

deci

$$(9') \quad t_{xi} = -a/l$$

Când forța se mișcă pe grindă deci când variază a și b , t_{xi} variază după câte o linie dreaptă. Construcția este foarte simplă (fig. 82)

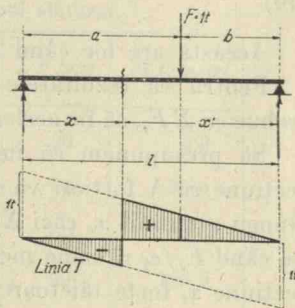


Figura 82

3. Forța tăietoare maximă.

a) Soluția analitică.

Considerând o secțiune în o grindă simplu rezemată la extremități, avem:

$$T = t_{x1} F_1 + \dots = \sum F_i b_i/l$$

deci vom încărca numai regiunea pozitivă a liniei de influență și

vom grupa așa forțele, încât cele mai mari să fie cât mai aproape de secțiune, căci acolo ordonatele sunt mai mari (fig. 83).

Prin urmare, ca forța tăietoare să fie maximă trebuie ca F_1 să calce chiar în secțiunea x . Să presupunem că acest convoi avansează spre stânga cu cantitatea ε , foarte mică, așa fel ca forța F_1 să treacă la stânga secțiunii. Forța tăietoare în acest caz va fi:

$$T_1 = \Sigma (b_i + \varepsilon) F_i / l - F_1$$

Diferența între cele două forțe tăietoare va fi:

$$T_1 - T = \varepsilon \Sigma F_i / l - F_1$$

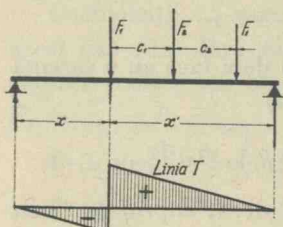


Figura 83

Cum ε este foarte mic, diferența este negativă, deci forța tăietoare este mai mică, când prima sarcină, oricare ar fi valoarea ei trece la stânga secțiunii. Se observă însă că această diferență crește cu ε . Dacă ε crește până atinge valoarea c_1 , care este distanța între prima și a doua forță, atunci se poate să ajungem la:

$$c_1 \Sigma F_i / l - F_1 > 0$$

deci forța tăietoare să fie mai mare când F_1 este la stânga secțiunii considerate și aceasta are loc evident când:

$$(10) \quad \sum_1^n F_i / l > F_1 / c_1$$

Aceasta are loc când F_1 este mică în raport cu celelalte forțe.

Pentru ca rezultatele să fie comparabile în cele două cazuri trebuie ca ΣF_i , să fie aceleași, adică nici o forță să nu intre pe grindă.

Să presupunem că inegalitatea (10) este satisfăcută pentru o secțiune x . A fortiori va fi satisfăcută pentru toate secțiunile dela stânga secțiunii x , căci ΣF crește sau cel mult rămâne constantă, pe când F_1 / c_1 rămâne mereu constant. Prin urmare, dacă pentru o secțiune x , forța tăietoare este maximă, atunci când sarcina F_2 este în secțiune, atunci pentru toate secțiunile dela stânga ei, maximum de forță tăietoare va fi când sarcina F_1 calcă la stânga secțiunii respective.

Se pune chestiunea dacă nu avem maximum când F_3 calcă în secțiune, F_1 și F_2 fiind la stânga secțiunii. Notăm cu c_2 distanța între forța F_2 și F_3 , și avem:

$$T_2 = \Sigma (b_i + c_1 + c_2) F_i / l - F_1 - F_2$$

Avem:

$$T_2 - T_1 = c_2 \Sigma F_i / l - F_2$$

Pentru ca T_2 să fie mai mare decât T_1 trebuie satisfăcută relația:

$$(10') \quad \sum_1^n F_i / l > F_2 / c_2$$

cu condiția evidentă ca să fie satisfăcută și (10).

Se vede ușor că dacă inegalitățile (10) și (10') sunt satisfăcute pentru o secție oarecare x , atunci vor fi satisfăcute și pentru oricare altă secțiune situată la stânga ei.

Pentru calcul este comod a se întocmi tabloul dela aplic. Nr. 22 când ni se dă convoiul de sarcini.

El se bazează pe următoarea observație. Momentul tuturor forțelor

dela stânga forței F_i , în raport cu această forță, este (fig. 84).

$$M_i = \sum_1^{i-1} F_h d_h$$

Să luăm momentul forțelor dela stânga lui F_{i+1} în raport cu această forță, vom avea:

$$M_{i+1} = \sum_1^{i-1} F_h (d_h + c_i) + F_i c_i = M_i + c_i \sum_1^i F_h$$

formula de altfel evidentă.

Aplicația Nr. 22. Să presupunem că avem o grindă de 20 m deschidere și că voim să găsim reacțiunea maximă V_1 și forța tăietoare maximă în secțiunea $x' = 15$ m, când avem sarcinile arătate în tabloul alăturat.

Nr.	F tone	c metri	d metri	ΣF tone	M t.-metri
1	20	1,5	0,0	20	0,0
2	20	1,5	1,5	40	30,0
3	20	1,5	3,0	60	90,0
4	20	1,5	4,5	80	180,0
5	20	4,0	6,0	100	300,0
6	15	1,5	10,0	115	700,0
7	15	1,5	11,5	130	872,5
8	15	3,0	13,0	145	1067,5
9	15	3,0	16,0	160	1502,5
10	15	3,0	19,0	175	1982,5
11	15		22,0	190	2057,5

Cea mai mare lungime care se cuprinde în 20 m este 19 m și deci $c = 20 - 19 = 1$ m. Momentul în raport cu reazemul (2) este:

$$M = M_{10} + 1 \sum_1^{10} F_h = 1982,5 + 1.175 = 2157,5 \text{ tm}$$

iar reacțiunea din (1):

$$V_1 = M/l = 2157,5 : 20 \text{ m} = 107,875 \text{ t.}$$

Cea mai mare lungime care se cuprinde în 15 m este 13 m, deci $c' = 15 - 13 = 2$ m

$$M' = M_8 + c' \sum_1^8 F_h = 1067,5 + 2.145 = 1357,5 \text{ tm și}$$

$$T' = V'_1 = M' / l = 1357,5 : 20 = 67,875 \text{ t.}$$

Să vedem dacă a doua forță în secțiune, nu dă o forță tăietoare mai mare Pentru asta trebuie satisfăcută neegalitatea (10).

Însă cum:

$$\sum F_i / l = 145 / 20 < 20 / 1,5 = 13,3 = F_1 / c_1,$$

deci nu este cazul.

Astfel procedăm pentru toate secțiunile. Observăm însă că

$\sum F = 20 \times 13,3 = 266 \text{ t}$, ori pe deschiderea de 20 m nu încap decât 175 t, deci pentru toate secțiunile prima sarcină dă forța tăietoare maximă în acea secțiune.

b) Soluția grafică.

Se bazează pe faptul că segmentul interceptat între laturile extreme de poligon funicular — paralel cu rezultanta — și trecând

printr'un punct oarecare, multiplicat cu distanța polară H , ne dă momentul forțelor în raport cu acel punct.

Avem:

$$T = \sum_1^n F_i b_i / l = m H / l$$

în care m este segmentul interceptat. Dacă distanța polară se ia $H = l$, atunci

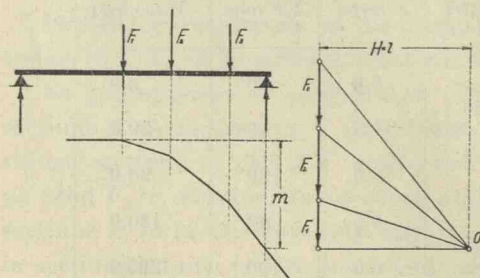


Figura 85

(11)

$$T = m.$$

Cum aci pe H îl măsurăm la scara lungimilor, m va trebui măsurat pe scara forțelor (fig. 85).

Or, segmentul m rămâne același dacă întorc convoiul cap la cap, punând forța F_1 în reazimul din dreapta, apoi F_2 la stânga ei și a. m. d. (fig. 86).

În acest mod, în dreptul secțiunii capăt chiar ordonata m , deci chiar forța tăietoare, T . Polygonul funicular astfel căpătat, este chiar curba forțelor tăietoare, care poartă și numele de curba lui Winkler.

În fig. 86 s'a luat chiar convoiul din aplic. Nr. 22. După desen se obține $V_1 = 108 t$. Prin calcul s'a obținut $107,875 t$.

c) Să presupunem că în loc de un convoi de sarcini am avea o sarcină uniform distribuită p .

Avem din (7'):

$$T = p \sum t_{xi} dx$$

În cazul acesta suprafața părții pozitive a liniei de influență este:

$$T = px^2/2l$$

Deci curba forțelor tăietoare variază după o parabolă.

4. Linia de influență a momentului încovoietor.

Fie o secțiune x în o grindă simplu rezemată la ambele extremități (fig. 87).

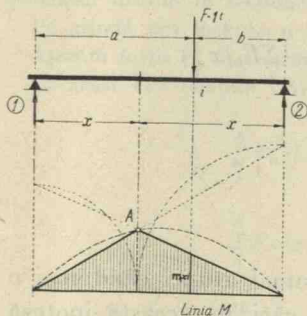


Figura 87

Urmăm exact mersul indicat pentru forța tăietoare. Presupunem $F = 1$ așezată la dreapta secțiunii considerate.

Avem:

$$(12) \quad 1 \cdot m_{xi} = 1 \cdot b x / l$$

Când sarcina se mișcă pe grindă variază b , deci linia de influență este o dreaptă. În mod analog când sarcina e la stânga secțiunii, avem:

$$(12') \quad m_{xi} = a x' / l$$

Construcția liniei de influență este arătată pe fig. 87 și nu e nevoie de nici o explicație. Punctul A descrie o parabolă.

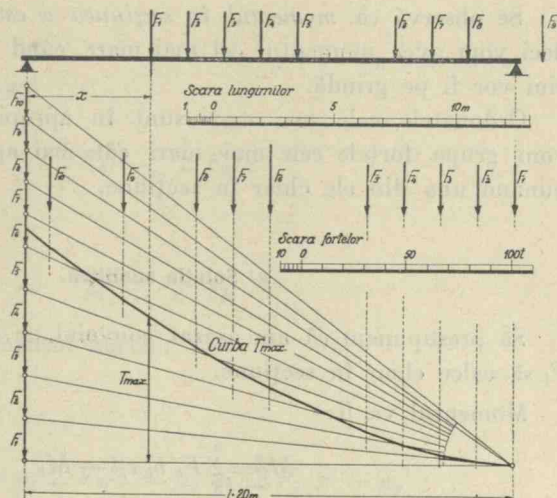


Figura 86

5. Momentul încovoietor maxim.

Fie secțiunea x a unei grinzi parcurse de un convoi de sarcini.

Se observă că *momentul în secțiunea x este totdeauna pozitiv*, deci vom avea momentul cel mai mare, când cât mai multe sarcini vor fi pe grindă.

Ordonatele cele mai mari sunt în apropierea secțiunii, deci vom grupa forțele cele mai mari cât mai aproape de secțiune, punând una din ele chiar în secțiune.

a) Soluția analitică.

Să presupunem că am așezat convoiul pe grindă așa ca forța F_i să calce chiar în secțiune.

Momentul va fi:

$$M_i = \sum_1^n F_h b_h x / l - M_s$$

însemnând cu M_s momentul forțelor dela stânga lui F_i , în raport cu aceasta.

Să presupunem că avansăm convoiul spre stânga așa ca forța F_{i+1} să calce în secțiune. Dacă distanța între F_i și F_{i+1} este c , atunci momentul în secțiune va fi

$$M_{i+1} = \sum_1^n F_h (b_h + c) x / l - M_s - c \sum_1^i F_h$$

Diferența lor este

$$M_{i+1} - M_i = c x \left[\sum_1^n F_h / l - \sum_1^i F_h / x \right]$$

Prin urmare $M_{i+1} > M_i$ când:

$$(13) \quad \sum_1^n F_h / l > \sum_1^i F_h / x$$

Această neegalitate ne dă rezultate numai atunci când nici o forță nu intră sau nu iese de pe grindă, căci în această ipoteză s'au scris expresiile momentelor M_i și M_{i+1} și s'au comparat. Ea servește pentru a afla cu precizie sarcina, în dreptul căreia are loc maximum.

Să presupunem că am pus F_i în secțiune și că găsim:

$$(13') \quad \sum_1^n F_h/l < \sum_1^i F_h/x$$

atunci $M_{i+1} < M_i$

Să presupunem că

$$(13'') \quad \sum_1^n F_h/l < \sum_i^n F_h/x'$$

atunci înseamnă că

$$M_{i-1} < M_i$$

și deci M_i este momentul maxim.

Dacă se notează:

$$(14) \quad \sum_1^n F_h/l = p, \quad \sum_1^i F_h/x = p_x \quad \text{și} \quad \sum_i^n F_h/x' = p_{x'}$$

din neegalitățile (13') și (13'') rezultă că dacă $p_x > p$ convoiul trebuie mutat spre dreapta, dacă $p_{x'} > p$ convoiul trebuie mutat spre stânga.

În acest mod găsim cu precizie *forța care trebuie pusă în secțiune, pentru a avea momentul maxim.*

Aplicația Nr. 23. Să presupunem că avem o grindă de 20 m deschidere parcursă de convoiul arătat în tabloul dela apl. Nr. 22 și că vrem să găsim momentul maxim în secțiunea $x = 5$ m, $x' = 15$ m.

Pe grindă pot încăpea $n = 10$ forțe pentru cari $d = 19$ m.

Așezăm forța F_4 în secțiune.

În acest caz relațiile (14) ne dau:

$$\sum_1^n F_h/l = 175/20 = 8,75 = p$$

$$\sum_1^4 F_h/x = 80/5 = 16,00 = p_x$$

$$\sum_4^{10} F_h/x' = 115/15 = 7,67 = p_{x'}$$

Cum $p_x > p$ convoiul trebuie mutat la dreapta, și $p > p_{x'}$ ne arată că trebuie să-l mutăm tot spre dreapta.

Punem forța F_3 în secțiune. În acest caz intră pe grindă numai $n = 9$ forțe și avem:

$$p_x = 60/5 = 12, \quad p = 160/20 = 8,00, \quad p_x' = 120/15 = 8,00$$

Aci

$$p_x > p$$

$$p_x' = p$$

Prima ne arată că trebuie să mutăm convoiul la dreapta, egalitatea doua ne arată că trebuie lăsat pe loc, deci în dreptul forței F_3 este un maxim.

Să încercăm și cu forța F_2 .

$$p_x = 40/5 = 8,00, \quad p = 140/20 = 7,00, \quad p_x = 140/15 = 9,36$$

Inegalitatea $p_x > p$ ne arată că trebuie să mutăm convoiul spre dreapta, iar $p_x' > p$ ne arată că trebuie să-l mișcăm spre stânga, deci momentul maxim are loc în dreptul forței F_2 .

În adevăr, momentul în dreptul lui F_2 se găsește precum urmează (vezi tabloul)

$$5 - 1,50 = 3,50 \text{ m}, \quad d = 20 - 3,50 = 16,50 \text{ m}, \quad c = 16,5 - 16 = 0,50 \text{ m}$$

$$V_1 = M'/l = (1502,5 + 160 \cdot 0,5)/20 = 79,125 \text{ t}$$

$$M'_2 = V_1 x - M_2 = 79,125 \cdot 5 - 30 = 365,625 \text{ tm}$$

Un maximum s'a văzut că poate avea loc și în dreptul forței F_3 . Să calculăm și acest moment.

Avem:

$$5 - 3 = 2 \text{ m}, \quad d = 20 - 2 = 18 \text{ m}; \quad c = 18 - 16 = 2 \text{ m}$$

$$V_1 = (1502,5 + 2 \cdot 160)/20 = 91,125 \text{ t}$$

$$M'_3 = 91,125 \cdot 5 - 90 = 365,625 \text{ tm}$$

Aci s'a întâmplat ca cele două momente să fie egale. În cazuri similare, de dubiu, ca în cazul nostru, pentru a evita orice îndoială, se vor calcula ambele momente.

Se poate întâmpla ca mai multe forțe să îndeplinească neegalitatea de mai sus. Atunci se vor calcula momentele respective și după valoarea lor se va deduce momentul maxim.

b) Soluția grafică.

Vom utiliza, bine înțeles, poligonul funicular. Cu un poligon de forțe și un pol oarecare, construim poligonul funicular al tuturor forțelor (fig. 88).

Ca să găsim momentul încovoietor, ar trebui să așezăm convoiul de sarcini pe grindă și pentru fiecare poziție a lui să construim câte un poligon funicular. Ajungem la același rezultat dacă presupunem convoiul fix și mutăm grinda în diferite poziții. În acest mod utilizăm un singur poligon funicular. Grinda o vom așeza așa ca să satisfacă condițiile arătate anterior și anume: o sarcină să calce în secțiune, cât mai multe sarcini să fie pe grindă și sarcinile cele mai grele să fie grupate pe lângă secțiunea în care căutăm momentul.

Ne rămâne să găsim sarcina în dreptul căreia are loc momentul maxim în secția x .

Pentru aceasta se face următoarea construcție. Se împarte distanța polară H în raportul x/l și se duce dreapta D paralelă cu poligonul forțelor.

Vom urmări construcția pe fig. 88. Să presupunem că punem secțiunea x în dreptul forței F_5 . În acest caz pe grindă intră forțele $F_3, F_4, F_5 \dots F_9$.

Prin punctul D , de intersecție a dreptei D cu raza polară N_2 , ducem dreapta $D E$ paralelă cu N_9 .

N_2 și N_9 sunt laturi extreme de poligon funicular, pentru grupul de forțe ce intră pe grindă. Dacă dreapta $D E$ taie forța F_5 atunci în dreptul lui F_5 avem un maxim. Se recunoaște imediat că această construcție satisface neegalitățile cari le-am avut la calculul momentului maxim. Făcând construcția, adică luând linia de închidere a poligonului funicular căpătăm ordonata m .

Facem aceeași construcție punând secțiunea x în dreptul forței F_6 . Se vede că și F_6 satisface condiția de maxim. Această se explică prin aceea că unele sarcini ies de pe grindă iar altele intră.

Pentru a le compara, și deduce care este cel mai mare, n'avem altă cale decât a compara m cu m_1 . Comparând acestea să găsește — pe desenul nostru — că m este mai mare.

Să încercăm și să punem forța F_7 în dreptul secțiunii. Dacă facem aceeași construcțiune găsim că dreapta $D E$ taie forța F_6

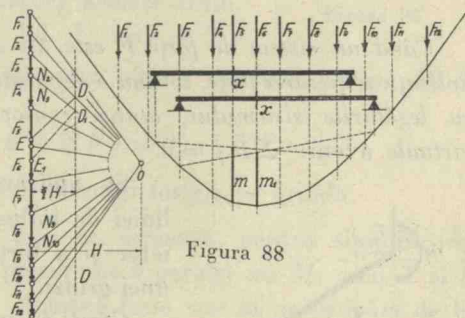


Figura 88

nu F_7 , deci în dreptul lui F_7 nu are loc un maximum. Această construcție nu s'a mai indicat pe figură.

Dacă grinda este încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea ei, atunci am avut în (8'):

$$M = p \int m_{xi} dx$$

Ori $\int m_{xi} dx$ este suprafața liniei de influență a cărei valoare este $xx'/2$, și deci:

$$M = p \cdot xx'/2$$

expresie care s'a găsit și direct.

C) Determinarea liniilor de influență cu principiul lucrului mecanic virtual, sau al deplasărilor virtuale.

Când un sistem de forțe F este în echilibru, dacă punctului de aplicație al fiecărei forțe, îi dăm o deplasare $\vec{j}$, înfinit mică, compatibilă cu legăturile sistemului, atunci conform principiului deplasărilor virtuale avem: $\sum \vec{F} \vec{j} = 0$.

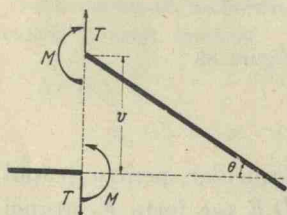


Figura 89

Să aplicăm acest principiu la găsirea liniei de influență a momentului încovoietor și a forței tăietoare în o secțiune a unei grinzi.

Când facem o secțiune într-o grindă, pentru a restabili echilibrul va trebui să introducem o forță tăietoare și un moment încovoietor în acea secțiune.

Ne ocupăm deocamdată de acest caz. În mod general am văzut că trebuie să introducem și o forță axială N și un moment de răsucire Mr .

Să dăm o deplasare oarecare celor două capete astfel tăiate ale grinzii (fig. 89).

Să presupunem că cele două secțiuni, astfel separate între ele, se rotesc una față de alta cu unghiul θ și că ele se deplasează una față de alta, în sensul lui T , cu cantitatea φ .

Lucrul mecanic, virtual, datorit acestor cantități, este:

$$T \varphi + M \theta.$$

Dacă deplasarea φ n'ar fi paralelă cu T și nici θ n'ar fi paralel cu M , atunci am avea în general $\overline{T} \varphi + \overline{M} \theta$.

Dacă celelalte forțe de pe grindă se deplasează cu cantitatea j , atunci avem:

$$(15) \quad \bar{T} \bar{\varphi} + \bar{M} \bar{\theta} + \Sigma \bar{F} \bar{j} = 0$$

Aceasta în mod general:

a) Să presupunem că facem $\theta = 0$. Aceasta are loc atunci când cele două secțiuni se deplasează așa fel încât și după deplasare, să rămână paralele între ele (fig. 90). Dacă secțiunile rămân paralele atunci rămân paralele între ele și axele celor două piese. În aceste condițiuni formula (15) se reduce la:

$$(15') \quad \bar{T} \bar{\varphi} + \Sigma \bar{F} \bar{j} = 0$$

adică am o relație între forța tăietoare din secțiune și restul forțelor de pe grindă.

b) Să presupunem că facem $\varphi = 0$ (fig. 91), adică cele două secțiuni parcurg același drum, atunci lucrul mecanic al lui T este $+\bar{T} \bar{\varphi}$

și $-\bar{T} \bar{\varphi}$ a căror sumă este zero și ne rămâne numai $\bar{M} \bar{\theta}$, și avem deci:

$$(15'') \quad \bar{M} \bar{\theta} + \Sigma \bar{F} \bar{j} = 0$$

o relație între momentul încovoietor și forțele pe grindă.

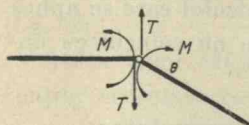


Figura 91

În cele ce urmează, pentru simplificare, vom presupune $\bar{\theta}$ paralel cu $\bar{M}$, $\bar{\varphi}$ cu $\bar{T}$ și $\bar{F}$ cu $\bar{j}$. Acestea fiind zise să ne ocupăm de liniile de influență a lui T și M . Pentru aceasta vom lua o sarcină $F = 1$ pe care o vom plimba pe grindă.

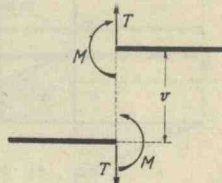


Figura 90

1. Linia de influență a forței tăietoare T.

Grinda fiind simplu rezemată, vom da o deplasare bucăților de grindă așa fel ca extremitățile să rămână mereu pe reazime și axele celor două bucăți să rămână paralele între ele (fig. 92).

Lucrul mecanic virtual total al grinzii este după (15')

$$V_1 \cdot 0 + T \varphi - F j + V_2 \cdot 0 = 0$$

deci

$$(16) \quad T = F j / \varphi = (1/\varphi) \cdot j$$

Am luat $-F j$ pentru că deplasarea j a forței, când este la dreapta secțiunii date, este dirijată către $-F$.

Așa dar, T va varia precum variază j , pentrucă v rămâne același oricare ar fi poziția forței $F = 1$. Cantitatea $1/v$ poartă numele de multiplicator al liniei de influență.

Să arătăm că această linie de influență este tocmai cea găsită anterior pe altă cale. Dacă notăm cu θ unghiul între direcția grinzii deplasată, față de cea inițială, atunci avem:

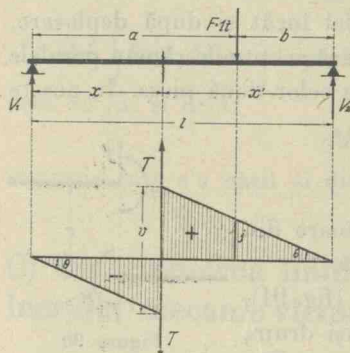


Figura 92

$$j = b \theta \quad : \quad v = l \theta$$

deci $T = b/l$

Când forța este în stânga secțiunii avem

$$j = -a \theta$$

și deci $T = -a/l$

adică tocmai relațiile (9) și (9') ce s'au găsit anterior.

Observație absolut generală.

Deplasările sistemului le considerăm infinit mici, și pentru acest motiv avem:

$$v/l = j/b = \theta = \sin \theta = \operatorname{tg} \theta$$

Prin urmare, cantităților v și j le aplicăm calculul care se aplică infiniților mici. Așa dar unghiurile de pe desen nu coincid cu unghiurile reale.

2. Linia de influență a momentului încovoietor.

Vom da o mișcare așa ca centrele de greutate ale celor două secțiuni să coincidă și grinda să rămână mereu pe reazime (fig. 93). Avem din (15'')

$$V_1 \cdot 0 + M \theta - F j + V_2 \cdot 0 = 0$$

De unde:

$$(17) \quad M = (1/\theta) \cdot j$$

deci M variază ca j , multiplicatorul liniei de influență fiind $1/\theta$.

Și pe această cale ajungem la rezultatele găsite anterior. În adevăr:

$$j = \theta_2 b; \quad x \theta = l \theta_2, \quad \text{de unde}$$

$$j/b = x \theta / l \quad \text{și}$$

$$M = j/\theta = b x / l$$

deci tocmai ecuația (10).

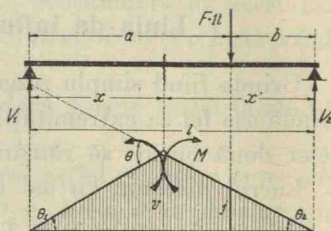


Figura 93

D) Sarcini indirecte.

În exemplele făcute până acum am presupus că sarcinile se aplică direct pe grindă. În unele cazuri sarcinile se transmit grinzii, prin intermediul altor piese auxiliare. De ex. la un pod de cale ferată, sarcinile, adică roțile, transmit sarcina lor șinei, aceasta, prin traverse, le transmite unor piese auxiliare, numite longeroni. Longeronii rezimă pe alte piese transversale, numite antretoaze și acestea la rândul lor transmit sarcinile grinzilor principale (fig. 94).

Distanța între două antretoaze poartă numele de panou. De obicei grinda se împarte într'un număr exact de panouri. În cele ce urmează se vor considera longeronii ca grinzi simplu rezemate pe antretoaze și vom presupune că avem de-a face tot cu o grindă simplu rezemată, luată ca grindă principală.

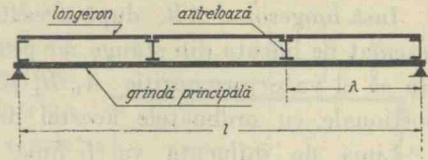


Figura 94

1. Linia de influență a forței tăietoare.

a) Soluția întâia.

Să considerăm o secțiune oarecare x în interiorul unui panou (fig. 95).

Atâta timp cât sarcina nu calcă în interiorul panoului care conține secțiunea considerată lucrurile se petrec ca și când sarcina s'ar aplica direct, pentru că forța tăietoare este egală cu V_1 sau cu $V_1 - F$ după cum sarcina este la dreapta sau stânga panoului respectiv.

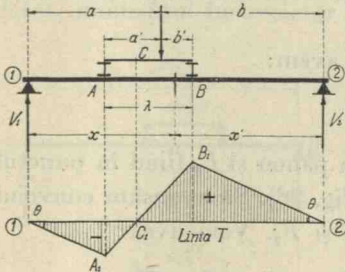


Figura 95

Să presupunem că sarcina $F = 1$ calcă în panou. O descompunem în două componente, pe cele două antretoaze, cari vor fi respectiv:

$$b'/l \text{ și } a'/l$$

Forța tăietoare este evident

$$T = b/l - b'/l$$

care este de asemenea o dreaptă.

Pentru $b' = 0$, ea are un punct comun cu b/l , adică linia de influență a forței tăietoare când sarcina e la dreapta panoului.

Pentru $a' = 0$, forța tăietoare este $T = -a/l$ deci are un punct comun cu linia de influență a forței tăietoare când forța e la stânga panoului.

b) Soluția doua.

Vom utiliza principiul lucrului mecanic virtual, procedând exact cum s'a arătat la sarcini direct aplicate. Dacă facem secțiunea în panou și dacă dăm o deplasare așa ca axele celor două bucăți să rămână paralele căpătăm dreptele 1 A_1 și B_1 2.

Însă longeronul AB , după această deplasare va avea punctul A rezemat pe bucata din stânga iar punctul B pe bucata din dreapta, așa că el va ocupa poziția $A_1 B_1$ și deci deplasările j vor fi proporționale cu ordonatele acestei drepte.

Linia de influență va fi linia frântă 1 $A_1 B_1$ 2. Mai avem $\theta_1 = 1/l$, $\theta = 1/\lambda$.

Se vede că ordonatele ei sunt nule la capete, și în punctul determinat de:

$$b/l = b'/\lambda$$

care poartă numele de *punct-limit de forță tăietoare*, pentru că orice forță aplicată la dreapta lui, dă în o secțiune oricare, din interiorul panoului, o forță tăietoare pozitivă și negativă când e la stânga lui.

2. Forța tăietoare maximă.

Ca să avem forța tăietoare maximă vom încărcă porțiunea pozitivă a liniei de influență.

Punând sarcina F_1 în punctul B , avem:

$$T = \sum_1^n F_i b_i / l$$

Să vedem dacă, forța F_1 intrând în panou și F_2 fiind în punctul B , n'avem forța tăietoare mai mare (fig. 96). Să avansăm convoiul spre stânga cu distanța c_1 dintre F_1 și F_2 . Vom avea:

$$T_1 = \sum_1^n F_i (b_i + c_1) / l - F_1 c_1 / \lambda$$

$$T_1 - T = c_1 \sum_1^n F_i / l - F_1 c_1 / \lambda = c_1 \left(\sum_1^n F_i / l - F_1 / \lambda \right)$$

Prin urmare $T_1 > T$ când

$$(18) \quad \sum_1^n F_i / l > F_1 / \lambda$$

Se poate ca forța tăietoare să fie maximă când F_3 calcă în B la limita panoului. In acest caz

$$T_2 = \sum_1^n F_i (b_i + c_1 + c_2)/l - F_1 (c_1 + c_2)/\lambda - F_2 c_2/\lambda$$

Avem
$$T_2 - T_1 = c_2 \left[\sum_1^n F_{i1}/l - (F_1 + F_2)/\lambda \right]$$

Deci $T_2 > T_1$ când

$$(18') \quad \sum_1^n F_i/l > (F_1 + F_2)/\lambda.$$

Neegalitățile (18) și (18') ne indică clar poziția convoiului, așa ca să avem forța tăietoare maximă. Tot din ele rezultă că dacă, într'un panou oarecare, forța tăietoare este maximă când F_1 calcă în interiorul panoului, atunci, pentru toate panourile dela stânga, aceasta este *cel puțin* poziția care dă maximum forței tăietoare.

In cazul când avem o sarcină uniform distribuită ea trebuie întinsă până la punctul limit de forță tăietoare pentru a avea valoarea ei maximă.

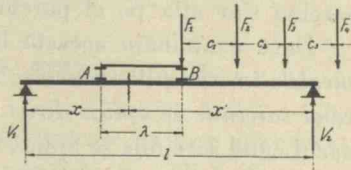


Figura 96

3. Linia de influență a momentului încovoietor M .

a) Soluția întâia.

Când sarcina se află la stânga sau la dreapta panoului considerat, momentul încovoietor în o secțiune x , cuprinsă în interiorul panoului, este același ca și când sarcina s'ar aplica direct pe grindă (fig. 97).

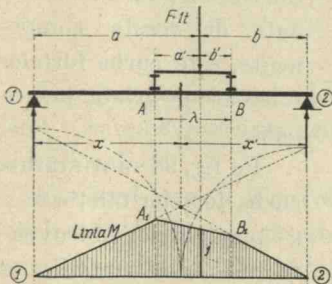


Figura 97

Când sarcina calcă în panou momentul în secțiunea x este:

$$M = 1. b x/l - b' x_1/\lambda$$

și variază linear.

Pentru $b' = 0$, linia aceasta are un punct B_1 , comun cu linia de influență a momentului încovoietor în aceeași secțiune x , când sarcina se aplică direct pe grindă. Această linie mai are și punctul A_1 , comun cu aceeași linie când $a' = 0$. Așa dar, linia de influență este linia frântă $1 A_1 B_1 2$.

b) Soluția a doua.

Cu ajutorul lucrului mecanic virtual se procedează astfel:

Introducem în secțiunea considerată o articulație și, pentru a restabili echilibru, un moment M , întocmai ca și când sarcina s'ar aplica direct, și vom avea

$$M = (1/\theta) j.$$

Antretoaza A din stânga panoului după această deplasare, ajunge în A_1 , iar cea din dreapta, B , în B_1 , așa ca după deplasare ocupă poziția $A_1 B_1$ (fig. 97). Deci poziția langeronului va fi $A_1 B_1$ și orice sarcină s'ar afla pe el parcurge drumurile parcurse de el.

Dacă examinăm această linie de influență, se constată că *momentele în o secțiune oarecare x , sunt totdeauna mai mici ca în cazul când sarcinile se aplică direct*. Linia de influență este aceeași, ca în cazul când sarcinile se aplică direct, numai în dreptul antretoazelor. Așa dar, *pentru o grindă oarecare, vom căuta momentele maxime numai în dreptul antretoazelor*.

Când avem un sistem de sarcini, fix pe grindă, vom considera momentele numai în dreptul antretoazelor, între ele momentul variind liniar, cum se va vedea imediat.

4. Curbele forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare.

Fie un sistem fix de sarcini; pe grinda principală se aplică numai forțele ce se transmit prin intermediul antretoazelor, prin urmare,

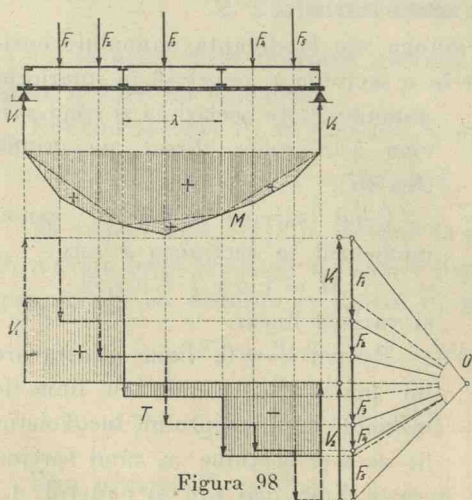


Figura 98

toate forțele de pe grindă, le vom înlocui cu componentele lor pe antretoaze. Curba forțelor tăietoare date de aceste componente, este curba forțelor tăietoare pe grinda principală.

Pe fig. 98 sunt arătate curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare când sarcinile se aplică direct și indirect pe grindă, chestiunea este foarte simplă și nu este

nevoie de nici o explicație a figurii. Figura dă în același timp și forțele tăietoare și momentele încovoietoare în langeroni.

Se vede de ex. că forța tăietoare în grinda principală, în panourile extreme, este mai mică decât în cazul sarcinilor aplicate direct și asta se explică prin aceea că o parte din sarcinile de pe longeron se transmit, prin antretoaza de capăt, direct reazimului, deci nu prin grinda principală.

Se mai vede că și momentele încovoietoare, în grindă sunt mai mici ca la sarcinile direct aplicate și au aceleași valori numai în dreptul antretoazelor.

Deci există un avantaj în cazul când sarcinile se aplică indirect.

E) Moment maximum maximorum.

Până acum am considerat o secțiune oarecare, în care am căutat momentul maximum. În cazul când sarcinile se aplică direct pe grindă, se pune chestiunea, să se găsească atât poziția convoiului cât și secțiunea în care se produce cel mai mare moment încovoiator posibil.

Atunci se zice de obicei că se caută momentul *maximum maximorum*.

a) Să presupunem că avem o grindă simplă rezemată parcursă de o singură sarcină (fig. 99).

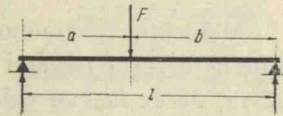


Figura 99

Momentul maxim este în dreptul sarcinii și are valoarea:

$$M = F ab/l.$$

Momentul maximum maximorum are loc când $a = b$, și este:

$$M = Fl^2/4$$

Este cea mai mare valoare pe care poate să o aibă momentul când o sarcină parcurge grinda și are loc atunci când sarcina este la mijlocul ei.

b) *Cazul general.* Convoiul de sarcini care intră pe grindă are rezultanta R , care se găsește la distanțele a_r și b_r de cele două reazime (fig. 100). Momentul maxim va avea loc neapărat în dreptul unei forțe. Să presupunem că F_i este forța în dreptul căreia are loc maximum. Să găsim acum poziția convoiului care dă maximum maximorum. Avem:

$$M = R b_r (a_r - c)/l - \sum_{i=1}^{i-1} F_h d_h$$

Când convoiul se mișcă la dreapta și la stânga atunci variază a_r și b_r și deci și sarcina F_i ca poziție. Maximum max. are loc pentru $d M/d a_r = 0$, adică pentru:

$$(19) \quad a_r = (l + c)/2, \text{ și } b_r = (l - c)/2$$

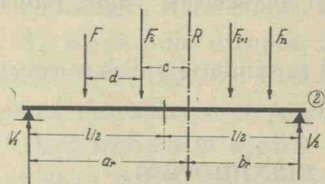


Figura 100

care în vorbe ne spune că: *poziția convoiului care dă momentul maximum maximorum este aceea pentru care mijlocul grinzii împarte în două distanța între rezultanta forțelor cari intră pe grindă și forța în dreptul căreia are loc maximum maximorum. În acest caz valoarea momentului maximum maximorum este:*

$$(20) \quad M_{max.} = R (l - c)^2 / 4 l - \sum_1^{i-1} F_h d_h$$

Momentul maximum max. poate avea loc în dreptul lui F_{i+1} sau în dreptul oricărei alte forțe. Nu putem ști deci care e mai mare, decât făcând calculele numerice. Care este forța în dreptul căreia are loc maximum max., ne-o indică formula (20), și anume: R să fie cât mai mare, c cât mai mic, deci momentul maximum max. are loc pentru forțele, cari sunt grupate în jurul rezultantei, și $\sum_1^{i-1} F_h d_h$ cât mai mică.

Din cele de mai sus se vede că momentul maximum maximorum numai întâmplător poate avea loc la mijlocul grinzii.

F) Încărcări uniform distribuite echivalente unui convoi de sarcini dat.

Pentru simplificarea calculelor, se obișnuiește adesea, ca un convoi oarecare de sarcini să-l înlocuim cu o sarcină uniform distribuită, p . Această sarcină p poartă numele de sarcină echivalentă convoiului dat.

Această echivalență depinde de punctul de vedere ce ne interesează.

De ex., am găsit în secțiunea x, x' la o grindă simplu rezemată, cu sarcinile aplicate direct, că forța tăietoare este T , atunci sarcina echivalentă p , din punctul de vedere al forței tăietoare în această secțiune, este dată de formula:

$$T = p x'^2/2.$$

Pentru altă secțiune va rezulta alt p . În ceea ce privește momentul încovoietor, se presupune că el este echivalent cu acel dat de o sarcină p , care însă nu este distribuită pe lungimea l ci pe o lungime mai mică. Circulările oficiale prescriu, că momentul maximum maximorum să-l egalăm cu:

$$M_{max. max.} = p 0,88^2 l^2 / 8$$

adică pe o deschidere de $0,88 l$ în loc de l . Pe partea centrală a grinzii și anume $0,12 l$, se presupune momentul constant și egal cu momentul maximum maximorum. Curbă momentelor maxime se compune atunci — în mod convențional — din două arce de parabolă racordate cu o dreaptă la mijloc (fig. 101). Momentul în secțiunea x , este:

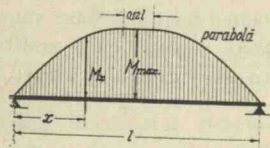


Figura 101

$$M_x = M_{max. max.} x (0,88 l - x) / (0,44^2 l^2)$$

notând $x/l = \xi$, avem:

$$M_x = M_{max. max.} \xi (0,88 - \xi) / 0,44^2$$

în care ξ variază între zero și $0,44$.

Circulările oficiale dau pentru diferitele convoiuri și deschideri l , valoarea momentelor maximum maximorum și tabele gata calculate pentru valorile lui $\xi (0,88 - \xi) / 0,44^2$.

Cele două parabole, astfel construite, se iau drept curbă a momentelor încovoietoare maxime. Calculele arată că această curbă a momentelor, dă valori mai mari pentru M_x decât dă convoiul în realitate, deci din punctul de vedere al calculului suntem acoperiți.

Aplicațiuni recapitulative.

Aplicația Nr. 24. O grindă încadrată la o extremitate și liberă la cealaltă, este încărcată cu o sarcină uniform distribuită $p/\text{kg}/\text{m}$. Se cere curba momentelor încovoietoare și a forțelor tăietoare.

Avem:

$$T = -p x$$

$$M = -p x^2/2.$$

Variază deci după o dreaptă și o parabolă ca în fig. 102. Au valorile maxime pentru $x = l$.

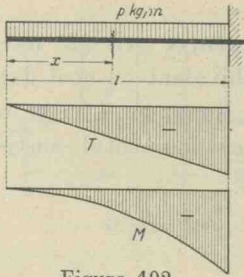


Figura 102

Aplicația Nr. 25. Să se găsească linia de influență a forței tăietoare și a momentului încovoietor în secțiunea x , a unei grinzi încadrată la o extremitate.

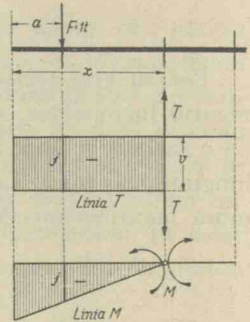


Figura 103

Pentru forța tăietoare vom face o secțiune în x și vom deplasa bucata care se poate deplasa, cu o cantitate v și paralel cu ea însăși (fig. 103). Dacă $F = 1$ parcurge drumul j avem:

$$T v + F j = 0$$

Se vede că $v = j$, deci

$$T = -F = -1.$$

Pentru moment vom introduce o articulație și avem

$$M \theta + F j = 0$$

deci

$$M = -(1/\theta) j$$

Însă $j = (x - a) \theta$, deci

$$M = -(x - a)$$

Orice sarcină care calcă la dreapta secțiunii x , dă forțe tăietoare și momente încovoietoare nule în secțiunea x .

Aplicația Nr. 26. O grindă care se sprijină pe două reazime, cari nu sunt la capetele grinzii, poartă numele de grindă cu console. Console se numesc părțile grinzii cari depășesc reazimile (fig. 104).

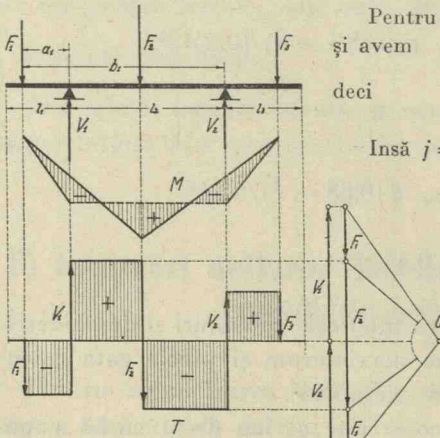


Figura 140

Să presupunem grinda încărcată cu un sistem de 3 sarcini concentrate F_1 , F_2 și F_3 .

Să se construiască curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare.
Reacțiunile sunt:

$$V_1 = (b_1 F_1 + b_2 F_2 - b_3 F_3) / l; \quad V_2 = (-a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3) / l$$

și se deduc luând momentele în raport cu cele două reazime.

Forța tăietoare și momentul încovoietor au diferite valori după poziția secțiunii. Dacă socotim pe x dela V_1 ca origine avem:

Intervalul	Forța tăietoare T .	Momentul încovoietor M .
$o - F_1$	o	o
$F_1 - V_1$	$-F_1$	$-(a_1 - x) F_1$
$V_1 - F_2$	$V_1 - F_1$	$V_1 x - (x + a_1) F_1$
$F_2 - V_2$	$V_1 - F_1 - F_2$	$V_1 x - (x + a_1) F_1 - (x - a_2) F_2$
$V_2 - F_3$	$V_1 + V_2 - F_1 - F_2 = F_3$	$F_3 (a_3 - x)$
$F_3 - 3$	$F_3 - F_3 = o$	o

Grafic problema se rezolvă foarte simplu, determinând linia de închidere a poligonului funicular așa ca momentul în dreptul reazimilor să fie nul.

În fig. 104 este arătată curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare, cari prezintă porțiuni pozitive și negative.

Aplicația Nr. 27. O grindă cu console este încărcată cu o sarcină uniform distribuită p (fig. 105). Distanța între reazime este l , iar lungimea celor două console este l_1 .

Să se determine raportul l/l_1 așa ca momentul maxim pozitiv să fie egal în valoare cu cel negativ.

Reacțiunile sunt

$$V_1 = V_2 = p (l_1 + l/2).$$

Momentul în dreptul reazimilor este

$$M_1 = -p l_1^2 / 2$$

Momentul maxim la mijlocul grinzii este

$$V_1 l/2 - p (l_1 + l/2)^2 / 2 = p (l^2/4 - l_1^2) / 2$$

Egalând cele două valori avem:

$$l/l_1 = 2\sqrt{2}$$

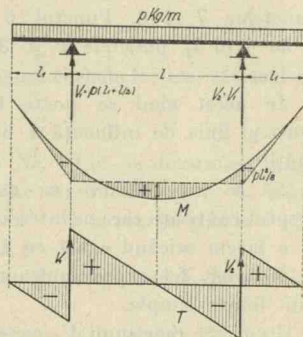


Figura 105

Aplicația Nr. 28. Să se găsească linia de influență a reacțiilor, a forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare în diferite secțiuni la o grindă cu console.

În fig. 106 sunt indicate acestea. Nu e nevoie de nicio explicație.

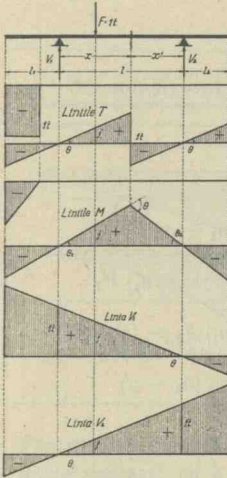


Figura 106

Deplasarea în dreptul cantității care ne interesează putem să o luăm egală cu 1, și atunci rezultă numai decât unghiurile θ . Acest unghi, în cazul reacțiunii V_1 și a forței tăietoare T este egal cu $1/l$; în cazul momentului încovoiator $\theta_1 = 1/x$, $\theta_2 = 1/x'$, $\theta = l/xx'$. Aceasta pentru secțiunea dintre reazime. Pentru secțiunea de pe consolă, pentru T avem $\theta = 0$, iar pentru moment θ arbitrar. Cu aceste elemente calculăm imediat valorile lui j .

Aplicația Nr. 29. Avem un sistem de grinzi cu console ca în fig. 107.

Se cer liniile de influență ale reacțiilor: V_1, V_5, V_7 , a forței tăietoare și a momentului încovoiator în secțiunea x din deschiderea l_7 .

Vom explica numai cum s'a construit linia de influență T_x și M_x din secțiunea x .

Pentru prima facem o secțiune în grindă și dăm o deplasare bucăților de grindă, așa ca după această deplasare, cele două bucăți de grindă să fie paralele. O bucată se va roti în jurul reazimului 8, iar cealaltă în jurul reazimului 7. Punctul 6 va ajunge în 6_1 , punctul 5 rămâne pe loc, iar 4 în 4_1 , pentru că bara $l_4 + l_5$ se rotește în jurul punctului 5. Punctul 3 rămâne pe loc.

Pentru momentul încovoiator introducem în secțiunea x un moment pozitiv.

Bucățile l_6 și l_8 se rotesc în jurul punctelor 7 și 8. Punctul 6 ajunge în 6_2 iar 4 în 4_2 , punctele 5 și 3 rămânând pe loc.

În acest mod se poate foarte lesne construi linia de influență a oricărei cantități.

Să se mai observe ca deplasarea în dreptul cantității care ne interesează putem să o facem oricând egală cu 1.

În acest fel expresiunile unghiurilor θ sunt foarte simple.

În cazul reacțiunii V_1 avem $\theta = 1/l_1$, pentru V_5 , $\theta = 1/l_5$, pentru V_7 , $\theta = 1/l_7$, pentru forța tăietoare $\theta = 1/l_7$, iar pentru moment $\theta_1 = 1/x$, $\theta_2 = 1/x'$, $\theta = l/xx'$.

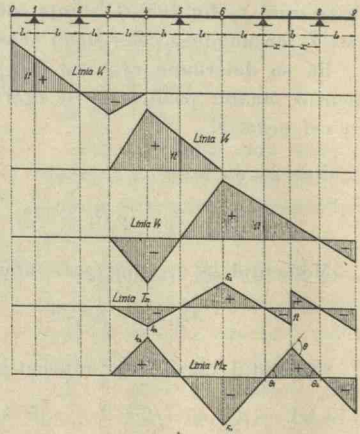


Figura 107

Aplicația Nr. 30. O grindă, simplu rezemată la ambele extremități, este făcută din două bucăți, 1—2 și 3—4. Extremitatea 2 reazimă pe grinda 3—4, iar capătul 3 este legat de 1—2 ca să nu se desfacă (fig. 108). Grinda este încărcată cu un sistem de sarcini oarecare. Să se găsească curba forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare în fiecare grindă. (I. Ionescu).

Cu ajutorul poligonului forțelor, construim poligonul funicular, cu ajutorul căruia deducem reacțiunile V_1 și V_4 . Pentru aceasta, prin polul 0, ducem o paralelă N cu linia de închidere a poligonului funicular θ .

Să considerăm grinda 1—2. Ea se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor V_1 , F_1 , F_2 și a reacțiunilor V_3 și V_2 .

Laturile extreme de poligon funicular pentru grupul de forțe V_1 , F_1 , F_2 , sunt laturile θ și θ_2 .

Linia de închidere care întâlnește aceste laturi și liniile de acțiune ale lui V_3 și V_2 este θ' . Dacă ducem în poligonul forțelor o paralelă N' cu θ' , găsim reacțiunile V_2 și V_3 .

Curba momentelor pentru grinda 1—2 este formată din laturile θ_0 , θ_1 , θ_2 , θ' și θ .

În mod analog se arată că pentru grinda

3—4 curba momentelor este θ' , θ_2 , θ_3 și θ .

Reacțiunile fiind determinate se află ca pe figură curbele forțelor tăietoare.

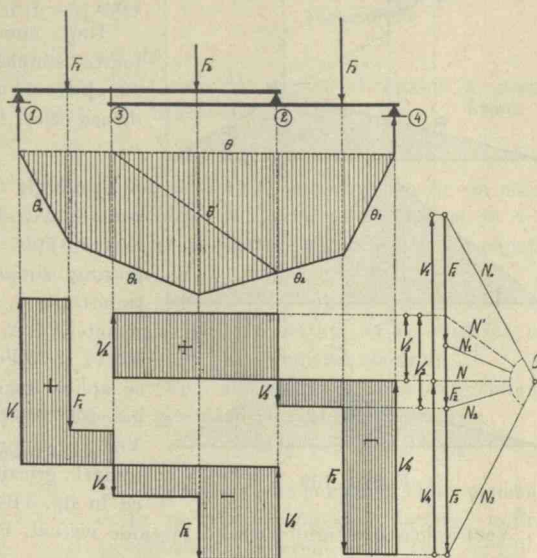


Figura 108

Aplicația Nr. 31. Pentru grinda din aplicația Nr. 30 să se determine linia de influență a forțelor tăietoare pentru o secțiune din intervalul 2—3, atât în grinda de sus cât și în grinda de jos. Sarcina $F = 1$ parcurge grinda 1—2 iar de acolo, pe intervalul 2—4, parcurge grinda 3—4.

Aceste linii de influență se determină după regulile date anterior, fără nicio altă considerațiune specială.

În fig. 109, T_s este linia de influență în secțiunea x în grinda de sus, T_i idem în grinda de jos, M_s este linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea x , în grinda de sus, M_i idem în grinda de jos.

Să explicăm construcția uneia din ele, de ex. T_s . În grinda superioară facem o secțiune și aplicăm forțele tăietoare T pozitive. Bucata 1— x

se va lăsa în jos până în o poziție oarecare. Punctul 3, rămânând mereu pe bara 1— x , va ajunge în 3_s , și bara 3—4 va ocupa poziția 3_s —4. Punctul 2 fiind mereu pe bara 3—4 ajunge în 2_s . Bucata de bară x —2, după deplasare, trebuie să rămână paralelă 1— 3_s , deci prin 2_s ducem o paralelă la aceasta, care taie verticala lui x în x'_s . Forța $F=1$ deplasându-se pe grinzi pe intervalele 1—2—4, linia de influență e dată de ordonatele acestora, după deplasare.

După cum se vede chestiunea este foarte simplă. Calculul ordonatelor $\bar{j}$ cu ajutorul unghiurilor θ este de asemenea ușor.

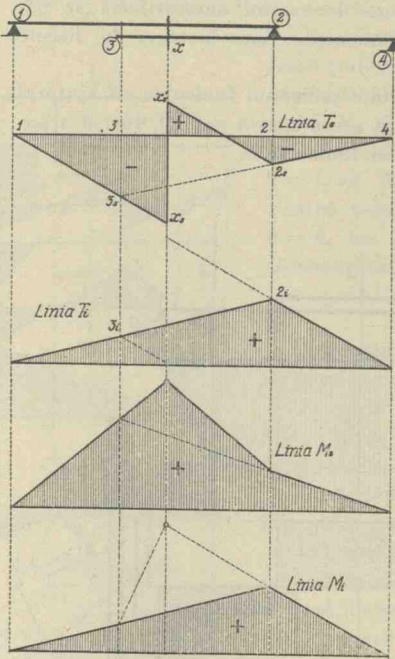


Figura 109

Aplicația Nr. 32. Trei grinzi orizontale 14, 25 și 36 se sprijină cu extremitățile lor 4, 5 și 6 pe trei reazime simple 4, 5 și 6, iar cu extremitățile 1, 2 și 3, reazimă simplu în punctele 1, 2 și 3 respectiv pe grinzi 36, 14 și 25. Pe grinda 14, în punctul A, se aplică sarcina verticală F . Să se găsească reacțiunile din reazimile 1, 2,... Vom presupune că punctele 1, 2 și 3 împart grinzi în același raport x/l , ca în fig. 110.

Vom aplica principiul lucrului mecanic virtual. Presupunem că reacțiunile sunt $V_1, V_2, \dots$

Dacă punctul 1 de pe grinda 14 se lasă în jos cu v_1 , atunci 2 se lasă cu $v_1 x/l$, punctul 3 cu $v_1 x^2/l^2$ iar punctul 1 de pe grinda 36 cu $v_1 x^3/l^3$. Reacțiunea V_1 a parcurs deci diferența de drum $v_1 (1 - x^3/l^3)$ și a efectuat lucrul mecanic virtual $V_1 v_1 (1 - x^3/l^3)$.

Forța F a parcurs drumul $v_1 a/l$ și a efectuat lucrul mecanic virtual $-F v_1 a/l$. Avem deci:

$$V_1 (1 - x^3/l^3) = F a/l$$

$$\text{care ne dă } V_1 = F a l^2 / (l^3 - x^3).$$

Analog găsim:

$$V_2 = F a x^2 / (l^3 - x^3),$$

$$V_3 = F a x l / (l^3 - x^3)$$

și

$$V_1 + V_2 + V_3 = F a / (l - x).$$

Având aceste reacțiuni deducem numai de câțiva pași prin proiecții.

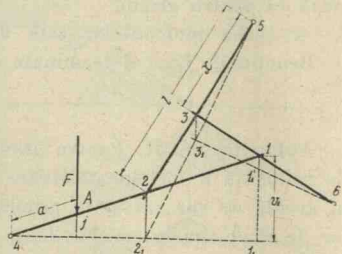


Figura 110

Aplicația Nr. 33. Două grinzi simplu rezemate sprijină cu câte un cap al lor pe un același reazim. Să se găsească reacțiunea maximă pe acel reazim sub acțiunea unui convoi mobil. Linia de influență, a sumei reacțiunilor $V_2 + V_3$, este un triunghi (fig. 111), deci ca și a momentului încovoietor ce s'ar produce în dreptul lui $V_2 + V_3$ dacă am avea o grindă simplu rezemată de deschiderea $l_1 + l_2$. Deci:

$$F j = (V_2 + V_3) v = M \theta$$

sau $V_2 + V_3 = M \theta / v = M (l_1 + l_2) / l_1 l_2$.

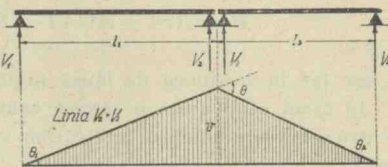


Figura 111

Așa dar, poziția convoiului care dă maximum pentru $V_2 + V_3$, este aceea care dă momentul maxim în aceeași secțiune, considerând o grindă cu deschiderea $l_1 + l_2$.

Aplicația Nr. 34. O grindă de 6 m deschidere este parcursă de un convoi format din o sarcină uniform distribuită, de $2 t/m$ pe o lungime de 4 m și o sarcină concentrată de $2 t$, care este la distanțele 3 m și 1 m de capetele sarcinii uniform distribuite (fig. 112).

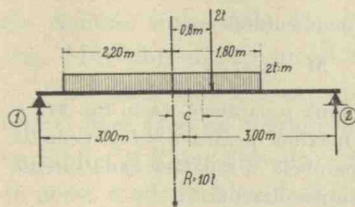


Figura 112

Grinda fiind simplu rezemată la ambele sale extremități; să se găsească momentul maximum maximorum.

Vom afla mai întâi valoarea rezultantei și poziția ei față de convoi. Avem:

$$R = 2 \times 4 + 2 = 10 t$$

Pentru a afla poziția ei luăm momentul în raport cu mijlocul sarcinii uniform distribuite și avem

$$2.1/10 = 0,2 m$$

Prin urmare dela mijlocul sarcinii uniform distribuite, luăm 0,2 m și acolo plasăm rezultanta de $10 t$.

Așa dar, această rezultantă se găsește la distanțele 2,20 m și 1,80 m de cele două extremități ale sarcinii uniform distribuite.

Ca să avem momentul maximum maximorum, așezăm convoiul așa ca mijlocul grinzii să împartă în două distanța între rezultantă și secțiunea în care are loc maximum. Această secțiune poate fi orice secțiune din regiunea sarcinii uniform distribuite, pentru că orice sarcină pdx , poate fi considerată ca o sarcină concentrată.

Să presupunem că acea secțiune este între rezultantă și sarcina de $2 t$.

Dacă din calcul va rezulta că secțiunea este în această regiune, atunci secțiunea este bine aleasă. Dacă rezultă în altă regiune, o vom lua acolo.

Pentru ca momentul să fie maxim trebuie ca forța tăietoare să fie nulă.

Avem:

$$T = 10 (3 + c/2)/6 - 2 (2,20 + c) = 0$$

din care scoatem $c = 0,514 m$.

Prin urmare, secțiunea este bine aleasă, căci distanța între rezultantă și forța de 2 t este 0,80 m.

Valoarea momentului maximum maximorum este:

$$M = R (l - c)^2 / 4 l - \sum_1^i F_h d_h = 10,348 \text{ tm}$$

și are loc în secțiunea de lângă mijlocul grinzii.

În cazul când avem o sarcină continuă și mai multe sarcini concentrate, pentru a micșora numărul încercărilor vom alege secțiunea de maxim în dreptul unei sarcini concentrate.

Dacă forța tăietoare în dreptul acelei sarcini schimbă de semn, atunci secțiunea este bine aleasă. Dacă însă în dreptul ei forța tăietoare este pozitivă, secțiunea de maxim se găsește la dreapta acelei sarcini și la stânga când este negativă.

Aplicația Nr. 35. O sarcină continuă uniform distribuită avansează pe o grindă simplu rezemată. Cum variază momentele maxime cu poziția încărcăturii (I. Ionescu) (fig. 113).

Momentul maxim va fi în secțiunea a în care forța tăietoare este nulă deci acolo unde

$$px^2/2l - p(x - a) = 0, \therefore a = x - x^2/2l$$

iar valoarea momentului este:

$$M = p a^2 / 2$$

variază deci după o parabolă, ca în fig. 113 și are valoarea maximă pentru $a = l/2$. Cealaltă ramură de parabolă o căpătăm când sarcina avansează dinspre dreapta.

Din acest exemplu se vede cât de repede crește momentul încovoietor cu deschiderea.

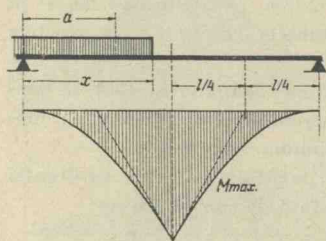


Figura 113

GRINZI CU ZĂBRELE PLANE.

A) Generalități și definiții.

1. Definiții.

Cu ajutorul barelor putem face și o altă serie de construcții.

Două puncte oarecare le putem lega, în mod invariabil între ele, prin o bară rigidă. Asta înseamnă că numai distanța între ele rămâne invariabilă. De aceste două puncte, să zicem A și B , (fig. 114) putem fixa un al treilea punct C , în două moduri:

1°. Prin o bară AC invariabilă și care face un unghi invariabil CAB cu direcția AB . În acest mod, dacă barele AB și AC sunt indeformabile, punctul C va păstra o poziție invariabilă față de A și B .

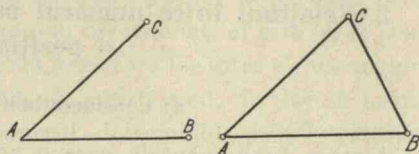


Figura 114

2°. Prin două bare AC și BC cari se pot roti, deci cari sunt articulate în punctele A , B și C . Dacă barele sunt articulate în aceste puncte și dacă lungimile AB , BC și CA sunt invariabile ca lungime, atunci poziția relativă a punctelor A , B și C , unul față de altul, este invariabilă. În acest caz se zice că construcția ABC este rigidă.

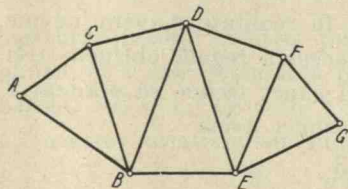


Figura 115

Ne vom ocupa deocamdată numai de al doilea fel de fixare.

De construcția ABC , și în planul ei, putem fixa un al patrulea punct D (fig. 115) tot prin două bare, BD și CD , invariabile ca lungime și articulate în punctele B , C și D .

În acest mod, în plan, cu ajutorul barelor articulate la extremități, putem construi o figură $ABCDEFGF\dots$ indeformabilă și în care diferitele puncte $A, B, C\dots$ păstrează unele față de altele o poziție invariabilă când lungimile barelor rămân invariabile. Figura astfel formată poartă numele de *grindă cu zăbrele plană* pentru că este cuprinsă într'un plan.

Conturul $ACDFG$, al părții superioare, poartă numele de *talpa superioară*, iar cel al părții inferioare ($ABEG$) poartă numele de *talpa inferioară*. Barele din interiorul acestui contur precum CB, BD, DE și EF poartă numele de *diagonale*. Când o parte din diagonale sunt verticale, atunci acelea se numesc

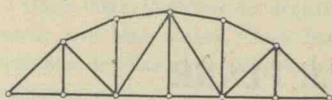


Figura 116

montanji. Punctele $A, B, C, \dots$ se numesc *nodurile grinzii cu zăbrele*.

Când nodurile tălpii superioare ale unei grinzi cu zăbrele se găsesc pe o parabolă, iar cele inferioare pe o dreaptă, grinda se numește *grinda cu zăbrele parabolică* (fig. 116). După forma tălpilor, grinzile cu zăbrele se clasifică în o serie de grupe și nu e locul aci de a ne ocupa cu aceasta.

2. Relațiuni între numărul barelor, numărul nodurilor și poziția lor.

a) Considerațiuni cinematice.

Ipoteza fundamentală, care o admitem la construcția grinzilor cu zăbrele, este că toate barele sunt *articulate* în noduri, și deci *fiecare bară în parte este articulată la ambele sale extremități*.

Observăm apoi că, pentru a fixa un punct oarecare, avem nevoie de două bare. Dacă n este numărul nodurilor, atunci avem nevoie de $2n$ bare. După această regulă ar fi trebuit să avem pentru primele două puncte patru bare, pe când în realitate n'avem nevoie decât de o singură bară. Deci după această regulă obținem trei bare mai mult și ca să avem numărul exact trebuie să scădem 3 bare. Dacă m este numărul barelor, atunci avem

$$(1) \quad m = 2n - 3$$

Formula aceasta stabilește legătura între numărul barelor și numărul nodurilor. Dacă grinda îndeplinește această condiție este *rigidă*. Această condiție este necesară dar nu este suficientă. În adevăr, să presupunem că din grinda cu zăbrele suprimăm o bară

de exemplu 4—5 (fig. 117). În aceste condițiuni, o parte a grinzii se va mișca față de cealaltă pentru că neîndeplinind condiția (1) construcția numai este rigidă și dacă de ex. porțiunea I rămâne fixă, atunci porțiunea II se va mișca față de prima, nodurile ei descriind niște curbe C .

Pentru a împiedica această mișcare este suficient ca oricare din nodurile porțiunii II să fie legat în mod invariabil cu o bară rigidă de oricare din nodurile porțiunii I.

Putem deci înlocui bara 4—5 de ex. prin bara 3—6.

Prin urmare — în condițiile de mai sus — putem înlocui o bară oricare a grinzii cu zăbrele prin o oricare altă bară, afară de barele de care facem mențiune imediat.

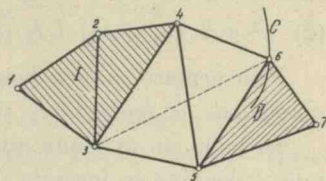


Figura 117

Nodurile părții II, când am suprimat bara 4—5 și menținem partea I fixă, descriu niște curbe C . Dacă legăm un nod oarecare al părții a doua cu o bară rigidă la un nod din partea I, care se găsește pe normală la curba C descrisă de nodul din partea II, atunci cele două părți nu mai sunt legate rigid între ele.

În adevăr, în loc ca nodul respectiv să fie legat la partea I prin două bare care fac între ele un unghi determinat, el este legat prin două bare care fac între ele un unghi nul. În acest mod, în loc să avem punctul determinat prin intersecția a două cercuri oarecare, el este determinat prin punctul de tangență a două cercuri așa cum se arată în fig. 118.

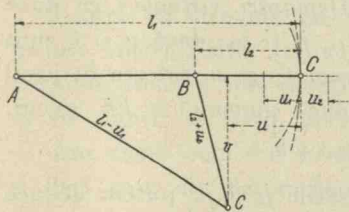


Figura 118

În acest caz, pentru lungiri sau scurtări infinit mici ale barelor de legătură, rezultă pentru punctul C deplasări finite. Să presupunem că v este deplasarea punctului C după normala la AC , când barele, $AC = l_1$, $BC = l_2$, s'au scurtat și lungit respectiv cu u_1 și u_2 , aceste variațiuni ale lungimilor fiind infinit mici, avem:

$$(l_1 - u)^2 + v^2 = (l_1 - u_1)^2$$

$$(l_2 - u)^2 + v^2 = (l_2 + u_2)^2$$

din care deducem:

$$l_1 - l_2 = \sqrt{(l_1 - u_1)^2 - v^2} - \sqrt{(l_2 + u_2)^2 - v^2}$$

Neglijând infiniții mici u_1 și u_2 față de l_1 și l_2 , avem:

$$\sqrt{(l_1 - u_1)^2 - v^2} \simeq l_1 - u_1 - v^2/2 l_1$$

$$\sqrt{(l_2 + u_2)^2 - v^2} \simeq l_2 + u_2 - v^2/2 l_2$$

sau:

$$(2) \quad v^2 = 2 (u_1 + u_2) l_1 l_2 / (l_1 - l_2) \quad , \quad u = (l_1 u_1 + l_2 u_2) / (l_1 - l_2)$$

Dacă punctul C este între A și B și dacă măsurăm pe u pozitiv în sensul de la A spre C atunci avem analog:

$$(2) \quad v^2 = 2 (u_1 + u_2) l_1 l_2 / (l_1 + l_2) \quad , \quad u = (l_1 u_1 - l_2 u_2) / (l_1 + l_2)$$

Prin urmare, pentru lungiri infinit mici u_1 și u_2 a barelor l_1 și l_2 corespunde o deplasare v finită a nodului C .

Să luăm un exemplu numeric: $l_1 = 6$ m, $l_2 = 4$ m, $u_1 + u_2 = 0,1$ mm. Înlocuind în formula (2) căpătăm $v = 49$ mm. Așa dar, pentru o variație totală a lungimii barelor de 0,1 mm, pentru punctul C corespunde o deplasare normală pe direcția barelor de 49 mm, adică de 490 ori mai mare. În aceste condiții nu mai putem spune că punctul C este fixat în mod invariabil de punctele A și B prin lungimile l_1 și l_2 .

Se poate găsi o expresiune analitică a acestei condițiuni.

Să presupunem că bara de lungime l_{ik} și direcție $\bar{l}_{ik}$ leagă nodurile i și k .

Să mai presupunem că dăm nodurilor i și k deplasările $\bar{j}_i$ și $\bar{j}_k$.

Se va demonstra mai târziu la «Deplasări virtuale» că dacă $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ și $\bar{\theta}$ sunt trei vectori normali pe $\bar{j}_i$, $\bar{j}_k$ și $\bar{l}_{ik}$, dacă u și θ sunt respectiv cantitățile cu care bara se lungește și se rotește în jurul unui punct anume determinat și că dacă punem $v = l\theta$, avem:

$$(3) \quad j_k \bar{\beta} - j_i \bar{\alpha} = v \bar{l} - u \bar{\theta}$$

Prin urmare, dacă cunoaștem deplasările j_k și j_i , putem deduce pe u și v și reciproc.

$$\text{Relația:} \quad v \bar{l} - u \bar{\theta} = 0$$

reprezintă condiția de nedeformabilitate a barei, căci din această relație rezultă neapărat $u = 0$, $v = 0$.

Această relație este satisfăcută numai dacă bara stă pe loc sau are o mișcare de translație.

Să scriem această relație pentru toate barele cari pleacă din nodul i . Vom avea:

$$(4) \quad \sum v_{ik} \bar{l}_{ik} = \bar{u}_i$$

notând:

$$(5) \quad \bar{u}_i = \sum u_{ik} \bar{\theta}_{ik}$$

Dacă tuturor barelor le dăm lungiri cunoscute u_{ik} , atunci u_i este cunoscut.

Pentru generalizare vom presupune că un nod este legat cu toate celelalte prin bare.

Scriind această relație pentru toate nodurile, vom avea n ecuații de forma:

$$(6) \quad \begin{aligned} 0 &+ \nu_{12} \bar{\lambda}_{12} + \nu_{13} \bar{\lambda}_{13} + \nu_{14} \bar{\lambda}_{14} + \dots = \bar{u}_1 \\ \nu_{21} \bar{\lambda}_{21} + 0 &+ \nu_{23} \bar{\lambda}_{23} + \nu_{24} \bar{\lambda}_{24} + \dots = \bar{u}_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

cu $m = 2n - 3$ necunoscute ν .

Pentru a rezolva acest sistem de ecuații, ne alegem un sistem de axe de coordonate $\bar{\xi}$ o $\bar{\eta}$ și multiplicăm fiecare ecuație scalar respectiv cu $\bar{\xi}$ și $\bar{\eta}$. În acest mod am transformat ecuațiile de mai sus în $2n$ ecuații scalare.

Dacă, după deformație, așezăm, de ex., grinda așa fel ca nodul 1 să fie în originea axelor de coordonate, atunci $\bar{u}_1 = 0$, și dacă așezăm și bara 1—2 după axa $\bar{\xi}$, atunci $\bar{u}_2$ este dirijat după această axă și ecuația respectivă multiplicată cu $\bar{\eta}$ anulează partea doua a ei.

Așadar, din toate ecuațiile ne rămân numai $2n - 3$, adică atâtea câte necunoscute avem de aflat.

Am putea impune și alte condiții, de ex.: deplasarea nodului 1 să fie nulă, iar a nodului n să se facă după o direcție oarecare.

Pentru ca să avem valori finite pentru ν , când u_i are de asemenea valori finite, trebuie ca determinantul Δ_s al coeficienților necunoscutelor ν din ecuațiile scalare de care am vorbit mai sus să fie diferit de zero, deci $\Delta_s \neq 0$.

Am văzut cum din ecuațiile vectoriale deducem pe cele scalare și deci cum din determinantul vectorial simbolic:

$$(7) \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\lambda}_{12} & \bar{\lambda}_{13} & \dots \\ \bar{\lambda}_{21} & 0 & \bar{\lambda}_{23} & \dots \\ \bar{\lambda}_{31} & \bar{\lambda}_{32} & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

putem deduce pe Δ_s al ecuațiilor scalare.

Așa fiind, în loc de a pune condiția $\Delta_s \neq 0$, vom pune condiția echivalentă:

$$(7) \quad \Delta_v \neq 0$$

Numai în acest caz, pentru valori finite u_{ik} — lungirile barelor — corespund valori finite pentru ν și deci valori finite pentru j .

Grinda satisfăcând acestei condiții se zice că este strict nedeformabilă.

În rezumat o grindă cu zăbrele trebuie să satisfacă condițiile:

1. Barele de lungime invariabilă să fie articulate în noduri.
2. Între numărul barelor și al nodurilor să existe relația $m = 2n - 3$.
3. Direcția barelor, sau ceea ce este tot una cu poziția nodurilor, să satisfacă condiția de strictă indeformabilitate, adică $\Delta_v \neq 0$.

Aplicația Nr. 36. Să presupunem că avem o grindă cu zăbrele cu 3 noduri (fig. 119) și să-i aplicăm condiția $\Delta_v \neq 0$.

Avem:

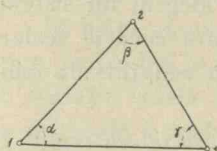


Figura 119

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\lambda}_{12} & \bar{\lambda}_{13} \\ \bar{\lambda}_{21} & 0 & \bar{\lambda}_{23} \\ \bar{\lambda}_{31} & \bar{\lambda}_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

Pentru că numărul laturilor este 3 și Δ_s va avea tot gradul 3.

Determinantul Δ_v îl transformăm în unul scalar multiplicând vectorial fiecare linie respectiv cu $\bar{\lambda}_{13}$, $\bar{\lambda}_{23}$ și $\bar{\lambda}_{31}$. Vom obține un vector normal pe planul figurii, a cărui valoare este:

$$\Delta_s = - \begin{vmatrix} \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \gamma \\ 0 & \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

Se vede de aci, că atunci când unul din unghiuri este 0 sau π , cele trei noduri sunt în linie dreaptă și sistemul — în acest caz — nu este strict indeformabil.

Pentru o grindă cu n noduri se poate găsi oricând o poziție a nodurilor așa ca $\Delta = 0$.

b) Considerațiuni statice.

Vom avea totdeauna în vedere faptul că barele grinzii cu zăbrele sunt articulate la noduri. Din această considerațiune rezultă că în noduri nu avem momente cari să acționeze asupra capetelor barelor. Mai rezultă că momentul tuturor forțelor din barele unui nod în raport cu nodul respectiv este totdeauna nul.

În cele ce urmează, vom mai presupune că forțele se aplică numai la noduri. Prin urmare, barele grinzilor cu zăbrele vor fi solicate numai de forțe aplicate la extremitățile lor. Pentru ca bara respectivă să fie în echilibru, trebuie ca forțele aplicate la extremitățile ei să fie egale de direcții contrare și dirijate după axa barei.

Dacă avem două noduri i și k , efortul în bara ik îl vom nota cu N_{ik} , lungimea barei respective cu l_{ik} , iar direcțiunea ei cu $\bar{l}_{ik}$.

Fie forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_i, \bar{F}_k \dots$, cari se aplică respectiv în nodurile 1, 2, ... $i, k \dots$ (fig. 120).

Momentele forțelor ce concură în nod fiind totdeauna nule, urmează că echilibrul nodului este asigurat scriind că poligonul forțelor din acel nod este un poligon închis. Vom avea evident:

$$\bar{F}_1 + \bar{N}_{12} + \bar{N}_{13} = 0$$

$$\bar{F}_2 + \bar{N}_{21} + \bar{N}_{23} + \bar{N}_{24} = 0$$

$$\bar{F}_3 + \bar{N}_{31} + \bar{N}_{32} + \bar{N}_{34} + \bar{N}_{35} = 0$$

$$\bar{F}_i + \bar{N}_{i3} + \bar{N}_{i4} + \bar{N}_{ik} + \bar{N}_{in} = 0$$

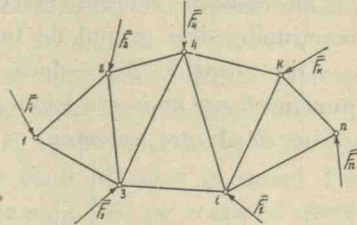


Figura 120

sau:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 + N_{12} \bar{l}_{12} + N_{13} \bar{l}_{13} &= 0 \\ \bar{F}_2 + N_{21} \bar{l}_{21} + N_{23} \bar{l}_{23} + N_{24} \bar{l}_{24} &= 0 \\ &\vdots \\ \bar{F}_i + N_{i3} \bar{l}_{i3} + N_{i4} \bar{l}_{i4} + N_{ik} \bar{l}_{ik} + N_{in} \bar{l}_{in} &= 0 \end{aligned}$$

în care:

$$(9) \quad N_{12} = N_{21} \text{ și } \bar{l}_{12} + \bar{l}_{21} = 0$$

În grupul (8) avem atâtea ecuații câte noduri, deci n ecuații. Fiecare ecuație ne permite găsirea a două necunoscute, prin urmare putem găsi $2n$ necunoscute.

Echilibrul grinzii cu zăbrele se asigură prin un sistem de reacțime echivalent cu trei reacțime simple. Valoarea acestor trei reacțiuni este de asemenea necunoscută și grupul (8) de ecuații ne dă valorile celor 3 reacțiuni și a $2n - 3$ eforturi N din barele grinzii cu zăbrele. Cum numărul eforturilor din bare este egal cu numărul barelor, urmează că trebuie să avem:

$$(1) \quad m = 2n - 3$$

Reacțiunile însă le putem găsi direct.

În adevăr, presupunem că trei oricari din forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots$ sunt reacțiuni.

Dacă adunăm ecuațiile (8) căpătăm:

$$\Sigma \bar{F} = 0$$

pentru că termenii în N , ținând seamă, de (9) se anulează doi câte doi.

Dacă se ia momentul tuturor forțelor în raport cu un punct arbitrar, se capătă:

$$\sum aF' = 0,$$

termenii în N anulându-se pentru același motiv ca mai sus.

Aceste două ecuațiuni ne determină valoarea a trei reacțiuni.

Să căutăm valorile eforturilor N . Presupunem că am aflat reacțiunile, deci grupul de forțe, $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \dots \overline{F}_n$, este cunoscut.

Din ecuațiile (8) — dacă pentru generalitatea cazului presupunem că un nod este legat prin bare cu toate celelalte noduri — găsim că Δ_v are valoarea:

$$(7) \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\lambda}_{12} & \bar{\lambda}_{13} \dots \\ \bar{\lambda}_{21} & 0 & \bar{\lambda}_{23} \dots \\ \bar{\lambda}_{31} & \bar{\lambda}_{32} & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

adică tocmai aceia care am găsit-o la studiul deformațiunii grinzii.

Pentru ca să găsim eforturi finite în grindă, trebuie ca $\Delta_s \neq 0$ și aceasta se vede că este tocmai condiția de strictă indeformabilitate.

Dacă $\Delta = 0$, găsim eforturi infinite în bare.

Și din considerațiunile de mai sus ajungem la aceleași concluziuni ca și pe cale cinematică, pe cari le repetăm și aci:

1. barele de lungime variabilă se consideră articulate în noduri,
2. între numărul barelor și nodurilor să existe relația $m = 2n - 3$
3. să avem condiția $\Delta \neq 0$.

B) Determinarea eforturilor din bare.

Generalități.

Grinda cu zăbrele îndeplinind condițiile de mai sus, putem păși la găsirea eforturilor din bare.

Dacă grupul (8) de ecuații îl transformăm în unul scalar, găsim $2n$ ecuații din cari păstrăm numai $2n - 3$, pentru că reacțiunile au fost găsite.

Dacă se rezolvă acest sistem de ecuații liniar și omogen se găsește:

$$(10) \quad N_{ik} = n_{ik,1} F_1 + n_{ik,2} F_2 + \dots + n_{ik,i} F_i + \dots$$

din care rezultă că N_{ik} este o funcție liniară și omogenă numai de valorile forțelor $F_1, F_2 \dots$ nu și de direcțiile lor, pe cari le vom presupune că rămân constante.

Coeficienții $n_{ik,1}$ poartă numele de *coeficienți de influență*. Ei se determină în modul următor. Presupunând $F_1 = 1$ și $F_2 = F_3 = \dots = F_i = 0$, avem:

$$N_{ik} = n_{ik,1},$$

adică, $n_{ik,1}$ este efortul care se produce în bara ik , atunci când în nodul 1 se aplică o forță $F_1 = 1$. Dimensia lui n_{ik} este un număr.

Formula (10) ne arată că putem suprapune efectul forțelor F_1 , etc. În adevăr, putem calcula efortul în bara ik când forța F_1 calcă în nodul 1, și vom avea $n_{ik,1} F_1$ drept efort în bara ik .

Calculăm apoi efortul în bara ik când F_2 calcă în nodul 2 și avem $n_{ik,2} F_2$ și așa mai departe. Formula (10) ne arată că efortul total este egal cu suma eforturilor produse de fiecare forță în parte în bara considerată.

Această observație este foarte importantă căci ne permite simplificări de calcul. În adevăr, vrem să știm care este efortul în o bară sub acțiunea încărcării permanente și a încărcărilor mobile? Vom calcula eforturile în acea bară sub acțiunea sarcinii permanente și apoi sub acțiunea sarcinilor mobile. Efortul total sub acțiunea simultană a celor două sarcini, va fi suma lor.

Coeficienții $n_{ik,1}$, etc. sunt pozitivi și negativi. Dacă încărcăm numai nodurile cari au n_{ik} pozitivi, vom obține N_{ik} pozitiv, dacă încărcăm numai nodurile cari au n_{ik} negativi, vom obține un efort negativ în bara ik .

Așadar, cunoașterea coeficienților n_{ik} ne dă posibilitatea de a găsi eforturile maxime pozitive și negative în o bară oarecare a grinzii cu zăbrele, arătându-ne în mod precis cari anume noduri să le încărcăm în acest scop.

Ca normă generală, pentru găsirea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele, dându-ni-se modul de sprijinire, vom căuta mai întâiu valoarea reacțiunilor. În acest mod în partea I-a a ecuațiilor (c) avem numai cantități cunoscute.

Intocmai ca și la grinzile drepte, pentru aflarea eforturilor din bare vom întrebuința metoda secțiunilor.

1. Metoda separării nodurilor.

Vom presupune că facem în jurul fiecărui nod o secțiune așa fel, ca nodul să rămână izolat. El se va găsi în echilibru sub acțiunea forței $\bar{F}$ și a eforturilor din barele tăiate cari ajung la acel nod.

Pentru nodul (1) avem:

$$-V_1 \bar{\varphi} + \bar{N}_{12} + \bar{N}_{12} = 0$$

care ne dă valorile lui N_{12} și N_{13} .

Înmultiplicăm succesiv această ecuație vectorială cu $\bar{\lambda}_{13}$ și $\bar{\lambda}_{12}$.

Cu dimensiunile geometrice ale figurii, avem:

$$\bar{\varphi} \bar{\lambda}_{12} = -8/10; \quad \bar{\varphi} \bar{\lambda}_{13} = -5,20/5,386 \quad \bar{\lambda}_{12} \bar{\lambda}_{13} = -\bar{\lambda}_{13} \bar{\lambda}_{12} = 2/5,386$$

și găsim

$$N_{12} = -6,5 \text{ F} \quad , \quad N_{13} = 5,386 \text{ F}$$

Trecem la nodul 2 în care avem:

$$\bar{F} + \bar{N}_{21} + \bar{N}_{23} + \bar{N}_{21} = 0.$$

ecuație care o vom nmultiplica vectorial succesiv cu $\bar{\lambda}_{23}$ și $\bar{\lambda}_{24}$.

$$\text{Cu:} \quad \bar{\varphi} \bar{\lambda}_{23} = -6/10; \quad \bar{\lambda}_{21} \bar{\lambda}_{23} = -1; \quad \bar{\lambda}_{24} \bar{\lambda}_{23} = 1$$

$$\bar{\varphi} \bar{\lambda}_{24} = -8/10; \quad \bar{\lambda}_{21} \bar{\lambda}_{24} = 0; \quad \bar{\lambda}_{23} \bar{\lambda}_{24} = -1$$

căpătăm:

$$N_{24} = -5,9 \text{ F} \quad , \quad N_{23} = -0,8 \text{ F}$$

Trecem la nodul 3, pentru care avem:

$$\bar{N}_{31} + \bar{N}_{32} + \bar{N}_{34} + \bar{N}_{35} = 0$$

$$\text{Cu:} \quad \bar{\lambda}_{31} \bar{\lambda}_{34} = 5/2,693^2; \quad \bar{\lambda}_{32} \bar{\lambda}_{34} = 2,5/2,693; \quad \bar{\lambda}_{35} \bar{\lambda}_{34} = -\bar{\lambda}_{31} \bar{\lambda}_{34}$$

$$\bar{\lambda}_{31} \bar{\lambda}_{35} = 0; \quad \bar{\lambda}_{32} \bar{\lambda}_{35} = 2,50/2,693$$

căpătăm:

$$N_{35} = 4,309 \text{ F} \quad , \quad N_{34} = 1,077 \text{ F}$$

Observăm că dacă trecem la nodul 4 sau 5 avem câte 3 necunoscute.

Trecem la nodul 6. Aci avem:

$$\bar{F} + \bar{N}_{64} + \bar{N}_{67} + \bar{N}_{68} = 0,$$

din care găsim $N_{67} = -0,8 \text{ F}$, iar din nodul 7, unde avem:

$$\bar{N}_{75} + \bar{N}_{74} + \bar{N}_{76} + \bar{N}_{78} = 0,$$

găsim:

$$N_{74} = 1,077 \text{ F}$$

Cu acestea revenind la nodul 4 avem:

$$\bar{F} + \bar{N}_{42} + \bar{N}_{43} + \bar{N}_{45} + \bar{N}_{47} + \bar{N}_{46} = 0.$$

$$\text{Cu:} \quad \bar{\varphi} \bar{\lambda}_{45} = -6/10; \quad \bar{\lambda}_{42} \bar{\lambda}_{45} = -1; \quad \bar{\lambda}_{43} \bar{\lambda}_{45} = -2,5/2,693;$$

$$\bar{\lambda}_{47} \bar{\lambda}_{45} = 2,5 / 2,693; \quad \bar{\lambda}_{46} \bar{\lambda}_{45} = 1,$$

$$\bar{\varphi} \bar{\lambda}_{46} = -8/10; \quad \bar{\lambda}_{42} \bar{\lambda}_{46} = 0; \quad \bar{\lambda}_{43} \bar{\lambda}_{46} = -1/2,693$$

$$\bar{\lambda}_{45} \bar{\lambda}_{46} = -1; \quad \bar{\lambda}_{47} \bar{\lambda}_{46} = -1/2,693.$$

Căpătăm:

$$N_{46} = -5,3 \text{ F} \quad , \quad N_{45} = -1,6 \text{ F}$$

Nodul 5 în care avem:

$$\overline{N}_{53} + \overline{N}_{54} + \overline{N}_{57} + \overline{N}_{511} = 0.$$

ne dă:

$$N_{57} = 2,810 \text{ F} \quad ; \quad N_{511} = 1,739 \text{ F}$$

Avem apoi:

$$N_{68} = -4,7 \text{ F} \quad ; \quad N_{78} = 3,887 \text{ F}$$

$$N_{1514} = N_{1412} = N_{1210} = N_{1018} = -2,6 \text{ F}$$

$$N_{1513} = N_{1311} = 2,154 \text{ F}$$

$$N_{1314} = N_{1213} = N_{1112} = N_{912} = N_{910} = 0$$

$$N_{119} = N_{89} = 0,656 \text{ F}.$$

Am căpătat o serie de eforturi pozitive altele negative. *Primele dau tensiuni în barele grinzii cu zăbrele, secunde comprimiuni.*

Avantajul metodei constă în faptul că putem împinge aproximațiile oricât de departe voim și căpătăm în mod automat sensul eforturilor indicându-ne dacă barele sunt întinse sau comprimate.

b) Calculul grafic. Metoda lui Cremona.

Vom descompune la noduri forța respectivă după direcțiile barelor. Pentru aceasta va trebui să găsim un nod unde avem numai două bare. La aplicația Nr. 37 descompun reacțiunea V_1 după direcția barelor 12 și 13, și căpătăm, în poligonul forțelor, eforturile marcate cu 12 și 13 (fig. 122).

În aceste condiții, nodul 1 se găsește în echilibru sub acțiunea lui V_1 , N_{12} și N_{13} , deci acestea formează un poligon de forțe închis. Se observă că dacă N_{12} are sensul din poligonul forțelor, atunci acest efort apasă asupra nodului, deci în 12 avem compresie, iar N_{13} trage de nod, deci bara 13 este întinsă și în 13 avem tensiune.

Acum trecem la alt nod. Nu putem trece la nodul 3 pentru că acolo avem trei necunoscute și anume N_{32} , N_{34} și N_{35} și nu putem descompune o forță după trei direcțiuni concurente.

Trecem la nodul 2, unde cunoaștem pe F_2 și N_{12} cari le compunem într-o rezultantă pe care o descompunem după direcțiile 24 și 23. Am făcut această descompunere pe epură. Prin urmare, ca să putem face aceste descompuneri, trebuie să începem dela un nod cu două bare și apoi să continuăm cu nodul în care avem numai două necunoscute.

Făcând această construcție se observă că:

1°. *În poligonul forțelor, laturile sunt paralele cu forțele ce lucrează asupra grinzii și cu barele ei și*

2°. La un punct din prima figură corespunde un poligon închis în a doua și reciproc.

Prin urmare, figura doua este reciprocă celei dintâiu. Această metodă poartă numele de metoda lui Cremona sau a reciproci figurii date, formată din forțele date, reacțiuni și barele grinzii.

Se mai observă că pentru a construi reciproca, fără a avea construcțiuni auxiliare de prisos, trebuie ca în poligonul forțelor, acestea să se succedă în ordinea în care le întâlnim pe conturul grinzii.

Să continuăm reciproca de unde am lăsat-o. Dacă trecem la nodul 4 sau 5, găsim aci câte trei necunoscute, deci nu o mai putem continua. Trecem atunci la nodul 6. Descompunem pe F după 67 și 468 și găsim astfel pe N_{67} și diferența între N_{46} și N_{68} . Trecem apoi la nodul 7 și descompunem pe N_{67} , după 47 și 578, găsind astfel efortul N_{47} și diferența între N_{78} și N_{57} . Prin urmare, am găsit pe N_{47} și deci în nodul 4 avem ca necunoscute numai N_{45} și N_{46} pe cari le găsim prin o descompunere a rezultantei lui F , N_{24} și N_{47} după direcțiile 45 și 46.

În acest mod am ocolit dificultatea întâmpinată la nodul 4. Sunt și alte metode pentru a ocoli dificultăți de această natură.

De aci încolo continuarea construcției reciprocei nu întâmpină nicio dificultate.

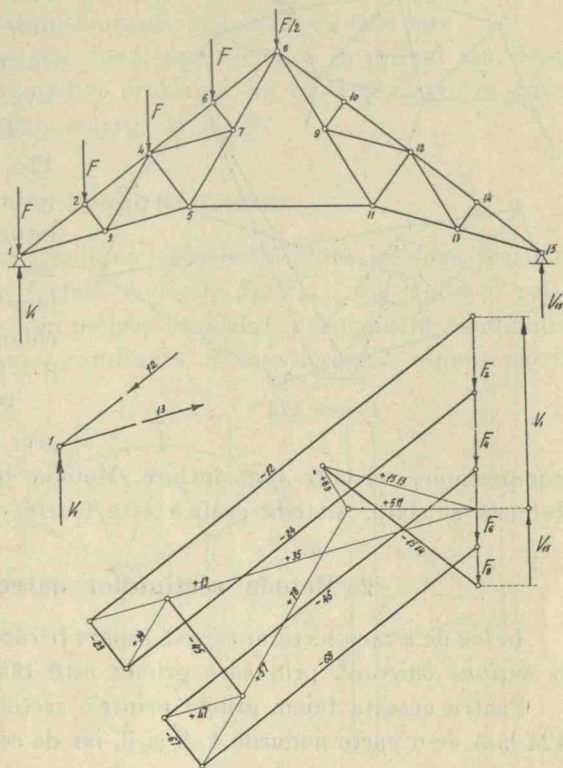


Figura 122

Dacă se compară rezultatele date de epură cu cele ale calculului se observă oarecari diferențe, inerente calculului grafic.

Bow, observând că la fiecare poligon închis din prima figură corespunde un punct în reciprocă, a notat regiunile împărțite de figura dată cu câte o cifră, în acest mod unei regiuni date îi corespunde în reciprocă un punct.

O bară în prima figură separă două regiuni, în figura reciprocă va uni punctele respective.

De exemplu, pe fig. 123, triunghiului 8 îi corespunde punctul 8, iar laturei care separă regiunea 8 de 9 îi corespunde linia 8—9 care reprezintă chiar efortul din bara 8—9.

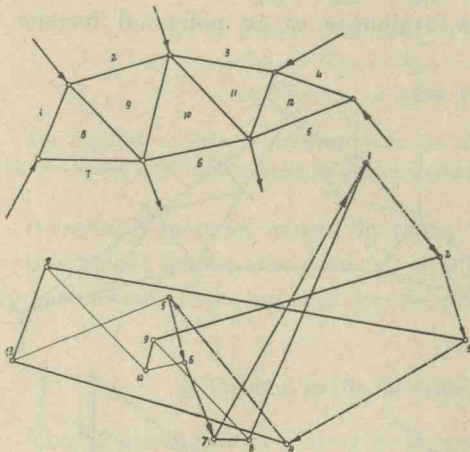


Figura 123

Pe figură barele trase gros indică un efort de compresiune, celelalte sunt întinse. Metoda lui *Bow* este foarte comodă și clară. Metoda grafică este foarte expeditivă.

2. Metoda secțiunilor oarecari.

În loc de a face secțiuni care să separe fiecare nod în parte, facem o *secțiune oarecare*, prin care grinda este tăiată în două bucăți.

Pentru aceasta tăiem grinda printr-o secțiune care în cazul fig. 124 lasă de-o parte nodurile 1, 2 și 3, iar de cealaltă parte celelalte noduri.

Să adunăm ecuațiile (8) relativ la aceste noduri, avem:

$$\overline{V}_1 + \overline{N}_{12} + \overline{N}_{13} = 0$$

$$\overline{F}_2 + \overline{N}_{21} + \overline{N}_{23} + \overline{N}_{24} = 0$$

$$\overline{F}_3 + \overline{N}_{31} + \overline{N}_{32} + \overline{N}_{34} + \overline{N}_{35} = 0$$

$$\overline{V}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{N}_{24} + \overline{N}_{34} + \overline{N}_{35} = 0$$

pentru că ceilalți termeni prin adunare se anulează. Mai notăm:

$$\overline{V}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{R}_{13}$$

și avem:

$$\overline{R}_{13} + \overline{N}_{24} + \overline{N}_{34} + \overline{N}_{35} = 0$$

Această ecuație ne arată, mai întâiu, că nodurile, astfel separate, se găsesc în echilibru sub acțiunea rezultantei R și a eforturilor din barele întâlnite de secțiunea făcută și în al doilea rând, că putem găsi din ecuația de mai sus eforturile N_{24} , N_{34} și N_{35} , atunci când cunoaștem valoarea, direcția și poziția rezultantei $\bar{R}$. În adevăr, în acest caz problema revine la descompunerea unei forțe după trei direcțiuni neconcurente în plan, problemă care s'a rezolvat anterior.

Prin urmare, ca să putem aplica această metodă, trebuie ca secțiunea făcută să nu întâlnească mai mult de trei bare.

Dacă întâlnește numai două, procedăm ca în primul caz, dacă întâlnește 4, sau mai multe, problema nu se poate rezolva prin această metodă, și vom recurge la altele.

a) Metoda lui Culmann.

În fig. 124 este o grindă cu zăbrele sprijinită pe două reazime simple, și supusă la forțele verticale $F_2, F_3, \dots$. Cu ajutorul poligonului de forțe și a unui poligon funicular, determinăm reacțiunile V_1 și V_7 . Prin urmare, rezultanta $\bar{R}$ care lucrează asupra părții

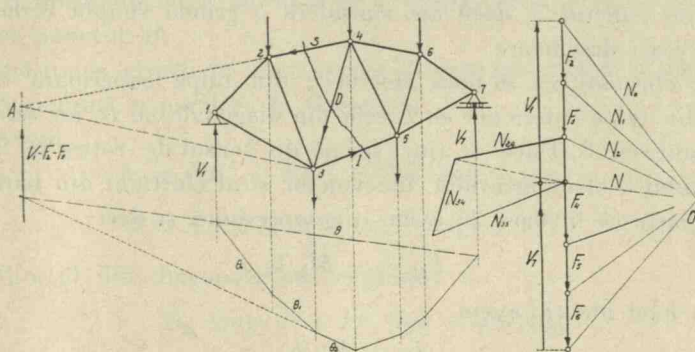


Figura 124

din stânga a grinzii este $V_1 - F_2 - F_3$ care se vede imediat în poligonul forțelor. Poziția rezultantei se va găsi la intersecția laturilor extreme de poligon funicular ale acestui grup de forțe, deci la intersecția lui θ cu θ_2 .

Prin acest punct trece rezultanta $V_1 - F_2 - F_3$. Fie A intersecția laturei 24 cu rezultanta. Descompun rezultanta după direcția $A 24$ și după dreapta $A 3$, care unește punctul A cu nodul 3. Componenta după $A 3$ o descompun după direcțiile 34 și 35. În

acest mod am găsit componentele N_{24} , N_{34} și N_{35} , deci chiar eforturile din bare.

În rezumat metoda lui Culmann este descompunerea unei forțe după trei direcțiuni neconcurente'n plan. Se aplică mai mult grafic.

b) Metoda lui Ritter.

În această metodă determinăm valoarea uneia din cele trei componente luând momentul tuturor forțelor cari lucrează asupra părții din stânga a grinzii în raport cu punctul de intersecție al celorlalte două bare.

De exemplu, dacă voim să găsim efortul în bara 24 luăm momentul forțelor în raport cu punctul 3 (fig. 125) de intersecție al barelor 34 și 35. Dacă brațul de pârghie dela nodul 3 la bara 24 este h_3 , și dacă momentul tuturor forțelor dela stânga secțiunii în raport cu nodul 3 este M_3 , atunci avem:

$$h_3 N_{24} + M_3 = 0$$

Însă M_3 nu este altceva decât momentul ce se produce în raport cu punctul 3, dacă am considera o grindă simplu rezemată de aceeași deschidere.

Se obișnuște a se nota eforturile din talpa superioară cu S , cele din talpa inferioară cu I , cele din diagonale cu D , iar cele din montanți cu V . Dacă se ține seamă de sensul de rotire în jurul punctului 3 al momentului încovoietor și al efortului din bară, se recunoaște că în bara 24 avem o compresiune, și deci

$$(11) \quad S_{24} = -M_3/h_3$$

În mod identic avem

$$(11') \quad I_{35} = M_4/h_4$$

Pentru ca să găsim efortul din diagonala 34, în secțiunea considerată, proiectăm toate forțele după o normală la R . Această proiecțiune este nulă.

Notăm cu α unghiul tălpii superioare cu normala la R , cu α' al tălpii inferioare și cu φ al diagonalei. Avem deci:

$$S_{24} \cos \alpha + I_{35} \cos \alpha' + D_{34} \cos \varphi = 0$$

Dacă în această formulă introducem valorile lui S_{24} și I_{35} din (11) și (11') și dacă notăm cu h'_3 distanța dela nodul 3 măsurată

după o paralelă la R până la bara 24 și cu h'_4 distanța măsurată în aceleași condiții dela nodul 4 la bara 35, avem:

$$h_3 = h'_3 \cos \alpha, \quad h_4 = h'_4 \cos \alpha'$$

și găsim:

$$(12) \quad D_{34} \cos \varphi = M_3/h'_3 - M_4/h'_4$$

Putem găsi și altă expresie pentru efortul din diagonală 34, luând momentul forțelor în raport cu punctul A , intersecția laturilor 24 și 35 (fig. 125). Dacă c este distanța lui R și d distanța diagonalei la punctul A , atunci avem ținând seamă de sensurile din figură:

$$cR + dD_{34} = 0$$

sau

$$(13) \quad D_{34} = -cR/d$$

formulă simplă căreia putem să-i dăm și altă formă.

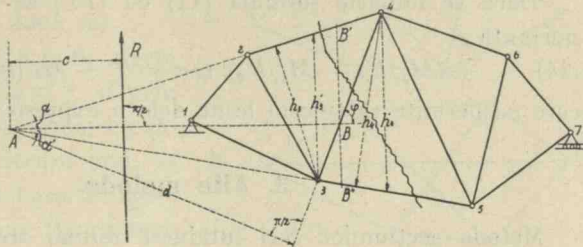


Figura 125

Să presupunem că normala la $\overline{R}$ trecând prin A taie diagonală 34 în punctul B .

Înălțimea grinzii în acest punct B , măsurată între laturile 24 și 35 și după o paralelă la R , este h_b .

Avem:

$$h_b = BB' + BB'' = AB (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')$$

$$d = AB \sin \varphi = \sin \varphi \cdot h_b / (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')$$

Efortul din diagonală are expresia:

$$D_{34} \sin \varphi = -cR (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') / h_b$$

Pe de altă parte, momentul tuturor forțelor, cari acționează asupra părții din stânga, în raport cu punctul B , este:

$$M_b = (AB - c) R$$

sau:

$$-R + M_b (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') / h_b = -cR (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') / h_b$$

Însă R este suma forțelor dela stânga secțiunii, deci este forța tăietoare din secțiune (în cazul forțelor verticale): $R = T$ și prin urmare avem:

$$(13') \quad D_{34} \sin \varphi = -T + M_b (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') / h_b$$

Formulele (11), (11'), (12) (13) și (13) sunt cele mai comode pentru calculul eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele.

Formula (13') ne arată de ex. că pentru o grindă orizontală cu tălpi paralele, supusă la forțe verticale, efortul din diagonala 34 are expresia simplă:

$$D_{34} \sin \varphi = -T$$

formulă ce se poate stabili direct în mod foarte ușor.

Mai dificilă este determinarea punctului *B*. El rezultă imediat când una din tălpi este dreaptă.

Dacă se împarte formula (12) cu (13') se capătă relația importantă:

$$(14) \quad - (M_3/h'_3 - M_4/h'_4) \operatorname{tg} \varphi = T - M_b (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha')/h_b$$

care ne permite să trecem lesne dela o expresie la alta.

3. Alte metode.

Metoda secțiunilor cari întâlnesc numai trei bare și aceea a separării nodurilor, ne-au permis ca, din grupul de $2n - 3$ necunoscute, să izolăm una sau două necunoscute ale căror valori le-am putut găsi direct, numai grație faptului că trecând dela un nod la următorul am găsit la acesta din urmă numai două necunoscute.

Pentru ca aceasta să fie posibil, trebuie ca acest nod să fie legat prin două bare de cele două noduri cari îl preced imediat. În adevăr, dacă prin una din bare el ar fi legat de un nod mai îndepărtat, atunci efortul din această bară ar fi apărut ca necunoscută în acel nod și deci acolo am fi avut trei necunoscute în loc de două și prin urmare metoda nu s'ar fi putut aplica.

De aci rezultă că *grinda cu zăbrele trebuie să fie formată din juxtapunerea a o serie de triunghiuri a căror suprafețe să nu se suprapună unele peste altele.*

Așadar, pentru a aplica aceste două metode, grinda cu zăbrele trebuie să mai îndeplinească și această condiție specială.

Or, în mod general, am numit grindă cu zăbrele o construcțiune nedeformabilă formată din $2n - 3$ bare, articulate la extremitățile lor și cari leagă între ele, oarecum, n noduri. Prin urmare, există și grinzi cu zăbrele cari nu satisfac condițiunea specială de mai sus.

În adevăr, fiecare bară leagă între ele două noduri, adică aparține la două noduri. Numărul mediu de bare ce pleacă dintr'un nod este:

$$x = (2n - 3)/(n/2) = 4 - 6/n$$

Pentru un triunghi $n = 3$, $x = 2$, deci din fiecare nod pleacă două bare; când $n = 4$, $x = 2,5$. Cum dintr'un nod nu poate pleca decât un număr întreg de bare, asta înseamnă că din unele noduri vor pleca câte două bare, iar din altele câte trei, așa că în total să fie satisfăcută relația $m = 2n - 3$.

Pentru $n = 6$, $x = 3$. Prin urmare, dintr'un nod pot pleca 2, 3 și 4 bare, dar putem avea și cazul când din fiecare nod pleacă câte trei bare, așa cum se arată respectiv în fig. 126 *a* și *b*.

La prima putem aplica metodele indicate, la a doua nu.

În cazul când $n > 6$, avem

$x = 3 + a$ în care $a < 1$ și prin urmare, putem avea grinzi cu zăbrele în care din fiecare nod, să plece minimum trei bare. În acest caz nu putem începe figura reciprocă și nici nu putem duce o secțiune care să întâlnească numai

trei bare cu eforturi necunoscute și deci nu putem face uz de niciuna din metodele indicate anterior.

În acest caz nu ne-ar rămâne decât să rezolvăm cele $2n - 3$ ecuații, ceea ce este foarte anevoios.

În cele ce urmează vom da câteva metode prin care se evită rezolvarea directă a acestor ecuații.

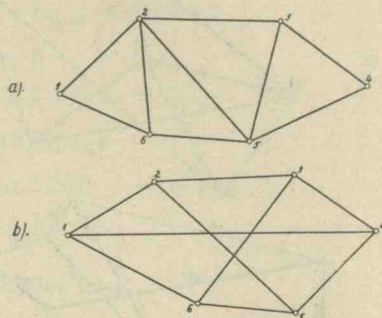


Figura 126

a) Metoda lui Henneberg sau a înlocuirii barelor.

Pentru că nu putem începe reciproca sau nu putem rezolva rând pe rând ecuațiile (8) negăsind mereu câte două necunoscute, atunci se suprimă o bară, care leagă două noduri oarecare, așa fel, ca la unul din noduri să ne rămână două necunoscute. În fig. 127 *a* se suprimă bara 25. Prin această suprimare grinda nu mai este rigidă și pentru a o menține așa introducem o altă bară de ex. bara 46. Acum putem construi figura reciprocă a grinzii cu zăbrele, în care am suprimat bara 25 și în care avem în schimb în plus bara 46 (fig. 127 *b*).

Poligonul de forțe este $F_1, F_2, \dots, F_6$, care este un poligon închis, și momentul forțelor $F_1, F_2, \dots, F_6$ este nul în raport cu un punct oarecare. Pe figură sunt indicate eforturile din bare.

Presupunem forțele $F_1, F_2 \dots F_6$ îndepărtate de pe grindă și facem ca ea să fie acționată de o forță $F = 1$, aplicată în nodul 5 după direcția 52 și de o altă forță $F = 1$, aplicată în nodul 2, însă dirijată dela 2 spre 5. În acest mod grinda este supusă la două forțe egale cu 1, de sens contrar, și aplicate după direcția 25. După aceste sensuri presupunem că bara 25 este supusă la o

tensiune egală cu 1.

Construim reciproca grinzii în aceste condițiuni (fig. 127 c).

În bara 46, din fig. 127 b am obținut o tensiune N'_{46} , iar din fig. 127 c, $n_{46,25}$, adică efortul în bara 46 când după direcția 25 acționează o sarcină egală cu 1.

Efortul în bara 46 sub acțiunea forțelor $F_1, F_2, \dots F_6$, și sub acțiunea sarcinii de 1 aplicată după 25 va fi

$$N'_{46} + n_{46,25}$$

Dacă după 25 în loc de $F = 1$, ar fi acționat o forță de x ori mai mare efortul ar fi fost, în virtutea principiului suprapunerii efectelor,

$$N'_{46} + x n_{46,25}$$

Bara 46 o putem suprima atunci când

$$N'_{46} + x n_{46,25} = 0$$

deci

$$x = -N'_{46}/n_{46,25}$$

Atunci efortul în bara 25 este $x.1$. Dacă, după figură $F_{25} = F_{52} = 1$ atunci $N'_{46} = +1,410t$, $n_{46,25} = +1,870$, și deci

$$x = -1,410/1,870 = -0,755t$$

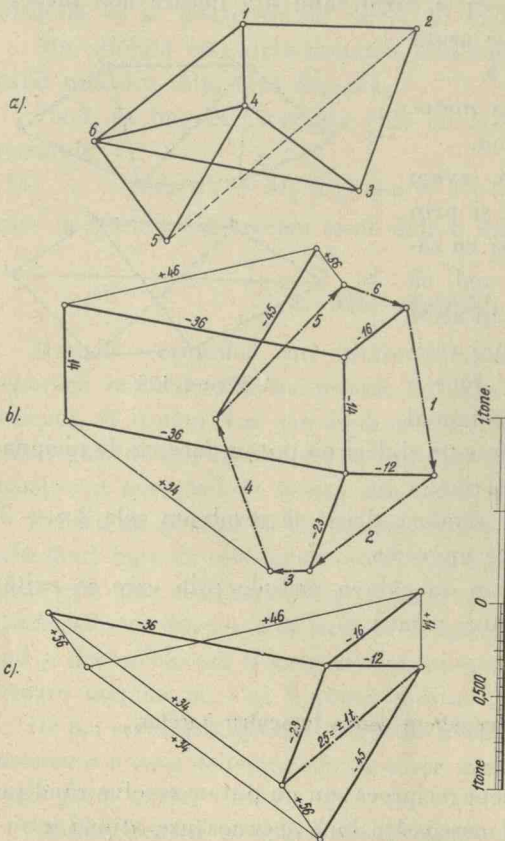


Figura 127

Prin urmare, efortul în bara 46 sub acțiunea forțelor $F_1, F_2, \dots, F_6$ și sub acțiunea forței $N_{25} = -0,755 t$ este egal cu zero, deci bara 46 se poate suprima.

Efortul în bara 25 este chiar $N_{25} = -0,755 t$. Care este efortul în bara 34? În virtutea suprapunerii efectelor va fi:

$$N_{34} = N'_{34} + x n_{34,25}$$

Din cele două figuri reciproce avem:

$$N'_{34} = +1,375 t, \quad n_{34,25} = 1,580 t$$

și deci efortul total în bara 34 va fi:

$$N_{34} = 1,375 - 0,755 \cdot 1,580 = 0,185 t$$

În mod analog avem în bara 36 efortul:

$$N_{36} = -1,550 + 0,755 \cdot 1,550 = -0,390 t.$$

Astfel calculăm eforturile în toate barele.

b) Metoda pozițiilor false.

Luăm pentru unul din eforturile din bare o valoare absolut arbitrară. Cu această valoare putem începe construcția reciproci. Valoarea fiind arbitrară, vom ajunge ca, pentru una și aceeași bară, să găsim două eforturi diferite. Dacă din întâmplare am fi luat pentru prima bară efortul exact, atunci am fi găsit același efort în bara în care în general găsim eforturi diferite. Variația efortului din bara pentru care găsim eforturi diferite este liniară și deci putem găsi o condiție analitică sau grafică pentru închiderea reciprocei.

Să ne ocupăm de aceeași grindă (fig. 128 a). Să presupunem că pentru bara 14 luăm un efort arbitrar N_1 . Dacă urmărim pe fig. 128 a, vedem că putem găsi eforturile din barele 16 și 12. Putem găsi deci și eforturile din barele 56 și 36. Dacă continuăm descompunerea pe la nodul 2, găsim succesiv eforturile în barele 25, 23, 34 și 36. Pe cele două căi găsim eforturi diferite în bara 36 și să notăm diferența între ele cu D_1 .

Luăm din nou pentru bara 14 alt efort arbitrar N_2 , pentru care găsim în bara 36 pe cele două căi o diferență D_2 . Efortul N real din bara 14 va fi acela pentru care această diferență este nulă, și deci care va satisface relația:

$$(N - N_1)/D_1 = (N - N_2)/D_2$$

și deci:

$$N = (D_1 N_2 - D_2 N_1)/(D_1 - D_2)$$

Să facem același lucru pe cale grafică (fig. 128 b). Luăm pentru efortul din bara 14 o valoare arbitrară AB ; în acest mod găsim eforturile din barele 16, 14 și 12, eronate bine înțeles. Continuăm reciproca până ajungem la bara 36 pentru care obținem efortul DE . Dacă facem descompunerea trecând pe la nodul 6, obținem pentru efortul 36 lungimea AC . Lungimile DE și AC diferă între ele. Dacă luăm $EG = AC$, găsim că diferența între ele este GD .

Procedăm absolut la fel luând pentru 14 valoarea $A'B'$, pentru care $A'C' = 0$. Găsim astfel pentru bara 36 pe o cale efortul $D'E'$, iar pe alta $A'C' = 0$. Diferența între ele este chiar $D'E'$. Punctul G descrie o dreaptă și diferența va fi zero, pentru punctul D'' unde dreapta $E'G$ se taie cu dreapta DD' , care nu este altceva decât direcția efortului din bara 23. În acest mod am găsit efortul din bara 23, și deci problema este rezolvată. Plecând de aici găsim eforturile din barele 25, 12, 14, 16, 36, etc.

Pentru control s'a con-

struit reciproca complet, care s'a închis.

Metoda în genere este expeditivă și ușor controlabilă în ceea ce privește partea constructivă.

c) Metoda nodurilor virtuale.

Se bazează pe următoarea considerațiune. Dacă eforturile în două bare oarecare sunt să zicem N_{12} și N_{45} , acestea le putem compune în o singură rezultantă N care evident trece prin punctul de intersecție al direcțiunilor $\bar{l}_{12}$ și $\bar{l}_{45}$. Așadar, cele două eforturi de direcțiuni cunoscute și valori necunoscute, le înlocuim cu o singură forță care trece prin un punct cunoscut, nodul virtual, dar căreia nu-i cunoaștem valoarea și direcțiunea.

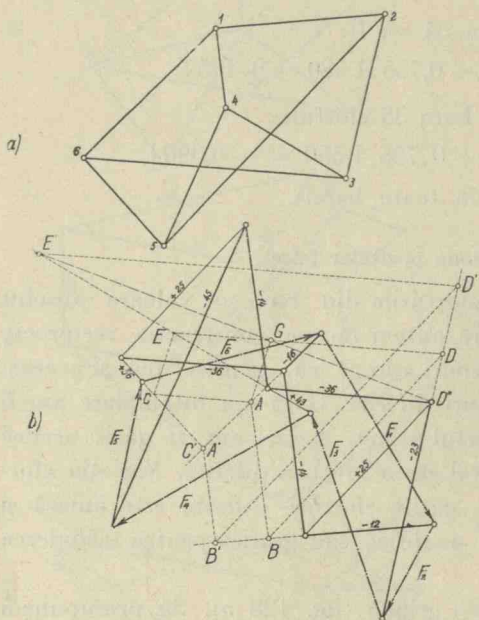


Figura 128

Să aplicăm aceasta la fig. 129. Bara 14 se găsește în echilibru sub acțiunea

1°. A forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_4$, cari compuse într'o singură rezultantă ne dau forța dirijată după dreapta A , iar în poligonul forțelor are valoarea A .

2°. A eforturilor din barele 16 și 34 cari se întâlnesc în punctul b .

3°. A eforturilor din barele 12 și 45 cari se întâlnesc în punctul c .

În rezumat bara 14 se găsește în echilibru sub acțiunea a trei forțe și anume forța A și alte două forțe cari trec prin punctele b și c .

Pentru ca ele să fie în echilibru trebuie să se întâlnească într'un punct a_1 situat pe dreapta A .

În mod cu totul analog, bara 25 se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor, $\bar{F}_2 + \bar{F}_5$ a căror rezultantă este $\bar{B}$ și a rezultatelor eforturilor $\bar{N}_{12} + \bar{N}_{45}$ și $\bar{N}_{23} + \bar{N}_{56}$ cari trec respectiv prin punctele c și a . Aceste trei forțe trebuie să se întâlnească într'un punct b_1 situat pe $\bar{B}$.

Același lucru și pentru bara 36, care este în echilibru sub acțiunea lui $\bar{F}_3 + \bar{F}_6 = \bar{C}$ și $\bar{N}_{23} + \bar{N}_{56}$ și $\bar{N}_{16} + \bar{N}_{34}$, ultimele două trecând respectiv prin punctele a și b . Acestea la rândul lor sunt concurente într'un punct c_1 situat pe $\bar{C}$.

Pe de altă parte, forțele $\bar{F}_1 + \bar{F}_4 = \bar{A}$, $\bar{F}_2 + \bar{F}_5 = \bar{B}$ și $\bar{F}_3 + \bar{F}_6 = \bar{C}$, reduse fiind la trei forțe $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, sunt concurente în punctul O și formează un poligon închis: $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 0$.

În rezumat, rezultantele $\bar{N}_{23} + \bar{N}_{56}$, $\bar{N}_{34} + \bar{N}_{61}$ și $\bar{N}_{45} + \bar{N}_{12}$ trec prin trei puncte date a , b și c și se întâlnesc două câte două în punctele c_1 , a_1 și b_1 situate pe dreptele C , A și B .

În acest mod forțele $\bar{N}_{23} + \bar{N}_{56}$, $\bar{N}_{34} + \bar{N}_{61}$ și $\bar{N}_{45} + \bar{N}_{12}$ nu sunt altceva decât laturile unui poligon funicular al forțelor $\bar{A}$, $\bar{B}$, și $\bar{C}$, cari trec prin punctele a , b și c .

Făcând construcția pe figură se găsesc laturile poligonului funicular: ca_1b_1 , ab_1c_1 și bc_1a_1 . Cu ajutorul acestor laturi, în

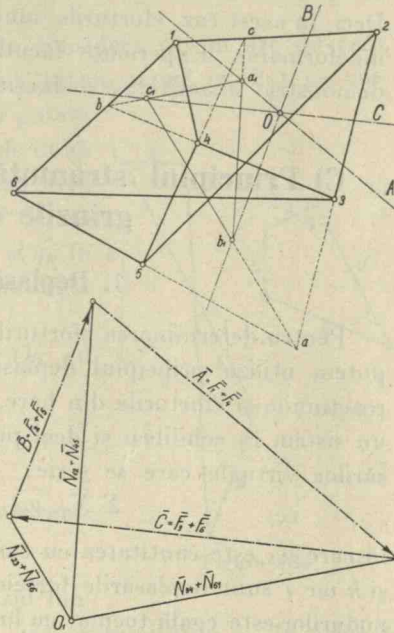


Figura 129

poligonul forțelor, găsim polul O_1 și deci valorile: $\bar{N}_{12} + \bar{N}_{45}$, $\bar{N}_{23} + \bar{N}_{56}$ și $\bar{N}_{34} + \bar{N}_{61}$ pe care le descompunem după direcțiile respective.

Aflăm apoi eforturile din barele 14, 25 și 36, și astfel am rezolvat complet problema.

Eforturile în barele acestei grinzi cu zăbrele vor fi finite, atunci când găsim polul O_1 la distanță finită. Polul va fi la infinit atunci când dreptele, prin intersecția cărora este determinat, sunt paralele și aceasta nu are loc decât atunci când punctele a, b, c , sunt în linie dreaptă. În acest caz vârfurile exagonului nostru sunt pe o conică. Deci, în acest caz, eforturile sunt infinite și sistemul nu este strict indeformabil. Experiențe făcute în acest sens, de A. Föppl au demonstrat exactitatea deducțiunilor de mai sus.

C) Principiul strămutărilor virtuale aplicat la grinzile cu zăbrele.

1. Deplasări virtuale.

Pentru determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele putem utiliza principiul deplasărilor virtuale. Forțele exterioare, reacțiunile și eforturile din bare, cari se aplică în noduri, formează un sistem în echilibru și deci putem să-i aplicăm principiul deplasărilor virtuale care se scrie:

$$\sum \bar{N}_{ik} \bar{u}_{ik} + \sum \bar{F} \bar{j} = 0$$

în care u_{ik} este cantitatea cu care s'a depărtat între ele nodurile i și k iar $\bar{j}$ sunt deplasările forțelor. Având în vedere că depărtarea nodurilor este egală tocmai cu lungirea barei l_{ik} , adică tocmai cu u_{ik} și că efortul din bară este egal și de sens contrar celui ce se aplică în nod, atunci — $\sum N_{ik} u_{ik}$ este tocmai lucrul mecanic virtual, acumulat de bare când ele se lungesc cu cantitatea u_{ik} .

Avem deci:

$$\sum N_{ik} u_{ik} = \sum \bar{F} \bar{j}$$

cu alte cuvinte *lucrul mecanic virtual produs de lungirea barelor este egal cu lucrul mecanic al forțelor exterioare.*

Aceasta în mod general. Să presupunem că dăm o lungire numai barei ik . Atunci sistemul se va deforma și, pentru punctele de aplicație ale forțelor $\bar{F}$, vor rezulta niște deplasări $\bar{j}$. Ecuația de mai sus se reduce numai la

$$N_{ik} u_{ik} = \sum \bar{F} \bar{j}$$

pentru că lucrul mecanic al barelor cari nu se lungesc este nul. Același lucru și pentru reacțiuni ale căror drumuri sunt nule.

Prin urmare, avem o relație simplă care ne dă pe N_{ik} .

Totul este să găsim relațiile între u_{ik} și j .

Vom stabili aceasta.

a) Primul caz.

Să considerăm bara l care unește nodurile i și k , cari au parcurs drumurile $\vec{j}_i$ și $\vec{j}_k$ (fig. 130).

Drumul $\vec{j}_i$, infinit mic, se poate considera ca un arc de cerc, de asemenea infinit mic, cu centrul într'un punct O aflat pe normală la $\vec{j}_i$ în punctul i . Același lucru putem spune și despre $\vec{j}_k$. Prin urmare, cele două drumuri le putem considera ca două arce de cerc, cu centrele în punctul O de intersecție al normalelor la $\vec{j}_i$ și $\vec{j}_k$ în punctele i și k , punct care se numește *centru instantaneu de rotație*.

Notăm distanța Oi cu $\vec{r}_i = r_i \vec{a}$, Ok cu $\vec{r}_k = r_k \vec{\beta}$, iar ik cu $\vec{l} = l \vec{\lambda}$.

De pe figură avem:

$$\vec{r}_k - \vec{r}_i = \vec{l}$$

Dacă diferențiem această relație avem:

$$(1) \quad \vec{j}_k - \vec{j}_i = d\vec{l}$$

Să presupunem că bara în sensul lungimii se lungeste cu cantitatea u , iar extremitățile ei, în această mișcare, parcurg, normal pe direcția barei, un drum total φ , bara ik rotindu-se cu unghiul θ , așa că

$$\varphi = l\theta$$

În acest caz avem

$$d\vec{l} = u\vec{\lambda} + \varphi\vec{\theta}$$

și relația (1) se poate scri

$$(1) \quad \vec{j}_k - \vec{j}_i = u\vec{\lambda} + \varphi\vec{\theta}$$

în care $\vec{\theta}$ este vectorul normal pe $\vec{\lambda}$.

Deplasările fiind infinit mici avem și:

$$\vec{j}_i = r_i \theta_i, \quad \vec{j}_k = r_k \theta_k$$

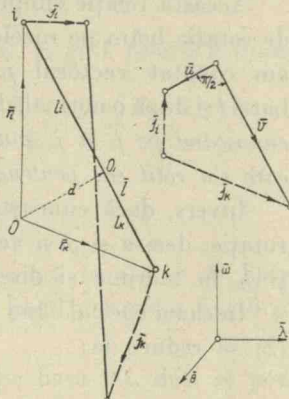


Figura 130

în care θ_i și θ_k sunt unghiurile cu cari s'au rotit razele $\vec{r}_i$ și $\vec{r}_k$ pentru a da naștere drumurilor $\vec{j}_i$ și $\vec{j}_k$.

Relația (1) sub forma de mai sus nu are aplicație, mai interesantă este o transformată a ei, care se capătă în modul următor.

Să considerăm vectorul $\vec{\omega}$ normal pe planul figurii.

Avem:

$$\vec{j}_i = j_i \vec{\omega a}, \quad \vec{j}_k = j_k \vec{\omega \beta}, \quad \vec{\theta} = \vec{\omega \lambda}$$

Punând aceste expresiuni în (1) și multiplicând apoi această ecuație vectorial cu $\vec{\omega}$ se capătă:

$$(2) \quad j_k \vec{\beta} - j_i \vec{a} = v \vec{\lambda} - u \vec{\theta}$$

Această relație simplă ne arată că dacă din centrul instantaneu de rotație luăm pe razele vectoare r_i și r_k , lungimi egale cu j_i și j_k , am căpătat vectorul $j_k \vec{\beta} - j_i \vec{a}$, care, descompus după direcția barei l și după o normală la ea, ne dă respectiv pe v și $-u$. Prin urmare, cunoscând pe $\vec{j}_i$ și $\vec{j}_k$ putem afla lungirea u a barei și unghiul θ cu care s'a rotit ea, pentru că avem $v = l \theta$.

Invers, dacă cunoaștem direcția barei l , centrul instantaneu de rotație, deci $\vec{a}$ și $\vec{\beta}$ și valorile lui u și v , deducem numaidecât pe $\vec{j}_i$ și $\vec{j}_k$ în mărime și direcțiune.

În cazul special când $u = 0$, adică bara este rigidă, atunci ecuația (2) se reduce la:

$$j_k \vec{\beta} - j_i \vec{a} = v \vec{\lambda}.$$

Deci, dacă pe razele vectoare plecând din O luăm lungimi egale cu j_i și j_k , vectorul $j_k \vec{\beta} - j_i \vec{a}$ este paralel cu direcția $\vec{\lambda}$, a barei ik . Invers, în acest caz al barelor rigide, dreapta paralelă cu $\vec{\lambda}$ detașează pe razele vectoare plecând din centrul instantaneu de rotație, segmente proporționale cu deplasările j_i și j_k .

Vom face uz de această proprietate. Să ne ocupăm mai departe de ecuația (2), pe care o multiplicăm mai întâiu vectorial și apoi scalar cu $\vec{\lambda}$. căpătăm:

$$(3) \quad \begin{aligned} & -j_i \vec{a} \vec{\lambda} + j_k \vec{\beta} \vec{\lambda} = u \vec{\lambda} \vec{\theta} \\ & -j_i \vec{a} \vec{\lambda} + j_k \vec{\beta} \vec{\lambda} = v \end{aligned}$$

Să coborîm din punctul O normala OO_1 pe direcția barei ik . Să notăm cu d distanța OO_1 , cu l_i distanța iO_1 și l_k distanța $O_1 k$. Prin urmare l_i și l_k sunt segmentele detașate pe dreapta l de punctul O_1 , piciorul perpendiculaii (fig. 130).

În acest caz:

$$\dot{j}_i \bar{\alpha} \bar{\lambda} = r_i \theta_i \bar{\omega} \sin (\bar{\alpha} \bar{\lambda}) = \bar{\omega} \cdot d \cdot \theta_i$$

$$\dot{j}_k \bar{\beta} \bar{\lambda} = r_k \theta_k \bar{\omega} \sin (\bar{\beta} \bar{\lambda}) = \bar{\omega} \cdot d \cdot \theta_k$$

$$\dot{j}_i \bar{\alpha} \bar{\lambda} = r_i \theta_i \cos (\bar{\alpha} \bar{\lambda}) = -l_i \theta_i$$

$$\dot{j}_k \bar{\beta} \bar{\lambda} = r_k \theta_k \cos (\bar{\beta} \bar{\lambda}) = l_k \theta_k$$

Introducând aceste valori în (3) căpătăm:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= d (\theta_k - \theta_i) \\ v &= l \theta = l_i \theta_i + l_k \theta_k \end{aligned}$$

Avem deci relații simple între unghiurile de rotație ale razelor vectoare și lungirea și rotația barei.

Să se noteze că deplasările fiind infinit mici, raporturile:

$$\dot{j}_i / r_i = \theta_i, \quad \dot{j}_k / r_k = \theta_k, \quad v / l = \theta,$$

ne dau chiar unghiurile cu cari se rotesc r_i , r_k și l pentru a ajunge în poziția deplasată.

În cazul când $u = 0$, avem:

$$\theta = \theta_i = \theta_k$$

b) Al doilea caz.

Să presupunem că bara ik este articulată în i și k de barele $0i$ și $1k$, cari la rândul lor se pot roti în jurul punctelor fixe 0 și 1 (fig. 131).

Nodul i va descri un drum normal pe bara $0i$, deci se poate considera ca un arc de cerc cu centrul O aflat pe dreapta $0i$. Același lucru putem spune și despre drumul descris de nodul k . Deci centrul din care putem descri cele două arce infinit mici, cari dau drumurile $\dot{j}_i$ și $\dot{j}_k$ este punctul O de intersecție al direcțiunilor $0i$ și $1k$, care este centrul instantaneu de rotație. Prin urmare, am adus acest caz la cazul precedent.

În cazul când bara ik este rigidă, o dreaptă paralelă cu ik taie, pe razele ce pleacă din O , segmente proporționale cu drumurile $\dot{j}_i$ și $\dot{j}_k$.

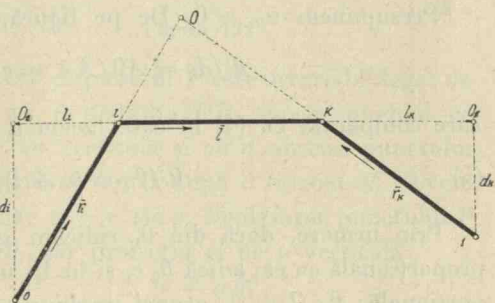


Figura 131

În cazul când bara ik se lungește, găsim formule analoage cu precedentele.

În adevăr de pe figură avem:

$\bar{r}_i + \bar{l} - \bar{r}_k = \bar{l}_{o1} = \text{constant}$, care, diferențiată și cu aceleași notații ca mai sus, duce la ecuația (2).

Dacă întocmai ca la cazul precedent notăm: $r_i \sin(\bar{\alpha} \bar{\lambda}) = d_i$, adică înălțimea coborită din 0 pe direcția $\bar{\lambda}$, $r_k \sin(\bar{\beta} \bar{\lambda}) = d_k$, înălțimea coborită din 1 pe aceeași direcție, $r_i \cos(\bar{\alpha} \bar{\lambda}) = l_i$, lungimea $O_o i$ și $r_k \cos(\bar{\beta} \bar{\lambda}) = l_k$, $k O_1$; O_o și O_1 fiind picioarele perpendicularelor coborite din 0 și 1 pe direcția $\bar{\lambda}$, atunci avem:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= d_k \theta_k - d_i \theta_i \\ -v &= -l \theta = l_i \theta_i + l_k \theta_k \end{aligned}$$

ecuații absolut analoage celor găsite la cazul precedent.

Semnul — dinaintea lui θ ne arată că bara l se rotește în sens invers celui presupus de noi la stabilirea formulei.

c) Proiecțiile deplasărilor după o direcțiune oarecare.

Centrul instantaneu de rotație al barelor r_i și r_k este B , iar al barei l_{ik} cu dreapta $O1$ este A (fig. 132).

Proiectăm tot conturul $Oik1$ pe o direcție normală direcțiunii date. În figură s'a presupus că direcțiunea dată este o verticală, deci direcțiunea normală este o orizontală.

Notațiunilor de pe figură, nu e nevoie să li se mai dea explicație.

Presupunem $u_{ik} = 0$. De pe figură, avem:

$$d_i/d_k = AO/A1 = c/(c+l)$$

care comparată cu (4) în care facem $u = 0$, ne dă

$$(5) \quad \theta_i/\theta_k = (c+l)/c$$

Prin urmare, dacă din O_1 ridicăm o ordonată egală cu c , sau proporțională cu ea, adică $\theta_0 c$, și în 1_1 , una egală cu $l+c$, sau proporțională: $\theta_0 (l+c)$, atunci unghiurile θ_i și θ_k au valorile:

$$(6) \quad \theta_i = \theta_0 (c+l)/l \quad ; \quad \theta_k = \theta_0 c/l$$

cari satisfac evident ecuația (5).

Din (6) deducem:

$$(7) \quad \theta_i - \theta_k = \theta_0$$

adică, tocmai factorul de proporționalitate care putem să-l alegem arbitrar. Vom lua de obicei $\theta_0 = 1$.

De pe figură avem: $(Ai - li)/(Ak + lk) = c/(c + l) = \theta_k/\theta_i$
care ne dă:

$$Ai \cdot \theta_i - Ak \cdot \theta_k = l_{ik} \cdot \theta$$

Cu:

$$Ai/(c + x_i) = Ak/(c + l - x'_k) = l_{ik}/\lambda_{ik}$$

ultima relație devine:

$$(8) \quad x_i \theta_i + x'_k \theta_k = \lambda_{ik} \theta.$$

Așadar, unghiurile de pe figura astfel construită, reprezintă chiar unghiurile cu cari s'au rotit barele r_i , r_k , și l_{ik} .

Mai mult. *Ordonatele* v ale acestor drepte, măsurate dela linia de reper $0_1 1_1$, reprezintă chiar deplasările pe o verticală ale tuturor punctelor barelor r_i , r_k și l_{ik} , precum și ale tuturor punctelor cari sunt invariabil legate de aceste bare.

Intr'adevăr, să presupunem că punctul P este invariabil legat de bara r_i (fig. 133). Notăm cu r distanța OP , cu φ unghiul ce face r cu verticala și cu a abscisa punctului P , măsurată din O după o orizontală. Avem evident: $a = r \sin \varphi$. Deplasarea punctului P este $r\theta_i$, iar proiecția ei pe o verticală:

$$(9) \quad v = a \theta_i$$

Deplasările articulațiilor 0 și 1, precum și a centrului instantaneu de rotație B , sunt nule, deci proiecțiile lor 0_1 , 1_1 și B_1 pe dreapta $0_1 1_1$ vor avea $v=0$. Nodul i aparține în același timp barelor r_i și l_{ik} , deci aceste două bare, în dreptul nodului i , vor avea același v . Același lucru se petrece și în dreptul nodului k .

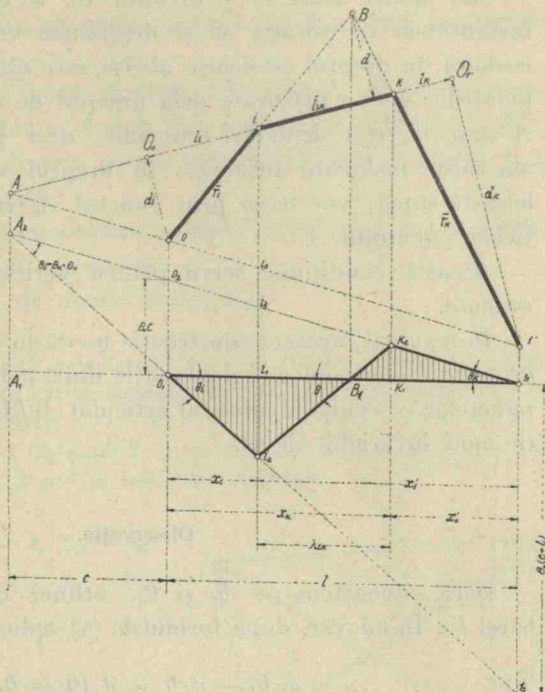


Figura 132

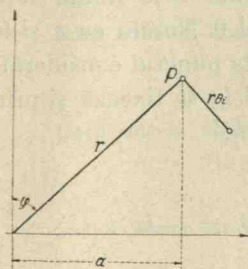


Figura 133

Așa fiind, de pe figură se vede că, dacă ne dăm deplasarea $i_1 i_2$ a nodului i , rezultă numai decît și $k_1 k_2$, aceea a nodului k , și deci putem lesne fixa conturul de drepte $0_1 i_2$, $i_2 B_1 k_2$ și $k_2 1_1$, ale căror ordonate măsurate de la linia de reper $0_1 1_1$ ne dau deplasările verticale v .

Mai mult. Bara ik și dreapta 01 se rotesc în jurul centrului instantaneu de rotație A și deplasarea verticală a uneia față de cealaltă, în dreptul aceleiași abscise, este egală tocmai cu suma deplasărilor lor v măsurate dela dreapta de reper $0_1 1_1$. În punctul A suma acestor deplasări este nulă, deci și dreptele $0_1 i_2$ și $1_1 k_2$, ale căror ordonate însumate în dreptul aceleiași abscise ne dă această sumă, vor trece prin punctul A_2 care se găsește pe verticala punctului A .

Această condițiune servă pentru verificarea construcției precedente.

În rezumat, această construcție ne dă în același timp unghiurile de rotație ale barelor și deplasările după o direcție dată ale tuturor punctelor ce compun conturul articulat $0ik1$, sau cari sunt legate în mod invariabil de el.

Observație.

Dacă cunoaștem pe θ_i și θ_k , atunci cunoaștem și lungirea barei l_{ik} . În adevăr, după formulele (4) aplicate aci avem:

$$(4) \quad u = d_k \theta_k - d_i \theta_i = d (\theta_i - \theta_k) = d \theta_0$$

În aceste condițiuni se pot da expresiuni analitice, foarte simple pentru deplasarea verticală a oricărui punct de pe barele noastre.

Poziția unui punct de pe conturul articulat este fixată fără echivoc, prin abscisa lui măsurată dela punctul 0. Notăm cu a și b , abscisele măsurate dela articulațiile 0 și 1, până la punctul considerat.

Același punct când se găsește pe intervalul l_{ik} se fixează și prin abscisele α și β măsurate dela nodurile i și k .

Pentru un punct de pe r_i sau r_k , avem:

$$v = a \theta_i = a (l + c)/l; \quad v = -b \theta_k = -bc/l$$

Dacă punctul se găsește pe l_{ik} , avem:

$$v = a \theta_i - \alpha(c + x_k)/l_{ik} = a(l + c)/l - \alpha(c + x_k)/l_{ik}$$

Condiția $\nu = 0$, ne fixează poziția punctului B_1 . Să notăm cu α_1 și β_1 depărtările orizontale ale lui B_1 de nodurile i și k .

Din triunghiurile asemenea $i_1 i_2 B_1$ și $k_1 k_2 B_1$ deducem:

$$(10) \quad \alpha_1 / \beta_1 = x_i \theta_i / x'_k \theta_k = x_i (l + c) / x'_k c$$

relație care ne permite să găsim poziția lui B_1 , când cunoaștem pe a lui A_1 și reciproc.

Aceasta putem s'o facem și grafic. Se observă că laturile $0_1 i_2$, $i_2 k_2$ și $k_2 1_1$, ale triunghiului $A_2 i_2 k_2$, trec prin trei puncte fixe $0_1 B_1 1_1$ și că vârfurile i_2 și k_2 descriu câte o verticală, atunci și vârful A_2 se va mișca pe o verticală.

Prin urmare, dacă cunoaștem poziția verticalei $A A_2 A_1$, putem găsi numaidecât pe B_1 și invers.

Vom face des uz de aceste cunoștințe.

Aplicația Nr. 38. Se dă patrulaterul 1—2—3—4 ale cărui laturi rămân invariabile ca lungime. Cu cât se lungeste distanța 2—4 când diagonala 1—3 se lungeste cu u_{13} (fig. 134)?

Notăm cu u_{24} lungirea distanței 2—4, și cu d_1, d_2, d_3 și d_4 distanțele normale dela nodurile 1, 2, 3 și 4 la cele două diagonale.

Avem evident:

$$u_{13} = d_4 (\theta_{43} - \theta_{41}) = d_2 (\theta_{21} - \theta_{23})$$

$$u_{24} = d_3 (\theta_{32} - \theta_{34}) = d_1 (\theta_{14} - \theta_{12})$$

Din partea doua a acestor egalități deducem:

$$(\theta_{43} - \theta_{41}) / d_2 = (\theta_{21} - \theta_{23}) / d_4 = m$$

$$(\theta_{32} - \theta_{34}) / d_1 = (\theta_{14} - \theta_{12}) / d_3 = m_1$$

$$\theta_{43} - \theta_{41} = m d_2, \quad \theta_{21} - \theta_{23} = m d_4$$

$$\theta_{32} - \theta_{34} = m_1 d_1, \quad \theta_{14} - \theta_{12} = m_1 d_3$$

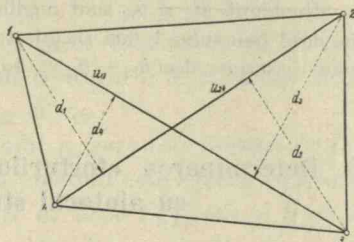


Figura 134

Dacă adunăm ultimele 4 egalități și ținem seamă că $\theta_{12} = \theta_{21}$, avem:

$$m (d_2 + d_4) + m_1 (d_1 + d_3) = 0$$

Dacă ducem valoarea unghiurilor în expresiile lui u , găsim

$$(11) \quad u_{13} = m d_2 d_4, \quad u_{24} = m_1 d_1 d_3$$

și ținând seamă de egalitatea precedentă avem:

$$u_{13} (1/d_2 + 1/d_4) + u_{24} (1/d_1 + 1/d_3) = 0$$

Aplicația Nr. 39. Se dă triunghiul 1—2—3, ale cărui laturi se lungesc cu cantitățile: $u_{12}, \dots$. Cu cât se modifică valoarea unghiurilor (fig. 135)?

De pe figură avem evident:

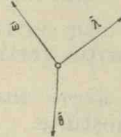
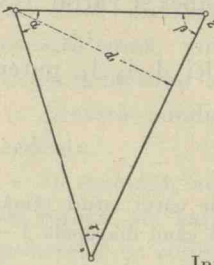
$$\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} = 0$$

Dând lungiri barelor se modifică și lungimea și orientarea lor. Dacă luăm variația expresiei de mai sus, căpătăm:

$$u_{12} \bar{\lambda}_{12} + u_{23} \bar{\lambda}_{23} + u_{31} \bar{\lambda}_{31} = -v_{12} \bar{\theta}_{12} - v_{23} \bar{\theta}_{23} - v_{31} \bar{\theta}_{31}$$

Dacă considerăm vectorul unitate $\bar{\omega}$ normal pe planul figurii, dacă multiplicăm vectorial ecuația de mai sus cu el și dacă ținem seamă că $\bar{\omega} \bar{\lambda} = \bar{\theta}$ și $\bar{\omega} \bar{\theta} = -\bar{\lambda}$, atunci ecuația de mai sus se transformă în:

$$u_{12} \bar{\theta}_{12} + u_{23} \bar{\theta}_{23} + u_{31} \bar{\theta}_{31} = v_{12} \bar{\lambda}_{12} + v_{23} \bar{\lambda}_{23} + v_{31} \bar{\lambda}_{31}$$



Dacă ținem seamă că avem:

$$\bar{\theta}_{12} \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \bar{\lambda}_{12} \cdot \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \cos \beta,$$

$$\bar{\theta}_{31} \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \bar{\lambda}_{31} \cdot \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \cos \gamma,$$

$$\bar{\theta}_{23} \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \bar{\lambda}_{23} \cdot \bar{\lambda}_{23} = -\bar{\omega}, \quad \bar{\lambda}_{12} \bar{\lambda}_{23} = \bar{\omega} \sin \beta,$$

$$\bar{\lambda}_{31} \bar{\lambda}_{23} = -\bar{\omega} \sin \gamma$$

$$\sin \beta = d_1 / l_{12}, \quad \sin \gamma = d_1 / l_{13}, \quad v_{12} = l_{12} \theta_{12},$$

$$v_{31} = v_{13} = l_{13} \theta_{13}$$

Inmulțind vectorial ecuația de mai sus cu $\bar{\lambda}_{23}$ și simplificând, avem:

$$(12) \quad (\theta_{13} - \theta_{12}) d_1 = u_{23} - u_{12} \cos \beta - u_{13} \cos \gamma$$

Unghiurile θ_{13} și θ_{12} sunt unghiurile cu cari s'au rotit laturile 1—2 și 1—3 în jurul punctului 1 (am socotit totdeauna că rotirea se face în sensul acelor unui ceasornic), deci $\theta_{13} - \theta_{12} = \Delta \alpha$, adică cantitatea cu care a variat unghiul α .

2. Determinarea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele cu ajutorul strămutărilor virtuale.

Să aplicăm cele stabilite mai sus la grinda din fig. 136, la care din fiecare nod pleacă câte trei bare.

Vom da barei 25 — să zicem — o lungire oarecare u_{25} ; atunci toate nodurile vor descri niște drumuri oarecari, compatibile cu legăturile dintre noduri.

Pentru a vedea drumurile parcurse vom suprapune figura deformată peste cea nedeformată, așa ca nodurile 1 și 6 să se suprapună respectiv. Constatăm că nodul 5 a parcurs drumul $\bar{j}_5$, nodul 4 drumul $\bar{j}_4$, etc.

Mai constatăm, conform ipotezei făcute, că toate barele păstrează aceeași lungime afară de bara 25 care se lungeste cu cantitatea u_{25} .

Conform ecuației lucrului mecanic virtual avem:

$$\Sigma \bar{F} \bar{j} = \bar{N}_{25} \bar{u}_{25}$$

Pentru că $\bar{u}_{25}$ este chiar după direcția lui $\bar{N}_{25}$ putem scrie $\bar{N}_{25} \bar{u}_{25} = N_{25} u_{25}$.

Să evaluăm termenii $\bar{F} \bar{j}$ și $N_{25} u_{25}$. Bara 45 este articulată în 4 și 5 de barele 65 și 14 cari s'au rotit în jurul punctelor fixe 1 și 6, deci, dacă ducem dreapta 5'4' paralelă cu 45, segmentele 55' și 44' sunt proporționale cu drumurile j_5 și j_4 .

În mod analog, bara 43 este articulată în 4 și 3 de barele 63 și 14, cari se rotesc în jurul punctelor fixe 1 și 6, deci 4'3' paralelă cu 43 taie pe 14 și 36 segmente proporționale cu deplasările j_4 și j_3 . Până aci am găsit o relație între j_5 și j_3 . Procedăm analog cu 23 care este articulată în 2 și 3 de barele 36 și 12, și găsim că j_2 este proporțional cu 22'. La rândul ei bara 25 este articulată, în 2 și 5, de barele 12 și 56, cari se rotesc în jurul punctelor 1 și 6. Observăm că 2'5' nu mai este paralelă cu 25. Descompunând conturul 5'5 22' după 25 și o normală la aceasta căpătăm pe u_{25} și v_{25} .

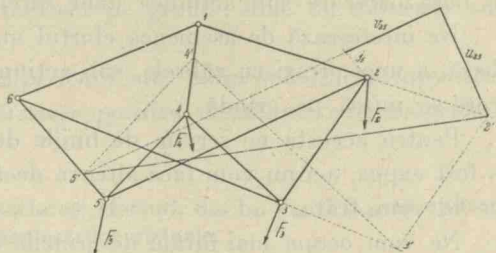


Figura 136



Forța F_5 parcurge drumul j_5 , care este normal pe direcția 55', și lucrul mecanic efectuat este egal cu $F_5 j_5 \cos \alpha$ (fig. 137), însă $j_5 \cos \alpha = 5' a$, deci $F_5 j_5 \cos \alpha = F_5 \cdot 5' a$.

Or ultimul termen nu este altceva decât momentul lui F_5 în raport cu punctul 5'. Prin urmare termenii $\bar{F} \bar{j}$ nu sunt altceva decât momentele forțelor F , din nodul respectiv, în raport cu punctele 5', 4' etc. aflate anterior. În acest mod putem spune că și $N_{25} u_{25}$ este egal cu

Figura 137 momentul forței N_{25} din nodul 2 și 5 în raport cu punctele 2' și 5'.

Notăm $5' a$ etc. cu $\bar{j}'_5$ etc. Cu forțele din figură avem:

$$\bar{F}_5 \bar{j}'_5 + \bar{F}_4 \bar{j}'_4 + \bar{F}_3 \bar{j}'_3 + \bar{F}_2 \bar{j}'_2 = \bar{N}_{25} \bar{u}_{25}$$

relație din care căpătăm N_{25} .

Efortul N_{25} este infinit când $u_{25} = 0$, adică atunci când 2'5' ar fi paralel cu 25. În acest caz se vede că deplasări ale nodurilor

sunt posibile, fără ca lungimea barelor să varieze, deci sistemul în acest caz nu este strict indeformabil.

Metoda deplasărilor virtuale este foarte bogată în aplicațiuni.

D) Linii de influență la grinzi cu zăbrele.

Cu ajutorul cunoștințelor de până acum, putem găsi efortul în o bară oarecare sub acțiunea unor sarcini fixe.

Ne interesează de asemenea efortul maxim ce se produce într'o bară, a unei grinzi cu zăbrele, sub acțiunea unui sistem de sarcini care se mișcă pe grindă.

Pentru aceasta ne servim de liniile de influență. Principiul lor a fost expus, aci nu vom face altceva decât să-l aplicăm la cazurile ce le vom trata.

Ne vom ocupa mai întâiu de grinzile cu tălpi paralele, apoi de grinzile cu tălpi poligonale și în sfârșit cu alte tipuri de grinzi.

1. Linii de influență la grinzi cu tălpi paralele.

Fie o grindă cu zăbrele (fig. 138), cu tălpi paralele, montanți verticali și diagonale înclinate.

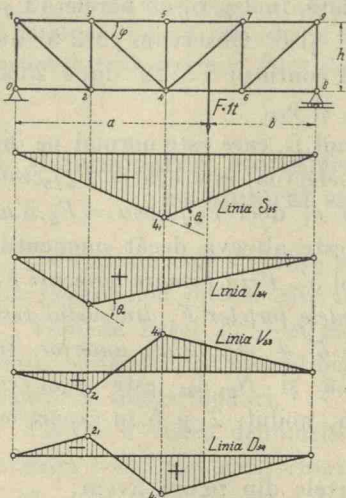


Figura 138

Presupunem că sarcina verticală $F = 1$ se aplică la nodurile inferioare.

a) Liniile de influență ale eforturilor:

S_{35} , I_{24} , V_{23} și D_{34} .

1°. S_{35} . Am avut

$$S_{35} = -M_4/h$$

Deci linia de influență a efortului din bara 35 va fi linia de influență a momentului încovoietor din nodul 4.

2°. I_{24} . Am avut:

$$I_{24} = M_3/h$$

Deci este tot una cu linia de influență a momentului M_3 .

3°. V_{23} . Dacă facem secțiunea care taie cele trei bare 13, 32 și

24, proiectând toate forțele pe o verticală, avem:

$$V_{23} = -T$$

Deci linia de influență este ca a forței tăietoare din panoul 24, când sarcinile se aplică pe grindă indirect, linie de influență cunoscută.

4°. D_{34} . Făcând o secțiune verticală care taie barele 35, 34 și 24, avem:

$$D_{34} \sin \varphi = T$$

Deci linia de influență este ca a forței tăietoare din panoul 24, când sarcinile se aplică indirect pe grindă, linie de influență cunoscută.

Se observă că talpa superioară este comprimată, cea inferioară întinsă și pentru forța tăietoare pozitivă montantul este comprimat, iar diagonală întinsă.

b) Liniile de influență ale aceluiași eforturi, S_{35} , I_{24} , V_{23} și D_{34} , cu ajutorul deplasărilor virtuale.

1°. S_{35} . În bara 35 presupunem că avem tensiunea S_{35} , sub acțiunea căreia s'a lungit cu cantitatea u_{35} . Prin această lungire triunghiul 345 se deformează, și anume: bara 34 se rotește împreună cu partea din stânga a grinzii, în jurul reazimului respectiv, cu unghiul θ_i , iar 45 cu partea din dreapta cu unghiul θ_k . Ambele părți ale grinzii se rotesc și în jurul punctului 4 cu unghiul

$$\theta_i + \theta_k = \theta_0$$

Prin această deformațiune ambele bucăți de grindă se ridică în sus. Expresia lucrului mecanic va fi

$$S_{35} u_{35} = -\nu$$

Am găsit deci linia de influență. Să găsim legătura între u_{35} și ν .
Avem:

$$u_{35} = h \theta_0$$

în care luând $\theta_0 = 1$ avem:

$$S_{35} = -\nu/h$$

În această ipoteză ($\theta_0 = 1$) avem

$$\theta_i = x'_4/l, \quad \theta_k = x_4/l$$

Avem toate elementele pentru construcția liniei de influență. Să o exprimăm analitic.

Când sarcina este la dreapta sau stânga nodului 4, avem respectiv:

$$\nu = b \theta_k = b x_4/l, \text{ și } \nu = a \theta_i = a x'_4/l$$

și:

$$S_{35} = -b x_4/l h \text{ și } S_{35} = -a x'_4/h l$$

iar când sarcina calcă chiar în nodul 4 avem:

$$S_{35} = -x_4 x'_4/l h$$

2°. I₂₄. In mod cu totul analog găsim

$$I_{24} = + \nu / h$$

care ne dă valori analoage ca pentru S₃₅, însă cu semn schimbat.

3°. V₂₃. Să presupunem că montantul este supus la o tensiune V₂₃ sub acțiunea căreia se lungește cu u₂₃.

Din cauza acestei lungiri paralelogramul 1342 se deformează în alt paralelogram, ambele părți ale grinzii rotindu-se în jurul punctului de întâlnire al dreptelor 13 și 24, adică dela ∞. Deci cele două bucăți de grindă după deformare rămân paralele între ele, adică se rotesc cu același unghi $\theta_i = \theta_k$.

În această deformare partea din stânga se lasă în jos, iar cea din dreapta se ridică în sus.

În aceste condiții avem:

$$V_{23} u_{23} = \nu$$

însă

$$u_{23} = x_2 \theta_i + x'_2 \theta_k = l \theta_i = l \theta_k$$

Deci:

$$V_{23} = \nu / l \theta_i$$

În cazul general am avut

$$\theta_i = (c + l) / l \quad \text{și} \quad \theta_k = c / l$$

Aci, având $c = \infty$, luăm lungimi proporționale împărțind totul cu c , și:

$$\theta_i = 1 / l, \quad \theta_k = 1 / l$$

Rezultă deci

$$V_{23} = \nu$$

Să scriem explicit valorile lui ν . Când sarcina este la dreapta lui 4 sau stânga lui 2, avem respectiv:

$$\nu = -b \theta_k = -b / l \quad \text{și} \quad \nu = a \theta_i = a / l$$

iar când este în panou:

$$\nu = a \theta_i - a / l = a / l - a / l$$

4°. D₃₄. Făcând același raționament ca mai sus se găsește că ambele părți se rotesc cu același unghi, și în cazul când diagonală se lungește, partea din stânga se ridică în sus, cea din dreapta se lasă în jos (fig. 138).

Avem deci:

$$D_{34} u_{34} = \nu$$

Însă:

$$u_{34} = x_4 \sin \varphi \cdot \theta_i + x'_4 \sin \varphi \cdot \theta_k = \sin \varphi$$

deci:

$$D_{34} \sin \varphi = \nu$$

Se vede că ν are valori analoage ca pentru V_{23} însă cu semn schimbat.

Prin urmare efortul din diagonală este contrar celui din montant, ceea ce se vede foarte clar scriind echilibrul nodului 2 și proiectând totul pe o verticală.

Mai trebuie observat că, dacă sarcina se aplică la nodurile inferioare, valorile lui ν sunt date de deformațiunea tălpii inferioare, dacă se aplică la nodurile superioare, valorile lui ν vor fi date de deformațiunea tălpii superioare. Prin urmare, nu ne este indiferent punctul de aplicație al sarcinei $F = 1$.

Se mai observă că pentru acest caz foarte simplu liniile de influență coincid cu acelea dela o grindă simplu rezemată, la care sarcinile se aplică indirect.

2. Linii de influență la grinzi cu tălpi poligonale.

a) Linia de influență a efortului S_{13} .

Vom presupune că sarcina se aplică la nodurile inferioare (fig. 139), că în bară avem efortul $+S_{13}$ și că ea se scurtează. Prin această scurtare partea din stânga a grinzii se rotește în jurul reazimului 0 cu θ_i , cea din dreapta în jurul reazimului 6 cu θ_k , iar ambele părți în jurul articulației 2 cu $\theta_i + \theta_k = \theta_0$.

Scurtarea u_{13} are valoarea $u_{13} = h_2 \theta_0$, în care h_2 este normala coborâtă din 2 pe 1—3.

Dacă luăm $\theta_0 = 1$, avem:

$$S_{13} = -\nu/h_2$$

și cu $\theta_i = x'_2/l$, $\theta_k = x_2/l$, când sarcina e la stânga sau dreapta nodului 2, găsim respectiv:

$$S_{13} = -a x'_2/l h_2,$$

$$S_{13} = -b x_2/l h_2$$

formule absolut identice cu acelea din cazul precedent.

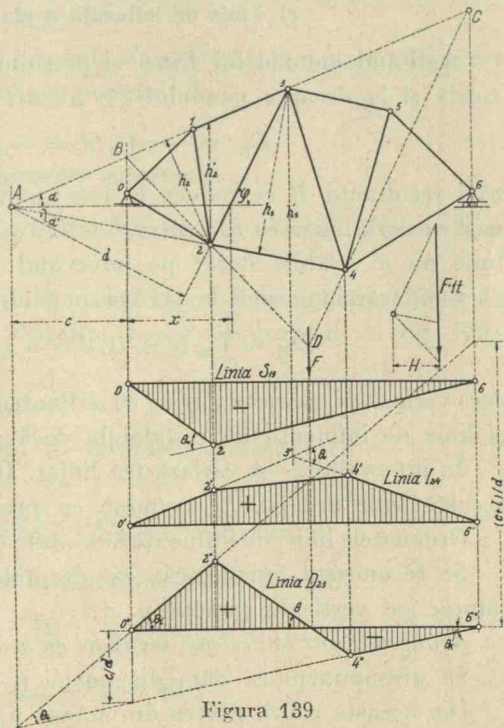


Figura 139

b) Linia de influență a efortului I_{24} .

Dacă această bară se lungește cu $u_{24} = h_3 \theta_0 = h_3$, găsim:

$$I_{24} = v/h_3, \quad \theta_i = x'_3/l, \quad \theta_k = x_3/l$$

Unghiul θ cu care se rotește bara 24 are valoarea:

$$\theta = (x'_4 \theta_k - x_2 \theta_i)/l_{24}$$

Expresiile lui I_{24} , când sarcina este la stânga nodului 2, sau la dreapta lui 4, sunt respectiv:

$$I_{24} = a x'_3/l h_3, \quad I_{24} = b x_3/l h_3$$

Când sarcina se găsește în panoul 2—4, la distanța orizontală a de nodul 2, expresia efortului este:

$$I_{24} = a x'_3/l h_3 - a (x_4 x'_3 - x'_4 x_3)/l \lambda_{24} h_3$$

Conturul liniei de influență este $0' 2' 4' 6'$ (fig. 139).

c) Linia de influență a efortului D_{23} .

Aplicând metoda lui Ritter și presupunând sarcina $F = 1$ verticală și la dreapta panoului 24, avem:

$$D_{23} = -c V_0/d = -b c/l d$$

căci rezultanta R se reduce la reacțiunea aplicată în reazimul 0, care variază liniar cu b . Pentru $b = l$, avem $D_{23} = -c/d$. Această linie nu e valabilă decât pe intervalul 4—6.

Când sarcina calcă la stânga panoului 24, avem:

$$D_{23} = V_6 (c + l)/d = a (c + l)/l d$$

care variază de asemenea liniar cu a . Pentru $a = l$, avem $D_{23} = (c + l)/d$ și linia de influență nu e valabilă decât pe intervalul 0—2.

În intervalul 2—4 variază tot liniar. În dreptul nodurilor 2 și 4 această linie are puncte comune cu precedentele două linii.

Ordonatele liniei de influență sunt date de conturul $0'' 2'' 4'' 6''$.

Se recunoaște numaidecât că dreptele $0'' 2''$ și $4'' 6''$ se întâlnesc pe verticala punctului A .

Ajungem exact la aceleași rezultate cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Să presupunem că dăm diagonalei o lungire oarecare u_{23} .

Din această cauză partea din stânga a grinzii se rotește în jurul reazimului 0 cu unghiul θ_i , cea din dreapta în jurul reazimului 6

cu unghiul θ_k , iar ambele grinzi se rotesc, una față de alta, în jurul centrului instantaneu de rotație A , dela intersecția barelor 13 și 24 cu unghiul $\theta_i - \theta_k = \theta_0$.

Pentru că bara se lungește, partea din stânga se lasă în jos, cea din dreapta se ridică.

Vom presupune $\theta_0 = 1$.

Avem:

$$u_{23} = d \theta_0 = d, \quad D_{23} d = \nu, \quad \therefore D_{23} = \nu/d$$

$$\theta_i = (c + l)/l; \quad \theta_k = c/l; \quad \theta = (c + x_2)/l - c/l$$

Să scriem expresia lui ν pe diferitele porțiuni de grindă.

Când sarcina e la stânga lui 2 sau la dreapta lui 4, avem respectiv:

$$\nu = a (c + l)/l; \quad \nu = -b c/l$$

Când sarcina calcă în panou avem

$$\nu = a (c + l)/l - a (c + x_4)/l$$

D_{23} este nul când $\nu = 0$. Această condiție ne fixează punctul limit de efort nul în diagonala 23.

La expunerea metodei generale s'a arătat cum putem găsi acest punct atunci când cunoaștem punctul A .

Observare importantă.

Putem exprima pe D_{23} în funcție de alte elemente geometrice ale grinzii.

1^o. Să ducem o orizontală prin A care taie diagonala 23 într'un punct care se găsește la distanța $c + x$ de punctul A (fig. 139).

Avem evident

$$d = (c + x) \sin \varphi$$

care valoare o introducem în formulele precedente.

2^o. Am avut:

$$D_{23} \cos \varphi = M_2/h'_2 - M_3/h'_3$$

Când sarcina calcă la dreapta panoului, avem:

$$M_2 = b x_2/l, \quad M_3 = b x_3/l$$

și deci:

$$D_{23} \cos \varphi = b k/l$$

în care am notat:

$$k = x_2/h'_2 - x_3/h'_3$$

Când sarcina calcă la stânga panoului, avem:

$$D_{23} \cos \varphi = ak_1/l$$

în care am notat:

$$k_1 = x'_2/h'_2 - x'_3/h'_3$$

Când sarcina calcă în interiorul panoului, componentele ei în nodurile 2 și 4 sunt respectiv:

$$\beta/\lambda_{24} \text{ și } \alpha/\lambda_{24}$$

și:

$$M_2 = b x_2/l, \quad M_3 = b x_3/l - \beta (x_3 - x_2)/\lambda_{24}$$

cari ne dau:

$$D_{23} \cos \varphi = bk/l + \beta (x_3 - x_2)/h'_3 \lambda_{24}$$

Punctul limit pentru care $D_{23} = 0$, este dat de relațiile:

$$\alpha = \lambda_{24}/(1 - k x'_4/k_1 x_2)$$

$$\beta = \lambda_{24}/(1 - k_1 x_2/k x'_4)$$

Această metodă ne dă și un mijloc grafic ușor pentru determinarea punctului limit de efort nul. Cu ajutorul unui poligon de forțe $F = 1$, cu o distanță polară H și cu un poligon funicular putem găsi cele două componente β/λ_{24} și α/λ_{24} , din nodurile 2 și 4. Polul fiind arbitrar putem face totdeauna așa ca linia de închidere să coincidă cu bara 2—4. Dacă prelungim laturile poligonului funicular până întâlnesc direcțiunile reacțiunilor, și dacă ducem linia de închidere, căpătăm curba momentelor produse în grinda cu zăbrele de sarcinile α/λ_{24} și β/λ_{24} .

Să presupunem că linia de închidere este chiar dreapta BC , care coincide cu direcțiunea barei 13. În acest caz:

$$M_2 = H h'_2, \quad M_3 = H h'_3$$

$$D_{23} = M_2/h'_2 - M_3/h'_3 = H - H = 0$$

Construcția este foarte simplă (fig. 139): prelungim bara 1—3 până întâlnește direcțiunile reacțiunilor în B și C . Unim B cu 2 și C cu 4 și la intersecția lor se găsește poziția sarcinei pentru care $D_{23} = 0$.

Dacă am găsit poziția punctului limit de forță tăietoare putem construi numaidecât linia de influență.

Această metodă convine în special atunci când, după prima metodă, punctul A iese afară din cadrul epurei.

Cu ajutorul elementelor date până acum putem construi linia de influență a efortului din oricare bară a unei grinzi cu zăbrele.

3. Grinzi cu diagonale în K.

Din punctul de vedere al formei tălpilor am deosebit grinzi cu tălpi paralele și grinzi cu tălpi poligonale, deși de fapt prima categorie nu e decât un caz particular al celei de a doua.

Din punctul de vedere al diagonalelor, putem grupa grinzile în grinzi simple, grinzi cu diagonale în k , grinzi cu bare suplimentare, duble, etc.

Grinzile cu diagonale simple sunt grinzile de care ne-am ocupat până acum.

Ne vom ocupa aci cu grinzile cu diagonale în k .

Se recunoaște numaidecât că grinda din fig. 140 îndeplinește condiția: $m = 2n - 3$.

a) Liniile de influență ale eforturilor S_{47} și I_{25} .

Facem o secțiune sinuoasă care taie numai trei direcțiuni și anume 4—7, 4—3, 3—2 și 2—5.

Se recunoaște numai decât, că dacă luăm momentul în raport cu nodul 2, avem:

$$S_{47} = -M_2/h_2 = -M_2/h'_2 \cos \alpha$$

Analog:

$$I_{25} = M_4/h_4 = M_4/h'_4 \cos \alpha'$$

Liniile de influență ale acestor eforturi vor fi liniile de influență ale momentelor respective (nu sunt în figura 140).

b) Liniile de influență ale eforturilor D_{35} și D_{37} .

Dacă proiectăm pe o orizontală eforturile din nodul 3, avem:

$$(1) \quad D_{35} \cos \varphi' + D_{37} \cos \varphi = 0$$

Dacă facem o secțiune verticală prin barele 4—7, 3—7, 3—5 și 2—5 și scriind ca partea din stânga a grinzii este în echilibru sub acțiunea sarcinilor ce acționează asupra ei, avem:

$D_{35} \sin \varphi' - D_{37} \sin \varphi = T + S_{47} \sin \alpha - I_{25} \sin \alpha' = T - M_2 (tga + tga')/h'_2$ în care am înlocuit S_{47} și I_{25} prin valorile lor și am ținut seamă că $M_2 = M_4$ și $h'_2 = h'_4$.

Urmând norma indicată la metoda lui Ritter, prelungim barele 4—7 și 2—5 până se întâlnesc în punctul A. Dacă ducem o orizontală prin A, aceasta taie montantul 2—4 în punctul B (nefigurat).

Dacă notăm cu c distanța orizontală dela A la reazimul din stânga, avem:

$$AB = c + x_2, \quad AB (\operatorname{tga} + \operatorname{tga}') = h'_2 = h'_4$$

și deci:

$$(2) \quad D_{35} \sin \varphi' - D_{37} \sin \varphi = T - M_2 / (c + x_2)$$

Ecuatiile (1) și (2) ne dau valorile eforturilor în funcțiune de elementele din partea doua a ecuației (2).

Avem:

$$(3) \quad \begin{aligned} D_{35} \sin(\varphi + \varphi') / \cos \varphi &= T - M_2 / (c + x_2) \\ -D_{37} \sin(\varphi + \varphi') / \cos \varphi' &= T - M_2 / (c + x_2) \end{aligned}$$

Ambele linii de influență sunt identice, diferind numai prin multiplicator.

Când sarcina $F = 1$ calcă la dreapta panoului avem:

$$(4) \quad T - M_2 / (c + x_2) = bc/l (c + x_2)$$

Când calcă la stânga panoului avem:

$$(4) \quad T - M_2 / (c + x_2) = -a (c + l) / l (c + x_2)$$

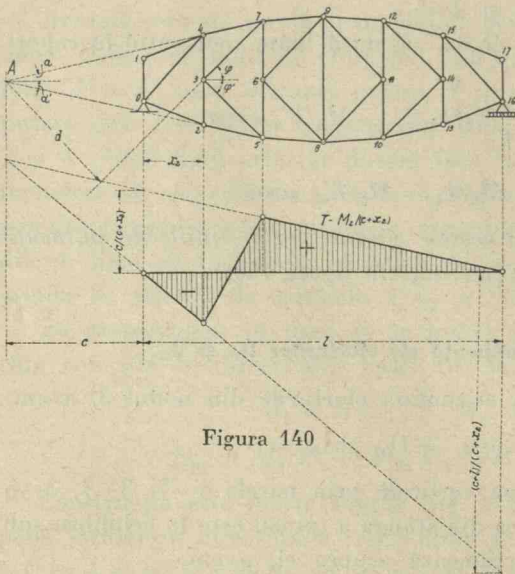


Figura 140

După cum se vede, linia de influență este absolut analoagă cu a efortului din o diagonală dela un sistem simplu (fig. 140).

Ajunsem la rezultate simple și cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Să deformăm poligonul 2, 3, 4, 5, 7 rotind toate laturile în jurul punctelor 2, 3 și 4 (fig. 141). In această deformațiune toate laturile păstrează aceeași lungime afară

de 3—7 care se scurtează și 3—5 care se lungește. Latura 2—4 se rotește în jurul reazimului din stânga cu θ_i , iar 5—7, în jurul celui din dreapta, cu θ_k .

Centrul instantaneu de rotație este la intersecția laturilor 47 cu 25.

Deci :

$$u_{37} = d_{37} (\theta_i - \theta_k), \quad u_{35} = d_{35} (\theta_i - \theta_k)$$

Luăm:

$$\theta_i - \theta_k = \theta_0 = 1, \text{ și deci:}$$

$$u_{37} = d_{37}, \text{ și } u_{35} = d_{35}$$

Cu cari:

$$D_{35} d_{35} - D_{37} d_{37} = Fv$$

De pe fig. 141 avem:

$$d_{35} = AC \cdot \cos \varphi', \quad AC/(c+x_5) = h_{23}/\lambda,$$

cu cari:

$$d_{35} = (c+x_5) h_{23} \cos \varphi' / \lambda,$$

$$d_{37} = (c+x_5) h_{34} \cos \varphi / \lambda$$

Dacă aceste valori le introducem în ecuația precedentă și dacă ținem seamă de ecuația (1) căpătăm:

$$D_{35} \cos \varphi' (c+x_5) h_{24}/\lambda = Fv$$

$$D_{37} \cos \varphi (c+x_5) h_{24}/\lambda = -Fv$$

Când sarcina e la dreapta panoului, $v = b$ $\theta_k = bc/l$, iar când e la stânga: $v = -a$ $\theta_i = -a(c+l)/l$. Dacă tălpile sunt paralele facem $c = \infty$.

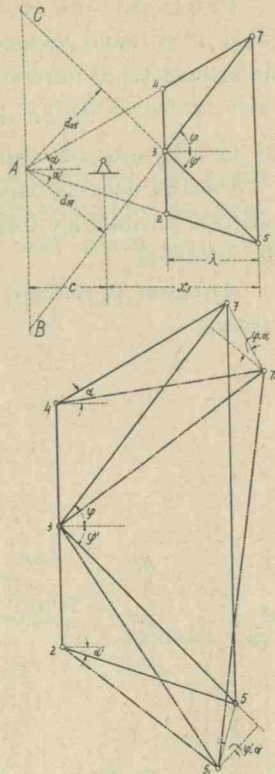


Figura 141

c) Linia de influență a efortului din montantul 56.

Găsim expresia lui V_{56} scriind echilibrul nodului 5 și proiectând totul după o verticală. Avem (fig. 142):

$$I_{52} \sin \alpha'_s + D_{35} \sin \varphi' + V_{56} - I_{58} \sin \alpha'_d - F = 0,$$

când sarcina F calcă în nodul 5. Dacă nu calcă în nod punem în ecuație componenta sa în nodul 5. Dacă sarcina este în afara panourilor adiacente lui 5, punem $F = 0$.

În această formulă α'_s și α'_d sunt unghiurile ce fac tălpile grinzii cu orizontala, la stânga și dreapta nodului.

Expresiile ce rezultă de aci sunt cam complicate. Sunt simple numai când talpa inferioară este orizontală, când avem:

$$D_{35} \sin \varphi' + V_{56} - F = 0,$$

cu observațiile de mai sus făcute pentru F . Așadar, linia de influență este ca a lui D_{35} , cu corecțiunea ce o aduce forța F , sau componenta sa, în nodul 5.

Putem găsi valoarea lui V_{56} făcând o secțiune prin barele 47, 37, 56 și 58 și luând momentul tuturor forțelor în raport cu punctul A_1 , de intersecție al barelor 4—7 și 5—8, și vom avea: (fig. 142)

$$D_{37} d + V_{56} (c_1 + x_5) + V_0 c_1 = 0,$$

în care V_0 este reacțiunea în reazimul din stânga.

Dacă în această expresie punem valoarea reacțiunii pentru toate pozițiile posibile ale forței F , avem valoarea lui V_{56} și deci linia lui de influență.

Ajungem la aceleași expresii, mai ușor, cu ajutorul deplasărilor virtuale.

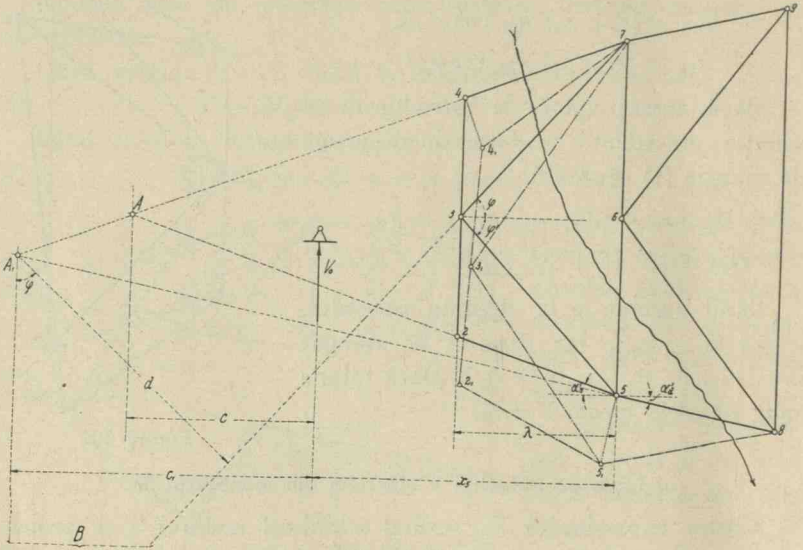


Figura 142

Dând o lungire montantului 56, poligonul barelor se deformează ca în fig. 142, barele păstrând toate aceeași lungime afară de 3—7 care se lungeste și ea.

Partea din dreapta a grinzii se rotește în jurul reazimului din dreapta cu unghiul θ_k și anume se ridică în sus și odată cu ea și nodurile 7 și 8. Partea din stânga se rotește în jurul reazimului din stânga cu unghiul θ_i , și odată cu ea și nodurile 4 și 5; această parte se lasă în jos.

De pe figură se mai vede că centrul instantaneu de rotație este punctul A_1 , intersecția direcțiilor 4—7 cu 5—8.

Lungirile celor două bare au ca expresii, luând $\theta_1 = 1$,

$$u_{37} = d, \quad u_{56} = c_1 + x_5.$$

Expresia lucrului mecanic ne dă:

$$V_{5q} (c_1 + x_5) + D_{37} d = -F v_1$$

în care notez cu v_1 deplasările virtuale, relativ la centrul instantaneu de rotație A_1 .

Dacă în această expresie se introduce valoarea lui D_{37} , găsită anterior, exprimată în funcțiune de deplasările virtuale v , ce corespund centrului instantaneu de rotație A și dacă ținem seamă că

$$d/\cos \varphi = h_{34} (c_1 + x_5)/\lambda$$

găsim:

$$V_{56} (c_1 + x_5) = F (\theta_0 v - v_1)$$

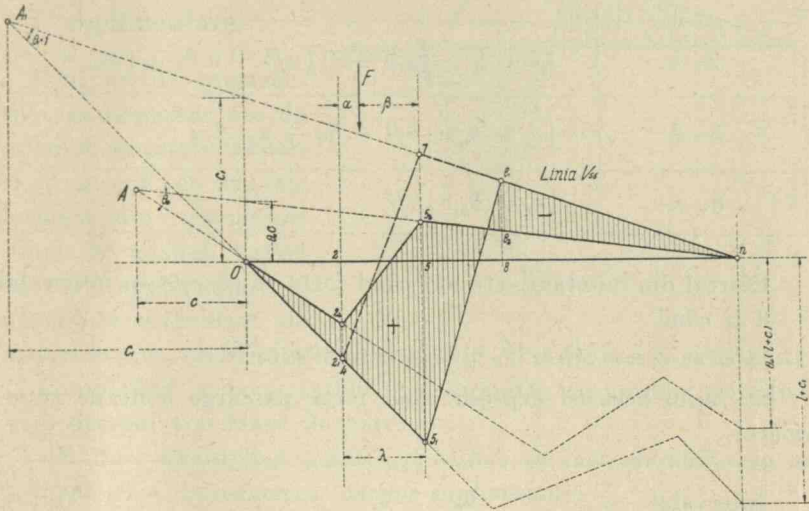


Figura 143

în care am notat:

$$\theta_0 = h_{34} (c_1 + x_5)/h_{24} (c + x_5)$$

Prin urmare dacă din ordonatele v , relative la centrul instantaneu de rotație A , reduse în raportul θ_0 , scădem ordonatele v_1 , relative la centrul instantaneu de rotație A_1 , găsim tocmai linia de influență a lui $V_{56} (c_1 + x_5)$.

Pe fig. 143 conturul $02_1 5_1 8_1 n$ dă deplasările v_1 , iar $02_2 5_2 8_2 n$ dă deplasările $\theta_0 v$. Diferența lor, adică ordonatele $0, 2_1-2_2, 5_1-5_2, 8_1-8_2, 0$, ne dau valorile lor în dreptul nodurilor indicate.

Aceasta-i linia de influență a efortului din montantul 5—6 când sarcina $F = 1$ parcurge nodurile inferioare.

Dacă sarcina parcurge nodurile superioare, atunci valorile lui φ_1 sunt date de conturul $0-4-7-n$ ale cărui ordonate se scad din $\theta_0 \varphi$.

Dăm pentru linia de influență a lui V_{56} valorile lui $\theta_0 \varphi - \varphi_1$ în cazul când forța se aplică la nodurile inferioare.

Când forța este în panoul de lungime λ notăm cu α și β distanțele ei dela nodul din stânga și cel din dreapta.

Intervalul	$\theta_0 \varphi - \varphi_1$
0—2	$[l + c_1 - \theta_0 (l + c)] a/l$
2—5	$[l + c_1 - \theta_0 (l + c)] a/l + \alpha \theta_0 (c + x_5)/\lambda$
5—8	$-[c_1 - \theta_0 c] b/l + (c_1 + x_5) \beta/\lambda$
8— n	$-[c_1 - \theta_0 c] b/l$

Efortul din montant este nul când forța se găsește în intervalul 5—8 și când

$$(c_1 - \theta_0 c) b/l = (c_1 + x_5) \beta/\lambda$$

Să scriem aceleași expresii când forța parcurge nodurile superioare:

Intervalul	$\theta_0 \varphi - \varphi_1$
0—2	$[l + c_1 - \theta_0 (l + c)] a/l$
2—5	$[l + c_1 - \theta_0 (l + c)] a/l - [c_1 + x_5 - \theta_0 (c + x_5)] \alpha/\lambda$
5— n	$-[c_1 - \theta_0 c] b/l$

După cum se vede linia de influență, construită cu ajutorul deplasărilor virtuale, ne permite să scriem cu mare ușurință, direct de pe figură, expresia diferitelor cantități ce ne interesează.

Aplicația Nr. 40. Fie o grindă în k cu tălpi paralele și cu nodul diagonalelor la jumătatea înălțimii montanților.

Să se găsească linia de influență a lui V_{56} când sarcina parcurge nodurile inferioare (fig. 144). Luăm $\theta_1 = 1$, iar pentru θ_0 rezultă din formulă valoarea $\theta_0 = 1/2$. Procedând grafic sau analitic se găsesc rezultatele trase plin pe fig. 144. In formule s'a făcut $c = c_1 = \infty$, și s'a împărțit totul prin c și c_1 . Conturul punctat reprezintă linia de influență a lui V_{56} când sarcina parcurge nodurile superioare.

4. Grinzi cu bare suplimentare.

Din motive constructive, de economie sau de calcul al secțiunii barelor, la o grindă cu zăbrele formată din triunghiuri simple se adaugă o serie de bare suplimentare și un număr echivalent de

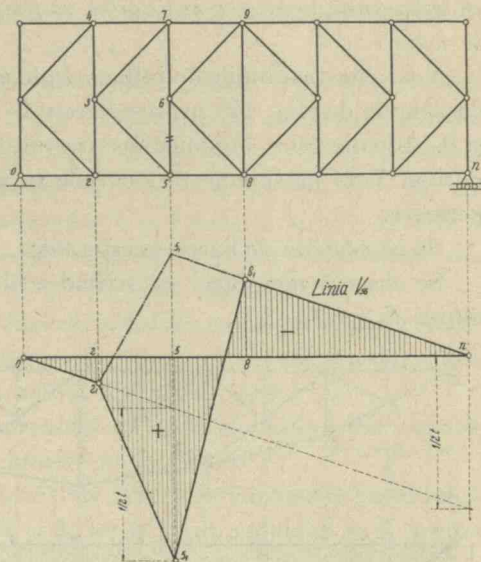


Figura 144

noduri în plus, astfel că relația $m = 2n - 3$ să fie mereu satisfăcută.

Comparând grinda, astfel transformată, cu grinda primitivă vom deosebi trei feluri de bare:

- 1°. Bare aparținând grinzii primitive în cari eforturile nu se schimbă prin introducerea barelor suplimentare.
- 2°. Bare suplimentare, în cari eforturile sunt independente de formă și dimensiunile grinzii primitive.
- 3°. Bare aparținând grinzii primitive, în cari eforturile se schimbă prin introducerea barelor suplimentare.

Singurul criteriu după care putem pune o bară într'o grupă sau alta, este linia ei de influență.

Dacă linia de influență a efortului din o bară oarecare este identică cu aceea a efortului din aceeași bară considerată în grinda primitivă, fără barele suplimentare, atunci bara face parte din prima grupă.

Dacă linia de influență este independentă de dimensiunile grinzii primitive, atunci bara face parte din grupa doua.

Dacă prin introducerea barelor suplimentare, linia de influență a eforturilor din o bară din grinda primitivă se modifică, atunci bara aparține grupei a treia.

Prin urmare, totul se reduce la construcția liniilor de influență.

Calculul eforturilor în bare se face după normele indicate până aci, va trebui însă, la facerea secțiunilor, să fim atenți la repartitia sarcinilor la noduri.

Vom construi liniile de influență ale eforturilor din barele grinzii cu zăbrele din fig. 145 în care barele 1—2, 2—3, 5—6, 6—7, 7—10 și 9—10 sunt bare suplimentare, restul de bare formând grinda primitivă. Vom presupune că sarcinile se aplică la nodurile tălpii superioare.

Să ne ocupăm de barele acestei tălpi.

Se observă mai întâi că scriind echilibrul nodurilor 1, 5 și 9 se obține $S_{01} = S_{13}, \dots$

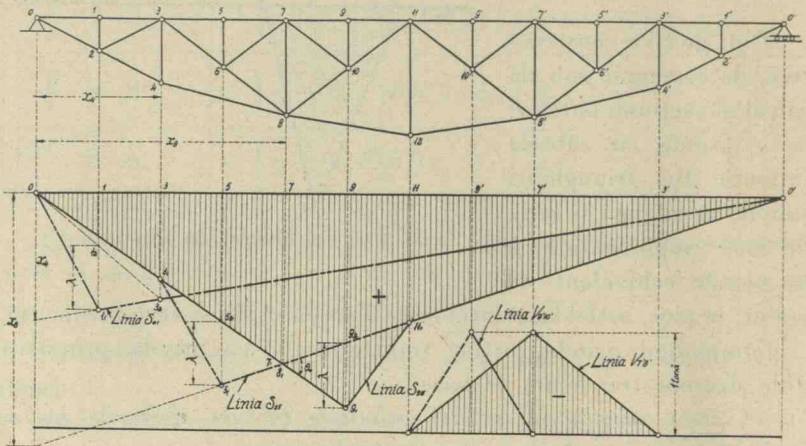


Figura 145

E suficient deci a găsi linia de influență a lui S_{911} pentru a o avea și pe a lui S_{79} .

a) Liniile de influență ale eforturilor S_{911} , S_{35} și S_{01} .

Facem o secțiune care taie numai 3 bare: 9—11, 10—11 și 8—12 și luăm momentul în raport cu nodul 8. Avem evident $S_{911} = -M_8/h_8$. E suficient deci să construim linia de influență a lui M_8 .

Atâta timp cât $F=1$ este la dreapta nodului 11 $\therefore M_8 = b x_8/l$, când sarcina calcă în panoul 9—11 $\therefore M_8 = b x_8/l + \beta$, când calcă în panoul 7—9 $\therefore M_8 = b x_8/l + a$, iar când calcă la stânga nodului 7 $\therefore M_8 = a x'_8/l$. Dacă trasăm această linie de influență se vede că are conturul format din liniile drepte 0—9₁—11₁—0' (fig. 145).

Din formulele de mai sus se vede că linia de influență este identică cu a momentului din nodul 8 din grinda primitivă, la care se adaugă ordonatele triunghiului $7_1 - 9_1 - 11_1$, a cărui ordonată în dreptul nodului 9 este $9_1 - 9_2 = \lambda$.

Dacă se urmează aceeași cale, pentru aflarea liniei de influență a eforturilor din barele $3 - 5$ și $0 - 1$, se găsește că ele sunt identice cu a momentelor din nodurile 8 și 4 din grinda primitivă, la care se adaugă ordonatele triunghiurilor $3_1 - 5_1 - 7_1$ și $0 - 1_1 - 3_2$, ale căror ordonate în dreptul nodurilor 5 și 1 sunt $5_1 - 5_2 = 1_1 - 1_2 = \lambda$, și obținem ca linii de influență respectiv contururile formate din drepte: $0 - 3_1 - 5_1 - 0'$ și $0 - 1_1 - 0'$ (fig. 145).

Din examinarea acestor linii de influență se constată că eforturile cari se produc în talpa superioară prin introducerea barelor suplimentare sunt mai mari ca acelea din grinda primitivă.

Ajungem exact la același rezultat cu ajutorul deplasărilor virtuale. Să presupunem că dăm o lungire barei $9 - 11$.

În acest caz cele două bucăți de grindă se vor roti în jurul reazimelor 0 și $0'$, cu unghiurile θ_i și θ_k , iar în jurul nodului 8 cu θ_0 pentru care luăm valoarea $\theta_0 = 1$.

Se recunoaște că, atunci când $9 - 11$ se lungește, cele două bucăți de grindă se ridică în sus. Lungirile care rezultă pentru barele $10 - 11$ și $8 - 12$ sunt nule pentrucă, rotirea lor făcându-se în jurul nodului 8 prin care trec, pentru ele avem $d = 0$.

Ecuția lucrului mecanic se reduce la:

$$S_{911} \cdot u_{911} = -\nu$$

și cum:

$$u_{911} = h_8 \theta_0 = h_8$$

căpătăm:

$$S_{911} = -\nu/h_8$$

În această mișcare nodul 9 e solidar cu partea din stânga a grinzii, nodul 11 cu cea din dreapta și deci după deformație talpa superioară, în nodurile căreia se aplică sarcinile, va afecta conturul format din drepte $0 - 9_1 - 11_1 - 0'$, găsit anterior. Se recunoaște numai-decât: $9_1 - 9_2 = \lambda \theta_0 = \lambda$.

b) Liniile de influență ale eforturilor I_{812} , I_{48} , I_{24} și I_{02} .

Dacă se face secțiunea care taie barele $9 - 11$, $10 - 11$ și $8 - 12$ (fig. 146) și se ia momentul în raport cu nodul 11, se găsește:

$$I_{812} = M_{11}/h_{11}$$

Dacă plimbăm sarcina $F = 1$ pe grindă, constatăm că M_{11} nu este cu nimic influențat de introducerea barelor suplimentare.

Același lucru și pentru barele 4 — 8 și 2 — 4.

Dacă notăm cu h_{3d} și h_{3s} normalele coborâte din nodul 3 respectiv pe barele 4 — 8 și 2 — 4, vom avea:

$$I_{48} = M_3/h_{3d} \text{ și } I_{24} = M_3/h_{3s}$$

Pentru bara 0 — 2 facem o secțiune care taie barele 0 — 1 și 0 — 2, și luăm momentele în raport cu nodul 3. Am putea lua mo-

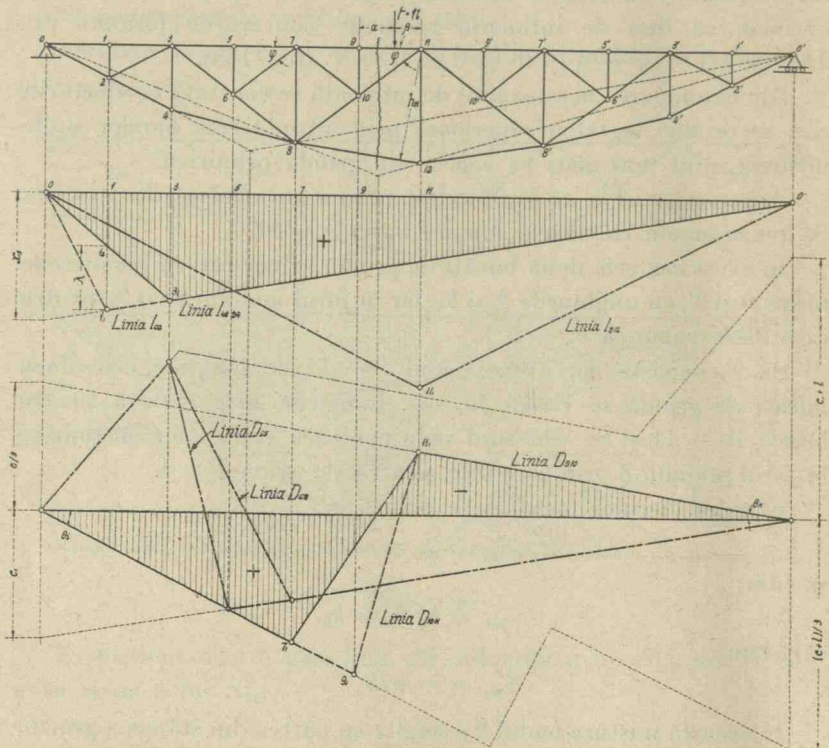


Figura 146

mentul în raport cu nodul 1, însă voim să comparăm efortul cu cel din grinda primitivă. Vom avea:

$$I_{02} = M_3/h_{3s}$$

Să vedem însă cum variază M_3 , în acest caz.

Când sarcina este la dreapta nodului 3 $\therefore M_3 = b x_3/l$, când este în panoul 1 — 3 $\therefore M_3 = a x'_3/l + \beta$, când este în panoul 0 — 1 $\therefore M_3 = a x'_3/l + \alpha$.

Aşa dar, linia de influenţă se compune din linia de influenţă a lui M_3 din grinda primitivă la care, pe intervalul $0-3$, adunăm ordonatele triunghiului $0-1_1-3_1$, a cărei ordonată în dreptul nodului 1 este $1_1-1_2=\lambda$. Liniiile de influenţă ale eforturilor din barele $8-12$, $4-8$ cu $2-4$ şi $0-2$ sunt contururile formate din dreptele $0-11_1-0'$, $0-3_1-0'$ şi $0-1_1-0'$. Numai efortul din bara $0-2$ este influenţat de introducerea barelor suplimentare.

c) Liniile de influenţă ale eforturilor din montanţii suplimentari

$$V_{12}, V_{56} \text{ şi } V_{910}.$$

Se observă mai întâi că eforturile din aceste bare sunt independente de eforturile din barele grinzii primitive. N'avem decât să scriem de exemplu echilibrul nodului 9.

Să notăm cu V_9 reacţiunea lui $F=1$ în nodul 9. Atâta timp cât F este în afara intervalului $7-11$ $\therefore V_9=0$. Când este în intervalul $9-11$ $\therefore V_9=\beta/\lambda$, iar când este în intervalul $7-9$ $\therefore V_9=\alpha/\lambda$. Dacă scriem echilibrul nodului 9 avem:

$$V_{910} = -V_9$$

Linia de influenţă este un triunghi aşa cum se arată pe fig. 145.

Ajunsem la acelaşi rezultat cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Dăm o lungire u barei $9-10$ şi vom avea:

$$V_{910} u = -\varphi$$

Cum $\varphi = \beta u / \lambda$ şi $\varphi = \alpha u / \lambda$, găsim tocmai linia de influenţă precedentă.

Aci trebuie să observăm că, dacă u este un infinit mic de ordinul întâiu, atunci lungirea barelor $7-9$ şi $9-11$ este un infinit mic de ordinul al doilea şi deci distanţa $7-11$ rămâne invariabilă şi prin urmare restul grinzii nu are niciun fel de deplasare.

Celelalte linii de influenţă ale acestor montanţi sunt identice cu aceasta.

d) Liniile de influenţă ale eforturilor din diagonalele suplimentare

$$D_{23}, D_{67} \text{ şi } D_{710}.$$

Ele se comportă toate la fel. Observaţiile făcute la montanţii suplimentari se aplică şi aci.

Scriind echilibrul nodului 10, de exemplu, găsim componentele după direcţiunile $7-10$ şi $8-10$:

$$D_{710} = -V_{910}/2 \sin \varphi \quad ; \quad D_{810} - D_{1011} = V_{910}/2 \sin \varphi$$

Aşa dar, linia de influenţă a lui D_{710} diferă de a lui V_{910} numai prin multiplicatorul $-1/2 \sin \varphi$.

Componenta $D_{810} - D_{1011}$ va modifica efortul din bara 8 — 10 sau 10 — 11, lucru pe care nu putem să-l precizăm acum.

e) Liniile de influenţă ale eforturilor din montanţii grinzii primitive

$$V_{34}, V_{78} \text{ şi } V_{1112}.$$

Primul şi ultimul se comportă la fel.

Dacă scriem echilibrul nodului 4, avem:

$$I_{24} \sin \alpha_{24} + V_{34} - I_{48} \sin \alpha_{48} = 0$$

Introducând în această expresie valorile găsite anterior, avem:

$$V_{34} = -M_3 (tg \alpha_{24} - tg \alpha_{48}) / h_4$$

Prin urmare, linia de influenţă este ca a lui M_3 şi nu este influenţată de introducerea barelor suplimentare.

Ajungem la acelaşi rezultat şi cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Să dăm o lungire barei 3 — 4. În acest caz cele două bucăţi de grindă se vor roti în jurul reazimilor cu unghiurile θ_i şi θ_k , iar în jurul lui 3 cu unghiul θ_0 . Unghiul θ_0 va fi unghiul cu cât a variat unghiul 238 sau suma variaţiei unghiurilor 234 şi 438.

După formula (12) dela deplasări virtuale, variaţia primului unghi este:

$$-u_{34} \sin \alpha_{24} / h_{35} = -u_{34} tg \alpha_{24} / h_4$$

iar a celui de al doilea:

$$u_{34} \sin \alpha_{48} / h_{3d} = u_{34} tg \alpha_{48} / h_4$$

deci

$$\theta_0 = -u_{34} (tg \alpha_{24} - tg \alpha_{48}) / h_4$$

Ecuaţia lucrului mecanic virtual ne dă:

$$V_{34} u_{34} = M_3 \theta_0 = -\nu$$

Dacă ne mărginim numai la prima egalitate, se vede imediat că am obţinut aceeaşi linie de influenţă.

Procedând la fel, găsim:

$$V_{1112} = -2 M_{11} tg \alpha_{812} / h_{12}$$

Pentru montantul 7 — 8 vom scri echilibrul nodului 7. Atâta timp cât sarcina F calcă în afara intervalului 3 — 11, $V_{78} = 0$. Când calcă în intervalul 9 — 11 $\therefore V_9 = \beta / \lambda$, $D_{710} = \beta / 2 \lambda \sin \varphi$ şi componenta după 7 — 8 este $V_{78} = -\beta / 2 \lambda$. Când calcă în intervalul

7 — 9. $V_{78} = -(\lambda + \beta)/2 \lambda$. Când sarcina pareurge intervalul 7 — 5 — 3 lucrurile se petrec la fel în sens invers. Linia de influență se compune din două drepte (fig. 145).

Ajungem la același rezultat și cu ajutorul deplasărilor virtuale. Dacă dăm o lungire barei 7 — 8, nodul 7 se ridică în sus.

Deplasarea fiind infinit mică, distanța 3 — 11 va varia cu un infinit mic de ordinul al doilea, deci rămâne invariabilă.

Nodurile 6 și 10 vor avea și ele deplasări infinit mici de ordinul 2, deci și distanțele 3 — 8 și 6 — 11 rămân invariabile. Așa dar, restul grinzii rămâne imobil afară de bara 7 — 8 care se lungeste și dreptele 3 — 7 și 7 — 11 cari se rotesc în jurul nodurilor 3 și 11.

f) Liniile de influență ale eforturilor din diagonalele grinzii primitive

D_{36} , D_{68} și D_{81} , D_{1011} .

1°. *Să ne ocupăm de diagonala 10 — 11.* Facem secțiunea care taie barele 9 — 11, 10 — 11 și 8 — 12 și luăm momentul în raport cu punctul A , de intersecție a laturilor 9 — 11 și 8 — 12. Notăm cu d distanța normală dela punctul A până la diagonala 10 — 11. Avem evident $d = (c + x_{11}) \sin \varphi$. Presupunem că avem tensiune în diagonală, și că sarcina F se găsește la dreapta nodului 11.

Avem

$$D_{1011} \sin \varphi (c + x_{11}) = -bc/l$$

Când F este în intervalul 9 — 11, avem:

$$D_{1011} \sin \varphi (c + x_{11}) = -bc/l + \beta (c + x_9)/\lambda$$

Când F este la stânga nodului 9, avem:

$$D_{1011} \sin \varphi (c + x_{11}) = a(l + c)/l$$

Pentru $\beta = \lambda$ ultimile două formule sunt identice. Construcția este foarte simplă și este dată de conturul 0 — 9₁ — 11₁ — 0' (fig. 146).

Ordonatele s'au redus în raportul 1/3.

2°. *Să ne ocupăm de diagonala 8 — 10.* Facem o secțiune care taie barele 7 — 9, 7 — 10, 8 — 10 și 8 — 12 și luăm momentul tuturor forțelor în raport cu punctul A (fig. 146). Când sarcina este în afara intervalului 7 — 11, avem pentru efortul din diagonală aceleași valori ca pentru 10 — 11 și anume:

$$D_{810} \sin \varphi (c + x_{11}) = -bc/l, \quad D_{810} \sin \varphi (c + x_{11}) = a(l + c)/l$$

Să presupunem că forța se găsește în intervalul 9 — 11. Vom avea:

$$D_{810} \sin \varphi (c + x_{11}) = -bc/l + D_{710} d_{710}.$$

Însă

$$D_{710} = \beta/2 \lambda \sin \varphi \quad \text{și} \quad d_{710} = (c + x_7) \sin \varphi$$

deci

$$D_{810} \sin \varphi (c + x_{11}) = -bc/l + \beta (c + x_7)/2 \lambda$$

din care se vede că $\beta/2 \lambda$ este componenta lui F în nodul 7. Ajungem la o expresie identică când F este în intervalul 7 — 9.

Pentru $\beta=0$, formula ne dă prima valoare a lui D și pentru $\beta=2 \lambda$, coincide cu a doua valoare.

Linia de influență este dată de conturul 0 — 7₁ — 11₁ — 0'.

Prima diagonală a fost influențată de introducerea barelor suplimentare, a doua nu. Așa dar, *componenta lui V_{910} influențează numai asupra diagonalei 10 — 11, lucru care nu se putea prevedea dela început.*

Ajungem la același rezultat și cu metoda deplasărilor virtuale. În adevăr, dacă dăm o lungire barei 10 — 11, poligonul 8 — 10 — 9 — 11 — 12 se deformează, ambele porțiuni de grindă rotindu-se una față de alta în jurul punctului A , intersecția laturilor 9 — 11 și 8 — 12.

În această deformare nodul 9 se mișcă cu partea din stânga a grinzii, iar 11 cu cea din dreapta. Talpa superioară va afecta după deformare conturul 0 — 9₁ — 11₁ — 0'.

Dacă dăm o lungire barei 8 — 10, patrulaterul 8 — 7 — 11 — 12 se deformează, bucățile de grindă rotindu-se în jurul aceluiași punct A și talpa superioară afectează conturul 0 — 7₁ — 11₁ — 0'.

Analog construim liniile de influență ale diagonalelor D_{36} și D_{68} .

Se pot da o mulțime de exemple de grinzi cu bare suplimentare. Ele diferă între ele prin forma tălpilor și modul cum se adaugă barele suplimentare. Norma de calcul rămâne cea indicată. În cazurile practice putem rezolva problema numai cu metoda secțiunilor și a separării nodurilor. Numai în cazuri speciale recurgem și la celelalte metode cari s'au indicat. Metoda deplasărilor virtuale ne duce în genere repede la rezultat.

VII. GRINZI CURBE SAU ARCE.

A) Arce plane cu o articulație și un reazem simplu supuse la forțe situate în acelaș plan cu ele.

În cele ce urmează ne vom ocupa cu grinzile curbe plane supuse la forțe cuprinse în planul lor.

Echilibrul unei grinzi curbe se asigură, ca și la o grindă dreaptă, prin reazime, cari în genere sunt o articulație și un reazim simplu.

Forma arcului se definește prin coordonatele punctelor axei grinzii. Originea axelor se ia în genere în o articulație. Axa Oy se ia de obicei verticală pentrucă în majoritatea cazurilor avem de-a-face cu sarcini verticale.

Dacă însă toate sarcinile au o altă direcție, vom lua axa Oy paralelă cu această direcție. Axa Ox o vom lua sau o normală la Oy sau linia care unește reazimile.

Ca și la grinzile drepte ne fixăm un sens pozitiv în care parcurgem arcul. Acesta odată fixat, rezultă direcțiile pozitive ale tangentei $\bar{\theta}$ și normalei $\bar{\nu}$ la axa arcului.

Față de aceste direcțiuni definim semnele cantităților N , T și M , adică a forței normale pe secțiune sau axială pentrucă este dirijată după axa grinzii, a forței tăietoare și a momentului încovoietor, întocmai ca la grinzile drepte.

Prin urmare, ne vom ocupa totdeauna de secțiunea care o întâlnim în față când parcurgem arcul în sensul pozitiv.

Ocupându-ne de această secțiune, N va fi pozitiv ori de câte ori este dirijat din interiorul arcului spre exteriorul lui, adică către $-\bar{\theta}$. N fiind dirijat către $-\bar{\theta}$, T va fi pozitiv ori de câte ori va fi dirijat către $-\bar{\nu}$.

M va fi pozitiv ori de câte ori rotește secțiunea de care ne ocupăm în sensul dela $\bar{\theta}$ la $\bar{v}$, adică are direcția $\bar{\theta}\bar{v}$.

1. Relații între N , T și M în cazul general.

Să presupunem că avem un element de arc ca în fig. 147, supus la o sarcină $\bar{p}$ continuă.

Putem presupune arcul ds așa de mic, încât, pe această lungime, să putem considera că atât valoarea cât și direcția lui $\bar{p}$ rămân constante. Să presupunem că elementul de arc ds este separat (tăiat) dintr'un arc mai mare, care se găsește în echilibru.

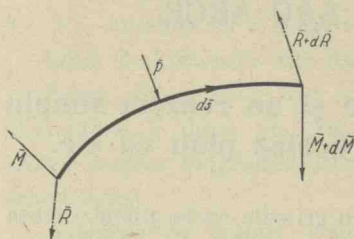


Figura 140

Pentru ca echilibrul să existe aplicăm: 1°. În extremitatea din stânga forța $\bar{R}$ și momentul $\bar{M}$, de valori și direcțiuni oarecare, cari nu sunt altceva decât forța rezultantă și momentul rezultat al tuturor forțelor din stânga elementului de arc în raport cu centrul de greutate al secțiunii arcului, adică în raport

cu punctul de pe axa arcului din acea secțiune și 2°. În extremitatea din dreapta o forță $\bar{R} + d\bar{R}$ și un moment $\bar{M} + d\bar{M}$, cari diferă de respectivele din extremitatea stângă, atât ca mărime cât și ca direcție.

În aceste condițiuni, să scriem ecuațiile de echilibru ale elementului de arc ds .

Suma forțelor ne dă:

$$\bar{R} + \bar{p} ds - \bar{R} - d\bar{R} = 0$$

Momentul îl luăm în raport cu extremitatea din dreapta a elementului de arc. Momentul lui $\bar{R}$ va fi $-\bar{\theta}\bar{R} ds$.

Punem semnul — pentru că în raport cu acest punct, brațul de pârghie este dirijat către $-\bar{\theta}$, și ds pentru că valoarea brațului de pârghie diferă de ds cu un infinit mic de ordin superior.

Pentru aceleași motive momentul lui $\bar{p}ds$ va fi $-\bar{\theta}\bar{p} ds^2/2$, care fiind un infinit mic de ordin superior se neglijează. În aceste condiții ecuația de momente se reduce la

$$\bar{M} - \bar{\theta}\bar{R} ds - \bar{M} - d\bar{M} = 0$$

Împărțind cu ds , cele două ecuații se reduc la:

$$(1) \quad \bar{p} = d\bar{R}/ds, \quad d\bar{M}/ds = \bar{R}\bar{\theta},$$

ecuații absolut generale cari se aplică la orice formă de arc.

Aplicarea formulelor (1) la un arc plan supus la forțe complanare cu el.

Ținând seamă că avem:

$$d\bar{\theta}/ds = \bar{v}/r, \quad d\bar{v}/ds = -\bar{\theta}/r \quad \text{și} \quad \bar{R} = -\bar{\theta}N - \bar{v}T$$

rezultă:

$$\bar{p} = d\bar{R}/ds = -\bar{\theta}(dN/ds - T/r) - \bar{v}(dT/ds + N/r)$$

Dacă ecuația aceasta se multiplică scalar, respectiv cu $\bar{r}$ și $\bar{\theta}$ și dacă notăm:

$$\bar{p}\bar{r} = p_n \quad \text{și} \quad \bar{p}\bar{\theta} = p_t,$$

avem:

$$(2) \quad dT/ds = -p_n - N/r, \quad dN/ds = -p_t + T/r$$

Momentul are o direcțiune constantă și anume normală pe planul arcului, deci este dirijat după $\bar{\theta}\bar{r}$ și deci $d\bar{M} = \bar{\theta}\bar{r}.dM$. Introducând această valoare în ecuația respectivă din (1), avem:

$$(3) \quad dM/ds = T$$

Ecuațiile (2) și (3) sunt absolut analoage cu acelea găsite la grinzile drepte și coincid cu ele când $r = \infty$.

Dacă derivăm ecuațiile (2) în raport cu φ și dacă ținem seamă de ele, căpătăm:

$$d^2T/d\varphi^2 + T = rp_t, \quad d^2N/d\varphi^2 + N = -rp_n,$$

ceea ce ne arată că atât N , cât și T , sunt funcțiuni de forma:

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi$$

și că deci nu păstrează o valoare constantă când trecem dela un punct al arcului la altul.

2. Determinarea reacțiunilor.

Să considerăm un arc supus la o serie de forțe oarecari. Mai întâiu, dându-ni-se modul de sprijinire, va trebui să găsim reacțiunile. Am spus că în genere echilibrul se asigură printr'o articulație A și un reazim simplu B (fig. 148). Originea axelor de coordonate o luăm în A , iar axa y -lor verticală de jos în sus. *Abscisa unui punct de pe arc o vom măsura prin distanța x , normală la axa y -lor.* Ca axă a absciselor vom lua — după cazuri, sau axa x orizontală sau axa x_1 , adică dreapta care unește cele două reazime. Aceste axe fac între ele unghiul α . *Ordonata unui punct de pe arc se va măsura totdeauna prin normalele, y sau y_1 , la cele două axe.*

Proiecția pe o orizontală a dreptei $AB = l_1$ este l , iar pe o verticală h . Tangenta la arc într'un punct oarecare face cu orizontala unghiul φ .

Reacțiunea $\bar{V}_a$ din A , de valoare și direcțiune necunoscută, putem oricând să o descompunem în două componente H_1 și V_{1a} , după axele x_1 și y , sau alte două componente H_0 și V_{0a} , după axele x și y .

Reacțiunea $\bar{V}_b$, din reazimul simplu B , are direcțiunea cunoscută și valoarea necunoscută.

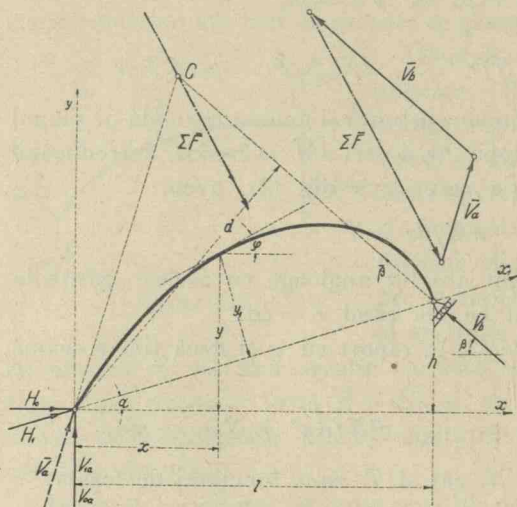


Figura 148

a) Soluția analitică.

Notăm cu a și b distanțele normale dela A și B la forța F .

Luând momentul tuturor forțelor în raport cu articulația A , avem (fig. 148):

$$(4) \quad \Sigma aF = dV_b$$

expresie din care deducem pe V_b . Am notat cu d , distanța normală dela A la direcțiunea reacțiunii din B .

Să luăm momentul tuturor forțelor în raport

cu reazimul B , reacțiunea din A presupunând-o descompusă după H_1 și V_{1a} . Avem:

$$(5) \quad \Sigma bF = lV_{1a}$$

expresie din care deducem pe V_{1a} .

Ca să găsim pe H_1 vom scri:

$$(6) \quad \Sigma \bar{F} + \bar{V}_b + \bar{H}_1 + \bar{V}_{1a} = 0$$

ecuație în care cunoaștem toate elementele afară de H_1 . N'avem decât să proiectăm această ecuație pe direcția Ox_1 , adică s'o multiplicăm scalar cu $\bar{\xi}_1$, ca să găsim valoarea lui H_1 .

Putem să ne servim și de celelalte două componente H_0 și V_{0a} , însă în acest caz ultimele două ecuații se prezintă sub forma:

$$(5') \quad \Sigma bF = lV_{0a} - hH_0$$

$$(6') \quad \Sigma \bar{F} + \bar{V}_b + \bar{H}_0 + \bar{V}_{0a} = 0$$

două ecuații cu două necunoscute. Dacă ultima ecuație o proiectăm pe verticală, adică o multiplicăm scalar cu $\bar{\eta}$, avem:

$$(7) \quad \bar{\eta} \Sigma \bar{F} + \bar{\eta} \bar{V}_b + V_{0a} = 0$$

din care deducem pe V_{0a} , care dusă în (5') ne dă pe H_0 .

Trebuie să observăm numaidecât că la găsirea acestor reacțiuni nu a intervenit cu nimic forma arcului ci numai sistemul de sprijinire al lui.

Prin urmare, reacțiunile se pot determina, și așa vom face totdeauna, ca la o grindă dreaptă AB , care are același sistem de sprijinire ca și arcul.

b) Soluția grafică.

Căutăm intersecția C a rezultantei $\Sigma \bar{F}$ cu direcțiunea lui $\bar{V}_b$ (fig. 148) și o descompunem după această direcțiune și dreapta CA care trece prin articulație. Grafic căpătăm pe epură de-a-dreptul valoarea și direcțiunea reacțiunii din A .

Odată aceasta aflată o descompunem după direcțiile ce ne convin, căci avem:

$$\bar{V}_a = \bar{H}_1 + \bar{V}_{1a} = \bar{H}_0 + \bar{V}_{0a}$$

În cazul când C este afară din cadrul epurei, vom utiliza poligonul funicular pentru a face această descompunere (fig. 149).

Cu un pol oarecare O construim poligonul funicular al forțelor date, care ne fixează poziția rezultantei $\bar{R}$. Orice triunghi AB_1C_1 , care are vârful A în articulație iar vârfurile B_1 și C_1 pe direcțiile lui $\bar{V}_b$ și $\bar{R}$, este un poligon funicular închis al forțelor $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$ și $\bar{R}$. Nimic nu se schimbă dacă punctul B_1 îl luăm chiar în B și așa îl vom lua totdeauna.

Notăm direcțiile AC_1 , C_1B , și AB respectiv cu $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ și $\bar{\xi}_1$. În poligonul forțelor, la intersecția lui $\bar{\theta}_1$ cu $\bar{\theta}_2$, găsim polul O_1 ce

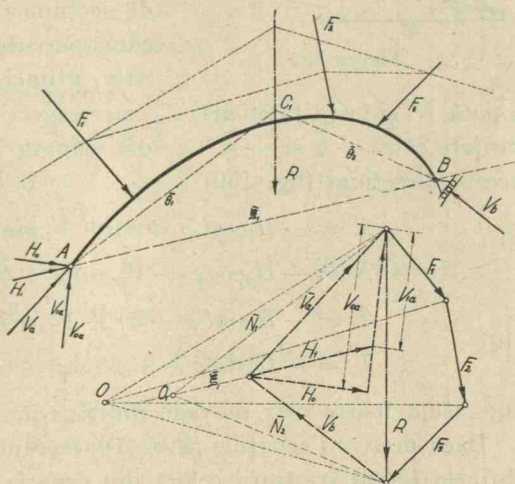


Figura 149

corespunde poligonului funicular AC_1B . Tot în poligonul forțelor, intersecția lui $\bar{\xi}_1$ cu direcția lui V_b ne fixează valoarea lui $\bar{V}_b$ și din închiderea poligonului forțelor rezultă imediat $\bar{V}_a$, pe care-l descompunem, după conveniență, în H_1 și V_{1a} sau H_0 și V_{0a} .

3. Forță axială, forță tăietoare și moment încovoiator.

Ne propunem să găsim expresiile lor într-o secțiune oarecare a arcului. Ne vom conduce numai după definițiile ce li s'au dat.

Rezultanta tuturor forțelor până la secțiunea considerată este:

$$(8) \quad \bar{R} = \bar{V}_a + \Sigma \bar{F}_s = \bar{H}_1 + \bar{V}_{1a} + \Sigma \bar{F}_s = \bar{H}_0 + \bar{V}_{0a} + \Sigma \bar{F}_s$$

în care prin $\Sigma \bar{F}_s$ am notat suma tuturor forțelor date — afară de reacțiuni — dela stânga secțiunii considerate, adică pe intervalul dela A până la secțiunea aleasă.

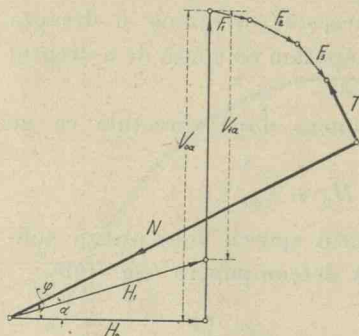


Figura 150

Dacă ne fixăm sensul pozitiv în care parcurgem arcul — dela A spre B — atunci rezultă și sensul pozitiv al tangentei $\bar{\theta}$ și normalei $\bar{v}$ la axa arcului, în punctul considerat. Pentrucă noi ne ocupăm totdeauna de secțiunea care o întâlnim în față când parcurgem arcul în sensul pozitiv, atunci, în acea secțiune, forța

axială N , și forța tăietoare, T , au respectiv direcțiile lor pozitive dirijate către $-\bar{\theta}$ și $-\bar{v}$. Le vom căpăta proiectând pe $\bar{R}$ după aceste direcțiuni (fig. 150):

$$(9) \quad N = -H_1 \cos(\varphi - \alpha) - V_{1a} \sin \varphi - \bar{\theta} \Sigma \bar{F}_s$$

$$N = -H_0 \cos \varphi - V_{0a} \sin \varphi - \bar{\theta} \Sigma \bar{F}_s$$

$$(10) \quad T = -H_1 \sin(\varphi - \alpha) + V_{1a} \cos \varphi - \bar{v} \Sigma \bar{F}_s$$

$$T = -H_0 \sin \varphi + V_{0a} \cos \varphi - \bar{v} \Sigma \bar{F}_s$$

după cum foarte clar se vede din figură.

Dacă derivăm ecuațiile (9) și (10) în raport cu φ , se constată că obținem semne contrarii celorla din ecuația (2). Aceasta se explică prin aceea că la stabilirea formulei (2), unghiul φ crește în sensul dela $\bar{\theta}$ la $\bar{v}$, creșterea având direcția $\bar{\theta}v$, pe când aci creșterea are direcția $\bar{\xi}\eta$ și deci sunt de semne contrarii.

Prin urmare, vom fi atenți la orientarea celor două sisteme de axe $\bar{\theta}$ și $\bar{r}$ mobil pe arc și $\bar{\xi}$ și $\bar{\eta}$ fix.

Expresiunea momentului este:

$$(11) \quad M = -yH_0 + xV_{0a} - M_s = -y_1H_1 + xV_{1a} - M_s$$

în care am notat cu M_s momentul forțelor $\Sigma \bar{F}_s$ în raport cu secțiunea considerată.

Pentru aceste cantități nu putem construi ușor o curbă de variație a lor, dela un punct la altul al arcului pentru un sistem de sarcini dat, pentrucă dela o secțiune la alta variază x , y și φ și deci vom căpăta curbe complicate, fără vreun folos practic și de aceea se renunță la construcția lor.

4. Linii de influență.

Ne vom ocupa de cazul curent al sarcinilor verticale. În cazul când sarcina are o altă direcție, luăm direcția axei oy paralelă cu aceasta, aducând astfel acest caz la precedentul.

Vom construi liniile de influență ale tuturor cantităților întâlnite până aci.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor V_1 , V_{1a} , H_1 , V_a , V_{0a} și H_0 .

1^o). Soluția directă.

1^o. V_b . Din ecuația (4) avem:

$$V_b = a/d$$

în care $d/l = \sin(\alpha + \beta)/\cos\alpha$ (fig. 151 a).

2^o. V_{1a} . Din ecuația (5) deducem:

$$V_{1a} = b/l \quad (\text{fig. 151 b}).$$

3^o. H_1 . Din ecuația (6) deducem:

$$\bar{\eta} b/l - \bar{\eta} + H_1 \bar{\xi}_1 + \bar{\beta} a/d = 0$$

care multiplicată scalar cu $\bar{\xi}$ ne dă:

$$H_1 \cos\alpha = a/c$$

în care $c = d/\cos\beta$. (fig. 151 c)

4^o. V_a . Vom căpăta această linie de influență făcând suma:

$$\bar{V}_a = H_1 \bar{\xi}_1 + V_{1a} \bar{\eta},$$

ca în fig. 151 e.

5°. V_{0a} . Din a doua ecuația (6) avem:

$$\bar{\eta} V_{0a} - \bar{\eta} + H_0 \bar{\xi} + \bar{\beta} a/d = 0$$

care multiplicată scalar cu $\bar{\eta}$, ne dă

$$V_{0a} = 1 - a/c_1$$

în care $c_1 = d/\sin \beta$

(fig. 151 d).

6°. H_0 . Aceeași ecuație (6) multiplicată scalar cu $\bar{\xi}$ ne dă:

$$H_0 = a/c$$

în care c are valoarea de mai sus (fig. 151 c).

2°. Soluția cu ajutorul strămutărilor virtuale.

1°. H_0 și H_1 . Să dăm o deplasare întregului sistem în sensul lui H_0 . Articulația A se va deplasa pe o orizontală, deci se va roti în jurul unui punct situat pe verticala AC, adică pe axa $\bar{\eta}$ (fig. 151). Celălalt reazim, pentru aceleași motive, se rotește în jurul unui punct situat pe dreapta $\bar{\beta}$.

Întregul sistem se rotește deci în jurul punctului C, de intersecție a axei $\bar{\eta}$ cu $\bar{\beta}$, cu un unghi oarecare θ .

Drumul lui H_0 este $c\theta$. Lucrul mecanic al reacțiunii din B este nul.

Drumul forței F proiectat pe o verticală este, după cum

se știe, $a\theta$ și deci lucrul mecanic virtual respectiv este $F a \theta$.

În cazul figurii, pentru o deplasare în sensul lui H_0 arcu se ridică în sus.

Ecuația lucrului mecanic este:

$$H_0 c \theta = a \theta, \text{ deci } H_0 = a/c$$

Această expresie coincide cu precedenta căci $c = d/\cos \beta$.

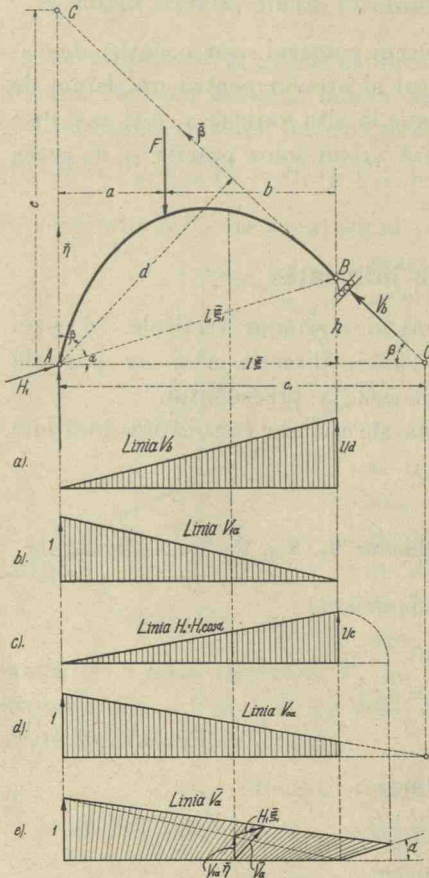


Figura 151

H_1 are exact aceeași linie de influență ca H_0 , diferă numai prin multiplicator.

2°. V_{0a} . Făcând același raționament ca mai sus găsim că întregul sistem se rotește în jurul punctului C_1 de intersecție a dreptelor $\bar{\xi}$ și $\bar{\beta}$ (fig. 151).

Avem întocmai ca mai sus:

$$V_{0a} c_1 \theta = (c_1 - a) \theta$$

și deci:

$$V_{0a} = 1 - a/c_1,$$

adică tocmai formula stabilită direct.

Această metodă, după cum se vede, dă rezultate foarte simple, însă trebuie să fim atenți la aplicarea ei ca să nu neglijăm deplasările cari dau lucru mecanic virtual.

Pentru celelalte cantități vom aplica această metodă ca fiind mai simplă.

b) Liniile de influență ale forței axiale N , forței tăietoare T și momentului încovoietor M .

1°. N . Să presupunem că în secțiunea i depărtăm cele două fețe ale ei, după direcțiunea tangentei la arc, cu cantitatea u_i . N fiind o tensiune, lucrul mecanic virtual va fi $-Nu_i$.

Prin această deformare arcul Ai se rotește în jurul articulației A cu unghiul θ (fig. 152). Secțiunea i , care aparține ambelor părți de arc, deplasându-se după tangentă se va roti în jurul unui centru instantaneu de rotație C , situat pe o dreaptă paralelă cu normala la arc.

Or, arcul Ai se rotește în jurul lui A , deci centrul de rotație al secțiunii i se va găsi pe dreapta AC , trecând prin A și paralelă cu normala la arc. Arcul Bi se rotește și în jurul unui centru aflat pe dreapta $\bar{\beta}$. Așa dar, am determinat centrul instantaneu de rotație C al arcului Bi .

Pentru că cele două secțiuni rămân paralele între ele și arcul Bi se va roti cu același unghi θ .

În acest caz avem:

$$u_i = (Ai_1 + i_1 C) \theta = AC \cdot \theta = c \theta$$

Deplasarea verticală a lui F este $v = -a \theta$, sau $v = -a_1 \theta$, după cum F este la stânga sau la dreapta secțiunii i și respectiv avem:

$$N = -a/c \quad \text{și} \quad N = -a_1/c$$

a și a_1 fiind abscisele punctului de aplicație al forței F măsurate respectiv dela verticalele punctelor A și C . Când scriem expresia lui u_i , va trebui să ținem seamă de sensul în care θ rotește cele două bucăți de arc.

Arcul Ai se rotește în jurul punctului A , Bi în jurul lui C , deci proiecțiile lor A_1 și C_2 au $\varphi = 0$.

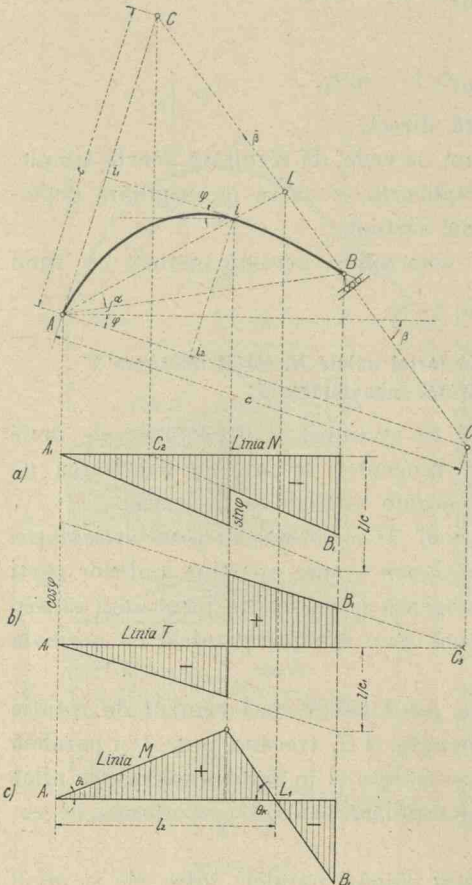


Figura 152

lui C_1 dela intersecția lui $\bar{\beta}$ cu dreapta paralelă cu tangenta la arc și care trece prin punctul A (fig. 152).

Unghiul de rotație θ este același pentru ambele părți de arc. In aceste condiții:

$$\varphi_i = (Ai_2 + i_2C_1) \theta = AC_1\theta = c_1\theta$$

Linia de influență se compune din două drepte paralele trecând prin A_1 și C_2 (fig. 152 a).

Diferența între ordonatele acestor drepte este tocmai $F \sin \varphi = \sin \varphi$ adică cantitatea cu cât variază N când sarcina trece dela stânga la dreapta secțiunii i .

Când $\varphi = 0$, punctul C_2 coincide cu A_1 și linia de influență a lui N se confundă cu a lui H_0 , ceea ce de altfel este evident.

2^o. T. In secțiunea i , facem să lunece în planele lor cele două fețe, fiecare în sensul pozitiv al lui T . Lunecarea totală fiind φ_i , lucrul mecanic virtual va fi $T\varphi_i$.

Dacă se face exact același raționament ca mai sus, se găsește că arcul Ai se rotește în jurul lui A , iar Bi în jurul punctu-

Deplasarea verticală a lui F este $a\theta$, sau $-b_1\theta$ după cum F este la stânga sau la dreapta secțiunii i și respectiv avem:

$$T = -a/c_1 \text{ și } T = b_1/c_1.$$

b_1 fiind abscisa forței F măsurată dela verticala lui C_1 .

Linia de influență se compune din două drepte paralele cari trec prin A_1 și C_3 , și între ordonatele cărora avem o diferență egală cu $\cos\varphi$ (fig. 152 *b*).

Pentru $\varphi = 0$, această linie de influență coincide cu a lui V_{0a} .

3°. M. In secțiunea i introducem o articulație și facem ca cele două fețe să se rotească una față de alta, în sensul pozitiv al lui M , cu unghiul θ_0 . Lucrul mecanic virtual va fi $M\theta_0$.

Prin această deformare arcul Ai se rotește în jurul punctului A , iar secțiunea i se deplasează după o normală la Ai , deci se va roti în jurul unui centru instantaneu de rotație care se găsește pe dreapta Ai (fig. 152).

Arcul Bi se rotește în jurul unui centru care se găsește pe dreapta $\bar{\beta}$.

Prin urmare arcul Bi , ale cărui extremități au centrul de rotație pe dreptele Ai și $\bar{\beta}$, se va roti în jurul punctului lor de intersecție L .

Arcul Ai se rotește cu unghiul θ_i , iar Bi cu θ_k , având relația $\theta_i + \theta_k = \theta_0$, în care putem lua $\theta_0 = 1$.

Rotirea făcându-se în jurul punctelor A și L , proiecțiunile lor A_1 și L_1 vor avea $\varphi = 0$.

Avem φ în dreptul lui F , când sarcina este la stânga sau dreapta secțiunii i , respectiv:

$$\varphi = -a\theta_i \text{ și } \varphi = -b_2\theta_k$$

și deci:

$$M = a\theta_i \text{ și } M = b_2\theta_k$$

b_2 fiind abscisa forței F măsurată dela verticala lui L .

Dacă notăm cu x și x' abscisele secțiunii i măsurate dela punctele A și L și $x + x' = l_2$, atunci în dreptul secțiunii i avem:

$$\varphi = x\theta_i = x'\theta_k$$

din care deducem:

$$\theta_i = x'/l_2 \quad ; \quad \theta_k = x/l_2$$

și deci respectiv

$$M = ax'/l_2 \text{ și } M = b_2x/l_2$$

Prin urmare momentul este ca într-o grindă cu consolă de deschidere l_2 și simplu rezemată în A_1 și L_1 (fig. 152 *c*).

Se observă că aceste linii de influență se exprimă în funcție de lungimile d , c , c_1 și l_2 cari sunt elementele geometrice ale arcului

și se determină numai decât dacă avem forma și dimensiunile lui și poziția secțiunii i .

Am notat cu d normala coborâtă din A pe direcția $\bar{\beta}$. De pe figură avem:

$$c = d / \cos(\beta - \varphi) \quad , \quad c_1 = d / \sin(\beta - \varphi)$$

Dacă notăm $y_i/x_i = \operatorname{tg} \gamma$, atunci

$$l_2 = d \cos \gamma / \sin(\beta + \gamma)$$

Fig. 153 ne arată aceste linii de influență pentru o altă secțiune i .

B) Arce plane cu trei articulații.

1. Definiții, reacțiuni. Curba momentelor încovoietoare.

Dacă două bare drepte sau curbe articulate între ele la un cap, le sprijinim cu celelalte două capete în două articulații, am căpătat o construcție cu trei articulații pe care în mod general o vom denumi *grindă* sau *arc* — după caz — *cu trei articulații*.

Grinzile pot fi articulate și în alte puncte ale lor, nu numai la extremități.

Dacă se compară această construcție cu grinda articulată la

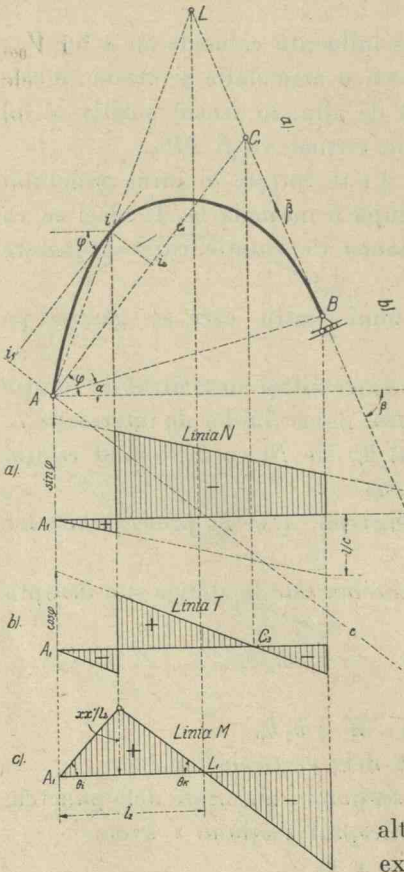


Figura 153

un cap și simplu rezemată la celălalt, se constată că *reazimul simplu* s'a realizat printr'o bară dreaptă sau curbă, articulată la ambele capete sau în două puncte oarecare de pe ea.

Așa fiind, la arcele cu trei articulații vom aplica norma de calcul dela cazul precedent, adaptată la noua formă și potrivit normei fixată de practică.

Vom considera arcele AD și BD (fig. 154), cari reazimă în A și B prin intermediul a două articulații și sunt articulate între ele în punctul D .

a) Reacțiuni.

1°. *Soluția analitică.* Reacțiunea $\bar{V}_a$, din A , va avea o valoare și o direcțiune necunoscută și pe care o descompunem în două componente, în două feluri: una H_0 orizontală și alta V_{0a} verticală sau în una H_1 , dirijată după linia articulațiilor AB , și alta verticală V_{1a} .

Același lucru se petrece și în B .

Prin urmare, *sistemul are patru necunoscute*. Pentru găsirea lor dispunem de patru ecuații, una de proiecțiuni și trei ecuații de momente. În adevăr, suma tuturor forțelor, inclusiv reacțiile, trebuie să fie nulă și momentele lor în raport cu cele trei articulații să fie de asemenea nule, aceasta rezultând din chiar definiția articulației.

Reacțiunea din D , pe care un arc o exercită asupra celuilalt, fiind egală și de sens contrar, dispăre în ecuațiile de mai sus.

Să determinăm grupul de reacțiuni V_{1a} și H_1 .

Luând momentul tuturor forțelor F în raport cu B , avem:

$$(1) \quad lV_{1a} = \Sigma b_b F$$

în care b_b este distanța dela B la forța F .

Luând momentul tuturor forțelor de pe porțiunea AD în raport cu D , avem:

$$(2) \quad y_{1d} H_1 = x_d V_{1a} - \Sigma b_d F$$

Ecuațiile (1) și (2) ne dau reacțiunile V_{1a} și H_1 imediat.

Să determinăm grupul de reacțiuni V_{0a} și H_0 .

Putem proceda ca mai sus și obținem două ecuații cu două necunoscute. Putem evita aceasta observând că:

$$H_0 = H_1 \cos \epsilon$$

și luând momentul în raport cu B , avem:

$$(3) \quad lV_{0a} - hH_0 = \Sigma b_b F$$

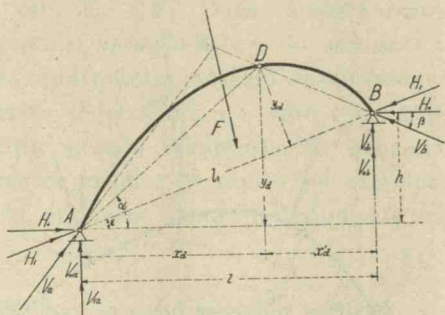


Figura 154

și ținând cont de (1), deducem:

$$(4) \quad V_{0a} = V_{1a} + hH_0/l = V_{1a} + H_1 \sin \varepsilon$$

Prin urmare, este suficient a determina primul grup de reacțiuni pentru a avea și pe cel de-al doilea.

Procedând la fel, găsim componentele reacțiunii, V_b , din articulația B .

Odată reacțiunile aflate, putem găsi în orice secțiune valorile lui N , T și M , scriind expresiile lor după definiția ce s'a dat acestor cantități. Aceasta revine la aplicarea formulelor (9), (10) și (11) dela cazul arcelor cu o articulație și un reazem simplu.

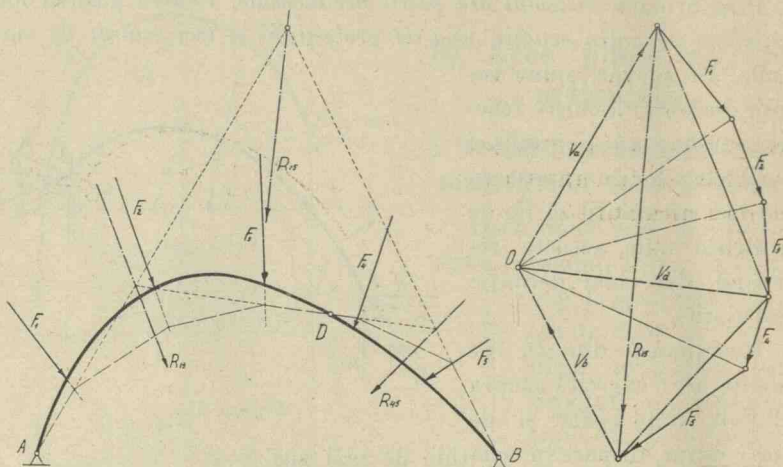


Figura 155

2°. *Soluția grafică.* Grafic chestiunea se rezolvă foarte simplu, plecând dela următoarele considerațiuni, cunoscute de altfel:

1. O rază polară și latura corespondentă de poligon funicular reprezintă în mărime, direcție și poziție rezultanta tuturor celorlalte forțe, inclusiv reacțiunile lăsate într-o parte a ei.

2. Momentul acestei rezultante este nul, în raport cu un punct, când ea trece prin acel punct.

Reacțiunile din A și D fac echilibrul forțelor de pe intervalul $A-D$, deci pentru ele trebuie un poligon de forțe închis și un poligon funicular închis. Orice poligon funicular al forțelor F de pe intervalul $A-D$ (fig. 155), a căror rezultantă, pe figură, este R_{13} și ale cărei laturi extreme trec prin A și D , îndeplinește condițiile de mai sus și deci ne dă reacțiunile din A și D .

Facem același raționament și pentru forțele de pe intervalul BD . Dacă ținem seama că reacțiunea din D este una și aceeași în ambele cazuri, atunci *chestiunea revine la a construi un poligon funicular al forțelor F , ale cărui laturi corespondente să treacă prin punctele A , D și B .*

Se cunoaște cum se execută această operațiune și nu o mai repetăm aci. Din construcție a reșit că polul O corespunde acestui poligon funicular.

Prima latură de poligon funicular care trece prin A reprezintă în mărime, direcțiune și poziție chiar reacțiunea din A .

Să considerăm secțiunea i , de pe arc, cuprinsă între forțele F_1 și F_2 . *Raza polară și latura corespondentă de poligon funicular reprezintă în mărime, direcțiune și pozițiune rezultanta tuturor forțelor dela stânga secțiunii, care aci este $\bar{V}_a + \bar{F}_1$.* Dacă, această rezultantă, o descompun după tangenta și normala la arc, în secțiunea i , găsim tocmai pe N și T . Dacă multiplicăm această rezultantă cu distanța dela centrul de greutate al secțiunii i — care e chiar pe axa arcului — până la poziția acestei rezultante, în poligonul funicular, avem momentul tuturor forțelor în raport cu secțiunea i . Pentru a le afla n'avem decât să facem operațiunile indicate aci.

b) Curba momentelor încovoietoare în cazul sarcinilor verticale.

Construim ca și în cazul precedent poligonul funicular al încărcărilor F , ale cărui laturi corespondente trec prin punctele A , D și B . Pe figura 156 s'a indicat și construcția auxiliară ce ne servește la aceasta.

Expresia momentului în secțiunea i , este:

$$(5) \quad M = x V_{1a} - M_s - y_1 H_1 = x V_{1a} - M_s - y_2 H_0,$$

în care M_s este momentul forțelor F , dela stânga secțiunii i și în care avem evident:

$$y_1 H_1 = y_2 \cos \varepsilon (H_0 / \cos \varepsilon) = y_2 H_0$$

y_2 fiind ordonata lui i măsurată dela linia de închidere AB .

În aceste condițiuni, se observă că $x V_{1a} - M_s$ este tocmai momentul ce se produce în secțiunea i , ca și când am avea o grindă simplu rezemată de deschidere l .

De pe figură se vede că reacțiunea orizontală H_0 este tocmai distanța polară. În acest caz se știe, că segmentul m , din dreptul secțiunii i , paralel cu rezultanta forțelor și cuprins între linia de închidere AB și poligonul funicular, multiplicat cu H_0 , dă valoarea acestui moment, adică avem

$$(6) \quad xV_{1a} - M_s = mH_0.$$

Introducând această valoare în expresia lui M , din (5) avem:

$$(7) \quad M = (m - y_2) H_0$$

Așa dar, ordonata verticală, măsurată între axa arcului și poligonul funicular, multiplicată cu H_0 , ne dă valoarea momentului încovoietor. Se vede de pe figură, fără altă demonstrație, că $|m - y_2| < |m|$, deci momentele încovoietoare, ce se produc în diferitele secțiuni ale arcului, sunt mult mai mici ca acelea ce s'ar produce într'o grindă simplă rezemată de o deschidere egală.

Se mai observă că, dacă curba funiculară a încărcărilor ar coincide cu axa arcului, diferența $m - y_2 = 0$ și deci momentele pe toată întinderea arcului ar fi nule. Aceasta este adevărat pentru orice fel de încărcări.

Variația diferenței $m - y_2$ reprezintă chiar variația momentului încovoietor pe arc (fig. 156).

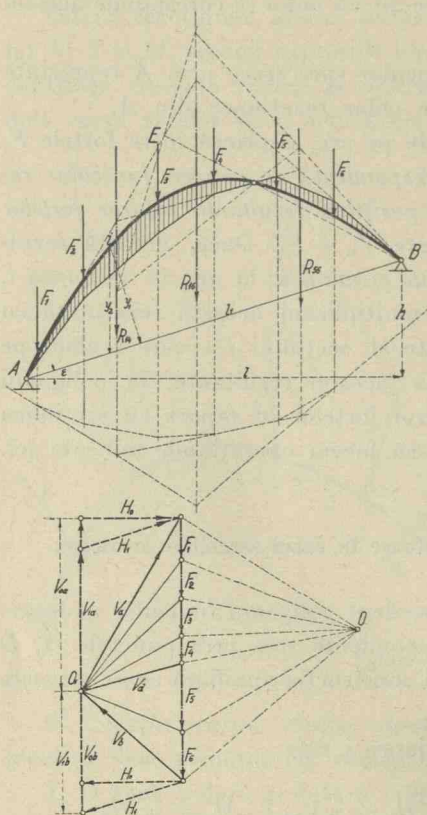


Figura 156

2. Linii de influență.

Vom construi liniile de influență ale cantităților întâlnite până aci cu ajutorul deplasărilor virtuale, pentru că acestea au avantajul de a ne indica elementele geometrice cele mai simple, în funcție de cari putem exprima linia de influență respectivă.

a) Linile de influență ale reacțiunilor V_{0a} și H_0 .

1°. V_{0a} . Dăm articulației A o deplasare verticală v_a (fig. 157). Punctul A se va roti în jurul unui centru instantaneu de rotație care se găsește pe orizontala punctului A .

Articulația D , care aparține bucății AD , se rotește în jurul punctului B , deci în jurul unui centru care se găsește pe dreapta BD . În aceste condițiuni arcul AD se rotește în jurul lui C_1 , intersecția orizontalei din A cu dreapta BD , cu un unghi θ_i .

Bara BD se rotește în jurul lui B cu unghiul θ_k . Proiecțiile B_1 și C'_1 , ale lui B și C_1 pe o orizontală, au $v = 0$.

În aceste condițiuni $v_a = c_1 \theta_i$, iar deplasarea în dreptul forței F , când ea calcă pe cele două intervale AD și DB , este: $v = (c_1 - a) \theta_i$ și $v = b \theta_k$.

Punctul D se deplasează cu aceeași cantitate, deci

$$(c_1 - x_d) \theta_i = x'_d \theta_k,$$

relație care stabilește legătura între θ_i și θ_k .

Scriind ecuația lucrului mecanic, în cele două cazuri, avem:

$$V_{0a} = 1 - a/c_1,$$

$$V_{0a} = b (1 - x_d/c_1) / x'_d$$

Linia de influență se compune din două drepte ca în fig. 157 a, și se poate construi și direct fără ajutorul acestor formule.

2°. H_0 . Procedăm exact ca în cazul precedent dând articulației A o deplasare orizontală. Făcând același raționament, se găsește că arcul AD se rotește în jurul punctului C cu un unghi θ_i și că BD se rotește în jurul lui B cu unghiul θ_k .

Proiecțiile A_1 a lui C și B_1 a lui B , pe o orizontală, vor avea $v = 0$.

Linia de influență se compune din dreptele $A_1 D_1$ și $D_1 B_1$, cari fac cu orizontala $A_1 B_1$ unghiurile θ_i și θ_k .

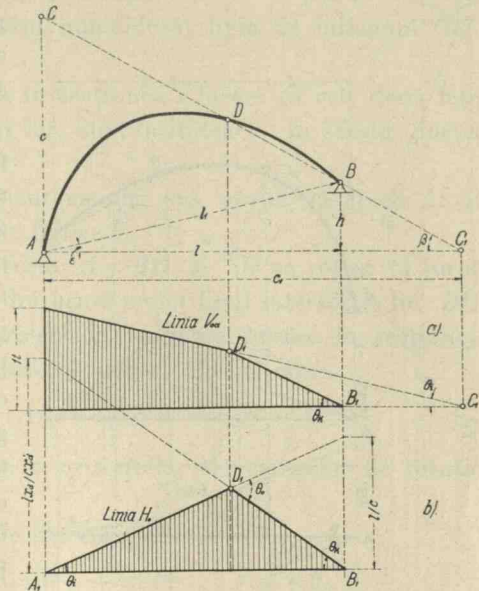


Figura 157

Deplasarea punctului D este

$$v_d = x_d \theta_i = x'_d \theta_k$$

Scriind ecuația lucrului mecanic în cele două cazuri, când sarcina F este la stînga sau dreapta lui D , avem:

$$H_0 = a/c \quad , \quad H_0 = bx_d/cx'_d$$

două drepte cum se indică în fig. 157 b .

b) Liniile de influență ale cantităților N , T și M .

1°. N . Presupunem că cele două fețe ale secțiunii i le depărtăm între ele cu cantitatea u_i . Intregul sistem se deformează, însă, cele două fețe rămânând mereu paralele între ele. Arcul AD se rotește cu unghiul θ_i , iar BD cu θ_k (fig. 158).

Deplasarea u_i se capătă prin rotirea în jurul unui centru care se găsește pe o dreaptă oarecare, paralelă cu normala la arc în secțiunea i . Arcul Ai se rotește în jurul punctului A , deci centrul instantaneu de rotație ce corespunde secțiunii i se găsește pe dreapta AC_2 , care trece prin A și este paralelă cu normala la arc în punctul i . Punctul D se rotește în jurul lui B , deci centrul lui de rotație este pe dreapta BD . Prin urmare, arcul iD se rotește în jurul punctului C_2 , intersecția dreptei AC_2 cu BD .

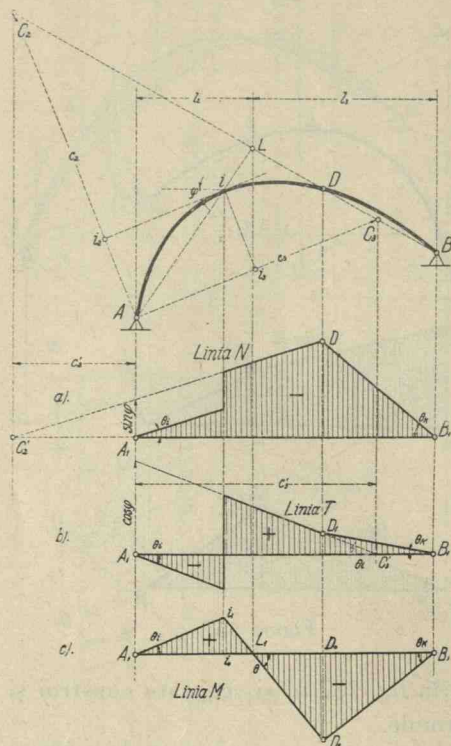


Figura 158

În rezumat, arcul Ai se rotește în jurul lui A , iD în jurul lui C_2 , ambele cu unghiul θ_i și DB în jurul lui B cu unghiul θ_k .

În aceste condiții:

$$u_i = (Ai_2 + i_2C_2) \theta_i = c_2 \theta_i$$

Proiecțiile A_1 , B_1 și C'_2 , pe o orizontală, a centrelor de rotație A , B și C_2 , au $v = 0$.

Când sarcina calcă pe cele trei intervale Ai , iD și DB , ν are respectiv valorile:

$$\nu = a\theta_i, \quad \nu = (c'_2 + a)\theta_i, \quad \nu = b\theta_k.$$

Deplasarea lui D va fi:

$$\nu_d = (c'_2 + x_d)\theta_i = x'_d\theta_k.$$

Scriind ecuația lucrului mecanic pentru cele trei intervale, avem:

$$N = -a/c_2, \quad N = -\sin\varphi - a/c_2, \quad N = -b(\sin\varphi + x_d/c_2)/x'_d$$

pentru că avem: $c'_2 = c_2 \sin\varphi$.

Când sarcina calcă chiar în articulația D , $N = -(\sin\varphi + x_d/c_2)$.

Cu aceste elemente trasăm numaidecât linia de influență (fig. 158 a).

2° T. Să presupunem că în secțiunea i facem ca cele două fețe ale sale să lunece în planul lor, cu cantitatea ν_i , în sensul forței tăietoare T (fig. 158).

Făcând același raționament ca mai sus, găsim că arcele Ai și iD se rotesc cu unghiul θ_i , iar DB cu θ_k .

Continuând, găsim că arcele Ai , BD și iD se rotesc în jurul punctelor A , B și C_3 , acest din urmă punct fiind intersecția lui BD cu dreapta dusă prin A paralelă la tangenta la arc în secțiunea i . Găsim de asemenea că drumul parcurs de T este:

$$\nu'_i = (Ai_3 + i_3C_3)\theta_i = c_3\theta_i$$

Proiecțiile A_1 , B_1 , C'_3 , pe o orizontală, ale centrelor de rotație A , B și C_3 , au $\nu = 0$.

Când sarcina calcă pe cele trei intervale, avem:

$$\nu = a\theta_i, \quad \nu = (c'_3 - a)\theta_i, \quad \nu = b\theta_k$$

și în dreptul articulației D ,

$$\nu_d = (c'_3 - x_d)\theta_i = x'_d\theta_k$$

relație care stabilește legătura între θ_i și θ_k .

Scriind ecuația lucrului mecanic în cele trei intervale, avem:

$$T = -a/c_3, \quad T = \cos\varphi - a/c_3, \quad T = b(\cos\varphi - x_d/c_3)/x'_d$$

pentru că avem: $c'_3 = c_3 \cos\varphi$.

În dreptul articulației D avem:

$$T = \cos\varphi - x_d/c_3.$$

Putem acum trasa linia de influență ca în fig. 158 b.

3°. **M.** Presupunem că cele două fețe, ale secțiunii i , se rotesc cu un unghi oarecare, în jurul centrului de greutate al secțiunii, în sensul pozitiv al momentului (fig. 158).

Bucata de arc Ai se rotește în jurul articulației A , deci are centrul instantaneu pe dreapta Ai , bucata DB se rotește în jurul lui B , deci are centrul instantaneu pe BD , atunci bucata iD se va roti în jurul punctului L , intersecția dreptelor Ai și BD .

Proiecțiile A_1 , L_1 și B_1 ale acestor centre, au $\nu = 0$. Cele trei bucăți de arc Ai , iD și DB se rotesc în jurul acestor centre cu unghiurile θ_i , θ și θ_k .

Cunoscând poziția lui L_1 , notăm: $AL_1 = l_2$, $L_1 B_1 = l_3$. Mai notăm: $a_1 = i_0 L_1$, $\beta_1 = L_1 D_0$. Când sarcina se găsește pe intervalul $A_1 L_1$, notăm cu a_2 și b_2 poziția ei față de punctele A_1 și L_1 , iar când se găsește pe intervalul $L_1 B_1$ cu a_3 și b_3 față de punctele L_1 și B_1 .

Deplasările verticale ale punctelor i și D vor fi respectiv:

$$\nu_i = x_i \theta_i = a_1 \theta, \quad \nu_d = x'_d \theta_k = \beta_1 \theta$$

relații cari ne permit a stabili o legătură între θ_i , θ și θ_k .

Expresia lui ν pe cele patru intervale va fi:

$$\nu = a_2 \theta_i, \quad \nu = b_2 \theta, \quad \nu = a_3 \theta, \quad \nu = b_3 \theta_k$$

Dacă scrim ecuația lucrului mecanic pe cele patru intervale, ținând seamă că lucrul mecanic al momentului este $M(\theta + \theta_i)$, avem:

$$M = a_2 a_1 / l_2, \quad M = b_2 x_i / l_2, \quad M = -a_3 x_i / l_2, \quad M = -b_3 x_i \beta_1 / l_2 x'_d$$

Valorile acestor momente în dreptul lui i și D sunt:

$$M_i = x_i a_1 / l_2, \quad M_D = x_i \beta_1 / l_2.$$

Cu aceste elemente construim linia de influență (fig. 158 c).

Se constată că această linie de influență coincide cu linia de influență a momentului în secțiunea i_0 , a unei grinzi AD_0 , cu consolă, simplu rezemată în A_1 și L_1 și pe consola căreia sprijină grinda simplu rezemată $D_0 B_1$.

Aplicația Nr. 41. Se dă arcul ADB de deschidere l cu articulațiile A și B de nivel (fig. 159). Articulația D este la mijlocul arcului și ordonata lui D măsurată dela linia AB este f . Arcul este simetric în raport cu verticala care trece prin D .

Să se găsească:

1. Momentele maxime și minime.
2. Forțele axiale ce corespund acestor momente, sub acțiunea unei sarcini:
 - a) F mobilă pe arc;
 - b) p uniform distribuită pe unitatea de proiecție orizontală.

Să presupunem că acestea au loc în secțiunea x_i , x_i' , y_i . Vom căuta deci linia de influență a lui M și N în această secțiune.

Pentru linia de influență a momentului încovoietor avem nevoie de abscisele l_2 și l_3 ale punctului de intersecție al dreptelor Ai și BD . Dacă scriem ecuațiile acestor drepte și luăm intersecția lor, găsim:

$$l_2 = l/(1 + ly_i/2f x_i)$$

din care, prin simple adunări, deducem pe l_3 , α_1 și β_1 și avem deci toate elementele liniei de influență.

Pentru linia de influență a lui N avem nevoie de intersecția dreptei BD cu dreapta AC_2 , care trece prin A și este paralelă cu normala la arc în secțiunea i . Dacă φ este unghiul tangentei la arc în i cu axa AB , atunci abscisa punctului de intersecție al celor două drepte este totemai

$$c_2 \sin \varphi = -l/[l/2f \operatorname{tg} \varphi - 1]$$

din care scoatem:

$$c_2 = l/[(l/2f) \cos \varphi - \sin \varphi]$$

Așa dar, avem și elementele liniei de influență a lui N .

Asta în mod general. Să ne ocupăm de un caz particular și anume când axa arcului este parabolă:

$$y = 4fx'x/l^2 = 4f\xi\xi'$$

notând $\xi = x/l$ și $\xi' = x'/l$; și când raportul f/l , care poartă numele de pleoștirea arcului, are o valoare curent întrebuințată, să zicem $1/7$ și deci $l/2f = 3,5$.

În acest caz, avem:

$$l_2 = l/(1 + 2\xi'), l_3 = 2l\xi'/(1 + 2\xi'), \alpha_1 = l\xi'(\xi' - \xi)/(1 + 2\xi')$$

$$\beta_1 = l(\xi' - \xi)/2(1 + 2\xi'), c_2 = l/(3,5 \cos \varphi - \sin \varphi)$$

a) Să ne ocupăm de forța izolată F .

Momentul $+M_i$ va fi maximum atunci când expresia lui, adică:

$$M_i = x_i \alpha_1/l_2 = l\xi\xi'(\xi' - \xi)$$

va fi maximă.

Aceasta are loc pentru $\xi = (3 - \sqrt{3})/6 = 0,211$, pentru care:

$$M_i = F l \sqrt{3}/18 = 0,385 F l/4$$

și are loc atunci când F calcă în această secțiune deci când $a = x = 0,211 l$.

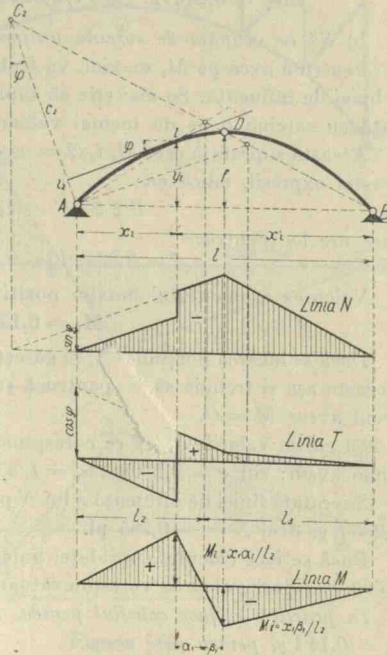


Figura 159

Pentru această poziție a forței F , să găsim valoarea lui N în această secțiune. Avem $\sin \varphi = 0,31330$, $c_2 = l/3,01048$, care ne dă $N = -0,95 F$.

Să ne ocupăm de — M_i . Valoarea lui maximă va fi odată cu a expresiei:

$$M_i = x_i \beta_1/l_2 = l \xi (\xi' - \xi)/2$$

care are loc pentru $\xi = 1/4$ și pentru care:

$$M_i = -0,25 F l/4$$

și are loc atunci când F calcă în articulația D , adică pentru $a = 0,5 l$.

Să găsim valoarea corespondentă a lui N în secțiunea $x = l/4$. Avem:

$$\sin \varphi = 0,27472, c_2 = l/3,09061, \text{ care ne dă } N = -1,82 F.$$

b) Să ne ocupăm de sarcina uniform distribuită p .

Pentru a avea pe M_i maxim, va trebui să încărcăm numai regiunea pozitivă a liniei de influență. Se mai știe că suprafața acestei linii de influență multiplicată cu sarcina p ne dă tocmai valoarea momentului.

Această suprafață este $M_i l_2/2 = x_i a_1/2$ și va fi maximă odată cu maximum acestei expresii, adică cu:

$$l^2 \xi \xi' (\xi' - \xi)/2 (1 + 2 \xi')$$

care are loc pentru:

$$\xi = 0,234, l_2 = 0,395 l, a_1 = 0,161 l.$$

Valoarea momentului maxim pozitiv este:

$$M_i = 0,1506 p l^2/8$$

Dacă se încarcă porțiunea l_3 , se găsește aceeași valoare însă cu semn schimbat. Aceasta așa și trebuia să fie pentru că sub acțiunea sarcinei p , întinsă peste tot arcul avem $M = 0$.

Să găsim valorile lui N ce corespund acestor momente. Pentru această secțiune avem: $\sin \varphi = 0,29086$, $c_2 = l/3,05783$.

Suprafața liniei de influență a lui N pe intervalul l_2 este: $l^2/2 c_2 + a_1 \sin \varphi = 0,285 l$ și deci $N = -0,285 pl$.

Dacă se face calculul suprafeței liniei de influență pe intervalul l_3 , se găsește $0,629 l$ și deci valoarea corespunzătoare a lui N este $N = -0,629 pl$.

In practică se face calculul pentru secțiunea $x = l/4$, care ne dă $l_2 = 0,4 l$, $a_1 = 0,15 l$ și pentru care avem:

$$M_i = \pm 0,15 pl^2/8$$

Acest calcul se justifică prin simplitatea lui și prin faptul că eroarea ce se face asupra momentului este sub 1%. Eroarea mai mare se face numai asupra poziției secțiunii în care are loc momentul maxim.

Dacă se calculează suprafața liniei de influență a lui N pentru această secțiune, se găsește că celor două momente corespund forțele axiale — $0,288 pl$ și — $0,622 pl$, care diferă de asemenea puțin de acelea ce corespund secțiunii pentru care avem momentul maxim.

C) Arce plane cu trei articulații formate din grinzi cu zăbrele.

Putem face și grinzi cu zăbrele pe care să le sprijinim între ele ca arcele curbe de care am vorbit până acum.

În privința reacțiunilor, se aplică întocmai normele indicate la capitolul precedent, fără cea mai mică deosebire.

În ceea ce privește eforturile din bare — reacțiunile fiind cunoscute — vom aplica pentru determinarea lor una din metodele *Cremona*, *Culmann*, *Ritter* etc., fiind totdeauna vorba de grinzi static determinate. Prin urmare nimic deosebit de ceea ce s'a indicat până aci.

Același lucru și pentru liniile de influență. Este evident că pentru reacțiuni, ele sunt aceleași ca și la arce cu articulații.

Aproape la fel e și pentru eforturile din bare. Ne vom ocupa numai ca aplicație de două bare ale fig. 160.

Aplicația Nr. 41 bis.

Să se determine liniile de influență ale eforturilor din barele 1—3 și 1—4 (fig. 160).

1°. N_{13} . Dacă facem secțiunea care taie barele 1—3, 3—4 și 4—6 și luăm momentul în raport cu nodul 4, avem evident:

$$N_{13} = M_4/h_4.$$

Așa dar, linia de influență a lui N_{13} este identică cu a lui M_4 , care se găsește exact ca în cazul arcului cu 3 articulații. S'a indicat pe figura 160 a și nu mai e nevoie de nicio altă explicație.

2°. N_{14} . Facem secțiunea care taie barele 1—3, 1—4 și 2—4 și luăm momentul tuturor forțelor în raport cu punctul C_2 , intersecția barelor 1—3 și 2—4. Aci intră expresia lui H_0 și V_{0a} și deci linia de influență a lui N_{14} va fi o combinație arătată de calcul a liniilor de influență ale acestor două cantități.

Putem să o aflăm direct cu ajutorul deplasărilor virtuale.

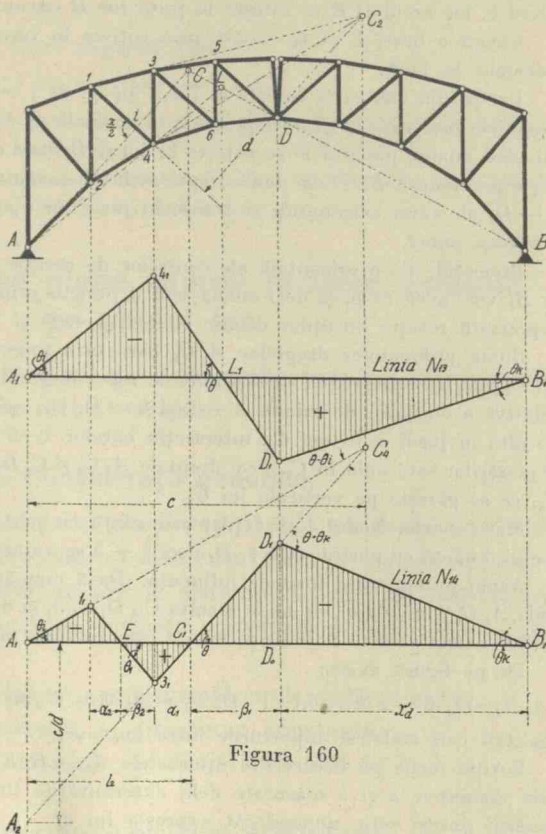


Figura 160

Presupunem că în bara 1—4 avem o tensiune N_{14} și că bara se lungeste cu cantitatea u_{14} . Prin această lungire patrulaterul 1—2—3—4 se deformează și întregul sistem primește o serie de deplasări.

Partea din stânga a arcului AD se rotește în jurul lui A cu unghiul θ_i , partea din dreapta se rotește în jurul unui punct C , pe care-l vom determina, cu unghiul θ , iar arcul DB se rotește în jurul lui B cu unghiul θ_k .

Lungirea barei 1—4 se capătă prin rotirea în jurul unui centru situat pe normala la bară.

Partea din stânga se rotește în jurul lui A , de i centrul instantaneu ce corespunde lungirii u se găsește pe dreapta normală pe 1—4 și care trece prin A . În mod analog punctul D se rotește în jurul B , deci centrul de rotație se găsește pe dreapta BD . Cele două drepte se întâlnesc în C , deci bucata de grindă 4— D , ale cărei extremități se rotesc în jurul lui C , se va roti și ea în jurul aceluiași punct.

Proiecțiile pe o orizontală ale centrelor de rotație A , C și B , adică A_1 , C_1 și B_1 vor avea $v=0$, și deci cunoaștem 3 puncte prin cari trec dreptele care reprezintă rotația bucăților de arc $A—2$, $4—D$ și $D—B$.

Suma ordonatelor dreptelor $A_1 C_1$ care face unghiul θ_i cu linia de reper $A_1 B_1$ și $C_1 D_1$, care face cu aceeași linie de reper unghiul θ , reprezintă deplasarea relativă a bucăților de grindă $A—2$ și $4—D$. Or, acestea se rotesc una față de alta în jurul centrului C_2 , intersecția barelor 1—3 și 2—4. Așa dar, suma deplasărilor este nulă în C_2 , deci dreptele $A_1 C_1$ și $C_1 D_1$ se întâlnesc în punctul C_4 , ce se găsește pe verticala lui C_2 .

Mai departe. Nodul 1 se deplasează odată cu partea din stânga a arcului, nodul 3 odată cu porțiunea $4—D$, deci 1—3 se va roti cu un unghi θ_1 .

Acum putem trasa linia de influență. Dacă cunoaștem pe θ_i , putem trasa linia $A_1 C_1$ (fig. 160 *b*), de unde rezultă $C_4 D_1 C_1 3_1$ și deci $1_1 3_1$ și $D_1 B_1$. Pentru a dimensiona această linie de influență este suficient a găsi un singur element.

De pe figură avem:

$A_1 A_2 = l_2 \theta = c (\theta - \theta_i)$, $D_0 D_1 = \beta_1 \theta = x'_d \theta_k$, $x_1 \theta_i + a_1 \theta = \lambda \theta_1$
egalități cari stabilesc raporturile între unghiuri.

Poziția forței pe fiecare din intervalele $A_1—E$, $E—C_1$ și $C_1—B_1$ o fixăm prin distanțele a și b măsurate dela extremitățile fieărui interval. În aceste condiții putem scrie numai de câț ori expresia lui v .

De exemplu pe intervalul $3_1 C_1$ avem: $v = b\theta$, pe intervalul $D_0 B_1$, $v = b\theta_k$, etc.

Să aplicăm ecuația lucrului mecanic virtual. Vom avea $u_{14} = d (\theta - \theta_i)$ și deci:

$$N_{14} d (\theta - \theta_i) = v$$

N'avem decât să punem aci valoarea lui v pe diferitele intervale, ca să avem valoarea lui N_{14} .

Ca să fixăm linia de influență n'avem de cât să fixăm un singur element.

Să aflăm pe $A_1 A_2$. Avem:

$$A_1 A_2 d (\theta - \theta_i) = c (\theta - \theta_i)$$

și deci

$$A_1 A_2 = c/d$$

Am putea găsi pe $D_0 D_1$. Acesta are valoarea:

$$D_0 D_1 = c\beta_1/d l_2.$$

În privința semnului observăm că, atunci când 1—4 se lungeste, porțiunea 42 se ridică în sus, deci pe acest interval v este negativ și deci și N_{14} . Semnul pe celelalte intervale rezultă din acesta.

Ca aplicație să găsim expresia lui N_{14} pe intervalul $D_0 B_1$, pe care $v = -b\theta_{14}$. Avem:

$$N_{14} d(\theta - \theta_i) = -b\theta_{14},$$

ținând seamă de relația între unghiuri avem:

$$N_{14} = -b\beta_1 c/d l_2 x'd.$$

În mod cu totul analog procedăm și pentru montanți, pentru efortul cărora găsim linii de influență analoage.

Am putea înmulți numărul exemplurilor de acest fel. La toate se aplică în mod invariabil cunoștințele căpătate până aci.

D) Grinzi curbe supuse la forțe normale pe planul lor.

Ne vom mărgini la cazul grinzilor curbe cuprinse într'un plan orizontal și supuse la forțe verticale.

1. Considerații generale.

Intocmai ca și la celelalte grinzi vom stabili mai întâi o relație între sarcina $\bar{p}$, forța tăietoare și momentul dintr'o secțiune oarecare.

Raportăm elementul de arc la sistemul de axe de coordonate $\bar{\theta}$, $\bar{r}$, $\bar{\beta}$ format de tangenta, normala principală și binormala la arc (fig. 161).

În condițiile problemei avem următoarele particularități:

1°) binormala păstrează o direcțiune constantă, și, încărcarea fiind verticală și dirijată de sus în jos, va fi $-p\bar{\beta}$;

2°) rezultanta forțelor într'o secțiune oarecare este verticală și se reduce la forța tăietoare din secțiune care după convențiile admise până acum, are sensul spre $+\bar{\beta}$, deci va fi $\bar{R} = T\bar{\beta}$;

3°) forțele fiind verticale și brațele de pârghie măsurându-se pe orizontale, *axa momentului va fi totdeauna cuprinsă într'un plan orizontal*, deci nu are componentă verticală.

Momentul din secțiunea dată îl descompun în două componente: un moment încovoietor M_i , dirijat după $\bar{r}$ și un altul de răsucire M_r , dirijat după $\bar{\theta}$. Ele vor fi pozitive ori de câte ori rotesc secțiunea care o întâlnim în față, când parcurgem arcul ds în sensul pozitiv, în sensul pozitiv al axelor alese.

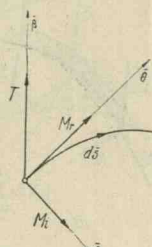


Figura 161

În aceste condițiuni, să aplicăm ecuațiile (1) stabilite pentru orice arc curb, și anume:

$$(1) \quad d\bar{R}/ds = \bar{p} \quad , \quad d\bar{M}/ds = \bar{R}\bar{\theta}$$

Din prima ecuație căpătăm:

$$(2) \quad dT/ds = -p$$

Din a doua ecuație ținând seamă de formulele lui *Frenet* și că avem:

$$\bar{M} = M_i \bar{v} + M_r \bar{\theta}$$

căpătăm:

$$(dM_r/ds - M_i/r) \bar{\theta} + (dM_i/ds + M_r/r) \bar{v} = T\bar{v}$$

care multiplicată respectiv scalar cu $\bar{v}$ și $\bar{\theta}$, ne dă:

$$(3) \quad dM_i/ds = T - M_r/r,$$

și

$$(4) \quad dM_r/ds = M_i/r,$$

relații analoage celor găsite până acum.

2. Expresiile cantităților T , M_i și M_r , într'o secțiune oarecare.

Echilibrul unei asemenea grinzi putem să-l asigurăm prin trei reazime simple, nesituate în linie dreaptă, printr'o incastrare sau două reazime simple și o incastrare incompletă.

În toate aceste cazuri se procedează ca la descompunerea forțelor în spațiu, utilizând ecuații de momente.

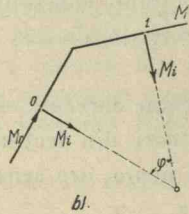
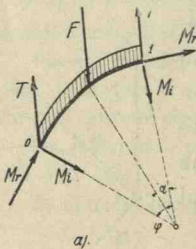


Figura 162

Odată reacțiunile aflate, putem găsi expresia lui T , M_i și M_r în o secțiune oarecare.

Să presupunem că am găsit T , M_i și M_r în o secțiune oarecare și voim să găsim aceleași cantități în secțiunea la distanța s , interval pe care r rămâne constant (fig. 162 a).

Avem evident

$$(5) \quad T_1 = T_0 - p r \varphi - F$$

Apoi

$$(6) \quad M_{i1} = M_{i0} \cos \varphi - M_{r0} \sin \varphi + T_0 r \sin \varphi - p r^2 (1 - \cos \varphi) - F r \sin \alpha$$

$$M_{r1} = M_{r0} \cos \varphi + M_{i0} \sin \varphi + T_0 r (1 - \cos \varphi)$$

$$(7) \quad - p r^2 (\varphi - \sin \varphi) - F r (1 - \cos \alpha).$$

În aceste formule intervine momentul încovoiător și de răsucire dat de sarcina p care este respectiv:

$$(8) \quad - \int_0^\varphi p r da \cdot r \sin a = - p r^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$(9) \quad - \int_0^\varphi p r da \cdot r (1 - \cos a) = - p r^2 (\varphi - \sin \varphi)$$

Se poate arăta ușor că aceste expresii verifică relațiile (2), (3) și (4).

Când grinda face un cot brusc se vede numaidecât că avem (fig. 162 b):

$$(6') \quad M_{i1} = M_{i0} \cos \varphi - M_{r0} \sin \varphi$$

$$(7') \quad M_{r1} = M_{r0} \cos \varphi + M_{i0} \sin \varphi$$

Așa dar, dacă ni-se dă un sistem de încărcări, putem găsi reacțiunile și de aci expresia lui T , M_i și M_r într'o secțiune oarecare.

3. Linii de influență.

Vom construi linia de influență a reacțiunilor și a cantităților T , M_i și M_r într'o secțiune oarecare într'un caz simplu și anume când avem o grindă curbă orizontală, rezimată în trei puncte A , B și C și supusă la sarcini verticale (fig. 163).

a) Liniile de influență ale reacțiunilor V_a , V_b și V_c .

Dacă dăm o deplasare verticală reacțiunii V_a , tot planul grinzii se rotește în jurul axei BC cu un unghi θ .

Dacă un punct de pe grindă se găsește la distanța z de dreapta BC , atunci avem evident:

$$v = z \theta \quad \text{și} \quad v_a = z_a \theta$$

și deci

$$V_a z_a \theta = v z \theta$$

$$V_a = z/z_a.$$

Absolut analog găsim liniile de influență ale reacțiunilor din B și C , însă, în aceste cazuri, z va fi distanța dela un punct al grinzii la dreptele AC și AB . Pentru exemplul din figură se vede că reacțiunea din B are totdeauna același sens pe când cele din A și C sunt și pozitive și negative (fig. 163).

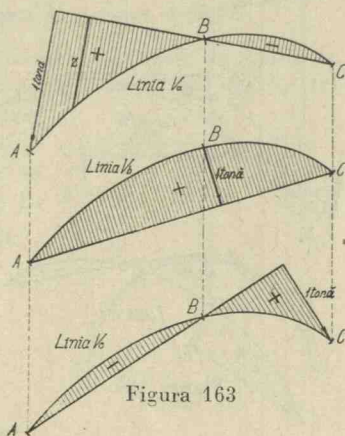


Figura 163

b) Linia de influență a forței tăietoare T .

Să presupunem că facem secțiunea i (fig. 164) și că rotim porțiunea iBC în jurul lui BC cu unghiul θ , iar porțiunea Ai în jurul unui ax AA_1 , paralel cu BC , care trece prin A , cu același unghi θ . În aceste condiții cele două fețe ale secțiunii i rămân paralele.

Deplasarea lui T va fi $v_i = z_a \theta$, iar a unui punct oarecare: $v = z\theta$, distanțele z măsurându-se respectiv dela axele AA_1 și BC . Avem evident:

$$T z_a \theta = z \theta \quad \therefore T = z/z_a.$$

c) Linia de influență a momentului încovoietor M_i .

În secțiunea i rotim cele două fețe, în jurul axului $\bar{v}$, cu unghiul θ_0 (fig. 164). În jurul acestui ax porțiunea Ai se rotește cu θ_i iar cealaltă cu θ_k . Porțiunea Ai se va roti cu unghiul θ_i în jurul unui ax AA_1 paralel cu $\bar{v}$ și trecând prin A .

Porțiunea iBC se rotește însă cu $\theta_k \cos \varphi$ în jurul axei BC

Pe porțiunea Ai avem: $v = z\theta_i$, z măsurându-se dela axa AA_1 iar pe porțiunea iBC avem: $v = z\theta_k \cos \varphi$, z măsurându-se dela dreapta BC .

Pe lângă acestea avem:

$\theta_i + \theta_k = \theta_0$, $v_i = z_i \theta_i = z_1 \theta_k \cos \varphi$ relații cari stabilesc raporturi între unghiurile θ_i , θ_k și θ_0 .

Să aplicăm ecuația lucrului mecanic. Vom observa mai întâi că rotirea făcându-se în jurul lui $\bar{v}$, lucrul mecanic dat de M_r este nul, și deci:

$$M_i \theta_0 = v$$

Să scriem explicit aceasta. Să presupunem că F calcă pe intervalul Ai . Vom avea:

$$M_i \theta_0 = z\theta_i$$

și ținând seamă de relația între unghiuri avem:

$$M_i = z \cdot z_1 \cos \varphi / (z_i + z_1 \cos \varphi)$$

În același mod pe intervalul iBc , găsim:

$$M_i = z \cdot z_i \cos \varphi / (z_i + z_1 \cos \varphi).$$

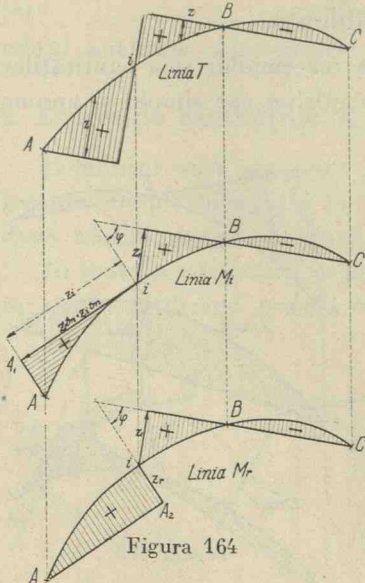


Figura 164

d) Linia de influență a momentului de răscuire M_r .

Procedăm absolut la fel ca pentru M_i , rotind însă cele două fețe ale secțiunii în jurul axei $\bar{\theta}$ cu unghiul θ_0 .

În jurul acestui ax cele două fețe se vor roti cu unghiurile θ_i și θ_k .

Porțiunea Ai se va roti în jurul unui ax AA_2 , paralel cu $\bar{\theta}$, trecând prin A , cu unghiul θ_i . Porțiunea iBC se va roti însă în jurul dreptei BC cu unghiul $\theta_k \sin \varphi$ (fig. 164).

Pe porțiunea Ai avem: $\varphi = z \theta_i$, z măsurându-se dela axa AA_2 , iar pe porțiunea iBC avem: $\varphi = z \theta_k \sin \varphi$, z măsurându-se dela dreapta BC .

Avem iarăși:

$$\theta_i + \theta_k = \theta_0, \quad \varphi_i = z_r \theta_i = z_1 \theta_k \sin \varphi.$$

Pentru aceleași motive ca la cazul precedent avem:

$$M_r \theta_0 = \varphi$$

Explicit, pe intervalul Ai , avem:

$$M_r = z \cdot z_1 \sin \varphi / (z_r + z_1 \sin \varphi)$$

iar pe iBC :

$$M_r = z \cdot z_r \sin \varphi / (z_r + z_1 \sin \varphi)$$

Examinând aceste linii de influență se constată că chestiunea lor e mult mai simplă de cum ar părea la prima vedere.

Aplicația Nr. 42. O grindă orizontală în formă de semicerc de raza 2 m. reazimă simplu în punctele ABC , punctul B fiind la jumătatea arcului AC . Dându-se $p = 500$ kgr./m. să se găsească reacțiunile și valorile lui T , M_i și M_r (fig. 165).

Dacă luăm momentul tuturor forțelor în raport cu diametrul AC , găsim reacțiunea din B :

$$V_b = p \cdot \pi r. \quad 2r/\pi r = 2pr = 2.0,500.2 = 2 \text{ t}$$

$$V_a = V_c = (p\pi r - 2pr)/2 =$$

$$pr (\pi/2 - 1) = 0,571 pr = 0,571 \text{ t}$$

Vom avea apoi:

$$T = (0,571 - \varphi) pr$$

$$M_i = (0,571 \sin \varphi + \cos \varphi - 1) pr^2$$

$$M_r = (0,571 + \sin \varphi - 0,571 \cos \varphi - \varphi) pr^2$$

Aceste valori variază precum urmează:

φ	0°	29°43'	32°40'	59°28'	90°
T	0,571 pr	—	0	—	— pr
M_i	0	+ 0,151 pr ²	—	0	— 0,429 pr ²
M_r	0	—	—	+ 0,104 pr ²	0

Din acest tablou se vede că avem:

$$T_{min} = -pr = -1t, \quad M_{imax} = + 0,151 pr^2 = 0,302 \text{ tm}$$

$$M_{imin} = -0,429 pr^2 = -0,858 \text{ tm}, \quad M_{rmax} = 0,104 pr^2 = 0,208 \text{ tm}$$

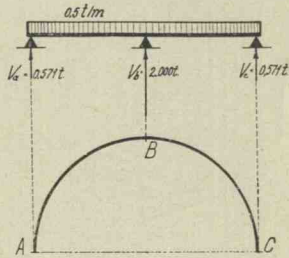


Figura 165

E) Grinzi curbe în spațiu.

Vom considera aci grinzi formate din arce curbe oarecum, supuse la forțe oarecari.

În o secțiune oarecare raportăm elementul de arc, ds , la tangenta $\bar{\theta}$, normala principală $\bar{v}$ și binormala $\bar{\beta}$ și în raport cu acestea vom fixa sensul pozitiv al forțelor N și T și al momentelor.

Potrivit convențiilor de până acum, N este pozitiv în secțiunea ce o întâlnim în față, când parcurgem arcul ds în sensul pozitiv, atunci când este dirijat către $-\bar{\theta}$. Dacă notăm cu T_n și T_b , forțele tăietoare normale respectiv pe $\bar{v}$ și $\bar{\beta}$, ele vor fi de asemenea pozitive când sunt dirijate respectiv către $-\bar{\beta}$ și $-\bar{v}$.

În aceste condiții rezultanta din secțiunea considerată este:

$$-\bar{R} = N\bar{\theta} + T_b\bar{v} + T_n\bar{\beta}$$

Dacă notăm cu M_r , M_n , M_b , momentele dirijate după $\bar{\theta}$, $\bar{v}$ și $\bar{\beta}$, atunci momentul resultant este:

$$\bar{M} = M_r\bar{\theta} + M_n\bar{v} + M_b\bar{\beta}$$

componentele având semnul plus când rotesc secțiunea de mai sus în sensul pozitiv al axelor alese.

Dacă aplicăm acestor expresii ecuațiile generale:

$$d\bar{R}/ds = \bar{p} \quad \text{și} \quad d\bar{M}/ds = \bar{R}\bar{\theta}$$

și ținem seamă de ecuațiile lui *Frenet*, găsim 6 ecuații de legătură între cantitățile de mai sus și creșterile lor în raport cu ds .

Pentru că asemenea construcțiuni le întâlnim rar, ecuațiile de care am pomenit nu au o aplicare practică și de aceea nu le mai dăm aci, deși deducerea lor e foarte simplă.

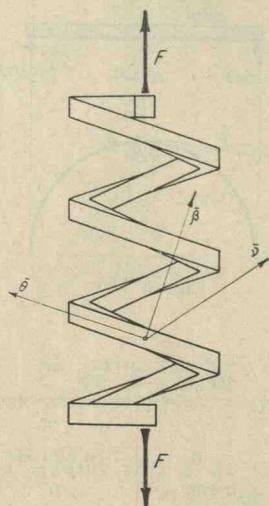


Figura 166

Aplicația Nr. 43. Un resort helicoidal cilindric este supus la două forțe egale și de sens contrar, dirijate după axa cilindrului. Raza cilindrului care conține helicea este r . Să se găsească N , T și M în secțiunea i (fig. 166). Dacă unghiul elicei este α , avem:

$$N = F \sin \alpha, \quad T_n = F \cos \alpha, \quad T_b = 0$$

și sunt dirijate respectiv după $-\bar{\theta}$ și $-\bar{\beta}$, deci sunt pozitive.

Valoarea momentului este rF care descompus după cele două direcții ne dă:

$$\bar{M}_r = -rF \cos \alpha \cdot \bar{\theta}, \quad \bar{M}_b = rF \sin \alpha \cdot \bar{\beta}.$$

VERIFICAT
2017

VERIFICAT
2007



VERIFICAT
1997