EDITURA CASEI ŞCOALELOR

LECŢIUNI DE TEORIA FUNCŢIUNILOR

PARTEA II

FUNCŢIUNI ELIPTICE

DE

DAVID EMMANUEL
Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti

BUCUREŞTI
CVLTVRA NAŢIONALĂ
1927

EDITURA CASEI ŞCOALELOR

Inv. A. 19783

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREŞTI

LECŢIUNI DE TEORIA FUNCŢIUNILOR

PARTEA II

FUNCŢIUNI ELIPTICE

DE

DAVID EMMANUEL
Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti

CAROL I Universitatea

BUCUREŞTI
CVLTVRA NAŢIONALĂ
1927

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI
COTA 61308

B.C.U. Bucuresti
C59690

PREFAŢĂ

Primele capitole ale acestor lecţiuni conţin expunerea proprietăţilor generale ale funcţiunilor analitice de două variabile complexe, deduse din expresiunea lor în serii de puteri şi din teoremele lui Cauchy asupra integralei unei funcţiuni de variabilă complexă. Un capitol este consacrat proprietăţilor generale ale funcţiunilor algebrice de o variabilă, cuprinzând teorema lui Puiseux, *relativă la separaţiunea ramurilor în domeniul unui punct critic. Se introduce, în aceste lecţiuni, noţiunile cele mai simple relative la suprafeţele lui Riemann şi la studiul funcţiunilor uniforme pe aceste suprafeţe. Se face studiul integralelor eliptice aduse la formele normale clasice şi se demonstrează teorema celebră a lui* Abel, *relativă la adiţiunea integralelor eliptice de speţa întâia.*

In capitolele următoare se studiază funcţiunile eliptice. Această parte a fost litografiată în anul 1911; ea apare acì mai complectă decât în prima ediţiune. Plecând dela integrala eliptică de speţa întâia, a cărei inversiune se efectuează, se deduce existenţa funcţiunilor uniforme dublu periodice. *Se adoptă, ca punct de plecare, funcţiunea σu a lui Weierstrass, de unde se deduce funcţiunea pu şi derivata ei p'u. Cu ajutorul acestor elemente se construeşte efectiv o funcţiune eliptică oarecare. Tabla de materie indică chestiunile tratate în acest curs.*

«Casei Şcoalelor», care a avut bunavoinţă a dispune tipărirea acestui volum, exprim adânca mea recunoştinţă.

Editurii «Cultura Naţională» datoresc mulţumirile mele pentru atenţiunea susţinută în tot timpul tipăririi acestor Lecţiuni.

D-lui Inginer A. Froda, care m'a ajutat la revizuirea corecturilor şi d-lui Inginer E. Abason, la desenarea figurilor, exprim viile mele mulţumiri.

D. E.

TABLA DE MATERIE

CAPITOLUL I.

Funcțiuni analitice de două variabile.

Pag.

§ 1—21. Domeniul unui punct reprezentat prin două variabile complexe. Serii de puteri; cercuri de convergență asociate. Serii întregi. Seria Taylor. Prelungire analitică. — Extensiunea integralei lui Cauchy la o funcțiune de două variabile. — Teoreme generale asupra funcțiuniior analitice de două variabile, olomorfe într'un câmp dat. Puncte singulare. 1

CAPITOLUL II.

Funcțiuni algebrice.

§ 22—34. Definițiune. Ramurile unei funcțiuni algebrice. Permutarea ramurilor în domeniul unui punct critic (punct de ramificațiune). Determinarea ciclelor relative la un punct critic. Metoda lui Puiseux. Proprietățile caracteristice ale funcțiunilor algebrice de o variabilă . . 25

CAPITOLUL III.

§ 35—36. *Exemple de Funcțiuni algebrice*. 46

CAPITOLUL IV.

Suprafețele lui Riemann.

§ 37—39. Generalități. Construirea unei suprafețe Riemann pentru o funcțiune algebrică dată. *Tăieturi* sau *Linii de trecere* dintre foile cari formează suprafața. Exemple particulare. Cazul general 60

CAPITOLUL V.

Funcțiuni uniforme pe suprafețele lui Riemann.

§ 40—58. *Punct analitic.* Domeniul unui punct pe suprafața T. Expresiunea funcțiunii în domeniul unui punct al suprafeții. Desvoltarea în serie în domeniul unui punct de ramificațiune. Teorema lui Cauchy

Pag.

pe o suprafață a lui Riemann. Teorema relativă la suma reziduurilor unei funcțiuni uniforme care, pe toată suprafața T, are un număr limitat de singularități. O funcțiune olomorfă pe suprafața T este o constantă. *Funcțiuni raționale pe suprafața* T. *Ordinul* unei asemenea funcțiuni . 67

CAPITOLUL VI.

Funcțiuni raționale pe o suprafață T *cu două foi.*

§ 59—66. Forma sub care se poate pune o asemenea funcțiune. Ordinul minimum al unei funcțiuni raționale pe suprafața T în cazul când numărul punctelor de ramificațiune ale suprafeței este > 2. Exemple de funcțiuni raționale. *Conexiunea* suprafețelor T. Conexiune simplă și conexiune multiplă. Transformarea suprafeței T cu conexiune multiplă într'o suprafață T' cu conexiune simplă (conturul suprafeței): Exemple 79

CAPITOLUL VII.

Integrale eliptice.

§ 67—74. Reducerea integralei la elemente simple. Cele trei specie de integrale eliptice. Multiplicitatea valorilor integralelor eliptice. Modul de periodicitate (perioade). Determinarea perioadelor 90

CAPITOLUL VIII.

Integrala eliptică de speța I.

§ 75—84. Perioadele integralei determinate de un sistem dat de tăieturi ale suprafeței T (conturul suprafeței T'). Raportul perioadelor este imaginar. Schimbarea sistemului de tăieturi și transformarea corespunzătoare a perioadelor 99

CAPITOLUL IX.

Teorema lui Abel pentru adițiunea integralelor eliptice de speța I.

§ 85—90. Demonstrarea acestei teoreme. Diferite forme sub cari se poate enunța teorema lui Abel. Aplicațiuni. Ecuațiunea lui Euler 109

CAPITOLUL X.

Transformarea integralei eliptice de speța I prin substituțiuni lineare.

§ 91—105. Substituțiuni lineare. Invarianții polinomului de gradul al patrulea. Reducerea integralei la trei forme normale. Forma normală a lui Weierstrass. Forma normală a lui Riemann. Forma normală a lui Legendre 118

CAPITOLUL XI.

Inversiunea integralei de speța I.

§ 106—110. Funcțiunea inversă a integralei

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

Pag.

$R(x)$ fiind un polinom de gradul 3 sau 4, este o funcțiune uniformă dublu periodică. Reprezentarea conformă a suprafeței T' pe planul (u) printr'o integrală eliptică de speța I. Reprezentarea conformă a unui semiplan (x) pe un dreptunghiu în planul (u) printr'o integrală a lui Weierstrass, în cazul când rădăcinile ecuațiunii $R(x) = o$ sunt reale . 135

CAPITOLUL XII.

Funcțiuni dublu periodice.

§ 111—135. *Funcțiune eliptică.* Reprezentarea geometrică a periodicității duble. Paralelogramul perioadelor. Perioade primitive. Nu există funcțiune întreagă dublu periodică. Ordinul unei funcțiuni eliptice. Ordinul minimum este 2. O funcțiune analitică uniformă de o variabilă nu admite mai mult decât două perioade distincte. Transformarea perioadelor. Teorema asupra sumei reziduurilor. Teorama asupra numărului zerurilor și al polurilor. Relațiuni dintre suma zerurilor și suma polurilor într'un paralelogram de perioade. Analogii între proprietățile funcțiunilor raționale pe suprafața T cu două foi și 4 puncte de ramificațiune și proprietățile funcțiunilor eliptice într'un paralelogram de perioade. . 144

CAPITOLUL XIII.

Funcțiunile σu, ζu, pu.

§ 136—172. Funcțiunea σu definită printr'un produs dublu. Funcțiunile ζu, pu definite prin serii duble. Seria dublă a derivatei $p'u$. Dubla periodicitate a funcțiunii pu. Ecuațiunea diferențială a funcțiunii pu. Invarianții g_2, g_3. Desvoltarea funcțiunilor pu, ζu, σu în domeniul $u = o$. — Definițiunea funcțiunii pu prin invarianți. — Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcțiunea ζu. Cantitățile η_1, η_2, η_3. Relațiunea lui Legendre. Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcțiunea σu. Expresiunea funcțiunilor eliptice prin funcțiunea σu. Formule de adițiune pentru funcțiunile ζu, pu. Expresiunea funcțiunilor eliptice prin funcțiunea ζu. Orice funcțiune eliptică se poate exprimă printr'o funcțiune rațională de pu și $p'u$. Orice funcțiune eliptică admite o teoremă de adițiune algebrică. — Integrațiunea funcțiunilor eliptice 162

CAPITOLUL XIV.

Multiplicațiunea argumentului funcțiunii pu.

§ 173—174. Expresiunea $p2u$. Funcțiunea $\varphi_n(u)$. Formule generale pentru expresiunea pnu 201

Pag.

CAPITOLUL XV.

Relațiuni algebrice între funcțiuni eliptice. Ecuațiune algebrică între o funcțiune eliptică și derivata sa.

§ 175—182. Între două funcțiuni eliptice, cari au un sistem comun de perioade, există o ecuațiune algebrică cu coeficienți constanți. Orice funcțiune eliptică satisface o ecuațiune diferențială de ordinul întâiu cu coeficienți constanți. Forma necesară a ecuațiunii diferențiale $F\left(x, \frac{dx}{du}\right) = o$ pentru ca x să fie funcțiune eliptică de u. Cazurile, în cari integrala ecuațiunii binoame $\left(\frac{dx}{du}\right)^m = f(x)$, este o funcțiune eliptică 206

CAPITOLUL XVI.

Funcțiunile σ cu indici. Funcțiunile eliptice ale lui Jacobi.

§ 183—211. Funcțiunile $\sigma_\alpha u$, $(\alpha = 1, 2, 3)$. Mărirea argumentului cu o perioadă. Mărirea argumentului cu jumătăți de perioade. Expresiunea funcțiunilor $\sigma_\alpha u$ prin produse duble. Transformarea funcțiunilor $\sigma_\alpha u$ când se înlocuesc perioadele date prin perioade echivalente. Determinarea radicalelor $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$. Relațiuni algebrice între pătratele funcțiunilor σ. Raporturile funcțiunilor σ. Funcțiunile eliptice ale lui Jacobi. Ecuațiuni diferențiale. Desvoltarea integralelor

$$K = \int_0^1 \frac{}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

după puterile modulului k. — Formule de adițiune pentru funcțiunile $sn v$, $cn v$, $dn v$ 217

CAPITOLUL XVII.

Expresiunea funcțiunii ζu, pu prin serii de funcțiuni simplu periodice. Funcțiunile σu, $\sigma_\alpha u$ exprimate prin produse de funcțiuni simplu periodice.

§ 212—221. Transformarea seriei duble a funcțiunii ζu în serie trigonometrică. Seria trigonometrică a funcțiunii pu. Produsele trigonometrice ale funcțiunilor σ.—Valorile funcțiunilor σ pentru jumătățile de perioade. Determinarea radicalelor $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$, $\sqrt[8]{\Delta}$, $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ 243

CAPITOLUL XVIII.

Funcțiunile ϑ(v) ale lui Jacobi.

§ 222—244. Seria $\vartheta_1(v)$ dedusă din funcțiunea σu. Funcțiunile $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$. Expresiunea funcțiunilor $\vartheta(v)$ sub formă de serii și de

Pag.

produse. Mărirea argumentului v respectiv cu $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$. Ecuațiune diferențială. Expresiunea radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ prin funcțiunile ϑ. Expresiunea invarianților g_2, g_3, J prin funcțiunile ϑ. Expresiunea funcțiunilor σ prin funcțiunile ϑ. Expresiunea funcțiunilor *sn*, *cn*, *dn* prin funcțiunile ϑ. — Transformarea lineară a funcțiunilor ϑ (v). Transformarea funcțiunilor *sn*, *cn*, *dn* prin substituțiuni lineare de perioade. — Observare asupra diferitelor notațiuni ale funcțiunilor ϑ 255

CAPITOLUL XIX.

Funcțiunile eliptice de speța II și de speța III.

§ 245—261. Proprietăți generale ale funcțiunilor eliptice de speța II. — Funcțiuni eliptice de speța III. *Ordinul* funcțiunii. Funcțiuni de speța III întregi. *Caracteristice*. Relațiuni între funcțiuni de speța III întregi de același ordin și aceleași caracteristice. Aplicațiuni 281

CAPITOLUL XX.

Degenerarea funcțiunilor eliptice.

§ 262—273. Degenerarea considerată relativ la perioade: Una din perioadele devine infinită, sau amândouă, Degenerarea considerată relativ la anularea discriminantului Δ 294

CAPITOLUL XXI.

Funcțiunea pu cu invarianți reali.

§ 274—289. I. $\Delta > 0$. Există un dreptunghiu de perioade primitive $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Variațiunea funcțiunii *pu* și a derivatei *p'u* dealungul dreptunghiului (ω_1, ω_3). Valorile lui *u* pentru cari *pu* și *p'u* sunt reale împreună. II. $\Delta < 0$. Există un romb de perioade primitive. Valorile lui *u* pentru cari *pu* și *p'u* sunt reale amândouă. — Variațiunea funcțiunilor *snv*, *cnv*, *dnv* dealungul dreptunghiului (K, iK'). Reprezintare conformă. — Funcțiunile *pu*, ζu, σu în cazul când unul din invariații g_2, g_3 este nul. 302

CAPITOLUL XXII.

Problema Inversiunii. Integrale eliptice.

§ 290—302. Integrațiunea ecuațiunii

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X,$$

prin aplicarea unei substituțiuni lineare, X fiind un polinom de x de gradul 3 sau 4. — Altă metodă. Rezoluțiunea ecuațiunii de gradul al patrulea.— Integrale eliptice 327

Pag.

CAPITOLUL XXIII.

Transformarea funcțiunilor eliptice.

§ 303—320. Problema generală a transformării. Transformarea rațională de un grad n. Transformare de gradul al doilea: *Transformarea Landen*, *Transformarea Gauss*. Transformarea de gradul al doilea prin care se reduce cazul discriminantului $\Delta<0$ la cazul $\Delta>0$ 340

CAPITOLUL XXIV.

Problema Diviziunii.

§ 321—325. Ecuațiunea diviziunii argumentului funcționei *pu* printr'un număr întreg n. Diviziunea prin 2. — Ecuațiunea diviziunii perioadelor funcțiunii *pu*. Diviziunea prin 3. — Diviziunea prin 2 a argumentului funcțiunilor *snv*, *cnv*, *dnv*. 359

CAPITOLUL XXV.

Calcul numeric al funcțiunilor eliptice.

§ 326—337. Perioadele fiind date, se poate alege un sistem echivalent prin care valoarea absolută a cantității $q=e^{i\pi\tau}$ să fie cea mai mică posibilă. Calculul funcțiunii prin seriile ϑ. — Invariații fiind dați, avem valorile modulelor k, k'. Calculul lui q prin k sau k'; sau în funcțiune de una din cantitățile

$$l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},\quad l=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}.$$

— Calculul integralei de speța I. 367

CAPITOLUL XXVI.

Aplicațiuni geometrice.

§ 338—358. *Cubica plană*. Teoreme generale. Cazurile $\Delta>0$, $\Delta<0$. — *Lemniscata*. — *Teorema Poncelet*. 382

CAPITOLUL XXVII.

Funcțiuni modulare.

§ 359—409. I. Perioadele integralei eliptice

$$u=\int_0^x \frac{dn}{2\sqrt{x\,(1-x)\,1-\lambda x)}},$$

considerate ca funcțiuni de modulul λ al integralei. Ele sunt funcțiuni olomorfe în domeniul oricărui punct $\lambda\neq 0,\ 1,\ \infty$. Variațiunea perioadelor în domeniul punctelor $\lambda=0,\ \lambda=1$.

Pag.

II. Raportul τ al perioadelor privit ca funcțiune de λ și, viceversa, λ privit ca funcțiune de τ.

III. Substituțiuni modulare. Grup modular. Grupul G al funcțiunii λ. Reprezintarea funcțiunii $\lambda(\tau)$ pe semiplanul $\tau>0$. Domeniu fundamental. — Substituțiuni modulare de speța II. Grupul modular amplificat $\overline{G}$. Substituțiuni modulare de speța II periodice. Linii de simetrie. Impărțirea semi planului $\tau>0$ în domenii fundamentale ale funcțiunii $\lambda(\tau)$.

IV. Grupul modular $\Gamma(\tau)$. Grupul G este un subgrup invariant al grupului Γ. Funcțiunea modulară $J(\tau)$. Grupul amplificat $\overline{\Gamma}$. Liniile de simetrie corespunzătoare. Domeniul fundamental al funcțiunii $J(\tau)$. Rețeaua modulară. Funcțiunea J privită ca funcțiune de λ. Reprezintarea funcțiunii J pe planul (λ). — Funcțiunea inversă $\tau(J)$ . . . 401

CAPITOLUL XXVIII.

Teoremele D-lui Picard.

§ 410—413. I. O funcțiune întreagă primește orice valoare finită, exceptând poate una singură.

II. O funcțiune uniformă, având un număr oarecare de poluri și un singur punct singular esențial $x=\infty$, primește orice valoare finită, exceptând cel mult două valori finite.

III. O funcțiune uniformă $f(x)$, care admite un punct singular esențial x_0, primește, în domeniul acestui punct, o infinitate de ori, orice valoare, exceptând cel mult două valori, printre cari una poate fi ∞ 453

NOTA I.

Despre funcțiunile uniforme cari admit o teoremă de adițiune albebrică. 461

NOTA II.

Despre transformarea funcțiunii modulare $J(\tau)$ printr'o substituțiune de un grad >1. 463

NOTA III.

Multiplicațiunea complexă 466

NOTA IV.

Seria $\sum_0^\infty x^{n^2}$ nu se prelungește în afară din cercul său de convergență $|x|=1$. 469

ERRATA VOLUMULUI I

Pag.	linia	In loc de	Citește
79	13	A B	2A 2B
85	1	(15)	(10)
87	Nota	A se adăugă (§ 171)	
96	17	$a_n\ x$	$a_n x^n$
99	7	x_1 prin x_1+x-x_1	x prin $x_1+(x-x_1)$
109	6 (de jos)	a^n	a_n
115	16	a_n	Q_n

122 11 (de jos) a se adăugă linia: unul din ele ar fi prelungirea celuilalt (2° § 331): ceeace este imposibil (§ 138).

126 7 $p<r$ $\varrho<r$

130 (§ 172). Acest paragraf trebuie înlocuit prin următorul:

§ 172. Fie $x=\xi+i\eta$, $f(x)=u(\xi,\eta)+iv(\xi,\eta)$, u și v funcțiuni reale de variabile reale ξ, η. *Valoarea maximă a funcțiunilor* $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$, *în domeniul punctului* $x_0=\xi_0+i\eta_0$, *nu este atinsă decât pe cercul* $|x-x_0|=r$.

In adevăr, din egalitatea

$$a_0=f(x_0)=u(\xi_0,\eta_0)+iv(\xi_0,\eta_0)$$

rezultă [(6), (8), § 114] egalitățile

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)d\varphi,\quad v(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(r,\varphi)d\varphi.$$

Fie A maximul funcțiunii $u(\xi,\eta)$ și B maximul funcțiunii $v(\xi\,\eta)$ în cercul $|x-x_0|=r$; din egalitățile precedente rezultă inegalitățile

$$u(\xi_0,\eta_0)<A,\ v(\xi_0,\eta_0)<B.$$

Notă. Nici una din valorile $u(\xi_0,\eta_0)$, $v(\xi_0,\eta_0)$, nu poate fi egală cu maximul respectiv fără ca funcțiunea $u(\xi,\eta)$ sau $v(\xi,\eta)$ să se reducă la o constantă. Vom vedeà mai departe dacă una din aceste funcțiuni este o constantă, rezultă că și cealaltă este constantă și prin urmare $f(x)=ctă$.

Pag.	linia	In loc de	Citește
134	formula (2)	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
142	Nota	$m \pm n$	$m \neq n$
143	5 (jos)	a^k	a_k
147	11	$\|x\| < 1$	$\|x\| \leqq 1$
148	8 (jos)	$\|x\| < 1$	$\|x\| \leqq 1$
148	10 (jos)	$\|x\| < 1$	$\|x\| \leqq 1$
163	3 (jos)	fig. 12	fig. 13
164	11	fig. 13	fig. 14
164	12 (jos)	fig. 14	fig. 15
164	11 (jos)	$\xi < 0$	$\xi \leqq 0$
165	2	$\eta < 0$	$\eta \leqq 0$
167	17	în loc de $(1-\lambda^2)(u^2+v+1)-2(1+\lambda^2)v^2$ se citește $(1-\lambda^2)(u^2+v^2+1)-2(1+\lambda^2)v$	
167	19	$\lambda \geqq 1$	$\lambda \leqq 1$
169	2 (jos)	cel	ceea
173	10	$p\,x\frac{dy}{dx}=1$	$p\,x\frac{dy}{dx}=y$
173	14 (jos)	$k=0.\ 1...,\ p$	$k=0,\ 1,...\ p-1$
180	9	fig. 1	fig. 20
180	11	$omb \mid anc$	$amb \mid anc$
180	12	omb	amb
181	1	and	cnd
183	16	$-\eta_1$	$-y_1$
192	fig. I	$M(-x)$	$M'(-x)$
192	1 (jos)	$M_1\widehat{AM}'$	$M_1\widehat{AM}'_1$
194	14 (jos)	parte unui	parte, unui
196	7	$P(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$

197 A se adăugà după a doua linie: Să mai considerăm seria $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$, care se poate scrie

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} = \sum_1^\infty \int_0^x \frac{x^{n-1}}{n}\,dx = \int_0^x \frac{1}{x} \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\,dx = -\int_0^x \frac{\log(1-x)}{x}\,dx.$$

Funcțiunea $\frac{\log(1-x)}{x}$ nu are altă singularitate decât punctul $x=1$; de unde rezultă aceeaș concluziune pentru integrală și prin urmare seria dată are, pe cercul său de convergență, unicul punct singular $x=1$.

198	8 (jos)	A suprimà prepoziţiunea *pe*.	
199	3 (jos)	A închide	[ ]
212	5 (jos)	S″ faţă de S	S′ faţă de S

Pag.	linia	In loc de	Citește
223	3	$\int\triangle = f(z)\,dz -$	$\triangle = \int_C f(z)\,dz -$
223	8	cu z	cu ε
230	1	Fize =	Fie $z =$
230	24	$\frac{1}{(z-x)^2\,(z-x-h)}$	$\frac{h}{(z-x)^2\,(z-x-h)}$
235	5	$\frac{1}{ziR}$	$\frac{h}{2i\pi}$
244	3	x^{n-}	x^{-n}
244	7 (jos)	a^n	a_n
245	5 (jos)	$z-a_k-(x-a_k)$	$x-a_k-(z-a_k)$
250	5 (jos)	$F(z+t)$	$F(z_0+t)$
254	4	toate	toată
255	6	$\frac{f(x)}{z-x}$	$\frac{f(z)}{z-x}$
255	18	$\int\frac{z-x}{f(z)}dx$	$\int\frac{f(z)}{z-x}dz$
267	3 (jos)	$\int J =$	$J = \int_{x_0}^{x_0+2\pi}$
277	1 (jos)	$\int_0$	$\int_0^1$
279	2	$\frac{A_m}{x-a^m}$	$\frac{A_m}{(x-a)^m}$
283	6 (jos)	$\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{2i\pi z-1}$	$\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{e^{2i\pi z}-1}$
287	5	legaritmicei	logaritmice
289	3	$\frac{\varphi(z)}{f(z)}$	$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$
291	13 (jos)	(3)	(2)
291	4 (jos)	$a_1\,b_1$	$a_1\,b_2$
293	1 (jos)	$P(x)_1\,P(o)$	$P_1(x), P_1(o)$
297	16	$(C),$	$(C);$
298	18, 19	A, A'	$\mathscr{A}, \mathscr{A}'$
298		A se înlocuì în fig. A, A' prin	$\mathscr{A}, \mathscr{A}'$
300	4	$\lvert x-\xi\rvert = r$	$\lvert z-x\rvert = r$
302	24	A	$\mathscr{A}$
302	25	A	$\mathscr{A}$
326	10	$\omega = \int_{a_2}^{a_1}$	$\omega = \int_{a_1}^{a_2}$
»	14	$\int_{a_1}^{a_2} =$	$\int_{a_1}^{a_2} =$

Pag.	linia	In loc de	Citește
326	8 (jos)	fig. 70	fig. 75
331	20	a se șterge (fig. 2)	
335	8	(fig. 82)	(fig. 83)
338	15	$(-1,-\infty)$, $(1,+\infty)$	$\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$, $\left(1,+\frac{1}{k}\right)$
»	16	(fig. 84)	(fig. 85)
339	9 (jos)	$\pm K_1 \pm K+2iK'$	$\pm K, \pm K+2iK'$
343	5 (jos)	(fig. 88)	(fig 89)
	A se înlocui, pe fig. 89, punctele z', z'' prin x', x''		
345	9 (jos)	(fig. 89)	(fig. 90)
347	1 (jos)	$\underset{z'=z''}{\text{Rez}}$	$\underset{z=z''}{\mathscr{R}ez}$
359	5 (Notă)	$e^{\varrho_n \sum_{\varphi}^{\infty} P_n(x)}$	$e^{g_n \sum_{\nu}^{\infty} P_n(x)}$
361	9	Σ	$\sum_{m+1}^{\infty}$
370	20	A se închide parenteza după $e^{g(x)}$	
372	6	$f'(x)$	$f'(x)=o$
375	6	.	,
380	6 (jos)	1 la ∞	1 și tinde către ∞ cu a.
380	5 (jos)	avem $\lvert \sin \pi x \rvert \leqslant 1$.	avem așà dar $\lvert \sin \pi x \rvert \leqslant 1$.
386	2 (jos)	x	y
387	1 (jos)	$a\varrho$	$r\varrho$
391	6	$y_1, y_2 x_3$	y_1, y_2, y_3
391	12—13	punctelor	punctele
393	7	$\beta = \frac{R^2}{r} e^{i\beta}$	$\beta = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi}$
393	10	ϱ	r
394	5	$\alpha = \frac{a\alpha+\beta}{c\alpha+d}$	$\alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$
398	15 (jos)	ϱ_1	r_1
400	11	ϱ_1	r_1
400	Literile A și B ale primului cerc trebuie permutate între ele		
400	Ultima linie trebuie descompusă și scrisă astfel:		

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{a}, \quad \frac{1}{OB'} = \frac{OB}{a}; \quad \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{OA+OB}{a};$$

însă $OA+OB=2OC$, prin urmare

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{2\,OC}{a} = \frac{2}{OD}.$$

ERRATA VOLUMULUI II.

Pag.	Linia	In loc de	Citeşte
33	14	$Ax^h+(\ )$	$Ax^h+\ldots+(\ )$
67	1	Numărul VII să fie şters.	
72 (Nota)		$x-a=x'^{\frac{1}{p}}$	$x-a=x'^{p}$
»	»	$\int_{\Gamma_1}(\ )\ldots$	$\int_{\Gamma_1} f(\ )\ldots$

97 (fig. 25) Semnele $\pm$, pe tăietura A, să fie permutate.

108 (fig. 29) Litera B lipseşte pe tăietura din stânga

176 *Adaos* (după egalitatea (12)): Coeficienţii desvoltării lui σu se pot obţine, introducând în identitatea

$$\sigma u\, \zeta u = \sigma' u.$$

seria $\sigma u = u + a_1 u^3 + a_2 u^5 + a_3 u^7 + \ldots$ şi identificând ambele membre, după ce s'a înlocuit ζu prin seria (11).

186	16	$u+\varrho+\varpi=o$	$u+\varrho+\varpi\equiv o$
201	12 (jos)	$p'^2 u$	$p'2u$
204	10	$\frac{u}{n^{n^2-1}}$	$\frac{n}{u^{n^2-1}}$
309 (fig. 52)		$\omega_2, \omega_1+\omega_2$	$\omega_3, \omega_1+\omega_3$
453	3	τ	J.

CAPITOLUL I.

FUNCȚIUNI ANALITICE DE DOUĂ VARIABILE.

I. — PROPRIETĂȚI GENERALE.

1. Fie x și y două variabile complexe independente. Le vom reprezentà pe două plane diferite: planul (x), planul (y). Un *sistem de valori* $x=x_0$, $y=y_0$ se zice că constitue un punct (x_0, y_0). Domeniul unui asemenea punct este format din ariile cercurilor

$$|x-x_0|=r \qquad |y-y_0|=\varrho,$$

r și ϱ fiind două numere pozitive destul de mici.

Fie A și B două arii situate respectiv în planul (x) și în planul (y); vom zice că un punct (x_0, y_0) este situat în regiunea (A,B), dacă x_0 este în interiorul lui A și y_0 în interiorul lui B.

O variabilă complexă z se numește funcțiune de variabilele x, y definite într'o regiune dată (A,B), dacă fiecărui punct situat în acea regiune corespunde una sau mai multe valori determinate pentru z. Continuitatea și continuitatea uniformă a unei funcțiuni de două variabile complexe se definește ca în cazul variabilelor reale. O funcțiune continuă într'o regiune dată este uniform continuă în acea regiune.

2. Fie

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots\ldots, f_n(x, y), \ldots.$$

un șir nelimitat de funcțiuni de variabilele x și y; să considerăm seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$$

Totalitatea punctelor în cari această serie este convergentă constitue regiunea sa de convergență.

Definițiunea convergenței uniforme a unei serii de funcțiuni de două variabile independente într'o regiune (A, B) este

aceeaş ca în cazul unei singure variabile; înlocuim punctul x prin punctul (x, y) şi aria A prin regiunea (A, B).

Avem propoziţiunile următoare a căror demonstraţiune este aceeaş ca în cazul funcţiunilor de o singură variabilă:

1°. *Dacă există un şir de numere pozitive*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

astfel ca oricare ar fi punctul (x, y) *în regiunea* (A, B) *să avem*

$$|f_n(x, y)| \leqq a_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

şi dacă seria Σa_n *este convergentă, seria*

$$\sum_1^\infty f_n(x, y)$$

este absolut şi uniform convergentă în interiorul lui (A, B).

2°. *Suma*

$$F(x, y) = \sum_1^\infty f_n(x, y)$$

a unei serii uniform convergente de funcţiuni continue într'o regiune dată este o funcţiune continuă în acea regiune.

3°. *Serii de puteri.* O serie de puteri x, y este de forma

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a_{m, n}\, x^m y^n,$$

coeficienţii $a_{m, n}$ fiind cantităţi constante. Dacă m şi n primesc numai valori întregi şi pozitive, seria se zice *întreagă.*

Teoremă. Dacă pentru un sistem de valori $x = x_0$, $y = y_0$, *modulele termenilor seriei întregi*

$$P(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m, n}\, x^m y^n$$

sunt mai mici ca un număr pozitiv dat M, *seria este absolut şi uniform convergentă pentru toate valorile lui* x *şi* y *cari satisfac inegalităţile*

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|$$

Această teoremă este o extensiune a teoremei lui Abel relativă la seriile întregi de o singură variabilă. Să punem

$$|x_0| = r_0, \quad |y_0| = \varrho_0, \quad |x| = r, \quad |y| = \varrho.$$

Vom avea, în virtutea ipotezei,

$$(1) \qquad |a_{m, n}|\, r_0^m\, \varrho_0^n < M;$$

de unde

$$(2) \qquad |a_{m,n}| r^m \varrho^n < M \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n .$$

Presupunând $r < r_0$, $\varrho < \varrho_0$, avem

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r_0}\right)^m = \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}}, \quad \sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}}.$$

Multiplicând aceste două serii între ele, obținem egalitatea

$$\sum_{m,n=0}^\infty \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)};$$

de unde rezultă (1° § 2) că seria propusă este absolut și uniform convergentă în regiunea considerată.

Corolar. Dacă seria $P(x, y)$ este convergentă într'un punct (x_0, y_0) ea va fi absolut și uniform convergentă pentru toate valorile lui x și y cari satisfac inegalitățile

$$|x| < |x_0|, \; |y| < |y_0|.$$

De unde rezultă că dacă seria este divergentă într'un punct (x_0, y_0) ea va fi divergentă pentru toate valorile lui x și y cari satisfac inegalitățile

$$|x| > |x_0|, \quad |y| > |y_0|.$$

4. *Cercuri de convergență asociate.* Fie R și R′ două numere pozitive astfel că pentru $|x| < R$ și $|y| < R'$ seria $P(x, y)$ este convergentă, iar pentru $|x| > R$, $|y| > R'$ această serie este divergentă. Vom zice că cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$ sunt *cercuri de convergență asociate* ale seriei $P(x, y)$. Există o deosebire esențială între cercurile de convergență astfel definite și între cercul de convergență al unei serii întregi de o singură variabilă. In cazul din urmă cercul de convergență este unic, pe când în cazul a două variabile, avem în genere o infinitate de sisteme de cercuri de convergență asociate. De exemplu seria:

$$\sum_{m,n=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!\,n!} x^m y^n = \sum_{\mu=0}^\infty (x + y)^\mu$$

este convergentă pentru $|x| + |y| < 1$ și numai în acest caz; prin urmare razele R și R′ ale cercurilor de convergență asociate satisfac egalitatea $R + R' = 1$. Numărul lor este deci nelimitat. Se poate însă întâmplă, ca și în cazul unei serii întregi de două

variabile, să existe un sistem unic de cercuri de convergență asociate. Astfel seria

$$\sum_{m,\,n=o}^{\infty} x^m y^n = \left(\sum_{m=o}^{\infty} x^m\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} y^m\right)$$

este convergentă numai pentru $|x| < 1, |y| < 1$; prin urmare $R = R' = 1$

5. *Dacă o serie întreagă*

$$P(x, y) = \sum_{m,\,n=o}^{\infty} a_{m,\,n}\, x^m y^n$$

se anulează pentru o infinitate de valori ale variabilelor x și y, independente între ele și vecine cu zero, ea este identic nulă.

In adevăr, să presupunem y fix, dar având o valoare oarecare vecină cu zero, și să ordonăm seria după puterile lui x

$$P(x, y) = \sum_{m=o}^{\infty} A_m x^m, \quad A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,n}\, y^n .$$

Seria $\sum_{m=o}^{\infty} A_m x^m$ fiind, prin ipoteză, nulă într'o infinitate de puncte a căror limită este $x=o$, rezultă

$$A_m = o \qquad (m = o, 1, 2\ldots)$$

Aceste egalități fiind adevărate pentru o infinitate de valori y a căror limită este $y = o$, rezultă că toți coeficienții seriilor

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_{m,\,n}\, y^n \qquad (m = o, 1, 2\ldots.)$$

sunt nuli. Ceeace demonstră teorema.

Corolar. Dacă două serii întregi $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ sunt egale într'o infinitate de puncte (x, y) vecine cu punctul $(x = o, y = o)$, ele sunt identice.

6. *Inegalități ce satisfac coeficienții unei serii întregi.*

Fie

$$P(x, y) = \sum_{m,\,n=o}^{\infty} a_{m,\,n}\, x^m y^n = \sum_{m=o}^{\infty} A_m x^m$$

$$A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,\,n}\, y^n ;$$

r și ϱ două numere pozitive, respectiv mai mici decât razele cercurilor de convergență relative la variabilele x, y. Fie M modulul maximum al seriei $P(x, y)$ pe cercurile (r) și (ϱ); avem

$$|A_m| < \frac{M}{r^m};$$

prin urmare coeficienții seriei

$$A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,n} y^n$$

vor satisface inegalitățile

$$|a_{m,n}| < \frac{M}{r^m \varrho^n}$$

$$(m, n = o, 1, 2 \ldots)$$

7. *Sumă de serii întregi.* Teorema lui *Weierstrass* asupra sumelor de serii de puteri de o singură variabilă se aplică și seriilor de puteri de mai multe variabile. Ne mărginim a considerà o sumă de serii întregi de două variabile.

Fie

$$(1) \qquad P_1(x, y), P_2(x, y), \ldots, P_i(x, y), \ldots$$

un șir nelimitat de serii întregi, convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$, reprezentate prin egalitățile

$$(2) \qquad P_i(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n}^{(i)} x^m y^n$$

și să presupunem că seria

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y)$$

este uniform convergentă dealungul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$, r și ϱ fiind două numere pozitive mai mici respectiv decât R și R′ însă putând fi oricât de aproape voim de aceste numere. Voim să demonstrăm — în aceasta consistă teorema lui *Weierstrass* — că suma (3) se poate înlocuì printr'o serie întreagă, convergentă în interiorul cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$.

In virtutea convergenței uniforme a seriei (3), la un număr pozitiv ε arbitrar de mic, corespunde un număr întreg μ astfel încât să avem

$$(4) \qquad \left| \sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{i=\mu+p}^{\infty} P_i(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de unde inegalitatea

$$(5) \qquad \left| \sum_{i=\mu}^{\mu+p} P_i(x, y) \right| < \varepsilon,$$

oricât de mare ar fi numărul întreg pozitiv p. Primul membru al

acestei inegalități conținând un număr limitat de serii, putem grupă termenii după puterile lui x, y și să scrim

$$\left| \sum_{m,n=o}^{\infty} \left(\sum_{i=\mu}^{\mu+p} a_{m,n}^{(i)} \right) x^m y^n \right| < \varepsilon$$

și prin urmare, în virtutea inegalităților ce satisfac coeficienții unei serii întregi (§ 6),

$$\left| \sum_{i=\mu}^{\mu+p} a_{m,n}^{(i)} \right| < \varepsilon r^{-m} \varrho^{-n}.$$

De unde conchidem că seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{m,n}^{(i)}$$

este convergentă. In locul inegalității precedente putem dar scrie pe cea următoare

$$\left| \sum_{i=\mu}^{\infty} a_{m,n}^{(i)} \right| < \varepsilon r^{-m} \varrho^{-n} \tag{6}$$

Să punem

$$b_{m,n} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m,n}^{(i)}$$

și să considerăm seria

$$\sum_{m,n=o}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n \tag{7}$$

Vom probà că această serie este convergentă în regiunea considerată. Pentru aceasta să punem

$$b'_{m,n} = \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{m,n}^{(i)}, \quad b''_{m,n} = \sum_{i=\mu}^{\infty} a_{m,n}^{(i)};$$

vom avea

$$b_{m,n} = b'_{m,n} + b''_{m,n},$$

și prin urmare

$$\sum_{m,n=o}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n = \sum_{m,n=o}^{\infty} b'_{m,n} x^m y^n + \sum_{m,n=o}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n \tag{8}$$

cu condițiunea

$$|b''_{m,n}| < \varepsilon r^{-m} \varrho^{-n}. \tag{9}$$

De aci rezultă că pentru toate valorile lui x, y cari satisfac inegalitățile

$$|x| = r' < r, \quad |y| = \varrho' < \varrho,$$

avem

$$(10) \quad \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n \right| < \varepsilon \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^m \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^n = \frac{\varepsilon}{\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left(1-\frac{\varrho'}{\varrho}\right)}$$

Seria

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n$$

este așà dar absolut și uniform convergentă în interiorul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$. De altă parte, seria

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{\mu-1} b'_{m,n} x^m y^n = \sum_{i=1}^{\mu-1} P_i(x,y)$$

fiind suma celor dintâi $\mu-1$ serii (1) este convergentă în aceleași cercuri. Prin urmare seria

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n$$

este absolut convergentă pentru valorile

$$|x| < r \text{ și } |y| < \varrho.$$

Să considerăm acum diferența

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x,y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n,$$

care, în virtutea egalității (11), este egală cu diferența

$$\sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x,y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n;$$

prin urmare

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x,y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n \right| \leq \left| \sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x,y) \right| + \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n \right|$$

De unde, în virtutea inegalităților (4) și (10), rezultă inegalitatea

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x,y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n \right| < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{r\varrho}{(r-r')(\varrho-\varrho')} \right)$$

Insă membrul întâiu fiind independent de ε, rezultă că el este riguros nul; de unde egalitatea

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n,$$

valabilă în interiorul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$ şi prin urmare în interiorul cercurilor de convergenţă $|x| = R$, $|y| = R'$; căci prin ipoteză, r şi ϱ difer respectiv de R şi R' oricât de puţin voim.

8. *Consecinţe.* Din teorema precedentă decurg consecinţe analoage cu cele relative la seriile de o singură variabilă, anume:[1])

I. Produsul a două serii întregi $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, convergente în aceleaşi cercuri $|x| = R$, $|y| = R'$, se poate înlocui printr'o singură serie întreagă convergentă în aceleaşi cercuri. De unde rezultă o consecinţă analoagă pentru o funcţiune raţională întreagă de un număr limitat de serii întregi convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$.

II. Fie

$$(13) \qquad P(u, v) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n} u^m v^n$$

o serie întreagă de variabilele complexe u şi v, convergentă în cercurile $|u| = R$, $|v| = R'$; de altă parte, fie

$$(14) \qquad u = P_1(x, y), \quad v = P_2(x, y)$$

două serii întregi convergente în cercurile $|x| = R_1$, $|y| = R_1'$. Inlocuind în seria (13) u şi v prin seriile (14), $P(u, v)$ va deveni o serie întreagă de x şi y convergentă în domeniul punctului $(x = o, y = o)$ sub condiţiunea necesară şi suficientă ca să avem inegalităţile

$$|P_1(o, o)| < R, \quad |P_2(o, o)| < R'.$$

Aceeaş demonstraţiune ca în cazul seriilor de o singură variabilă.

III. Fie $P(x, y)$ o serie întreagă convergentă în domeniul originei $x = y = o$ şi să considerăm câtul

$$\frac{1}{P(x, y)}.$$

1°. Dacă numitorul nu se anulează în punctul $x = y = o$, există, în virtutea continuităţii, un număr pozitiv r astfel ca pentru

$$|x| < r, \quad |y| < r$$

[1]) I. & 120.

să avem

$$| P(x, y) - P(o, o) | < | P(o, o) |.$$

Punând pentru prescurtare

$$P_1(x, y) = P(x, y) - P(o, o),$$

avem dar

$$\left| \frac{P_1(x, y)}{P(o, o)} \right| < 1$$

și prin urmare

$$\frac{1}{P(x, y)} = \frac{1}{P(o, o) + P_1(x, y)} = \frac{1}{P(o, o)} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{P_1(x, y)}{P(o, o)} \right)^n$$

sau

$$\frac{1}{P(x, y)} = \mathcal{F}(x, y), \tag{1}$$

adică câtul considerat se poate exprimă printr'o serie întreagă convergentă în domeniul originei.

2°. Dacă $P(o, o) = o$, egalitatea (1) este imposibilă; căci în vecinătatea originei $x = y = o$, membrul întâiu poate în valoare absolută deveni mai mare ca un număr pozitiv, oricât de mare voim, și nu poate prin urmare fi reprezentat printr'o serie întreagă $\mathcal{F}(x, y)$.

Să considerăm acum două serii $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ convergente în același domeniu și câtul

$$\frac{P_1(x, y)}{P(x, y)}. \tag{2}$$

Din cele ce preced rezultă că dacă $P(o, o) \neq o$, câtul (2), privit ca produsul lui $P_1(x, y)$ prin $\frac{1}{P(x, y)}$ se va exprimă printr'o serie întreagă $P(x, y)$ convergentă în domeniul punctului $x = o$, $y = o$. Dacă $P(o, o) = o$ și $P_1(o, o) \neq o$ asemenea expresiune este imposibilă.

Dacă o egalitate de forma

$$\frac{P_1(x, y)}{P(x, y)} = \mathcal{F}(x, y)$$

este posibilă, se zice că seria $P_1(x, y)$ este divizibilă cu seria $P(x, y)$. Avem atunci

$$P_1(x, y) = P(x, y)\, \mathcal{F}(x, y).$$

Divizibilitatea astfel definită este totdeauna posibilă dacă seria $P(x, y)$ nu se anulează în punctul $x = y = o$.

Dacă ambele serii $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ nu se anulează în punctul (o, o), fiecare din ele este divizibilă prin cealaltă.

Cazul când ambele serii se anulează în acelaş timp îl vom studià mai departe.

9. *Seria Taylor.* Fie

$$(1) \qquad P(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$$

o serie întreagă convergentă în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$ şi x_0, $x_0 + h$, y_0, $y_0 + k$ puncte situate respectiv în aceste cercuri. Vom aveà

$$(2) \qquad P(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n} (x_0 + h)^m (y_0 + k)^n .$$

Membrul al doilea se poate transformà într'o serie întreagă de h şi k convergentă, sub condiţiunile

$$(3) \qquad |x_o| + |h| \leqq R_1, \qquad |y_o| + |k| \leqq R_1',$$

R_1 şi R_1' fiind două numere pozitive respectiv mai mici ca R şi R', însă oricât de apropiate voim de aceste numere.

Pentru a justificà această propoziţiune, să privim h şi k ca puncte variabile raportate respectiv la x_0 şi y_0 ca origină. Atunci inegalităţile (3) exprimă că aceste puncte sunt situate în interiorul sau pe cercurile, având punctele x_0 şi y_0 ca centre şi razele

$$r = R_1 - |x_o| \qquad \varrho = R_1' - |y_o|.$$

In aceste puncte avem

$$|a_{m,n} (x_o + h)^m (y_o + k)^n| \leqq |a_{m,n}| R_1^m R_1'^n ;$$

prin urmare seria, ai cărei termeni sunt funcţiunile raţionale şi întregi de h şi k

$$a_{m,n} (x_o + h)^m (y_o + k)^n ,$$

este absolut şi uniform convergentă şi suma sa se poate reprezentà printr'o serie întreagă de h şi k, convergentă în cercurile considerate.

Putem dar scrie egalitatea

$$(4) \qquad P(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m,n=o}^{\infty} P_{m,n}(x_0, y_0) \frac{h^m k^n}{m!\, n!},$$

în care coeficienţii $P_{m,n}(x_0, y_0)$ sunt serii întregi de x_0, y_0 şi anume:

$$P_{0,0}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n} x_0^m y_0^n ,$$

$$P_{1,0}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} m a_{m,n} x_0^{m-1} y_0^n , \quad P_{0,1}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} n a_{m,n} x_0^m y_0^{n-1},$$

cuprinse toate în expresiunea generală

$$(5)\quad P_{\mu,\nu}(x_0\,y_0) = \sum_{\substack{m=\mu \\ n=\nu}}^{\infty} m(m-1)\dots(m-\mu+1)\,n(n-1)\dots(n-\nu+1)\,a_{m,n}\,x_0^{m-\mu}\,y_0^{n-\nu},$$

$$(\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\dots).$$

(Să nu uităm că punctele x_0 și y_0 sunt interioare cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$).

Seriile

$$P_{1,0}(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} m\,a_{m,n}\,x^{m-1}\,y^n,\quad P_{0,1}(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} n\,a_{m,n}\,x^m\,y^{n-1}$$

se numesc *derivate parțiale* de ordinul întâiu ale seriei $P(x, y)$ respectiv în raport cu x și y; ele se reprezintă prin

$$\frac{\delta P(x,y)}{\delta x},\quad \frac{\delta P(x,y)}{\delta y}.$$

Aceste serii au aceleași cercuri de convergență ca seria primitivă; căci, precum am zis mai sus, ele sunt convergente în interiorul cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$ și se recunoaște fără greutate că ele sunt divergente pentru valorile $|x| > R$, $|y| > R'$, pentru cari seria dată este divergentă. (A se vedeà cazul seriilor de o singură variabilă [1]).

Grupul de serii

$$P_{2,0}(x,y),\ P_{1,1}(x,y),\ P_{0,2}(x,y)$$

constitue derivatele parțiale de ordinul al doilea; le reprezentăm prin

$$\frac{\delta^2 P(x,y)}{\delta x^2},\quad \frac{\delta^2 P(x,y)}{\delta x\,\delta y},\quad \frac{\delta^2 P(x,y)}{\delta y^2}.$$

Intr'un mod general, $P_{m,n}(x.y)$ se reprezintă prin

$$\frac{\delta^{m+n} P(x,y)}{\delta x^m\ \delta y^n}$$

și se numește derivată parțială de ordinul $m + n$ a seriei primitive, luată de m ori în raport cu x și de n ori în raport cu y.

Din expresiunea (5) rezultă că valoarea unei derivate parțiale oarecari, este independentă de ordinea în care operațiunea este efectuată.

Punând

$$x_0 + h = x,\quad y_0 + h = y$$

---

[1] I. § 100.

egalitatea (1) se va putea scrie

$$(6)\quad P(x, y) = \sum_{m, n=o}^{\infty} \left(\frac{\delta^{m+n} P(x, y)}{\delta x^m \, \delta y^n} \right)_{x_0, y_0} \frac{(x-x_0)^m}{m!} \frac{(y-y_0)^n}{n!}.$$

In această dezvoltare consistă seria *Taylor* pentru o funcțiune de două variabile.

10. Reprezintând membrul al doilea (6) prin $P_1(x-x_0\, y-y_0)$, avem egalitatea

$$(7)\qquad P(x, y) = P_1(x-x_0, y-y_0),$$

valabilă în toate punctele x și y situate în interiorul cercurilor având punctele x_0 și y_0 ca centre și tangente respectiv la cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$.

Razele cercurilor de convergență ale seriei $P_1(x-x_0, y-y_0)$, dedusă din seria $P(x, y)$, ale căror centre sunt punctele x_0 și y_0, sunt cel puțin egale cu

$$R - |x_0|, \qquad R' - |y_0|$$

dar ele pot fi mai mari. In cazul din urmă se zice că seria dată se prelungește în afară din cercurile sale de convergență. Se probează ca și în cazul unei singure variabile că egalitatea (7) subsistă în toată regiunea comună de convergență a seriei primitive $P(x, y)$ și a seriei deduse $P_1(x-x_0, y-y_0)$.

11. Noțiunea de *prelungire analitică* și de *funcțiune analitică* de două variabile se introduce ca și în cazul seriilor de o singură variabilă [1]). Fie

$$S = P(x-x_0, y-y_0)$$

o serie întreagă convergentă în cercurile C și C'. Presupunând că seria se prelungește în afară din aceste cercuri, reprezentăm prin

$$S_1 = P(x-x_0, y-y_0; x_1, y_1)$$

seria prelungită, x_1 fiind un punct în interiorul cercului C și y_1 un punct în interiorul lui C'. Fie C_1 și C_1' cercurile de convergență corespunzătoare. Dacă seria S_1 se prelungește afară din aceste cercuri, reprezentăm prin

$$S_2 = P(x-x_0, y-y_0; x_1, y_1; x_2, y_2)$$

seria prelungită, x_2 fiind un punct în C_1 și y_2 un punct în C_2; etc. Totalitatea seriilor S, S_1, S_2, ... constitue o *funcțiune analitică* $f(x, y)$ de variabilele independente x, y; una oarecare din

[1]) I. & 145.

aceste serii se numește *element* al funcțiunii. Regiunea acoperită de totalitatea cercurilor de convergență ale acestor serii formează regiunea de existență a funcțiunii.

Noțiunile de funcțiune uniformă și multiformă a funcțiunilor analitice de două variabile se introduc prin considerațiuni analoage cu cele din cazul unei singure variabile.

O funcțiune analitică $f(x, y)$ se zice *olomorfă* sau *regulată*, în domeniul unui punct (x_0, y_0), dacă în domeniul acestui punct ea se poate pune sub forma

$$(1) \qquad f(x, y) = P(x-x_0, y-y_0).$$

Funcțiunea se zice olomorfă într'o regiune dată, dacă este olomorfă în domeniul fiecărui punct al regiunei; ea se zice *întreagă* dacă este olomorfă pentru toate valorile finite ale variabilelor x și y. Dacă numărul termenilor lui $P(x, y)$ este limitat, funcțiunea se zice *întreagă rațională*; în caz contrar funcțiunea se zice *transcedentă*.

Dacă în domeniul unui punct (x_0, y_0) egalitatea (1) este imposibilă, punctul (x_0, y_0) se zice punct *singular* al funcțiunii.

12. In privința funcțiunilor analitice întregi de două variabile, avem teorema următoare, analoagă cu aceea a lui Liouville.

O funcțiune întreagă $f(x, y)$ nu poate rămânea finită în tot câmpul de variațiune al variabilelor x și y [1]*, dacă nu se reduce la o constantă.*

In adevăr, fie

$$(1) \qquad f(x, y) = \sum_{m, n=o}^{\infty} a_{m, n} x^m y^n$$

o funcțiune întreagă; să presupunem că există un număr pozitiv M astfel ca

$$(2) \qquad |f(x, y)| < M,$$

pentru toate valorile x, y satisfăcând egalitățile

$$|x| = R, \; |y| = R',$$

R și R′ fiind două numere arbitrar de mari.

Vom avea pentru coeficienții $a_{m, n}$ inegalitățile (§ 6)

$$|a_{m, n}| < \frac{M}{R^m R'^n}.$$

Insă R și R′ fiind prin ipoteză oricât de mari voim, rezultă că toți coeficienții $a_{m, n}$ sunt nuli exceptând coeficientul $a_{0,0}$. Ceeace demonstră teorema.

---

[1]) Adică în tot planul (x) și în tot planul (y).

13. Dacă în locul inegalității (2), avem inegalitatea

$$\left|\frac{f(x, y)}{x^p\, y^q}\right| < M,$$

p și q fiind cele mai mici numere întregi satisfăcând această inegalitate, funcțiunea $f(x, y)$ este un polinom de gradul p în x și de gradul q în y. Căci, în virtutea acestei inegalități, coeficienții $a_{m,n}$ satisfac inegalitățile

$$|a_{m,n}| < \frac{M}{R^{m-p} R'^{n-q}}$$

și prin urmare sunt nuli pentru toate valorile $m > p$, $n > q$.

q.e.d.

14. *Extensiunea integralei lui Cauchy la o funcțiune analitică de două variabile, olomorfă într'un câmp dat.*

Fie $f(x, y)$ o funcțiune olomorfă în câmpul format dintr'o arie limitată de o curbă închisă C situată în planul variabilei x și dintr'o arie limitată de o curbă închisă C′ situată în planul variabilei y, continuă pe ambele curbe. Avem egalitățile

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z, y)}{z - x}\, dz,$$

$$(2) \qquad f(z, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(z, u)}{u - y}\, du;$$

de unde integrala lui Cauchy

$$(3) \qquad f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(z - x)(u - y)}\, dz\, du\ ^{1}).$$

15. Egalitățile (1) și (2) dau respectiv:

$$(4) \qquad \frac{\delta^m f(x, y)}{\delta x^m} = \frac{m!}{2i\pi}\int_C \frac{f(z, y)}{(z - x)^{m+1}}\, dz,$$

$$(5) \qquad \frac{\delta^n f(z, y)}{\delta y^n} = \frac{n!}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(u - y)^{n+1}}\, du;$$

de unde

$$(6) \qquad \frac{\delta^{m+n} f(x, y)}{\delta x^m\, \delta y^n} = -\frac{m!\, n!}{4\pi^2}\int_C\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(z-x)^{m+1}(u-y)^{n+1}}\, dz\, du,$$

---

[1]) Nu ne ocupăm aci de teoria integralelor duble de variabile complexe. Integrala dublă (3) are un sens bine determinat, consistând în două integrațiuni simple consecutive, precum rezultă din operațiunile (1) și (2). Membrul al doilea (1) reprezintă o funcțiune olomorfă de x în interiorul curbei C, oricare ar fi punctul y în interiorul lui C′, și membrul al doilea (2) reprezintă o funcțiune olomorfă de y în interiorul lui C′, oricare ar fi punctul z pe conturul C. Rezultatul celor două operațiuni consecutive, reprezintat prin integrala dublă (3), este o expresiune analitică a funcțiunei olomorfe $f(x, y)$ în domeniul considerat.

integralele fiind luate în sensul pozitiv dealungul fiecăreia din curbele C și C'.

Corolar. Dacă C și C' sunt cercuri având centrele lor respectiv în punctul x și în punctul y cu razele r și r'

$$|z - x| = r, \qquad |u - y| = r'$$

și dacă M este maximul lui $|f(z, u)|$ dealungul acestor cercuri, formula (6) ne dă inegalitățile

$$\left|\frac{\delta^{m+n} f(x, y)}{\delta x^m \delta y^n}\right| \leq m!\, n!\, \frac{M}{r^m r'^n}.$$

16. Fie $x = a$, $y = b$ un punct ordinar al funcțiunii $f(x, y)$ și $f(a, b) = o$. Zicem că punctul (a, b) este un *zero* al funcțiunii.

(Trebue să observăm că un zero nu este un punct izolat, ci face parte dintr'un *continuum* de zeruri. Aceasta rezultă din faptul că, în virtutea ecuațiunei $f(x, y) = o$ satisfăcută într'un punct ordinar, fiecare din cele două variabile x, y variază într'un mod continuu împreună cu cealaltă, precum se va vedeà mai departe).

Să considerăm desvoltarea funcțiunei în domeniul unui zero și, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că acest punct coincide cu origina. Este deajuns pentru aceasta, să facem substituțiunea $x = a + x'$, $y = b + y'$ și să considerăm funcțiunea $f(a + x', b + y') = f_1(x', y')$, olomorfă în domeniul punctului $x' = y' = o$ și anulându-se în acest punct.

Funcțiunea $f(x, y)$ olomorfă în domeniul punctului $x = y = o$ și nulă în acest punct este reprezentată printr'o serie întreagă de forma

$$(1)\quad f(x, y) = a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} x y + a_{02} y^2 + \ldots.$$

convergentă în două cercuri $|x| = R$, $|y| = R'$, R și R' fiind două numere pozitive.

Să presupunem într'un mod general că toți coeficienții a_{ik} în cari indicele $i < m$, m întreg pozitiv, sunt nuli și coeficientul $a_{m,o} \neq o$; avem expresiunea de forma

$$(2)\qquad f(x, y) = x^m P(x, y),\ P(o, o) = a_{m,o}$$

Funcțiunea $f(x, y)$ admite punctul $x = o$ ca zero de ordinul m, oricare ar fi valoarea lui y satisfăcând inegalitatea $|y| < R'$ ceeace constitue pentru funcțiunea dată o *infinitate de zeruri neizolate* în domeniul punctului $x = y = o$ (fapt fără analogie în cazul funcțiunilor analitice de o singură variabilă).

Dacă toți coeficienții a_{ik} în care $k < n$ sunt nuli și $a_{o,n} \neq o$ avem expresiunea de forma

$$(3)\qquad f(x, y) = y^n P(x, y), \qquad [P(o, o) = a_{m,n}].$$

Punctul $y = o$ este un zero de ordinul n al funcțiunii, oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = R$: concluziune analoagă cu cea de mai sus, funcțiunea admite o infinitate de zeruri neizolate în domeniul punctului $x = y = o$.

Dacă toți coeficienții a_{ik} pentru $i < m$ și $k < n$ sunt nuli și $a_{m,n} \neq o$, avem expresiunea de forma

$$(4) \qquad f(x, y) = x^m y^n P(x, y), \quad [P(o, o) = a_{mn}].$$

Funcțiunea admite punctul $x = o$ ca zero de ordinul m, oricare ar fi punctul y în interiorul cercului $|y| = R'$ și deasemenea punctul $y = o$ ca zero de ordinul n, oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = R$.

Dacă funcțiunea $f(x, y)$ nu conține ca factor comun nici una din cele două variabile, funcțiunea $f(o, y)$ nu poate admite în cercul $|y| = R'$ decât un număr limitat de zeruri, deasemenea funcțiunea $f(x, o)$ nu se poate anulà în cercul $|x| = R$ decât într'un număr limitat de puncte.

II. TEOREME GENERALE.

17. *Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcțiune analitică de variabilele x, y, olomorfă pentru toate valorile acestor variabile satisfăcând inegalitățile*

$$|x| \leq R, \qquad |y| \leq R',$$

R și R' fiind două numere pozitive. Dacă pentru $x = o$ funcțiunea $f(o, y)$ admite $y = o$ ca zero multiplu de ordinul n, există două numere pozitive $r < R$, $\varrho < R'$ astfel încât pentru o valoare x satisfăcând inegalitatea $|x| < r$, funcțiunea $f(x, y)$, admite n zeruri având modulele lor mai mici ca ϱ, cari tind către zero când x tinde către zero.

Pentru a demonstrà această teoremă, să desvoltăm $f(x, y)$ după puterile crescânde ale lui x

$$(1) \quad f(x,y) = f(o,y) + x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots,$$

coeficienții $P_1(y)$, $P_2(y)$, ... fiind serii întregi de y, convergente în cercul $|y| = R'$ și pe acest cerc. Reprezentând prin M maximul lui $|f(x, y)|$ pentru valorile $|x| = R$, $|y| = R'$, avem, pentru coeficienții seriei (1), inegalitățile

$$(2) \qquad |P_m(y)| \leq \frac{M}{R^m},$$

oricare ar fi y satisfăcând inegalitatea $|y| \leq R'$. Prin urmare punând $|x| = r < R$, avem, în regiunea considerată a lui y,

$$|x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots| < M \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m,$$

sau

$$(3) \quad |x P_1(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots| < M \frac{r}{R-r}.$$

De altă parte, putem determină un număr pozitiv $\varrho < R'$ astfel ca pentru valorile lui y satisfăcând inegalitatea $|y| < \varrho$, $f(o, y)$ să nu se anuleze decât pentru $y = o$; căci, în virtutea ipotezei, $f(o, y)$ este de forma

$$(4) \quad f(o, y) = y^n P_0(y),$$

$P_0(y)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|y| = R'$ și $P_0(o) \neq o$. Fie m minimul lui $|f(o, y)|$ pe cercul $|y| = \varrho$ așà determinat; m este mai mare ca zero. Să determinăm numărul r astfel ca să satisfacă egalitatea

$$M \frac{r}{R-r} = m,$$

de unde

$$r = \frac{m R}{M + m}.$$

Punând

$$(5) \quad \varphi(x, y) = x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots,$$

avem, în virtutea inegalității (3),

$$|\varphi(x, y)| < |f(o, y)|,$$

pentru toate valorile x, y satisfăcând condițiunile

$$|x| < r, \quad |y| = \varrho.$$

Prin urmare funcțiunile $f(x, y) = f(o, y) + \varphi(x, y)$ și $f(o, y)$ au, în interiorul cercului $|y| = \varrho$, același număr de zeruri oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = r$ (I. § 348). De unde rezultă că oricare ar fi valoarea lui x satisfăcând inegalitatea $|x| < r$, funcțiunea $f(x, y)$ are n zeruri și numai n: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale căror module sunt mai mici ca ϱ. Toate celelalte zeruri ale acestei funcțiuni, dacă există, sunt exterioare cercului $|y| = \varrho$. Prin urmare dacă facem x să tindă către zero, $\varphi(x, y)$ tinzând astfel către zero, rădăcinele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuațiunei $f(x, y) = o$ și numai acestea, vor tinde către zero în același timp, în virtutea ecuațiunii (4). q. e. d.

18. *Teoremă. Cele n zeruri infinit mici, a căror existență a fost stabilită prin teorema precedentă, satisfac o ecuațiune de forma*

$$(7) \quad y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x) = o,$$

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, fiind funcțiuni oloforme în domeniul lui $x = o$, cari se anulează pentru $x = o$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

Păstrând notaţiunile de mai sus, avem, k fiind un număr întreg pozitiv,

$$(8)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{y^k f'(x,y)}{f(x,y)}\,dy = \sum_{i=1}^{n} y_i^k, \quad (|x|<r),$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul cercului $|y| = \varrho$; căci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt polurile funcţiunei de sub semnul f, situate în interiorul cercului $|y| = \varrho$, iar membrul al doilea al egalităţei este egal cu suma reziduurilor acestei funcţiuni relative la aceste poluri.

Să punem expresiunea

$$f(x,y) = y^n P_0(y) + x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots$$

sub forma

$$f(x,y) = y^n P_0(y)\left[1 + x\,\frac{P(x,y)}{y^n P_0(y)}\right];$$

de unde

$$\log f(x,y) = n\log y + \log P_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,x^m\left(\frac{P(x,y)}{y^n P_0(y)}\right)^m.$$

Derivând ambele membre în raport cu y, obţinem, pentru $\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}$, o expresiune în serie de forma

$$(9)\qquad \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} = \frac{n}{y} + \frac{P'_0(y)}{P_0(y)} + x\,Q_1(y) + x^2 Q_2(y) + \ldots,$$

$Q_1(y), Q_2(y), \ldots$ fiind serii Laurent, convergente pentru valorile lui y cari satisfac inegalităţile

$$\varrho_0 \leqq |y| \leqq \varrho,$$

ϱ_0 fiind un număr pozitiv mai mic ca ϱ.

Multiplicând ambele membre ale egalităţei (9) cu y^k şi punând

$$(10)\qquad a_m^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} y^k Q_m(y)\,dy, \quad S_k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k,$$

avem (8) seria

$$(11)\qquad S_k = a_1^{(k)} x + a_2^{(k)} x^2 + \ldots + a_m^{(k)} x^m + \ldots,$$

convergentă în interiorul cercului $|x| = r$, care se anulează împreună cu x.

Dând lui k valorile $1, 2, \ldots, n$, conchidem că funcţiunile simetrice elementare

$$\Sigma y_1,\ \Sigma y_1 y_2, \ldots,\ y_1 y_2 \cdots y_n$$

se exprimă prin serii întregi de x convergente în cercul $|x| = r$ şi cari se anulează pentru $x = o$.

De unde rezultă că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt rădăcini ale unei ecuaţiuni de forma (7) [1]. *q. e. d.*

19. O expresiune foarte interesantă a unei funcţiuni $f(x, y)$ olomorfă în domeniul (o, o) este dată de teorema următoare, datorită lui Weierstrass. Vom presupune că funcţiunea se anulează în punctul $x = y = o$; în cazul contrar este deajuns a înlocui $f(x, y)$ prin diferenţa $F(x, y) = f(x, y) - f(o, o)$.

Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcţiune olomorfă în domeniul (o, o); dacă $f(o, y)$ admite $y = o$ ca zero de ordinul n, avem expresiunea

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\, P(x, y) \tag{12}$$

în care

$$\varphi(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i) \tag{13}$$

este membrul întâiu al ecuaţiunei (7) (§ 18) *şi $P(x, y)$ este o serie întreagă care nu se anulează în domeniul (o, o).*

Pentru a demonstră această teoremă, să ne referim mai întâiu la cele două teoreme precedente. In virtutea acestor teoreme există două numere pozitive r şi ϱ astfel că pentru $|x| < r$ funcţiunea admite n zeruri şi numai n,: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cari satisfac ecuaţiunea (7) şi ale căror module sunt mai mici ca ϱ.

Fie acum $y = \eta$ un punct situat în interiorul cercului $|y| = \varrho$, diferit de punctele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi să considerăm funcţiunea

$$\frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} - \frac{1}{y - \eta} \tag{14}$$

Privind punctul x fix, însă având o poziţiune oarecare în interiorul cercului $|x| = r$, expresiunea (14), considerată ca funcţiune de y, n'are în interiorul cercului $|y| = \varrho$, alte singularităţi decât polurile de ordinul întâiu $\eta, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Vom aveà dar, aplicând teorema reziduurilor,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}\frac{dy}{y - \eta} = \left(\frac{f'_y}{f}\right)_{y=\eta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k - \eta} = \frac{d}{d\eta} \log \frac{f(x, \eta)}{\prod_{k=1}^{n} (\eta - y_k)}$$

sau

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}\frac{dy}{y - \eta} = \frac{d}{d\eta} \log \frac{f(x, \eta)}{\varphi(x, \eta)}. \tag{15}$$

---

[1]) Fiind dată ecuaţiunea

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = o,$$

avem (v. funcţiunile simetrice)

$$S_1 + A_1 = o, \quad S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = o, \ldots,$$
$$S_n + A_1 S_{n-1} + \ldots + A_n = o.$$

Să evaluăm integrala din membrul întâiu. Punctul η fiind în interiorul cercului $|y| = \varrho$ pe când y descrie acest cerc, avem seria

$$(16) \qquad \frac{1}{y-\eta} = \frac{1}{y} + \frac{\eta}{y^2} + \ldots + \frac{\eta^m}{y^{m+1}} + \ldots$$

Multiplicând ambele membre ale acestei serii cu $\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}$ și integrând dealungul cercului $|y| = \varrho$, avem

$$(17) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} \frac{dy}{y-\eta} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=o}^{\infty} \eta^m \int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} \frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Expresiunea de sub semnul $\int$ din membrul al doilea fiind funcțiune olomorfă de x în interiorul cercului $|x| = r$, pentru toate valorile lui y satisfăcând egalitatea $|y| = \varrho$, rezultă că această integrală este o funcțiune olomorfă de x în cercul considerat. Putem dar pune

$$(18) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} \frac{dy}{y^{m+1}} = p'_{m+1}(x), \; (m = o, 1, 2, \ldots)$$

$p_{m+1}(x)$ fiind o serie întreagă convergentă în interiorul cercului $|x| = r$.

Membrul întâiu al egalității (17) este așà dar egal cu suma

$$\sum_{m=o}^{\infty} \eta^m \, p_{m+1}(x)$$

și egalitatea (15), după ce înlocuim η prin y, se poate scrie

$$(19) \qquad \frac{d}{dy} \log \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \sum_{m=o}^{\infty} y^m \, p_{m+1}(x).$$

De unde rezultă egalitatea:

$$(20) \qquad \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \psi(x) \, e^{\sum_{o}^{\infty} \frac{y^{m+1}}{m+1} p_{m+1}(x)}, \qquad |y| \leq \varrho,$$

în care $\psi(x)$ este o funcțiune introdusă prin integrațiunea ecuațiunei (19). Această funcțiune este olomorfă în cercul (r) și nu se anulează în interiorul acestui cerc. In adevăr, oricare ar fi valoarea lui y privit constant, situat pe cercul $|y| = \varrho$, funcțiunile $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sunt funcțiuni olomorfe de x, cari nu se anulează în interiorul cercului (r); raportul lor și prin urmare funcțiunea $\psi(x)$ este o funcțiune olomorfă în cercul (r) și nu se anulează în interiorul acestui cerc.

Membrul al doilea al egalității (20) este deci o funcțiune olomorfă de x, y pentru valorile $|x| < r$, $|y| < \varrho$. Putem dar

reprezentă membrul al doilea prin $P(x, y)$, serie convergentă în domeniul (o, o), care nu se anulează în acest domeniu. Egalitatea (20) ia dar forma

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\, P(x, y), \tag{21}$$

$\varphi(x, y)$ şi $P(x, y)$ având semnificările cuprinse în enunţul teoremei.

q. e. d.

Corolare I. In virtutea acestei teoreme, rădăcinile y, în număr nelimitat, ale ecuaţiunilor $f(x, y) = o$, $\varphi(x, y) = o$, coincid în domeniul $x = o$.

II. Dacă funcţiunea $f(x, y)$ este olomorfă în domeniul unui punct (a, b) şi $f(x, y)$ admite $y = b$ ca zero de ordinul n, egalitatea (21) se înlocueşte prin cea următoare

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\, P(x - a, y - b) \tag{22}$$

în care seria $P(x - a, y - b)$ nu se anulează în punctul (a, b) şi

$$\varphi(x, y) = (y - b)^n + \varphi_1(x)(y - b)^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x), \tag{23}$$

coeficienţii $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ fiind funcţiuni olomorfe în domeniul lui $x = a$, anulându-se în acest punct.

III. Dacă funcţiunea $f(x, y)$ olomorfă în domeniul (o, o) admite $x = o$ ca zero de ordinul μ, oricare ar fi y vecin cu zero şi $y = o$ ca zero de ordinul ν, oricare ar fi x vecin cu zero, câtul

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y)}{x^\mu y^\nu}$$

este o funcţiune olomorfă în domeniul originei şi, dacă presupunem că $f_1(o, y)$ admite $y = o$ ca zero de ordinul n, obţinem pentru $f(x, y)$, expresiunea

$$f(x, y) = x^\mu y^\nu \varphi(x, y)\, P(x, y), \tag{24}$$

$\varphi(x, y)$ şi $P(x, y)$ având semnificările considerate mai sus.

III. DIVIZIUNEA A DOUĂ SERII.

20. Cu ajutorul teoremei lui Weierstrass putem complectà teoria divizibilităţii a două serii întregi $P(x, y)$, $P_1(x, y)$, convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$, când ele se anulează în punctul $x = y = o$ [1]).

Considerând cazul cel mai general, avem egalităţile

$$\begin{cases} P(x, y) = x^\mu y^\nu \varphi(x, y)\, \mathcal{P}(x, y) \\ P_1(x, y) = x^{\mu_1} y^{\nu_1} \varphi_1(x, y)\, \mathcal{P}_1(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

[1]) (§ 8).

în cari, μ, ν, μ_1, ν_1 sunt numere întregi mai mari sau egale cu zero; funcţiunile $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ sunt polinoame de y:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varphi(x, y) &= y^m + p_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p_m(x), \\ \varphi_1(x, y) &= y^n + p'_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p'_n(x), \end{aligned}$$

ai căror coeficienţi $p(x)$ şi $p'(x)$ sunt serii întregi convergente într'un cerc cu centrul în punctul $x = o$, având o rază convenabilă $r < R$ şi cari se anulează în acest punct, pe când seriile $\mathcal{F}(x, y)$, $\mathcal{F}_1(x, y)$ sunt convergente pentru valorile $|x| < r$ şi $|y| < \varrho$, ϱ având o valoare convenabilă mai mică decât R' şi cari nu se anulează în domeniul determinat de cercurile $|x| = r$, $|y| = \varrho$ [1]).

Să considerăm câtul

$$(3)\qquad \frac{P_1(x, y)}{P(x, y)} = x^{\mu_1-\mu}\, y^{\nu_1-\nu}\, \frac{\varphi_1(x, y)}{\varphi(x, y)}\, \frac{\mathcal{F}_1(x, y)}{\mathcal{F}(x, y)}.$$

Pentru ca membrul al doilea al acestei egalităţi să fie o funcţiune olomorfă de x, y în domeniul (o, o), este necesar ca exponenţii $\mu_1 - \mu$, $\nu_1 - \nu$ să nu fie negativi.

Să examinăm câturile $\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}}$ şi $\frac{\varphi_1}{\varphi}$. Cel dintâiu este o funcţiune olomorfă în domeniul (o, o), căci seria dela numitor nu se anulează în acest domeniu. Pentru ca al doilea cât $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ să fie funcţiune olomorfă în domeniul (o, o) este necesar şi suficient ca el să rămână finit în acest domeniu; prin urmare este necesar ca la un x dat oarecare vecin cu $x = o$, rădăcinile corespunzătoare y_1, $y_2, \ldots, y_i$ ale ecuaţiunei $\varphi(x, y) = o$ să fie rădăcini ale ecuaţiunei $\varphi_1(x, y) = o$. De unde rezultă că $\varphi_1(x, y)$, privit ca polinom de y, trebuie să fie *algebriceşte* divizibil cu $\varphi(x, y)$, privit deasemenea ca polinom de y. Trebuie dar să avem $n \geq m$. Efectuând împărţirea şi reprezentând câtul prin

$$y^{n-m} + p''_1(x)\, y^{n-m-1} + \ldots + p''_{n-m}(x)$$

şi restul prin

$$p'''_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p'''_m(x),$$

avem, în domeniul originei, identităţile

$$(4)\qquad \begin{aligned} y^n + p'_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p'_n(x) \\ = \left[y^m + p_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p_m(x)\right] \\ \left[y^{n-m} + p''_1(x)\, y^{n-m-1} + \ldots + p''_{n-m}(x)\right], \end{aligned}$$

$$(5)\qquad p'''_1(x) = o,\ p'''_2(x) = o, \ldots, p'''_m(x) = o.$$

[1]) Vezi teorema lui Weierstrass (§ 19).

Din identificarea ambelor membre (4) rezultă că coeficienții $p_1''(x), \ldots, p''_{n-m}(x)$ sunt serii întregi cari se anulează pentru $x = o$.

Identitățile (5) formează condițiunile necesare și suficiente ca polinomul $\varphi_1(x, y)$ să fie divizibil cu polinomul $\varphi(x, y)$. Ele conțin o infinitate de ecuațiuni, ce se obțin egalând cu zero toți coeficienții seriilor din membrul întâiu.

In rezumat, pentru ca seria $P_1(x, y)$ să fie divizibilă cu seria $P(x, y)$, definite de egalitățile (1) și (2), este necesar și suficient să avem

$$\mu_1 \geqslant \mu, \quad \nu_1 \geqslant \nu$$

și ca polinomul de y, $\varphi_1(x, y)$, să fie algebriceşte divizibil cu polinomul de y, $\varphi(x, y)$.

Dacă aceste condițiuni sunt împlinite, avem în domeniul (o, o)

$$\frac{P_1(x,y)}{P(x, y)} = P_2(x,y),$$

$P_2(x,y)$ fiind o serie întreagă convergentă în domeniul considerat.

21. *Puncte singulare.* Fie $x = a$, $y = b$ un punct singular al funcțiunii $f(x, y)$. Prin definițiune egalitatea

$$f(x, y) = P(x - a, y - b)$$

este imposibilă în domeniul (a,b).

Se poate întâmplà să existe o serie $P_0(x - a, y - b)$, care se anulează în punctul (a, b) și astfel ca produsul

$$f(x, y)\ P_0(x - a, y - b)$$

să fie olomorf în domeniul acestui punct, adică să avem

$$(1) \qquad f(x, y)\ P_0(x - a, y - b) = P_1(x - a, y - b);$$

de unde, pentru funcțiunea $f(x, y)$, expresiunea

$$(2) \qquad f(x, y) = \frac{P_1(x-a,\ y-b)}{P_0(x-a,\ y-b)},$$

valabilă în domeniul (a, b). Un asemenea punct se numește *punct singular neesențial.*

Dacă nu există nici o serie $P_0(x-a, y-b)$ astfel ca egalitatea (1) să fie posibilă, punctul (a, b) se numește *punct singular esențial.*

In cazul funcțiunilor uniforme de o singură variabilă nu există decât un singur tip de punct singular neesențial, *polul.*

In cazul funcțiunilor uniforme de două variabile, considerăm două clase de puncte singulare neesențiale. Vom zice că punctul

singular (a, b) face parte din clasa I, dacă $P_1(a, b) \neq o$. In acest caz, $|f(x, y)|$ poate deveni oricât de mare voim pentru valori destul de mici $|x-a|, |y-b|$. Funcţiunea $f(x, y)$ tinde către unica valoare ∞, când x tinde către a şi y către b, oricare ar fi drumul urmat de fiecare din aceste variabile.

Zicem atunci că punctul (a, b) este un pol al funcţiunei.

Trebuie să observăm că un pol al funcţiunei $f(x, y)$ nu este punct izolat de alte poluri, ci face parte dintr'un continuum de poluri, căci un zero al seriei $P_0(x, y)$ face parte dintr'un continuum de zeruri (§ 16).

Vom zice că punctul (a, b) face parte din clasa II, dacă $P_1(a, b) = o$, fără ca seriile $P_1(x-a, y-b)$, $P_0(x-a, y-b)$ să aibă factor comun (ceeace se poate totdeauna presupune, suprimând din egalitatea (1) factorul comun, dacă există).

In acest caz, când x tinde către a şi y către b, valoarea către care tinde funcţiunea depinde de drumul urmat de fiecare din variabilele x, y; într'un mod mai precis, de limita către care tinde raportul $\frac{y-b}{x-a}$: funcţiunea dar nu tinde către o valoare determinată, finită sau infinită. Punctele de această speţă sunt puncte izolate, căci ele satisfac ambele ecuaţiuni

$$P_0(a, b) = o, \qquad P_1(a, b) = o.$$

Exemple. 1° Funcţiunea $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ admite ca poluri grămada nelimitată $x = y \neq o$; iar punctul $x = y = o$ ca punct singular neesenţial de clasa II. Punând $\frac{y}{x} = t$, ea devine funcţiune de variabila arbitrară t:

$$\frac{1+t}{1-t}$$

care poate primi o infinitate de valori, reale sau complexe, când x şi y tinde către zero.

2° Funcţiunea

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

admite punctul $x = y = o$ ca punct singular esenţial.

21. *Funcţiuni implicite.* Fie $f(x, y)$ o funcţiune olomorfă în domeniul unui punct $x = a$, $y = b$, în care ea se anulează. Să presupunem că $y = b$ este o rădăcină simplă a ecuaţiunei

$f(a, y) = o$. Vom avea, în virtutea teoremei lui Weierstrass, în domeniul punctului (a, b), egalitatea

$$(1) \quad f(x, y) = [y-b-(x-a)\,P(x-a)]\,P_1(x-a, y-b),$$

$P(x-a)$ fiind o serie întreagă convergentă în domeniul punctului $x = a$ și $P_1(x-a, y-b)$ o serie întreagă convergentă în domeniul punctului (a, b), care nu se anulează în acest punct. De unde rezultă că unica rădăcină y a ecuațiunei

$$(2) \quad f(x, y) = o,$$

care se reduce la b când x tinde către a este exprimată prin seria

$$(3) \quad y = b + (x-a)\,P(x-a)$$

convergentă într'un cerc $|x-a| = r$. Dacă această serie se prelungește afară din cercul de convergență, prelungirea sa satisface ecuațiunea (2), în virtutea *permanenții relațiunilor analitice* [1])

Seria (3) este un element de funcțiune analitică *implicită*, definită de ecuațiunea (2). Fiecărei rădăcini simple a ecuațiunei $f(x, y) = o$ corespunde câte un element de funcțiune analitică. Funcțiunile implicite așà definite sunt ramurile unei funcțiuni analitice multiforme, cu un număr limitat sau nelimitat de ramuri.

Ne vom mărginì în cele ce urmează numai la cazul când $f(x, y)$ este funcțiune rațională de x și y, adică la cazul funcțiunilor algebrice.

CAPITOLUL II.

FUNCȚIUNI ALGEBRICE.

22. Fie

$$(1) \quad f(x, y) = f_0(x)\,y^m + f_1(x)\,y^{m-1} + \ldots + f_m(x)$$

o funcțiune rațională întreagă de variabilele x, y de gradul μ în raport cu amândouă variabilele, coeficienții $f_0(x), \ldots, f_m(x)$ fiind funcțiuni raționale și întregi de x. Să considerăm ecuațiunea

$$(2) \quad f(x, y) = o,$$

pe care o presupunem ireductibilă, adică membrul întâiu nu se descompune în factori, de grade mai mici, raționali și întregi în x și y.

La o valoare finită x care nu anulează coeficientul $f_0(x)$ corespund, pentru y, m valori finite $y_1, y_2, \ldots, y_m$, în genere

[1]) I. § 170.

inegale. Trebuie să exceptăm valorile lui x cari anulează discriminantul D (x) al ecuaţiunei (2), adică rezultanta eliminaţiunei lui y între ecuaţiunile

$$f(x, y) = o, \quad \frac{\delta f}{\delta y} = o.$$

Ecuaţiunea (2) fiind ireductibilă, polinomul D (x) al cărui grad este mai mic sau egal cu μ $(\mu - 1)$nu poate fi identic nul [1]); prin urmare punctele x, căror corespund valori egale pentru y sunt în număr limitat şi prin urmare puncte izolate.

Dacă x coincide cu o rădăcină a ecuaţiunei $f_0(x) = o$, una cel puţin din valorile corespunzătoare ale lui y este infinită. Dacă $x = \infty$, facem substituţiunea $x' = \frac{1}{x}$ şi reducem astfel studiul rădăcinilor y în domeniul $(x = \infty)$ la studiul rădăcinilor ecuaţiunei transformate în domeniul punctului $x' = o$.

23. Fie $x = a$ o valoare a lui x diferită de valorile excepţionale considerate mai sus şi fie

$$(3) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

valorile corespunzătoare ale lui y. Vom avea, în virtutea teoremei asupra funcţiunilor implicite, în domeniul punctului $x = a$, m elemente de funcţiune analitică:

$$(4) \qquad y_n = b_n + (x - a)\, P_n\, (x - a), \quad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

cari, pentru $x = a$, se reduc respectiv la valorile (3) şi cari satisfac ecuaţiunea (2). Fiecare din elementele (4) defineşte o ramură a unei funcţiuni analitice $y(x)$, multiformă cu m ramuri, numită funcţiune *algebrică* de x.

---

[1]) Fie într'un mod general, $f(x, y)$ şi $f_1(x, y)$ două polinoame de x, y respectiv de grade m şi n, $m > n$ şi D (x) rezultatul eliminaţiunei lui y între ecuaţiunile $f(x, y) = o$, $f_1(x, y) = o$. Dacă D $(x) \equiv o$, cele două polinoame au un divizor comun polinom de x, y. In adevăr, aplicând operaţiunile celui mai mare comun divizor între polinoamele $f(x, y)$ şi $f_1(x, y)$ ordonate după puterile lui y, fie egalităţile obţinute

$$\begin{aligned} f &= f_1 Q_1 + f_2, \\ f_1 &= f_2 Q_2 + f_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{k-1} &= f_k Q_k + f_{k+1}, \\ f_k &= f_{k+1} Q_{k+1} + D(x) \end{aligned}$$

Dacă D $(x) = o$ pentru orice valoare a lui x, rezultă că polinomul f_{k+1} divide polinomul f_k şi prin urmare divide polinoamele $f_{k-1}, \ldots f_1$ şi f.

Polinomul $f(x, y)$ ar admite aşà dar ca divizor un polinom de un grad mai mic ca m şi prin urmare n'ar fi ireductibil, ceeace este contrar ipotezei.

24. *Calculul elementelor relative la un punct ordinar dat.* Fie $x=a$ o valoare a lui x şi $y=b$ o rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(a,y)=o$. Punând, pentru prescurtare,

$$(1) \qquad A_{i,k}=\left(\frac{\delta^{i+k} f(x,y)}{\delta x^i\, \delta y^k}\right)_{\substack{x=a\\ y=b}}$$

şi ţinând seama că $A_{00}=f(a,b)=o$, vom aveà, în domeniul punctului $(x=a,\ y=b)$, dezvoltarea

$$(2) \quad f(x,y)=A_{10}(x-a)+A_{01}(y-b)+\frac{1}{1.2}\left[A_{20}(x-a)^2+2\,A_{11}(x-a)(y-b)+A_{02}(y-b)^2\right]+\ldots$$

în care coeficientul A_{01} este, în virtutea ipotezei, diferit de zero.

Elementul care se reduce la b când x tinde către a este dat de o serie de forma

$$(3) \qquad y-b=\alpha_1\,(x-a)+\alpha_2\,(x-a)^2+\ldots$$

ai cărei coeficienţi

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{d\,x^n}\right)_{x=a}$$

sunt determinaţi de ecuaţiunile

$$\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx}=o$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\frac{dy}{dx}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\delta f}{\delta y}\frac{d^2y}{dx^2}=o$$

. . . . . .

în cari înlocuim x prin a şi y prin b, adică de ecuaţiunile

$$(4) \quad \begin{cases} A_{01}\,\alpha_1+A_{10}=o \\ A_{01}\,\alpha_2+A_{02}\,\alpha_1^2+2\,A_{11}\,\alpha_1+A_{20}=o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Fiecărei rădăcini simple a ecuaţiunei $f(a,y)=o$ corespunde o desvoltare de forma (3) ai cărei coeficienţi se calculează în acelaş mod. Cercurile de convergenţă ale acestor serii cu centrul comun în punctul $x=a$ pot coincide sau să fie diferite.

Prelungind fiecare element din aproape în aproape, obţinem ramura corespunzătoare, care rămâne olomorfă în orice arie ce nu conţine nici un punct critic.

Observare. Dacă coeficienţii ecuaţiunei (2) sunt reali şi a, b numere reale, b fiind rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(a,y)=o$, coeficienţii α_n sunt reali; prin urmare elementul corespunzător $y=b+(x-a)\,P\,(x-a)$ este real împreună cu x.

Exemplu. Fie ecuaţiunea

$$y^3-3y+3x=o.$$

Lui $x = o$ corespund pentru y valorile distincte $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Cele trei rădăcini y sunt dar funcțiuni olomorfe în domeniul $x=o$. Pentru a obține desvoltările lor în acest domeniu, vom aplicà seria

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1} x + \frac{y''_0}{1.2} x^2 + \dots$$

în care înlocuim y_0 respectiv prin $0, \pm\sqrt{3}$ și y'_0, y''_0, ... prin valorile corespunzătoare ale derivatelor scoase din ecuațiunea dată. Calculând primii termeni, obținem

$$y_1 = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^5 + \dots$$

$$y_2 = \sqrt{3} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2!} \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 - \frac{1}{4!} \frac{35}{16} \sqrt{3}\, x^4 - \dots$$

$$y_3 = -\sqrt{3} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2!} \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{35}{16} \sqrt{3}\, x^4 - \dots$$

Rădăcina a cărei valoare inițială este egală cu zero nu conține în desvoltarea sa decât puteri impare a lui x; căci schimbând x în $-x$, una din rădăcini își schimbă semnul, sau toate își schimbă semnele. Cazul din urmă însă nu este admisibil, deoarece rădăcinile fiind funcțiuni continue de x în domeniul $x=o$, numai acea rădăcină își schimbă semnul care se anulează împreună cu x. Această rădăcină este o funcțiune impară de x.

25. *Permutarea ramurilor în domeniul unui punct critic.* Să examinăm efectul produs asupra ramurilor funcțiunei $y(x)$ când x, plecând dela un punct ordinar x_0, descrie o curbă închisă în jurul unui punct critic fără a trece prin niciunul din punctele critice.

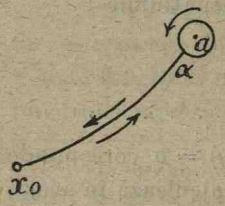

Fig. 1

Fie $x=a$ un punct critic și $y=b$ una din rădăcinile ecuațiunei $f(a, y) = o$. Putem înlocuì curba închisă printr'un contur elementar echivalent, adică printr'un drum format dintr'un cerc foarte mic descris din punctul a ca centru și dintr'o linie dreaptă sau curbă care unește punctul inițial x_0 cu un punct α al acestui cerc (fig. 1).

Fie

(1) $$y_1, y_2, \dots, y_m$$

valorile ramurilor în punctul x_0 și

(2) $$y_{1\alpha}, y_{2\alpha}, \dots, y_{m\alpha}$$

valorile ce primesc respectiv aceste ramuri în punctul α când x descrie linia $x_0\, \alpha$.

Dealungul cercului (a) fiecare ramură variază într'un mod continuu. Să considerăm ramura a cărei valoare în a este y_{1a}. După ce x descrie cercul (a), revenind la punctul a, se poate întîmplà ca această ramură să regăsească valoarea sa inițială sau nu. In cazul întâiu ramura considerată este olomorfă în domeniul $x=a$ și descriind conturul elementar $x_0\, a(a)a\, x_0$ regăsim valoarea inițială y_1. In cazul al doilea, y_{1a} se schimbă într'una din celelalte valori (2).

Fie y_{2a} valoarea în care y_{1a} se schimbă când x descrie cercul (a) în sensul pozitiv; același cerc descris în sens invers cu valoarea inițială y_{2a} va reproduce prin urmare pe y_{1a}. Dacă descrim cercul (a) în sensul pozitiv cu valoarea inițială y_{2a}, valoarea finală va fi diferită de cea inițială; căci altfel, acest cerc descris în sensul negativ ar schimbà y_{2a} în el însuși, pe când, precum am văzut, în acest sens, y_{2a} se schimbă în y_{1a}[1]). Așà dar y_{2a} se schimbă într'una din celelalte rădăcini (2). Dacă y_{2a} se schimbă în y_{1a}, atunci y_{1a} și y_{2a} se permută între ele când x descrie cercul (a); prin urmare y_1 și y_2 formează relativ la punctul a un sistem circular. Să presupunem că y_{2a} se schimbă în y_{3a}. Descriind cercul (a) cu y_{3a} ca valoare inițială, nu putem obține ca valoare finală nici y_{3a} nici y_{2a}; căci dacă ar fi așà, ar urmà ca același cerc descris în sens invers să ne dea în cazul întâiu y_{3a} și în al doilea y_{1a}, pe când valoarea finală trebuie să fie aceea care, când cercul a fost descris în sensul pozitiv, a dat pe y_{3a}, adică trebuie să obținem valoarea y_{2a}; rezultă dar că y_{3a} se va schimbà într'una din cantitățile (2) diferită de y_{2a} și y_{3a}. Dacă y_{2a} se schimbă în y_{1a}, atunci cele trei rădăcini y_{1a}, y_{2a}, y_{3a} prin urmare y_1, y_2, y_3, formează un sistem circular relativ la punctul de ramificațiune a.

Continuând în același mod, recunoaștem că după un număr n de învârtiri în jurul punctului a, $n \leqq m$, regăsim în punctul x_0 valoarea inițială y_1. Presupunând dar că dacă x descrie conturul elementar considerat de n ori după rând și în același sens, y_1 se schimbă în y_2, y_2 în $y_3, \ldots y_{n-1}$ în y_n și y_n în y_1, zicem că ramurile ale căror valori în x_0 sunt respectiv $y_1, \ldots, y_n$ formează relativ la punctul critic a un *ciclu* sau un *sistem circular* de ordinul n. Punctul critic, relativ la un ciclu de ordinul n, se numește punct de *ramificațiune de ordinul* $n-1$.

Dacă $n < m$, plecând dela x_0 cu una din rădăcinile rămase, de exemplu y_{n+1}, vom obține, relativ la același punct de

---

[1]) Două valori inițiale diferite nu pot duce în a la o singură valoare, căci a nu este punct critic.

ramificaţiune, un sistem circular format din n' ramuri diferite de cele precedente, $n+n' \leqq m$, etc.

Este evident că tot ce am zis până aici se aplică la orice punct de ramificaţiune şi că ciclele formate de ramurile funcţiunei $y(x)$ nu depind de punctul origină x_0, ci numai de punctul de ramificaţiune considerat. Când trecem dela un punct de ramificaţiune la altul, ramurile cari se permută între ele sunt în genere diferite. Putem dar enunţà propoziţiunea următoare:

Cele m ramuri ale funcţiunii $y(x)$, definită de ecuaţiunea (1), *se grupează, relativ la un punct critic oarecare, într'unul sau mai multe sisteme circulare, ale căror ordine pot fi egale sau diferite, dacă convenim a privi ca formând un ciclu de ordinul întâiu ramura care se reproduce pe sine însă-şi.*

26. *Determinarea ciclelor relative la un punct critic dat.* Inainte de a tratà cazul general, voim să examinăm două cazuri simple.

1°. Fie $y = b$ o rădăcină multiplă de ordinul n a ecuaţiunei $f(a, y) = o$. Păstrând notaţiunile de mai sus să presupunem că avem

$$A_{01} = A_{02} = \ldots A_{0,n-1} = o\ ; \quad A_{0n} \neq o,\ A_{10} \neq o.$$

Coeficientul A_{10} fiind diferit de zero rezultă că $x = a$ este o rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(x, b) = o$. Privind dar x ca funcţiune de y, vom aveà, pentru ramura x care se reduce la a când y tinde către b, o serie de forma

$$(1) \qquad x-a=(y-b)^n\left[a+a_1(y-b)+a_2(y-b)^2+\ldots\right],$$

în care $a \neq o$. Extrăgând rădăcina n^a a ambelor membre, obţinem

$$(x-a)^{\frac{1}{n}} = \beta_1(y-b) + \beta_2(y-b)^2+\ldots\ ; \beta_1 = a^{\frac{1}{n}} \neq o$$

De unde, prin inversiune,

$$(2) \quad y-b = \gamma_1(x-a)^{\frac{1}{n}} + \gamma_2(x-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots\ ; \gamma_1 = \frac{1}{\beta_1}.$$

Punctul $x = a$ este aşà dar, relativ la rădăcina $y = b$, un punct de ramificaţiune în jurul căruia se permută cele n ramuri cari devin egale cu b, când x tinde către a. Aceste ramuri sunt reprezentate prin seria (2), în care înlocuim radicalul $(x-a)^{\frac{1}{n}}$ prin cele n valori de care este susceptibil; ele formează un singur sistem circular.

2°. *Cazul când ecuaţiunea* (1) *ordonată după puterile crescânde ale lui $x-a$, $y-b$ începe cu un grup de termeni omogeni de gradul n.*

Fie

$$(3)\ f(x,y)=\frac{1}{n!}[A_{no}(x-a)^n+\frac{n}{1}A_{n-1,1}(x-a)^{n-1}(y-b)+\ldots+A_{on}(y-b)^n]+\ldots=o,$$

Putem presupune că coeficientul A_{0n} este diferit de zero. In adevăr, aplicând substituțiunea

$$x-a=\alpha x'+y', \qquad y-b=\beta x'+\gamma y',$$

coeficienții α, β, γ fiind supuși la unica condițiune

$$\alpha\gamma-\beta\neq o,$$

ecuațiunea (3) se transformă într'o ecuațiune de acelaș grad, ordonată după puterile lui x', y' în care grupul omogen de gradul cel mai mic este n. Coeficientul lui y'^n în acest grup fiind

$$\frac{1}{n!}[A_{n,o}+\frac{n}{1}A_{n-1,1}\ \gamma+\ldots+A_{on}\gamma^n],$$

este deajuns a da lui γ o valoare care să nu anuleze parenteza precedentă.

Să revenim la ecuațiunea (3), în care vom presupune $A_{0n}\neq o$ și să facem substituțiunea

$$(4)\qquad z=\frac{y-b}{x-a}$$

Ecuațiunea (3) va luà forma

$$(5)\quad f_n(z)+(x-a)f_{n+1}(z)+\ldots(x-a)^{m-n}f_m(z)\ldots=o,$$

$f_n(z)$, $f_{n+1}(z)$,... fiind polinoame de grade egale cu indicii lor. Se poate întâmplà ca rădăcinile ecuațiunei

$$(6)\qquad f_n(z)=o$$

să fie toate simple sau nu. Să considerăm mai întâiu cazul când rădăcinile c_1, c_2, ..., c_n ale acestei ecuațiuni sunt toate simple. Reprezentând prin c una din ele, vom aveà pentru elementul z care se reduce la c când x tinde către a, o serie de forma

$$z=c+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots$$

și prin urmare

$$(7)\qquad y-b=c(x-a)+a_1(x-a)^2+\ldots$$

Fiecăreia din rădăcinile c_i $(i=1,2,\ldots n)$ corespunde câte o desvoltare analoagă cu cea precedentă. Cele n ramuri cari devin egale cu b, când x tinde către a, sunt așà dar olomorfe în domeniul punctului $x=a$.

Fie acum $z=c$ o rădăcină multiplă de un ordin $k\leqq n$ a ecuațiunei (6) și să presupunem că polinomul $f_{n+1}(z)$ nu conține

factorul $z-c$. Ordonând polinoamele $f_n(z)$, $f_{n+1}(z)$,... după puterile crescânde ale lui $z-c$, ecuaţiunea (5) va luà forma

$$(8)\quad A(z-c)^k + A_1(z-c)^{k+1} + \ldots + A_{n+k}(z-c)^n - (x-a)[B + B_1(z-c) + \ldots] + \ldots = o,$$

primul coeficient A şi primul coeficient B din parenteză fiind, în virtutea ipotezei, diferiţi de zero.

De unde rezultă desvoltarea

$$x-a = \frac{A}{B}(z-c)^k + A'(z-c)^{k+1} + \ldots$$

şi, prin inversiune,

$$z-c = a_1(x-a)^{\frac{1}{\kappa}} + a_2(x-a)^{\frac{2}{\kappa}} + \ldots \quad (a_1 \neq o).$$

Prin urmare, pentru ramurile corespunzătoare y, avem desvoltarea

$$(9)\quad y-b = c(x-a) + a_1(x-a)^{\frac{k+1}{\kappa}} + a_2(x-a)^{\frac{k+2}{\kappa}} + \ldots$$

Fiecărei rădăcini multiple a ecuaţiunei (6), corespunde câte un grup de ramuri (y) formând sisteme circulare compuse din atâtea ramuri câte unităţi sunt în ordinul de multiplicitate al rădăcinii. Aşa dar cele n ramuri (y) cari se reduc la b pentru $x=a$, se grupează în diferite sisteme circulare corespunzătoare rădăcinilor multiple ale ecuaţiunei (6).

27. *Cazul general. Metoda lui Puiseux* [1]. Fie $x = a$ un punct critic căruia corespunde, între alte rădăcini, o rădăcină $y = b$ de ordinul n de multiplicitate. Făcând substituţiunea $x = a + x'$, $y = b + y'$, ecuaţiunea transformată $f(a + x', b + y') = o$ va aveà pentru $x' = o$ rădăcina $y' = o$ multiplă de ordinul n. Făcând dar în această ecuaţiune $x' = o$, exponentul termenului în y' de gradul cel mai mic va fi n. Ecuaţiunea transformată fiind ireductibilă în acelaş timp cu ecuaţiunea primitivă [2]), va conţine cel puţin un termen în x', $A x'^h$, $h \geq 1$ independent de y' şi cel puţin un termen în y', independent de x', al cărui exponent în virtutea ipotezei este n. Suprimând accentele şi păstrând simbolul f pentru membrul întâiu, ecuaţiunea ordonată după puterile crescânde ale lui y va aveà forma

$$(1)\quad f(x,y) = Ax^h + A'x^{h+1} + \ldots + (A_1 x^{\alpha_1} + \ldots)y^{\beta_1} + (A_2 x^{\alpha_2} + \ldots)y^{\beta_2} + \ldots + (B + \ldots)y^n + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = o,$$

---

[1]) V. Briot et Bouquet *Fonctions doublement periodiques* p. 42.

[2]) Dacă am aveà $f(a + x', b + y') = \varphi(x', y') f_1(x', y')$, φ şi f_1 polinoame de x', y', ar urmà să avem $f(x, y) = \varphi(x-a, y-b) f_1(x-a, y-b)$. Contra ipotezei.

în care parentezele fiind ordonate după puterile crescânde ale lui x, exponenții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ai primilor termeni din fiecare din ele sunt ≥ 1 și exponenții β din ultima sumă sunt mai mari ca n. In acelaș timp coeficientul A al lui x^h și coeficientul B a lui y^n sunt diferiți de zero. Voim să arătăm că cele n ramuri cari se anulează împreună cu x, admit desvoltări în serii de forma

$$y = a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu+\mu'} + a_2 x^{\mu+\mu'+\mu''} + \ldots ,$$

$\mu, \mu', \ldots$ fiind numere pozitive, raționale ce va trebui să determinăm.

Să facem substituțiunea

$$y = u x^{\mu} , \tag{2}$$

u fiind o nouă variabilă care nu se anulează pentru $x = o$. Ecuațiunea (1) va deveni

$$\text{A } x^h + (\text{A}_1 + \ldots) x^{\alpha_1 + \beta_1 \mu} u^{\beta_1} + (\text{A}_2 + \ldots) x^{\alpha_2 + \beta_2 \mu} u^{\beta_2} + \ldots$$
$$+ (\text{B} + \ldots) x^{n\mu} u^n + \Sigma A_{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta\mu} u^{\beta} = o. \tag{3}$$

Variabila u fiind diferită de zero pentru $x = o$, să punem $u = a_0 + u'$, a_0 fiind o constantă diferită de zero, ce va trebui să determinăm și u' o variabilă care se anulează împreună cu x. In virtutea acestei substituțiuni, termenii cari conțin x la gradul cel mai mic nu se pot află decât printre cei următori

$$\text{A}x^h, \text{A}_1 x^{\alpha_1+\beta_1\mu} u^{\beta_1}, \text{A}_2 x^{\alpha_2+\beta_2\mu} u^{\beta_2}, \ldots, \text{B}x^{n\mu} u^n .$$

Dacă facem să crească μ dela zero, exponenții lui x

$$h,\ \alpha_1+\beta_1\mu,\ \alpha_2+\beta_2\mu,\ \ldots,\ n\mu, \tag{4}$$

afară de cel dintâiu care este constant, cresc necontenit și cu atât mai repede cu cât multiplicatorul lui μ este mai mare. De unde rezultă, ținând seama de inegalitățile

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < n,$$

că pentru valori destul de mari ale lui μ, unul oarecare din numerele (4) poate întrece pe toate cele cari îl preced. Insă pentru μ foarte mic, $n\mu$ este cel mai mic număr, prin urmare făcând să crească μ dela zero, într'un mod continuu, vom întâlni neapărat o valoare $\mu = \mu_1$ pentru care $n\mu$ va deveni egal cu unul sau mai multe din numerele (4). Fie

$$\alpha_i + \beta_i \mu,\ \alpha_{i_1} + \beta_{i_1} \mu, \ldots \quad (\beta_i < \beta i_1 < \ldots < n),$$

numerele cu cari $n\mu$ devine egal; vom aveà, pentru $\mu = \mu_1$,

$$\alpha_i + \beta_i \mu_1 = \alpha_{i_1} + \beta_{i_1} \mu_1 = \ldots = n\ \mu_1.$$

De unde

$$\mu_1 = \frac{a_i}{n - \beta_i}$$

Făcând acum μ să crească dela μ_1, numărul $a_i + \beta_i \mu$, care creşte mai încet decât numerele situate la dreapta lui, va deveni mai mic decât numerele $a_{i_1} + \beta_{i_1}\mu, \ldots, n\mu$ cu cari a fost egal pentru $\mu = \mu_1$. Fie $\mu = \mu_2 > \mu_1$, cea dintâiu valoare ce întâlnim pentru care $a_i + \beta_i \mu$ devine egal cu unul sau cu mai multe din numerele (4) rămase. Fie $a_k + \beta_k \mu$ cel mai de la stânga din aceste numere; vom aveà, pentru $\mu = \mu_2$,

$$a_k + \beta_k \mu_2 = a_{k_1} + \beta_{k_1} \mu_2 = \ldots = a_i + \beta_i \mu_2,$$
$$(\beta_k < \beta_{k_1} < \ldots < \beta_i).$$

De unde

$$\mu_2 = -\frac{a_i - a_k}{\beta_i - \beta_k}.$$

Continuăm în acelaş mod până ce printre numerele cele mai mici se găseşte numărul h. Introducem astfel succesiv acele valori ale lui μ pentru cari două sau mai multe din numerele (4) sunt egale între ele şi mai mici decât toate cele rămase. *Toate aceste valori ale lui μ sunt numere raţionale.*

28. *Reprezintare geometrică care facilitează determinarea numerelor μ.* Să considerăm două axe rectangulare 0α, 0β şi să fixăm punctele ale căror coordonate (a, β) sunt exponenţii termenilor consideraţi mai sus, anume

$$(5) \qquad (h, o), (a_1, \beta_1) (a_2, \beta_2), \ldots, (o, n).$$

Cu modul acesta fiecăruia din acei termeni ai ecuaţiunei date corespunde câte unul din punctele (5).

Printr'unul din aceste puncte (a_i, β_i) să ducem dreapta

$$Y - \beta_i = -\frac{1}{\mu}(X - a_i),$$

având $-\frac{1}{\mu}$ drept coeficient unghiular; abscisa la origină a acestei drepte este

$$a_i + \beta_i \mu,$$

număr care coincide cu gradul termenului corespunzător acestui punct. De aci rezultă că dacă prin toate punctele (a, β) ducem drepte paralele cu direcţiunea $-\frac{1}{\mu}$, punctele cari se află pe aceiaş dreaptă reprezintă termeni de acelaş grad şi că dreptei a cărei abscisă la origină este cea mai mică corespund termeni de gradul cel mai mic.

Prin urmare dreapta care conţine cel puţin două puncte (a, β) şi care lasă deasupra sa (de partea opusă cu origina) toate punc-

tele cari nu se află pe dânsa, dă un grup omogen de termeni de gradul cel mai mic.

Din ceeace precede rezultă modul cum putem determină valorile ce se cuvin să luăm pentru μ.

Prin punctul (o, n) să ne închipuim o dreaptă care coincide mai întâiu cu axa 0β și care se învârtește în jurul acestui punct în sensul axei 0α, până ce întâlnește unul sau mai multe din punctele (5). In jurul ultimului punct să facem să se învârtească dreapta în același sens, până ce va întâlni unul sau mai multe puncte rămase. Continuăm astfel până ce dreapta va trece prin punctul (h, o). Formăm cu modul acesta o linie poligonală convexă, cu convexitctea spre origine. Fiecare din laturile poligonului prelungită lasă de partea opusă originei toate celelalte puncte. *Valorile căutate ale lui μ vor fi dar inversii coeficienților unghiulari, cu semnele schimbate, ai laturilor poligonului considerat.*

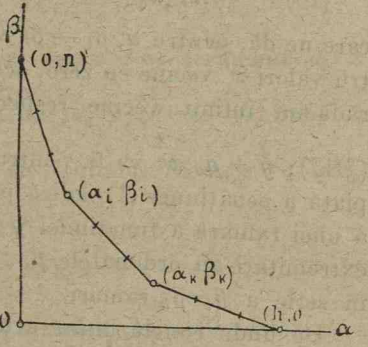

Fig. 2

Să considerăm una din aceste laturi, și fie (fig. 2)

$$(a_i, \beta_i),\ (a_{i_1}, \beta_{i_1}),\ldots\ (a_k, \beta_k)$$

grupul de puncte situate pe această latură, dispuse dela 0β spre 0α, adică $\beta_i > \beta_{i_1} > \ldots > \beta_k$.

Valoarea coeficientului μ va fi

$$(6) \qquad \mu = \frac{a_k - a_i}{\beta_i - \beta_k} = \frac{a_k - a_{i_1}}{\beta_{i_1} - \beta_k} = \ldots = \frac{q}{p},$$

$\frac{q}{p}$ fiind o fracțiune ireductibilă.

Pentru această valoare a lui μ, substituțiunea (2) devine

$$(7) \qquad y = u\, x^{\frac{q}{p}} = u\, x'^{q}, \quad x = x'^{p}.$$

Ecuațiunea (1) sau (3) va luà forma

$$(8) \qquad A\, x'^{hp} \ldots + (A_1 + \ldots)\, x'^{p\alpha_1 + q\beta_1}\, u^{\beta_1} + \ldots$$
$$+ (B + \ldots)\, x'^{qn}\, u^{n} + \Sigma\, A_{\alpha\beta}\, x'^{p\alpha + q\beta}\, u^{\beta} = o.$$

Grupând împreună termenii corespunzători laturii considerate și al căror grad

$$p\alpha_i + q\beta_i = p\alpha_{i_1} + q\beta_{i_1} = \ldots = p\alpha_k + q\beta_k$$

este mai mic decât al tuturor celorlalți termeni, ecuațiunea precedentă se va puteà scrie, după suprimarea lui $x'^{pa_i+q\beta_i}$,

$$(9) \quad A_i u^{\beta_i} + A_{i_1} u^{\beta_{i_1}} + \ldots + A_k u^{\beta_k} + x' \varphi (x', u) = o,$$

$\varphi (x', u)$ fiind un polinom de x' și u. Făcând $x' = o$ și suprimând factorul u^{β_k} [1]) obținem ecuațiunea

$$(10) \quad A_i u^{\beta_i - \beta_k} + A_{i_1} u^{\beta_{i_1} - \beta_k} + \ldots + A_k = o,$$

care ne dă, pentru u, $\beta_i - \beta_k$ valori finite și diferite de zero. Pentru valori x' vecine cu zero, ecuațiunea (9) va admite dar $\beta_i - \beta_k$ rădăcini infinit vecine respectiv cu rădăcinile ecuațiunii (10) (§ 17); $y = a_o x^{\frac{q}{p}}$ va fi, pentru x vecin cu zero, o rădăcină apropiată a ecuațiunei (1), adică primul termen al desvoltărei în serie a unei ramure a funcțiunei $y(x)$ [2]). Prin urmare latura ale cărei extremități au ordonatele β_i, β_k dă primul termen al desvoltărei în serie a $\beta_i - \beta_k$ ramuri.

De unde concluziunea următoare:

Fiecărei laturi a poligonului corespunde primul termen al desvoltărei în serie a atâtor ramuri ale funcțiunei $y(x)$, câte unități sunt în diferența dintre ordonatele extremităților sale.

Suma acestor diferențe fiind egală cu n, rezultă că *totalitatea laturilor dă primul termen al desvoltărei în serie a acelor n ramuri cari se anulează în punctul $x = o$.*

In virtutea ecuațiunilor (6) putem scrie

$$(11) \quad \begin{cases} \beta_i - \beta_k = \lambda p, \ \beta_{i_1} - \beta_k = \lambda_1 p, \ \ldots \\ a_k - a_i = \lambda q, \ a_k - a_{i_1} = \lambda_1 q, \ \ldots \end{cases},$$

λ, λ_1 fiind numere întregi pozitive. Punând

$$(12) \quad u^p = \varphi,$$

ecuațiunea (10) devine

$$(13) \quad A_i \varphi^{\lambda} + A_{i_1} \varphi^{\lambda_1} + \ldots + A_k = o.$$

La o rădăcină simplă $\varphi = \varphi_o$ a acestei ecuațiuni, vor corespunde ecuațiunei (10) p rădăcini simple date de ecuațiunea (12) în care înlocuim φ prin φ_o.

Fie a_0 una din aceste rădăcini; cele p rădăcini vor puteà fi reprezentate prin

$$a_0, \ a_0^{(1)} = a_0 e^{\frac{2q}{p} i\pi}, \ a_0^{(2)} = a_0 e^{\frac{4q}{p} i\pi}, \ \ldots, \ a_0^{(p-1)} = a_0 e^{\frac{2(p-1)q}{p} i\pi}$$

---

[1]) Nu ținem seamă de soluțiunea $u = o$, căci se caută pentru u numai valori finite și diferite de zero (§ 24).

[2]) Posibilitatea acestei desvoltări va fi stabilită prin prezenta teoremă.

Prin urmare în domeniul lui $x' = o$, ecuațiunea (9) va admite p soluțiuni de forma

$$u_k = a_0^{(k)} + x' \, P_k(x'), \quad (k = o, 1, \ldots, p-1)$$

cărora vor corespunde ecuațiunei (1), în domeniul lui $x = o$, p soluțiuni de forma

$$(14) \quad y_k = x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k)} + x^{\frac{1}{p}} P_k\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right], \quad (k = o, 1, \ldots, p-1).$$

Dacă x descrie un cerc în jurul lui $x = o$, termenul $a_0 \, x^{\frac{q}{p}}$ devine $a_0 \, e^{\frac{2qi\pi}{p}} \, x^{\frac{q}{p}} = a_0^{(1)} \, x^{\frac{q}{p}}$, termenul $a_0^{(1)} \, x^{\frac{q}{p}}$ se schimbă în $a_0^{(2)} \, x^{\frac{q}{p}}, \ldots$, termenul $a_0^{(p-1)} \, x^{\frac{q}{p}}$ se schimbă în $a_0 \, x^{\frac{q}{p}}$; adică termenii principali

$$(15) \qquad a_0 \, x^{\frac{q}{p}}, \; a_0^{(1)} \, x^{\frac{q}{p}}, \; \ldots, \; a_0^{(p-1)} \, x^{\frac{q}{p}}$$

ai seriilor (14) formează un sistem circular. In acelaș timp y_k se schimbă în

$$e^{\frac{2q}{p}i\pi} \, x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k)} + e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}}\right)\right]$$

$$= x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k+1)} + e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}}\right)\right].$$

Insă y_k trebuind să se schimbe într'una din soluțiunile y_0, $y_1, \ldots, y_{p-1}$ nu se poate schimbà decât în y_{k+1}. In adevăr, să presupunem că y_k se schimbă în y_{h+1}, $h \neq k$; va trebui să avem

$$a_0^{(h+1)} + x^{\frac{1}{p}} \, P_{h+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = a_0^{(k+1)} + e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}}\right),$$

sau

$$a_0^{(h+1)} - a_0^{(k+1)} = x^{\frac{1}{p}} \left[e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}}\right) - P_{h+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right],$$

egalitate imposibilă, căci membrul întâiu este o constantă diferită de zero și membrul al doilea tinde către zero împreună cu x. Trebuie dar să avem $h = k$, și în acelaș timp identitatea

$$P_{k+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}}\right),$$

adică y_k se schimbă în y_{k+1}. Așà dar ramurile $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ formează un singur sistem circular și se prezintă în ordinea în care se permută valorile lor principale (15).

Cele p ramuri considerate se pot reprezentà printr'o singură serie.

$$(16) \qquad y = a_0 x^{\frac{q}{p}} + A_1 x^{\frac{q+1}{p}} + A_2 x^{\frac{q+2}{p}} + \ldots,$$

în care se dă lui $x^{\frac{q}{p}}$ cele p valori de care este susceptibil.

Astfel, *la fiecare rădăcină simplă ρ a ecuaţiunei* (13), *corespunde ecuaţiunei* (1) *un sistem circular de p ramuri de forma* (16).

Dacă toate rădăcinile ecuaţiunei (13) sunt simple vor corespunde ecuaţiunei (1) $\lambda p = \beta_i - \beta_k$ ramuri de forma (16), formând λ sisteme circulare de câte p ramuri. Ramurile corespunzătoare laturei considerate sunt astfel separate de la prima aproximaţiune. Toate aceste ramuri sunt în raport cu x de acelaş ordin infinitezimal $\frac{q}{p}$.

Să presupunem că $\rho = \rho_0$ este o rădăcină multiplă de ordinul n' ($n' \leqq \lambda$) [1]) a ecuaţiunei (13); fiecare din rădăcinile ecuaţiunei (12) în care înlocuim ρ prin ρ_0, adică $a_0 e^{\frac{2qki\pi}{p}}$, $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ este rădăcină multiplă de acelaş ordin a ecuaţiunei (10); în domeniul lui $x' = o$, ecuaţiunea (9) va admite dar câte n' rădăcini u infinit vecine respectiv cu fiecare din ele. Prin urmare ecuaţiunea (1) va admite, pentru x vecin cu zero, câte n' rădăcini y a căror valoare principală este

$$a_0 e^{\frac{2qki\pi}{p}} x^{\frac{q}{p}} \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Să căutăm a separà ramurile corespunzătoare. Plecând, de exemplu, dela rădăcina a_0, să punem în ecuaţiunea (9)

$$(17) \qquad u = a_0 + y';$$

ea se va transformà într'o ecuaţiune

$$(18) \qquad f_1(x', y') = o,$$

care, pentru $x' = o$, admite o rădăcină $y' = o$ multiplă de ordinul n'. Acestei ecuaţiuni vom aplicà aceeaş metodă ca ecuaţiunei (1). Dacă ecuaţiunile analoage cu ecuaţiunea (13) au numai

[1]) Se poate întâmplà să avem $n' = \lambda = \lambda p = n$; prin urmare $p = 1$. Egalitatea $\beta_i - \beta_k = \lambda p$ devine $\beta_i - \beta_k = n$; de unde, în virtutea formulelor (11), rezultă egalitatea $\beta_i = n$, $\beta_k = o$, $a_i = o$, $a_k = nq$. Poligonul se reduce la o singură latură ale cărei extremităţi sunt punctele (o, n) (nq, o).

Ecuaţiunea (9) ia forma

$$A_i (u - a_0)^n + x \varphi(x, u) = o$$

şi cele n rădăcini infinit mici y au acelaş termen principal $a_0 x^q$.

rădăcini simple, cele n' ramuri cari se anulează împreună cu x' se vor grupà în sisteme circulare dela cea dintâiu aproximațiune.

Fie

$$(19) \qquad y' = a_1 x'^{\frac{q'}{p'}} + B_1 x'^{\frac{q'+1}{p'}} + B_2 x'^{\frac{q'+2}{p'}} + \ldots,$$

unul din aceste sisteme circulare compus din p' ramuri. Acestui sistem (y') corespunde sistemul circular

$$(20) \qquad y = u\, x'^{q} = (a_0 + y')\, x^{\frac{q}{p}}$$

$$= a_0 x^{\frac{q}{p}} + a_1 x^{\frac{qp'+q'}{pp'}} + B_1 x^{\frac{qp'+q'+1}{pp'}} + \ldots.,$$

cuprinzând pp' ramuri. In adevăr, când x se învârteşte în jurul lui $x = o$, primul termen $a_0 x^{\frac{q}{p}}$ primeşte p valori diferite; după p învârtiri primul termen îşi reià valoarea inițială, pe când cel d'al doilea se reproduce multiplicat cu $e^{\frac{2q'i\pi}{p'}}$. Aşa dar este necesar ca x să se învârtească de pp' ori în jurul lui $x = o$ pentru ca cei dintâiu doi termeni (20) să se reproducă simultan. Toți ceilalți termeni se reproduc în acelaş caz. Expresiunea (20) reprezintă dar un sistem circular (y) compus din pp' ramuri.

Dacă cele n' ramuri (y'), cari se anulează pentru $x' = o$, nu se separă în sisteme circulare dela cea dintâiu aproximațiune, vom repetà operațiunile de mai sus şi vom continuà în acelaş mod până ce vom ajunge la o ecuațiune $f_h(x^h, y^h) = o$, pentru care ecuațiunile analoage cu (13) au toate rădăcinile lor simple. Obținând astfel separațiunea sistemelor circulare ale ecuațiunei $f_h = o$, deducem separațiunea în sisteme circulare ale ramurilor $y(x)$ definite de ecuațiunea propusă (1).

Seria de operațiuni se termină neapărat. In adevăr, numărul n' (ordinul de multiplicitate al rădăcinei $y' = o$ corespunzătoare lui $x' = o$ în ecuațiunea (18)) fiind $\leqq \lambda \leqq \lambda p$, va fi $\leqq n$. După a doua operațiune dacă va fi nevoie, ecuațiunea (18) va fi înlocuită printr'o ecuațiune analoagă având o rădăcină $y'' = o$ multiplă de un ordin $n'' \leqq n'$, etc.

Avem astfel un şir de numere întregi pozitive $n, n', n'', \ldots$ cari nu cresc. Dacă nici unul din aceste numere nu este egal cu 1, va trebui ca începând dela un rang încolo, aceste numere să fie egale între ele. Să presupunem, pentru a fixà ideile, că ele sunt egale dela cel d'al doilea, adică $n' = n'' = \ldots$ Fie (α'_i, β'_i) (α'_h, β'_h) exponenții lui (x', y') cari în ecuațiunea (18) au acelaş rol

ca exponenţii $(\alpha_i \beta_i)$, (α_k, β_k) în ecuaţiunea (1). Deasemenea λ' are rolul lui λ. Egalitatea $n'' = n'$, trage după sine egalităţile

$$p' = 1,\ \beta'_i = n',\ \beta'_k = o,\ \alpha'_i = o,\ \alpha'_k = \beta'_i q' = n'q$$

şi linia poligonală corespunzătoare se reduce la o singură latură având extremităţile (o, n'), $(n'q', o)$. Cele n' ramuri ale ecuaţiunii (18), cari se anulează împreună cu x', vor aveà acelaş termen principal

$$a_1\ x'^{q'},$$

a_1 fiind rădăcina multiplă de ordinul n' a ecuaţiunei analoage cu ecuaţiunea (13) şi vor puteà fi reprezintate prin expresiunea

$$(21) \qquad y'_i = x'^{q}(a_1 + y''_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n')$$

y''_i tinzând către zero împreună cu x'.

Făcând în (18) substituţiunea

$$(22) \qquad y' = x'^{q}(a_1 + y''),$$

obţinem o ecuaţiune

$$(23) \qquad f_2(x', y'') = 0$$

între x' şi y'', căreia prin ipoteză se aplică concluziuni identice ca ecuaţiunei (18), adică cele $n'' = n'$ ramuri (y''), cari se anulează cu x', vor aveà acelaş termen principal $a_2 x'^{q''}$ şi prin urmare cele n' ramuri (y') corespunzătoare vor aveà aceiaşi primi doi termeni în desvoltarea lor şi vor puteà fi reprezintate prin

$$y'_i = a_1 x'^{q'} + x'^{q'+q''}\left[a_2 + P_i(x')\right],\ (i = 1, 2, \ldots n').$$

Continuând în acelaş mod, recunoaştem, deoarece prin ipoteză seria operaţiunilor nu se termină, că cele n' ramuri (y') considerate sunt reprezintate printr'o singură serie întreagă de x'

$$(24) \qquad y' = \mathcal{F}(x')$$

Suindu-ne la substituţiunea (2) (§ 28), în care înlocuim u prin valoarea sa (17), obţinem expresiunea

$$y_i = \left[a_0 + \mathcal{F}(x')\right] x'^{q} = \left[a_0 + \mathcal{F}(x^{\frac{1}{p}})\right] x^{\frac{q}{p}},\ (i = 1, 2 \ldots, n')$$

care reprezintă n' ramuri (y) corespunzătoare la *aceeaş valoare* a lui $x^{\frac{1}{p}}$ şi prin urmare pn' ramuri, dacă dăm lui $x^{\frac{1}{p}}$ cele p valori ale sale. Prin urmare câte n' din valorile $y(x)$ considerate coincid într'o infinitate de puncte în domeniul lui $x = o$; ceeace este imposibil, căci punctele în cari două sau mai multe ramuri

au aceeaș valoare sunt puncte izolate, ecuațiunea (1) fiind ireductibilă [1]).

In rezumat din teorema precedentă rezultă că *ramurile* $y(x)$ *cari devin egale cu un număr* b *într'un punct de ramificațiune* $x=a$, *se grupează în unul sau mai multe sisteme circulare și că ramurile aceluiaș sistem sunt reprezintate printr'o serie unică de forma*

$$(25) \qquad y-b=a_0(x-a)^{\frac{q}{p}}+a_1(x-a)^{\frac{q+1}{p}}+\ldots,$$

p reprezintând numărul ramurilor sistemului, care poate fi egal cu 1, *și q fiind un număr întreg* ≥ 1 *și prim cu p.*

29. *Valori finite ale lui x pentru cari y devine infinit.* Fie

$$(1) \qquad f(x,y)=f_0(x)y^m+f_1(x)y^{m-1}+\ldots+f_m(x)=o$$

ecuațiunea dată și $x=a$ o valoare a lui x care anulează primul coeficient $f_0(x)$. In punctul $x=a$ una cel puțin din ramurile y devine infinită. Să presupunem într'un mod general că cei dintâi n coeficienți $f_0(x),f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x)$ se anulează pentru $x=a$ și $f_n(a)\neq o$; n ramuri y vor deveni infinite. Să facem substituțiunea

$$(2) \qquad y'=\frac{1}{y};$$

ecuațiunea transformată

$$(3) \qquad f_1(x,y')=o$$

va aveà pentru $x=a$, n rădăcini $y'=o$. Cele n ramuri $y'(x)$ cari se anulează în punctul $x=a$, se grupează, în domeniul acestui punct, într'unul sau mai multe sisteme circulare. Fie

$$(4) \qquad y'=(x-a)^{\frac{q}{p}}\,P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right],\ P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a}\neq o,$$

unul din aceste sisteme. De unde rezultă

$$(5) \qquad y=(x-a)^{-\frac{q}{p}}\,P_1\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right],\ P_1\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a}\neq o,$$

P_1 fiind o serie întreagă de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ convergentă într'un cerc cu centrul în a și trecând prin punctul critic cel mai apropiat.

Așa dar ramurile cari devin infinite se grupează și ele într'unul sau mai multe sisteme circulare, ramurile unui sistem

---

[1]) Dacă exponenții n, $n'\ldots$ ar fi egali dela cel dintâiu, cele n ramuri cari se anulează în punctul $x=o$ ar coincide; ecuațiunea propusă ar fi reductibilă, de forma

$$[y-xP(x)]^n\ f_1(x,y)=o,\ f_1(o,o\neq o$$

$P(x)$ și $f_1(x,y)$ fiind polinoame.

fiind reprezintate printr'o serie de forma (5) în care *numărul termenilor cu exponenți negativi este limitat.* Punctul a se zice pol de ordinul q al ramurilor cari compun sistemul circular dat. Dacă $p=1$, ramura corespunzătoare este uniformă în domeniul punctului a și acest punct este atunci un pol ordinar al ramurei. Dacă $p>1$, punctul a este pol și punct de ramificațiune în acelaș timp pentru ramurile sistemului, sau sistemelor corespunzătoare.

30. In fine, mai rămâne de examinat cum se comportă ramurile $y\ (x)$ în domeniul punctului $x=\infty$. Pentru aceasta, făcând substituțiunea

$$x = \frac{1}{x'}, \tag{6}$$

suntem conduși a studià ramurile definite de ecuațiunea transformată

$$\varphi\ (x',\ y) = o, \tag{7}$$

în domeniul lui $x' = o$.

O soluțiune a acestei ecuațiuni, în domeniul lui $x' = o$, va fi de una din formele

$$y = b + x'^{\frac{q}{p}} \mathrm{P}\left(x'^{\frac{1}{p}}\right) \text{ sau } y = x'^{-\frac{q}{p}} \mathrm{P}\left(x'^{\frac{1}{p}}\right),$$

după cum $x' = o$ nu este pol sau este pol al ramurei considerate, presupusă ca făcând parte dintr'un sistem circular de p ramuri în cari p poate fi egal cu 1.

Revenind la variabila x, ramurile unui sistem circular compus din p ramuri, în domeniul punctului $x=\infty$, vor fi reprezintate printr'o serie având una din formele

$$y = b + x^{-\frac{q}{p}}\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x^{-\frac{1}{p}} + \mathrm{A}_2 x^{-\frac{2}{p}} + \ldots\right), \tag{8}$$

sau

$$y = x^{\frac{q}{p}}\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x^{-\frac{1}{p}} + \mathrm{A}_2 x^{-\frac{2}{p}} + \ldots\right). \tag{9}$$

Forma din urmă corespunde cazului când $x = \infty$ este un pol de ordinul q al ramurilor cari compun sistemul circular considerat.

Numărul termenilor cu exponenți pozitivi în această serie este mărginit.

31. Din tot studiul precedent rezultă că *o funcțiune algebrică este o funcțiune analitică multiformă cu un număr mărginit de ramuri, neavând în tot planul variabilei, inclusiv punctul dela* ∞, *alte singularități decât poluri și puncte de ramificațiune.* Aceste proprietăți sunt caracteristice funcțiunilor algebrice, adică:

Teoremă. Orice funcțiune analitică

$$y = f(x),$$

multiformă cu un număr limitat de ramuri, care, în tot planul, inclusiv punctul ∞, *n'are alte singularități decât poluri și puncte de ramificațiune satisface o ecuațiune algebrică.*

$$F(x, y) = o,$$

$F(x, y)$ *fiind un polinom în* x *și* y.

In adevăr, fie

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \tag{10}$$

valorile funcțiunei $y = f(x)$ într'un punct x oarecare.

Să considerăm funcțiunile simetrice

$$\Sigma y_1, \Sigma y_1 y_2, \ldots, y_1 y_2 \ldots y_m, \tag{11}$$

formate respectiv cu suma valorilor (10), cu suma produselor lor două câte două, etc.

In domeniul unui punct ordinar, fiecare ramură fiind funcțiune uniformă de x, funcțiunile (11) sunt funcțiuni uniforme în același domeniu.

In domeniul unui punct critic — fie că în acest punct ramurile sunt finite, fie că unele din ele admit acest punct ca pol — ramurile cari fac parte din același sistem circular se permută între ele, când x se învârtește în jurul acelui punct. De unde rezultă că orice funcțiune simetrică formată cu aceste ramuri, reia valoarea inițială când x revine la punctul de plecare și prin urmare este o funcțiune uniformă de x în domeniul considerat. Aceeași concluziune se aplică punctului $x = \infty$.

Expresiunile (11) sunt prin urmare funcțiuni analitice unifome neavând în tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$, alte singularități decât poluri. Ele sunt așa dar funcțiuni raționale de x.

Reprezintându-le prin

$$-\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots, (-1)^m \psi_m(x),$$

cele m valori (10) vor fi rădăcini ale ecuațiunei

$$y^m + \psi_1(x)\, y^{m-1} + \psi_2(x)\, y^{m-2} + \ldots + \psi_m(x) = o, \tag{12}$$

care definește funcțiunea algebrică $y(x)$. q. e. d.

32. *Teoremă. Polul unei ramure a ecuațiunei algebrice* [1])

$$F(x, y) = y^m + f_1(x) y^{m-1} + f_2(x)\, y^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(x)\, y + f_m = o, \tag{1}$$

este pol cel puțin al unuia din coeficienții ecuațiunei și vice-versa,

[1]) Adică a funcțiunii $y(x)$ definită de $F(x, y) = o$.

un pol al unui coeficient este pol cel puțin al uneia din ramurile funcțiunei.

Fie y_1 ramura care admite punctul a ca pol. Să scrim

$$(2)\quad F(x, y)=(y-y_1)\left[y^{m-1}+\varphi_1(x)\,y^{m-2}+\ldots+\varphi_{m-2}(x)y+\varphi_{m-1}(x)\right];$$

de unde rezultă, prin identificarea ecuațiunilor (1) și (2), egalitățile următoare:

$$(3)\quad \begin{cases} f_m(x)=-y_1\varphi_{m-1}(x), \\ f_{m-1}(x)=-y_1\varphi_{m-2}(x)+\varphi_{m-1}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_2(x)=-y_1\varphi_1(x)+\varphi_2(x), \\ f_1(x)=-y_1+\varphi_1(x). \end{cases}$$

Prin ipoteză $y_1(a)=\infty$; rezultă $f_m(a)=\infty$, afară dacă $\varphi_{m-1}(x)$ admite $x=a$ ca zero de un ordin cel puțin egal cu ordinul polului ramurei $y_1(x)$. In acest caz, avem

$$f^{(a)}_{m-1}=-y_1(a)\,\varphi^{(a)}_{m-2}$$

și, în virtutea aceluiaș raționament, rezultă $f_{m-1}(a)=\infty$ sau $\varphi_{m-2}(a)=o$, cel puțin de același ordin ca mai sus, etc. Dacă toate funcțiunile

$$\varphi^{(x)}_{m-1},\ \varphi_{m-2}(x),\ldots,\varphi_1(x)$$

au a ca zero de ordinul menționat, rezultă egalitatea

$$f_1(a)=-y_1(a),$$

prin urmare $f_1(x)$ are același pol ca $y_1(x)$.

Reciproca teoremei este evidentă, căci dacă, de exemplu, coeficientul $f_k(x)$ are polul $x=a$, unul cel puțin din termenii sumei $\Sigma\, y_1\, y_2\ldots y_k$ devine infinit pentru $x=a$ și, prin urmare una cel puțin din rădăcinile $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ devine infinită pentru această valoare a lui x.

33. *Funcțiunea algebrică definită de o ecuațiune ireductibilă este monogenă în sensul lui Weierstrass* [1]).

Fie

$$(1)\qquad f(x, y)=o$$

o ecuațiune algebrică ireductibilă de gradul m în y și

$$(2)\qquad y_1(x_0),\ y_2(x_0),\ldots,\ y_m(x_0)$$

valorile ramurilor într'un punct x_0 diferit de un punct critic. Dacă x, plecând dela punctul x_0, descrie o curbă închisă, una oarecare

[1]) Adică două elemente oarecari se pot deduce unul din celalt prin prelungire analitică.

din rădăcinile (2) se reproduce, sau se schimbă într'una din celelalte rădăcini. Voim să arătăm că, oricare ar fi valoarea inițială a ramurei corespunzătoare punctului x_0, *există drumuri închise astfel ca valoarea finală să fie una oarecare din rădăcinile* (2), *dată după voie.*

In adevăr, să presupunem că oricare ar fi drumul închis, care plecând dela x_0 revine la x_0, nu obținem decât o parte din rădăcinile (2): $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n < m)$. Este evident că în acest caz, rădăcinile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nu pot decât să se permute între ele când x descrie o curbă închisă oarecare. De altă parte, aceste rădăcini, ca ramuri ale unei funcțiuni algebrice, n'au alte singularități decât un număr limitat de poluri și de puncte de ramificațiune, prin urmare ele satisfac o ecuațiune algebrică

$$\varphi(x, y) = o \tag{3}$$

de gradul n în y. Ecuațiunea (1) admițând, oricare ar fi valoarea lui x, toate rădăcinile ecuațiunei (3), rezultă că polinomul $f(x, y)$ este divizibil cu polinomul $\varphi(x, y)$; ceeace este în contrazicere cu ipoteza că ecuațiunea (1) este ireductibilă.

Vice-versa. Dacă plecând dela punctul x_0 cu rădăcina y_1 (x_0) de exemplu, putem, prin drumuri închise convenabile, să obținem toate rădăcinile (2), ecuațiunea considerată (1) este ireductibilă. In adevăr, să presupunem că $f(x, y)$ conține ca factor un polinom $\varphi(x, y)$ de un grad $n < m$ și fie $y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)$ cele n rădăcini ale ecuațiunei $\varphi(x_0, y) = o$. Este evident că dacă plecăm dela punctul x_0 cu rădăcina $y_i(x_0)$ ca valoare inițială, nu vom puteà obține ca valoare finală decât una din rădăcinile acestei ecuațiuni, oricare ar fi drumul descris de x: ceeace este contra ipotezei. Ecuațiunea (1) este așadar ireductibilă. Polinomul $f(x, y)$ este dar ireductibil, sau o putere a unui polinom ireductibil.

34. *Observări.* 1° Să ne închipuim fixate toate punctele de ramificațiune ale funcțiunei $y(x)$ și construite contururile elementare corespunzătoare, origina fiind un punct x_0 dat, astfel ca aceste contururi să nu se taie între ele. Să ne închipuim deasemenea determinate ciclele relative la fiecare punct de ramificațiune. Să presupunem acum că plecând dela x_0 cu una din valorile corespunzătoare $y(x_0)$ ca valoare inițială, descriem o curbă închisă C care nu trece prin nici un punct de ramificațiune. Cum obținem valoarea sa finală? Pentru aceasta, considerăm contururile elementare cari prin succesiunea lor formează un drum echivalent cu C. Valoarea finală ce obținem, după ce x descrie aceste contururi elementare, este valoarea căutată. Dacă C se tae pe sine însuși,

înconjurând mai de multe ori un punct de ramificaţiune, conturul elementar corespunzător va fi descris, în sensul convenabil, de acelaş număr de ori.

2°. Dacă limităm planul (x) prin tăeturi făcute dela fiecare punct de ramificaţiune până la ∞, astfel ca ele să nu se întâlnească, fiecare ramură este funcţiune uniformă în acest plan.

CAPITOLUL III.

EXEMPLE DE FUNCŢIUNI ALGEBRICE.

35. I. Fie ecuaţiunea

$$y^3 - 3y + x = o. \tag{1}$$

Valorile lui x, cărora corespund rădăcini egale, sunt date de ecuaţiunea

$$x^2 = 4, \tag{2}$$

adică $x = \pm 2$. Lui $x = 2$ corespunde rădăcina simplă $y = -2$ şi rădăcina dublă $y = 1$. Lui $x = -2$ corespund rădăcini egale şi de semne contrarii cu acestea.

Să examinăm cum se comportă ramurile în domeniul lui $x = 2$. Ramura y, care devine egală cu -2, este olomorfă; ea este dată de seria

$$y = -2 - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{2}{3.9^2}(x-2)^2 + \ldots \quad [1] \tag{3}$$

Pentru a obţine desvoltarea ramurilor cari devin egale cu 1, să mutăm origina în punctul $x = 2$, $y = 1$, punând

$$x = x' + 2, \quad y = y' + 1.$$

Ecuaţiunea (1) devine

$$y'^3 + 3y'^2 + x' = o; \tag{4}$$

cele două ramuri y', cari se anulează pentru $x' = o$, se pot obţine efectuând inversiunea seriei

$$x'^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}\, y' \left(1 + \frac{y'}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}\, y' \left(1 + \frac{1}{2}\frac{y'}{3} + \ldots\right);$$

---

[1] $$y = -2 + \sum_{1}^{\infty}{}' a_n (x-2)^n$$

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{d x^n}\right)_{\substack{x=2 \\ y=-2}}$$

de unde rezultă

$$(5) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{-3}} x'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18} x' + \dots .$$

Revenind la variabilele inițiale, avem

$$(6) \qquad y = 1 + \frac{1}{\sqrt{-3}} (x-2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18} (x-2) + \dots .$$

Punctul $x = 2$ este așadar un punct de ramificațiune, în jurul căruia se permută cele două ramuri considerate.

In mod analog, găsim, relativ la punctul $x = -2$, ramura olomorfă

$$(7) \qquad y = 2 - \frac{1}{9}(x+2) - \frac{2}{3.9^2}(x+2)^2 + \dots$$

și cele două ramuri, cari devin egale între ele, reprezintate prin seria

$$(8) \qquad y = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} (x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18} (x+2) + \dots .$$

Să alegem ca origină a contururilor elementare punctul $x = o$, căruia corespund rădăcinile simple

$$y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = \sqrt{3}, \quad y_3^0 = -\sqrt{3}.$$

Acestor rădăcini corespund respectiv ramurile olomorfe

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3^4} x^3 + a x^5 + \dots \\ y_2 = \sqrt{3} - \dfrac{x}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{7^2} x^2 + \dots . \\ y_3 = -\sqrt{3} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{7^2} x^2 + \dots . \end{cases}$$

Să examinăm cum se comportă aceste ramuri când x descrie conturul (0, 2) sau (0, — 2).

Rădăcinile ecuațiunii (1) fiind reale pentru valorile reale x cuprinse în intervalul (— 2, + 2), rezultă că ramurile (9) sunt reale dealungul segmentului (— 2, 2) al axei reale. Ramurile y_1 și y_2 fiind pozitive pentru x pozitiv și foarte mic, păstrează același semn în intervalul (0, 2), pe când ramura y_3 este negativă în acest interval. De unde rezultă că x descriind conturul elementar (0, 2), ramurile y_1 și y_2 se permută între ele, iar ramura y_3 se reproduce. Dealungul segmentului (0, —2), ramurile y_1 și y_3 sunt negative,

iar ramura y_2 este pozitivă; conchidem că conturul $(0, -2)$ permută ramurile y_1, y_3 și reproduce ramura y_2.

Din cele ce preced rezultă că conturul $(0, 2)$ urmat de conturul $(0, -2)$ schimbă y_1^0 în y_2^0, y_2^0 în y_3^0, y_3^0 în y_1^0.

Aceleași contururi descrise în ordinea inversă, schimbă y^0_1 în y^0_3, y^0_3 în y_2^0, y_2^0 în y_1^0.

Punctul $x = \infty$ este un punct de ramificațiune, în jurul căruia se permută cele trei ramuri cari devin infinite în acest punct. Căci punând

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{1}{y'},$$

ecuațiunea (1) devine

$$y'^3 - 3x'y'^2 + x' = o.$$

Puntul $x' = o$ este un punct de ramificațiune, în jurul căruia se permută cele trei ramuri y', cari se anulează.

Pentru a obține desvoltarea lor, punem

$$x' = t^3, \qquad y' = ut.$$

Ecuațiunea transformată

$$u^3 - 3t^2u^2 + 1 = o$$

dă, pentru $t = 0$, trei valori inegale lui u; acestor valori corespund prin urmare trei ramuri u, funcțiuni olomorfe de t. Este de ajuns să calculăm una din ele. Fie aceea care, pentru $t = o$, este egală cu -1.

Găsim pentru această ramură o desvoltare de forma

$$u = -1 + t^2 + a_1 t^4 + \ldots;$$

de unde rezultă, pentru cele trei ramuri y', desvoltarea

$$y' = x'^{\frac{1}{3}}(-1 + x'^{2/3} + a_1 x'^{\frac{4}{3}} + \ldots).$$

Revenind la variabilele inițiale, cele trei ramuri, cari devin infinite pentru $x = \infty$, sunt reprezintate printr'o serie de forma

$$(10) \qquad y = -x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{-\frac{2}{3}} + b_1 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots\right)$$

Punctul $x = \infty$ este un pol de ordinul al treilea al acestor ramuri.

Se obicinueşte a numi contur elementar, relativ la punctul ∞, drumul format dintr'un cerc având o rază destul de mare, pentru ca în tot planul, exterior cercului, funcțiunea să nu aibă altă singularitate decât punctul ∞, și dintr'o rază — linie dreaptă sau

curbă — care unește un punct al cercului cu centrul său și care nu trece prin niciun punct singular. Un asemenea contur este echivalent cu totalitatea contururilor elementare descrise fiecare o singură dată într'o ordine determinată. Conturul OABCAO (fig. 3) este echivalent cu succesiunea contururilor (0, 2) și (0,— 2); prin urmare el permută valorile inițiale y_1^0, y_2^0, y_3^0 în aceeaș ordine ca aceste contururi.

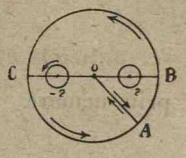

Fig. 3

Relativ la conturul elementar (0, ∞), ramurile $y(x)$ formează dar un singur sistem circular. Acest fapt se citește direct pe desvoltarea (10); căci pentru valori ale lui x, al căror modul este foarte mare, ramurile sunt aproximativ reprezintate prin expresiunea

$$(11) \qquad y = -x^{\frac{1}{3}}$$

și se permută, conform acestei expresiuni, când x descrie cercul $|x| = R$, R fiind destul de mare.

Exemplul II. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \qquad 2y^3 - (3y-2x)^2 = o.$$

Punctele critice la distanță finită sunt $x = o$ și $x = 1$. Punctului $x = 0$ corespunde rădăcina simplă $y = \frac{9}{2}$ și rădăcina dublă $y = o$; punctului $x = 1$ corespunde rădăcina simplă $y = \frac{1}{2}$ și rădăcina dublă $y = 2$. Să examinăm cum se comportă ramurile funcțiunii $y(x)$ în domeniul fiecăruia din punctele critice.

1° In domeniul punctului $x = o$, ramura olomorfă este reprezintată prin seria

$$(2) \qquad y = \frac{9}{2} - \frac{4}{3}x + ax^2 + \ldots$$

Pentru a găsi termenii principali ai desvoltării ramurilor cari se anulează, să punem

$$y = u\,x.$$

Ecuațiunea (1) devine, suprimând factorul x^2,

$$(3) \qquad 2x\,u^3 - (3u - 2)^2 = o.$$

Lui $x = o$ corespunde rădăcina dublă $u = \frac{2}{3}$. Suntem conduși a căutà desvoltarea celor două ramuri $u(x)$, cari devin egale cu $\frac{2}{3}$. Punând

$$u = \frac{2}{3} + v,$$

obţinem ecuaţiunea

$$9\rho^2 - \frac{16}{27}x - \frac{2}{3}x\rho(4+6\rho+3\rho^2) = \sigma,$$

care dă desvoltarea

$$\rho = \frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{1}{2}} + ax + bx^{\frac{3}{2}} + \ldots;$$

prin urmare

$$u = \frac{2}{3} + \frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}} + ax + \ldots$$

şi, în fine, pentru cele două ramuri y cari se anulează, avem expresiunea

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}} + \ldots \tag{4}$$

2°. In domeniul punctului $x = 1$, ramura olomorfă este de forma

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(x-1) + a(x-1)^2 + \ldots \tag{5}$$

Pentru a obţine expresiunea ramurilor cari devin egale cu 2, punem

$$x = x' + 1, \qquad y = y' + 2.$$

Ecuaţiunea (1) devine

$$3y'^2 + 16x' - 4x'(x' - 3y') + 2y'^3 = 0; \tag{6}$$

de unde se deduce

$$y' = \frac{4}{\sqrt{-3}}x'^{\frac{1}{2}} + ax' + \ldots;$$

prin urmare ramurile, cari devin egale cu 2 pentru $x = 1$, sunt date de seria

$$y = 2 + \frac{4}{\sqrt{-3}}(x-1)^{\frac{1}{2}} + a(x-1) + \ldots \tag{7}$$

Să luăm ca origină a contururilor elementare un punct x_0, situat pe axa reală între punctele 0 şi 1, foarte aproape de cel dintâiu. Conturul (x_0, o) permută între ele ramurile (4).

Conturul $(x_0, 1)$ permută între ele două ramuri ale funcţiunii y. Se pune întrebarea: dintre ramurile (2) şi (4), cari sunt cele ce se permută între ele? Pentru a răspunde la această întrebare să

observăm că rădăcinile ecuațiunii (1) sunt reale și pozitive în intervalul (0, 1). [1]) De altă parte, în virtutea acestei ecuațiuni, expresiunea $3y - 2x$ nu se poate anulă decât pentru $y = o$, prin urmare numai pentru $x = o$; de unde rezultă că $3y - 2x$ — funcțiune continuă de x — păstrează un semn invariabil pentru $0 < x < 1$.

Să reprezintăm prin y_1 ramura olomorfă (2) și să separăm ramurile (4) scriind

$$y_2 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

$$y_3 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

De unde rezultă că pentru $x > o$ și foarte mic, avem inegalitățile

$$3y_2 - 2x > o, \qquad 3y_3 - 2x < 0.$$

Prin urmare, pentru x foarte aproape de 1, avem

$$y_2 > \frac{2}{3}, \qquad y_3 < \frac{2}{3}.$$

Insă pentru $x = 1$, avem două valori $y = 2$. De unde rezultă că dintre ramurile (2) și (4), y_1 și y_2 sunt cele ce devin egale cu 2.

Conturul $(x_0, 1)$ permută așa dar aceste două ramuri și reproduce ramura y_3.

In acelaș timp putem conchide că, dacă prelungim ramurile y_1, y_2, y_3 în afară din cercul $|x| < 1$, în care ele sunt convergente, prelungirea analitică a celor dintâi două coincide cu ramurile (7), iar prelungirea celei de a treia coincide cu ramura (5).

---

[1]) In intervalul (0, 1), exceptând valorile $x = 0$, $x = 1$ ramurile $y(x)$ sunt funcțiuni olomorfe. Fie $o < x_0 < 1$ și y_0 valoarea corespunzătoare a unei ramuri; avem, în domeniul x_0

$$y - y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Coeficienții ecuațiunii (1) fiind reali, dacă y_0 este real, toate derivatele $y_0^{(n)}$ sunt reale; prin urmare ramura corespunzătoare y este reală dealungul unui segment al axei reale. De unde rezultă (I. p. 305) că ea este reală cel puțin până la punctul singular cel mai apropiat. Pentru $x_0 = \frac{1}{2}$, avem rădăcinile reale și pozitive $y = \frac{1}{2}$, $2 \pm \sqrt{3}$. Ramurile corespunzătoare sunt așă dar reale în interiorul intervalului (0, 1) și neanulându-se rămân pozitive în tot intervalul.

Punctul $x=\infty$ este un punct de ramificațiune, relativ la care avem sistemul circular (y_1, y_3, y_2) sau (y_1, y_2, y_3) după cum conturul elementar (x_0, ∞) este descris în sensul în care se succed contururile $(x_0, 1)$, (x_0, o) sau în sens invers.

Exemplul III. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \qquad y^3 - 3xy + 2x^3 = o.$$

Punctele critice sunt date de ecuațiunea

$$(2) \qquad x^3(x^3 - 1) = o, \ ^1)$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x = o, 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Cele trei din urmă se găsesc pe cercul $|x| = 1$, razele corespunzătoare făcând cu direcțiunea pozitivă a axei reale unghiuri respectiv egale cu $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

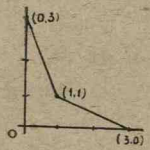

Fig. 4

Punctului $x = o$ corespunde rădăcina triplă $y = o$. Pentru a separă ramurile corespunzătoare acestui punct, să construim linia poligonală ale cărei vârfuri sunt exponenții ecuațiunii (1); obținem (fig. 4) latura $\{(0, 3), (1, 1)\}$ și latura $\{(1, 1), (3, 0).\}$

1^0. Primei laturi corespunde substituțiunea

$$y = u\, x^{\frac{1}{2}} = u\, x', \ (x = x'^2).$$

Ecuațiunea (1) devine, după suprimarea factorului x'^3,

$$(4) \qquad u(u^2 - 3) + 2x'^3 = 0.$$

Rădăcinile u diferite de zero sunt $u = \pm\sqrt{3}$. Ramurile $u(x')$ sunt așa dar olomorfe în domeniul $x' = o$. Este de ajuns a calculă

---

[1]) Eliminarea lui y între ecuațiunile

$$y^3 - 3xy + 2x^3 = 0, \quad y^2 - x = 0,$$

revine la eliminarea lui y între ecuațiunile

$$xy = x^3, \quad y^2 = x,$$

sau între

$$x^2y^2 = x^6, \quad y^2 = x.$$

Rezultatul se mai poate obține aplicând condițiunea

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = o$$

relativă la ecuațiunea $y^3 + py + q = o$.

una din ele. Găsim pentru ramura, care se reduce la $\sqrt{3}$, o desvoltare de forma [1])

$$(5) \qquad u = \sqrt{3} - \frac{1}{3} x'^3 - \frac{\sqrt{3}}{18} x'^6 + \ldots,$$

în care exponenții lui x' sunt multiplii de 3. De unde, pentru ramurile y cari se permută între ele, în domeniul $x = o$, o desvoltare a cărei formă este

$$(6) \quad y = \sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{18} x^{3+\frac{1}{2}} + \ldots + a_{n+1} x^{\frac{3n+1}{2}} + \ldots$$

2°. Celei de a doua latură a liniei poligonale corespunde substituțiunea

$$(7) \qquad y = u x^2,$$

care conduce la ecuațiunea transformată

$$x^3 u^3 - 3u + 2 = o.$$

Această ecuațiune dă ramura olomorfă

$$u = \frac{2}{3} + \frac{2^3}{3^4} x^3 + \ldots + a_n x^{3n} + \ldots,$$

căreia corespunde ramura olomorfă

$$(8) \qquad y = \frac{2}{3} x^2 + \frac{2^3}{3^4} x^5 + \ldots + a_n x^{3n+2} + \ldots$$

Să considerăm punctul critic $x = 1$. Acestui punct corespunde rădăcina simplă $y = -2$ și rădăcina dublă $y = 1$.

Cea dintâi dă ramura olomorfă

$$(9) \qquad y = -2 - \frac{1}{2}(x - 1) + \ldots$$

Pentru celelalte două ramuri, punem

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 1.$$

Ecuațiunea transformată

$$y'^3 + 3y'^2 - 3x'y' + x'(3 + 6x' + 2x'^2) = o$$

ne dă cele două ramuri cari se permută între ele:

$$y' = i x'^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x' + \ldots \qquad (i = \sqrt{-1});$$

---

[1]) Punând în ecuațiunea (4) $x'^3 = t$, obținem desvoltarea

$$u = \sqrt{3} + \Sigma\, a_n\, t^n.$$

prin urmare cele două ramuri cari se permută în jurul punctului $x = 1$ sunt date de seria

$$(10) \qquad y = 1 + i(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(x-1) + \ldots$$

Pentru a studia ramurile relative la punctul $x = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, observăm că punând

$$x = x' e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad y = y' e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

ecuaţiunea (1) nu se schimbă. Rădăcinile $y(x)$, când x descrie raza care trece prin acest punct, nu difer dar, în totalitatea lor, de rădăcinile aceleiaş ecuaţiuni, când x descrie raza care trece prin punctul $x = 1$ decât prin factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

De asemenea ecuaţiunea (1) nu se schimbă dacă punem

$$x = x' e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad y = y' e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

de unde conchidem că rădăcinile, dealungul razei care trece prin punctul $x = e^{\frac{4i\pi}{3}}$, difer, în totalitatea lor, de cele corespunzătoare razei care trece prin punctul $x = 1$, numai prin factorul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Fie a, b, c (fig. 5) punctele cari figurează respectiv valorile $x = 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}$, şi x_0 un punct situat pe axa reală între 0 şi 1, foarte aproape de $x = o$. Fie

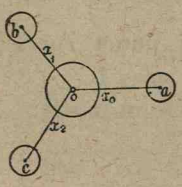

Fig. 5

$$x_1 = x_0 e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad x_2 = x_0 e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

două puncte situate pe cercul $|x| = x_0$, pe razele cercului $|x| = 1$, cari trec respectiv prin punctele b şi c. Să luăm ca origină a contururilor elementare punctul x_0. Conturul elementar relativ la punctul a are forma rectilinie obicinuită; conturul relativ la punctul b este format de arcul $x_0 x_1$ urmat de porţiunea razei $x_1 b$; conturul relativ la punctul c este format de arcul $x_0 x_1 x_2$, urmat de porţiunea razei $x_2 c$. In fine conturul elementar relativ la punctul $x = 0$ este cercul $|x| = x_0$.

Să examinăm în ce mod se permută rădăcinile y corespunzătoare punctului x_0, când x descrie fiecare din contururile elementare considerate.

Conturul $(x_0 a)$. Dealungul razei $x_0 a$, rădăcinile ecuaţiunii (1) sunt reale, două sunt pozitive şi una este negativă.

Să reprezintăm prin y_1^0, y_2^0, y_3^0 aceste rădăcini în punctul x_0, date de formulele (8) și (6):

$$(11)\quad \begin{cases} y_1^0 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2^3}{3^4}x^5 + \ldots, \\ y_2^0 = \sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2 + \ldots, \quad (x = x_0) \\ y_3^0 = -\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2 - \ldots. \end{cases}$$

Cele dintâi două sunt pozitive, cea de a treia este negativă [1]). Conturul $(x_0\, a)$ permută dar rădăcinile y_1^0, y_2^0 și reproduce rădăcina y_3^0.

Conturul $(x_0\, x_1\, b)$. Pentru a vedeà cum se comportă rădăcinile dealungul acestui contur, să căutăm mai întâi ce devin ele în punctul x_1 când x descrie arcul $x_0\, x_1$. Fie y_1', y_2', y_3' valorile în cari se schimbă respectiv rădăcinile (11), când înlocuim x prin $x_0 e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Precum am văzut mai sus, aceste valori nu difer de cele dintâi, abstracțiune făcând de ordinea lor, decât prin factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Făcând această înlocuire, obținem egalitățile următoare

$$(12)\quad y'_1 = y_1^0 e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad y'_2 = y_3^0 e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad y'_3 = y^0{}_2 e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

cari arată că, abstracțiune făcând de factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, rădăcinile y_1' și y'_3 sunt pozitive, iar rădăcina y_2' este negativă. Conturul considerat permută dar între ele rădăcinile y_1^0, y_3^0 și reproduce rădăcina y_2^0.

Conturul $(x_0\, x_2\, c)$. In punctul x_2 rădăcinile, precum s'a văzut, nu difer de rădăcinile (11), abstracțiune făcând de ordinea lor, decât prin factorul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Inlocuind în (11) x prin $x_0 e^{\frac{4i\pi}{3}}$, obținem valorile corespunzătoare ale rădăcinilor

$$(13)\quad y_1^{(2)} = y_1^0 e^{\frac{8i\pi}{3}} = y_1^0 e^{\frac{2i\pi}{3}}; \; y_2^{(2)} = y_2^0 e^{\frac{2i\pi}{3}}, \; y_3^{(2)} = y_3^0 e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

De unde rezultă că conturul considerat are asupra rădăcinilor același efect ca conturul $(x_0\, a)$; el permută rădăcinile y_1^0, y_2^0 și reproduce rădăcina y_3^0.

---

[1]) In intervalul (0, 1) rădăcinile y_1, y_2, y_3 fiind reale, distincte și diferite de zero, fiecare din ele își conservă semnul; cele cari devin egale în punctul $x = 1$ sunt cele de același semn; ele se permută în jurul acestui punct.

In fine, conturul elementar relativ la punctul critic $x = o$, adică cercul $| x | = x_0$, permută, conform egalităţilor (6), (8) şi (11) rădăcinile y_2^0, y_3^0 şi reproduce rădăcina y_1^0.

Punctul $x = \infty$ este pol al tuturor ramurilor, fără a fi punct critic.

Exemplul IV. Fie ecuaţiunea

$$y^3 - 3y^2 + 4x^4 = o. \tag{1}$$

Valorile x cărora corespund rădăcini multiple sunt date de ecuaţiunea

$$x^4 (x^4 - 1) = o.$$

Lui $x = o$ corespunde rădăcina simplă $y = 3$ şi rădăcina dublă $y = o$.

Ramura care se reduce la 3 este de forma [1])

$$y = 3 - \frac{4}{9} x^4 + a x^8 + \ldots \tag{2}$$

Pentru cele cari se anulează, facem substituţiunea

$$y = ux^2.$$

Ecuaţiunea transformată

$$x^2 u^3 - 3u^2 + 4 = o$$

dă, pentru $x = o$, valorile inegale diferite de zero, $u = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ramura care se reduce la $\frac{2}{\sqrt{3}}$ este dată de seria

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9} x^2 + a x^4 + \ldots;$$

ramura care se reduce la $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ se obţine schimbând $\sqrt{3}$ în $-\sqrt{3}$ în toţi coeficienţii seriei cari conţin acest radical.

Acestor valori ale lui u corespund două ramuri olomorfe pentru y

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} x^2 + \frac{2}{9} x^4 + \ldots \tag{3}$$

cari difer între ele prin semnul radicalului $\sqrt{3}$. Punctul $x = o$ nu este aşa dar punct de ramificaţiune.

Să examinăm cum se comportă ramurile în domeniul rădăcinilor ecuaţiunii $x^4 = 1$.

---

[1]) Punând în ecuaţiunea (1) $x^4 = t$, obţinem desvoltarea

$$y = 3 + \Sigma a_n t^n.$$

Fie x_1 (± 1, $\pm i$) una din aceste rădăcini. Inlocuind x prin $x_1 x'$ ecuațiunea (1) devine

$$y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2;$$

ea admite rădăcina simplă $y = -1$ și rădăcina dublă $y = 2$.

Să considerăm punctul $x = 1$. In domeniul acestui punct ramura olomorfă este

$$y = -1 - \frac{16}{9}(x-1) + \ldots \tag{4}$$

Pentru desvoltarea ramurilor cari devin egale cu 2, punem

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2.$$

Ecuațiunea transformată

$$y'^3 + 3y'^2 + 4x'(4 + 6x' + 4x'^2 + x'^3) = o$$

dă pentru ramurile y', cari se anulează, desvoltarea

$$y' = \frac{4}{\sqrt{-3}} x'^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Ramurile care devin egale cu 2 se permută dar între ele în domeniul punctului $x = 1$ și sunt reprezintate prin seria

$$y = 2 + \frac{4}{\sqrt{-3}}(x-1)^{\frac{1}{2}} + \ldots.. \tag{5}$$

Dezvoltările ramurilor în domeniul celorlalte trei puncte x_1 (-1, $\pm i$) se deduc respectiv din formulele (4) și (5), dacă înlocuim x prin $x_1 x'$ și considerăm domeniul $x' = 1$.

Cele patru rădăcini ale ecuațiunii $x^4 = 1$ sunt așadar patru puncte de ramificațiune, în jurul cărora se permută respectiv cele două ramuri (5) și cele corespunzătoare prin transformarea $x = x_1 x'$.

Să examinăm cum se prezintă ramurile olomorfe din domeniul $x = o$, când x descrie contururile elementare corespunzătoare celor patru puncte critice, origina acestor contururi fiind punctul $x = o$. Pentru aceasta, să observăm că rădăcinile ecuațiunii (1) sunt reale pentru x real și cuprins în intervalul $(-1, +1)$, precum și pe axa imaginară în intervalul $(-i, +i)$, două din ele sunt pozitive și una este negativă, anume: ramura (2) este pozitivă pentru toate aceste valori; dintre celelalte două, ramura al cărei primul termen este

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} x^2$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

este pozitivă pe axa reală și negativă pe axa imaginară; pe când din contra, ramura al cărei prim termen este

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} x^2$$

este negativă pe axa reală și pozitivă pe axa imaginară.

Reprezintând cele trei ramuri în această ordine prin y_1, y_2, y_3 rezultă că ramura y_1 se permută cu y_2, pe conturile $(0, 1)$, $(0, -1)$ și cu y_3 pe celelalte două contururi $(0, i)$, $(0, -i)$. Cele dintâi două contururi sunt neutre pentru ramura y_3 și cele două din urmă pentru ramura y_2.

Punctul $x = \infty$ este pol și punct de ramificațiune. Conturul elementar corespunzător, descris în sensul pozitiv în raport cu origina, permută cele trei ramuri în ordinea (y_1, y_3, y_2), precum rezultă descriind succesiv cele patru contururi elementare (1), (i), (-1), $(-i)$.

Exemplul V. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \qquad y^6 - y^5 + xy^3 - 3x^3y + 2x^4 - x^5 = 0$$

și să separăm ramurile în domeniul punctului $x = 0$. Acestui punct corespunde rădăcina simplă $y = 1$ și rădăcina $y = 0$, multiplă de ordinul al cincilea.

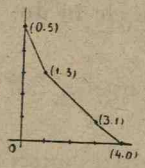

Fig. 6

Celei dintâi corespunde ramura olomorfă

$$(2) \qquad y = 1 - x + ax^2 + \ldots$$

Pentru a separa ramurile cari se anulează, construim linia poligonală aci alăturată (fig. 6).

Latura $(0, 5)$, $(1, 3)$ dă substituțiunea

$$(3) \qquad y = u x^{\frac{1}{2}} = ux', \quad (x = x'^2)$$

Ecuațiunea (1) devine, după suprimarea factorului x'^2,

$$u^3 (u^2 - 1) - x' (2x' - x'^4 - 3x'u + u^6) = 0.$$

Pentru $x' = 0$, avem două rădăcini inegale $u = \pm 1$, cărora corespund două ramuri olomorfe. Fie

$$u = 1 + \frac{1}{2} x' + \ldots,$$

una din aceste ramuri, căreia corespund ramurile y, cari se permută între ele,

$$(4) \qquad y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x + a x^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

A doua latură a liniei poligonale trece prin punctele $(1, 3)$, $(3, 1)$ $(4, 0)$; ea conduce la substituțiunea

$$(5) \qquad y = ux.$$

Ducând această expresiune în ecuațiunea (1) și suprimând factorul x^4, obținem ecuațiunea

$$(6) \qquad u^3 - 3u + 2 - x(1 + u^5 - xu^6) = o,$$

care, pentru $x = o$, se reduce la

$$u^3 - 3u + 2 = (u + 2)(u - 1).^2$$

Rădăcinei simple $u = -2$ corespunde ramura olomorfă

$$u = -2 - \frac{31}{9}x + \ldots\ldots$$

căreia corespunde, pentru y, ramura olomorfă

$$(7) \qquad y = -2x - \frac{31}{9}x^2 + \ldots$$

Pentru a separà ramurile u, cari pentru $x = o$ devin egale cu 1, punem în ecuațiunea (6)

$$u = 1 + v.$$

Ecuațiunea transformată

$$3v^2 - 2x + \text{termeni de grad mai înalt} = o$$

dă pentru v două ramuri cari se permută, cuprinse în expresiunea

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{2}} + a\,x + b\,x^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots;$$

prin urmare ramurile corespunzătoare ale funcțiunii u sunt

$$u = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{2}} + a\,x + b\,x^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

In fine, cele două ramuri y cari au rămas neseparate până aci, se permută între ele și sunt reprezintate prin seria

$$(8) \qquad y = x + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{3}{2}} + a\,x^2 + b\,x^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots$$

In rezumat, cele șase ramuri $y(x)$ ale ecuațiunii (1) se separă, în domeniul punctului $x = 0$, în două ramuri olomorfe date de ecuațiunile (2) și (7) și în patru ramuri formând două sisteme circulare reprezintate respectiv prin ecuațiunile (4) și (8).

36. *Observare.* Separațiunea ramurilor unei funcțiuni definită de o ecuațiune algebrică, în cazul când coeficienții sunt reali, constitue o metodă de studiu al curbei reprezintative în vecinătatea punctelor multiple ale ei.

Să luăm ca exemplu ecuațiunea (1) din exemplul precedent. Curba reprezintată de această ecuațiune admite origina ca punct multiplu de ordinul al patrulea. Forma ei este dată de funcțiunile

(4), (7) şi (8), cari se anulează împreună cu x. Astfel valorile apropiate ale celor două ramuri (4) $y = x^{\frac{1}{2}}$ dau arcele parabolei $y^2 = x$, situată de o parte şi de alta a axei $0x$, având axa Oy ca tangentă.

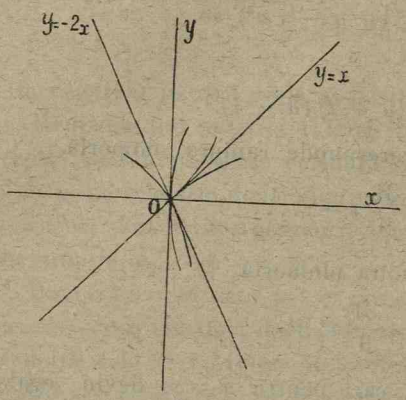

Fig. 7.

Valoarea apropiată a ramurei (7) $y = -2x$, este dreapta tangentă la parabola

$$y + 2x + \frac{31}{9} x^2 = o,$$

care în vecinătatea originei se confundă cu curba dată. Valorile apropiate ale ramurilor (8)

$$y = x + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{3}{2}}$$

reprezintă două arce tangente la dreapta $y = x$, situate de o parte şi de alta a acestei tangente. Punctul $x = y = o$ este dar pentru curbă, un punct de întoarcere de speţa I. Forma curbei în vecinătatea originei este reprezintată prin (fig. 7).

CAPITOLUL IV.

SUPRAFEŢELE LUI RIEMANN. GENERALITĂŢI [1].

37. Am construit în altă parte [2] suprafeţele Riemann pentru funcţiuni algebrice de forme particulare. Inainte de a trece la cazul general, să mai considerăm câteva exemple particulare.

1°. Fie ecuaţiunea

$$y^3 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Fiecare din punctele a, b, c este punct de ramificaţiune în jurul căruia se permută cele trei ramuri ale funcţiunii y. Reprezintând prin y_1 una din valorile lui y într'un punct x diferit de un punct critic, celelalte două vor fi $y_2 = y_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $y_3 = y_2 e^{\frac{2i\pi}{3}} = y_1 e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

Dacă plecăm dela un punct ordinar x cu valoarea iniţială y_1 şi descriem în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul unuia oarecare din punctele critice, obţinem ca valoare finală y_2; dacă cu aceiaş

[1] Pentru un studiu complect, a se vedeà tratate speciale asupra funcţiunilor algebrice; de exemplu, *Appell* et *Goursat*, Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales.

[2] I, p. 182.

valoare inițială descriem o curbă închisă care să conțină în interiorul ei două puncte critice, obținem ca valoarea finală y_3. In fine, o curbă închisă în jurul celor trei puncte critice, descrisă în același sens, readuce valoarea inițială.

Aceste observațiuni fiind făcute, să ducem o linie care să unească punctele a, b, c și care să nu se tae pe sine însăș. Dealungul acestei linii să facem o tăietură în planul (x) peste care variabila să nu treacă. In planul astfel limitat, fiecare ramură este o funcțiune uniformă, căci o curbă închisă, sau nu conține nici unul din punctele critice, sau le conține pe toate. Să reprezintăm prin t_1 porțiunea tăeturii cuprinsă între punctele a și b; prin t_2 porțiunea cuprinsă între punctele b și c și să examinăm relațiunile ce există întrevalorile funcțiunii y în două puncte infinit apropiate, de o parte și de alta a lui t_1 sau a lui t_2 (fig. 8).

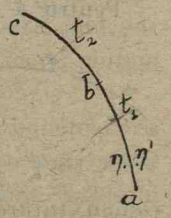

Fig. 8

Fie η valoarea lui y într'un punct pe țărmul stâng al lui t_1 și η' valoarea sa pe țărmul drept [1]; avem $\eta' = \eta\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$ căci trecerea dela primul punct la cel de al doilea se face descriind o curbă închisă în sensul pozitiv în jurul punctului a. Dacă η este valoarea lui y într'un punct pe țărmul stâng al lui t_2, valoarea sa pe țărmul drept este $\eta\, e^{\frac{4i\pi}{3}}$ sau, ceeace este tot una, $\eta\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ căci trecerea dela țărmul stâng la cel drept se face sau descriind în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul punctelor a și b, sau, în sensul negativ, o curbă închisă în jurul punctului c.

Din cele ce preced rezultă modul de a construi o suprafață Riemann pentru funcțiunea dată. Suprapunem peste planul (x) reprezintat prin P_1, două plane P_2 și P_3 și în fiecare facem câte o tăietură suprapusă peste cea din primul plan.

Raportând ramura y_k la planul P_k, $(k = 1, 2, 3)$, facem să coincidă, dealungul lui t_1, țărmul drept al lui P_1 cu țărmul stâng al lui P_2; țărmul drept al lui P_2 cu cel stâng al lui P_3; țărmul drept al lui P_3 cu cel stâng al lui P_1. Dealungul lui t_2, facem să coincidă țărmul drept al lui P_1 cu țărmul stâng al lui P_3, țărmul drept al lui P_3 cu cel stâng al lui P_2 și țărmul drept al lui P_2 cu cel stâng al lui P_1. Pe această suprafață funcțiunea y este uniformă. Trecerea dela o ramură la alta, adică dela un plan la altul se face numai străbătând tăieturile t_1, t_2 cari, pentru acest motiv, se numesc *linii*

[1] Cele două puncte η, η' sunt situate față în față: *geometricește* ele se pot considerà confundate, *analiticește* însă sunt distincte.

de trecere. Valoarea $x = \infty$ este reprezintată prin trei puncte distincte suprapuse, câte unul în fiecare foaie, punctul ∞ nefiind punct critic.

Suprafața Riemann plană poate fi înlocuită printr'o suprafață sferică cu trei foi suprapuse.

2°. Fie

$$y^3 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Pentru a obține suprafața Riemann a acestei funcțiuni, este de ajuns a introduce în suprafața din exemplul precedent o tăietură în cele trei foi între punctele critice d și ∞ și a uni țărmurile acestei tăieturi din cele trei foi în același mod, ca dealungul tăieturii t_1. Punctul ∞ este comun tuturor foilor suprafeței (fig. 9).

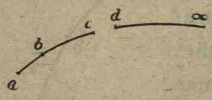

Fig. 9

3°. Fie

$$y^3 = (x-a)^2(x-b)(x-c).$$

O curbă închisă, care conține în interiorul său punctul a și unul din celelalte două puncte b sau c, descrisă într'un sens oarecare, readuce valoarea inițială a fiecărei ramuri. De unde rezultă că suprafața Riemann a acestei funcțiuni se poate deduce din suprafața considerată în exemplul 2°, suprimând din fiecare foaie tăietura dintre punctele b și c și făcând ca, dealungul tăieturii t_1 (fig. 10), țărmurile să coincidă în același mod ca în t_2 (fig. 8), adică țărmul drept al lui t_2 din P_1 să coincidă cu țărmul stâng din P_3, etc.; iar dealungul tăieturii (c, ∞) trecerea dela o foaie la alta să fie ca dealungul lui t_1 (fig. 8): țărmul drept din P_1 să coincidă cu țărmul stâng din P_2, etc.

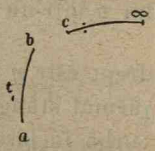

Fig. 10

4°. Fie

$$y^3 = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}.$$

Fig. 11

Se recunoaște lesne că tăietura trebuie să treacă prin punctele a, b, c, ∞ și că țărmurile porțiunilor (a, b), (c, ∞) trebuie să coincidă în același mod ca dealungul lui t_1 din exemplul 1° și coincidența țărmurilor porțiunii (b, c) este aceiași ca în acel exemplu. (fig. 11).

38. *Cazul general.* Fie ecuațiunea ireductibilă

$$(1) \qquad X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots\ldots + X_m = 0,$$

$X_0, X_1, \ldots, X_m$ fiind polinoame de x.

In exemplele particulare considerate și, în general, în cazul ecuațiunilor binoame $y^m = R(x)$, $R(x)$ fiind o funcțiune rațională de x, punctele critice fiind cunoscute, ciclele corespunzătoare la toate punctele critice sunt date imediat; pe când în cazul unei ecuațiuni algebrice de formă generală este nevoie, precum s'a văzut din metoda lui Puiseux, de operațiuni, în genere, destul de lungi pentru obținerea ciclelor. Cunoașterea tuturor ciclelor funcțiunii este necesară pentru construirea suprafeței corespunzătoare a lui Riemann. Presupunând dar că cunoaștem toate punctele critice: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ precum și ciclele corespunzătoare, putem procede în modul următor:

Facem în planul (x) o tăietură trecând prin toate punctele critice, dela punctul a_1 până la ∞, care să nu se taie pe sine însăși. In planul așà limitat, toate ramurile funcțiunii y sunt funcțiuni uniforme. Peste planul (x) reprezintat prin P_1 punem $m-1$ plane $P_2, \ldots, P_m$, efectuând în toate aceeaș tăietură ca în P_1. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ cele m valori ale lui y într'un punct ordinar x. Fiecare din aceste ramuri, raportată la planul afectat cu acelaș indice, este o funcțiune uniformă de x în acest plan. Rămâne să obținem o trecere prin continuitate dela o ramură la alta, ceeace revine a stabili legături convenabile între cele m foi.

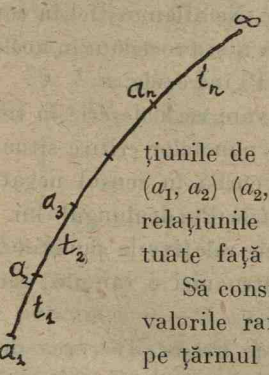

Fig. 12

Să reprezintăm prin $t_1, t_2, \ldots t_n$ porțiunile de tăieturi cuprinse respectiv între punctele (a_1, a_2) $(a_2, a_3), \ldots, (a_n, \infty)$ (fig. 12) și să examinăm relațiunile dintre valorile ramurilor în punctele situate față în față pe țărmurile acestor tăieturi.

Să considerăm prima tăietură t_1. Fie $y_k(s)$, $y_k(d)$ valorile ramurii $y_k(x)$ în puncte situate respectiv pe țărmul stâng și pe țărmul drept al acestei tăieturi. Dacă punctul a_1 nu este punct critic pentru ramura y_k, cele două valori ale acestei ramuri, dealungul lui t_1 sunt egale între ele; tăietura t_1 în planul P_k este inutilă, o suprimăm, astfel că, în punctul a_1, planul P_k este separat de celelalte plane ale suprafeței. Dacă însă ramura y_k face parte, relativ la punctul a_1, dintr'un ciclu de p ramuri, facem să coincidă țărmurile lui t_1 din planele corespunzătoare acestor ramuri, precum am procedat în exemplele particulare considerate mai sus. Aceste p plane au punctul a_1 comun și sunt distincte, în acest punct, de celelalte plane ale suprafeței. Dacă în afară de cele p ramuri considerate, există alte ramuri formând un ciclu relativ la punctul a_1 procedăm în acelaș mod cu planele corespunzătoare. Cele m plane se reunesc

astfel între ele, în punctele a_1 situate pe aceeaş verticală la planul (x), în grupuri, conform ciclelor corespunzătoare lui $x = a_1$. Două grupuri diferite n'au nici o legătură în punctul a_1. Un punct variabil x care se învârteşte în jurul lui a_1, străbătând tăietura t_1, rămâne numai pe planele cari fac parte din acelaş grup cu planul iniţial.

Inainte de a trece la tăieturile t_2, t_3... să reamintim propoziţiunea următoare [1]: In planul (x) din care suprimăm toate tăieturile, un drum închis conţinând în interiorul său un număr de puncte critice, descris în sensul pozitiv dela un punct x_0, este echivalent cu drumul format de contururile elementare corespunzătoare acelor puncte critice, descrise în acelaş sens din punctul x_0 ca origină. Ordinea în care aceste contururi sunt descrise trebue să fie aceea în care o rază vectoare cu origina în x_0, învârtindu-se în sensul pozitiv, întâlneşte punctele critice considerate.

Din această propoziţiune rezultă că din cunoştinţa ciclelor relative la punctele $a_1, a_2, \ldots, a_i$ conchidem ordinea în care ramurile se permută când x descrie o curbă închisă în jurul acestor puncte şi prin urmare, relativ la tăietura t_h $(h = 2, 3, \ldots n-1)$, fiind dată o ramură y_k pe ţărmul drept al acestei tăieturi, se poate deduce ramura cu care ea coincide pe ţărmul stâng. Ne aflăm astfel în condiţiuni analoage ca relativ la prima tăietură t_1 şi procedăm în acelaş mod în ceeace priveşte legătura planelor P_k între ele.

In ce priveşte ultima tăietură t_i, observăm că a descrie în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul tuturor punctelor critice situate la distanţă finită, revine a descrie aceeaş curbă în sensul negativ în jurul punctului ∞. Legătura între planele P_k dealungul lui t_n se poate dar determină ţinând seama de ciclele relative la punctul ∞. Dacă punctul ∞ nu este punct critic pentru nici o ramură, tăietura t_n se suprimă din toate planele.

Tăieturile $t_1, t_2, \ldots t_n$ se numesc *linii de trecere*. Trecerea dela o ramură la alta a funcţiunii se obţine dacă străbatem una din aceste linii şi numai atunci. Convenim că nu există legătură între două foi ale suprafeţei dealungul unei linii de trecere.

Suprafaţa astfel construită este suprafaţa T a lui Riemann, pentru funcţiunea algebrică definită de ecuaţiunea generală (1). Ea poate fi înlocuită prin o suprafaţă sferică formată din m foi suprapuse, rezultând din proiecţiunea pe o sferă a foilor plane, după metoda cunoscută. [2]; legăturile între aceste foi corespund legăturilor foilor plane.

---

[1] I, p. 178.
[2] I, p. 52.

O suprafață T se poate forma în diferite moduri. Liniile de trecere pot fi drepte sau curbe. Putem reuni între ele punctele critice în diferite moduri, prin urmare introduce linii de trecere diferite. In orice caz, însă, toate foile suprapuse sunt legate între ele, adică se poate trece dela o foaie oarecare la alta oarecare fără a eși din suprafață. Căci, dacă una din foile P_k ar fi fără legătură cu celelalte foi, ar rezultà ca dela ramura corespunzătoare acestei foi să nu putem trece la nici una din celelalte ramuri; ceeace este în contradicțiune cu ipoteza că ecuațiunea (1) este ireductibilă. Suprafața lui Riemann corespunzătoare unei ecuațiuni algebrice este așadar o suprafață conexă.

Din construcțiunea suprafeții T rezultă:

1°. Fiecărui punct al suprafeții corespunde un sistem unic (x, y);

2°. Funcțiunea y definită de ecuațiunea (1) se comportă pe T ca o funcțiune uniformă; orice drum dus dela un punct la altul, fără a trece printr'un punct critic, conduce la aceeaș valoare a funcțiunii.

3°. Dacă unui punct x_0 corespunde o rădăcină multiplă y_0 de un ordin μ, fără ca acest punct să fie de ramificațiune, sistemul (x_0, y_0) reprezintă pe T μ puncte confundate în cari foile corespunzătoare se ating, fără a fi legate între ele în domeniul acestui punct. Punctul (x_0, y_0) este un punct multiplu al suprafeții cu foi separate.

39. *Exemple.* Să formăm suprafețe Riemann pentru ecuațiunile I—IV, considerate în capitolul precedent.

I. $$y^3 - 3y + x = o.$$

Fie y_1, y_2, y_3 ramurile olomorfe în domeniul $x = o$ și P_1, P_2, P_3 planele la cari se raportează respectiv aceste ramuri. Ciclul relativ la punctul critic $x = 2$ este (y_1, y_2), cel relativ la punctul $x = -2$ este (y_1, y_3). Obținem suprafața T, făcând în planele P_1, P_2 o tăietură dealungul axei reale dela $+2$ la ∞ și în

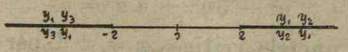

Fig. 13

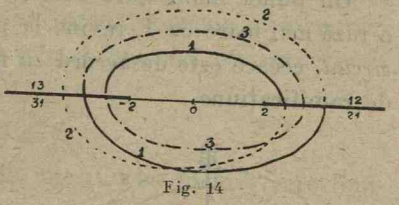

Fig. 14

planele P_1, P_3 o tăietură dealungul aceleiaș axe dela -2 la $-\infty$ și facem să coincidă țărmul stâng al tăieturii dintr'un plan cu țărmul drept al tăieturii din celalalt plan și viceversa (fig. 13), Trecerea între planele P_1 și P_2 se face dealungul tăieturii comune, tot astfel între planele P_1 și P_3. Trecerea dela P_2 la P_3 sau vice-versa se face prin intermediul planului P_1. Un drum care conține în interiorul său punctele ± 2 nu se poate închide decât înconjurând origina de

trei ori. Plecând dela un punct situat într'un plan, acest drum trece dela un plan la altul, străbătând liniile de trecere respective, până revine pe planul inițial la punctul dela care am plecat (fig. 14)

II. $2y^3 - (3\,y - 2\,x)^2 = o.$

Ciclul relativ la punctul critic $x = 1$ este (y_1, y_2), cel relativ la $x = o$ este (y_2, y_3). Obținem suprafața T a ecuațiunii date, făcând dela 1 la ∞ o tăietură comună planelor P_1, P_2 și, dela O la $-\infty$, o tăietură comună planelor P_2, P_3 (fig. 15).

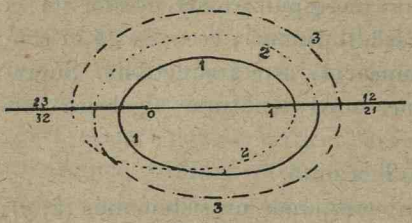

Fig. 15

III. $y^3 - 3\,x\,y + 2\,x^3 = o$

Ciclul relativ la punctul $x = o$ este (y_2, y_3); cele relative la punctele a și c cuprind ramurile y_1, y_2; ciclul relativ la punctul b este (y_1, y_3). Contururile elementare fiind, în ordinea pozitivă (a), (b), (c), (O), obținem suprafața T în modul următor: prelungim până la ∞ razele Oa, Ob, Oc și facem tăieturi dealungul acestor prelungiri, astfel ca tăieturile cari pleacă dela punctele a și c să fie comune planelor P_1, P_2 și tăietura care pleacă dela punctul b să fie comună planelor P_1, P_3. In fine introducem între Oa și Oc o tăietură dela O la ∞, comună planelor P_2, P_3 (fig. 16).

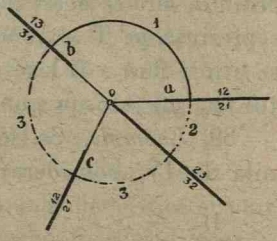

Fig. 16

Un punct mobil care descrie un cerc cu centrul în origină, cu o rază mai mare ca 1, revine la punctul de plecare după *un singur circuit*, ceeace este de accord cu faptul că punctul ∞ nu este punct de ramificațiune.

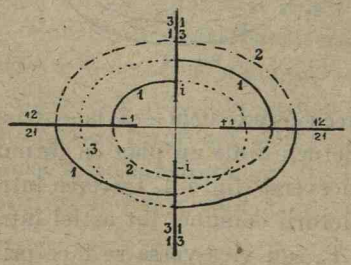

Fig. 17

IV. $y^3 - 3y^2 + 4\,x^4 = o.$

Punctele critice $x = \pm 1$ permută ramurile y_1, y_2; punctele $x = \pm i$ permută ramurile y_1, y_3. Obținem suprafața T făcând pe axa reală tăieturile $(+1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ comune planelor P_1, P_2 și pe axa imaginară tăieturile $(+i, +\infty)$, $(-i, -\infty)$ comune planelor P_1, P_3 (fig. 17).

CAPITOLUL V

VII. FUNCȚIUNI UNIFORME PE SUPRAFEȚELE LUI RIEMANN.

40. Fie

$$F(x, y) = o \tag{1}$$

o ecuațiune algebrică ireductibilă de gradul m în raport cu y. Se numește *punct analitic* (x, y) un sistem format dintr'o valoare a lui x și din una din rădăcinile corespunzătoare ale ecuațiunii (1). Să reprezintăm prin T suprafața cu m foi a lui Riemann corespunzătoare acestei ecuațiuni. Din definițiunea suprafeței rezultă că între punctele ei și între punctele analitice există o corespondență biunivocă, exceptând punctele critice în domeniul cărora ramurile y se grupează în mai multe sisteme circulare. Dacă, de exemplu, valorilor $x = a$, $y = b$, a și b satisfăcând ecuațiunea $F(a, b) = o$, corespund $\mu > 1$ cicle, punctul de ramificațiune corespunzător va reprezintà μ puncte diferite ale suprafeței, fiecare fiind comun ramurilor cari se permută între ele. Aceste puncte numite vârfuri ale ciclelor corespunzătoare, fiind în număr limitat, putem, în virtutea corespondenței biunivoce, să figurăm punctele analitice (x, y) pe suprafața T.

41. *Definițiune. Domeniul unui punct pe suprafața T.* Fie $x = a$ un punct ordinar al suprafeței T. Numim domeniu al punctului a totalitatea punctelor situate pe foaia acestui punct, satisfăcând inegalitatea

$$|x - a| \leqq r,$$

r fiind un număr pozitiv destul de mic.

Să presupunem acum că punctul $x = a$ este un punct critic în jurul căruia se permută p ramuri. Numim domeniu al punctului a totalitatea punctelor situate pe cele p foi, cari trec prin acest punct, satisfăcând inegalitatea

$$|x - a| \leqq r,$$

r fiind un număr pozitiv destul de mic. Curba închisă care limitează acest domeniu înconjoară dar punctul a de p ori.

Să facem substituțiunea

$$x - a = x'^{p} \tag{2}$$

și să figurăm variabila x' pe un plan diferit. Când x se învârtește în sensul pozitiv de p ori în jurul punctului a, x' se învârtește odată în acelaș sens în jurul punctului $x' = o$. Fie C curba închisă care limitează pe suprafața T domeniul punctului a și C' curba

corespunzătoare în planul x' . Aceste două curbe, precum și ariile ce ele limitează se corespund punct cu punct; exceptând punctul $x = a$, $x' = o$, fiecare arie este transformata conformă a celeilalte.

42. Fie $z = f(x)$ o funcțiune uniformă pe suprafața T sau, ceeace este tot una, o funcțiune uniformă $\varphi(x, y)$ de punctul analitic (x, y). Să căutăm forma desvoltării în serie a funcțiunii în domeniul unui punct al suprafeței.

Fie (a, b) un punct analitic în domeniul căruia funcțiunea $\varphi(x, y)$ este olomorfă; vom aveà în domeniul acestui punct (§ 11).

$$\varphi(x, y) = P(x-a,\ y-b). \tag{3}$$

Dacă $b = \infty$, înlocuim $y - b$ prin $\frac{1}{y}$ și avem în domeniul punctului (a, ∞),

$$\varphi(x, y) = P\left(x-a, \frac{1}{y}\right). \tag{4}$$

Să presupunem că funcțiunea $\varphi(x, y)$ admite punctul (a, b) ca punct singular izolat, pol sau punct singular esențial, vom aveà în domeniul acestui punct.

$$\varphi(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta} (x-a)^{\alpha} (y-b)^{\beta}, \tag{5}$$

α și β primind valori întregi, pozitive și negative.[1]) Dacă $b = \infty$, expresiunea precedentă se înlocuește prin ceà următoare

$$\varphi(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta} (x-a)^{\alpha} y^{-\beta}. \tag{6}$$

Pentru a obține desvoltarea funcțiunii $f(x)$ corespunzătoare desvoltărilor precedente ale funcțiunii $\varphi(x, y)$, trebuie să înlocuim, în fiecare din ele, ramura y prin desvoltarea sa corespunzătoare punctului analitic considerat.

1°. Să presupunem că punctul $x = a$ al suprafeței T nu este punct critic pentru ramura y care devine egală cu b în acest punct. Dacă b este finit, avem în domeniul lui $x = a$,

$$y - b = P_1(x-a), \tag{7}$$

---

[1]) Funcțiunea $\varphi(x, y)$ este, în virtutea ecuațiunii $F(x, y) = o$, o funcțiune de o singură variabilă; de unde rezultă că polul (a, b), definit de egalitatea $P_0(x-a, y-b)\,\varphi(x, y) = P(x-a, y-b)$, este punct izolat. Dacă unul cel puțin din exponenții α, β primește o infinitate de valori întregi negative, punctul (a, b) este punct singular esențial al funcțiunii $\varphi(x, y)$. Acest punct poate fi izolat sau nu; îl presupunem izolat.

$P_1(x-a)$ fiind o serie întreagă care se anulează pentru $x = a$. In cazul când $b = \infty$, punctul $x = a$ este pol al ramurii considerate. Fie μ ordinul acestui pol; avem

$$\frac{1}{y} = (x-a)^{\mu} P_2(x-a), \tag{8}$$

$P_2(x-a)$ fiind o serie întreagă diferită de zero în punctul $x = a$. Făcând în egalitățile (3) și (4) respectiv substituțiunea (7) sau (8), obținem, pentru funcțiunea $z = f(x)$, expresiunea unică

$$f(x) = \mathcal{P}(x-a), \tag{9}$$

valabilă pe suprafața T în domeniul punctului $x = a$.

Egalitățile (5) și (6) conduc, în virtutea aceleași substituțiuni, la expresiunea

$$f(x) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} A_n (x-a)^n, \tag{10}$$

ν fiind un număr întreg pozitiv finit sau infinit.

2°. Să presupunem acum că punctul $x = a$ al suprafeței T este un punct de ramificațiune de ordinul $p - 1$. Vom avea, în domeniul acestui punct,

$$y - b = P_1\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \tag{11}$$

sau

$$\frac{1}{y} = (x-a)^{\frac{q}{p}} P_2\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \qquad \left[P_2(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_a \neq 0, \tag{12}$$

q fiind un număr întreg pozitiv, după cum ramura y are în punctul $x = a$ o valoare finită b sau este infinită în acest punct. Inlocuind în egalitățile (3) și (4) respectiv $y - b$ și $\frac{1}{y}$ prin valorile (11) și (12), obținem pentru $f(x)$ o expresiune având forma unică

$$f(x) = P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right] = A_0 + A_1 (x-a)^{\frac{1}{p}} + \ldots + A_n (x-a)^{\frac{n}{p}} + \ldots \tag{13}$$

Egalitățile (5) și (6) conduc deasemenea la expresiunea

$$f(x) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} A_n (x-a)^{\frac{n}{p}} \tag{14}$$

ν fiind un număr întreg pozitiv, finit sau infinit.

Dacă $a = \infty$, înlocuim în formulele precedente $x - a$ prin $\frac{1}{x}$.

43. Din cele ce preced rezultă că o funcţiune

$$f(x) = \varphi(x, y),$$

uniformă pe suprafaţa T, corespunzătoare ecuaţiunii (1), nu are alte puncte de ramificaţiune decât acelea ale funcţiunii y definită de acea ecuaţiune şi numărul valorilor sale corespunzătoare unei valori x, este egal cel mult cu gradul ecuaţiunii. Ordinul unui punct de ramificaţiune al funcţiunii $f(x)$ este de asemenea cel mult egal cu ordinul lui y; el poate fi nul.

Exemplu

$$F(x, y) = y^3 - x = 0,$$

$$f(x) = \varphi(x, y) = y^6 + y^3 + x.$$

Funcţiunea $\varphi(x, y)$ se reduce la $x^2 + 2x$, funcţiune întreagă; punctul de ramificaţiune $x = 0$ al lui y este punct ordinar pentru funcţiunea $f(x)$.

44. Vom zice că punctul de ramificaţiune $x = a$ este un *zero* de ordinul μ al funcţiunii $f(x)$, dacă seria (13) se anulează în acest punct şi dacă puterea cea mai mică a lui $(x - a)$ este $(x-a)^{\frac{\mu}{p}}$; de asemenea vom zice că $x = a$ este un *pol* al funcţiunii $f(x)$ de ordinul μ, dacă în seria (14) avem $\nu = \mu$. Aceste definiţiuni se justifică prin aceea că în punctul de ramificaţiune a al suprafeţei T, p ramuri se anulează sau devin infinite, fiecare de acelaş ordin $\frac{\mu}{p}$: zerurile sau polurile suprapuse în acel punct constitue un zero sau pol de ordinul $p\frac{\mu}{p} = \mu$. Ele se mai justifică în modul următor:

Dacă avem

$$f(x) = (x-a)^{\frac{\mu}{p}} P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \quad P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a} \neq 0,$$

şi facem substituţiunea

$$x - a = x'^p,$$

obţinem

$$f(x) = f(a + x'^p) = x'^{\mu} P(x') \quad (\mu \gtrless 0).$$

Punctului $x = a$ corespunde punctul $x' = 0$, care este, pentru funcţiunea transformată, un zero sau pol de ordinul μ.

Dacă în seria (14) $\nu = \infty$, adică dacă numărul termenilor cu exponenţi negativi este nelimitat, punctul a se zice *punct singular esenţial* al funcţiunii $f(x)$.

Derivând seriile (13) și (14) se recunoaște că un punct de ramificațiune al funcțiunii este punct de ramificațiune de același ordin al derivatei. Avem de observat că, pe când în domeniul unui punct care nu este de ramificațiune, derivata este continuă în același timp cu funcțiunea, nu este totdeauna astfel în domeniul unui punct de ramificațiune.

Fie, de exemplu

$$f(x) = A_0 + A_q (x-a)^{\frac{q}{p}} + A_{q+1} (x-a)^{\frac{q+1}{p}} + \ldots, \quad q < p, \; A_q \neq 0;$$

de unde

$$f'(x) = \frac{1}{p}\left[q A_q (x-a)^{\frac{q}{p}-1} + (q+1) A_{q+1} (x-a)^{\frac{q+1}{p}-1} + \ldots\right];$$

derivata admite dar punctul $x = a$ ca pol de ordinul $p - q$.

45. Integrala unei serii întregi de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ este o serie de aceeași formă. Să presupunem că punctul de ramificațiune a de ordinul $p-1$ este în același timp un punct singular al funcțiunii $f(x)$ și fie, într'un mod general, în domeniul acestui punct,

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (x-a)^{\frac{n}{p}};$$

de unde integrala nedefinită

$$(16) \qquad \int f(x)\, dx = C + A_{-p} \log (x-a) + p \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{n+p} (x-a)^{\frac{n+p}{p}},$$

suma Σ raportându-se la toate valorile întregi pozitive și negative ale lui n, exceptând valoarea $-p$. Să facem ca x să descrie, în sensul pozitiv, în jurul punctului a, o curbă închisă Γ, situată în domeniul acestui punct și care să nu conțină în interiorul său altă singularitate nici alt punct critic decât punctul a. In descrierea acestei curbe pe suprafața T, x se învârtește de p ori în jurul lui a, toți termenii seriei își reiau valorile inițiale și $\log (x-a)$ se reproduce mărit cu $2pi\pi$. Avem dar

$$\int_\Gamma f(x)\, dx = 2pi\pi A_{-p}.$$

Prin analogie cu definițiunea reziduului unei funcțiuni uniforme pe planul simplu al variabilei, numim *reziduu* al funcțiunii $f(x)$, relativ la un punct singular, care este în același timp punct de ramificațiune, expresiunea $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(x)\, dx$.

Avem aşadar, pentru reziduul corespunzător, valoarea

$$(17) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} f(x)\,dx = p\,A_{-p}.$$ [1]

Dacă $A_{-p}=0$, seria integrată este de aceeaş formă cu seria propusă. Dacă punctul de ramificaţiune a de ordinul $p-1$ este un pol de un ordin $q<p$, avem totdeauna $A_{-p}=0$.

In domeniul punctului $x=\infty$, dacă acest punct est punct singular izolat şi de ramificaţiune de ordinul $p-1$, avem, într'un mod general

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, x^{-\frac{n}{p}};$$

de unde, integrând ambele membre în sensul negativ, în raport cu $x=0$, dealungul unei curbe închise C pe suprafaţa T, în exteriorul căreia nu se găseşte nici un punct singular situat la distanţă finită, avem, pentru reziduul corespunzător punctului $x=\infty$,

$$(18) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{C} f(x)\,dx = -p\,A_p.$$

Această expresiune arată că reziduul relativ la punctul ∞ poate fi diferit de zero şi în cazul când acest punct nu este singular; pe când, relativ la un punct situat la distanţă finită, diferit de un punct singular, reziduul este totdeauna nul.

Corolar. Fie

$$(19) \quad f(x)=(x-a)^{\frac{q}{p}}\,P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \qquad P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a}\neq 0,$$

q fiind un număr întreg pozitiv sau negativ. Avem, în domeniul punctului $x=a$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{q}{p}\,\frac{1}{x-a} + \mathcal{P}\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]$$

şi prin urmare, în virtutea formulei (17),

$$(20) \qquad \underset{x=a}{\mathcal{R}}\frac{f'(x)}{f(x)} = q;$$

---

[1]) Obţinem acelaş rezultat, aplicând substituţiunea $x-a=x'^{\frac{1}{p}}$ şi considerând integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(a+x'^{\,p}\right)\frac{dx}{dx'}\,dx',$$

Γ_1 fiind o curbă închisă în planul x' corespunzătoare curbei Γ. De unde rezultă egalitatea

$$\underset{x=a}{\mathcal{R}} f(x) = \underset{x=o}{\mathcal{R}}\left[f\left(a+x'^{\,p}\right)\frac{dx}{dx'}\right] = p\,A_{-p}.$$

adică reziduul derivatei logaritmice a funcțiunii $f(x)$, relativ la un zero sau pol al funcțiunii, dă ordinul acelui zero sau pol, fie că el este punct ordinar sau punct critic.

46. *Teorema lui Cauchy pe o suprafață a lui Riemann.* Se știe că pentru a aplică teorema fundamentală a lui Cauchy funcțiunilor uniforme într'o porțiune a planului variabilei complexe, este necesar ca conturul, dealungul căruia se consideră integrala, să limiteze acea porțiune într'un mod complect, adică să fie imposibil a trece prin continuitate dela un punct interior la un punct exterior, sau viceversa, fără a întâlni conturul. Voim să arătăm că această teoremă se aplică funcțiunilor uniforme pe suprafața lui Riemann în orice regiune în care un contur închis limitează complect o porțiune a suprafeții. Este de observat că o curbă închisă, care conține în interiorul său linii de trecere, *nu limitează* prin sine însăș o porțiune a suprafeții.

Fie $f(x)$ o funcțiune olomorfă într'o arie S a suprafeței T a lui Riemann, continuă pe curba închisă C care limitează această arie, fără a trece prin nici un punct critic. Cazurile următoare se pot prezentă:

1°. Aria S se găsește într'o singură foaie a suprafeței T. Acest caz se confundă cu cel în care variabila este figurată pe un plan simplu și prin urmare avem

$$\int_C f(x)\,dx = 0.$$

2°. Aria S este situată în mai multe foi fără a conține puncte de ramificațiune. Rezultatul este acelaș, căci forma unei linii de trecere se poate modifică astfel ca aria considerată să nu conțină nici un punct al unei asemenea linii și prin urmare să fie conținută într'o singură foaie. Ceeace rămâne neschimbat sunt punctele de ramificațiune, cari, prin ipoteză, sunt exterioare lui S.

3°. Aria S conține un singur punct critic. Fie $x = a$ un asemenea punct în jurul căruia se permută p ramuri.

Punând $x = a + x'^p$ și reprezintând prin C' curba din planul (x') corespunzătoare lui C, avem

$$\int_C f(x)\,dx = p\int_{C'} f(a + x'^p)\,x'^{p-1}\,dx' = 0.$$

4°. Aria S se întinde în mai multe foi ale lui T, conținând n puncte critice și este limitată de un contur simplu C. Descompunem S în n arii destul de mici astfel ca fiecare să conțină un singur punct critic. Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ contururile cari le limitează, și $L_1, L_2, \ldots,$

L_n, n linii care unesc respectiv un punct al fiecăreia din ele cu câte un punct al curbei C, fără a se întâlni între dânsele.

Aria limitată de curbele C, C_1, ..., C_n şi de liniile L neconţinând nici un punct critic, integrala luată dealungul conturului total este nulă. In descrierea acestui contur, liniile L sunt descrise fiecare de două ori în sens invers, prin urmare integralele corespunzătoare se distrug. Avem aşa dar egalitatea.

$$\int_C f(x)\,dx + \Sigma \int_{C_i} f(x)\,dx. = 0$$

Integralele de sub semnul Σ fiind toate nule, rezultă egalitatea

$$\int_C f(x)\,dx = o. \tag{21}$$

q. e. d.

47. Teorema subsistă dacă conturul C este format din mai multe curbe închise, limitând într'un mod complect o porţiune de suprafaţă şi integrala este luată dealungul acestor curbe în sensul pozitiv în raport cu aria limitată de conturul total. Demonstraţiune analoagă cu cea relativă la planul simplu [1]).

48. Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă într'o arie S a suprafeţei T, pusă sub forma

$$f(x) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta), \quad (x = \xi + i\eta)$$

u şi v fiind funcţiuni reale de variabilele reale ξ, η. Fie C conturul care limitează aria S fără a trece prin punctele critice. Avem inegalitatea (Riemann)

$$\int_C u\,dv > o, \tag{22}$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv. Această inegalitate a fost stabilită în cazul planului simplu [2]); ea subsistă pe suprafaţa T. In adevăr, descompunând S, în arii fără puncte critice şi în arii foarte mici conţinând un singur punct critic, putem scrie

$$\int_C u\,dv = \Sigma \int_{C_i} u\,dv,$$

integralele din ambele membre fiind luate în sensul pozitiv în raport cu ariile limitate de curbele C şi C_i. Ariile de speţa întâiu se găsesc în cazul ariilor situate în planul simplu [3]); inegalitatea

---

[1]) I, p. 223.

[2]) I. p. 232.

[3]) Printr'o mică modificare a liniei de trecere, aria se găseşte toată situată într'o singură foaie.

(22) se aplică dar acestor arii. In ce privește ariile cari conțin câte un punct critic, făcând să tindă către zero contururile corespunzătoare, integralele respective tind către zero, căci funcțiunile u și v sunt, în virtutea ipotezei, funcțiuni continue în aria S. De unde rezultă inegalitatea (22).

49. *Teorema reziduurilor.* Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă într'o arie S a suprafeței T, având în această arie un număr limitat de puncte singulare $a_1, a_2, \ldots, a_n$, indiferent dacă acest puncte sunt de ramificațiune sau nu. Fie C conturul care limitează această arie, contur format din una sau mai multe curbe închise cari nu trec prin puncte singulare sau de ramificațiune. Să izolăm punctele singulare respective prin curbe închise $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cari să nu se întâlnească între ele. In aria limitată de curba C și de aceste curbe, funcțiunea $f(x)$ fiind olomorfă, avem, aplicând teorema lui Cauchy,

$$\int_C + \int_{c_1} + \int_{c_2} + \ldots + \int_{c_n} = 0;$$

sau, schimbând sensul integrațiunilor după curbele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ avem

$$\int_C f(x)\,dx = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \ldots + \int_{c_n}$$

Reprezentând prin A_k reziduul lui $f(x)$ relativ la singularitatea a_k avem

$$\int_{c_k} f(x)\,dx = 2i\pi A_k;$$

prin urmare

$$\int_C f(x)\,dx) = 2i\pi\,(A_1 + A_2 + \ldots + A_n). \tag{23}$$

Teorema lui Cauchy, asupra reziduurilor, subsistă dar pe suprafața T în aceleași condițiuni ca pe planul simplu.

50. *Corolar.* Fie x_0 *și* x două puncte situate pe suprafața T și L, L′ două drumuri cari unesc aceste puncte fără a trece prin puncte singulare sau puncte critice (fig. 18). Dacă aceste drumuri împreună formează un contur care limitează o porțiune de suprafață, în interiorul căreia se găsesc punctele singulare $a_1, \ldots, a_n$ avem

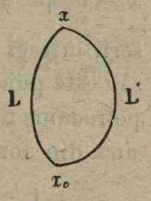

Fig. 18

$$\int_{x_0 L' x} f(x)\,dx = \int_{x_0 L x} f(x)\,dx + 2i\pi\,(A_1 + \ldots + A_n).$$

51. *Teoremă. Suma reziduurilor unei funcțiuni uniforme, care pe toată suprafața* T *are un număr limitat de singularități, este nulă.*

In adevăr, să ne închipuim suprafața T sferică și să izolăm, prin curbe închise, toate punctele singulare, precum și punctul ∞, din fiecare foaie a suprafeței. In suprafața rămasă după exclusiunea acestor puncte, funcțiunea fiind olomorfă, rezultă că suma integralelor

$$\int_{c_i} f(x)\,dx,$$

luate după toate aceste curbe, descrise în același sens, este nulă. Ceeace demonstră teorema.

52. Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă într'o arie S a suprafeței T, neavând în această arie alte singularități decât poluri. Se presupune că conturul C nu trece prin puncte singulare și critice și prin nici un zero al funcțiunii. In acest caz integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{24}$$

luată în sensul pozitiv, este, în virtutea formulei (20) (§ 45) și a egalității (23) (§ 49), egală cu diferența dintre suma ordinelor zerurilor și suma ordinelor polurilor funcțiunii cuprinse în aria S. Cu alte cuvinte, *integrala* (24) *este egală cu diferența dintre numărul zerurilor și numărul polurilor funcțiunii cuprinse în* S, *fiecare zero și fiecare pol fiind socotit de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate.*

53. *Funcțiuni raționale pe suprafața* T. O funcțiune rațională pe suprafața T, sau de punctul analitic (x, y) este de forma

$$z = \frac{Q_1(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{25}$$

$Q_1(x, y)$ și $Q(x, y)$ fiind polinoame de x și y, aceste două variabile fiind legate între ele prin ecuațiunea (1). In domeniul unui punct $x = a$ pe suprafața T, numărătorul și numitorul se desvoltă în serii întregi de $(x-a)$ sau de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ după cum punctul a nu este sau este punct de ramificațiune de ordinul $p-1$. Câtul celor două polinoame nu poate dar aveà, în domeniul punctului $x = a$, decât una din formele următoare

$$\begin{cases} z = (x-a)^{\mu} P(x-a), & \left[P(x-a)\right]_{x=a} \neq o, \\ z = (x-a)^{\frac{\mu}{p}} P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], & \left[P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]\right]_{x=a} \neq o, \end{cases} \tag{26}$$

μ fiind un număr întreg, pozitiv negativ sau nul. Numărul termenilor

cu exponenți negativi este dar mărginit. Dacă $a = \infty$, înlocuim în formele precedente $x - a$ prin $\frac{1}{x}$. De unde rezultă că într'un punct oarecare al suprafeței T, funcțiunea z este olomorfă sau admite acest punct ca pol.

O funcțiune rațională pe suprafața T *nu admite dar alte singularități decât poluri.*

54. *Vice-versa. Orice funcțiune uniformă* z, *care pe toată suprafața sferică* T *n'are alte singularități decât poluri, este o funcțiune rațională de* x *și* y.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ramurile funcțiunii algebrice y definită de ecuațiunea (1) și $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ramurile funcțiunii $z = f(x)$ corespunzătoare ramurilor y. Să considerăm cele m sume

$$z_1 y_1^k + z_2 y_1^k + \ldots\ldots + z_m y_m^k, \quad (k = 0, 1 \ldots, m-1).$$

Când x descrie o curbă închisă oarecare în planul său, termenii acestor sume nu pot decât să se permute între ei: fiecare din aceste sume este dar, în virtutea ipotezei, o funcțiune uniformă de x, neavând în tot planul inclusiv punctul ∞, alte singularități decât poluri și prin urmare ele sunt funcțiuni raționale de x, pe cari le reprezintăm prin $R_k(x)$:

$$(27) \quad z_1 y_1^k + z_2 y_2^k + \ldots + z_m y_m^k = R_k(x), \quad (k = 0,1 \ldots m-1).$$

Să considerăm determinantul

$$(28) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{m-1} & y_2^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Două oarecari din ramurile $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nefiind identice, determinantul D nu este identic nul. Soluțiunile $z_1, z_2, \ldots z_m$ ale sistemului de ecuațiuni lineare (27) se prezintă dar sub formă de câturi a doi determinanți. Fie câtul

$$z_1 = \frac{D_1}{D},$$

în care avem

$$(29) \quad D_1 = \begin{vmatrix} R_0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ R_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{m-1} & y_2^{m-1} & y_3^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Determinantul D este o funcţiune simetrică de rădăcinile y ale ecuaţiunii $F(x, y) = o$ şi prin urmare o funcţiune raţională de x. Determinatul D_1 este o funcţiune raţională de x şi raţională şi simetrică de ramurile $y_2, \ldots, y_m$. Aceste ramuri sunt însă rădăcini ale ecuaţiunii

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = o;$$

prin urmare D_1 este o funcţiune raţională de coeficienţii acestei ecuaţiuni, adică o funcţiune raţională de x şi de y_1. Ramura z_1 este aşadar o funcţiune raţională de x şi y_1; ceeace vom scrie

$$z_1 = R(x, y_1) = \frac{Q_1(x, y_1)}{Q(x, y_1)}, \tag{30}$$

$Q_1(x, y_1)$ şi $Q(x, y_1)$ fiind două polinoame de x şi y_1. Această relaţiune subsistă pentru toate sistemele (y_i, z_i), $(i = 1, 2, \ldots m)$; căci prin prelungirea analitică a ramurii y_1, obţinem succesiv celelalte ramuri y_i, cărora corespund ramurile z_i ale funcţiunii z. Avem aşa dar, pentru funcţiunea z, relaţiunea

$$z = R(x, y). \tag{31}$$

55. *Teoremă. Funcţiunea raţională* $R(x, y)$ *se poate pune sub forma unui polinom de* y *de gradul* $m - 1$ *cu coeficienţi raţionali de* x. Pentru a demonstrà această teoremă să multiplicăm ambii termeni ai fracţiunii (30) cu produsul $Q(x, y_2) \ldots Q(x, y_m)$. Numitorul devine o funcţiune simetrică întreagă de ramurile $y_1, y_2, \ldots, y_m$ şi numărătorul o funcţiune simetrică întreagă de $y_2, y_3, \ldots, y_m$. Rezultă pentru numitor o funcţiune $\psi(x)$ raţională de x şi pentru numărător o funcţiune $\varphi(x, y_1)$ raţională de x şi raţională şi întreagă în raport cu y_1:

$$R(x, y_1) = \frac{\varphi(x, y_1)}{\psi(x)}.$$

Prin prelungirea analitică a ramurii y_1 se conchide că această relaţiune subsistă pentru toate ramurile funcţiunii $R(x, y)$. Avem aşadar

$$R(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x)}$$

De altă parte, ecuaţiunea $F(x, y) = o$, de gradul m în raport cu y, permite să se exprime puterile $y^m, y^{m+1}, \ldots$ prin polinoame de gradul $m - 1$ în y, ai căror coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de x. De unde rezultă forma

$$R(x, y) = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_{m-1} y^{m-1}, \tag{32}$$

coeficienţii $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$ fiind funcţiuni raţionale de x.

56. Aplicând teorema reziduurilor (§ 49) funcțiunilor raționale pe suprafața T, în același mod ca în cazul funcțiunilor raționale în planul (x)[1], conchidem:

I. *Suma reziduurilor unei funcțiuni raționale $f(x)$ pe toată suprafața T este nulă.*

II. Derivata logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$ fiind o funcțiune rațională pe suprafața T, suma tuturor reziduurilor sale pe această suprafață este nulă. Cu alte cuvinte, *numărul zerurilor unei funcțiuni raționale pe suprafața T este egal cu numărul polurilor sale, fiecare zero sau pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate.*

57. Numim *ordin* al unei funcțiuni raționale $R(x, y)$, de punctul analitic (x, y), numărul polurilor sale, fiecare pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate. Fie N acest ordin. Diferența

$$R(x, y) - C,$$

C fiind o constantă arbitrară, are aceleași poluri ca funcțiunea $R(x, y)$; prin urmare este de același ordin, adică funcțiunea rațională $R(x, y)$ de ordinul N primește o valoare arbitrară oar ecare în N puncte ale suprafeței T, printre cari unele pot coincide.

58. *O funcțiune olomorfă pe suprafața T este constantă.* Fie $z = f(x)$ o funcțiune olomorfă pe toată suprafața T și $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ramurile acestei funcțiuni corespunzătoare aceleiași valori x. Funcțiunile simetrice

$$\Sigma z_1,\ \Sigma z_1 z_2,\ \ldots;\ z_1 z_2 \ldots z_m.$$

sunt funcțiuni uniforme de x, olomorfe, în virtutea ipotezei, pe tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$; ele sunt așa dar cantități constante.

Funcțiunea z satisface dar o ecuațiune algebrică cu coeficienți constanți și prin urmare ea însăș este o constantă.

CAPITOLUL VI

FUNCȚIUNI RAȚIONALE PE O SUPRAFAȚĂ T CU DOUĂ FOI

59. Să considerăm cazul când suprafața T este formată din două foi, adică când ecuațiunea algebrică $F(x, y) = o$ este de gradul

[1] I. p. 260.

al doilea în raport cu y. Putem presupune ecuațiunea de forma binoamă [1]) și fie

$$(1) \qquad y^2=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

n fiind un număr par sau impar ≥ 3. O funcțiune rațională R (x, y) se pune sub forma

$$(2) \qquad z=\frac{P(x)+yQ(x)}{R(x)},$$

P, Q, R fiind polinoame de x, pe cari le putem presupune fără factori comuni. Fie x_0 un zero de un ordin a al numitorului, diferit de un punct critic și y_0 valoarea corespunzătoare a lui y. Unul cel puțin din punctele (x_0, y_0), $(x_0, -y_0)$ este pol de ordinul a al funcțiunii z, căci dacă nici unul din aceste puncte n'ar fi pol, ar trebui să avem egalitățile

$$P(x_0)+y_0Q(x_0)=o, \quad P(x_0)-y_0P(x_0)=o,$$

de unde ar rezultà $P(x_0)=o$, $Q(x_0)=o$, adică polinoamele P, Q, R ar aveà un factor comun, ceeace este contra ipotezei.

Dacă x_0 coincide cu unul din punctele critice a_i și $P(a_i)\neq o$, ordinul polului este $2a$. Dacă $P(a_i)=o$, ordinul polului este $2a-1$ [2]).

Să observăm că un punct x_0 care anulează numitorul, poate anulà numărătorul fără a anulà polinoamele P și Q, căci putem aveà una din egalitățile

$$P(x_0)+y_0\,Q(x_0)=o, \quad P(x_0)-y_0\,Q(x_0)=o,$$

nu însă amândouă, precum am văzut mai sus. Intr'unul din aceste cazuri, expresiunea (2) se prezintă sub formă nedeterminată;

---

[1]) O ecuațiune de forma

$$y^2+2by+c=o,$$

b și c fiind două polinoame de x, se aduce la forma binoamă dacă punem

$$y+b=\eta.$$

[2]) In domeniul (a_i), punând $R(x)=(x-a_i)^a R_1(x)$, avem

$$z=(x-a_i)^{-a}\left[A_0+A_1(x-a_i)^{\frac{1}{2}}+\ldots.\right]$$

sau punând $x-a_i=x'^2$

$$z=x'^{-2a}(A_0+A_1x'+\ldots)$$

$$A_0=\frac{P(a_i)}{R_1(a_i)}, \quad A_1=\frac{Q(a_i)}{R_1(a_i)},$$

$P(a_i)$ și $Q(a_i)$ nu sunt nuli în acelaș timp.

nedeterminarea dispare, dacă înlocuim y prin desvoltarea sa în domeniul punctului (x_0, y_0) sau $(x_0, -y_0)$ în care numărătorul se anulează și desvoltăm funcțiunea z în domeniul acestui punct. Unul din aceste puncte fiind pol de un ordin oarecare pe o foaie, este dar, pe cealaltă foaie, pol de un ordin mai mic, sau nu este pol, sau chiar poate fi un zero. [1])

60. *Dacă numărul punctelor de ramificațiune este mai mare ca* 2, *nu există funcțiune rațională pe suprafața T, al cărei ordin să fie mai mic ca* 2.

In adevăr, dacă funcțiunea n'are nici un pol la distanță finită, numitorul R (x) trebuie să fie o constantă, căci altmintrelea un zero al lui R(x) este, precum am văzut, un pol al funcțiunii. In acest caz, funcțiunea este de forma

$$z = P(x) + y\,Q(x). \tag{3}$$

Dacă polinomul Q (x) este identic nul, punctele $x = \infty$, $y = \pm\infty$ sunt poluri, fiecare de un ordin egal cu gradul polinomului P (x). Dacă P (x) este identic nul, ordinul polului $x = \infty$ este dat de produsul $[y\,Q(x)]_{x=\infty}$. Dacă nici unul din aceste polinoame nu este identic nul, punctul $x = \infty$ este pol cel puțin pe una din cele două foi ale lui T și ordinul acestui pol nu poate evident fi mai mic decât $\frac{n}{2}$, dacă n este par $(n = 4, 6, \ldots)$, sau mai mic decât n, dacă n este impar $(n = 3, 5, \ldots)$ [2]).

---

[1]) Exemplu:

$$z = \frac{1 + a\,x + b x^2 + y\,(1 + x)}{x^2}, \quad y = \sqrt{1 + x}.$$

Punctul $x = o$, $y = 1$ este pol de ordinul al doilea.
In domeniul punctului $x = o$, $y = -1$, avem

$$z = \frac{a - 2 + \left(b - \frac{3}{2}\right) x - x^2 + \ldots}{x}$$

Dacă $a \neq 2$, acest punct este pol de ordinul întâi; dacă $a = 2$, avem

$z_0 = b - \frac{3}{2} \neq o$ sau $= o$, după cum b este $\neq \frac{3}{2}$ sau $= \frac{3}{2}$.

[2]) In cazul $n = 2k$, avem, în domeniul (∞),

$$y = x^k\,(A_0 + A_1 x^{-1} + \ldots);$$

în cazul $n = 2k + 1$, avem, în acelaș domeniu

$$y = x^{k+\frac{1}{2}}\,(A_0 + A_1 x^{-\frac{1}{2}} + \ldots) = x'^{2k+1}\,(A_0 + A_1 x'^{-1} + \ldots), \quad (x = x'^{-1}).$$

O funcţiune raţională de ordinul cel mai mic posibil, când numărul punctelor de ramificaţiune este mai mare decât 2, are forma

$$z = a + \frac{b}{x - x_0}, \tag{4}$$

a şi b fiind două constante. Dacă x_0 este diferit de un punct critic, punctele (x_0, y_0), (x_0, y_0) sunt poluri de ordinul întâiu; dacă x_0 este punct critic, punctul (x_0, o) este pol de ordinul al doilea.

Din tot ce precede rezultă că o funcţiune raţională pe o suprafaţă T cu două foi şi cu mai mult decât două puncte de ramificaţiune, este *cel puţin de ordinul al doilea.*

q. e. d.

61. Dacă avem *două* puncte de ramificaţiune, punctul ∞ fiind sau nu unul din aceste puncte, este posibil a formă funcţiuni raţionale pe suprafaţa T, având un singur pol de ordinul întâiu, la distanţă finită sau infinită.

Exemple.—1°. Fie ecuaţiunea

$$y^2 = a^2 x^2 + 2bx + c = a^2 (x - \alpha)(x - \beta); \tag{1}$$

funcţiunea

$$z = A(ax + y) + B, \tag{2}$$

A şi B fiind două constante arbitrare, admite pe o singură foaie unicul pol $x = \infty$ de ordinul întâiu. Deasemenea, funcţiunea

$$z = A + B\frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{3}$$

admite unicul pol $(x_0, -y_0)$, x_0 fiind un punct oarecare al suprafeţei T şi y_0 una din cele două valori corespunzătoare ale lui y. Dacă punctul de ramificaţiune $x = a$, $y = o$ este pol de ordinul întâiu funcţiunea are forma

$$z = A + B\frac{y}{x - a}. \tag{4}$$

2°. Fie ecuaţiunea

$$y^2 = x\ ; \tag{5}$$

funcţiunile

$$z = A + B\frac{y}{x},\ z = A + By \tag{6}$$

admit ca pol de ordinul întâiu, cea dintâiu punctul $x = o$, cea de a doua punctul $x = \infty$.

In toate exemplele precedente putem dispune de unul din coeficienții A, B pentru ca z să aibă un zero dat.

In fine, observăm că în cazul a două puncte critice, variabilele x și y se pot exprimă într'un mod rațional cu ajutorul unei variabile auxiliare convenabile și prin urmare o funcțiune rațională oarecare de (x, y) devine, în acest caz, o funcțiune rațională de o singură variabilă.

Astfel în exemplul 1°, punând $y=(x-a)t$, obținem expresiunile

$$x = \frac{a\,t^2-\beta}{t^2-1}\,,\quad y = \frac{(a-\beta)}{t^2-1}t.$$

In exemplul 2°, avem

$$x=\frac{1}{t^2}\,,\qquad y=\frac{1}{t}\,.$$

62. *Exemple de funcțiuni raționale.*

Exemplul I. Fie dată ecuațiunea

$$y^2 = 3\,x^2 + 1 \tag{1}$$

și funcțiunea

$$z = \frac{2\,x^2 + x\,y}{x-1}\,. \tag{2}$$

Să căutăm polurile și zerurile acestei funcțiuni.

1°. Pentru $x = 1$, ecuațiunea (1) dă $y = \pm 2$.

In domeniul punctului $x = 1$, $y = 2$, avem, pentru ramura y, desvoltarea

$$y = 2 + \frac{3}{2}\,(x-1) + \frac{3}{16}\,(x-1)^2 - \ldots,$$

căreia corespunde, pentru z, desvoltarea

$$z = \frac{4}{x-1} + \frac{15}{2} + a\,(x-1) + \ldots$$

Punctul $(x = 1,\ y = 2)$ este așa dar un pol de ordinul întâiu al funcțiunii z, cu reziduul 4.

In domeniul $(x = 1,\ y = -2)$, avem pentru y o desvoltare egală cu cea precedentă, însă de semn contrar,

$$y = -2 - \frac{3}{2}\,(x-1) - \frac{3}{16}\,(x-1)^2 - \ldots$$

Ducând această desvoltare în expresiunea (2), obținem

$$z = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}\,(x-1) + a\,(x-1)^2 + \ldots$$

Punctul $(x=1,\ y=-2)$ este așa dar un punct ordinar al funcțiunii z.

2°. Punctului $x = \infty$, pe foaia determinată de $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \sqrt{3}$, corespunde desvoltarea

$$y = \sqrt{3}\, x\left(1 + \frac{1}{6x^2} + \ldots\right);$$

de unde, pentru z,

$$z = (2+\sqrt{3})(x+1) + \left(2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots$$

Punctul ∞ pe foaia considerată este un pol de ordinul întâiu, cu reziduul $-\left(2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$.

Punctului $x = \infty$, pe foaia determinată de $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$, corespunde aceiaş desvoltare în care $\sqrt{3}$ este înlocuit prin $-\sqrt{3}$. Valoarea corespunzătoare a lui z este

$$z = (2-\sqrt{3})(x+1) + (2 - \frac{7\sqrt{3}}{6})\frac{1}{x} + \ldots$$

Punctul $x = \infty$ pe a doua foaie este pol de ordinul întâiu cu reziduul $-\left(2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$.

Suma reziduurilor 4, $-\left(2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right), -\left(2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$ ale polurilor este nulă, conform teoremei generale (§ 56).

Zerurile funcţiunii z sunt determinate de sistemul de ecuaţiuni

$$y^2 = 3x^3 + 1, \quad x(2x+y) = o,$$

cari dau sistemele următoare de valori:

$$x = o,\ y = \pm 1; \quad x = 1,\ y = -2; \quad x = -1,\ y = 2.$$

Sistemul $x = 1$, $y = -2$ dă $z = \frac{1}{2}$. Să examinăm celelalte sisteme.

In domeniul punctului $x = o$, avem

$$y = \pm(1+3x^2)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \ldots\right).$$

Ducând aceste valori în expresiunea (2), obţinem respectiv desvoltările

$$z = -x(1 + 3x + \ldots),$$

$$z = x\left(1 + \frac{1}{2}x + \ldots\right).$$

Punctele $x = o$, $y = \pm 1$ sunt zeruri de ordinul întâiu. Înlocuind în expresiunea (2) x prin -1, avem

$$z = -1 + \frac{1}{2} y.$$

In domeniul $x = -1$, ramura y a ecuațiunii (1) care se reduce a 2, este dată de desvoltarea

$$y = 2 - \frac{3}{2} (x+1) + \frac{3}{16} (x+1)^2 + \ldots;$$

de unde rezultă, pentru z, expresiunea

$$z = \frac{3}{4} (x+1) \left[-1 + \frac{1}{8} (x+1) + \ldots \right].$$

Punctul $x = -1$, $y = 2$ este un zero de ordinul întâiu. Numărul zerurilor este egal cu al polurilor conform teoremei (§ 56).

Exemplul II. Să considerăm ecuațiunea

$$y^2 = x^4 - 1 \tag{1}$$

și funcțiunea

$$z = \frac{x^3 + xy}{x - 1}. \tag{2}$$

1°. Pentru a obține desvoltarea acestei funcțiuni în domeniul punctului $x = o$, să punem $x = 1 + t$; cele două ramuri $y(t)$ vor fi date de seria

$$y = t^{1/2} (2 + \frac{3}{2} t + at^2 + \ldots).$$

Ducând aceste valori în ecuațiunea (2), obținem

$$z = \frac{1}{t} (1 + 2t^{1/2} + 3t + \frac{7}{2} t^{\frac{3}{2}} + \ldots),$$

sau

$$z = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^{1/2}} + 3 + \frac{7}{2} (x-1)^{1/2} + \ldots$$

Punctul $x = 1$, $y = o$ este un pol al funcțiunii pe ambele foi; el este dublu cu reziduul 2 [1]).

---

[1]) Dacă

$$z = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^{1/2}} + C + \ldots$$

$$\mathfrak{R}_{x=1} z = p.A; \quad (p = 2) \quad (\S\ 45).$$

2°. In domeniul $x = \infty$ ecuațiunea (1) dă două ramuri infinite, uniforme, ale căror desvoltări sunt

$$\frac{y_1}{y_2} = \pm x^2\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm x^2\left(1-\frac{1}{2x^4}+\ldots\right).$$

Să considerăm ramura y_1 și să ținem seama de desvoltările

$$\frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x}+\ldots$$

$$\frac{x}{x-1} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots\ldots$$

Substituind aceste valori în expresiunea (2), obținem, pentru z, desvoltarea

$$z = 2x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots\right).$$

Punctul $x = \infty$ pe foaia suprafeții T, cu ramura y_1, este dar un pol de ordinul al doilea cu reziduul -2.

Dacă înlocuim ramura y_1, prin ramura y_2, obținem desvoltarea

$$z = \frac{1}{2x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots\right).$$

Punctul $x = \infty$ pe suprafața T cu ramura y_1 este un zero de ordinul al doilea al funcțiunii z. Reziduul corespunzător acestui punct este nul.

Zerurile funcțiunii la distanță finită sunt punctele $x = o$, $y = \pm i$. Desvoltarea funcțiunii z, în domeniul punctului $x = o$, $y = i$ este

$$z = -x[i+ix+(i-1)x^2+\ldots]$$

Desvoltarea celeilalte ramuri se deduce din cea precedentă, înlocuind i prin $-i$.

63. *Conexiunea suprafețelor T.* O suprafață T se zice *conexă* dacă două puncte oarecari ale ei pot fi unite între ele printr'o linie continuă situată pe suprafață. Cea mai simplă dintre suprafețele conexe este suprafața plană.

O suprafață plană sau sferică, formată dintr'o singură foaie, limitată de un contur simplu, adică de o curbă închisă, care poate fi descrisă printr'o mișcare continuă, se zice că este *simplu conexă*. Orice suprafață S între punctele căreia și acelea ale suprafeții plane simplu conexe se poate stabili o corespondență analitică bi-univocă se zice deasemenea simplu conexă. Conturului simplu din plan corespunde un contur simplu pe suprafața S.

O suprafață T cu *două* foi și *două* puncte de ramificațiune este simplu conexă, căci între această suprafață și o suprafață plană se poate stabili o relațiune birațională.

Să considerăm, de exemplu, suprafețele corespunzătoare ecuațiunilor

$$y^2 = x, \tag{1}$$

$$y^2 = (x - a)(x - b). \tag{2}$$

1°. Ecuațiunea (1) se poate înlocui prin cele două următoare

$$x = t^2, \quad y = t. \tag{3}$$

Figurând variabila t pe planul (t), vedem că fiecărui punct t corespunde un singur punct analitic (x, y); viceversa, fiecărui punct analitic (x, y) corespunde un singur punct

$$t = \frac{x}{y}. \tag{4}$$

2°. Ecuațiunea (2) se poate scrie

$$y = (x - b)^2 \frac{x - a}{x - b};$$

punând

$$\frac{x - a}{x - b} = t^2 \tag{5}$$

obținem ecuațiunile

$$x = \frac{bt^2 - a}{t^2 - 1}; \quad y = t(x - b) = \frac{(b - a)t}{t^2 - 1}. \tag{6}$$

și

$$t = \frac{y}{x - b},$$

cari pun în evidență corespondența bi-univocă între punctele suprafeței (2) și acelea ale planului (t).

64. *Conexiune multiplă.* Orice curbă închisă situată pe o suprafață simplu conexă, precum și orice linie interioară care unește două puncte ale conturului peste care un punct mobil al suprafeței nu trebuie să treacă, distruge conexiunea suprafeței: căci două puncte situate de o parte și de alta a unei asemenea linii, nu pot fi unite între ele printr'o linie situată pe suprafață. Această proprietate este evidentă pentru plan și prin urmare, în virtutea corespondenței biunivoce între suprafața simplu conexă și plan, ea este adevărată și pentru suprafața considerată.

Propoziționea precedentă poate fi luată ca definițiune a conexiunii simple. De unde, prin opoziționе, rezultă definițiunea

următoare: *Conexiunea unei suprafețe se zice multiplă, sau suprafața se zice multiplu conexă, dacă se poate trage o curbă închisă pe suprafață sau o linie între două puncte ale conturului, privite ca frontiere, care să nu distrugă conexiunea suprafeței.* Două puncte situate de o parte și de alta a unei asemenea curbe se pot uni între ele printr'o linie pe suprafață, fără a o străbate. Este evident că nu orice curbă închisă se bucură de această proprietate.

Exemple. 1°. Aria plană limitată de o curbă închisă C și de mai multe curbe închise C_1, C_2 ... interioare celei dintâiu, este cu conexiune multiplă. Conturul total, care limitează aria, consistă în curba exterioară și curbele interioare. Introducând liniile $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ cari unesc două puncte oarecari α, γ ale curbei C respectiv cu două puncte oarecari β, δ ale curbelor interioare (fig. 19) și privind aceste linii ca făcând parte din conturul total, conexiunea ariei nu este distrusă. Aria limitată de curbele primitive și de liniile introduse devine simplu conexă, conturul ei poate fi descris printr'o mișcare continuă.

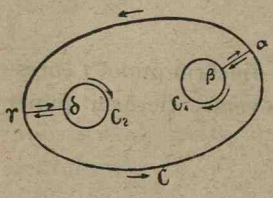

Fig. 19

2°. Să considerăm, ca al doilea exemplu, o suprafață Riemann cu două foi și patru puncte de ramificațiune a, b, c, d, suprafață care servește de bază integralelor eliptice [1]).

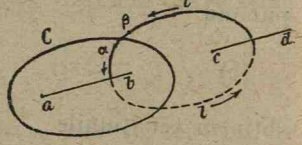

Fig. 20

Această suprafață este multiplu conexă. In adevăr, să considerăm o curbă închisă C situată pe o singură foaie, de exemplu, pe foaia întâiu și cuprinzând în interiorul ei linia de trecere ab și fie α, β două puncte situate de o parte și de alta a curbei C (fig. 20).

---

[1]) Ecuațiunea corespunzătoare este

(1) $$y^2 = A\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d).$$

Dacă unul din punctele critice este la infinit, membrul al doilea este de gradul trei. Se poate trece dela un caz la celalalt printr'o transformare birațională. Astfel substituțiunea

(2) $$x-d = \frac{1}{t},\ y = \frac{\eta}{t^2}$$

reduce ecuațiunea (1) la forma

(3) $$\eta^2 = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

Viceversa, formulele

$$t = \frac{1}{x-d},\ \eta = \frac{y}{(x-d)^2}$$

transformă ecuațiunea (3) în ecuațiunea (1).

Aceste două puncte se pot uni între ele printr'o linie l care străbate liniile de trecere ab și cd fără a întâlni curba C.[1]) O a doua curbă închisă care ar înconjură aceleași puncte critice a, b, sau care ar înconjură celelalte două puncte c, d ar rupe conexiunea suprafeții, precum lesne se recunoaște.

Observare. Între o suprafață T cu conexiune multiplă și o suprafață formată dintr'o singură foaie nu există corespondență analitică biunivocă. Căci, dacă o asemenea corespondență ar există, ar urma ca unei curbe închise a suprafeții T, care nu distruge conexiunea ei, să corespundă pe a doua suprafață o curbă închisă care să nu distrugă conexiunea acestei suprafețe. Ceeace este imposibil.

65. Să privim curba C (fig. 20) ca frontieră a suprafeței considerate, sau să efectuăm o tăietură dealungul acestei curbe. Suprafața astfel transformată este conexă, precum am văzut, dar nu este simplu conexă; căci o a doua tăietură C', făcută după o curbă închisă care conține în interiorul ei punctele critice b și c, nu distruge conexiunea suprafeței (fig. 21). De aci înainte, orice tăietură făcută dealungul unei curbe închise ar distruge conexiunea suprafeței. Suprafața transformată prin introducerea tăieturilor C și C' este dar simplu conexă. Tăieturile C și C' se întâlnesc într'un singur punct O; amândouă împreună, adică cele patru țărmuri ale lor, formează un contur care poate fi descris printr'o mișcare continuă și prin urmare este un contur simplu. Pentru a face conturul mai vizibil, să lărgim puțin spațiul dintre țărmurile opuse ale tăieturilor A și B (fig. 22). Tăietura B este pe foaia întâiu, tăietura A este parte pe foaia întâiu, parte pe foaia a doua, străbătând liniile de trecere ab și cd. Țărmurile exterioare sunt figurate prin linii, respectiv puncte, mai groase decât cele interioare. Sensul în care conturul este descris este indicat prin săgeți. Țărmurile opuse sunt descrise în sensuri inverse.

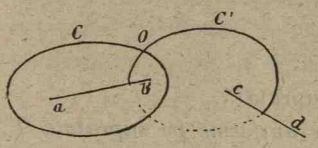

Fig. 21

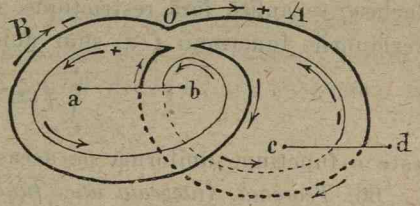

Fig. 22

Este important de fixat pentru fiecare tăietură direcțiunea ei, astfel ca expresiunile de țărmul stâng (+) și țărmul drept (—) să

[1]) Porțiunea plină a liniei l face parte din foaia întâi, cea punctată din foaia a doua.

fie bine definite. Sensul direct pentru conturul total poate fi luat într'un mod arbitrar; dacă însă s'a fixat sensul direct pe ţărmul unei tăieturi, acest sens este determinat pe tot conturul, care trebuie descris în acelaş sens printr'o mişcare continuă.

Dacă, de exemplu, privim pozitiv ţărmul *exterior* al lui A, vom privi pozitiv ţărmul *interior* al lui B. Acest ţărm este continuarea ţărmului + al lui A, când descriem cele două tăieturi în sensul indicat de săgeţi. Ţărmurile respectiv opuse sunt negative.

Suprafaţa limitată de ţărmurile tăieturilor A şi B, suprafaţă pe care o reprezintăm prin T', este formată din două părţi ale suprafeţii primitive T, conexe între ele: anume, o parte situată de aceeaş parte cu ţărmurile exterioare şi o parte situată de aceeaş parte cu ţărmurile interioare ale tăieturilor A şi B. Ţărmurile acestor două tăieturi constitue conturul total Γ al suprafeţei T'. Pe această suprafaţă teorema lui Cauchy relativă la integrala dealungul unei curbe închise, se aplică fără restricţiune. De unde rezultă că dacă toate reziduurile funcţiunii $f(x)$ sunt nule pe suprafaţa T, integrala

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

este o funcţiune uniformă pe această suprafaţă.

66. *Teoremă. Integrala unei funcţiuni uniforme pe suprafaţa T, luată dealungul conturului total al suprafeţii T', este nulă.*

In adevăr, cele două ţărmuri ale fiecărei tăieturi sunt descrise în sens contrar şi funcţiunea trece pe ambele ţărmuri prin aceleaşi valori, căci, prin ipoteză, ea este uniformă nu numai pe T' ci şi pe T. Integralele provenite din cele două ţărmuri se distrug între ele şi integrala totală este nulă.

q. e. d.

CAPITOLUL VII

INTEGRALE ELIPTICE

I. REDUCEREA LA ELEMENTE SIMPLE. GENERALITĂŢI

67. Fie $f(x)$ un polinom de gradul trei sau patru fără factori multipli şi $R\left(x, \sqrt{f(x)}\right)$ o funcţiune raţională de x şi de $\sqrt{f(x)}$. Numim *integrală eliptică* o integrală de forma

$$\int R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) dx. \text{ [1]}$$

---

[1]) Dacă $f(x)$ este de gradul patru şi a este o rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$, substituţiunea $x - a = \frac{1}{t}$ transformă integrala în alta în care polinomul de

Acest nume se datoreşte faptului că lungimea unui arc de elipsă se exprimă printr'o integrală de această speţă.

O funcţiune raţională de x şi de $\sqrt{f(x)}$ se poate pune sub forma

$$R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) = \frac{A + B f(x)}{C + D\sqrt{f(x)}},$$

A, B, C, D fiind polinoame de x. Multiplicând ambii termeni ai fracţiunii prin $C - D\sqrt{f(x)}$, putem scrie

$$R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) = \frac{M}{P} + \frac{N}{P}\frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

M, N, P fiind polinoame de x. Avem aşa dar

$$\int R\left(x, \sqrt{f x}\right) dx = \int \frac{M}{P} dx + \int \frac{N}{P}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Lăsând la o parte prima integrală din membrul al doilea, care, fiind integrala unei funcţiuni raţionale de x, se exprimă printr'o funcţiune raţională şi prin logaritmi de funcţiuni raţionale, să considerăm cea de a doua

$$\int \frac{N}{P}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Fracţiunea raţională $\frac{N}{P}$, descompusă într'o funcţiune întreagă şi în fracţiuni simple, dă loc la integrale de forma

$$P_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

şi

$$Q_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{f(x)}}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Să presupunem $f(x)$ de gradul patru şi fie

$$(1) \qquad f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4.$$

Avem

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\sqrt{f(x)}\right) = n x^{n-1}\sqrt{f(x)} + \frac{1}{2}\frac{x^n f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{(n+2)a_0x^{n+3} + 2(2n+3)a_1x^{n+2} + 6(n+1)a_2x^{n+1} + 2(2n+1)a_3x^n + na_4x^{n-1}}{\sqrt{f(x)}}$$

---

sub radical este de gradul al treilea. Viceversa, dacă $f(x)$ este de gradul al treilea şi a un număr oarecare diferit de o rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$, aceiaş substituţiune realizează transformarea inversă.

Integrând ambele membre, obținem formula recurentă

$$(2)\quad (n+2)\,a_0 P_{n+3} = x^n \sqrt{f(x)} - 2\,(2n+3)\,a_1 P_{n+2} - 6\,(n+1)\,a_2 P_{n+1} + 2\,(2n+1)\,a_3 P_n + n a_4 P_{n-1}.$$

Dând lui n valorile 0, 1, 2, ... vedem că toate integralele P_n, începând dela $n = 3$, se reduc la

$$P_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\quad P_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},\quad P_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

la cari se mai adaugă o funcțiune algebrică $P(x)\sqrt{f(x)}$, $P(x)$ fiind un polinom.

Se obține o formulă de reducțiune pentru integrala Q_n, plecând dela egalitatea

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} = -(n-1)\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^n} + \frac{f'(x)}{2(x-a)^{n-1}\sqrt{f(x)}} = \frac{-2(n-1)f(x) + (x-a)f'(x)}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}}.$$

Desvoltând numărătorul după puterile lui $(x-a)$, avem

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} = -\frac{2(n-1)f(a) + (2n-3)f'(a)(x-a)}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}} - \frac{\frac{1}{2}(2n-4)f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}(2n-5)f'''(a)(x-a)^3 + \frac{2n-6}{24}f^{(IV)}(a)(x-a)^4}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}};$$

de unde, integrând ambele membre,

$$(3)\quad -(n-1)f(a)Q_n = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2}f'(a)Q_{n-1} + \frac{n-2}{2}f''(a)Q_{n-2} + \frac{2n-5}{12}f'''(a)Q_{n-3} + \frac{n-3}{24}f^{(IV)}(a)Q_{n-4}.$$

Să presupunem întâiu că a nu este rădăcină a ecuațiunii $f(x) = o$ și să dăm lui n valoarea 2; obținem

$$(4)\quad -f(a)Q_2 = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)} + \frac{1}{2}f'(a)Q_1 - \frac{1}{12}f'''(a)Q_{-1} - \frac{1}{24}f^{IV}(a)Q_{-2}.$$

Insă

$$Q_{-1} = \int \frac{x-a}{\sqrt{f(x)}}\,dx = P_1 - aP_0,$$

$$Q_{-2} = \int \frac{(x-a)^2}{\sqrt{f(x)}}\,dx = P_2 - 2aP_1 + a^2P_0,$$

De unde conchidem că toate integralele Q pentru $n > 1$ se exprimă cu ajutorul integralei

$$(5) \qquad Q_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}}$$

şi cu ajutorul integralelor dejà considerate P_0, P_1, P_2.

Dacă a este rădăcină a ecuaţiunii $f(a) = o$, $f'(a)$ fiind neapărat diferit de zero, căci factorii lineari ai lui $f(x)$ sunt simpli, rezultă din formula (4) că integrala Q_1 şi prin urmare toate integralele Q_n se exprimă cu ajutorul integralelor P_0, P_1, P_2.

68. In cazul când polinomul $f(x)$ este de gradul al treilea, integrala P_2 se reduce la integralele P_0 şi P_1, precum rezultă din formula recurentă (2) în care facem coeficientul a_0 al lui x^4 egal cu zero Toate integralele P_n se reduc dar la cele două P_0 şi P_1. Integrala. Q_1 subsistă în aceleaşi condiţiuni ca şi în cazul când $f(x)$ este de gradul 4. In acest caz integrala eliptică generală

$$\int R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) dx$$

se reduce la trei speţe de integrale ireductibile între ele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}}. \quad (f(a) \neq o).$$

69. Să considerăm integrala

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ fiind un polinom de gradul trei sau patru. In domeniul unui punct x_0 diferit de un zero al lui $f(x)$, avem

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = P(x - x_0), \quad \left[P(x - x_0)\right]_{x_0} \neq o;$$

de unde

$$(2) \qquad u = \mathcal{F}(x - x_0).$$

Dacă x_0 este un zero al lui $f(x)$, avem în domeniul acestui punct

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = (x - x_0)^{-\frac{1}{2}} P(x - x_0), \quad \left[P(x - x_0)\right]_{x_0} \neq o;$$

de unde

$$(4) \qquad u = C + (x - x_0)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(x - x_0).$$

In domeniul punctului $x = \infty$, avem

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = x^{-2} P(x^{-1}) \text{ sau } x^{-\frac{3}{2}} P(x^{-1}), \left[P(x^{-1})\right]_{x=\infty} \neq o,$$

după cum $f(x)$ este de gradul 4 sau 3. Acestor egalităţi corespund pentru integrala u respectiv expresiunile

$$(6) \qquad u = \mathcal{P}(x^{-1}), \quad u = \mathrm{P}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{C} + x^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(x^{-1}).$$

Din desvoltările precedente rezultă că integrala u este o funcţiune analitică de x, care rămâne finită pe toată suprafaţa T a lui Riemann, corespunzătoare ecuaţiunii $y^2 = f(x)$; ea este uniformă pe suprafaţa simplu conexă T′ (§ 65), căci, pe această suprafaţă, funcţiunea $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ este olomorfă. Vom vedeà că pe suprafaţa T ea este multiformă cu o infinitate de ramuri.

70. *O integrală eliptică, care rămâne finită pentru orice valoare a variabilei finită sau infinită, se zice că este de speţa întâia.* Integrala considerată

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

este de speţa întâia. Ea este, abstracţiune făcând de un factor constant şi de o constantă aditivă, singura integrală de speţa întâia, relativ la aceeaş suprafaţă T, $y^2 = f(x)$.

In adevăr, să presupunem că integrala

$$\mathcal{J} = \int \mathrm{R}(x, y)\, dx = \int y\, \mathrm{R}(x, y)\, \frac{dx}{y}$$

în care $\mathrm{R}(x, y)$ este o funcţiune raţională, este de speţa întâia. In domeniul unui punct x_0, avem

$$y\, \mathrm{R}(x, y) = (x - x_0)^{\mu}\, \mathrm{P}(x - x_0),$$

sau

$$y\, \mathrm{R}(x, y) = (x - x_0)^{\frac{\mu}{2}}\, \mathrm{P}\left[(x - x_0)^{\frac{1}{2}}\right],$$

după cum x_0 este punct ordinar sau punct critic, μ fiind un număr întreg pozitiv, negativ sau nul. Dacă $x_0 = \infty$, înlocuim în formula precedentă $x - x_0$ prin $\frac{1}{x}$. In virtutea acestor expresiuni şi ţinând seama de desvoltările de mai sus date de formulele (1), (3), (5) ale lui $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ (§ 69), conchidem că pentru ca integrala $\mathcal{J}$ să fie finită pentru orice valoare a lui x, finită sau infinită, este necesar şi suficient ca funcţiunea $y\, \mathrm{R}(x, y)$ să rămână finită pe toată suprafaţa T, inclusiv punctul ∞. De unde rezultă că această funcţiune este o constantă C (§ 58), adică

$$\mathrm{R}(x, y) = \frac{\mathrm{C}}{y} = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{f(x)}};$$

de unde

$$\mathcal{J} = C\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + C'.$$

71. Integralele eliptice cari admit poluri, nu însă şi puncte critice logaritmice se zic integrale de speţa *doua*. Astfel integrala

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ fiind polinom de gradul trei, este o integrală de speţa doua, având punctul $x = \infty$ ca pol de ordinul întâi. Integralele cari admit puncte critice logaritmice se zic de speţa *treia*. Numărul acestor puncte este cel puţin egal cu doi. In adevăr, pentru ca un punct analitic (x_0, y_0) să fie logaritmic al integralei

$$\int R(x, y)\,dx,$$

este necesar şi suficient ca reziduul funcţiunii $R(x, y)$, relativ la polul (x_0, y_0), să fie diferit de zero. Insă suma reziduurilor funcţiunii raţionale $R(x, y)$ pe toată suprafaţa T este nulă, prin urmare avem cel puţin două reziduuri diferite de zero.

Printre aceste integrale se găseşte integrala

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ polinom de gradul trei şi a diferit de un zero al acestui polinom. Punctele logaritmice ale acestei integrale sunt $\left(a, \pm\sqrt{f(a)}\right)$ şi reziduurile corespunzătoare $\pm \dfrac{1}{\sqrt{f(a)}}$.

II. MULTIPLICITATEA VALORILOR INTEGRALELOR ELIPTICE

72. Să ne închipuim suprafaţa T, corespunzătoare ecuaţiunii $y^2 = f(x)$, transformată în suprafaţă simplu conexă T' prin ajutorul a două tăieturi A, B (§ 65, fig. 22). Tăietura B situată pe foaia întâi, conţine în interiorul său linia de trecere ab; tăietura A, situată parte pe una, parte pe cealaltă foaie, conţine în interiorul său punctele critice b şi c. Al patrulea punct critic este exterior curbelor A şi B, la distanţă finită sau la infinit, după cum polinomul $f(x)$ este de gradul 4 sau de gradul 3; a doua linie de trecere uneşte punctul c cu cel de al patrulea punct critic.

Din definiţiunea celor trei speţe de integrale eliptice, rezultă că pe suprafaţa T′ integralele de speţa I şi II sunt funcţiuni uniforme; cele dintâi sunt funcţiuni olomorfe şi cele de al doilea funcţiuni meromorfe. Integralele de speţa III însă sunt suceptibile într'un punct oarecare al suprafeţei T′ de o infinitate de valori. Fie w o integrală de speţa III, având punctele logaritmice $a_1, a_2, \ldots a_n$, pe cari le presupunem diferite de punctele de ramificaţiune şi fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ reziduurile derivatei $\frac{dw}{dx}$ corespunzătoare acestor puncte. Să reprezintăm prin w_0 una din valorile integralei într'un punct x al suprafeţei T′; expresiunea generală a integralei w în punctul x este dată de expresiunea

$$w = w_0 + 2i\pi (m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n),$$

$m_1, \ldots, m_n$ fiind numere întregi.

73. Fie

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} R(x, y)\, dx$$

o integrală eliptică de speţa I sau II. Această integrală este, precum am văzut, o funcţiune uniformă de x pe suprafaţa T′. Avem propoziţiunea următoare:

Diferenţa între valorile integralei în două puncte ale conturului lui T′, situate faţă în faţă, unul pe ţărmul stâng (+), celalt pe ţărmul drept (—), este constantă dealungul conturului.

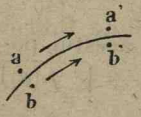

Fig. 23

In adevăr, fie a, a' două puncte situate pe ţărmul (+) şi b, b' cele două puncte în faţa lor pe ţărmul (—) (fig. 23) Funcţiunea R (x, y), fiind raţională pe suprafaţa T, trece prin aceleaşi valori pe cele două ţărmuri şi prin urmare avem, integrând respectiv dealungul acestor ţărmuri,

$$\int_a^{a'} R(x, y)\, dx = \int_b^{b'} R(x, y)\, dx,$$

adică

$$I(a') - I(a) = I(b') - I(b),$$

sau

$$I(a) - I(b) = I(a') - I(b').$$

Diferenţa constantă $I(a) - I(b)$ a valorii integralei din ţărmul (+) şi a aceleia din ţărmul (—), a primit numele de *modul de periodicitate* sau, mai scurt, de *perioadă* a integralei $I(x)$. Fiecărei tăieturi corespunde o perioadă.

Să reprezintăm prin $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ perioadele corespunzătoare tăieturilor A şi B. Pentru a calculà aceste perioade să fixăm patru puncte λ, ϱ, μ, ν infinit apropiate de punctul de întâlnire al celor două tăieturi: λ, ϱ fiind situate respectiv pe ţărmul $\pm$ al tăieturii A, de partea negativă a tăieturii B şi μ, ν având aceiaş poziţiune ca λ, ϱ, relativ la tăietura A, însă situate de partea pozitivă a tăieturii B (fig. 24) Vom aveà

$$\mathscr{A} = I(\lambda) - I(\varrho) = I(\mu) - I(\nu) = \int_{\varrho CB\lambda} R(x, y)dx = \int_{\nu CB\mu} R(x, y)\,dx,$$

$$\mathscr{B} = I(\mu) - I(\lambda) = I(\nu) - I(\varrho) = \int_{\lambda AD\mu} R(x\,y)\,dx = \int_{\varrho AD\nu} R(x, y)'\,dx;$$

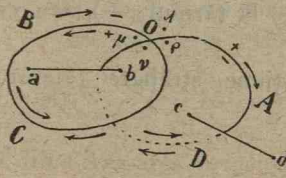

Fig. 24

Adică: *perioada* $\mathscr{A}$ *este egală cu valoarea integralei*

$$\int R(x, y)\,dx,$$

luată dealungul tăieturii B, dela ţărmul (—) *la cel* (+) *al tăieturii* A; *iar perioada* $\mathscr{B}$ *este egală cu valoarea aceleaşi integrale, luată dealungul tăieturii* A, *dela ţărmul* (—) *la cel* (+) *al tăieturii* B.

74. Până acì am presupus că drumul de integraţiune $(x_0 \ldots x)$ rămâne pe suprafaţa T' adică nu străbate nici una din tăieturile A sau B. Se numeşte *valoare principală* valoarea acestei integrale. Să suprimăm această restricţiune şi să examinăm efectul produs asupra integralei, când drumul de integraţiune străbate conturul.

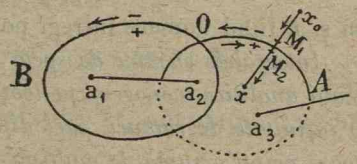

Fig. 25

Să considerăm dar un drum care uneşte punctul x_0 cu punctul x şi străbate tăietura A într'un punct M, trecând dela ţărmul (+) la cel (—) şi fie M_1, M_2 două puncte ale acestui drum, infinit apropiate de M, situate respectiv pe cele două ţărmuri (fig. 25). Să reprezintăm prin I' valoarea integralei dealungul acestui drum, şi fie I valoarea principală a integralei luată între aceleaşi limite. Drumul corespunzător se poate reduce la drumurile

$$x_0 M_1,\ M_1 O,\ \text{tăietura B (pe ţărmul —)},\ OM_2,\ M_2 x$$

descrise succesiv în sensul săgeţii.

Integralele după drumurile $M_1 O$, OM_2 se distrug, funcţiunea $R(x, y)$ fiind uniformă pe suprafaţa T. Avem dar

$$I = \int_{x_0 M_1} R(x, y)\, dx - \mathscr{A} + \int_{M_2 x} R(x, y)\, dx = I' - \mathscr{A};$$

de unde

$$I' = I + \mathscr{A}.$$

Dacă drumul de integraţiune străbate tăietura A, trecând dela ţărmul (—) la ţărmul (+), obţinem egalitatea

$$I' = I - \mathscr{A}$$

Avem dar egalitatea

$$I' = I \pm \mathscr{A}, \tag{1}$$

după cum trecerea se face dela ţărmul (+) la ţărmul (—), sau viceversa.

Deasemenea, dacă drumul de integraţiune străbate tăietura B, obţinem egalitatea

$$I' = I \pm \mathscr{B}, \tag{2}$$

după cum trecerea se face dela ţărmul (+) la ţărmul (—), sau viceversa.

Intr'un mod general, dacă drumul de integraţiune străbate tăieturile A şi B de un număr oarecare de ori, valoarea I' a integralei în punctul final x este legată de valoarea principală I prin formula

$$I' = I + m\,\mathscr{A} + n\,\mathscr{B}. \tag{3}$$

m şi n fiind numere întregi pozitive sau negative.

Integralele eliptice de speţa I sau de speţa II sunt aşa dar funcţiuni analitice monogene pe toată suprafaţa T a lui Riemann, având o infinitate de ramuri, cari difer de ramura principală corespunzătoare printr'o sumă de multipli arbitrari de perioade. Fiecare ramură este o funcţiune uniformă pe suprafaţa T'.

Dacă integrala este de speţa III, pe lângă perioadele la cari dau naştere tăieturile A şi B, cari se determină în acelaş mod ca cele ale integralei de speţa I şi II, avem alte perioade cari se introduc din cauza punctelor singulare logaritmice.

Pe suprafaţa T', integrala de speţa III nu este uniformă, însă putem transformà această suprafaţă într'alta T'', în care integrala să fie uniformă. Aceasta se realizează dacă izolăm punctele logaritmice prin cercuri foarte mici şi unim câte un punct al fiecăruia din ele cu un punct al conturului lui T', de exemplu cu punctul O, comun curbelor A şi B, prin linii L_1, L_2,... cari nu se întâlnesc

între ele şi cari nu întâlnesc conturul decât în punctul O şi obligăm variabila a nu le străbate (fig. 26).

Suprafaţa T'' este simplu conexă; conturul ei este format din conturul lui T' şi din ţărmurile tăieturilor făcute dealungul liniilor $L_1, L_2, \ldots$

Reprezintând prin A_k reziduul lui $R(x, y)$ relativ la polul $x = a_k$, diferenţa valorilor integralei între ţărmul (+) şi cel (—) al tăieturii L_k este $+ 2i\pi A_k$: această constantă este perioada integralei relativ la tăietura L_k.

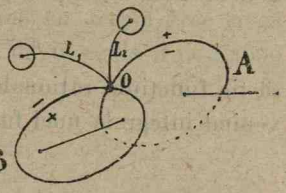

Fig. 26

Dacă variabila străbate această tăietură integrala se măreşte cu $\pm 2i\pi A_k$, după cum trecerea se face dela ţărmul (—) la cel (+) sau viceversa. Intr'un punct x, o ramură oarecare I' a integralei este exprimată prin egalitatea

$$(4) \qquad I' = I + m\mathscr{A} + n\mathscr{B} + 2i\pi \sum_{k=1}^{k=n} m_k A_k,$$

I fiind valoarea principală şi m, n, m_k fiind numere întregi.

Observare. Din egalităţile (3) şi (4) rezultă că valoarea unei integrale eliptice, luată după o curbă închisă, este egală cu o sumă de multipli de perioade, căci valoarea principală corespunzătoare este nulă.

CAPITOLUL VIII.

INTEGRALA ELIPTICĂ DE SPEŢA I.

75. Printre integralele eliptice relative la suprafaţa T a lui Riemann, cea de speţa I

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

are o importanţă deosebită, datorită proprietăţii de a fi finită pentru orice valoare finită sau infinită a variabilei; de unde rezultă, precum am văzut, că ea este unică, abstracţiune făcând de un multiplicator constant şi de o constantă aditivă. O altă proprietate de o importanţă analitică fundamentală a integralei de speţa I este, precum vom vedeà, aceea a inversiunii uniforme; ceeace înseamnează că limita superioară x a integralei u este o funcţiune uniformă de u în tot planul acestei variabile. Vom vedeà

de asemenea că, într'un mod general, o funcțiune rațională $R(x, y)$ pe suprafața T este o funcțiune uniformă de această integrală.

Este important de observat că x și $\sqrt{f(x)}$ nu se pot exprimà prin funcțiuni raționale de un parametru, precum aceasta este posibil în cazul când polinomul $f(x)$ este de gradul întâi sau al doilea. Căci dacă s'ar puteà ca

$$x = \varphi(t), \quad \sqrt{f(x)} = \psi(t)$$

să fie funcțiuni raționale de t, ar urma ca integrala de speța I, devenind integrala unei funcțiuni raționale de t

$$u = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt,$$

să devină înfinită cel puțin odată pentru o valoare finită sau infinită a lui t, și prin urmare a lui x.

76. Să reprezintăm prin ω și ω' perioadele integralei u, relative la tăieturile A și B; vom aveà pentru u, în acelaș punct x pe suprafața T, expresiunea

$$u = u_0 + m\omega + m'\omega', \tag{2}$$

m și m' fiind numere întregi și u_0 fiind una din valorile lui u corespunzătoare lui x.

Să examinăm relațiunea ce există între valorile integralei în două puncte suprapuse (x, y), $(x, -y)$ ale suprafeței T.

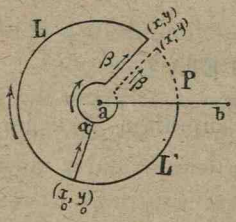

Fig. 27

Dacă punctul inițial este un punct de ramificațiune a și drumurile care unesc acest punct cu punctele finale (x, y), $(x, -y)$ sunt suprapuse în toată intinderea lor, valorile integralelor sunt egale și de semne contrarii; căci dealungul acestor drumuri, $\sqrt{f(x)}$ trece prin valori egale și de semne contrarii. Rezultatul subsistă dacă înlocuim unul din cele două drumuri printr'un drum echivalent cu el.

Să considerăm acum două drumuri L, L', plecând dela un punct (x_0, y_0), cel dintâi situat pe foaia întâia, iar cel de al doilea străbătând, de exemplu, linia de trecere ab într'un punct P (fig. 27). Să înlocuim aceste drumuri prin drumurile respectiv echivalente $x_0 a \beta (x, y)$, $x_0 a \beta' (x, -y)$ formate din drumul comun $x_0 a$ — punctul a fiind foarte aproape de punctul critic a — din două semicercuri $a\beta$, $a\beta'$ cu centrul în a și din drumurile suprapuse $\beta (x, y)$, $\beta' (x, -y)$.

Vom avea, reprezintând prin u și u' valorile integralei după L și L'

$$u = \int_{x_0\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\alpha\beta} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\beta}^{x,\, y} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$u' = \int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\alpha\beta'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\beta'}^{x,\, -y} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Făcând suma acestor egalități și ținând seamă că integralele după arcele $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$ tind către zero împreună cu aceste arce și că ultimele integrale din membrele de al doilea devin egale și de semne contrarii, rezultă egalitatea

$$u + u' = 2 \int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{3}$$

Reprezintând prin u_0 una din valorile lui u' în punctul $(x, -y)$, avem:

$$u' = u_0 - m\omega - n\omega',$$

m și n fiind numere întregi oarecari, pozitive sau negative. Substituind aceste valori ale lui u' în egalitatea (3), obținem expresiunea generală

$$u + u_0 = 2 \int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + m\omega + n\omega'. \tag{4}$$

Din egalitățile (2) și (4) rezultă că într'un punct x pe *planul simplu* al variabilei, valorile integralei u sunt cuprinse în expresiunile

$$u = \begin{cases} u_0 + m\omega + n\omega', \\ 2 \int_{x_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} - u_0 + m\omega + n\omega' \end{cases} \tag{5}$$

Dacă limita inferioară x_0 coincide cu punctul a (în genere, cu un punct critic), expresiunile (5) devin

$$u = \pm u_0 + m\omega + n\omega'.$$

77. Fie C, C' două curbe închise situate pe aceiaș foaie, conținând în interiorul lor respectiv liniile de trecere $a\,b$, $c\,d$ fără a se tăia între ele. Avem

$$\int_{C} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{C'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 0, \tag{1}$$

integralele fiind luate în același sens. Pentru a justifică această egalitate, să considerăm un cerc (R) situat pe aceiaș foaie, având o rază R destul de mare pentru ca să cuprindă în interiorul său

curbele C și C'. In aria limitată de cercul (R) și de aceste două curbe, funcțiunea $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ fiind olomorfă, avem

$$(2) \qquad \int_C \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{C'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{(R)} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Făcând R să tindă către infinit, membrul al doilea tinde către zero; valoarea sa fiind constantă, aceea a membrului întâi, este riguros nulă. De unde rezultă egalitatea (1).

78. Perioadele ω și ω' sunt date, precum am văzut (§ 72) [1]) de integrala $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, luată, cea dintâi după o curbă închisă conținând în interiorul ei linia de trecere a_1 a_2 și situată în foaia întâi; cea de a doua, după o curbă închisă conținând punctele de ramificațiune a_2, a_3, situată parte pe o foaie, parte pe cealaltă foaie, ambele curbe fiind descrise în sensul negativ în raport cu punctele critice situate în interiorul lor. Valorile acestor integrale rămân neschimbate dacă modificăm forma celor două curbe fără ca ele să întâlnească vreun punct de ramificațiune. Forma liniilor de trecere dela o foaie la alta poate deasemenea fi schimbată. Ceeace rămâne invariabil sunt punctele de ramificațiune a căror pozițiune este dată.

Să ne închipuim curbele de integrațiune reduse, cea dintâi la cele două țărmuri situate pe aceeaș foaie ale liniei a_1 a_2 și la două cercuri infinit mici având centrele lor în punctele a_1, a_2; iar cea de a doua la drumul format din două linii suprapuse între punctele a_2 și a_3, una în foaia întâi, cealaltă în foaia doua a lui T și două cercuri infinit mici, având centrele lor în aceste puncte (fig. 28). Integralele dealungul cercurilor tinzând către zero împreună cu razele cercurilor și $\sqrt{f(x)}$ trecând prin aceleași valori cu semne contrarii pe laturile opuse, rezultă egalitățile

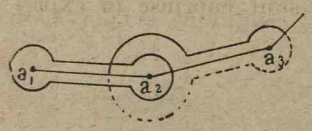

Fig. 28

$$(1) \qquad \omega = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \omega' = 2\int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

integralele fiind luate pe țărmul stâng al segmentelor a_1 a_2 și a_2 a_3.

---

[1]) Inlocuim literile $\mathscr{A}$ și $\mathscr{B}$ respectiv prin ω și ω'.

79. Să considerăm, de exemplu, integrala normală a lui Legendre

$$(2) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}},$$

în care presupunem *modulul* k real, cuprins între 0 și 1 și radicalul egal cu $+1$ în punctul $x = o$ pe țărmul stâng din foaia întâi. Punctele critice sunt $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$. Să luăm $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{k}$, $a_4 = -\frac{1}{k}$. Formulele (1) dau, adoptând notațiunile lui Legendre și Jacobi,

$$(3) \quad \begin{cases} \omega = 4\,\mathrm{K} = 2 \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} \\ \omega' = 2i\mathrm{K}' = 2 \displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = 2i \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)\,(1-k^2x^2)}}, \end{cases}$$ [1]

radicalele reale fiind pozitive. De unde

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}; \quad \mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)\,(1-k^2x^2)}}$$

Să considerăm, ca al doilea exemplu, integrala normală a lui Weierstrass

$$(4) \qquad u = -\int_\infty^x \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_2)}},$$

în cazul când e_1, e_2, e_2 sunt cantități reale, dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$. Radicalul este luat cu valoarea sa pozitivă pentru x real și $> e_1$.

Dacă punem

$$a_1 = e_3, \quad a_2 = e_2, \quad a_3 = e_1, \quad a_4 = \infty,$$

---

[1] Radicalul $\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}$ se schimbă în $-i\sqrt{(x^2-1)\,(1-k^2x^2)}$ pe țărmul stâng al segmentului $(1, \frac{1}{k})$.

avem, în virtutea formulelor (1), egalitățile

$$(5)\quad \begin{cases} \omega = \displaystyle\int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(x-e_3)}}, \\ \omega' = \displaystyle\int_{e_2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(x-e_3)}} = i \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}}, \end{cases}$$

în cari radicalul $\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(x-e_3)}$ din prima egalitate și radicalul $\sqrt{(e_1-x)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}$ din ultima egalitate sunt reale și pozitive [1]).

Raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ al perioadelor este, precum se vede, imaginar în ambele integrale considerate. Această teroremă este generală.

80. *Teoremă. Raportul perioadelor unei integrale eliptice de speța I este imaginar* [2]).

Să punem integrala

$$(1)\qquad u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

sub forma

$$(2)\qquad u = v + iw, \qquad x = \xi + i\eta$$

v și w fiind funcțiuni reale de variabilele reale ξ, η și să considerăm integrala

$$(3)\qquad \int_\Gamma v\, dw,$$

luată în sensul pozitiv dealungul conturului Γ (fig. 22, § 65), care limitează într'un mod complect suprafața T'. Integrala u fiind o funcțiune olomorfă de x pe această suprafață, avem, în virtutea teoremei lui Riemann, (§ 48), inegalitatea

$$(4)\qquad \int_\Gamma v\,dw > 0$$

Să calculăm membrul întâi. Fie

$$(5)\qquad \omega = \alpha + i\beta, \qquad \omega' = \alpha' + i\beta'$$

perioadele integralei u relative la tăieturile A și B. Reprezintând

---

[1]) Dacă x descrie în sensul negativ un semicerc cu centrul în e_2, situat deasupra axei reale, radicalul $\sqrt{e_2 - x}$ se schimbă în $-i\sqrt{x-e_2}$

[2]) Teoremă deja văzută I. p. 327

prin

$$\int_{\overset{+}{A}} \varphi dw, \int_{\overset{+}{B}} \varphi dw, \int_{\overset{-}{A}} \varphi dw, \int_{\overset{-}{B}} \varphi dw,$$

integralele luate în sensul direct (indicat de săgeți) după țărmurile pozitive și negative ale celor două tăieturi, avem

$$\int_{\Gamma} \varphi dw = \int_{\overset{+}{A}} \varphi dw + \int_{\overset{+}{B}} + \int_{\overset{-}{A}} + \int_{\overset{-}{B}} \tag{6}$$

$$= \int_{\overset{+}{A}} (\overset{+}{\varphi} - \overset{-}{\varphi}) dw + \int_{\overset{+}{B}} (\overset{+}{\varphi} - \overset{-}{\varphi}) dw,$$

$\overset{+}{\varphi}$ și $\overset{-}{\varphi}$ reprezintând valorile φ în două puncte situate față în față pe țărmurile respective.

Insă, în virtutea definițiunii perioadelor ω și ω', [1]) avem

$$\left(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}\right)_A = \alpha + i\beta, \quad \left(\overset{+}{u} - \overset{-}{u}\right)_B = \alpha' + i\beta', \tag{7}$$

$$\int_{\overset{+}{A}} d(\varphi + i\psi) = \omega' = \alpha' + i\beta', \int_{\overset{+}{B}} d(\varphi + i\psi) = -\omega = -(\alpha + i\beta). \tag{8}$$

De unde rezultă egalitățile

$$\left(\overset{+}{\varphi} - \overset{-}{\varphi}\right)_A = a, \left(\overset{+}{\varphi} - \overset{-}{\varphi}\right)_B = a', \tag{9}$$

$$\int_{\overset{+}{A}} dw = \beta', \int_{\overset{+}{B}} dw = -\beta. \tag{10}$$

In virtutea acestor egalități, egalitatea (6) devine

$$\int_{\Gamma} \varphi dw = a\beta' - \beta a'. \tag{11}$$

Avem așa dar inegalitatea

$$a\beta' - \beta a' > o. \tag{12}$$

Din această inegalitate rezultă:

1°. Cantitățile α și β nu pot fi nule în acelaș timp; deasemenea cantitățile α' și β'. *Nici una din perioadele* ω, ω' *nu poate dar fi nulă*

2°. *Raportul*

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\alpha' + i\beta'}{\alpha + i\beta} = \frac{a\alpha' + \beta\beta'}{\alpha^2 + \beta^2} + i\,\frac{a\beta' - \beta a'}{\alpha^2 + \beta^2}$$

este imaginar și coeficientul lui i *este pozitiv* [2]).

---

[1]) § 72, $\mathscr{A} = \omega$ $\mathscr{B} = \omega'$.

[2]) Acest semn corespunde direcțiunii considerate a tăieturilor A, B. Intr'o dispoziție diferită, semnul lui i ar puteà fi negativ.

81. *Observare.* Dacă membrul întâi (12) ar fi nul, integrala u s'ar reduce la o constantă. Căci din egalitatea

$$\int_\Gamma \nu dw = \int\int \left[\left(\frac{\delta \nu}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta \nu}{\delta \eta}\right)^2 \right] d\xi d\eta = o, \quad (x = \xi + i\eta)$$

rezultă egalităţile

$$\frac{\delta \nu}{\delta \xi} = o, \quad \frac{\delta \nu}{\delta \eta} = o,$$

adică $\nu = \text{const}$; de unde, precum se ştie, rezultă şi

$$\frac{\delta w}{\delta \xi} = o, \quad \frac{\delta w}{\delta \eta} = o,$$

Prin urmare

$$\nu + iw = \text{const.}$$

SCHIMBAREA SISTEMULUI DE TĂIETURI.

82. Cele două tăieturi necesare, pentru a face suprafaţa T simplu conexă, pot fi determinate în diferite moduri, de unde pot rezultà diferite sisteme de perioade. Este interesant de examinat ce relaţiuni există între perioadele corespunzătoare la două sisteme diferite de tăieturi.

Fie A, B tăieturile primului sistem şi A′, B′ tăieturile sistemului al doilea. Pentru ca tăieturile A′, B′ să nu distrugă conexiunea T′ este necesar ca fiecare din ele să străbată cel puţin odată una din tăieturile A, B, căci suprafaţa T′ fiind simplu conexă, orice curbă închisă trasă pe această suprafaţă distruge conexiunea ei.

Să reprezintăm prin Ω, Ω' perioadele relative la sistemul (A′,B′). Aceste perioade fiind valorile ce primeşte integrala $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ luată, în sensuri convenabile, dealungul curbelor A′, B′, vor fi date de egalităţi de forma

$$(1) \qquad \Omega = m\omega + n\omega', \quad \Omega' = m'\omega + n'\omega',$$

m, m', n, n' fiind numere întregi (observare § 74).

Pentru acelaş motiv, perioadele ω, ω', relativ la sistemul (A, B), sunt sume de multipli de perioadele Ω, Ω',

$$(2). \qquad \omega = \mu\Omega + \nu\Omega', \quad \omega' = \mu'\Omega + \nu'\Omega'.$$

Identificând valorile perioadelor ω şi ω' din ecuaţiunile (1) şi (2), obţinem egalităţile

$$\mu = \frac{n'}{\Delta}, \quad \nu = -\frac{n}{\Delta}, \quad \mu' = -\frac{m'}{\Delta}, \quad \nu' = \frac{m}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix};$$

prin urmare

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} n' & -n \\ -m' & m \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta},$$

sau

$$\Delta\,\Delta' = 1, \tag{3}$$

adică

$$\Delta = \Delta' = \pm 1, \tag{4}$$

semnele fiind aceleaşi pentru Δ şi Δ'.

Se zice că două sisteme de perioade (ω, ω'), (Ω, Ω') sunt *echivalente*, dacă între ele există relaţiunile (1) şi (2). Schimbarea tăieturilor suprafeţei T are dar drept efect a înlocui un sistem de perioade printr'un sistem de perioade echivalente.

83. Fie

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta;$$

vom aveà

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{(m' + n'\alpha) + n' i\beta}{(m + n\alpha) + ni\beta} = \frac{A + i\beta\Delta}{(m + n\alpha)^2 + n^2\beta^2},$$

$$A = (m' + n'\alpha)(m + n\alpha) + nn'\beta.$$

Raportul $\frac{\Omega'}{\Omega}$, corespunzător raportului $\frac{\omega'}{\omega}$, este dar de asemenea imaginar şi coeficienţii lui i în ambele raporturi au acelaş semn sau sunt de semne contrarii după cum $\Delta = \pm 1$.

84. *Aplicaţiune.* Să considerăm integrala lui Weierstrass

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$ [1])

e_1, e_2, e_3 fiind trei cantităţi date oarecari distincte între ele şi să examinăm, în câteva cazuri, relaţiunile dintre perioadele integralei, când tăieturile A şi B au diferite dispoziţiuni.

Pentru a evità orice confuziune să numim A tăietura al cărui ţărm + este luat după voie, ori care ar fi cele două puncte critice cuprinse în interiorul ei; A se va zice *prima tăietură*. Ţărmul + al celeilalte tăieturi, reprezintată prin B, (a doua tăietură), este ţărmul care urmează imediat după cel + al lui A, când conturul suprafeţei T' este descris în sensul direct (+). Conturul este descris în sensul direct, dacă aria suprafeţei T' situată de partea ţărmului + se găseşte la stânga observatorului care descrie acest contur. Să reamintim: *primo*, perioada relativă unei tăieturi este diferenţa

[1]) Nu punem semn înaintea radicalului, punctul x plecând dela ∞ pe una sau pe cealaltă foaie.

între valoarea integralei într'un punct al ţărmului + al tăieturii şi valoarea ei în punctul opus din ţărmul —; ea este dată de valoarea integralei luată dealungul celeilalte tăieturi în sensul care duce dela punctul ţărmului — la punctul ţărmului + al tăieturei la care se referă perioada (§ 73); *secundo*, variabila x străbătând o tăietură, integrala u se măreşte cu $\pm$ perioada corespunzătoare acelei tăieturi, după cum trecerea se face dela ţărmul + la cel — sau viceversa (§ 74).

1°. Să plecăm dela sistemul reprezintat prin figura (29) şi fie ω, ω'

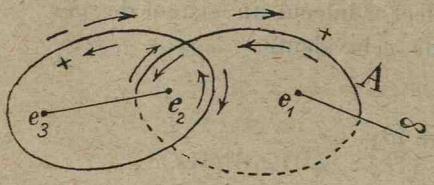

Fig. 29

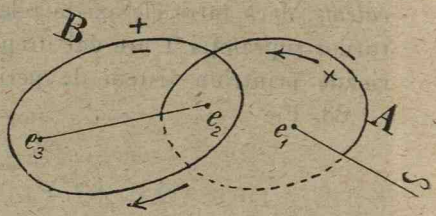

Fig. 30

perioadele relative la tăieturile A, B, ω este valoarea integralei u dealungul curbei B şi ω' este valoarea integralei dealungul curbei A, descrise amândouă în sensul săgeţilor exterioare.

2°. Să schimbăm semnele ţărmurilor lui A; se schimbă în acelaş timp semnele ţărmurilor lui B (fig. 30). Numind Ω, Ω' perioadele corespunzătoare, avem

$$\Omega = -\omega, \quad \Omega' = -\omega'.$$

3°. Să permutăm tăieturile A şi B, adică să luăm B drept prima

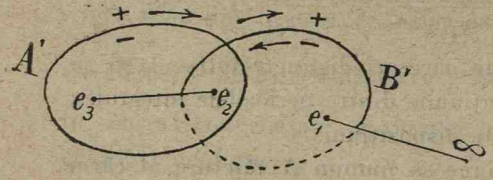

Fig. 31

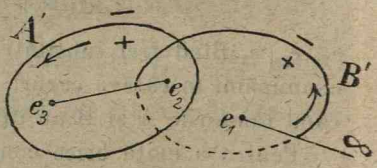

Fig. 32

tăietură şi s'o notăm A' şi drept a doua tăietură A pe care o notăm B' (fig. 31). Reprezintând prin Ω, Ω' perioadele relative la A', B', avem

$$\Omega = -\omega', \quad \Omega' = \omega.$$

4°. Schimbând în figura precedentă semnele lui A', semnele lui B' se schimbă în acelaş timp; de unde rezultă (fig. 32) aceleaşi perioade cu semnele schimbate

$$\Omega = \omega', \quad \Omega' = -\omega.$$

5°. Să păstrăm în cazul 1° tăietura B și să înlocuim tăietura A printr'o tăietură A′ care să conțină în interiorul ei punctele e_1 și e_3. Obținem figura (33) sau figura (34), după cum descriind conturul lui T′ în sensul direct, tăietura A′ străbate tăietura A trecând dela țărmul — la cel +, sau viceversa.

In ambele aceste dispoziții perioada Ω relativă la tăietura A′ este egală cu perioada ω relativă la tăietura A, iar perioada relativă la tăietura B este dată respectiv de egalitățile

$$\Omega' = \mp \omega + \omega',$$

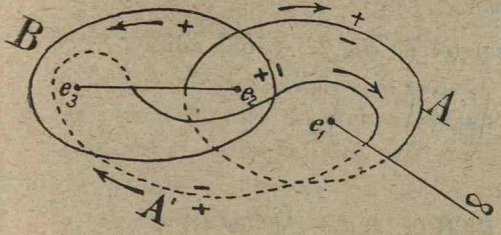

Fig. 33

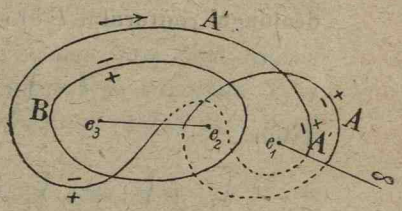

Fig. 34

căci drumul A′ străbate ambele tăieturi A și B, pe cea dintâi în sensurile menționate și pe cea de a doua dela țărmul + la cel —. Schimbarea sistemului 1° în sistemul 5° are dar drept efect a înlocui perioadele inițiale ω, ω' prin perioadele Ω, Ω' date respectiv de egalitățile

$$\Omega = \omega, \qquad \Omega' = \mp \omega + \omega'.$$

In toate formulele precedente determinantul substituțiunii este egal cu + 1.

CAPITOLUL IX.

TEOREMA LUI ABEL PENTRU ADIȚIUNEA INTEGRALELOR ELIPTICE DE SPEȚA I.

85. Fie $R(x, y)$ o funcțiune rațională de ordinul n pe suprafața T, $y^2 = f(x)$, având zerurile

$$(a_1, y_{a_1}), (a_2, y_{a_2}), \ldots, (a_n, y_{a_n})$$

și polurile

$$(b_1, y_{b_1}), b_2, y_{b_2}), \ldots, (b_n, y_{b_n}).$$

Printre zerurile de o parte ca și printre polurile de altă parte, pot fi mai multe egale între ele. Vom reprezintà aceste puncte

analitice mai scurt, respectiv prin punctele

$$a_1, a_2, \ldots, a_n ; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

situate pe suprafaţa T. Presupunem că aceste puncte nu sunt situate pe tăieturile A şi B, ceeace se poate totdeauna obţine modificând, dacă este necesar, forma acestor tăieturi.

Fie acum $u(x)$ o integrală eliptică de speţa I, relativă la aceiaş suprafaţă T. Să considerăm integrala

$$(2) \qquad I = \int_\Gamma u \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}(x,y)\, dx,$$

dealungul conturului Γ al suprafeţei T', (fig 22, §, 65), adică

$$I = \int_{A}^{+} + \int_{B}^{+} + \int_{A}^{-} + \int_{B}^{-}.$$

Avem

$$\int_{A}^{+} + \int_{A}^{-} = \omega \int_{A}^{+} \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}(x, y)\, dx = \omega (\log \mathrm{R})_A,$$

$$\int_{B}^{+} + \int_{B}^{-} = \omega' \int_{B}^{+} \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}(x, y)\, dx = \omega' (\log \mathrm{R})_B.$$

Valoarea finală a funcţiunii $\mathrm{R}(x, y)$ pe fiecare din tăieturile A şi B fiind egală cu valoarea sa iniţială, diferenţa dintre valoarea finală şi ceà iniţială a funcţiunii $\log \mathrm{R}(x, y)$ este nulă sau un multiplu de $2i\pi$. De unde rezultă egalitatea.

$$(2) \qquad I = 2i\pi (m\omega + m'\omega'),$$

m şi m' fiind două numere întregi

$$\gtrless 0,$$

ale căror valori sunt date de integralele

$$(3) \qquad m = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \quad m' = \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}.$$

O altă expresiune a integralei (1) se obţine aplicând teorema reziduurilor pe toată suprafaţa T.

Reziduurile funcţiunii $u \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}(x, y)$ provin numai dela zerurile şi polurile funcţiunii $\mathrm{R}(x, y)$, căci funcţiunea $u(x)$ rămâne finită pe suprafaţa T şi în punctul $x = \infty$ reziduul său este nul. Avem aşa dar egalitatea

$$(4) \qquad I = 2i\pi \left[\sum_{k=1}^{n} u(a_k) - \sum_{k=1}^{n} u(b_k) \right].$$

Din egalitățile (2) și (4) rezultă relațiunea

$$(5) \qquad \sum_1^n u(a_k) - \sum_1^n u(b_k) \equiv o. \ (\text{modd}\ \omega, \omega')\ ^{1)}$$

In această relațiune consistă *teorema lui Abel, pentru adițiunea integralelor eliptice de speța I.*

Ea se enunță:

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} d\,u(x)$$

valorilor integralei eliptice de speța I $u(x)$, *luată între două sisteme de puncte în cari funcțiunea rațională* $R(x, y)$ *pe suprafața T se anulează și devine infinită, este nulă, abstracțiune făcând de o sumă de multipli de perioade.*

Această teoremă este cuprinsă în teorema mai generală relativă la integralele de forma

$$\int \varphi(x, y)\, dx,$$

$\varphi(x, y)$ fiind o funcțiune rațională de variabilele x, y legate între ele printr'o ecuațiune algebrică $F(x, y) = o$ de un grad oarecare, integrale, cărora Jacobi a dat numele de *integrale Abeliane* în memoria lui Abel [2]).

86. *Teorema lui Abel se poate enunță sub o formă diferită.* Pentru aceasta, să considerăm funcțiunea rațională de ordinul n pe suprafața T.

$$(6) \qquad R(x, y) - \lambda,$$

λ fiind o constantă oarecare dată. Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n\ ;\ b_1, b_2, \ldots, b_n$$

respectiv zerurile și polurile funcțiunii. Intre aceste puncte avem relațiunea lui Abel

$$(7) \qquad \sum_1^n u(a_k) - \sum_1^n u(b_k) = m\,\omega + m'\,\omega'.$$

Dacă facem să varieze într'un mod continuu parametrul λ, zerurile funcțiunii (6) vor varia într'un mod continuu, descriind

---

[1]) Această notațiune exprimă că membrul întâi este nul, abstracțiune făcând de un multiplu de ω și de un multiplu de ω'.

[2]) Vezi tratate speciale; de exemplu, Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algebriques et de leurs intégrales.*

liniii determinate pe suprafaţa T, pe când polurile rămân neschimbate. Dacă drumurile simultane descrise de zerurile a_k nu întâlnesc nici una din tăieturile A sau B, integralele $u(a_k)$ variază într'un mod continuu. De unde rezultă că la o variaţiune foarte mică a lui λ nu poate corespunde pentru membrul întâi (7), adică pentru suma $\sum_1^n u(a_k)$, decât o variaţiune foarte mică, prin urmare, o variaţiune foarte mică pentru membrul al doilea. Insă, valoarea membrului al doilea nu se poate schimbà decât împreună cu unul din numerile m, m'. Aceste numere fiind întregi nu pot varià decât într'un mod brusc. De unde rezultă că pe cât timp drumurile descrise de zerurile a nu întâlnesc tăieturile A, B, numerele m, m', rămân constante; prin urmare, variaţiunea corespunzătoare a sumei $\Sigma u(a_k)$ este nulă. Aşa dar, făcând să varieze λ dela o valoare iniţială λ_0 până la o valoare finală λ, astfel ca drumurile descrise de zerurile funcţiunii (6) să nu întâlnească tăieturile A, B, variaţiunea sumei dealungul acestor drumuri este nulă.

Din cele ce preced rezultă enunţul următor:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reprezintă un sistem de puncte în cari o funcţiune raţională R (x, y) *de ordinul n primeşte aceiaş valoare λ_0 şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ un al doilea sistem de puncte în cari* R (x, y) *primeşte aceeaş valoare λ, avem egalitatea*

$$\sum_1^n \int_{a_k}^{\beta_k} d\,u(x) = o, \tag{8}$$

integralele fiind luate dealungul drumurilor simultane descrise de x, când λ variază dela valoarea iniţială până la valoarea finală, astfel ca drumurile de integraţiune să nu întâlnească tăieturile A, B.

Dacă drumurile $(a_k, \ldots \beta_k)$ străbat un număr oarecare de ori tăieturile A, B, egalitatea precedentă trebuie înlocuită prin cea următoare

$$\sum_1^n \int_{a_k}^{\beta_k} du(x) = m\omega + m'\omega' \tag{9}$$

87. Să înlocuim în membrul întâi (8) limitele inferioare a_k prin n puncte a_k luate după voie pe suprafaţa T şi să ţinem seamă de egalitatea

$$\int_{a_k}^{\beta_k} = \int_{a_k}^{a_k} + \int_{a_k}^{\beta_k};$$

obţinem egalitatea

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{\beta_k} d\,u(x) = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{a_k} du(x) = C, \tag{10}$$

constanta C fiind independentă de limitele superioare β_k, prin urmare independentă de valoarea λ ce funcţiunea R (x, y) primeşte în punctele β_k. Să ne închipuim că înlocuim λ printr'un coeficient oarecare al funcţiunii R (x, y), conchidem că suma (10) este independentă de toţi coeficienţii funcţiunii R (x, y). Putem dar enunţà teorema lui Abel sub forma următoare:

Fiind dată o funcţiune raţională oarecare R (x, y) de ordinul n, suma valorilor unei integrale de speţa întâi ale căror limite inferioare sunt n puncte date după voie pe suprafaţa T, iar limitele superioare sunt n puncte pe aceiaş suprafaţă în cari R (x, y) primeşte aceiaş valoare arbitrară λ, este o constantă independentă de coeficienţii funcţiunii.

88. Luând $\lambda = o$, avem, în termeni geometrici, enunţul următor:

Suma valorilor integralei u (x), luată dela n puncte fixe oarecari ale curbei $y^2 = f(x)$ până la punctele de intersecţiune ale ei cu o curbă mobilă care o taie în n puncte, este o constantă independentă de coeficienţii curbei mobile.

Dacă cele n puncte fixe aparţin curbei mobile, într'una din poziţiunile ei, constanta este nulă sau egală cu o sumă de multipli de perioade, în virtutea egalităţii (10) în care facem $a_k = a_k$, $(k=1, 2, \ldots, n)$.

89. *Aplicaţiuni. Adiţiunea integralelor eliptice de speţa I.*

Suma valorilor unei integrale eliptice de speţa I într'un număr m de puncte este egală, abstracţiune făcând de o constantă aditivă, cu valoarea aceleaşi integrale într'un singur punct, ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de coordonatele celor dintâi.

Fie mai întâi $m = 2$ şi să considerăm succesiv cazurile când ecuaţiunea

$$y^2 = f(x)$$

este de gradul trei sau patru.

I. Fie

$$(1) \qquad y^2 = A\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x + A_3.$$

Să luăm, drept curbă mobilă, linia dreaptă

$$(2) \qquad y = a\,x + b.$$

Abscisele punctelor de intersecţiune ale acestei drepte cu curba (1) sunt rădăcini ale ecuaţiunii de gradul al treilea

$$(3) \qquad (ax+b)^2 = A\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2 x + A_3.$$

Fie x_1, x_2, x_3 aceste rădăcini, variabile împreună cu coeficienţii a şi b, căror corespund, pentru y, valorile

$$(4) \qquad y_i = ax_i + b \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Două din cele trei puncte de intersecțiune (x_1, y_1), (x_2, y_2) fiind date după voie, rezultă pentru a și b valorile raționale

$$(5) \qquad a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad b = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Inlocuind în ecuațiunea (3) a și b prin aceste valori, fiecare din cele trei relațiuni, cari există între rădăcinile și coeficienții ecuațiunii, va da pentru x, o expresiune rațională de coordonatele celor două puncte date; de unde rezultă pentru $y_3 = ax_3 + b$ o expresiune rațională de aceleași coordonate.

Considerând, de exemplu, relațiunea

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{A_1 - a^2}{A},$$

obținem relațiunile raționale

$$(6) \quad \begin{cases} x_3 = -(x_1 + x_2) - \dfrac{1}{A}\left[A_1 - \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2\right], \\ y_3 = -\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\left\{x_1 + x_2 + \dfrac{1}{A}\left[A_1 - \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2\right]\right\} + \dfrac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}. \end{cases}$$

Fie acum (ξ_i, η_i), $(i = 1, 2, 3)$, trei puncte date după voie pe curba (1), luate ca limite inferioare ale integralei

$$u(x_i, y_i) = \int_{\xi_i, \eta_i}^{x_i, y_i} \frac{dx}{y};$$

avem (§ 88)

$$(7) \qquad u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) = C;$$

sau înlocuind, în integrala a treia y prin $-y$, ceeace dă

$$u(x_3, -y_3) = -u(x_3, y_3),$$

avem, scriind $u(x_i)$ în loc de $u(x_i, y_i)$, egalitatea

$$(8) \qquad u(x_1) + u(x_2) = u(x_3) + C.$$

Constanta C depinde numai de limitele inferioare; ea este nulă, sau egală cu o sumă de multipli de perioade, dacă punctele (ξ_i, η_i) se găsesc pe dreapta (2) (§ 88, fine).

II. Fie

$$(9) \qquad y^2 = A^2 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4.$$

Luând, drept curbă mobilă, parabola

$$(10) \qquad y = A x^2 + a x + b,$$

avem, pentru determinarea absciselor punctelor de intersecţiune, ecuaţiunea de gradul al treilea

$$(11) \quad 2A x^2 (ax+b) + (ax+b)^2 = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4.$$

Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile acestei ecuaţiuni, căror corespund pentru y valorile

$$(12) \quad y_i = A x_i^2 + a x_i + b \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2) fiind date după voie, ecuaţiunile (12) vor da pentru a şi b valori raţionale de coordonatele acestor puncte. Substituind aceste valori în ecuaţiunea (11) şi procedând ca în cazul I, ajungem la aceeaş concluziune.

Am presupus până aci $m = 2$. Pentru a arătà că teorema este adevărată pentru un număr întreg m oarecare, să arătăm că, dacă este adevărată pentru m, va fi adevărată şi pentru $m + 1$. Avem prin ipoteză

$$u(x_1, y_1) + \ldots + u(x_m, y_m) = u(\xi, \eta) + C,$$

(ξ, η) fiind un punct al curbei $y^2 = f(x)$, ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de coordonatele celor m puncte date (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Fie acum (x_{m+1}, y_{m+1}) un punct oarecare al curbei considerate; există pe această curbă un punct (x_{m+2}, y_{m+2}) ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de (x_{m+1}, y_{m+1}) şi de (ξ, η), astfel că

$$u(x_{m+1}, y_{m+1}) + u(\xi, \eta) = u(x_{m+2}, y_{m+2}) + C_1;$$

de unde rezultă egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m+1} u(x_i, y_i) = u(x_{m+2}, y_{m+2}) + C,$$

în care x_{m+2}, y_{m+2} sunt funcţiuni raţionale de cele $m + 1$ puncte date după voie.

Teorema este aşà dar generală.

90. Vom întâlni mai departe formele normale

(1) $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ (Weierstrass),

(2) $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$ (Legendre).

1°. Relativ la cea dintâi, punctele x_1, x_2, x_3 fiind pe aceiaş foaie a lui T şi limitele inferioare ale celor trei integrale fiind punctul ∞, care este un punct de ramificaţiune în care ele sunt nule, avem (7), (§ 89)

$$(3) \quad u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) = o,$$

cu relaţiunea

$$(4) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2,$$

precum rezultă din prima egalitate (6) (§ 89).

Astfel dar, fiind date punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2), valoarea lui x_3 este determinată; acestei valori corespunde valoarea unică

$$y_3 = x_3 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

dată de a doua egalitate (6).

2°. Să considerăm forma lui Legendre şi să luăm familia de parabole

$$5) \qquad y = a x^2 + bx + 1.$$

Abscisele punctelor de intersecţiune sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$x\left[(a^2 - k^2)\, x^3 + 2\, abx^2 + (2\, a + b^2 + 1 + k^2)\, x + 2b\right] = o.$$

Punctul $x = o, y = 1$ rămânând fix, avem numai trei puncte de intersecţiune variabile împreună cu coeficienţii a, b. Abscisele x_1, x_2, x_3 ale acestor puncte satisfac relaţiunile

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2ab}{k^2 - a^2},$$

$$x_1 x_2 + x_3 (x_1 + x_2) = \frac{2\, a + b^2 + 1 + k^2}{a^2 - k^2},$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{2\, b}{k^2 - a^2};$$

de unde rezultă egalitatea

$$(6) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = a\, x_1 x_2 x_3.$$

De altă parte, ecuaţiunea (5) ne dă

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + 1, \qquad y_2 = ax_2^2 + bx_2 + 1;$$

de unde, eliminând b între aceste două ecuaţiuni, avem

$$(7) \qquad ax_1 x_2 = 1 + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_1 - x_2}.$$

Din ecuaţiunile (6) şi (7) rezultă expresiunea

$$(8) \qquad x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{y_1 x_2 - x_1 y_2},$$

sau multiplicând ambii termeni cu $y_1 x_2 + x_1 y_2$, avem, în virtutea ecuaţiunei (2),

$$x_3 = - \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2} \tag{9}$$

Luând punctul ($x = o$, $y = 1$) ca limită inferioară a celor trei integrale

$$u(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2}} \tag{10}$$

şi schimbând în (3) x_3 în $- x_3$, avem

$$u(x_1) + u(x_2) = u(x_3), \tag{11}$$

cu relaţiunea

$$x_3 = \frac{x_1 \sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2 x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)(1-k_2 x_1^2)}}{1-k^2 x_1^2 x_2^2}, \tag{12}$$

dedusă din egalitatea (9).

Ecuaţiunea lui Euler. Ecuaţiunea diferenţială

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0, \tag{13}$$

în care $f(x)$ este un polinom de gradul trei sau patru, poartă numele de *ecuaţiunea lui Euler.* Integrala generală a acestei ecuaţiuni, presupunând $f(x)$ de forma lui Legendre, se obţine înlocuind în formula (11) x_1 şi x_2 respectiv prin x şi y şi x_3 printr'o constantă C:

$$\frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1-k^2 x^2 y^2} = C. \tag{14}$$

In adevăr, integrala generală a ecuaţiunei (13) este

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \text{C-tă arbitrară.} \tag{15}$$

Membrul întâi al acestei ecuaţiuni fiind identic cu membrul întâi (11) în care facem $x_1 = x$, $x_2 = y$, rezultă că membrul al doilea $u(x_3)$ trebuie să se reducă la o constantă arbitrară, ceeace trage după sine că x_3 este o constantă arbitrară.

q. e. d.

CAPITOLUL X.

TRANSFORMAREA INTEGRALEI ELIPTICE DE SPEȚA I PRIN SUBSTITUȚIUNI LINEARE.

91. Fie

$$f(x) = a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \tag{1}$$

un polinom de gradul al patrulea, fără factori multipli și

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{2}$$

integrala eliptică corespunzătoare. Să facem substituțiunea

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}; \tag{3}$$

de unde

$$y = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}, \tag{4}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fiind coeficienți constanți cu condițiunea

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obținem

$$f(x) = \frac{\varphi(y)}{(\gamma y+\delta)^4}, \tag{5}$$

$\varphi(y)$ fiind un polinom de gradul al patrulea.

Integrala (2) devine

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \Delta \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}. \tag{6}$$

Integrala eliptică de speța I este așà dar un *covariant* al polinomului $f(x)$ de ordinul -1, căci reprezintând integrala transformată prin φ, avem

$$\varphi = \Delta^{-1} u.$$

Substituțiunea (3) este determinată când se dă raportul a trei coeficienți către al patrulea, însă pentru ca polinomul $\varphi(y)$ să fie determinat este necesar ca toți coeficienții substituțiunii să fie dați. Putem determinà substituțiunea (3) astfel ca la trei zeruri ale lui $f(x)$ să corespundă lui $\varphi(y)$ trei zeruri arbitrare, însă distincte, sau ca coeficienții acestui polinom să satisfacă trei condițiuni date. Bine înțeles, aceste condițiuni trebuie să difere de cele ce exprimă că $\varphi(y)$ are un zero multiplu. Putem, de exemplu, face

ca coeficientul termenului de gradul patru să fie nul, nu însă în acelaş timp şi cel de gradul trei, căci atunci punctul $y = \infty$ ar fi un zero dublu al polinomului $\varphi(y)$. Cu alte cuvinte, putem face ca polinomul transformat să fie de gradul trei, nu însă de gradul doi [1]).

92. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 zerurile polinomului $f(x)$ şi y_1, y_2, y_3, trei puncte arbitrare distincte date, ce voim să corespundă punctelor x_1, x_2, x_3. Substituţiunea care realizează această corespondenţă este, precum se recunoaşte imediat,

$$(7) \qquad \frac{(y-y_1)(y_2-y_3)}{(y-y_2)(y_1-y_3)} = \frac{(x-x_1)(x_2-x_3)}{(x-x_2)(x_1-x_3)}.$$

Al patrulea punct y_4 corespunzător lui x_4 va fi dar determinat de egalitatea

$$(8) \qquad \frac{(y_4-y_1)(y_2-y_3)}{(y_4-y_2)(y_1-y_3)} = \frac{(x_4-x_1)(x_2-x_3)}{(x_4-x_2)(x_1-x_3)},$$

adică raporturile anarmonice, formate de o parte cu punctele x_k şi de alta cu punctele y_k, sunt egale. Egalitatea precedentă exprimă o condiţiune necesară pentru ca polinomului $f(x)$, ale cărui zeruri sunt x_1, x_2, x_3, x_4 să corespundă, în virtutea transformării liniare, un polinom $\varphi(y)$, astfel ca zerurile lui $f(x)$ să corespundă respectiv zerurilor y_1, y_2, y_3, y_4 ale lui $\varphi(y)$. Această condiţiune este suficientă, căci înlocuind unul din punctele x_k, de exemplu x_4, prin variabila x şi punctul corespunzător y_4 prin variabila y, obţinem substituţiunea lineară (7), care împlineşte condiţiunile cerute.

Să punem

$$(9) \qquad A = a_0(x_1 - x_2)(x_3 - x_4),\ B = a_0(x_2 - x_3)(x_1 - x_4),$$
$$C = a_0(x_3 - x_1)(x_2 - x_4),$$

B şi C rezultând din A prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Între A, B, C există relaţiunea

$$(10) \qquad A + B + C = 0.$$

Permutând indicii 1, 2, 3, 4, obţinem 24 permutări cărora corespunde, pentru fiecare din constantele A, B, C, 6 valori diferite, cari se obţin păstrând unul din indici şi permutând pe ceilalţi trei. Patru câte patru, din cele 24 permutări, dau aceiaş valoare, anume: cele ce se obţin când permutăm în acelaş timp indicii doi câte doi.

---

[1]) Această imposibilitate mai rezultă şi din faptul că dacă polinomul transformat ar fi de gradul doi, x şi $\sqrt{f(x)}$ s'ar exprimă prin funcţiuni raţionale de un parametru, ceeace este imposibil (§ 77).

Avem, precum se recunoaşte lesne, tabloul următor, în care celor 6 permutări ale numerelor 1, 2, 3 corespund respectiv valorile în cari se schimbă cantităţile A, B, C:

(11)

1 2 3	A B C
2 3 1	B C A
3 1 2	C A B
1 3 2	— C — B — A
3 2 1	— B — A — C
2 1 3	— A — C — B

Să reprezintăm prin λ valoarea unuia din cele 6 raporturi anarmonice.

$$\lambda = -\frac{B}{C}.$$

Fiecărei linii orizontale a tabloului corespunde câte o valoare pentru λ. Aceste valori sunt respectiv

$$(12)\quad \lambda = -\frac{B}{C}, \lambda_1 = -\frac{C}{A} = \frac{C}{B+C} = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = \frac{B+C}{B} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \lambda_3 = -\frac{B}{A} = \frac{\lambda}{\lambda-1},$$

$$\lambda_4 = -\frac{A}{C} = 1-\lambda, \lambda_5 = -\frac{C}{B} = \frac{1}{\lambda}.$$

Toate raporturile sunt funcţiuni raţionale lineare de unul din ele şi se permută între dânsele când permutăm rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuaţiunii $f(x) = o$. Prin urmare orice funcţiune simetrică a celor 6 valori λ fiind funcţiune simetrică de rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 este o funcţiune raţională de coeficienţii lui $f(x)$; de unde rezultă că λ este rădăcina unei ecuaţiuni algebrice de gradul al şaselea, ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de coeficienţii lui $f(x)$. Cele 6 valori λ sunt în general inegale. Excepţiune există în cazurile următoare:

1°. Una din constantele A, B, C este nulă. Valorile λ sunt egale două câte două respectiv cu 0, 1, ∞. In acest caz două din punctele x_k coincid. Integrala corespunzătoare încetează de a fi eliptică.

2°. Două din cantităţile A, B, C sunt egale între ele. Fie de exemplu B = C; avem

$$\lambda = \lambda_5 = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 2.$$

Lui $\lambda = -1$ corespunde diviziunea armonică

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = -\frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}.$$

3°. $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{A}$. Valorile corespunzătoare ale lui λ sunt trei câte trei egale între ele și satisfac ecuațiunea

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 = 0.$$

Vom formă mai departe ecuațiunea de gradul al șaselea a lui λ.

93. *Digresiune asupra invarianților unui polinom de gradul al patrulea sau a unei forme bipatratice.*

Să punem $x = \frac{x_1}{x_2}$ și să considerăm un polinom omogen

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

Să aplicăm acestui polinom substituțiunea lineară

$$x_1 = \alpha y_2 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2, \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

corespunzătoare substituțiunii (3) și fie

$$\varphi(y_1, y_2) = b_0 y_1^4 + 4 b_1 y_1^3 y_2 + 6 b_2 y_1^2 y_2^2 + 4 b_3 y_1 y_2^3 + b_4 y_2^4$$

polinomul transformat.

Se verifică lesne că expresiunile

$$(13) \qquad g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$(14) \qquad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,$$

raționale și întregi de coeficienții polinomului $f(x_1, x_2)$ se reproduc în polinomul transformat $\varphi(y_1, y_2)$ multiplicate respectiv cu D^4 și D^6; anume, reprezintând prin g'_2 și g'_3 aceleași expresiuni formate cu coeficienții b_k ai lui $\varphi(y_1, y_2)$, avem

$$(15) \qquad g'_2 = D^4 g_2, \qquad g'_3 = D^6 g_3.$$

Pentru acest motiv, funcțiunile g_2 și g_3 au primit numele de *invarianți* ai polinomului omogen $f(x_1, x_2)$, precum și ai polinomului neomogen $f(x)$.

Oricare ar fi valoarea determinantului D, raportul

$$\frac{g_2^3}{g_3^2}$$

rămâne invariabil. Acest raport este un *invariant absolut* al

polinomului $f(x)$. Orice funcțiune rațională a acestui raport se bucură evident de aceiaș proprietate.

Să aplicăm generalitățile cari preced pentru a aduce integrala eliptică de speța I la cele trei forme *normale clasice*.

I. FORMA NORMALĂ A LUI WEIERSTRASS.

94. In loc de a aplică substituțiunea lineară generală, putem aplică succesiv substituțiuni lineare mai simple, al căror efect este acelaș.

Fie $x = a$ o rădăcină a ecuațiunii $f(x) = o$. Să punem

$$x = a - \frac{1}{y}; \tag{1}$$

obținem egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{y^4}\varphi(y), \tag{2}$$

în care avem

$$\varphi(y) = -f'(a)\,y^3 + \frac{1}{2}f''(a)\,y^2 - \frac{1}{6}f'''(a)\,y + a_0. \tag{3}$$

Pentru a face să dispară termenul de gradul al doilea din polinomul $\varphi(y)$, aplicăm substituțiunea

$$y = z + \frac{1}{6}\frac{f''(a)}{f'(a)}. \tag{4}$$

Reprezintând prin $\varphi_1(z)$ polinomul transformat, avem

$$\varphi(y) = \varphi_1(z) = -f'(a)\,z^3 + \frac{1}{12 f'(a)}[f''^2(a) - 2f'(a)f'''(a)]z - \frac{1}{36 f'^2(a)}[f'(a)f''(a)f'''(a) - \frac{1}{3}f''^3(a) - 36\,a_0 f'^2(a)], \tag{5}$$

a cărui formă este

$$\varphi_1(z) = -f'(a)\,z^3 + \frac{4}{f'(a)}Az - \frac{4^2}{f'^2(a)}B.$$

Putem identificà acest polinom cu polinomul complect de gradul patru, în care facem

$$a_0 = o,\quad a_1 = -\frac{1}{4}f'(a),\quad a_2 = o,\quad a_3 = \frac{V}{f'(a)},\quad a_4 = -\frac{4^2}{f'^2(a)}B.$$

Reprezintând prin g'_2, g'_3 invarianții acestui polinom de gradul patru avem, în virtutea expresiunilor (13) și (14) (§ 93),

$$g'_2 = A,\quad g'_3 = B.$$

Determinanții substituțiunilor (1) și (4) fiind egali cu 1, rezultă că invarianții g'_2 și g'_3 sunt egali cu invarianții g_2 și g_3 ai polinomului $f(x)$, astfel că polinomul $\varphi_1(z)$ este

$$(6) \qquad \varphi_1(z) = -f'(a)\,z^3 + \frac{4}{f'(a)}\,g_2 z - \frac{4^2}{f'^2(a)}\,g_3.$$

Să punem în fine

$$(7) \qquad z = -\frac{4t}{f'(a)};$$

obținem, reprezintând polinomul transformat prin $\psi(t)$,

$$(8) \qquad \varphi_1(z) = \psi(t) = \frac{4}{f'(a)}\,(4t^3 - g_2 t - g_3).$$

$$(9) \qquad \sqrt{\psi(t)} = \frac{4}{f'(a)}\,\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}.$$

Din substituțiunile considerate rezultă egalitățile

$$(10) \qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{dz}{\sqrt{\varphi_1(z)}} = -\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

și relațiunile

$$(11) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{f'(a)}{x-a} + \dfrac{1}{24}\,f''(a), \\ \sqrt{4t^3 - gt_2 - t^3} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{f'(a)}{(x-a)^2}\,\sqrt{f(x)}. \end{cases}$$

In virtutea acestor relațiuni, suprafața lui Riemann relativă la ecuațiunea

$$X^2 = f(x),$$

corespunde punct cu punct suprafeții definită de ecuațiunea

$$T^2 = 4t^3 - g_2 t - g_3.$$

Integrala de forma

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

se numește integrala *normală de speța I* a lui Weierstass.

Avem patru substituțiuni diferite cari transformă integrala propusă în aceia a lui Weierstrass, după cum luăm drept a, una oarecare din cele patru rădăcini ale ecuațiunii $f(x) = o$. Toate aceste substituțiuni nu schimbă coeficienții g_2 și g_3, cari sunt funcțiuni raționale de coeficienții acestei ecuațiuni.

95. *Transformarea integralei lui Weierstrass în ea însăși.* Să reprezintăm prin e_1, e_2, e_3 zerurile polinomului

$$(1) \qquad R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_2).$$

In cazul când cele trei zeruri sunt în linie dreaptă, presupunem e_2 cuprins între e_1 și e_3. Pentru ca o substituțiune liniară să poată transforma o integrală în ea însăși, este necesar ca să fie cuprinsă printre substituțiunile cari permută punctele critice două câte două, astfel ca raporturile anarmonice formate cu aceste puncte să fie egale (§ 92).

Să considerăm, de ex., raportul anarmonic

$$\frac{(e_1-\infty)\,(e_2-e_3)}{(e_2-\infty)\,(e_1-e_3)}$$

și să permutăm cele patru puncte conform tabloului

(2)
$$\left|\begin{array}{cccc} \infty & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & \infty & e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & \infty & e_1 \\ e_3 & e_2 & e_1 & \infty \end{array}\right|$$

în care punctele primei linii se permută respectiv cu cele situate pe aceiaș coloană ale celorlalte trei linii.

Obținem egalitățile

(3)
$$\frac{(e_1-\infty)\,(e_2-e_3)}{(e_2-\infty)\,(e_1-e_3)} = \frac{(\infty-e_1)\,(e_3-e_2)}{(e_3-e_1)\,(\infty-e_2)} = \frac{(e_3-e_2)\,(\infty-e_1)}{(\infty-e_2)\,(e_3-e_1)} = \frac{(e_2-e_3)\,(e_1-\infty)}{(e_1-e_3)\,(e_2-\infty)}.$$

Să înlocuim în primul raport punctul ∞ prin variabila y și în celelalte raporturi să înlocuim prin variabila x punctele cu cari ∞ se permută. Cu modul acesta vom egala raportul

$$\frac{(e_1-y)\,(e_2-e_3)}{(e_2-y)\,(e_1-e_3)}$$

respectiv cu raporturile

$$\frac{e_3-e_2}{e_3-x}, \quad \frac{e_3-x}{e_3-e_1}, \quad \frac{e_2-x}{e_1-x}.$$

Din egalitățile astfel obținute rezultă substituțiunile

(4)
$$x-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{y-e_1}, \quad x-e_2=\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{y-e_2}, \quad x-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{y-e_3}\ ^{1}).$$

[1]) Oricare din cele șase sisteme de patru raporturi, anarmonice egale dă aceleași substituțiuni.

Cele două din urmă nu difer de cea dintâi decât prin permutarea punctelor (e_1, e_2), (e_1, e_3). Aplicând prima substituţiune (4), obţinem relaţiunea

$$(5) \qquad \sqrt{R(x)} = \pm \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{(y-e_1)^2} \sqrt{R(y)} .$$

Toate aceste substituţiuni conduc la egalitatea

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} .$$

Semnul membrului al doilea rămâne nedeterminat pe cât timp nu fixăm corespondenţa dintre ramurile $\sqrt{R(x)}$ şi $\sqrt{R(y)}$, legate între ele prin formula (5).

Fiind dată ramura $\sqrt{R(x)}$, dacă luăm după voie una din cele două ramuri corespunzătoare ale lui $\sqrt{R(y)}$, trebuie să alegem semnul astfel ca cele două membre (5) să fie egale pentru valorile x, y cari se corespund [1]).

Substituţiunilor (4) corespund respectiv egalităţile

$$(7) \qquad \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \begin{cases} \displaystyle\int_{e_1}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}, \\ \displaystyle\int_{e_2}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}, \\ \displaystyle\int_{e_3}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}. \end{cases}$$

96. Să notăm cu ω_1, ω_3 un sistem de două semiperioade date de integralele

$$(8) \qquad \omega_1 = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_3 = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

luată fiecare dealungul liniei care uneşte punctele critice corespunzătoare. Aplicând acestor integrale respectiv a treia şi a doua substituţiune (4), obţinem, pentru cele două semiperioade, un al doilea sistem de integrale, anume

$$\omega_1 = \int_\infty^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_3 = \int_\infty^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} .$$ [2])

---

[1]) Să presupunem, de exemplu, rădăcinile reale $e_1 > e_2 > e_3$ şi pentru x real $> e_1$, $\sqrt{R(x)} > 0$; semnul membrului al doilea va fi semnul ce voim să dăm lui $\sqrt{R(y)}$.

[2]) Egalităţile

$$\int_{e_3}^{e_2} = \int_\infty^{e_1}, \quad \int_{e_2}^{e_1} = \int_\infty^{e_3},$$

se pot deduce din egalitatea (1) (§ 77), dacă curbele c, c' se reduc la ţărmurile liniilor cari unesc respectiv punctele e_2 cu e_3 şi e_1 cu ∞.

II. FORMA NORMALĂ A LUI RIEMANN.

97. Integrala normală a lui Riemann este de forma

$$(1) \qquad \varphi = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

λ fiind o constantă diferită de zero și unu. Să căutăm a deduce această integrală din aceia a lui Weierstrass

$$(2) \qquad u = \int \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}.$$

Pentru aceasta, să aplicăm variabilei y o transformare lineară, făcând să se corespundă într'o ordine oarecare, punctele critice ale integralelor (1) și (2).

Să considerăm, de exemplu, corespondența

$$(3) \qquad \begin{array}{c|cccc} y & \infty & e_3 & e_2 & e_1, \\ x & \infty & o & 1 & \frac{1}{\lambda}, \end{array}$$

căreia corespunde egalitatea raporturilor anarmonice

$$(4) \qquad \frac{(e_1-e_3)(e_2-\infty)}{(e_2-e_3)(e_1-\infty)} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda}-o\right)\left(1-\infty\right)}{\left(1-o\right)\left(\frac{1}{\lambda}-\infty\right)}.$$

De unde, pentru λ, valoarea

$$(5) \qquad \lambda = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Din egalitatea (4) se pot deduce patru substituțiuni lineare, prin care trecem dela integrala lui Weierstrass la integrala lui Riemann, dacă înlocuim $\frac{1}{\lambda}$ prin x și punem y succesiv în locul punctelor e_1, e_2, e_3, ∞.

Substituțiunile cari rezultă astfel sunt date respectiv de egalitățile

$$(6) \qquad \begin{cases} y-e_3=(e_2-e_3)x, & y-e_3=\frac{e_1-e_3}{x}, \\ y-e_1=(e_1-e_2)\frac{x}{1-x}, & y-e_2=(e_1-e_3)\frac{\lambda x}{1-\lambda x}, \end{cases}$$

λ având valoarea (5).

Toate aceste substituțiuni conduc la egalitatea

$$(7) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}};$$

de unde respectiv pentru fiecare din ele

$$(8)\quad \sqrt{e_1-e_3}\int_{\infty}^{y}\frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)\,(y-e_2)\,(y-e_3)}}=\begin{cases}\displaystyle\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\\ \displaystyle\int_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\\ \displaystyle\int_{1}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\end{cases}$$

$$\mathrm{R}\,(x)=x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x).$$

Semnul radicalului $\sqrt{e_1-e_3}$ poate fi luat după voie, iar semnul radicalului din membrul al doilea se determină desvoltând ambele membre în domeniul a două puncte critice cari se corespund şi egalând valorile principale corespunzătoare.

Reprezintând prin ω, ω' semiperioadele integralei lui Riemann corespunzătoare semiperioadelor (8) din paragraful precedent, avem

$$(9)\quad \omega=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\quad \omega'=\frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{1}{\lambda}}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}}.$$

Intre cele două sisteme de perioade avem, în virtutea substituţiunii $y-e_3=(e_1-e_3)x$ şi a valoarei $\lambda=\dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$,

$$(10)\qquad \omega=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},\qquad \omega'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}.$$

98. Avem patru substituţiuni lineare, printre cari substituţiunea identică, cari transformă integrala lui Riemann în ea însăş. Aceste substituţiuni se pot obţine procedând ca în cazul integralei lui Weierstrass. Ele se mai pot obţine înlocuind în prima egalitate (6) x prin x' şi eliminând y între această egalitate şi celelalte trei. Obţinem substituţiunile:

$$(11)\quad x'=\frac{1}{\lambda x},\quad x'=\frac{1}{\lambda}\,\frac{1-\lambda x}{1-x},\quad x'=\frac{1-x}{1-\lambda x},$$

în virtutea cărora avem respectiv egalităţile

$$(12)\qquad \int_{\infty}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}}=\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\\ \displaystyle\int_{1}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}},\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}}.\end{cases}$$

99. Permutând în egalitatea (5) punctele e_1, e_2, e_3, obținem pentru λ șase valori diferite, funcțiuni raționale de una din ele: cele șase raporturi anarmonice corespunzătoare. Acestor permutări corespund în virtutea egalității (6), șase sisteme de substituțiuni diferite, cari transformă integrala lui Weierstrass în aceea a lui Riemann, având pentru λ valoarea corespunzătoare acestei permutări.

Aceste substituțiuni se pot obține căutând a transformă integrala dată a lui Riemann în alta de aceeaș formă, având pentru λ cele șase valori considerate. Să reprezintăm prin λ' una dintre aceste valori și să stabilim corespondența între cele două variabile x, x' astfel ca ele să se anuleze în acelaș timp. Pentru aceasta, trebuie să stabilim corespondențele următoare:

(13) $$x = \begin{cases} x' = & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda'} & \infty \\ \hline 1^0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} & \infty \\ 2^0 & 0 & 1 & \infty & \frac{1}{\lambda} \\ 3^0 & 0 & \infty & 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 4^0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 1 & \infty \\ 5^0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \infty & 1 \\ 6^0 & 0 & \infty & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{cases}.$$

Fie

$$\varphi = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x)}}$$

integrala dată și

$$\varphi' = \int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda'\,x)}}$$

integrala transformată; vom aveà egalitatea

$$\varphi' = M\varphi,$$

M fiind un *multiplicator* independent de x.

Formulele de substituțiune, valorile lui λ' și a multiplicatorului M sunt date de tabloul următor:

(14)

	$x' =$	$\lambda' =$	$M^2 =$
1^0	x	λ	1
2^0	$\frac{(1-\lambda)x}{1-\lambda x}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$\frac{1}{1-\lambda}$
3^0	$\frac{\lambda x}{\lambda x-1}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$-\frac{1}{\lambda}$
4^0	λx	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
5^0	$\frac{(1-\lambda)x}{x-1}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$-\frac{1}{1-\lambda}$
6^0	$\frac{x}{x-1}$	$1-\lambda$	-1.

100. *Expresiunea invarianților* g_2, g_3 și J *în funcțiune de* λ. Polinomul

$$(1) \qquad 4x(1-x)(1-\lambda x) = 4\lambda x^3 - 4(1+\lambda)x^2 + 4x$$

poate fi privit ca un polinom de gradul patru cu coeficienți binomiali în care am avea

$$a_0 = o,\ a_1 = \lambda,\ a_2 = -\frac{2}{3}(1+\lambda),\ a_3 = 1,\ a_4 = o.$$

Reprezintând prin g'_2, g'_3, cei doi invarianți ai acestui polinom avem, aplicând formulele (13) și (14) (§ 93)

$$(2) \qquad g'_2 = \frac{4}{3}(\lambda^2 - \lambda + 1), \qquad g'_3 = \frac{4}{27}(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Să considerăm una din substituțiunile lineare (6) (§ 97), cari transformă integrala lui Weierstrass în aceea a lui Riemann; fie, de ex., substituțiunea

$$(3) \qquad y - e_3 = (e_2 - e_3)x,$$

căreia corespunde valoarea

$$(4) \qquad \lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3};$$

obținem egalitatea

$$(5) \qquad 4y^3 - g_2 y - g_3 = 4(e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_3)x(1-x)(1-\lambda x).$$

Se recunoaște lesne că multiplicând polinomul (1) cu produsul $(e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_3)$, invarianții g'_2 și g'_3 se multiplică respectiv cu

pătratul și cubul acestui produs, adică

$$(6)\qquad \begin{cases} g''_2 = \dfrac{4}{3}(e_2-e_3)^4(e_1-e_3)^2(\lambda^2-\lambda+1), \\ g''_3 = \dfrac{4}{27}(e_2-e_3)^6(e_1-e_3)^3(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2). \end{cases}$$

Intre invarianții ambelor membre (5), avem, în virtutea proprietății acestor invarianți (15) § 93.

$$g''_2 = D^4 g_2, \qquad g''_3 = D^6 g_3,$$

D fiind determinantul substituțiunii considerate.

Determinantul substituțiunii fiind

$$D = e_2 - e_3,$$

rezultă pentru g_2 și g_3, expresiunile

$$(7)\qquad \begin{cases} g_2 = \dfrac{4}{3}(e_1-e_3)^2(\lambda^2-\lambda+1), \\ g_3 = \dfrac{4}{27}(e_1-e_3)^3(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2). \end{cases}$$

O verificare a acestor formule se obține înlocuind λ prin valoarea sa (4), ceeace ne dă valorile cunoscute

$$g_2 = -4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)$$
$$g_3 = 4e_1e_2e_3\ ^1).$$

Fie

$$(8)\qquad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2$$

---

[1]) Dacă reprezintăm prin λ_1 una din cele șase valori ale lui λ, adică

$$\lambda_1 = \frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha},$$

α, β, γ fiind, într'o ordine oarecare, numerele 1, 2, 3 și considerăm expresiunea

$$y - e_\alpha = (e_\gamma - e_\alpha)x,$$

care stabilește corespondența

y	∞	e_α	e_γ	e_β
x	∞	o	1	$\frac{1}{\lambda_1}$

obținem expresiunile

$$g_2 = \frac{4}{3}(e_\beta - e_\alpha)^2(\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1)$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(e_\beta - e_\alpha)^3(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 2).$$

discriminantul polinomului

$$4\,y^3 - g_2\,y - g_3.$$

Inlocuind coeficienţii g_2 şi g_3 prin valorile lor (7), obţinem

$$\Delta = 16\,(e_1 - e_3)^6\,\lambda^2\,(\lambda - 1)^2. \tag{9}$$

Expresiunea

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} \tag{10}$$

este, ca şi raportul $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, un invariant absolut.

Din formulele (7) şi (9) rezultă egalitatea

$$J = \frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2\,(\lambda - 1)^2}. \tag{11}$$

Membrul al doilea este o funcţiune simetrică de cele şase valori (12) (§ 92) de cari λ este susceptibil prin permutarea punctelor e_1, e_2, e_3 sau, ceeace este tot una, prin permutarea rădăcinilor x_k ale ecuaţiunii

$$f(x) = a_0 x^4 + 4\,a_1 x^3 + 6\,a_2 x^2 + 4\,a_3 x + a_4 = o.$$

101. Fie J' invariantul analog lui J al unui polinom $\varphi(y)$ de gradul trei sau patru. Pentru ca să existe o substituţiune lineară între x şi y, în virtutea căreia polinoamele $f(x)$ şi $\varphi(y)$ să se poată corespunde, este necesar şi suficient ca cei doi invarianţi să fie egali.

In adevăr, pentruca rădăcinile x_k ale ecuaţiunii $f(x) = o$ să corespundă într'o ordine dată rădăcinilor y_k [1]) ($k = 1, 2, 3, 4$) ale ecuaţiunii $\varphi(y) = o$, este necesar şi suficient ca raporturile anarmonice λ, λ' corespunzătoare, formate cu aceste rădăcini, să fie egale (§ 92). Insă din egalitatea $\lambda = \lambda'$ rezultă că toate raporturile anarmonice, funcţiuni raţionale de λ, sunt egale respectiv cu toate raporturile anarmonice, funcţiuni raţionale de λ'. De unde rezultă egalitatea $J = J'$.

102. Fiind dată valoarea invariantului J, ecuaţiunea (11) determină cele şase valori de cari este susceptibil raportul anarmonic λ, format cu rădăcinile ecuaţiunii de gradul al patrulea sau ale ecuaţiunii de gradul al treilea, cu condiţiunea de a privi înacest caz a patra rădăcină infinită. Aceste valori sunt distincte şi finite pentru orice valoare $J \neq o, 1, \infty$.

---

[1]) Dacă $\varphi(y)$ este de gradul trei, luăm $y_4 = \infty$.

1°. Pentru $J = o$, ecuaţiunea (11) devine

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 = o,$$

ale cărei rădăcini sunt egale trei câte trei, având valorile

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

2°. Valoarea $J = 1$, dă ecuaţiunea

$$4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - 27\lambda^2(\lambda - 1)^2 = o,$$

ale cărei rădăcini egale două câte două sunt respectiv

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2.$$

3°. Pentru $J = \infty$, avem trei valori egale două câte două, anume

$$0, \quad 1, \quad \infty.$$

In acest din urmă caz, integrala

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

încetează de a fi eliptică, precum rezultă din transformata ei dată de forma lui Riemann

$$\varphi = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}.$$ [1]

III. FORMA NORMALĂ A LUI LEGENDRE.

103. Integrala normală a lui Legendre este de forma

$$(1) \qquad w = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}},$$

în care $\mu \neq \pm 1$ poartă numele de *modulul* integralei.

Să deducem această integrală din aceea a lui Riemann

$$(2) \qquad \varphi = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$$

cu ajutorul unei substituţiuni lineare.

---

[1]) Regăsim astfel pe altă cale excepţiunile menţionate (§ 92).

Să considerăm corespondența următoare între punctele critice al celor două integrale:

$$(3)\qquad \begin{array}{c|cccc} x & \infty & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \\ z & 1 & \frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\mu} & -1 \end{array};$$

de unde rezultă condițiunea (§ 92)

$$(4)\qquad \frac{(\infty - 0)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(\infty - 1)\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(-\frac{1}{\mu} + 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right)},$$

adică

$$(5)\qquad 1 - \lambda = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2;$$

de unde

$$(6)\qquad \mu = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{1 + \sqrt{1-\lambda}},$$

$$(7)\qquad \lambda = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}.$$

Inlocuind în egalitatea (4) $\frac{1}{\lambda}$ prin x și punctul corespunzător -1 prin z, obținem substituțiunea

$$(8)\qquad x = \frac{1+\mu}{2\mu} \cdot \frac{1 - \mu z}{1 - z}.$$

Efectuând calculele și ținând seama de valoarea (7) a lui λ, obținem egalitatea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = (1+\mu) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}}.$$

104. La o valoare λ corespunde, în virtutea formulei (6), două valori diferite pentru μ, inverse una alteia, iar dacă înlocuim λ prin $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$, care deasemenea este una din valorile raportului anarmonic al acelorași puncte critice, obținem pentru μ valori respectiv egale și de semne contrarii. La valori diferite ale lui λ corespund valori diferite pentru μ; căci, în cazul contrar, ar urma ca λ să primească valori diferite pentru aceeaș valoare μ, ceeace, în virtutea

egalității (7), este absurd. Cele douăsprezece valori μ, corespunzătoare celor șase valori λ sunt dar distincte.

Integrala generală.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

care se transformă în șase integrale diferite de forma lui Riemann, se transformă dar, în douăsprezece integrale diferite de forma lui Legendre, adică în integrale de forma

$$M \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-\mu^2 z^2)}},$$

în care sistemul (M, μ) are douăsprezece valori diferite.

105. Avem, pentru integrala lui Legendre, ca și pentru integrala lui Weierstrass și a lui Riemann, trei substituțiuni lineare diferite, cari o transformă în ea însăș. Aceste substituțiuni se obțin, în virtutea corespondențelor următoare, cari lasă neschimbat raportul anarmonic (4)

$$z = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\mu} & -1 \end{vmatrix}$$

$$(10) \qquad z' = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu} & 1 & -1 & -\frac{1}{\mu}, \\ -\frac{1}{\mu} & -1 & 1 & \frac{1}{\mu}, \\ -1 & -\frac{1}{\mu} & \frac{1}{\mu} & 1. \end{vmatrix}$$

Substituțiunile corespunzătoare sunt date de formulele

$$(11) \qquad z' = \frac{1}{\mu z}, \quad z' = -\frac{1}{\mu z}, \quad z' = -z.$$

In virtutea celei dintâi din aceste formule, avem egalitatea

$$(12) \qquad \int_{\frac{1}{\mu}}^{z} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-\mu^2 x^2)}} = \int_{1}^{z} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-\mu^2 x^2)}},$$

Integrala normală a lui Riemann se transformă imediat în aceea a lui Legendre prin substituțiunile de gradul al doilea

$$x = t^2.$$

Obținem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad k^2=\lambda.$$

Modulul k este diferit de modulul μ obținut prin ajutorul transformării lineare considerate mai sus.

CAPITOLUL XI.

INVERSIUNEA INTEGRALEI DE SPEȚA I.

106. Să considerăm integrala

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

în care $R(x)$ este un polinom de gradul 3 sau 4 și x_0 un punct dat după voie la distanță finită sau la infinit. Această integrală rămâne finită pentru orice valoare finită sau infinită a lui x; ea nu poate deveni infinită decât prin adăugarea unui număr nelimitat de perioade, prin urmare numai când x descrie un număr infinit de ori un drum închis care introduce modulele de periodicitate.

Ecuațiunea (1) este echivalentă cu ecuațiunea diferențială

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}, \tag{2}$$

în care facem să corespundă lui x_0 o valoare finită u_0, dată după voie.

Dacă x_0 este diferit de un punct de ramificațiune, avem în domeniul (x_0)

$$\sqrt{R(x)} = P(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots, a_0 \neq o; \tag{3}$$

iar dacă x_0 este un punct de ramificațiune, desvoltarea lui $\sqrt{R(x)}$ este de forma

$$\sqrt{R(x)} = (x-x_0)^{\frac{1}{2}} P(x-x_0), \quad [P(x-x_0)]_{x_0} \neq o. \tag{4}$$

In cazul întâiu avem așa dar

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots} = \frac{1}{a_0} + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots;$$

de unde

$$u - u_0 = \frac{x-x_0}{a_0} + \frac{b_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{b_2}{3}(x-x_0)^3 + \ldots$$

Efectuând inversiunea seriei din urmă, avem

$$x-x_0=a_0(u-u_0)+c_1(u-u_0)^2+\dots. \tag{5}$$

In cazul al doilea, punând $x-x_0=t^2$, ecuaţiunea (2) ia forma

$$\frac{dt}{du}=a_0+a_1t^2+a_2t^4+\dots., \quad a_0\neq o;$$

de unde

$$u-u_0=\frac{t}{a_0}+b_1t^3+b_2t^5+\dots,$$

sau, ridicând ambele membre la pătrat şi înlocuind t^2 prin $x-x_0$,

$$(u-u_0)^2=\frac{x-x_0}{a_0^2}\left[1+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\dots\right]$$

De unde, prin inversiune,

$$x-x_0=a_0(u-u_0)^2+a_1(u-u_0)^4+\dots \tag{6}$$

membrul al doilea conţinând numai puteri pare de $u-u_0$.

Dacă $x_0=\infty$, avem, în domeniul acestui punct,

$$\sqrt{R(x)}=x^2P\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

sau

$$\sqrt{R(x)}=x^{\frac{3}{2}}P\left(\frac{1}{x}\right) \tag{8}$$

$$\left\{\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\infty\neq o,\right.$$

după cum $R(x)$ este de gradul 4 sau 3.

In cazul întâiu avem:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots\right), \quad a_0\neq o$$

$$u-u_0=-\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{2x^2}-\frac{a_2}{3x^3}-\dots,$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{u-u_0}{a_0}\left[1+b_1(u-u_0)+b_2(u-u_0)^2+\dots\right],$$

$$x=-\frac{a_0}{u-u_0}\cdot\frac{1}{1+b_1(u-u_0)+b_2(u-u_0)^2+\dots}$$

$$x=-\frac{a_0}{u-u_0}+c_0+c_1(u-u_0)+c_2(u-u_0)^2+\dots \tag{9}$$

In cazul al doilea, avem

$$\frac{du}{dx} = x^{\frac{3}{2}} \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \right], \quad a_0 \neq o,$$

$$u - u_0 = -2a_0 x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots \right],$$

$$(u - u_0)^2 = \frac{4a_0^2}{x} \left[1 + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2} + \dots \right],$$

$$\frac{1}{x} = \frac{(u-u_0)^2}{4a_0^2} \left[1 + d_1 (u-u_0)^2 + \dots \right];$$

de unde

$$(10) \qquad x = \frac{4a_0^2}{(u-u_0)^2} + a_0 + a_1 (u-u_0)^2 + a_2 (u-u_0)^4 + \dots,$$

membrul al doilea conținând numai puteri pare de $u - u_0$.

107. Din cele ce preced rezultă că orice integrală x a ecuațiunii (2) se poate pune, în domeniul punctului u_0, situat la distanță finită în planul (u), sub una din formele

$$(11) \qquad x - x_0 = \mathrm{P}(u - u_0)$$

sau

$$(12) \qquad x = \frac{1}{(u-u_0)^m} \mathrm{P}(u - u_0) \qquad \left\{ \left[\mathrm{P}(u - u_0) \right]_{u = u_0} \neq o, \right.$$

m fiind egal cu 1 sau 2, după cum $\mathrm{R}(x)$ este de gradul 4 sau 3. Ceeace revine a zice că există numere pozitive r, a căror limită inferioară este un număr $\varrho > o$, astfel că în cercul $|u - u_0| = r$, ecuațiunea (2) admite o integrală de forma (11) sau (12).

Pentru a puteà conchide că integrala generală x este o funcțiune analitică uniformă de u, neavând în tot planul alte singularități decât poluri, rămâne să arătăm că plecând dela un punct dat u_0 cu o valoare arbitrară $x = x_0$, obținem prin prelungire analitică, într'un punct oarecare u, o valoare determinată (finită sau infinită) pentru x; căci în stabilirea formulelor (11) și (12) s'a presupus că asociăm o valoare finită a lui u cu o valoare determinată, finită sau infinită x.

Să considerăm dar un drum oarecare L trecând prin u_0 și fie $x = x_0$ valoarea ce facem să corespundă lui u_0; valoarea ce va primì x prin prelungirea elementului inițial dealungul acestui drum va fi determinată în orice punct al drumului. Să presupunem că n'ar

fi așa și fie $u = a$ cel dintâiu punct pe L în care x devine nedeterminat. Să considerăm pe L un punct $u = \beta$ cuprins între u_0 și a așa ca distanța sa de a să fie mai mică decât ϱ. Elementul care reprezintă x sau $\frac{1}{x}$ corespunzător punctului β va fi convergent într'un cerc cu centrul în β și a cărui rază este cel puțin egală cu ϱ, prin urmare acest cerc cuprinde în interiorul său punctul a; ceeace este în contradicțiune cu ipoteza că punctul a este un punct de nedeterminare. Ipoteza că funcțiunea x ar puteà deveni nedeterminată într'un punct u oarecare este așàdar inadmisibilă.

Așa dar funcțiunea x, obținută prin inversiunea integralei eliptice de speța I, este o funcțiune analitică, uniformă în tot planul, neavând alte singularități decât poluri de ordinul întâi sau al doilea, după cum polinomul de sub radical este de gradul 4 sau 3, precum rezultă din formulele (9) și (10).

Reprezintând prin ω și ω' două module de periodicitate distincte ale integralei u, avem (§ 74), pentru aceeaș valoare a lui x, o infinitate de valori pentru u, cuprinse în expresiunea

$$u = u_0 + m\omega + n\omega', \tag{13}$$

u_0 fiind una din ele. De unde rezultă, punând $x = \varphi(u)$, egalitatea

$$\varphi(u + m\omega + n\omega') = \varphi(u), \tag{14}$$

oricare ar fi valoarea finită a lui u.

Funcțiunea $x = \varphi(u)$ *este așa dar o funcțiune de* u, *având cantitățile* ω *și* ω' *ca perioade.* Această proprietate fundamentală a fost descoperită în acelaș timp de *Abel* și *Iacobi.*

Corolar. Din egalitatea $\sqrt{R(x)} = \frac{dx}{du} = \varphi'(u)$ rezultă că radicalul $\sqrt{R(x)}$, privit ca funcțiune de u, este funcțiune uniformă în tot planul (u), având aceleași poluri și aceleași perioade ca funcțiunea $\varphi(u)$.

108. *Reprezintarea suprafeții T' a lui Riemann pe planul* (u) *printr'o integrală eliptică de speța I.*

Fie

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{1}$$

o integrală eliptică de speța I, $f(x)$ fiind un polinom de gradul 3

sau 4. Orice ramură a integralei fiind o funcțiune olomorfă de x pe suprafața T' (§ 71) și viceversa, $x = \varphi(u)$ fiind o funcțiune uniformă în tot planul (u) (§ 107), rezultă că suprafața T' și aria (A) în care ea se transformă, în virtutea integralei (1), se corespund punct cu punct. Conturul lui T', adică cele patru țărmuri ale tăieturilor A și B (fig. 35) se transformă într'un contur simplu închis ale cărui puncte sunt toate situate la distanță finită. Acest contur este format din patru porțiuni de linii, drepte sau curbe, corespunzătoare, punct cu punct, celor patru țărmuri. De altă parte, în două puncte situate față în față pe țărmurile unei tăieturi, diferența dintre valorile integralei fiind constantă (egală cu perioada corespunzătoare tăieturii), rezultă că punctele conturului (A) se corespund două câte două: u', u'', astfel că între ele există relațiunea

(2) $$u' - u'' = \text{perioadă}.$$

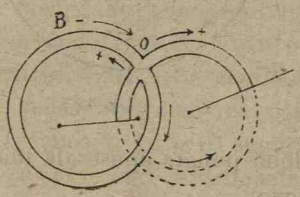

Fig. 35

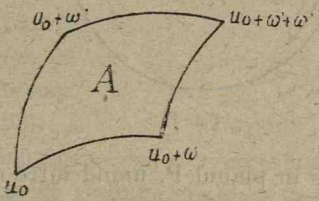

Fig. 36

Fie, de exemplu, u_0 valoarea lui u în punctul de întâlnire O ale celor patru țărmuri și să presupunem că x plecând dela punctul O descrie țărmul exterior B în sensul săgeții: u va desorie un arc de curbă ale cărui puncte extreme sunt u_0, $u_0 + \omega$; punctul x continuând mișcarea sa și descriind țărmul exterior A, u va descrie un arc dela punctul $u_0 + \omega$ până la punctul $u_0 + \omega + \omega'$, ω și ω' fiind respectiv perioadele corespunzătoare tăieturilor A și B (§ 73). Țărmurilor opuse celor două dintâi vor corespunde, în virtutea relațiunii (2), două arce respectiv paralele, cel dintâi cuprins între punctele $(u_0 + \omega + \omega', u_0 + \omega')$ și cel din urmă între punctele $(u_0 + \omega', u_0)$ (fig. 36). Conturul lui (A) este așadar un paralelogram rectiliniu sau curbiliniu, pe care îl numim *paralelogramul perioadelor*. Când x descrie conturul lui T', u descrie acest paralelogram fără a trece de două ori prin același punct, în virtutea corespondenței biunivoce dintre suprafața T' și aria A.

109. Să considerăm, în particular, integrala normală a lui Weierstrass

(1) $$u = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

în cazul când rădăcinile e_1, e_2, e_3, ale polinomului de sub radical, sunt reale şi dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$. Să limităm planul (x) prin două tăieturi dealungul axei reale $(e_1, +\infty)$, (e_2, e_3) (fig. 37), sau $(e_3, -\infty)$, (e_1, e_2) (fig. 38) şi să considerăm suprafaţa T' formată din acest plan — pe care îl numim planul P — şi dintr'un plan suprapus — pe care îl numim planul S —, liniile de trecere dela un plan la celalt fiind tăieturile considerate. Conturul acestei suprafeţe va fi considerat ca format din ţărmurile tăieturilor, din cercul $|x| = R$ şi din cercurile $|x - e_\alpha| = r$, $(\alpha = 1, 2, 3)$, toate

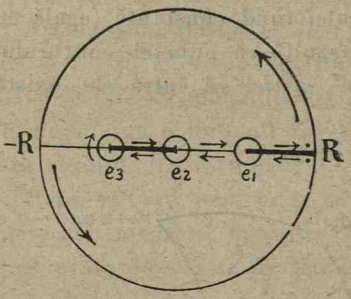

Fig. 37

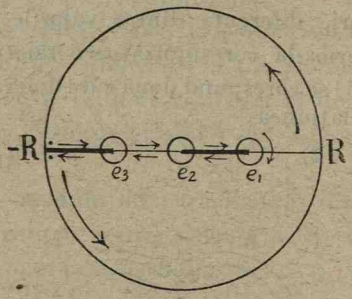

Fig. 38

situate în planul P, unind între ele două puncte opuse ale tăieturii corespunzătoare; $\lim R = \infty$, $\lim r = o$.

Să reunim aci determinaţiunile radicalelor

$$\sqrt{x - e_1},\ \sqrt{x - e_2},\ \sqrt{x - e_3},$$

considerate pe cele două plane, pentru x real, cuprins între $-\infty$ şi $+\infty$.

Adoptând, pentru $x > e_1$, în planul P, pe ţărmul inferior, valori pozitive pentru cele trei radicale, avem, dealungul axei reale, în partea inferioară, egalităţile

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{x - e_1} = -i\sqrt{e_1 - x} & \text{pentru } x < e_1, \\ \sqrt{x - e_2} = -i\sqrt{e_2 - x} & \text{» } x < e_2, \\ \sqrt{x - e_3} = -i\sqrt{e_3 - x} & \text{» } x < e_3. \end{cases}$$

Radicalele vor fi determinate pe ambele plane ale suprafeţii T'. In virtutea acestor determinaţiuni, integrala

$$(3)\qquad u = \int_\infty^x \frac{-dx}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

luată dealungul conturului închis (fig. 37) sau (fig. 38), în sensul

indicat de săgeți, conduce respectiv la egalitățile următoare, cari determină un sistem de perioade [1]):

$$(4)\quad 2\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}} = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(x-e_3)}},$$

$$(5)\quad 2\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(e_3-x)}} = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}},$$

radicalele fiind reale și pozitive în ambele membre.

Perioada $2\omega_1$ este dar reală și pozitivă, iar perioada $2\omega_3$ este pur imaginară, coeficientul lui i fiind pozitiv.

In virtutea rezultatelor de mai sus, este ușor să găsim reprezintarea planelor P și S pe planul (u) cu ajutorul integralei (3).

Pentru a obține reprezintarea semiplanului P, situat dedesubtul axei reale, să luăm integrala (3) dealungul conturului format din axa reală, din care excludem punctele critice prin semicercuri infinit mici, și din semicercul cu centrul în $x = o$, având o rază R pe care o facem să tindă către infinit; toate semicercurile sunt situate dedesubtul axei reale (fig. 39).

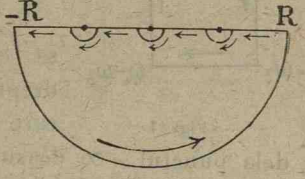

Fig. 39

Se recunoaște lesne că semicercurilor $|x - e_a| = r$ corespund în planul (u) arce cari difer foarte puțin de cadrane circulare descrise în sensul negativ și cari tind către zero împreună cu raza r; iar semicercului $|x| = R$ corespunde un cadran cu centrul în $u = o$, care tinde către zero împreună cu $\frac{1}{R}$. Segmentelor (R, e_1) și (e_2, e_3) corespund, pentru u, valori reale cari variază respectiv dela 0 la ω_1 și dela $\omega_1+\omega_3$ până la ω_3; segmentelor (e_1, e_2), $(e_3, -R)$ corespund

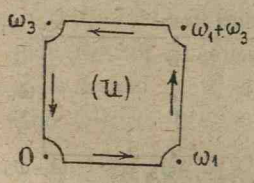

Fig. 40

expresiunile

$$u = \omega_1 + it, \qquad u = \omega_3 - it,$$

t crescând dela o la $\frac{\omega_3}{i}$. Figura (40) reprezintă conturul (u), corespunzător conturului (x) (fig. 39). Cele două contururi corespunzându-se punct cu punct și u fiind funcțiune olomorfă de x în in-

---

[1]) Conturul din (fig. 37) este format din liniile:

$Re_1 + e_1 e_2 + e_2 e_3 +$ cercul $(e_3) + e_3 e_2 + e_2 e_1 + e_1 R +$ cercul (R)

Conturul din fig. (38):

$(-R, e_3) + e_3 e_2 + e_2 e_1 +$ cercul $(e_1) + e_1 e_2 + e_2 e_3 + (e_3, -R) +$ cercul (R).

Integralele după segmentele $e_1 e_2$ și $e_2 e_1$ din prima figură și cele după segmentele $e_3 e_2$, $e_2 e_3$ din a doua figură se distrug.

teriorul conturului (x), rezultă, făcând $r = o$, $R = \infty$, că semiplanul P, situat dedesubtul axei reale, este reprezintat într'un mod conform, pe dreptunghiul (u) ale cărui vârfuri sunt punctele

$$O,\ \omega_1,\ \omega_1 + \omega_3,\ \omega_3.$$

Prin prelungire analitică se conchide [1]) că semiplanul P, situat deasupra axei reale, se transformă într'un dreptunghiu simetric cu cel dintâi, în raport cu axa reală (u), ale cărui vârfuri sunt punctele $u = o,\ \omega_1,\ \omega_1 - \omega_3, -\omega_3$.

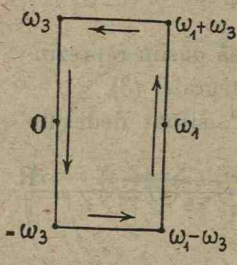

Fig. 41

Cele două semiplane P, separate printr'o tăietură făcută dealungul axei reale dela punctul e_1 până la $-\infty$, cu alte cuvinte, planul P limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$, şi dreptunghiul (u) cu vârfurile

$$-\omega_3,\quad \omega_1 - \omega_3,\quad \omega_1 + \omega_3,\quad \omega_3$$

se corespund dar punct cu punct. Acest dreptunghiu poate fi obţinut printr'o mişcare continuă a lui x; de ex., dacă x pleacă dela punctul $-\infty$ deasupra axei reale (fig. 38) şi descrie drumul închis indicat de săgeţi, u pleacă dela punctul $u = o$ şi descrie, în sensul săgeţilor, conturul reprezintat prin fig. 41. Când cercurile cele mici tind către zero şi cercul cel mare către infinit, conturul devine dreptunghiul considerat.

Pentru a obţine reprezintarea planului S pe planul (u), este deajuns să observăm că în două puncte suprapuse în planele P şi S, radicalul $\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$ are valori egale şi de semne contrarii; prin urmare, acestor puncte x corespund punctele u simetrice în raport cu origina $u = o$. Aşà dar semiplanul S, situat deasupra sau dedesubtul axei reale (x), este reprezintat pe planul (u) printr'un dreptunghiu situat respectiv deasupra sau dedesubtul axei reale; cel dintâi având vârfurile O, ω_3, $-\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1$ şi cel de al doilea având vârfurile O, $-\omega_3$, $-\omega_1 - \omega_3$, $-\omega_1$. Planul S, limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$ şi dreptunghiul cu vârfurile ω_3, $-\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1 - \omega_3$, $-\omega_3$ se corespund punct cu punct.

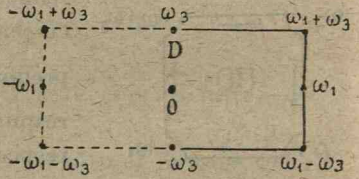

Fig. 42

Cele două dreptunghiuri (u), corespunzătoare planelor P şi S, formează un dreptunghiu D (fig. 42), având vârfurile

$$\omega_1 - \omega_3,\quad \omega_1 + \omega_3,\quad -\omega_1 + \omega_3,\quad -\omega_1 - \omega_3$$

[1]) I. p. 302

Putem alege un contur pentru x astfel ca u să descrie conturul lui D într'un mod continuu. Pentru aceasta, să considerăm suprafața T' limitată de tăieturile (e_1, e_2), $(e_3, -\infty)$ și să luăm drept contur drumul format din liniile următoare (fig. 43): segmentul $e_1 e_3$ din semiplanul inferior P; cercul (e_3) trecând din P în S; țărmul superior $e_3 e_1$ urmat, prin intermediul cercului e_1, de cel inferior $e_1 e_3$ pe planul S; cercul (e_3) trecând din S în P; țărmul superior $e_3 e_1$ din P; cercul (e_1) trecând din țărmul superior la cel inferior al lui P.

Când x descrie acest contur (fig. 43) în sensul pozitiv, începând dela punctul e_1, u descrie, în acelaș sens, conturul lui D, începând dela punctul ω_1 (fig. 42). Liniile pline ale conturului (x) sunt situate pe planul P, cele punctate pe planul S; liniile corespunzătoare ale dreptunghiului D sunt reprezintate în același mod.

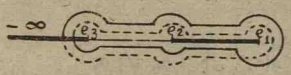

Fig. 43

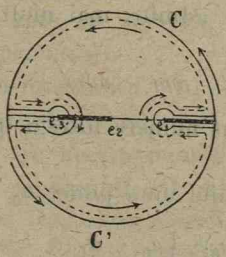

Fig. 44

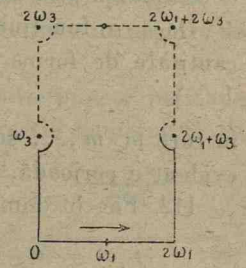

Fig. 45

110. In locul liniilor de trecere dintre planele P și S reprezintate prin (fig. 38), să considerăm liniile de trecere reprezintate prin (fig. 37) și să facem ca x să descrie conturul format din liniile următoare (fig. 44):

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{R}\,e_1)_-, (e_1), (e_1\mathrm{R})_+, (\mathrm{RCR'}), (\mathrm{R'}e_3)_+, (e_3), (\mathrm{P}); \\ (e_3\mathrm{R'})_-, (\mathrm{R'C'R}), (\mathrm{R}e_1)_-, (e_1), (e_1\mathrm{R})_+, (\mathrm{RCR'}), (\mathrm{R'}e_3)_+, (\mathrm{S}); \\ (e_3), (e_3\,\mathrm{R'})_-, (\mathrm{R'C'R}), (\mathrm{P}). \end{array}\right.$$

Notă. — Notațiunea $(ab)_+$ indică țărmul superior sau inferior al segmentului $(a\,b)$. Parentezele (P), (S) reprezintă cele două plane in cari sunt situate liniile cari preced aceste semne; (e_1) și (e_3) sunt cercurile cu centrele in punctele corespunzătoare, situate, parte intr'un plan, parte in celalt plan.

Când x descrie acest contur, plecând dela punctul R $(+\infty)$ pe țărmul inferior din planul P, u pleacă dela O și descrie dreptunghiul $(2\,\omega_1, 2\,\omega_3)$ (fig. 45). Liniile pline și cele punctate se corespund.

CAPITOLUL XII.

FUNCȚIUNI DUBLU PERIODICE.

111. O funcțiune $f(u)$ se zice *periodică* dacă există o cantitate constantă ω astfel că, oricare ar fi valoarea variabilei u — căreia de obiceiu se zice și *argument* — avem

$$f(u+\omega) = f(u);$$

ω se chiamă *perioada* funcțiunii $f(u)$.

Dacă o funcțiune admite mai multe perioade ω, ω',..., orice cantitate de forma

$$m\omega + m'\omega' + \ldots,$$

în care m, m',... sunt numere întregi, pozitive sau negative, este evident o perioadă.

112. Fie, în domeniul unui punct u_0,

$$f(u) = (u-u_0)^k \left[a_0 + a_1(u-u_0) + \ldots\right], \quad a_0 \neq o,$$

k fiind un număr întreg pozitiv sau negativ. Să înlocuim, în ambele membre, u prin $u-\omega$; membrul întâi se reproduce și avem egalitatea

$$f(u) = \left[u-(u_0+\omega)\right]^k \left[a_0 + a_1(u-u_0) + \ldots\right].$$

De unde se conchide că dacă funcțiunea $f(u)$ admite punctul u_0 ca zero sau pol de un ordin k, ea admite respectiv ca zero sau pol de *acelaș ordin* punctul $u_0+\omega$ și, în general, toate punctele cuprinse în expresiunea

$$u_0 + m\omega + n\omega',$$

m și n fiind numere întregi arbitrare.

113. Să considerăm punctele cari figurează perioadele unei funcțiuni uniforme $f(u)$, cărora, pentru prescurtare, le vom zice *puncte perioade*. Să unim printr'o linie dreaptă origina cu un punct perioadă oarecare și fie, pe acestă dreaptă, ω punctul perioadă cel mai apropiat de origină. Există un număr $\varrho > o$ astfel că $|\omega| > \varrho$; căci a presupune contrariul, ar urma să fie posibilă inegalitatea

$$|\omega| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De unde ar rezultà ca într'un punct ordinar oarecare u și în punctul infinit vecin $u+\omega$, funcțiunea $f(u)$ să aibă aceeaș valoare, adică punctele ordinare în cari $f(u)$ primește aceeaș valoare n'ar fi puncte izolate; ceeace este imposibil, afară numai dacă $f(u)$ se reduce la o constantă.

Fie Ω un punct perioadă situat pe dreapta nelimitată care unește origina cu punctul ω; vom aveà egalitatea

$$\Omega = m\,\omega,$$

m fiind un număr întreg $\gtrless$ o. Căci dacă punctul

$$(m + \lambda)\,\omega,$$

λ fiind real și cuprins între 0 și 1, ar fi o perioadă, ar urmà ca $\lambda\omega$ să fie o perioadă; ceeace este contrar ipotezei că ω este, pe dreapta considerată, punctul perioadă cel mai apropiat de origină.

Perioada ω, care împlinește condițiunea că orice perioadă figurată pe dreapta (O, ω) este un multiplu pozitiv sau negativ de ω, se numește *perioadă primitivă.*

114. Să presupunem că funcțiunea $f(u)$ admite puncte perioade situate și în afară de dreapta (O,ω), care unește punctul O cu punctul ω și fie ω' unul din aceste puncte (fig. 46) a cărui distanță de dreaptă (O, ω) este cea mai mică posibilă. De unde rezultă că, în fâșia cuprinsă între dreapta nelimitată (O, ω) și paralela la această dreaptă dusă prin punctul ω' nu există nici un punct perioadă: ω' este o perioadă primitivă; căci pe dreapta (O, ω'), punctul ω' este cel mai apropiat de origină. Orice punct perioadă situat pe această dreaptă este de forma $n\omega'$, n fiind un număr întreg pozitiv sau negativ.

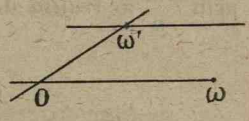

Fig 46

115. *Teoremă. Două perioade între cari există o relațiune lineară, omogenă cu coeficienți întregi, sunt multipli ai unei singure perioade.*

In adevăr, fie ω, ω' două perioade între cari există o relațiune lineară și omogenă pe care o putem presupune pusă sub forma

$$\frac{\omega}{m} = \frac{\omega'}{m'}, \tag{1}$$

m și m' fiind numere întregi, prime între ele. Putem determinà o infinitate de sisteme de două numere întregi n și n' cari să satisfacă ecuațiunea

$$mn + m'n' = 1. \tag{2}$$

Să reprezintăm prin Ω raporturile (1) și să multiplicăm ambele membre (2) cu Ω; vom obține egalitatea

$$n\omega + n'\omega' = \Omega. \tag{3}$$

Cantitatea Ω este așa dar o perioadă și $\omega = m\Omega$, $\omega' = m'\Omega$ sunt multipli ai acestei perioade. q. e. d.

Două perioade se zic *distincte* dacă între ele nu există relaţiune de forma (1).

116. *Teoremă. Raportul a două perioade distincte ale unei funcţiuni analitice uniforme nu poate fi un număr real.*

In adevăr, dacă raportul a două perioade ω, ω' este real, punctele perioade corespunzătoare sunt în linie dreaptă cu origina şi prin urmare ω şi ω' sunt multipli ai unei aceleiaş perioade primitive: ele nu sunt dar distincte.

Iată alt mod de a proba această teoremă fundamentală.

1°. Dacă raportul celor două perioade ar fi raţional, ele n'ar fi distincte (§ 115).

2°. Să presupunem raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ egal cu un număr incomensurabil şi să-l desvoltăm într'o fracţiune continuă. Reprezintând prin $\frac{m}{n}$ o *redusă* de un rang oarecare, avem

$$\left| \frac{\omega'}{\omega} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2};$$

de unde

$$| m\omega - n\omega' | < \frac{|\omega|}{n}.$$

Membrul întâi al acestei inegalităţi este o perioadă a funcţiunei, care poate deveni mai mică decât orice cantitate dată, căci n poate fi luat oricât de mare voim: ceeace este imposibil.

I. REPREZINTAREA GEOMETRICĂ A PERIODICITĂŢII DUBLE.

117. Fie $\omega = \varrho e^{i\alpha}$, $\omega' = \varrho' e^{i\alpha'}$ două perioade distincte; prin urmare diferenţa $\alpha - \alpha'$ este diferită de o şi de π. Putem dar pe segmentele (O, ω), (O, ω') să construim un paralelogram: *paralelogramul perioadelor.* Vârfurile acestui paralelogram (fig. 47) sunt punctele $u = O, \omega, \omega', \omega + \omega'$.

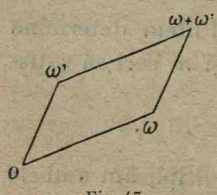

Fig. 47

Să ne închipuim prelungite laturile paralelogramului până la infinit, în ambele sensuri, şi pe latura (O, ω') prelungită ca şi pe paralela ei să luăm, începând dela vârfurile paralelogramului, distanţe egale cu $|\omega'|$; deasemenea pe celelalte două laturi prelungite să luăm, începând dela aceleaşi vârfuri, distanţe egale cu $|\omega|$. Prin punctele aşa obţinute să ducem paralele cu laturile

paralelogramului; formăm în modul acesta o rețeà de o infinitate de paralelograme de perioade cari acoper tot planul. Vârfurile acestor paralelograme sunt date de expresiunea $m\omega + n\omega'$, m și n fiind numere întregi pozitive, negative sau nule; prin urmare, exceptând punctul $u = o$, ele sunt puncte perioade.

118. Două puncte u_0, u se zic *congruente*, dacă între ele există relațiunea

$$u = u_0 + m\omega + n\omega', \tag{1}$$

m și n fiind numere întregi oarecari. Această egalitate se înlocuește de obiceiu prin congruența

$$u \equiv u_0 \,(mod\delta\delta\ \omega,\ \omega'),\ ^1)$$

după exemplul din Teoria Numerelor unde, dacă voim să punem în evidență restul r al diviziunii unui număr a printr'un număr d, fără a menționà câtul, scriem

$$a \equiv r \ (mod\ d).$$

Relațiunea (1) arată că în *interiorul* unui paralelogram de perioade nu există două puncte congruente între ele, pe când unui punct situat pe o latură a paralelogramului îi corespunde un punct congruent pe latura opusă și că toate vârfurile sunt puncte congruente. Pentru a puteà enunțà propoziționi generale relativ la un paralelogram de perioade, *convenim* a privì o latură a rețelei de paralelograme ca făcând parte dintr'un singur paralelogram, iar latura opusă ca aparținând paralelogramului imediat vecin. Cu modul acesta, unui punct al paralelogramului — fie acest punct interior, pe o latură sau un vârf — nu-i corespunde nici un punct congruent care să facă parte din acelaș paralelogram. Așadar două puncte congruente aparțin la paralelograme diferite. Aceeaș relațiune (1) arată că unui punct u_0 oarecare din plan îi corespunde un punct congruent în primul paralelogram.

Să mai observăm că putem luà ca paralelogram de perioade un paralelogram care să aibă unul din vârfurile sale într'un punct $u = a$ oarecare, celelalte vârfuri vor fi atunci punctele $a + \omega$, $a + \omega'$, $a + \omega + \omega'$. Printr'o translațiune în plan putem aduce acest paralelogram să coincidă cu cel al căruia unul din vârfuri este punctul $u = o$.

119. Fie ω și ω' două perioade primitive, paralelogramul corespunzător se zice *elementar*. Din definițiunea perioadelor primitive rezultă că în interiorul unui paralelogram elementar, având unul

---

[1]) Notațiunea *mod δδ* a fost adoptată pentru a distinge congruențele relative la două module de cele relative la un modul.

din vârfuri în origină nu există punct perioadă. De asemenea pe laturile paralelogramului nu există alte puncte perioade decât vârfurile lui. Propoziţiunea este evidentă în privinţa laturilor (O, ω), (O, ω'). De altă parte, existenţa unui punct perioadă pe una din laturile $(\omega, \omega + \omega')$, $(\omega', \omega + \omega')$ ar atrage după sine existenţa unui asemenea punct pe laturile opuse (O, ω), (O, ω'). De unde conchidem că în tot planul nu există alte puncte perioade decât vârfurile reţelei construite cu ajutorul paralelogramului (ω, ω'). Căci dacă ar există în plan un punct perioadă diferit de un vârf al reţelei de paralelograme considerate, ar urmă să existe un asemenea punct în paralelogramul elementar (ω, ω') sau pe una din laturile acestui paralelogram într'un punct diferit de vârfurile sale: ceeace am văzut că este imposibil. De acî rezultă teorema fundamentală următoare:

O *funcţiune analitică uniformă de o variabilă nu admite mai mult decât două perioade distincte.*

120. *O funcţiune analitică uniformă dublu periodică admite o infinitate de sisteme de perioade primitive.* In adevăr, fie ω şi ω' un sistem de perioade primitive şi ω_1, ω'_1 alte două perioade; avem

$$(1) \qquad \omega_1 = \mu\omega + \mu'\omega', \quad \omega_1' = \nu\omega + \nu'\omega',$$

μ, μ', ν, ν' numere întregi. Pentru ca ω_1 şi ω'_1 să formeze un sistem de perioade primitive este necesar şi suficient să avem

$$(2) \qquad \omega = m\omega_1 + m'\omega'_1, \quad \omega' = n\omega_1 + n'\omega'_1,$$

m, m', n, n' numere întregi; căci atunci orice perioadă se va exprimă printr'o sumă de multipli de ω_1 şi ω'_1. Pentru aceasta este necesar şi suficient să avem

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Condiţiunea este evident suficientă. Ea este şi necesară. Din ecuaţiunile (1) scoatem

$$(4) \qquad \omega = \frac{\nu'\omega_1 - \mu'\omega'_1}{\Delta}, \quad \omega' = \frac{\mu\omega'_1 - \nu\omega_1}{\Delta}.$$

Identificând aceste valori ale lui ω şi ω' cu cele date de ecuaţiunile (2) obţinem

$$(5) \qquad \nu' = m\Delta, \ \mu' = -m'\Delta, \quad \nu = -n\Delta, \quad \mu = n'\Delta$$

De unde rezultă

$$\Delta = \begin{vmatrix} n' & -m' \\ -n & m \end{vmatrix} \Delta^2,$$

sau $$(m n' - n m') \Delta = 1;$$

ambii factori ai membrului întâiu fiind numere întregi, conchidem

$$mn' - nm' = \pm 1, \quad \mu\nu' - \nu\mu' = \pm 1,$$

semnele superioare și inferioare fiind luate împreună.

Egalitatea $\mu\nu' - \nu\mu' = +1$ fiind posibilă pentru o infinitate de valori, propoziţiunea este justificată.

121. Fie ω și ω' un sistem de două perioade oarecări și ω_1, ω'_1 un al doilea sistem de perioade legate de cele dintâiu prin ecuaţiunile (1). Pentru ca perioadele ω, ω' să se poată exprimă prin sume de multipli de ω_1 și ω'_1 este necesar și suficient ca condiţiunea (3) să fie împlinită. Raţionamentul este acelaș în ca cazul considerat mai sus.

Două sisteme de perioade legate între ele prin ecuaţiunile (1) cu condiţiunea (3) se zic echivalente, *propriu* sau *impropriu*, după cum $\Delta = \pm 1$.

Toate sistemele de perioade primitive sunt echivalente între ele.

Corolar. Două reţele construite cu ajutorul a două sisteme de perioade primitive (ω, ω'), (ω_1, ω'_1), dacă au un vârf comun, vor avea toate vârfurile comune; căci perioadele fiecărui sistem sunt sume de multipli ai perioadelor celuilalt sistem.

Propoziţiunea este adevărată și pentru două reţele construite cu ajutorul a două sisteme de perioade echivalente oarecări.

122. Condiţiunea $|\Delta| = 1$ exprimă că ariile paralelogramelor echivalente (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) sunt egale. In adevăr, fie

$$\omega = a + ib, \qquad \omega' = a' + ib';$$

vom avea

$$\omega_1 = (\mu a + \mu' a') + i(\mu b + \mu' b'), \qquad \omega'_1 = (\nu a + \nu' a') + i(\nu b + \nu' b').$$

Reprezentând prin s, S ariile paralelogramelor corespunzătoare avem, abstracţiune făcând de semn:

$$s = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \qquad S = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix} = s.$$

Toate paralelogramele elementare au aceeaș arie.

123. *Dintre toate paralelogramele de perioade, paralelogramele elementare au aria cea mai mică.* In adevăr, reprezentând prin (ω, ω') un sistem de două perioade primitive și prin (ω'_1, ω'_1) un sistem de două perioade oarecari, nu primitive, vom avea:

$$\omega_1 = \mu\omega + \mu'\omega', \quad \omega'_1 = \nu\omega + \nu'\omega'$$

și determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix}$ este un număr întreg diferit de unu.

Păstrând notaţiunile de mai sus, rezultă

$$S = |\Delta| s > s.$$

Observare. Dacă ω şi ω' sunt două perioade primitive ale unei funcţiuni uniforme $f(u)$, este imposibil să avem în acelaş timp egalităţile

$$f\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -f(u), \quad f\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = -f(u),$$

căci altmintrelea ω şi $\frac{\omega + \omega'}{2}$ ar formă un sistem de perioade al căror paralelogram are o arie mai mică decât aceea a paralelogramului (ω, ω'): ceeace este în contrazicere cu teorema precedentă.

II. TRANSFORMAREA PERIOADELOR.

124. Fie (ω_1, ω_2), (ω_1', ω_2') două sisteme de perioade legate între ele prin egalităţile

$$(1) \qquad \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

coeficienţii a, b, c, d fiind numere întregi şi determinantul $ad - bc = n > 0$. Se zice că aceste egalităţi constitue o *transformare* a perioadelor de *gradul n*. Dacă $n = 1$, transformarea se zice *lineară*. Transformarea este determinată de coeficienţii a, b, c, d şi se reprezintă simbolic prin notaţiunea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Să considerăm o a doua transformare

$$(2) \qquad \omega_1'' = a'\omega_1' + b'\omega_2', \quad \omega_2'' = c'\omega_1' + d'\omega_2', \quad a'd' - b'c' = n',$$

de gradul n', reprezintată simbolic prin

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Să înlocuim în egalităţile (2) ω_1', ω_2' prin valorile (1); obţinem egalităţile

$$(3) \qquad \omega_1'' = a''\omega_1 + b''\omega_2, \quad \omega_2'' = c''\omega_1 + d''\omega_2,$$

cu relaţiunile

$$(4) \qquad \begin{cases} a'' = aa' + cb', & b'' = ba' + db', \\ c'' = ac' + cd', & d'' = bc' + dd', \end{cases}$$

cari arată că determinantul coeficienţilor transformării (3) este egal

cu produsul determinanților coeficienților transformărilor (1) și (2). Transformarea (3) care rezultă din aplicarea succesivă a transformărilor (1) și (2) se notează

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

și se zice că este *produsul* celor dintâi două.

Prin aplicarea a două transformări succesive rezultă o a treia transformare al cărei grad este produsul gradelor celor dintâi. Este important de observat ordinea în care acest produs este efectuat: se multiplică elementele liniilor verticale ale primului factor cu elementele liniilor orizontale ale celui de al doilea. Schimbând ordinea factorilor, produsul, adică transformarea rezultantă, se schimbă în genere, precum ne arată egalitățile (4).

In acelaș mod se introduce produsul a trei și a unui număr oarecare de transformări. Se recunoaște că proprietatea *asociativă* a produsului subsistă, adică aplicarea succesivă a trei transformări, pe cari le notăm, pentru prescurtare S, S′, S″, se poate reprezintă prin egalitățile

$$S.\, S'.\, S'' = (S.\, S')\, S'' = S\, (S.'\, S'').$$

Dacă, într'un caz particular, proprietatea comutativă se conservă, adică dacă produsul a două transformări nu se schimbă când schimbăm ordinea factorilor, se zice că cele două transformări sunt *permutabile*.

Dacă două transformări au aceiași coeficienți, transformarea care rezultă din aplicarea lor succesivă se notează simbolic

$$S.\, S = S^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2.$$

In acelaș sens avem egalitățile

$$S^\lambda\, S^\mu = S^{\lambda+\mu}.$$

Notațiunea S^0 reprezintă transformarea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

numită transformare *identică*; ea lasă neschimbate cantitățile cărora se aplică. Se scrie

$$S^0 = 1.$$

Transformarea S^{-1} se zice transformarea *inversă* a transformării S; ea reprezintă o transformare astfel că produsul $S.\, S^{-1}$

este o transformare identică:

$$S\,S^{-1} = S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Fiind dată transformarea

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = n,$$

deducem transformarea inversă

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

aplicând formula (6). Obținem egalitățile

$$a\alpha + c\beta = 1 \qquad b\alpha + d\beta = 0,$$
$$a\gamma + c\delta = 0, \qquad b\gamma + d\delta = 1;$$

de unde

$$\alpha = \frac{d}{n}, \quad \beta = \frac{-b}{n}, \quad \gamma = \frac{-c}{n}, \quad \delta = \frac{a}{n}.$$

Dacă transformarea S este lineară ($n = 1$), avem

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Transformările S și S^{-1} sunt inverse una alteia, căci avem

$$S\,S^{-1} = S^{-1}S = 1.$$

Se verifică egalitatea

$$(S\,S')^{-1} = S'^{-1}S^{-1}, \tag{7}$$

căci ambele membre multiplicate cu S.S' dau un produs egal cu 1.

$$(S.S').^{-1}\,(S.S') = S'^{-1}\,S^{-1}\,S\,S' = S'^{-1}\,S' = 1.$$

Fie S, S', T trei transformări legate între ele prin egalitatea

$$S.\,S' = T.$$

Multiplicând ambele membre, *la dreapta*, cu S'^{-1}, obținem

$$S = T\,S^{-1}.$$

De asemenea, multiplicând ambele membre, *la stânga*, cu S^{-1}, rezultă

$$S' = S^{-1}\,T.$$

In mod analog, din egalitatea

$$S.S'.S'' = T$$

rezultă egalitățile

$$S\,S' = T\,S''^{-1}$$

$$S = T\,S''^{-1}\,S'^{-1}$$

$$S' = S^{-1}\,T\,S''^{-1}$$

In cele ce urmează vom considerà numai transformările lineare.

125. *Reducerea transformărilor lineare la tipuri simple.* *Teoremă. Orice transformare lineară*

$$(1) \qquad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

se poate exprimà printr'un produs de puteri pozitive și negative cu ajutorul transformărilor elementare.

$$(2) \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1})$$

I. *Unul din cele patru numere a, b, c, d este nul.*

Putem presupune că acel număr este situat în prima linie a lui V; căci în caz contrar, produsul

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

are un număr nul în prima linie. De unde rezultă expresiunea

$$V = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} T^{-1}$$

Dintre cele două numere ale primei linii, putem presupune că numărul nul ocupă rangul ce voim, de ex. rangul al doilea. Căci dacă $a = 0$, considerăm produsul

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix};$$

de unde

$$V = T^{-1}\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Fie dar

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad = 1;$$

de unde

$$a = d = 1 \text{ sau } a = d = -1.$$

---

[1]) Aceste transformări coincid cu formulele 4°, 5°, (§, 84); ele corespund sistemului de tăieturi din paragraful citat.

1°. $a = d = 1$. Dacă $c>0$, considerăm egalitățile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c-2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^c;$$

de unde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^c = S^c. \tag{4}$$

Dacă $c<0$, considerăm egalitățile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c+2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \ldots\ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-c}.$$

Insă

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1};$$

prin urmare, în ambele cazuri ($c \lesseqgtr 0$) egalitatea (4) subsistă.

2°. $a = d = -1$, adică

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix};$$

avem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} = S^{-c}.$$

Insă

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = T^2;$$

prin urmare

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = S^{-c}T^2. \tag{5}$$

II. *Nici unul din cele patru numere a, b, c, d nu este nul.* Acest caz se poate aduce la cel precedent.

Presupunând $|a| \geqslant |b|$, fie

$$a = b\lambda + a_1,$$

a_1 fiind restul diviziunii lui a prin b; prin urmare $|a_1| < |b|$. Să punem

$$c = d\lambda + c_1;$$

avem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} = S^{\lambda}\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix}. \tag{6}$$

In cazul $|a| < |b|$, avem $\lambda = o$, $a_1 = a$, $c_1 = c$.

Dacă $a_1 = o$, transformarea intră în cazul I.

Dacă $a_1 \neq o$, fie

$$b = a_1\mu + b_1, \quad |b_1| < |a_1|$$

şi

$$d = c_1 \mu + d_1;$$

avem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Dacă $b_1 = o$, intrăm în cazul I, etc. Resturile a_1, b_1, a_2,... ale diviziunilor merg descrescând, astfel că după un număr limitat de operaţiuni, unul din numerele primei linii devine nul.

Transformarea

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se reduce în modul următor. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu}$$

şi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{S. T. S};$$

prin urmare

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\text{S T S})^{\mu}. \tag{8}$$

De unde rezultă, pentru transformarea V, expresiunea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{S}^{\lambda} (\text{S.T.S})^{\mu} \text{S}^{\lambda_1} \tag{9}$$

$$= \text{S}^{\lambda+\mu} \text{T}^{\mu} \text{S}^{\mu+\lambda_1} \ldots,$$

numerele λ, μ, λ_1,... fiind numere întregi pozitive sau negative; numărul λ poate fi nul.

q. e. d.

Exemple.

1°.

$$\text{V} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (\text{S. T. S})^2 \text{S}^2 \text{ (formula (8).}$$

$$\text{V} = \text{S} (\text{S T S})^2 \text{S}^2 = \text{S}^2 \text{ T S}^2 \text{ T S}^3.$$

2°.

$$\text{V} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{T}^{-1} \text{ S}^2$$

$$V = S^{-1}\, T^{-1}\, S^{-3}\, T^{-1}\, S^{2}$$

$$\left[S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{1)}$$

$$S^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. TEOREME GENERALE.

126. *O funcțiune uniformă dublu periodică devine neapărat infinită într'un paralelogram de perioade.* In adevăr, funcțiunea având aceeaș valoare în puncte congruente, dacă modulul ei ar fi într'un paralelogram de perioade, mai mic decât un număr fix M, ar urmă ca el să fie mai mic decât M în tot planul, prin urmare funcțiunea s'ar reduce la o constantă. Așadar nu există funcțiune dublu periodică care să fie olomorfă într'un paralelogram de perioade.

Se numește *funcțiune eliptică* o funcțiune uniformă $f(u)$ dublu periodică care nu are alte singularități decât poluri. Este evident că punctul dela infinit este punct singular esențial, căci altmintrelea $f(u)$ s'ar reduce la o funcțiune rațională.

Numim *ordin* al unei funcțiuni eliptice, *numărul polurilor* ce are funcțiunea într'un paralelogram elementar, fiecare pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate.

127. *Suma reziduurilor unei funcțiuni eliptice $f(u)$ relative la polurile situate într'un paralelogram de perioade este nulă.* In adevăr, această sumă este dată de integrala

$$S = \frac{1}{2i\pi} \int f(u)\, du,$$

luată după conturul paralelogramului în sensul pozitiv. Insă în două puncte congruente $f(u)$ având aceeaș valoare și două laturi ale paralelogramului fiind descrise în sens invers, aceste laturi dau pentru integrală valori egale și de semne contrarii. De unde rezultă

$$S = 0.$$

Demonstrațiunea presupune că funcțiunea $f(u)$ n'are poluri pe conturul paralelogramului, căci în aceste puncte integrala n'are sens. Insă polurile funcțiunii fiind puncte izolate, putem, printr'o

---

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}.\ T^{-1}.\ S^{-1}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = S^{-2}$.

translaţiune convenabilă, face ca laturile paralelogramului să nu treacă prin niciunul din ele [1]).

Corolar. Ordinul unei funcţiuni eliptice este cel puţin doi. Căci dacă ordinul funcţiunii ar fi unu, reziduul său ar fi nul, adică funcţiunea n'ar aveà niciun pol într'un paralelogram elementar; ceeace este imposibil (§ 126).

128. *Numărul zerurilor unei funcţiuni eliptice într'un paralelogram de perioade este egal cu numărul polurilor.*

Fie n numărul zerurilor şi n' numărul polurilor funcţiunii $f(u)$ situate într'un paralelogram de perioade. Putem presupune acest paralelogram situat astfel ca laturile sale să nu conţină nici un zero şi niciun pol al lui $f(u)$. Avem aşà dar

$$n - n' = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f'(u)}{f(u)}\, du,$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREŞTI

integrala fiind luată după conturul paralelogramului în sensul pozitiv. Insă $\frac{f'(u)}{f(u)}$ este o funcţiune eliptică având aceleaşi perioade ca $f(u)$; integrala considerată este aşadar nulă (§ 127) şi avem $n' = n$.

Corolar. Funcţiunea $f(u) - C$, C fiind o constantă arbitrară, având aceleaşi perioade şi poluri ca $f(u)$, va admite într'un paralelogram de perioade acelaş număr de zeruri ca $f(u)$. Dacă $f(u)$ este de ordinul n, numărul zerurilor egale sau neegale ale ecuaţiunii $f(u) - C = o$ va fi n. Cu alte cuvinte, există în interiorul paralelogramului n puncte, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, distincte sau nu, în cari $f(u)$ primeşte aceeaş valoare arbitrară C. Numărul acestor puncte este egal cu ordinul funcţiunii.

129. *Suma zerurilor unei funcţiuni eliptice în interiorul unui paralelogram de perioade, este egală cu suma polurilor, abstracţiune făcând de multipli de perioade* (Liouville).

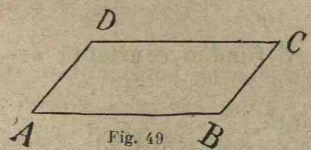

Fig. 49

Să considerăm un paralelogram ABCD având vârful A într'un punct ordinar u_0, celelalte vârfuri fiind respectiv în punctele

$$u_0 + \omega,\ u_0 + \omega + \omega',\ u_0 + \omega'.$$

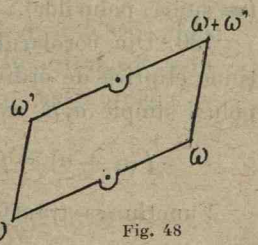

Fig. 48

[1]) Se mai poate procede în modul următor:

Dacă $f(u)$ are poluri pe o latură, va aveà tot atâtea poluri şi pe laturea opusă care, prin definiţiune, nu face parte din acelaş paralelogram. Vom evità polurile (fig. 48) prin semicercuri congruente (ale căror puncte sunt respectiv congruente).

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zerurile şi $b_1, b_2, \ldots b_n$ polurile funcţiunii, distincte sau nu, situate în acest paralelogram. Avem:

$$\Sigma a - \Sigma b = \frac{1}{2i\pi} \int_{ABCDA} \frac{u f'(u)}{f(u)}\, du.$$

Să evaluăm integrala după laturile paralelogramului, paralele două câte două.

Avem

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+\omega} \frac{u\, f'(u)}{f(u)}\, du - \int_{u_0+\omega'}^{u_0+\omega'+\omega} \frac{u f'(u)}{f(u)}\, du,$$

sau, înlocuind în ultima integrală u prin $u + \omega'$,

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+\omega} \left[\frac{u f'(u)}{f(u)} - \frac{(u+\omega') f'(u+\omega')}{f(u+\omega')}\right] du,$$

$$= -\omega' \int_{u_0}^{u_0+\omega} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du = -\omega' \log \frac{f(u_0+\omega)}{f(u_0)} = -\omega' \log 1 = 2m'i\,\pi\omega'.$$

De asemenea, avem

$$(BC) + (DA) = 2mi\pi\omega,$$

m şi m' fiind numere întregi sau zero. Prin urmare

$$\Sigma a - \Sigma b = m\omega + m'\omega',$$

sau, abstracţiune făcând de multipli de ω şi ω',

$$\Sigma a \equiv \Sigma b.$$

Corolar. Fie $u_1, \ldots, u_n$ rădăcinile ecuaţiunii

$$f(u) - C = 0,$$

situate într'un paralelogram de perioade. C fiind o constantă arbitrară. Vom aveà

$$\Sigma u_i \equiv \Sigma b_i = \text{constantă},$$

adică, *suma valorilor argumentelor dintr'un paralelogram de perioade pentru care $f(u)$ primeşte aceeaş valoare arbitrară este constantă* ($\equiv$ suma polurilor).

130. Din corolarul precedent rezultă că dacă $f(u)$ este o funcţiune eliptică de ordinul al doilea având un pol dublu a, sau două poluri simple a, β, avem respectiv

$$f(a+u) = f(a-u),\ f\left(\frac{a+\beta}{2}+u\right) = f\left(\frac{a+\beta}{2}-u\right).$$

Funcţiunea transformată

$$\varphi(u) = f(a+u),$$

sau $$\varphi(u) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+u\right)$$

satisface egalitatea

$$\varphi(-u) = \varphi(u),$$

oricare ar fi punctul u. Ea este aşadar o funcţiune pară.

131. *Teorema lui Liouville* (129) *este cuprinsă în teorema lui Abel asupra adiţiunii integralelor eliptice de speţa I.*

In adevăr, fie $R(x)$ o funcţiune raţională pe suprafaţa T; ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ respectiv zerurile şi polurile sale şi fie $u(x)$ integrala eliptică de speţa I relativă la suprafaţa T; avem (5 § 85):

$$(1) \qquad \sum_1^h u(\xi_i) \equiv \sum_1^h u(\eta_i) \pmod{\omega, \omega'}$$

Insă, $u(x)$ fiind integrală eliptică de speţa I, rezultă că funcţiunea inversă $x = \varphi(u)$ este o funcţiune eliptică de u; prin urmare expresiunea

$$(2) \qquad R(x) = R[\varphi(u)] = F(u)$$

este funcţiune eliptică de u. Fie a_i una din valorile integralei u în punctul ξ_i şi b_i una din valorile aceleiaş integrale în punctul η_i, adică

$$u(\xi_i) = a_i \quad u(\eta_i) = b_i.$$

Punctele a_i şi b_i sunt aşà dar respectiv zerurile şi polurile funcţiunei $F(u)$. Egalitatea (1) devine

$$\Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \pmod{\omega, \omega'}.$$

q. e. d.

132. *Două funcţiuni eliptice, $f(u)$, $\varphi(u)$ având aceleaşi perioade, aceleaşi poluri şi aceleaşi zeruri sunt într'un raport constant.* Căci raportul

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)}$$

este o funcţiune cu aceleaşi perioade şi fără poluri, prin urmare se reduce la o constantă.

133. *Două funcţiuni eliptice $f(u)$, $\varphi(u)$ de ordinul al doilea, având aceleaşi perioade şi aceleaşi poluri, sunt legate între ele printr'o ecuaţiune lineară cu coeficienţi constanţi.*

In adevăr, presupunând polurile simple, fie a şi b cele două poluri situate într'un paralelogram elementar. In interiorul paralelogramului cele două funcţiuni se vor puteà pune sub forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(u) &= A\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right) + f_1(u), \\ \varphi(u) &= A'\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right) + \varphi_1(u), \end{aligned}$$

A şi A′ fiind reziduurile lor, corespunzătoare polului a şi $f_1(u)$, $\varphi_1(u)$ fiind funcţiuni olomorfe în interiorul paralelogramului. Eliminând parenteza între aceste două egalităţi, obţinem ecuaţiunea

$$A' f(u) - A\varphi(u) = A' f_1(u) - A\varphi_1(u).$$

Membrul al doilea fiind olomorf în paralelogramul considerat, rezultă că membrul întâiu, care este o funcţiune eliptică, se reduce la o constantă. Avem aşà dar, între cele două funcţiuni, o ecuaţiune de forma

$$A' f(u) - A\varphi(u) = C. \tag{2}$$

Dacă a este un pol dublu, reziduul corespunzător este nul şi ecuaţiunile (1) se înlocuesc prin cele următoare

$$f(u) = \frac{A}{(u-a)^2} + f_1(u), \tag{3}$$

$$\varphi(u) = \frac{A'}{(u-a)^2} + \varphi_1(u),$$

A şi A′ fiind doi coeficienţi constanţi. Rezultatul eliminării lui $\frac{1}{(u-a)^2}$ conduce la aceeaş ecuaţiune (2).

134. *Teoremă. O funcţiune eliptică $f(u)$, care primeşte valori reale dealungul unui segment al axei reale, admite o perioadă reală şi o perioadă pur imaginară.* Să demonstrăm mai întâi că dacă o *cantitate imaginară ω este o perioadă a funcţiunii, cantitatea imaginară conjugată, reprezintată prin ω', este de asemenea o perioadă.*

In adevăr, fie u şi u' două argumente imaginare conjugate, cantităţile $u + \omega$, $u' + \omega'$ sunt de asemenea imaginare conjugate şi prin urmare valorile

$$f(u'),\ f(u' + \omega')$$

sunt respectiv conjugate cu valorile

$$f(u),\ f(u + \omega).$$ [1]

In virtutea ipotezei, avem

$$f(u + \omega) = f(u),$$

prin urmare

$$f(u' + \omega') = f(u').$$

Insă u' ca şi u este un argument oarecare, de unde conchidem că egalitatea

$$f(u + \omega') = f(u)$$

subsistă oricare ar fi valoarea lui u şi prin urmare ω' este o perioadă.

[1]) I. p. 299–300.

De aici rezultă teorema ce voim să demonstrăm. Căci suma şi diferenţa a două perioade sunt perioade, prin urmare cantităţile $\omega + \omega'$ şi $\omega - \omega'$ sunt perioade ale funcţiunii: cea dintâi este *reală* şi cea de a doua este *pur imaginară*.

135. *Analogii între proprietăţile funcţiunilor raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T cu două foi şi patru puncte critice şi proprietăţile funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.* Să menţionăm proprietăţile următoare:

1°. O funcţiune raţională $F(x, y)$ finită pe toată suprafaţa T este o constantă (§ 58); aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.

2°. Ordinul minimum al unei funcţiuni raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T este 2 (§ 60), adică funcţiunea $F(x, y)$ are, pe suprafaţa T, cel puţin două poluri simple sau un pol dublu; aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice într'un paralelogram elementar.

3°. Suma reziduurilor unei funcţiuni raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T este nulă (§ 56); aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice într'un paralelogram de perioade.

4°. Numărul zerurilor funcţiunii $F(x, y)$ este egal cu numărul polurilor, fiecare zero şi pol fiind socotit de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate (§ 56). Aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.

Aceste analogii se explică dacă observăm, de o parte, că suprafaţa T, limitată prin conturul format de ţărmurile celor două tăieturi cari o fac simplu conexă (suprafaţa T'), corespunde, într'un mod biunivoc, unui paralelogram de perioade (§ 108) ale cărui laturi corespund acelor ţărmuri şi, de altă parte, că variabila x şi variabila $y = \sqrt{R(x)}$, $R(x)$ fiind polinom de gradul 3 sau 4, sunt funcţiuni eliptice de aceeaş variabilă u.

In virtutea acestor proprietăţi, funcţiunea raţională $F(x, y)$ se transformă într'o funcţiune eliptică $f(u)$, zerurile şi polurile (x, y) ale funcţiunei $F(x, y)$ se transformă în zeruri şi poluri (u) de acelaş ordin ale funcţiunii $f(u)$. In fine, integrala

$$\int R(x, y)\, dx$$

dealungul conturului suprafeţii T' se transformă în integrala

$$\int f(u) \frac{dx}{du} du$$

dealungul paralelogramului perioadelor.

CAPITOLUL XIII.

FUNCȚIUNILE σu, ζu, pu.

Prin inversiunea integralei eliptice de speța I (§ 107) s'a stabilit existența funcțiunilor *eliptice*; ne propunem acum să construim efectiv asemenea funcțiuni. Vom considerà funcțiunile introduse de Weierstrass.

136. ***Funcțiunea σu.*** Cu două cantități date ω_1, ω_3 al căror raport este imaginar putem construì o funcțiune întreagă care să admită ca zeruri de ordinul întâiu punctele

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \tag{1}$$

m și n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Una din funcțiunile în număr infinit ce se pot construì astfel (toate diferind între ele printr'un factor exponențial $e^{G(x)}$) este funcțiunea introdusă de Weierstrass

$$\sigma u = u \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \tag{I}$$

în care simbolul Π' înseamnă că m și n primesc toate valorile întregi, afară de valorile $m = n = 0$. (I. p. 369).

Să ne închipuim construit paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ având unul din vârfurile sale în origină, precum și rețeaua corespunzătoare. Zerurile funcțiunii σu coincid cu vârfurile acestei rețele.

Funcțiunea σu depinde de argumentul u și de constantele ω_1, ω_3, [1]) cari au servit la construirea ei. Dacă voim să punem în evidență aceste constante, se obișnuește a se scrie

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

Proprietăți. 1°. *Funcțiunea σu este o funcțiune impară*, adică avem egalitatea

$$\sigma(-u) = -\sigma u. \tag{2}$$

In adevăr, fiecărui factor

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

corespunde, în produsul (I), factorul

$$\left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

[1]) Cantitățile $2\omega_1$, $2\omega_3$ le numim perioade.

dedus din cel dintâiu când schimbăm semnele indicilor m, n. Insă înlocuind u prin $-u$, acești doi factori se permută și produsul Π' nu se schimbă. De unde rezultă egalitatea (2)

Să notăm egalitățile următoare:

$$(3) \qquad \lim_{u=o} \frac{\sigma u}{u} = 1, \qquad \left[\frac{d\,\sigma u}{du}\right]_{u=o} = 1,$$

cari rezultă din expresiunea (I).

2°. *Funcțiunea σu este omogenă în raport cu cantitățile u, ω_1, ω_3 și gradul său de omogeneitate este egal cu* 1. Această proprietate se constată imediat, dacă înlocuim, în egalitatea (I), u, ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$, λ fiind un factor arbitrar diferit de zero. Obținem egalitatea

$$(4) \qquad \sigma(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda\,\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

3°. *Funcțiunea σu nu se schimbă dacă înlocuim perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ printr'un sistem de perioade echivalente.* Fie $(2\omega'_1,\ 2\omega'_3)$ un sistem de perioade echivalente cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ și

$$(5) \qquad \sigma(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = u\,\Pi'\left(1-\frac{u}{w'}\right) e^{\frac{u}{w'}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w'^2}}, \quad w' = 2m\,\omega'_1 + 2n\,\omega'_3$$

funcțiunea σu construită cu aceste perioade. Vârfurile rețelelor de paralelograme construite cu ajutorul acestor două sisteme de perioade fiind aceleași (§ 121), rezultă că zerurile funcțiunilor

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad \sigma(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$$

coincid prin urmare și membrele de al doilea (I) și (5) conțin aceiași factori într'o ordine diferită. Aceste produse fiind absolut convergente, conchidem că cele două funcțiuni σu sunt identice.

Dacă substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ alte două perioade *nu echivalente*, funcțiunea σu corespunzătoare nu are aceleași zeruri ca funcțiunea primitivă și prin urmare cele două funcțiuni σu sunt diferite. Din cele ce preced conchidem:

Condițiunea necesară și suficientă pentru ca două funcțiuni σu, construite cu perioade diferite, să coincidă, este ca cele două sisteme de perioade să fie echivalente.

137. ***Funcțiunea ζu.*** Această funcțiune este definită prin egalitatea

$$(6) \qquad \zeta u = \frac{d}{du} \log \sigma u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre ale egalității (I),

obţinem

$$(II) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \Sigma' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

simbolul Σ' referindu-se la toate valorile întregi ale numerelor m şi n *dela* $-\infty$ *la* $+\infty$, exceptând valorile $m = n = 0$.

Se poate vedeà direct că seria din membrul al doilea este absolut şi uniform convergentă în orice porţiune finită a planului care nu conţine nici unul din punctele $u = w$. Căci termenul general

$$\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = \frac{u}{w^2 (u - w)},$$

este, pentru valori foarte mari ale lui m şi n, comparabil cu termenul $\frac{1}{w^3}$.

Punctele $u = w$ sunt poluri de ordinul întâiu ale funcţiunii; reziduul relativ la un pol oarecare este egal cu 1. De acì rezultă că funcţiunea ζu *nu poate fi funcţiune eliptică*, căci oricare ar fi paralelogramul considerat în plan, *suma reziduurilor relative la polurile situate în interiorul său nu este nulă.*

Proprietăţi. 1°. Din relaţiunile

$$\sigma(-u) = -\sigma u, \qquad \sigma'(-u) = +\sigma' u,$$

rezultă

$$(7) \qquad \zeta(-u) = -\zeta u$$

adică ζu este o *funcţiune impară.*

2°. Dacă în seria (II) înlocuim u, ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$ obţinem egalitatea

$$(9) \qquad \zeta(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda} \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

care exprimă că ζu este o *funcţiune omogenă de gradul* -1 *în raport cu* u, ω_1, ω_3.

Desvoltarea funcţiunii ζu *în domeniul originii.* Să consoderăm un cerc cu centrul în origină şi trecând prin cel mai apropiat pol w. In interiorul acestui cerc avem $|u| < |w|$, prin urmare putem scrie

$$\frac{1}{u - w} = -\left[\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \ldots + \frac{u^{n-1}}{w^n} + \ldots \right].$$

Inlocuind, în egalitatea (II), $\frac{1}{u - w}$ prin desvoltarea precedentă şi ţinând seama că seriile $\Sigma' \frac{1}{w^n}$, pentru $n > 3$, sunt absolut con-

vergente și că în sumele $\Sigma' \frac{1}{\omega^{2n+3}}$, termenii se distrug doi câte doi, obținem, ordonând după puterile lui u,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - u^3 \Sigma' \frac{1}{\omega^4} - u^5 \Sigma' \frac{1}{\omega^6} - \dots \tag{10}$$

Să integrăm ambele membre ale egalității precedente; obținem

$$\log \frac{\sigma u}{c u} = -\frac{u^4}{4} \Sigma' \frac{1}{\omega^4} - \frac{u^6}{6} \Sigma' \frac{1}{\omega^6} - \dots;$$

De unde

$$\sigma u = u e^{-\frac{u^4}{4} \Sigma' \frac{1}{\omega^4} - \dots},$$

căci

$$c = \left(\frac{\sigma u}{u}\right)_0 = 1.$$

Desvoltând exponențiala din membrul al doilea în serie întreagă, obținem, pentru funcțiunea σu, seria

$$\sigma u = u - \frac{u^5}{4} \Sigma' \frac{1}{\omega^4} - \frac{u^7}{6} \Sigma' \frac{1}{\omega^6} + A u^9 + \dots \tag{11}$$

Această egalitate, deși obținută în ipoteza că $|u|$ este mai mic ca cel mai mic din modulele $2|\omega_1|$, $2|\omega_3|$, este valabilă în tot planul (u), căci membrul întâiu fiind o funcțiune întreagă și amândouă membrele fiind egale într'o regiune a planului, sunt egale în tot planul.

138. ***Funcțiunea pu.*** Această funcțiune este definită de egalitatea

$$pu = -\frac{d\zeta u}{du} = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma u. \tag{12}$$

Avem așa dar, derivând seria (II),

$$pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{III}$$

Din convergența absolută a seriei (II) rezultă că seria din urmă este absolut convergentă în tot planul (u) din care excludem punctele $u = \omega$. Acest rezultat se constată direct, observând că termenul general

$$\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

este, pentru valori foarte mari ale lui m și n, comparabil cu $\frac{1}{\omega^3}$.

Punctele $u = w$ sunt poluri de ordinul al doilea ale funcțiunii pu; reziduurile corespunzătoare sunt nule.

Proprietăți. 1°. Funcțiunea pu, fiind derivata unei funcțiuni impare, este o *funcțiune pară*. Avem așà dar

$$p(-u) = pu. \tag{12}$$

Funcțiunea pu este omogenă de gradul -2 *în raport cu* u, ω_1, ω_3; ceeace se recunoaște înlocuind în egalitatea (III) u ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$:

$$p(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda^2}\, p(u \mid \omega_1, \omega_3). \tag{13}$$

Derivând ambele membre ale egalității (10), avem

$$pu = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \Sigma' \frac{1}{w^4} + 5u^4 \Sigma' \frac{1}{w^6} + \ldots, \tag{14}$$

egalitate valabilă în acelaș cerc ca și seria (10).

139. *Derivata* $p'u$. Derivând ambele membre ale egalității (III), obținem funcțiunea

$$p'u = -2\Sigma \frac{1}{(u-w)^3}, \tag{IV}$$

care admite punctele $u = w$ ca poluri de ordinul al treilea. Această funcțiune este impară:

$$p'(-u) = -p'(u). \tag{15}$$

In domeniul originii avem, derivând ambele membre ale egalității (14),

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 6u\Sigma' \frac{1}{w^4} + 20u^3 \Sigma' \frac{1}{w^6} + \ldots \tag{16}$$

140. Proprietatea 3° (§ 136) a funcțiunii σu de a rămâneà neschimbată, când substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ alte două perioade echivalente și numai în acest caz, aparține funcțiunilor ζu, pu, $p'u$.

141. *Dubla periodicitate.* Expresiunea (IV) a derivatei $p'u$ pune în evidență proprietatea acestei funcțiuni, aceea a *periodicității duble*. Intr'adevăr, înlocuind u prin $u + 2\omega_1$, obținem egalitatea

$$p'(u + 2\omega_1) = -2\Sigma \frac{1}{[u - 2(m-1)\,\omega_1 - 2n\,\omega_3]^3},$$

în care membrul al doilea nu diferă de membrul al doilea (IV) de cât prin aceea că indicele m este înlocuit prin $m-1$; însă m variind dela $-\infty$ la $+\infty$, $m-1$ trece prin aceleași valori și cele două serii sunt egale.

Avem așà dar

$$p'(u + 2\omega_1) = p'u. \tag{1}$$

In acelaș mod se recunoaște că avem

$$p'(u + 2\omega_3) = p'u. \tag{2}$$

De unde rezultă că funcțiunea $p'u$ admite cantitățile $2\omega_1$, $2\omega_3$ ca perioade.

Integrând ambele membre ale egalității (1), obținem

$$p(u + 2\omega_1) = p\,u + C.$$

Făcând $u = -\omega_1$, rezultă

$$p\,\omega_1 = p(-\omega_1) + C.$$

Insă $p\,\omega_1 = p(-\omega_1)$, prin urmare $C = o$. Așà dar, avem

$$p(u + 2\omega_1) = p\,u. \tag{3}$$

Deasemenea, plecând dela egalitatea (2), găsim

$$p(u + 2\omega_3) = p\,u. \tag{4}$$

Funcțiunea pu admite așà dar aceleași două perioade. Această funcțiune neavând în tot planul alte singularități decât poluri și admițând perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ este, prin urmare, o *funcțiune eliptică*.

Proprietatea periodicității duble a funcțiunii $p\,u$ rezultă și din definițiunea (III) a acestei funcțiuni. In adevăr, diferența $p(u + 2\omega_1) - pu$ se poate scrie

$$p(u+2\omega_1) - p\,u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(u + 2\omega_1 - w)^2} - \frac{1}{(u-w)^2}\right].$$

Pentru o valoare constantă oarecare a lui n, seriile

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[u - 2n\,\omega_3 - 2(m-1)\,\omega_1]^2}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[u - 2n\,\omega_3 - 2m\,\omega_1]^2}$$

sunt absolut convergente și evident egale căci m și $m-1$ trec prin aceleași valori când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$; prin urmare avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(u + 2\,\omega_1 - w)^2} - \frac{1}{(u-w)^2}\right] = 0;$$

de unde rezultă

$$p(u + 2\,\omega_1) = p\,u.$$

In acelaș mod se probează că $2\omega_3$ este o perioadă.

Intr'un paralelogram construit cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, funcțiunea *pu* are un *singur pol dublu*. Această funcțiune este așà dar de ordinul al doilea — ordinul cel mai mic posibil — și paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ este un paralelogram elementar. Funcțiunea *pu* este ceà mai simplă dintre funcțiunile eliptice: derivata sa $p'u$ fiind de ordinul al treilea pe când derivata unei funcțiuni eliptice care are două poluri simple, este de ordinul al patrulea.

142. *Rădăcinile ecuațiunii*

$$pu = pa, \tag{1}$$

a fiind o constantă arbitrară diferită de un multiplu de perioade.

Funcțiunea *pu* fiind de ordinul al doilea, ecuațiunea precedentă are două rădăcini într'un paralelogram elementar, prin urmare două rădăcini *nu congruente* în tot planul. Punctul $u=a$ este evident o rădăcină și deoarece funcțiunea *pu* este pară, $u=-a$ este de asemenea o rădăcină. Expresiunea generală a rădăcinilor ecuațiunii (1) este așadar

$$u = \pm a + 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \tag{2}$$

m și n fiind numere întregi arbitrare.

In cazul $a=\omega_1$, ω_3, $\omega_1+\omega_3$, punctele a și $-a$ sunt puncte congruente; atunci a este neapărat o rădăcină dublă a ecuațiunii (1). Se va vedeà, dealtmintrelea, mai jos, că valorile ω_1, ω_3, $\omega_1+\omega_3$ anulează derivata $p'u$.

143. Derivata $p'u$ având un pol triplu unic, $u=0$, abstracțiune făcând de multipli de $2\omega_1$, $2\omega_3$, este o funcțiune eliptică de ordinul al *treilea*, pentru care perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ sunt perioade primitive.

Zerurile funcțiunii p'u. Să facem în egalitatea

$$p'(u+2\omega_1)=p'u$$

$u=-\omega_1$; obținem

$$p'\omega_1=p'(-\omega_1)=-p'\omega_1$$

Punctul $u=\omega_1$ nefiind pol, rezultă că el este un zero.

In acelaș mod conchidem, plecând dela relațiunile

$$p'(u+2\omega_3)=p'u, \quad p'(u+2\omega_1+2\omega_3)=p'u,$$

în cari înlocuim u respectiv prin $-\omega_3$, $-(\omega_1+\omega_3)$, că ω_3 și $\omega_1+\omega_3$ sunt zeruri.

Se introduce, pentru motive de simetrie, cantitatea ω_2 definită de relațiunea

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0. \tag{3}$$

Zerurile funcțiunii $p'u$ sunt dar, abstracțiune făcând de multipli de perioade,

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3.$$

În paralelogramul ale cărui vârfuri sunt punctele:

$$0, 2\omega_1,\ 2(\omega_1+\omega_3) = -2\omega_2,\ 2\omega_3,$$

zerurile lui $p'u$ sunt semiperioadele

$$\omega_1,\ -\omega_2,\ \omega_3.$$

Să punem

$$p\omega_1 = e_1,\quad p\omega_2 = e_2,\quad p\omega_3 = e_3.$$

Aceste trei cantități sunt diferite între ele; căci, dacă am avea

$$p\omega_1 = p\omega_3$$

ar urmà să avem egalitatea (2 § 142):

$$\omega_1 = \pm\omega_3 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

adică perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ n'ar fi distincte (§ 115).

În același mod se recunoaște imposibilitatea egalităților

$$p\omega_1 = p\omega_2,\quad p\omega_2 = p\omega_3.$$

144. ***Ecuațiunea diferențială a funcțiunii pu.*** Între funcțiunea pu și derivata sa $p'u$ există o ecuațiune algebrică cu coeficienți independenți de u ce se poate obține în modul următor: Să formăm diferența

$$(1)\quad p'^2u - 4p^3u = -\frac{60}{u^2}\Sigma'\frac{1}{\omega^4} - 140\,\Sigma'\frac{1}{\omega^6} + Au^2 + \ldots,$$

servindu-ne de seriile (14) și (16), (§ 138, 139), cari reprezintă funcțiunile pu și $p'u$ în domeniul originii. În același domeniu avem seria

$$(2)\qquad 60\,pu\,\Sigma'\frac{1}{\omega^4} = \frac{60}{u^2}\Sigma'\frac{1}{\omega^4} + Bu^2 + \ldots$$

Adunând egalitățile (1) și (2), obținem egalitatea

$$(3)\quad p'^2u - 4p^3u + 60\,pu\,\Sigma'\frac{1}{\omega^4} = -140\,\Sigma'\frac{1}{\omega^6} + Cu^2 + \ldots$$

Membrul întâiu fiind o funcțiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, olomorfă în paralelogramul perioadelor, se reduce la o constantă.

Această constantă este $-140\,\Sigma'\frac{1}{\omega^6}$, valoarea membrului al doilea pentru $u = o$.

Punând

$$(4) \qquad g_2 = 60\,\Sigma' \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 = 140\,\Sigma' \frac{1}{\omega^6},$$

vom avea între pu și $p'u$ ecuațiunea fundamentală

$$(5) \qquad p'^2u = 4\,p^3u - g_2\,pu - g_3.$$

Coeficienții g_2 și g_3 sunt, precum ne arată expresiunile (4), determinați când constantele ω_1 și ω_3 sunt date; ei sunt omogeni în raport cu aceste cantități și gradul lor de omogencitate este respectiv egal cu -4, -6.

Dacă substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ un alt sistem de perioade primitive $2\omega_1'$, $2\omega_3'$, vârfurile paralelogramelor celor două rețele corespunzătoare fiind aceleași, rezultă că expresiunile $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ și $2m\omega'_1 + 2n\omega'_3$ trec prin aceleași valori când m și n primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. De unde urmează că, substituind unui sistem de perioade primitive un alt sistem de perioade primitive, coeficienții g_2 și g_3 rămân neschimbați. Pentru acest motiv coeficienții g_2 și g_3 au primit numele de *invarianți*.

Observare. Fiind date ecuațiunile $pu = a$, $p'u = b$, cu condițiunea de compatibilitate $b^2 = 4a^3 - g_2\,a - g_3$, există într'un paralelogram o singură valoare u care să satisfacă cele două ecuațiuni.

In adevăr, fie v un argument astfel ca $pv = a$; vom avea $u = \pm v$. Insă $p'(-v) = -p'v$; de unde rezultă că numai una din valorile $\pm v$ satisface ecuațiunea $p'u = b$.

145. Punând $x = pu$, ecuațiunea (5) devine

$$(6) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4\,x^3 - g_2x - g_3.$$

Funcțiunea $x = pu$ este așà dar o soluțiune a acestei ecuațiuni diferențiale; ea este o integrală particulară a ecuațiunii (6), anume aceea care devine infinită pentru $u = 0$. Această ecuațiune rămânând neschimbată când înlocuim u prin $u + C$, C fiind o constantă arbitrară, rezultă că $x = p\,(u + C)$ este o integrală și prin urmare integrala generală a ecuațiunii.

Să punem în evidență valorile e_1, e_2, e_3 ale lui pu, cărora corespunde valoarea zero pentru $p'u$; ecuațiunea (5) se va scrie

$$(7) \qquad p'^2u = 4\,(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3).$$

Cantitățile e_1, e_2, e_3 sunt, după definițiunea lor, omogene, de gradul -2, în raport cu ω_1 și ω_3; ele satisfac, în virtutea ecua-

țiunii (5), relațiunile

$$(8)\qquad \begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2, \\ e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3. \end{cases}$$

Reprezintând prin Δ discriminantul ecuațiunii

$$(9)\qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

vom luà

$$(10)\qquad \Delta = 16\,(e_1-e_2)^2\,(e_2-e_3)^2\,(e_3-e_1)^2.$$

Factorul 16 se introduce pentru simplificarea rezultatului.

Pentru a calculà acest discriminant, să punem

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3);$$

de unde, prin derivare, și înlocuind succesiv x prin e_1, e_2, e_3, avem

$$f'(e_1) = 4(e_1-e_2)\,(e_1-e_3),$$
$$f'(e_2) = 4(e_2-e_1)\,(e_2-e_3),$$
$$f'(e_3) = 4(e_3-e_1)\,(e_3-e_2),$$
$$-\frac{1}{4} f'(e_1)\,f'(e_2)\,f'(e_3) = 16\,(e_1-e_2)^2\,(e_2-e_3)^2\,(e_3-e_1)^2 = \Delta.$$

Insă

$$f'(x) = 12x^2 - g_2;$$

prin urmare

$$\begin{aligned} f'(e_1)\,f'(e_2)\,f'(e_3) &= (12e_1^2 - g_2)\,(12e_2^2 - g_2)\,(12e_3^2 - g_2) \\ &= 12^3 e_1^2 e_2^2 e_3^2 - 12^2 g_2 (e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2) + 12\, g_2^2 (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - g_2^3, \\ &= 4\,(27\, g_3^2 - g_2^3). \end{aligned}$$

Aşadar avem

$$(11)\qquad \Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2.$$

Δ este omogen și de gradul—12 în raport cu ω_1 și ω_3.

Constantele e_1, e_2, e_3 fiind distincte, rezultă $\Delta \neq 0$.

146. *Definițiunea funcțiunei pu prin invarianți*

Până acì funcțiunea pu a fost definită în funcțiune de perioadele date $2\omega_1$, $2\omega_3$; ea satisface ecuațiunea diferențială

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

în care g_2 și g_3 au valorile (4) (§ 144). Să considerăm acum această

ecuaţiune dată, în care coeficienţii g_2 şi g_3 sunt două *constante arbitrare* cu condiţiunea ca discriminantul

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \tag{2}$$

să fie diferit de zero. Voim să arătăm că *soluţiunea acestei ecuaţiuni care, pentru $u = o$, se reduce la ∞, coincide cu funcţiunea pu, construită cu perioadele integralei*

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{du}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \tag{3}$$

determinate de două tăieturi cari fac simplu conexă suprafaţa T corespunzătoare ecuaţiunei

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3. \tag{4}$$

In adevăr fie, $x = \varphi(u)$ funcţiunea ce rezultă din inversiunea integralei (3). Această funcţiune este uniformă în tot planul (u), neavând la distanţă finită alte singularităţi decât poluri; ea este dublu periodică, având ca perioade două perioade distincte ale integralei (3) (§ 107). Cu aceste perioade pe cari le notăm $2\omega_1$, $2\omega_3$, putem construi funcţiunea $p(u|\omega_1,\omega_3)$. Limita inferioară a integralei (3) fiind un punct de ramificaţiune (punctul $x=\infty$), rezultă că $\varphi(u)$ este o funcţiune pară [(10), § 106] şi totalitatea valorilor lui u în cari ea se reproduce este cuprinsă în expresiunea

$$\pm u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \tag{5}$$

u_0 fiind una din ele (§ 142) adică funcţiunea $\varphi(u)$ nu poate reluă valoarea $\varphi(u_0)$ decât într'unul din punctele cuprinse în expresiunea (3).

In domeniul punctului $u = o$, funcţiunea $\varphi(u)$ este de forma

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + au^2 + bu^4 + \ldots$$

Punctul $u = o$ este dar un pol de ordinul al doilea şi, în virtutea egalităţii

$$\varphi(\pm u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \varphi(u), \tag{6}$$

toate polurile funcţiunei sunt de ordinul al doilea şi date de expresiunea

$$u = 2m\omega_1 + 2n\omega_3. \tag{7}$$

Din cele ce preced rezultă că diferenţa

$$\varphi(u) - p(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

este o funcţiune eliptică care nu are nici un pol; ea se reduce dar la

o constantă. Această constantă este nulă, precum rezultă din desvoltarea funcțiunilor pu și $\varphi(u)$ în domeniul lui $u = o$. Avem așa dar identitatea

$$\varphi(u) = pu.$$

q. e. d.

Pentru a pune în evidență invarianții funcțiunei pu, se scrie $p(u; g_2, g_3)$. De asemenea în privința funcțiunilor σu și ζu: $\sigma(u; g_2, g_3)$, $\zeta(u; g_2, g_3)$.

Formulele de omogenitate corespunzătoare celor trei funcțiuni sunt

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma\left(\lambda u; \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \lambda\,\sigma(u; g_2, g_3), \\ \zeta\left(\lambda u; \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda}\,\zeta(u; g_2, g_3), \\ p\left(\lambda u; \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\,p(u; g_2, g_3), \end{cases}$$

căci, multiplicând ω_1 și ω_3 cu λ, invarianții g_2 și g_3 se reproduc multiplicați respectiv cu λ^{-4}, λ^{-6}.

Făcând în formulele precedente $\lambda = i$ și înlocuind u prin iu, obținem relațiunile

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma(iu; g_2, g_3) = i\sigma(u; g_2, -g_3), \\ \zeta(iu; g_2, g_3) = -i\zeta(u; g_2, -g_3), \\ p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3). \end{cases}$$

147. *Derivate de diferite ordine ale funcțiunii pu.* Derivând ecuațiunea

$$(1)\qquad p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3,$$

și suprimând $p'u$ din amândouă membrele, obținem

$$(2)\qquad p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2.$$

De unde, prin derivațiuni succesive,

$$(3)\quad \begin{cases} p'''u = 12\,pu\,p'u, \\ p^{IV}u = 12\,p'^2u + 12\,pu\,p''u \\ \qquad = 120\,p^3u - 18\,g_2 pu - 12\,g_3, \\ p^{V}u = 18(20\,p^2u - g_2)\,p'u. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

Toate derivatele de ordin par sunt polinoame de pu, pe când derivatele de ordin impar se pot exprimă printr'un produs de $p'u$

cu un polinom de pu. Coeficienții acestor polinoame sunt funcțiuni întregi de $\frac{1}{2}\, g_2$ și de g_3.

Se mai poate observà că punând

$$p^{(2n)}u = f(pu), \quad p^{(2n+1)}u = p'u\,\varphi(pu),$$

gradele polinoamelor $f(pu)$, $\varphi(pu)$ sunt respectiv $n+1$, n. Aceasta se verifică din aproape în aproape.

148. Din ecuațiunile (2) și (3) putem, viceversa, deduce puterea a n^a, a lui pu, precum și produsul acestei puteri prin $p'u$ ($n = 2, 3, \ldots$), în *funcțiune lineară de pu și de derivatele sale.* In adevăr, să considerăm ecuațiunile cari determină derivatele de ordin par

$$p''u,\ p^{IV}u, \ldots,\ p^{(2n)}u.$$

Acest sistem de n ecuațiuni, lineare în raport cu puterile

$$p^2 u,\ p^3 u, \ldots,\ p^{n+1} u,$$

determină aceste puteri în funcțiune lineară de derivatele

$$p''u,\ p^{IV}u, \ldots,\ p^{(2n)}u.$$

Considerând, de altă parte, ecuațiunile care determină derivatele de ordin impar, obținem funcțiunle

$$p'u\ pu,\ p'u\ p^2u, \ldots,\ p'u\ p^nu$$

exprimate în mod linear cu ajutorul derivatelor

$$p'''u,\ p^{IV}u, \ldots,\ p^{(2n+1)}u.$$

149. *Formulă recurentă pentru a determină coeficienții desvoltării funcțiunii pu după puterile crescânde ale lui u.*

Punând, pentru prescurtare

$$(4) \qquad c_2 = 3\,\Sigma'\frac{1}{\omega^4},\quad c_3 = 5\,\Sigma'\frac{1}{\omega^6}, \ldots,$$

avem (14) (§ 138).

$$(5) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c^n u^{2n-2} + \ldots$$

De unde, derivând ambele membre,

$$(6) \quad p'u = -\frac{2}{u^3} + 2\,c_2\,u + 4\,c_3\,u^3 + \ldots + (2n-2)\,u^{2n-1} + \ldots$$

$$(7) \quad p''u = \frac{6}{u^4} + 2\,c_2 + 4{,}3\,c_3\,u^3 + \ldots + (2n-2)(2n-3)\,u^{2n-4} + \ldots$$

Ducând desvoltările lui pu și $p''u$ în egalitatea

$$p''u = 6\,p^2u - \frac{1}{2}g_2$$

și identificând coeficienții lui u^{2n-4} din amândouă membrele, obținem

$$(2n-2)(2n-3)c_n = 6(c_n + c_2 c_{n-2} + \ldots + c_{n-2} c_2 + c_n);$$

de unde

$$(8)\qquad c_n = \frac{3}{(2n+1)(n-3)} \sum_{i=2}^{n-2} c_i c_{n-i}, \qquad n = 4, 5, \ldots$$

Această formulă arată că coeficienții c_4, c_5, ... sunt funcțiuni întregi de c_2 și c_3 și servește a-i determină din aproape în aproape. Coeficienții c_2 și c_3 sunt dați prin definițiune de expresiunile

$$c_2 = 3\,\Sigma' \frac{1}{\omega^4} = \frac{g_2}{20}, \qquad c_3 = 5\,\Sigma' \frac{1}{\omega^6} = \frac{g_3}{28};$$

sau, se deduc din ecuațiunea (1), în care înlocuim pu și $p'u$ prin desvoltările lor (5) și (6) și identificăm. Coeficienții desvoltării funcțiunii pu, în domeniul $u = o$, sunt așà dar funcțiuni întregi, cu coeficienți raționali, de invarianții g_2 și g_3.

Observare. Din cecace precede rezultă că sumele $\Sigma' \frac{1}{\omega^{2n}}$, n fiind un număr întreg > 3, sunt funcțiuni întregi de cele două sume $\Sigma' \frac{1}{\omega^4}$ și $\Sigma' \frac{1}{\omega^6}$.

150. Incepând dela $n = 4$, formula (8) ne dă

$$(9)\qquad \begin{cases} c_4 = \dfrac{1}{3} c_2^2 = \dfrac{g_2^2}{2^4\,3.5^2}, \\ c_5 = \dfrac{3}{11} c_2 c_3 = \dfrac{3\,g_2 g_3}{2^4.\,5.7.11} \\ c_6 = \dfrac{1}{13}(2 c_2 c_4 + c_3^2) = \dfrac{1}{13}\left(\dfrac{g_2^3}{2^5.\,3.5^3} + \dfrac{g_3^2}{2^4\,7^2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De unde primii termeni ai desvoltării funcțiunii:

$$(10)\qquad pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.\,3.5^2} u^6 + \ldots$$

Din această desvoltare deducem aceea a funcțiunii $\zeta u = -\int pu\, du$,

$$(11) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \frac{g_3}{28.5} u^5 - \dots,$$

fără constantă arbitrară, căci din definițiunea funcțiunii ζu (II) (§ 137) rezultă că diferența $\zeta u - \frac{1}{u}$ se anulează pentru $u = 0$.

Integrând ambele membre ale egalității (11) și ținând seamă de relațiunea $\left(\frac{\sigma u}{u}\right)_0 = 1$, obținem

$$\log \frac{\sigma u}{u} = -\frac{g_2}{60.4} u^4 - \frac{g_3}{28.5.6} u^6 - \dots$$

De unde, trecând dela logaritm la funcțiunea exponențială și desvoltând această funcțiune într'o serie întreagă, obținem, pentru primii termeni ai desvoltării funcțiunii σu:

$$(12) \qquad \sigma u = u - \frac{g_2}{2^4.3.5} u^5 - \frac{g_3}{2^3.3.5.7} u^7 - \dots$$

Coeficienții seriilor celor trei funcțiuni pu, ζu, σu, desvoltate după puterile lui u, sunt funcțiuni întregi de invarianții g_2, g_3, cu coeficienți numerici raționali.

151. *Observare.* Funcțiunea pu fiind omogenă în u, ω_1, ω_3 și de ordinul -2, rezultă că coeficientul lui u^{2n} în desvoltarea (10) este omogen în ω_1, ω_3 și gradul său de omogeneitate este $-(2n+2)$; prin urmare acest coeficient este de forma

$$\Sigma A_{\alpha\beta} g_2^{\alpha} g_3^{\beta},$$

$A_{\alpha\beta}$ fiind numere raționale și α, β numere întregi pozitive satisfăcând egalitatea

$$2\alpha + 3\beta = n + 1.$$

Ceeace permite a scrie partea literală a coeficienților seriei, în funcțiune de g_2 și g_3.

152. *Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcțiunea ζu.* Din relațiunea

$$pu = -\frac{d\zeta u}{du}$$

deducem

$$\frac{d\zeta(u + 2\omega_1)}{du} = \frac{d\zeta u}{du},$$

$$\frac{d\zeta(u + 2\omega_3)}{du} = \frac{d\zeta u}{du};$$

de unde, prin integrațiune,

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + C,$$
$$\zeta(u + 2\omega_3) = \zeta u + C'.$$

Făcând în prima din aceste egalități $u = -\omega_1$ și în a doua $u = -\omega_3$, obținem

$$\zeta\omega_1 = \zeta(-\omega_1) + C, \quad \zeta\omega_3 = \zeta(-\omega_3) + C';$$

de unde

$$C = 2\zeta\omega_1, \quad C' = 2\zeta\omega_3.$$

Punând

$$\zeta\omega_1 = \eta_1, \quad \zeta\omega_3 = \eta_3, \tag{1}$$

avem relațiunile

$$\begin{cases} \zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1, \\ \zeta(u + 2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3. \end{cases} \tag{2}$$

Intr'un mod general, avem

$$\zeta(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta u + 2m\eta_1 + 2n\eta_3, \tag{3}$$

m și n fiind numere întregi.

Făcând în egalitatea precedentă $m = n = -1$ și introducând cantitatea η_2 definită de relațiunea

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \tag{4}$$

obținem egalitatea

$$\zeta(u + 2\omega_2) = \zeta u + 2\eta_2. \tag{5}$$

Inlocnind u prin $-\omega_2$, această egalitate dă

$$\zeta\omega_2 = \eta_2. \tag{6}$$

Așà dar, oricare ar fi semiperioada ω_α, avem egalitățile

$$\zeta(u + 2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha, \quad \eta_\alpha = \zeta\omega_\alpha, \tag{7}$$

pe lângă cari alăturăm relațiunile

$$\Sigma\omega_\alpha = 0, \quad \Sigma\eta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{8}$$

153. Constantele η_α introduse mai sus, sunt funcțiuni uniforme de semiperioadele ω_1, ω_3; ele sunt finite, oricare ar fi sistemul (ω_1, ω_3) cu condițiunea, ce se presupune împlinită în toate desvoltările precedente, ca raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ să fie imaginar. Două din aceste constante nu pot fi nule în acelaș timp, căci altmintrelea ar rezultà din prima formulă (7) ca funcțiunea ζu să fie dublu periodică; ceeace este imposibil.

Să considerăm două din cantităţile η_a, fie η_1 şi η_3. Aceste constante nu sunt independente între ele, ci sunt legate printr'o relaţiune numită *relaţiunea lui Legendre*. Pentru a obţine această relaţiune să considerăm integrala

$$\int \zeta u \, du,$$

luată după un paralelogram de perioade $(2\omega_1, 2\omega_3)$, având unul din vârfuri într'un punct u_0 diferit de un pol. Acest paralelogram conţinând un singur pol al funcţiunii ζu cu reziduul 1, valoarea integralei este egală cu $2i\pi$.

Să presupunem *pozitiv* coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$,

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| e^{ia}, \qquad 0<a<\pi. \tag{9}$$

In acest caz, plecând dela vârful A (u_0), (fig. 49) (§ 129) şi descriind paralelogramul în sensul pozitiv, avem

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = 2i\pi$$

Reunind integralele după laturile opuse, două câte două, obţinem

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \zeta u \, du - \int_{u_0+2\omega_3}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3} \zeta u \, du$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} [\zeta u - \zeta(u+2\omega_3)] \, du$$

$$= -2\eta_3 \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} du = -4\eta_3\omega_1.$$

De asemenea găsim

$$(BC) + (DA) = 4\eta_1\omega_3.$$

Relaţiunea lui Legendre consistă în egalitatea

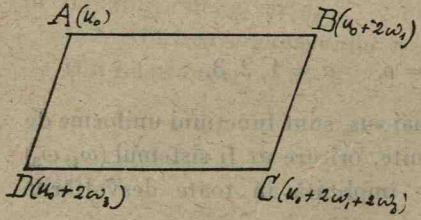

Fig. 50

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}. \tag{10}$$

Dacă în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ coeficientul lui i este negativ $(o>a>-\pi)$, dispoziţiunea paralelogramului este precum arată (fig, 50) In acest caz obţinem relaţiunea

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = -\frac{i\pi}{2}. \tag{11}$$

Introducând cantitățile ω_2, η_2 în relațiunea lui Legendre, obținem, în virtutea formulelor (8), egalitățile următoare:

$$(12) \qquad \eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = \eta_3\omega_2 - \eta_2\omega_3 = \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm\frac{i\pi}{2},$$

în cari luăm semnul $\pm$ după cum coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ este pozitiv sau negativ.

154. Este interesant de examinat cum se modifică cantitățile η_1, η_3 când înlocuim sistemul de perioade $(2\omega_1, 2\omega_3)$ printr'un sistem de perioade echivalente $(2\omega'_1, 2\omega'_3)$. Fie

$$(a) \qquad \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

formulele de transformare ale perioadelor. Avem, în virtutea formulelor (12),

$$\zeta(u + 2\alpha\omega_1 + 2\beta\omega_3) = \zeta u + 2\alpha\eta_1 + 2\beta\eta_3,$$
$$\zeta(u + 2\gamma\omega_1 + 2\delta\omega_3) = \zeta u + 2\gamma\eta_1 + 2\delta\eta_3,$$

Făcând în aceste egalități respectiv

$$u = -\alpha\omega_1 - \beta\omega_3, \qquad u = -\gamma\omega_1 - \delta\omega_3,$$

deducem formulele

$$\zeta(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3) = \alpha\eta_1 + \beta\eta_3,$$
$$\zeta(\gamma\omega_1 + \delta\omega_3) = \gamma\eta_1 + \delta\eta_3.$$

sau, punând

$$\eta'_1 = \zeta\omega'_1 = \zeta(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3), \qquad \eta'_3 = \zeta\omega'_3 = \zeta(\gamma\omega_1 + \delta\omega_3),$$

avem formulele de transformare

$$(b) \qquad \eta'_1 = \alpha\eta_1 + \beta\eta_3, \qquad \eta'_3 = \gamma\eta_1 + \delta\eta_3,$$

identice cu formulele (a) în cari înlocuim ω_1, ω_3, ω'_1, ω'_3 respectiv prin η_1, η_3, η'_1, η'_3.

155. *Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcțiunea σu.* Pentru a găsi ce devine funcțiunea σu, când înlocuim u prin $u + 2\omega_a$, să integrăm ambele membre ale egalității (7).

Obținem

$$\log\frac{\sigma(u + 2\omega_a)}{C\sigma u} = 2\eta_a u,$$

sau

$$(13) \qquad \sigma(u + 2\omega_a) = C\, e^{2\eta_a u}\, \sigma u,$$

C fiind o constantă a cărei valoare se determină făcând $u = -\omega_a$; obținem

$$C\, e^{-2\eta_a\omega_a} = -1.$$

Avem așa dar relațiunea

$$(14)\quad \sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha (u + \omega_\alpha)}\, \sigma u, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Efectul produs asupra funcțiunii σu, când adăugăm argumentului u o perioadă oarecare, este dar a o reproduce multiplicată cu un factor exponențial al cărui exponent este o funcțiune lineară întreagă de u. Erà evident că, prin această substituțiune, funcțiunea σu trebuie să se reproducă multiplicată cu un factor care *nu se poate anulà*, căci funcțiunea $\sigma(u + 2\omega_\alpha)$ are aceleași zeruri ca funcțiunea σu.

Relațiunea necesară între aceste două funcțiuni este așà dar de forma

$$\sigma(u + 2\omega_\alpha) = e^{g(u)}\sigma u,$$

$g(u)$ fiind o funcțiune întreagă. Luând derivata logaritmică a ambelor membre, avem

$$\zeta(u + 2\omega_\alpha) = \zeta u + g'(u);$$

prin urmare, în virtutea egalității (7),

$$g'(u) = 2\eta_\alpha.$$

Așà dar

$$g(u) = 2\eta_\alpha u, \qquad \sigma(u + 2\omega_\alpha) = Ce^{2\eta_\alpha u}\sigma u.$$

Să înlocuim în ambele membre (14) u prin $u + 2(k-1)\omega_\alpha$; avem

$$\sigma(u + 2k\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha [u+(2k-1)\omega_\alpha]}\, \sigma[u + 2(k-1)\omega_\alpha].$$

Dând lui k valorile 1, 2, ..., m și făcând produsul tuturor egalităților, obținem formula

$$(15)\quad \sigma(u + 2m\omega_\alpha) = (-1)^m e^{2\eta_\alpha (mu+m^2\omega_\alpha)}\, \sigma u.$$

Inlocuind în amândouă membrele acestei egalități u prin $u + 2n\omega_\beta$, $\beta \neq \alpha = 1, 2, 3$, obținem

$$\sigma(u+2m\omega_\alpha+2n\omega_\beta) = (-1)^{m+n} e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta)-2mn(\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha)}\, \sigma u,$$

sau, în virtutea formulelor (12),

$$(16)\quad \sigma(u+2m\omega_\alpha+2n\omega_\beta) = (-1)^{m+n+mn} e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta)}\, \sigma u.$$

156. *Expresiunea funcțiunilor eliptice prin funcțiunea* σ.

I. Ne propunem întâiu problema următoare: Să se construiască o funcțiune eliptică având două perioade primitive date

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ ale cărei zeruri și poluri să fie respectiv punctele date

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n. \quad -$$

Pentru ca problema să fie posibilă este necesar ca între zerurile (a_i) și polurile (b_i) să existe în virtutea teoremei lui Liouville (§ 129), relațiunea

$$(1) \qquad \Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \quad (mod\, 2\omega_1, 2\omega_3).$$

1°. Să presupunem că congruența (1) se reduce la egalitatea

$$(2) \qquad \Sigma a_i = \Sigma b_i.$$

Să considerăm raportul

$$\frac{\sigma(u - a_i)}{\sigma(u - b_i)},$$

care reprezintă o funcțiune uniformă în tot planul având, abstracțiune făcând de multipli de perioade, singurul zero $u = a_i$ și singurul pol $u = b_i$. De altă parte, în virtutea formulei (14) din paragraful precedent, avem egalitatea

$$(3) \qquad \frac{\sigma(u - a_i + 2\omega_\alpha)}{\sigma(u - b_i + 2\omega_\alpha)} = e^{2\eta_\alpha(b_i - a_i)} \frac{\sigma(u - a_i)}{\sigma(u - b_i)}.$$

Dând lui i valorile 1, 2, ..., n să considerăm funcțiunea

$$(4) \qquad \varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}.$$

Această funcțiune satisface relațiunile

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u)\, e^{2\eta_1[\Sigma b_i - \Sigma a_i]}, \\ \varphi(u + 2\omega_3) = \varphi(u)\, e^{2\eta_3[\Sigma b_i - \Sigma a_i]}; \end{cases}$$

prin urmare, în virtutea egalității (2), avem

$$(6) \qquad \varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega_3) = \varphi(u).$$

Funcțiunea $\varphi(u)$ împlinește condițiunile cerute: *ea este o funcțiune eliptică având perioadele* $2\omega_1$, $2\omega_3$, *zerurile* (a_i) *și polurile* (b_i). Toate funcțiunile eliptice având aceleași perioade, zeruri și poluri nu pot diferi de $\varphi(u)$ decât printr'un factor constant.

Să observăm că nu este exclus cazul când punctele a_i de o parte, sau punctele b_i de altă parte n'ar fi distincte între ele. Dacă, de ex. a_i este un zero multiplu de ordinul α, repetăm în expresiunea lui $\varphi(u)$ punctul a_i de α ori.

2^0. Să presupunem acum că între zerurile a_i și polurile b_i există egalitatea

$$\Sigma a_i - \Sigma b_i = 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3, \tag{7}$$

λ și μ fiind două numere întregi date. Fie a un punct congruent cu punctul a_1, legat de el prin egalitatea

$$a_1 = a + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3. \tag{8}$$

Funcțiunea

$$\psi(u) = \frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}$$

împlinește condițiunea cazului precedent: suma zerurilor este egală cu suma polurilor; ea admite dar perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$. Inlocuind a prin valoarea sa (8), avem, în virtutea formulei (16) (§ 155), egalitatea

$$\sigma(u-a) = \sigma(u-a_1+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3)$$
$$= (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu}\, e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(u+\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}\,\sigma(u-a_1) = Ce^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)}\,\sigma(u-a_1),$$

în care $C = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu}\, e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}$. Lăsând la o parte factorul constant C, rezultă că funcțiunea

$$\psi(u) = e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)u} \prod_1^n \frac{\sigma(u-a_i)}{\sigma(u-b_i)} \tag{9}$$

este, în cazul egalității (7), o funcțiune eliptică având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, zerurile a_i și polurile b_i.

II. Să presupunem acum dată o funcțiune eliptică $f(u)$ având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ și fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

respectiv zerurile și polurile sale, distincte sau nu, situate într'un paralelogram elementar. Dacă între aceste puncte există congruența (1), înlocuim un zero sau un pol prin punctul respectiv congruent astfel ca egalitatea (2) să fie împlinită și construim funcțiunea (4). Expresiunea lui $f(u)$ va fi

$$f(u) = C\prod_{i=1}^n \frac{\sigma(u-a_i)}{\sigma(u-b_i)}. \tag{10}$$

Constanta C se determină dând lui u o valoare particulară diferită de a_i și de b_i și exprimând că amândouă membrele sunt egale Dacă, de ex., nici unul din punctele a_i și b_i nu este congruent cu o avem

$$f(u) = f(o)\prod_{i=1}^n \frac{\sigma b_i\,\sigma(u-a_i)}{\sigma a_i\,\sigma(u-b_i)}. \tag{11}$$

Constanta C se mai poate determină desvoltând ambele membre (10) în domeniul unui pol b_i și egalând coeficienții puterii celei mai înalte a lui $\frac{1}{u - b_i}$

Observare. Expresiunea funcțiunilor eliptice prin funcțiunea σ este analoagă cu aceea a unei funcțiuni rațională pusă sub forma unui cât de două polinoame descompuse în factori de gradul întâiu, funcțiunea $\sigma(u - a)$ ținând locul factorului linear $u - a$.

157. *Aplicațiuni.* I. *Expresiunea derivatei $p'u$ prin funcțiunea σ.* Funcțiunea $p'u$ admite zerurile incongruente ω_1, ω_2, ω_3 a căror sumă este nulă și polul triplu $u = o$. Avem așà dar

$$p'u = C \frac{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u - \omega_3)}{\sigma^3 u}.$$

In domeniul originii, valorile principale ale ambelor membre sunt respectiv

$$-\frac{2}{u^3}, \quad -C\frac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{u^3};$$

de unde rezultă $C = \frac{2}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}$ și prin urmare

$$(1) \qquad p'u = 2\frac{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u - \omega_3)}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3\,\sigma^3 u}.$$

II. Să considerăm funcțiunea

$$pu - p\varrho,$$

ϱ fiind o constantă nu congruentă cu 0. Zerurile acestei funcțiuni sunt punctele $u \equiv \pm\varrho$ și punctul $u \equiv o$ este un pol dublu. Luând ca zeruri punctele $\pm\varrho$, avem expresiunea

$$pu - p\varrho = C\frac{\sigma(u + \varrho)\,\sigma(u - \varrho)}{\sigma^2 u}.$$

Valorile principale ale ambelor membre în domeniul lui $u = o$ fiind respectiv

$$\frac{1}{u^2}, \qquad -C\frac{\sigma^2\varrho}{u^2},$$

rezultă formula fundamentală

$$(2) \qquad pu - p\varrho = -\frac{\sigma(u + \varrho)\,\sigma(u - \varrho)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\varrho}.$$

In cazul când ϱ este egal cu o semiperioadă, $\varrho = \omega_\alpha$, punctele $\pm\varrho$ sunt congruente și $\varrho = \omega_\alpha$ este un zero dublu al funcțiunii

$pu - p\omega_a$. Formula devine

$$(3) \qquad pu - e_a = -\frac{\sigma(u+\omega_a)\,\sigma(u-\omega_a)}{\sigma^2\omega_a\,\sigma^2 u}.$$

158. Din formula (2) rezultă o nouă expresiune a derivatei $p'u$ prin funcțiunea σ. Să împărțim ambele membre ale acestei egalități cu $u - v$:

$$\frac{pu - pv}{u - v} = -\frac{\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}\,\frac{\sigma(u-v)}{u-v}$$

și să facem v să tindă către u; obținem egalitatea

$$(4) \qquad p'u = -\frac{\sigma_2 u}{\sigma^4 u}.$$

159. Aceiaș formulă (2) conduce la o relațiune interesantă pentru funcțiunea σ. Să considerăm identitatea

$$(B—C)\,(D—A) + (C—A)\,(D—B) + (A—B)\,(D—C) = 0,$$

și să punem

$$A = pa, \quad B = pb, \quad C = pc, \quad D = pd;$$

obținem identitatea

$$(pb-pc)\,(pu-pa)+(pc-pa)\,(pu-pb)+(pa-pb)\,(pu-pc)=o.$$

Aplicând parentezelor formula (2), obținem relațiunea căutată

$$\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c)+\sigma(u+b)\sigma(u-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a)+\sigma(u+c)\sigma(u-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b)=o.$$

160. *Formule de adițiune pentru funcțiunile ζu, pu, $p'u$.* Să reluăm formula fundamentală

$$(1) \qquad pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

și să luăm derivatele logaritmice ale ambelor membre succesiv în raport cu u și în raport cu v; vom aveà

$$(2) \qquad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{p'u}{pu - pv},$$

$$(3) \qquad \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v = -\frac{p'v}{pu - pv}.$$

Adunând aceste două egalități, obținem formula zisă *de adițiune* pentru funcțiunea ζu:

$$(4) \qquad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Această formulă de adiţiune nu este algebrică, căci între pu şi ζu nu există ecuaţiune algebrică şi prin urmare $\zeta(u+v)$ nu este funcţiune algebrică de ζu şi de ζv.

161. Derivând formula (4) în raport cu u, obţinem formula de adiţiune pentru funcţiunea pu:

$$(5) \qquad p(u+v) = pu - \frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Această formulă se poate transformà şi pune sub diferite forme.

Pentru a obţine una din aceste forme, să efectuăm derivaţiunea din membrul al doilea în raport cu u

$$p(u+v) - pu = -\frac{1}{2}\frac{p''u}{pu - pv} + \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)\,p'u}{(pu - pv)^2}$$

şi să permutăm u cu v

$$p(u+v) - pv = \frac{1}{2}\frac{p''v}{pu - pv} - \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)\,p'v}{(pu - pv)^2}.$$

Adunând aceste două egalităţi şi ţinând seamă de identitatea

$$p''u - p''v = 6(pu - pv),$$

obţinem formula de adiţiune

$$(6) \qquad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

Această formulă ne dă expresiunea lui $p(u+v)$ în *funcţiune raţională* de pu, pv şi derivatele lor $p'u$, $p'v$, precum formula de adiţiune a funcţiunii $\sin u$ dă expresiunea lui $\sin(u+v)$ în funcţiune raţională de $\sin u$, $\sin v$ şi de derivatele lor $\cos u$, $\cos v$.

Eliminând $p'u$ şi $p'v$ între ecuaţiunea (6) şi ecuaţiunile

$$p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3, \qquad p'^2v = 4p^3v - g_2 pv - g_3,$$

obţinem între

$$p(u+v),\ pu,\ pv$$

o ecuaţiune algebrică. De aceea se zice că funcţiunea eliptică pu admite o *formulă* (sau o *teoremă*) *de adiţiune algebrică*.

162. O altă formă se obţine punând în (6)

$$u + v = -w.$$

Formula devine

$$pu + pv + pw = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

Membrul întâiu rămânând invariabil când permutăm între ele

argumentele u, v, w deducem egalităţile

$$\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = \left(\frac{p'v - p'w}{pv - pw}\right)^2 = \left(\frac{p'w - p'u}{pw - pu}\right)^2.$$

De unde

$$(7) \qquad \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{p'v - p'w}{pv - pw} = \frac{p'w - p'u}{pw - pu}, \quad u + v + w = o.$$

Semnele primelor două rapoarte se justifică considerând valorile lor principale în domeniul lui $v = o$; al treilea raport este o consecinţă a celor dintâi.

163. Formula de adiţiune (7) se poate pune sub forma unui determinant

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix} = o.$$

Această ecuaţiune transcendentă între argumentele, u, v, w este aşa dar o consecinţă a relaţiunii algebrice

$$(9) \qquad u + v + w = o.$$

Viceversa, ecuaţiunea (8) trage după sine relaţiunea (9), sau în general, relaţiunea

$$(10) \qquad u + v + w = o, \quad (mod\delta\delta.\ 2\omega_1,\ 2\omega_3).$$

In adevăr, membrul întâiu al ecuaţiunii (8), privit ca funcţiune de u, este o funcţiune eliptică de ordinul al treilea, având $u = o$ ca pol triplu. Această funcţiune se anulează evident pentru $u = v$, $u = w$; prin urmare cel de al treilea zero este $u \equiv -(v + w)$. De unde rezultă relaţiunea (10).

164. Se obţine o formulă de adiţiune pentru derivata $p'u$, derivând egalitatea (5) în raport cu v. Obţinem

$$p'(u + v) = -\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta u\, \delta v}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right),$$

sau

$$(12) \quad p'(u+v) = \left[\frac{p'^2 v}{(pv - pu)^3} - \frac{p''v}{2(pv - pu)^2}\right] p'u + \left[\frac{p'^2 u}{(pu - pv)^3} - \frac{p''u}{2(pu - pv)^2}\right] p'v.$$

Inlocuind p'^2u, p'^2v, $p''u$, $p''v$ prin valorile lor în funcţiune de pu, pv vedem că $p'(u + v)$ este o funcţiune raţională de pu, pv, $p'u$, $p'v$.

Aceeaş concluziune se aplică derivatelor de orice ordin $p^{(n)}(u+v)$: *toate aceste derivate sunt funcţiuni raţionale de* pu, pv, $p'u$, $p'v$.

Nu există teoremă de adiţiune pentru funcţiunea σu.

165. *Aplicaţiune.* In formula de adiţiune (6) să facem succesiv $v = \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ţinând seama de relaţiunea

$$p'^2 u = 4\,(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3),$$

obţinem formulele

$$(13)\quad \begin{cases} p\,(u+\omega_1) - e_1 = \dfrac{(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3)}{pu - e_1}, \\ p\,(u+\omega_2) - e_2 = \dfrac{(e_2 - e_1)\,(e_2 - e_3)}{pu - e_2}, \\ p\,(u+\omega_3) - e_3 = \dfrac{(e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2)}{pu - e_3}. \end{cases}$$

Observare. Aceste formule se pot obţine fără a recurge la formula de adiţiune dacă observăm că produsul

$$\left[p\,(u+\omega_\alpha) - e_\alpha\right]\,(pu - e_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

este olomorf în paralelogramul perioadelor şi că prin urmare se reduce la o constantă C. Pentru a obţine valoarea acestei constante să înlocuim u printr'o semiperioadă ω_β diferită de ω_α; obţinem

$$C = \left[p\,(\omega_\alpha + \omega_\beta) - e_\alpha\right](p\,\omega_\beta - e_\alpha) = (e_\gamma - e_\alpha)\,(e_\beta - e_\alpha).$$

Avem astfel formula

$$p\,(u+\omega_\alpha) - e_\alpha = \frac{(e_\alpha - e_\beta)\,(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha},$$

care rezumă formulele (13).

166. *Formulă de adiţiune a funcţiunii pu pentru un număr oare care de argumente.*

Fie

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n,$$

n puncte incongruente între ele şi incongruente cu zero; să considerăm determinantul

$$(1)\quad \varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 & \ldots & p^{(n-1)}u_1 \\ 1 & pu_2 & p'u_2 & \ldots & p^{(n-1)}u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & pu_n & p'u_n & \ldots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix}$$

Acest determinant privit ca funcţiune de u este o funcţiune eliptică de ordinul $n+1$, având polul $u=o$ de ordinul $n+1$; ea se anulează în punctele $u=u_1, u_2, \ldots, u_n$, prin urmare se anulează

şi în punctul $u=-(u_1+u_2+\ldots+u_n)$ (§ 129). Aşà dar ecuaţiunea

$$\varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \tag{2}$$

trage după sine congruenţa

$$u+u_1+u_2+\ldots+u_n \equiv 0 \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}. \tag{3}$$

In virtutea acestei congruenţe, ecuaţiunea (2) este o ecuaţiune algebrică între funcţiunea $p(u_1+u_2+\ldots+u_n)$ şi funcţiunile $pu_1, pu_2, \ldots, pu_n$. Ea constitue formula de adiţiune căutată.

Să exprimăm funcţiunea $\varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ cu ajutorul funcţiunii σ.

Funcţiunea eliptică φ_n de variabila u, având polul $u=0$ de ordinul $n+1$ şi zerurile simple $u_1, u_2, \ldots, u_n, -(u_1+u_2+\ldots+u_n)$, este de forma

$$\varphi_n = c_n \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_n)\,\sigma(u+u_1+\ldots u_n)}{\sigma^{n+1} u}. \tag{4}$$

factorul c_n fiind independent de u. Pentru a obţine acest factor să egalăm valorile principale ale desvoltării ambelor membre în domeniul lui $u=0$. Valoarea principală a membrului al doilea este

$$(-1)^n c_n \frac{\sigma u_1\, \sigma u_2 \ldots \sigma u_n\, \sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{u^{n+1}},$$

iar aceea a membrului întâiu este

$$-\frac{n!}{u^{n+1}} \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

φ_{n-1} fiind determinantul minor dedus din (1) când suprimăm linia întâia şi coloana din urmă. Avem aşà dar egalitatea

$$n!\,\varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (-1)^{n-1} c_n \sigma u_1 \sigma u_2 \ldots \sigma u_n \sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n). \tag{5}$$

Să privim φ_{n-1} ca funcţiune de u_1 şi să-i aplicăm o formulă analoagă cu formula (4); obţinem expresiunea

$$\varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = c_{n-1} \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\ldots\sigma(u_1-u_n)\,\sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{\sigma^n u_1} \tag{6}$$

în care factorul c_{n-1} este independent de u_1. Din (5) şi (6) rezultă relaţiunea

$$c_n = (-1)^{n-1} n!\, c_{n-1} \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\ldots\sigma(u_1-u_n)}{\sigma^{n+1} u_1\, \sigma u_2 \ldots \sigma u_n} \tag{7}$$

De asemenea, avem egalitățile

$$(8)\quad \begin{cases} c_{n-1} = (-1)^{n-2}(n-1)!\, c_{n-2}\, \dfrac{\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_2-u_4)\ldots\sigma(u_2-u_n)}{\sigma^n u_2\, \sigma u_3 \ldots \sigma u_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_2 = -2!\, c_1\, \dfrac{\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^3 u_{n-1}\, \sigma u_n}. \end{cases}$$

Coeficientul c_1 îl deducem direct din expresiunea

$$\varphi_1(u_{n-1}, u_n) = \begin{vmatrix} 1 & p u_{n-1} \\ 1 & p u_n \end{vmatrix} = c_1 \frac{\sigma(u_{n-1}-u_n)\,\sigma(u_{n-1}+u_n)}{\sigma^2 u_{n-1}}$$

$$= \frac{\sigma(u_{n-1}-u_n)\,\sigma(u_{n-1}+u_n)}{\sigma^2 u_{n-1}\,\sigma^2 u_n};$$

de unde

$$(9)\qquad c_1 = \frac{1}{\sigma^2 u_n}.$$

Multiplicând egalitățile (4), (7), (8) și (9), obținem

$$\varphi_n(u_1 u_1, u_2, \ldots, u_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 2!\,3!\ldots n!\, \frac{\sigma(u+u_1+\ldots+u_n)\,\Pi\sigma(u_i-u_k)}{(\sigma u\, \sigma u_1 \ldots \sigma u_n)^{n+1}}$$

$$(i = 0, 1\ldots n-1;\ k = 1, 2\ldots n;\ i<k,\ u_0 = u).$$

Până acì s'a presupus că punctele u_i sunt distincte. Dacă două din aceste puncte coincid, de ex., $u_2 = u_1$, determinantul φ_n devine identic nul. Să examinăm prin ce se înlocuește formula (10). Să punem $u_2 = u_1 + h$ și să înlocuim linia a treia prin diferența dintre această linie și linia a doua. Determinantul (1) desvoltat după puterile lui h devine

$$h \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 & \ldots & p^{(n-1)}u_1 \\ 0 & p'u_1 & p''u_1 & \ldots & p^{(n)}u_1 \\ 1 & pu_3 & p'u_3 & \ldots & p^{(n-1)}u_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & pu_n & p'u_n & \ldots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix} + h^2 \mathrm{P}(h),$$

$\mathrm{P}(h)$ fiind o serie întreagă de h convergentă în domeniul $h = o$. Substituind această expresiune în formula (10) și ținând seamă de egalitatea

$$\lim_{h=o} \frac{\sigma h}{h} = 1,$$

obţinem, suprimând factorul h şi făcând $h = o$,

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\ 0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\ 1 & pu_3 & p'u_3 \dots & p^{(n-1)}u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix}$$

$$= -c\,\frac{\sigma(u+2u_1+u_3+\dots+u_n)\sigma^2(u-u_1)\,\Pi_3^n\,\sigma(u-u_i)\,\sigma^2(u_1-u_i)\,\Pi\,\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\;\sigma^{2(n+1)}u_1\;\sigma^{n+1}u_3\dots\sigma^{n+1}u_n}$$

$$(\lambda = 3, 4, \dots, n-1;\ \mu = 4, 5, \dots, n;\ \lambda < \mu)$$

c fiind coeficientul numeric din membrul al doilea (10).

Să presupunem că şi punctul u_3 tinde către u_1; punând în (11) $u_3 = u_1 + h$ şi înlocuind linia a patra prin diferenţa dintre această linie şi linia a doua, membrul întâi va conţine factorul $\frac{h^2}{1.2}$. Divizând ambele membre cu h^2 şi făcând $h = o$, egalitatea (11) devine

$$(12)\qquad \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\ 0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\ 0 & p''u_1 & p'''u_1 \dots & p^{(n+1)}u_1 \\ 1 & pu_4 & p'u_4 \dots & p^{(n-1)}u_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 c\,\frac{\sigma(u+3u_1+u_4+\dots+u_n)\,\sigma^3(u-u_1)\,\Pi_4^n\,\sigma(u-u_i)\,\sigma^3(u_1-u_i)\,\Pi\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\;\sigma^{3(n+1)}u_1\;\sigma^{n+1}u_4\dots\sigma^{n+1}u_n}$$

$$(\lambda = 4, 5\dots, n-1;\ \mu = 5, 6, \dots, n;\ \lambda < \mu).$$

Fie, într'un mod general, $u_1 = u_2 = \dots = u_\nu$; vom obţine, procedând în mod analog, egalitatea

$$(13)\qquad \frac{1}{2!\,3!\dots(\nu-1)!}\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\ 0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p^{(\nu-1)}u_1 & p^{(\nu)}u_1 \dots & p^{(n+\nu-2)}u_1 \\ 1 & pu_{\nu+1} & p'u_{\nu+2} \dots & p^{(n-1)}u_{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} c \frac{\sigma(u+\nu u_1+u_{\nu-1}+\ldots+u_n)\sigma^{\nu}(u-u_1)\prod_{\nu+1}^{n}\sigma(u-u_i)\,\sigma^{\nu}(u_1-u_i)\Pi(\sigma u_\lambda - u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\;\sigma^{\nu(n+1)}u_1\;\sigma^{n+1}u_{\nu+1}\ldots\sigma^{n+1}u_n}$$

$$(\lambda=\nu+1,\ldots,n-1;\ \mu=\nu+2,\ldots,n;\ \lambda<\mu).$$

Să presupunem, în fine, că toate punctele u_i coincid; vom avea, punând în egalitatea (13) $\nu=n$, $u_1=\rho$ și înlocuind constanta c prin valoarea sa:

$$(14)\qquad f(u)=\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u\ldots & p^{(n-1)}u \\ 1 & p\rho & p'\rho\ldots & p^{(n-1)}\rho \\ 0 & p'\rho & p''\rho\ldots & p^{(n)}\rho \\ 0 & p''\rho & p'''\rho\ldots & p^{(n+1)}\rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & p^{(n-1)}\rho & p^{(n)}\rho\ldots & p^{(2n-2)}\rho \end{vmatrix}$$

$$=\left[2!\,3!\ldots(n-1)!\right]^2 n!\,\frac{\sigma^n(u-\rho)\;\sigma(u+n\rho)}{\sigma^{n+1}u\;\sigma^{n(n+1)}\rho}.$$

Funcțiunea $f(u)$, reprezentată prin determinantul precedent, este o funcțiune eliptică de ordinul $n+1$, având polul $u=o$, multiplu de ordinul $n+1$ și, precum ne arată membrul al doilea, ea admite $u=\rho$ ca zero multiplu de ordinul n și $u=-n\rho$ ca zero simplu. Acest din urmă rezultat se conchide direct din forma determinantului, căci acest determinant și primele $n-1$ derivate ale sale:

$$(15)\qquad f(u)=\begin{vmatrix} 0 & p^{(\nu)}u & p^{(\nu+1)}u\ldots & p^{(n+\nu-1)}u \\ 1 & p\rho & p'\rho\ldots & p^{(n-1)}\rho \\ 0 & p'\rho & p''\rho\ldots & p^{(n)}\rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & p^{(n-1)}\rho & p^{(n)}\rho\ldots & p^{(2n-2)}\rho \end{vmatrix}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n-1).$$

se anulează pentru $u=\rho$ și, prin urmare, în virtutea teoremei (§ 129) se anulează și pentru $u=-n\rho$.

Corolar. Dacă în egalitatea (14) multiplicăm ambele membre cu u^{n+1} și facem $u=o$, rezultă egalitatea

$$-n!\begin{vmatrix} 1 & p\rho & p'\rho\ldots & p^{(n-2)}\rho \\ 0 & p'\rho & p''\rho\ldots & p^{(n-1)}\rho \\ 0 & p''\rho & p'''\rho\ldots & p^{(n)}\rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & p^{(n-1)}\rho & p^{(n)}\rho\ldots & p^{(2n-3)}\rho \end{vmatrix}=(-1)^n\left[2!\,3!\ldots(n-1)!\right]^2 n!\,\frac{\sigma^n\rho\;\sigma n\rho}{\sigma^{n(n+1)}\rho}$$

sau

$$(16)\quad \begin{vmatrix} p'\varphi & p''\varphi \dots & p^{(n-1)}\varphi \\ p''\varphi & p'''\varphi \dots & p^{(n)}\varphi \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ p^{(n-1)}\varphi & p^{(n)}\varphi \dots & p^{(2n-3)}\varphi \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)}[2!\,3!\dots(n-1)!]^2 \frac{\sigma n\varphi}{\sigma^{nn}\varphi}$$

Această interesantă formulă ne va servi la soluțiunea problemei de multiplicațiune a funcțiunii pu.

167. *Expresiunea funcțiunilor eliptice prin funcțiunea* ζ.

Din definițiunea funcțiunii ζu rezultă că funcțiunea $\zeta(u-a)$, a fiind un punct arbitrar, admite acest punct ca pol simplu cu reziduul 1. In domeniul punctului a avem

$$(1)\qquad \zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \mathrm{P}(u-a),$$

$\mathrm{P}(u-a)$ fiind o serie întreagă de $u-a$, convergentă în domeniul acestui punct. Derivând ambele membre de α ori după rând, obținem expresiunile:

$$(2)\quad \begin{cases} \zeta'(u-a) = -\dfrac{1}{(u-a)^2} + \mathrm{P}'(u-a), \\ \zeta''(u-a) = \dfrac{1.2}{(u-a)^3} + \mathrm{P}''(u-a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta^{(\alpha)}(u-a) = (-1)^{\alpha}\dfrac{\alpha!}{(u-a)^{\alpha+1}} + \mathrm{P}^{(\alpha)}(u-a). \end{cases}$$

Din relațiunea $\zeta'(u-a) = -p(u-a)$ rezultă că derivatele $\zeta'(u-a), \zeta''(u-a), \dots$ sunt funcțiuni eliptice având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$; ele admit, în virtutea formulelor (2), punctul a ca pol de un ordin respectiv egal cu $2, 3, \dots, \alpha+1$.

Ne propunem să construim o funcțiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, având, în paralelogramul perioadelor, polurile $a, b, \dots l$, respectiv de ordinele $\alpha+1, \beta+1, \dots, \lambda+1$ și astfel ca părțile principale din desvoltarea funcțiunii în domeniile acestor poluri să fie respectiv

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}}{u-a} + \dfrac{\mathrm{A}_1}{(u-a)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{A}_\alpha}{(u-a)^{\alpha+1}}, \\ \dfrac{\mathrm{B}}{u-b} + \dfrac{\mathrm{B}_1}{(u-b)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{B}\beta}{(u-b)^{\beta+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{L}}{u-l} + \dfrac{\mathrm{L}_1}{(u-l)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{L}\lambda}{(u-l)^{\lambda+1}}, \end{cases}$$

coeficienții cari figurează la numărători pot fi arbitrari cu *unica condițiune ca suma reziduurilor*

$$A + B + \ldots + L$$

să fie nulă, conform teoremei (§ 127). Această condițiune fiind împlinită rezultă că suma

$$(4) \qquad A\zeta(u-a) + B\zeta(u-b) + \ldots + L\zeta(u-l)$$

admite perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$. In adevăr, din relațiunile

$$\zeta(u-a+2\omega_a) = \zeta(u-a) + 2\eta_a, \ldots, \zeta(u-l+2\omega_a) = \zeta(u-l) + 2\eta_a,$$

deducem egalitatea

$$A\zeta(u-a+2\omega_a) + \ldots + L\zeta(u-l+2\omega_a) = A\zeta(u-a) + \ldots + L\zeta(u-l);$$

adică suma considerată este o funcțiune eliptică având aceleași perioade ca funcțiunea *pu*.

Din cele ce preced recunoaștem imediat că funcțiunea

$$(5)\ \varphi(u) = \Sigma\left[A\zeta(u-a) - A_1\zeta'(u-a) + \frac{A_2}{2!}\zeta''(u-a) - \ldots + (-1)^a \frac{A_a}{a!}\zeta^{(a)}(u-a)\right],$$

în care simbolul Σ se referă la toate polurile $a, b, \ldots, l$, este o funcțiune eliptică având proprietățile date.

Fie acum $f(u)$ o funcțiune eliptică dată având aceleași perioade și poluri ca funcțiunea $\varphi(u)$ și ale cărei părți principale în domeniile polurilor să fie cele din tabloul (3). Diferența

$$f(u) - \varphi(u)$$

va fi o funcțiune eliptică neavând nici un pol, prin urmare această diferență se reduce la o constantă. De unde rezultă, pentru $f(u)$, expresiunea

$$(6)\ f(u) = C + \Sigma\left[A\zeta(u-a) - A_1\zeta'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^a}{a!}A_a\zeta^{(a)}(u-a)\right].$$

Constanta C se determină dând lui u o valoare particulară, sau din desvoltarea în serie a ambelor membre în domeniul unui pol. Formula precedentă constitue *o formulă de descompunere a funcțiunilor eliptice în elemente simple*, elementele simple fiind funcțiunea ζ și derivatele sale; ea este analoagă cu expresiunea fracțiunilor raționale în fracțiuni simple. Această formulă a fost dată de *Hermite*.

Formula (6) se poate înlocui prin cea următoare:

$$f(u) = C + \Sigma\left[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!}p'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{a-1}}{a!}A_a p^{(a-1)}(u-a)\right].$$

Ex. Fie $f(u) = \frac{1}{p'u}$. Această funcțiune de ordinul al treilea admite ca poluri simple punctele incongruente $u = \omega_a$ cu reziduurile corespunzătoare $\frac{1}{p''\omega_a}$, $a = 1, 2, 3$. Avem așà dar

$$\frac{1}{p'u} = C + \Sigma \frac{1}{p''\omega_a} \zeta(u - \omega_a).$$

Făcând $u = o$, rezultă $C = \Sigma \frac{\eta_a}{p''\omega_a}$.

168. Teoremă. *Orice funcțiune eliptică $f(u)$ se poate exprimà printr'o funcțiune rațională de pu și $p'u$, construite cu aceleași perioade (Liouville).*

Pentru a demonstrà această teoremă, să punem funcțiunea $f(u)$ sub forma (7) și să aplicăm formulele de adițiune ale funcțiunilor $\zeta(u - a)$, $p(u - a)$ și ale derivatelor $p'(u - a), \ldots$ Funcțiunea $p(u - a)$ și derivatele sale sunt funcțiuni raționale de pu, $p'u$, pa și $p'a$. Formula de adițiune a funcțiunii ζu, în care înlocuim a prin $-a$, dă

$$\zeta(u - a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2} \frac{p'u + p'a}{pu - pa};$$

de unde egalitatea

$$(8) \quad \Sigma A\, \zeta(u - a) = \zeta u\, \Sigma A - \Sigma A \zeta a + \frac{1}{2} \Sigma A \frac{p'u + p'a}{pu - pa}.$$

Insă, în virtutea teoremei asupra reziduurilor, avem $\Sigma A = 0$; prin urmare membrul întâiu al egalității precedente este o funcțiune rațională de pu și $p'u$. De unde rezultă că funcțiunea $f(u)$, reprezintată prin egalitatea (7), se poate pune sub forma

$$(9) \quad f(u) = R(pu, p'u),$$

R fiind funcțiune rațională de pu și $p'u$.

q. e. d.

In virtutea ecuațiunii

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

putem aduce funcțiunea (9) la forma

$$(10) \quad f(u) = \frac{M + N\, p'u}{M_1 + N_1 p'u} = R(pu) + p'u\, R_1(pu),$$

M, N, M_1, N_1 fiind funcțiuni raționale de pu. Schimbând u în $-u$, formula precedentă devine

$$(11) \quad f(u) = R(pu) - p'u\, R_1(pu).$$

De aci rezultă că dacă $f(u)$ este o funcțiune pară, $R_1 = 0$ și dacă $f(u)$ este o funcțiune impară, avem $R = 0$, adică:

Orice funcțiune eliptică pară este o funcțiune rațională de pu și orice funcțiune eliptică impară este un produs de p'u printr'o funcțiune rațională de pu; funcțiunea pu fiind construită cu perioadele funcțiunii eliptice date.

Corolar. Dacă funcțiunea $f(u)$ are unicul pol $u \equiv o$ de ordinul α, funcțiunile raționale $R(pu)$, $R_1(pu)$ se reduc la două polinoame $P(pu)$, $P_1(pu)$. Dacă α este un număr par, $f(u)$ este o funcțiune pară și avem

$$f(u) = P(pu);$$

dacă α este un număr impar, $f(u)$ este o funcțiune impară și avem

$$f(u) = p'u\, P_1(pu).$$

Ordinul funcțiunii pu fiind 2 și al derivatei fiind 3, rezultă că gradul polinomului $P(pu)$ este $\frac{\alpha}{2}$ și al polinomului $P_1(pu)$ este $\frac{\alpha-3}{2}$.

169. Teorema precedentă se poate stabili independent de formulele de adițiune. Pentru aceasta, să facem mai întâiu observările preliminare următoare:

I. Dacă o funcțiune eliptică pară $f(u)$ se anulează sau devine infinită pentru $u = o$, acest zero sau pol este de un ordin par de multiplicitate. Căci $f(u)$ desvoltat după puterile lui u, în domeniul lui $u = o$, trebuie să conțină numai puteri pare ale acestei variabile.

II. Ordinul unei funcțiuni eliptice pare este un număr par, căci unui zero (sau pol) a îi corespunde un zero (sau pol) egal cu $-a$, dacă $a \neq o$; în cazul $a = o$, ordinul său de multiplicitate este un număr par, precum am văzut mai sus.

Fie acum $f(u)$ o funcțiune eliptică *pară* și

$$\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n,$$
$$\pm b_1, \pm b_2, \ldots, \pm b_n,$$

respectiv zerurile și polurile acestei funcțiuni, incongruente între ele. Printre zeruri pot fi mai multe egale; de asemenea mai multe poluri pot coincide.

1°. Presupunând că nici unul din punctele a sau b nu este congruent cu zero, considerăm funcțiunea

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1)\ldots(pu - pa_n)}{(pu - pb_1)\ldots(pu - pb_n)}.$$

2°. Dacă $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_k \equiv o$, punem

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_{k+1}) \ldots (pu - pa_n)}{(pu - pb_1) \ldots (pu - pb_n)}.$$

3°. In fine, dacă $b_1 \equiv b_2 \equiv \ldots \equiv b_k \equiv o$, punem

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1) \ldots (pu - pa_n)}{(pu - pb_{k+1}) \ldots (pu - pb_n)}.$$

In câte trele cazuri funcţiunile $f(u)$ şi $\varphi(u)$ au aceleaşi zeruri şi poluri; de unde rezultă, C fiind o constantă

$$f(u) = C\,\varphi(u),$$

adică $f(u)$ este o funcţiune raţională de pu.

Dacă $f(u)$ este o funcţiune eliptică *impară*, câtul

$$\frac{f(u)}{p'u}$$

va fi o funcţiune eliptică pară şi prin urmare o funcţiune raţională de pu. De unde

$$f(u) = p'u\,R(pu).$$

In fine, să presupunem $f(u)$ o funcţiune eliptică oarecare. Expresiunile

$$\frac{f(u) + f(-u)}{2}, \qquad \frac{f(u) - f(-u)}{2}$$

sunt funcţiuni eliptice cu aceleaşi perioade ca funcţiunea $f(u)$, cea dintâiu pară şi a doua impară. Avem aşà dar

$$\frac{f(u) + f(-u)}{2} = R(pu),$$

$$\frac{f(u) - f(-u)}{2} = p'u\,R_1(pu).$$

De unde

$$f(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu).$$

170. Teoremă. *Orice funcţiune eliptică $f(u)$ admite o teoremă de adiţiune algebrică.* In adevăr, în virtutea teoremei precedente, putem scrie

$$(1) \qquad f(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu),$$

$$(2) \qquad f(v) = R(pv) + p'v\,R_1(pv),$$

$$(3) \qquad f(u+v) = R\big[p(u+v)\big] + p'(u+v)\,R'\big[p(u+v)\big].$$

Inlocuind în ultima egalitate $p(u+v)$ și $p'(u+v)$ prin valorile lor în funcțiune de $pu, p'u, pv\ p'v$, obținem pentru $f(u+v)$ o expresiune rațională de $pu, p'u, pv, p'v$:

$$f(u+v) = R(pu, pv, p'u, p'v). \tag{4}$$

Eliminând $pu, pv, p'u, p'v$ între ecuațiunile (1), (2), (4) și cele două următoare:

$$p'^2u = 4p^3u - g_2\ pu - g_3, \qquad p'^2v = 4p^3v - g_2\ pv - g_3,$$

obținem o ecuațiune algebrică între $f(u+v), f(u)$ și $f(v)$.

III. INTEGRAȚIUNEA FUNCȚIUNILOR ELIPTICE.

171. Fie $f(u)$ o funcțiune eliptică oarecare. Pentru a efectuà integrațiunea

$$\int f(u)\,du,$$

putem procede în două moduri:

1°. Descompunem funcțiunea în elemente simple (§ 167)

$$u) = C + \Sigma\left[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{2!}p'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha!}A_\alpha p^{(\alpha-1)}(u-a)\right];$$

de unde rezultă, integrând fiecare termen,

$$\int f(u)\,du = C_1 + Cu + \Sigma A \log\sigma(u-a)$$

$$+\Sigma\left[-A_1\zeta(u-a) - \frac{A_2}{2!}p(u-a) + \ldots + (-1)^{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{\alpha!}p^{(\alpha-2)}(u-a)\right].$$

Integrala, în genere, nu este funcțiune eliptică. Pentru ca integrala să fie funcțiune eliptică este necesar și suficient să avem

$$C = o, \qquad \Sigma A_1 = o$$

și ca coeficienții A, B,... cari multiplică funcțiunile $\log\sigma(u-a)$, $\log\sigma(u-b),\ldots$, adică reziduurile funcțiunii $f(u)$, să fie nule. Condițiunea ca aceste reziduuri să fie nule este necesară pentru ca funcțiunea integrală să fie uniformă în tot planul.

2°. Să presupunem funcțiunea eliptică pusă sub forma

$$f(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu),$$

R și R_1 fiind funcțiuni raționale de pu. Vom aveà

$$\int f(u)\,du = \int R(pu)\,du + \int p'u\,R_1(pu)\,du.$$

Punând $x = pu$ în a doua integrală, avem

$$\int p'u \, \mathrm{R}_1(pu)\, du = \int \mathrm{R}_1(x)\, dx,$$

integrala unei funcțiuni raționale de x. Rămâne de considerat prima integrală.

Pentru aceasta, să descompunem funcțiunea rațională $\mathrm{R}(pu)$ în fracțiuni simple. Vom aveà o expresiune de forma

$$\mathrm{R}(pu) = c_0 + c_1 pu + \ldots + c_m p^m u$$
$$+ \frac{\mathrm{A}}{pu-a} + \frac{\mathrm{A}_1}{(pu-a)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(pu-a)^n} + \frac{\mathrm{B}}{pu-\beta} + \frac{\mathrm{B}_1}{(pu-\beta)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_{n'-1}}{(pu-\beta)^{n'}} + \ldots$$

Puterile întregi și pozitive ale lui pu se pot înlocuì prin funcțiuni lineare cu coeficienți constanți de pu și de derivatele sale de ordin par. Astfel avem (§ 148)

$$p^2u = \frac{1}{6}(p''u + \frac{1}{2}g_2),$$

$$p^3u = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{12}p^{\mathrm{IV}}u + \frac{3}{2}g_2 pu + g_3\right),$$

$$p^4u = \frac{1}{140}\left(\frac{1}{36}p^{\mathrm{VI}}u + \frac{14}{3}g_2 p''u + 20\, g_3 pu + \frac{25}{12}g_2^2\right),$$

. . . . . .

Prin urmare partea întreagă va aveà forma

$$\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 pu + \mathrm{C}_2 p''u + \ldots + \mathrm{C}_m p^{(2m-2)}u,$$

a cărei integrală se obține imediat și este egală cu expresiunea

$$\mathrm{C}_0 u - \mathrm{C}_1 \zeta u + \mathrm{C}_2 p'u + \ldots + \mathrm{C}_m p^{(2m-3)}u.$$

Să considerăm acum termenii fracționari. Determinăm mai întâiu câte o soluțiune a ecuațiunilor

$$pu = a, \quad pu = \beta, \ldots$$

Fie respectiv $a, b, \ldots$ asemenea soluțiuni, astfel că

$$pa = a, \quad pb = \beta, \ldots$$

Vom aveà de considerat fracțiunile

$$\frac{\mathrm{A}}{pu - pa} + \frac{\mathrm{A}_1}{(pu - pa)^2} + \ldots$$

Referindu-ne la formula [(3), (§ 160)]

$$\zeta(u + \varphi) - \zeta(u - \varphi) - 2\zeta\varphi = -\frac{p'\varphi}{pu - p\varphi},$$

putem scrie

$$(1)\qquad \frac{1}{pu-pa}=\frac{1}{p'a}\left[\zeta(u-a)-\zeta(u+a)+2\zeta a\right].$$

De unde rezultă

$$\int\frac{du}{pu-pa}=\frac{1}{p'a}\left[\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)}+2u\zeta a\right]+c.$$

Diferențiând egalitatea (1) în raport cu a, obținem

$$(2)\ \frac{p'a}{(pu-pa)^2}=\frac{p''a}{p'^2a}\left[\zeta(u-a)-\zeta(u+a)+2\zeta a\right]-\frac{1}{p'a}\left[\zeta'(u-a)+\zeta'(u+a)-2\zeta'a\right],$$

formulă de descompunere în elemente simple a expresiunii $\frac{p'a}{(pu-pa)^2}$.

Derivând această formulă în raport cu a, după ce dividem ambele membre cu $p'a$, obținem formula de descompunere a fracțiunii $\frac{1}{(pu-pa)^3}$, etc.

De unde se deduc imediat integralele

$$\int\frac{du}{(pu-pa)^2},\quad\int\frac{du}{(pu-pa)^3},\ldots$$

Formula (1) nu se aplică dacă a este egal cu unul din numerele e_1, e_2, e_3, căci atunci

$$p'a=o.$$

In acest caz, fie de ex., $a=e_1$, avem [(13), 165]

$$(3)\qquad \frac{1}{pu-e_1}=\frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left[p(u+\omega_1)-e_1\right].$$

Ridicând această egalitate la diferite puteri întregi și pozitive obținem fracțiunile

$$\frac{1}{(pu-e_1)^n},\qquad n=2,3,\ldots$$

exprimate în funcțiune întreagă de $p(u+\omega_1)$. Inlocuind puterile lui $p(u+\omega_1)$ prin expresiunile lor în funcțiune lineară de $p(u+\omega_1)$ și de derivatele sale de ordin par, obținem pentru fracțiunile considerate, expresiuni de forma

$$c_0+c_1p(u+\omega_1)+c_2p''(u+\omega_1)+\ldots+c_mp^{(2m-2)}(u+\omega_1),$$

ale căror integrale sunt

$$c_0u-c_1\zeta(u+\omega_1)+c_2p'(u+\omega_1)+\ldots+c_mp^{(2m-3)}(u+\omega_1).$$

172. Se poate obține o formulă de reducțiune pentru integrala

$$(4)\qquad I_n=\int p^nu\,du,$$

în care n este număr întreg pozitiv sau negativ. Avem

$$\frac{d}{du}\left[p^{n-1}up'u\right] = (n-1)p^{n-2}u\,p'^2u + p^{n-1}u\,p''u$$

$$= (n-1)\,p^{n-2}u\,(4\,p^3u - g_2\,pu - g_3) + p^{n-1}u\left(6\,p^2u - \frac{1}{2}g_2\right)$$

$$= (4n+2)\,p^{n+1}u - \left(n - \frac{1}{2}\right)g_2\,p^{n-1}u - (n-1)\,g_3\,p^{n-2}u.$$

Din această egalitate rezultă formula de reducțiune

$$(5)\quad p^{n-1}u\,p'u = (4n+2)\,I_{n+1} - \left(n - \frac{1}{2}\right)g_2\,I_{n-1} - (n-1)g_3\,I_{n-2}.$$

Dând lui n succesiv valorile 2, 3, ..., și ținând seamă de egalitățile

$$I_0 = u,$$

$$I_1 = \int pu\,du = -\zeta u,$$

$$I_2 = \int p^2u\,du = \frac{1}{6}\int\left(p''u - \frac{1}{2}g_2\right)du = \frac{1}{6}p'u - \frac{1}{12}g_2u,$$

obținem valorile integralei I_n pentru $n = 3, 4, \ldots$

Dacă în egalitatea (5) înlocuim n prin $-n$, obținem formula de reducțiune

$$(6)\quad \frac{p'u}{p^{n+1}u} = (n+1)g_3\,I_{-n-2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)g_2\,I_{-n-1} - (4n-2)\,I_{-n+1}$$

Dând lui n succesiv valorile, 0, 1, 2, ..., obținem integralele

$$(7)\qquad I_{-n} = \int \frac{du}{p^nu}, \quad (n > 1)$$

exprimate în funcțiune lineară de $\frac{p'u}{p^{n+1}u}$, $(n = 0, 1, \ldots)$, *de* u, ζu și de integrala

$$I_{-1} = \int \frac{du}{pu}.$$

Pentru a obține ultima integrală, trebuie să cunoaștem un zero al funcțiunii pu. Dacă $u = a$ este un zero diferit de o semiperioadă, aplicând formula (1), (§ 171) în care facem $pa = 0$, avem

$$\frac{1}{pu} = \frac{1}{p'a}\left[\zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a\right].$$

Dacă $a = \omega_\alpha$, aplicăm formula (3) (§ 171) în care facem $e_\alpha = 0$; obținem formula

$$\frac{1}{pu} = \frac{1}{e_\beta\,e_\gamma}\,p(u+\omega_\alpha) = -\frac{1}{e_\beta^2}\,p(u+\omega_\alpha),$$

α, β, γ fiind numerele 1, 2, 3, însă diferite între ele.

CAPITOLUL XIV.

MULTIPLICAȚIUNEA ARGUMENTULUI FUNCȚIUNII *pu*.

173. Funcțiunea $p\,nu$ și derivata sa $p'nu$, n fiind un număr întreg oarecare, sunt funcțiuni eliptice având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, cea dintâiu este pară și cea de a doua impară. Prin urmare pnu se exprimă printr'o funcțiune rațională de pu, iar $p'nu$ este produsul lui $p'u$ printr'o funcțiune rațională de pu (§ 168).

Fie $n=2$. Pentru a obține expresiunea lui $p2u$ să facem în formula de adițiune

$$(1) \qquad p(u+v)+pu+pv=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2$$

v să tindă către u. Raportul din membrul al doilea prezentându-se sub forma $\frac{0}{0}$ îl vom înlocuì prin raportul derivatelor.

Obținem astfel

$$p2u+2pu=\frac{1}{4}\left(\frac{p''^2u}{p'^2u}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{(6\,p^2u-\frac{1}{2}g_2)^2}{4\,p^3u-g_2\,pu-g_3}$$

de unde, pentru

$$(2) \qquad p2u=\frac{p^4u+\frac{1}{2}g_2\,p^2u+2g_3\,pu+\frac{1}{16}g_2^2}{4p^3u-g_2\,pu-g_3},$$

o expresiune rațională de gradul 4 în pu.

Derivând ambele membre, obținem p'^2u exprimat printr'un produs al lui $p'u$ printr'o funcțiune rațională de pu de gradul 6.

Făcând în formula de adițiune (1) $v=2u$ și înlocuind $p2u$, $p'2u$ prin valorile lor, obținem $p3u$, $p'3u$, etc.

174. Se pot obține formule generale de multiplicațiune urmând o cale diferită.

Să plecăm dela formula (2) (§ 157) în care să facem $v=nu$:

$$(1) \qquad pu-pnu=\frac{\sigma(n+1)u\;\sigma(n-1)u}{\sigma^2nu\;\sigma^2u}$$

Această formulă se poate scrie

$$pu-pnu=\frac{\dfrac{\sigma(n+1)u}{\sigma^{(n+1)^2}u}\;\dfrac{\sigma(n-1)u}{\sigma^{(n-1)^2}u}}{\left(\dfrac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u}\right)^2}.$$

Punând

$$(2) \qquad \varphi_n(u)=\frac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u},$$

avem egalitatea

$$(3) \qquad pu - pnu = \frac{\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n^2(u)}.$$

Funcţiunea $\varphi_n(u)$ are polul unic $u \equiv 0$ (*modd* $2\omega_1$, $2\omega_3$) de ordinul $n^2 - 1$, căci acest punct este în acelaş timp un zero de ordinul întâi al numărătorului. Zerurile acestei funcţiuni în paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ sunt date de egalitatea

$$(4) \qquad u = \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n},$$

în care λ şi μ primesc valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, exceptând sistemul $\lambda = \mu = 0$. Funcţiunea $\varphi_n(u)$ este o funcţiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, precum se recunoaşte aplicând raportului din membrul al doilea (2) formula (15) (§ 155) sau, în virtutea formulei (16) (§ 166), care reprezintă raportul considerat printr'un determinant ale cărui elemente sunt derivatele de diferite ordine ale funcţiunii pu.

Formula (2) arată că funcţiunea $\varphi_n(u)$ este pară sau impară, după cum n este un număr impar sau par. In ambele cazuri, membrul al doilea (3) este o funcţiune pară, căci funcţiunile $\varphi_{n+1}(u)$, $\varphi_{n-1}(u)$ sunt de aceeaş paritate şi numitorul $\varphi_n^2(u)$ este o funcţiune pară; ceeace, de altmintrelea, rezultă şi din forma membrului întâi. Din cele ce preced rezultă că funcţiunea $\varphi_n(u)$ este de una din formele

$$(5) \qquad \varphi_n(u) = \mathrm{P}(pu),$$

sau

$$(6) \qquad \varphi_n(u) = p'u\,\mathrm{P}_1(pu),$$

după cum n este impar sau par, P şi P_1 fiind polinoame de pu. Gradul celui dintâi este $\frac{n^2-1}{2}$ şi al celui de al doilea este $\frac{n^2-4}{2}$ (§ 168), (corolar).

Pentru a formà polinoamele $\mathrm{P}(pu)$ şi $\mathrm{P}_1(pu)$ cari se anulează în punctele (4), trebuie să ţinem seama de relaţiunile

$$p(2\omega_1 - u) = pu, \quad p(2\omega_3 - u) = pu;$$

de unde rezultă o reducţiune a numărului valorilor menţionate ale lui λ şi μ. Astfel, sistemul (λ, μ) şi sistemul $(n-\lambda, n-\mu)$ dau aceeaş valoare pentru pu. Să considerăm după rând cazul n impar şi cazul n par.

1°. Dacă n este un număr *impar*, obţinem cele $\frac{n^2-1}{2}$ rădăcini

ale ecuațiunii

$$P(x) = o, \qquad (x = pu),$$

luând, de ex., sistemul format de valorile

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda = 0; & \mu = 1,2 \ldots, \dfrac{n-1}{2} \\ \lambda = 1,2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}; & \mu = 0. \\ \lambda = 1,2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}; & \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \dfrac{n-1}{2}, \end{cases}$$

al căror număr este

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{n^2-1}{2}.$$

Funcțiunea întreagă

$$(8)\qquad G(pu) = \prod_{\lambda,\,\mu} \left(pu - p\,\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n} \right),$$

corespunzătoare sistemului (7), nu poate diferi de polinomul $P(pu)$ decât printr'un factor constant:

$$P(pu) = C\,G(pu).$$

Termenii principali în domeniul $u = 0$ a ambelor membre fiind, precum arată formulele (2) și (8), respectiv

$$\frac{n}{u^{n^2-1}}, \quad \frac{C}{u^{n^2-1}},$$

rezultă valoarea $C = n$. Avem așa dar egalitatea

$$(9)\qquad \varphi_n(u) = n\,G(pu), \quad (n \text{ impar}).$$

2°. Dacă n este un număr par, funcțiunea $\varphi_n(u)$ are în paralelogramul perioadelor zerurile $\omega_1, -\omega_2, \omega_3$ cuprinse în formula (4), în care facem respectiv

$$\lambda = \frac{n}{2}, \mu = 0; \lambda = \mu = \frac{n}{2}; \lambda = o, \mu = \frac{n}{2}$$

și alte $\dfrac{n^2-4}{2}$ zeruri date de aceeaș formulă, în care putem da numerelor λ, μ valorile cuprinse în tabloul:

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}; & \mu = 0, \dfrac{n}{2} \\ \lambda = 0, \dfrac{n}{2}; & \mu = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2} \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}; & \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \dfrac{n-2}{2}, \end{cases}$$

al căror număr este

$$(n-2)+(n-2)+\frac{(n-2)^2}{2}=\frac{n^2-4}{2}.$$

Funcţiunea întreagă

$$(11)\qquad G_1(pu)=\prod_{\lambda,\mu}\left[pu-p\,\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}\right],$$

corespunzătoare tabloului (10), nu poate diferi de polinomul $P_1(pu)$ decât printr'un factor constant; prin urmare

$$\varphi_n(u)=C\,p'u\,G_1(pu).$$

Termenii principali în domeniul $u=0$ ai ambelor membre fiind respectiv

$$\frac{u}{n^{n^2-1}},\qquad \frac{-2C}{u^{n^2-1}},$$

rezultă valoarea $C=-\frac{n}{2}$. Avem aşà dar egalitatea

$$(12)\qquad \varphi_n(u)=-\frac{n}{2}\,p'u\,G_1(pu),\quad (n\ par).$$

Inlocuind în formula (3) funcţiunile $\varphi_n(u)$ prin expresiunile lor (9) şi (12), în cari funcţiunile $G(pu)$, $G_1(pu)$ sunt date de expresiunile (8) şi (11), obţinem, fie n par sau impar, pentru pnu o expresiune de forma

$$(13)\qquad pnu=\frac{g_{n^2}(pu)}{g_{n^2-1}(pu)},$$

termenii fracţiunii fiind polinoame de pu, de grade egale cu indicii lor.

Observare. Polinoamele $G(pu)$, $G_1(pu)$ date de egalităţile (8) şi (11) conţin constantele $p\,\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}$, ale căror valori nu pot fi considerate ca cunoscute. Determinarea acestor constante constitue problema diviziunii perioadelor.

Altă formă a problemei (Kiepert) [1]. Soluţiunea problemei se reduce, în virtutea egalităţii (3), la calculul funcţiunii $\varphi_n(u)$.

Avem, sub formă de determinant (16, § 166), expresiunea

$$(14)\quad \varphi_n(u)=\frac{(-1)^{n-1}}{[2!3!\ldots(n-1)!]^2}\begin{vmatrix} p'u & p''u\ldots p^{(n-1)}u\\ p''u & p'''u\ldots p^{(n)}u\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ p^{(n-1)}u & p^{(n)}u\ldots p^{(2n-3)}u\end{vmatrix},$$

[1] Journal de Crelle, t. 76, 1873.

rațională întreagă de derivatele $p'u, p''u, \ldots, p^{(2n-3)}u$. Funcțiunea $\varphi_n(u)$ este așa dar o funcțiune rațională întreagă de pu și $p'u$, ai cărei coeficienți sunt funcțiuni întregi de $\frac{1}{2}g_2$ și g_3.

Să dăm lui n succesiv valorile 1, 2,... Pentru $n = 1$, formula (2) ne dă

$$\varphi_1(u) = 1. \tag{15}$$

Incepând dela $n = 2$, recurgem la formula (14), în care înlocuim derivatele de diferite ordine $p''u, p'''u, \ldots$, prin expresiunile lor (§ 147) în funcțiune de pu și $p'u$. Obținem astfel, pentru $n = 2$ 3, 4, valorile

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_2(u) = -p'u,\\
&\varphi_3(u) = 3\,p^4u - \frac{3}{2}g_2\,p^2u - 3\,g_3\,pu - \frac{1}{16}g_2^2\\
&\varphi_4(u) = p'u\Big[-2\,p^6u + \frac{5}{2}g_2\,p^4u + 10\,g_3\,p^3u + \frac{5}{8}g_2^2\,p^2u\\
&\qquad + \frac{1}{2}g_2\,g_3\,pu + g_3^2 - \frac{1}{32}g_2^3\Big]\ ^{1}).
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Calculele pe această cale sunt din ce în ce mai lungi. Există însă formule de recurență între funcțiunile $\varphi_n(u)$ cari permit a se calculà lesne valorile lor începând dela $n = 5$. Pentru a obține aceste formule, să înlocuim în formula

$$pu - p\nu = -\frac{\sigma(u+\nu)\,\sigma(u-\nu)}{\sigma^2u\,\sigma^2\nu}$$

u prin mu și ν prin nu; obținem egalitatea

$$pnu - pmu = \frac{\sigma(m+n)\,u\,\sigma(m-n)\,u}{\sigma^2mu\,\sigma^2nu}$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma(m+n)\,u}{(\sigma u)^{(m+n)^2}}\quad\dfrac{\sigma(m-n)\,u}{(\sigma u)^{(m-n)^2}}}{\left(\dfrac{\sigma mu}{\sigma m^2u}\right)^2\left(\dfrac{\sigma nu}{\sigma n^2u}\right)^2},$$

adică

$$pnu - pmu = \frac{\varphi_{m+n}(u)\;\varphi_{m-n}(u)}{\varphi_m^2(u)\;\varphi_n^2(u)}. \tag{17}$$

---

[1]) Funcțiunea $\varphi_n(u)$ este, în virtutea definițiunii sale (2), o funcțiune omogenă de gradul $-(n^2-1)$ în raport cu u, ω_1, ω_3; ceeace explică lipsa în polinoamele de pu, din membrul al doilea, a termenului $p^{m-1}u$ m fiind gradul acestui polinom.

Pentru a stabili legătura între funcţiunile $\varphi_{m+n}, \varphi_{m-n}, \varphi_m, \varphi_n$, să considerăm indentitatea

(18) $$(pnu - pmu) + (pu - pnu) + (pmu - pu) = o.$$

Inlocuind parentezele acestor identităţi prin expresiunile lor date de formulele (3) şi (17), obţinem relaţiunea

(19) $$\varphi_{m+n}\ \varphi_{m-n} = \varphi_{m+1}\ \varphi_{m-1}\ \varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\ \varphi_{n-1}\ \varphi_m^2.$$

Făcând în această egalitate $m = n + 1$ şi ţinând seamă de valoarea $\varphi_1 = 1$, obţinem egalitatea

(20) $$\varphi_{2n+1}(u) = \varphi_{n+2}(u)\ \varphi_n^3(u) - \varphi_{n-1}(u)\ \varphi_{n+1}^3(u).$$

Dacă în aceeaş egalitate facem $m = n + 2$ şi apoi înlocuim n prin $n - 1$, avem, ţinând seamă de valoarea $\varphi_2(u) = -p'u$,

(21) $$p'u\ \varphi_{2n}(u) = \varphi_n(u)\left[\varphi_{n+2}(u)\ \varphi^2_{n-1}(u) - \varphi_{n-2}(u)\ \varphi^2_{n+1}(u)\right].$$

Formulele (20) şi (21) sunt formulele de recurenţă căutate. Dând în cea dintâi lui n valorile $2, 3, \ldots$, obţinem expresiunile funcţiunilor $\varphi_5, \varphi_7, \ldots$; pe când cea de a doua dă, pentru $n = 3, 4, \ldots$ expresiunile funcţiunilor $p'u\ \varphi_6(u), p'u\ \varphi_8(u), \ldots$

Problema multiplicaţiunii argumentului lui pu printr'un număr întreg este astfel complect rezolvită.

CAPITOLUL XV.

RELAŢIUNI ALGEBRICE INTRE FUNCŢIUNI ELIPTICE. ECUAŢIUNE ALGEBRICĂ INTRE O FUNCŢIUNE ELIPTICĂ ŞI DERIVATA SA.

175. *Pentru ca între două funcţiuni eliptice $f(u)$ şi $\varphi(u)$ să existe o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi este necesar ca aceste funcţiuni să aibă un sistem comun de perioade.*

Fie

1) $$F(f(u), \varphi(u)) = o$$

o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi între funcţiunile $f(u)$, $\varphi(u)$, de gradul m în raport cu $\varphi(u)$. Să reprezintăm prin 2ω, $2\omega'$ un sistem de perioade primitive ale funcţiunii $f(u)$ şi să înlocuim în ecuaţiunea (1) u prin $u + 2k\omega + 2k'\omega'$, k şi k' fiind numere întregi arbitrare. Funcţiunea $f(u)$ reproducându-se, ecuaţiunea (1) va deveni

(2) $$F(f(u), \varphi(u + 2k\omega + 2k'\omega')) = o.$$

Gradul acestei ecuațiuni în raport cu φ fiind m, la o valoare dată lui u, funcțiunea

$$\varphi(u + 2k\omega + 2k'\omega'), \tag{3}$$

privită ca rădăcină a ecuațiunii (2) nu poate admite mai mult decât m valori distincte. Insă, dacă perioadele funcțiunii $\varphi(u)$ n'ar fi cuprinse în expresiunea

$$2k\omega + 2k'\omega', \tag{4}$$

pentru *valori convenabile ale numerelor* k *și* k', ar urmà ca dând acestor numere o infinitate de valori, funcțiunea (3) să admită o infinitate de valori pentru aceeaș valoare a lui u; căci numărul punctelor incongruente, în cari funcțiunea se poate reproduce, fiind egal cu ordinul ei, este limitat. De unde rezultă că perioadele funcțiunii $\varphi(u)$ sunt cuprinse în expresiunea (4). Funcțiunile $f(u)$ și $\varphi(u)$ admit dar un sistem de perioade comune.

Corolar. Fie a, b, c, d patru numere întregi pentru cari expresiunile $2a\omega + 2b\omega'$, $2c\omega + 2d\omega'$ coincid cu două perioade distincte 2Ω, $2\Omega'$ ale funcțiunii $\varphi(u)$, adică

$$\Omega = a\omega + b\omega', \qquad \Omega' = c\omega + d\omega'.$$

Reprezintând prin $2\omega_1$, $2\omega'_1$ un sistem de perioade primitive ale acestei funcțiuni, avem

$$\Omega = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \qquad \Omega' = c_1\omega_1 + d_1\omega'_1,$$

coeficienții fiind numere întregi. Determinanții

$$ad - bc, \qquad a_1d_1 - b_1c_1$$

sunt diferiți de zero; căci dacă vreunul din aceș determinanți ar fi nul, raportul $\frac{\Omega'}{\Omega}$ ar fi real și prin urmare perioadele 2Ω, $2\Omega'$ n'ar fi distincte. De unde rezultă că între perioadele primitive ale funcțiunilor $f(u)$ și $\varphi(u)$ există două relațiuni de forma

$$\begin{cases} a\omega + b\omega' = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \\ c\omega + d\omega' = c_1\omega_1 + d_1\omega'_1, \end{cases}$$

coeficienții fiind numere întregi și determinanții

$$ad - bc \neq 0, \qquad a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0.$$

176. *Viceversa. Intre două funcțiuni eliptice* $f(u)$ *și* $\varphi(u)$ *cari au aceleași perioade există o ecuațiune algebrică cu coeficienți constanți.*

In adevăr, să exprimăm $f(u)$ și $\varphi(u)$ în funcțiuni rațională de pu și $p'u$; putem scrie

$$f(u) = A + B\,p'u, \qquad \varphi(u) = A_1 + B_1\,p'u, \tag{5}$$

A, B, A_1, B_1 fiind funcţiuni raţionale de pu şi $p'u$. Eliminând pu şi $p'u$ între ecuaţiunile precedente şi ecuaţiunea

$$p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3, \tag{6}$$

obţinem o ecuaţiune algebrică

$$F(f(u), \varphi(u)) = o, \tag{7}$$

ai cărei coeficienţi sunt independenţi de u. Se poate determină gradul ecuaţiunii în raport cu fiecare din cele două funcţiuni. Să punem

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u).$$

Ecuaţiunea (7) devine

$$F(x, y) = o. \tag{8}$$

Gradul acestei ecuaţiuni în raport cu x este egal cu numărul rădăcinilor sale în x corespunzătoare unei valori arbitrare a lui y şi viceversa, gradul său în raport cu y este egal cu numărul rădăcinilor sale în y corespunzătoare unei valori oarecari a lui x. Aceste numere se pot lesne determină.

Fie m ordinul funcţiunii $x = f(u)$ şi n ordinul funcţiunii $y = \varphi(u)$. La o valoare oarecare y, ecuaţiunea $y = \varphi(u)$ va da, pentru u, n valori incongruente $u_1, u_2, \ldots, u_n$, în genere distincte [1]). Fiecăreia din aceste valori corespunde câte o singură valoare pentru $x = f(u)$. De unde rezultă că, pentru o valoare a lui y, ecuaţiunea (8) admite n rădăcini x, adică ecuaţiunea este de gradul n în raport cu această variabilă. Intr'un mod analog se stabileşte că ecuaţiunea (8) este de gradul m în y.

177. In cazuri particulare, gradul ecuaţiunii (8) se poate micşorà. Astfel, dacă $f(u)$ şi $\varphi(u)$ sunt amândouă funcţiuni pare, gradul ecuaţiunii se reduce la jumătate în raport cu fiecare din aceste funcţiuni. In adevăr, în acest caz, cele n valori u corespunzătoare unei valori y sunt două câte două egale şi de semne contrarii; fie

$$\pm u_1, \pm u_2, \ldots, \pm u_{\frac{n}{2}} \tag{9}$$

aceste valori. Insă $f(u)$ fiind funcţiune pară, avem $f(u) = f(-u)$ şi prin urmare valorilor (9) ale lui u le vor corespunde numai $\frac{n}{2}$

---

[1]) Dacă unei valori particulare $y = y_0$ îi corespund k valori egale $u = u_0$ unei valori y vecină cu y_0 îi vor corespunde k valori inegale. In adevăr, în cazul considerat avem, în domeniul lui u_0, desvoltarea $y - y_0 = a_0 (u - u_0)^k + \ldots$ şi prin inversiune $u - u_0 = \left(\frac{(y-y_0)}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}} + b_1 (y - y_0)^{\frac{2}{k}} + \ldots$ Această expresiune justifică aserţiunea noastră.

valori pentru x; adică unei valori arbitrare a lui y corespund $\frac{n}{2}$ valori pentru x, etc.

178. Să examinăm un al doilea caz particular. Să presupunem că funcțiunile x și y au aceleași poluri și fie n ordinul comun al acestor două funcțiuni. Ecuațiunea $F(x, y) = o$, de gradul n în raport cu fiecare variabilă, *va fi de gradul n în raport cu amândouă variabilele*. In adevăr, privind x, y ca coordonate carteziane, gradul ecuațiunii $F(x, y) = o$ este egal cu numărul punctelor de intersecțiune ale curbei $F = o$ cu o dreaptă oarecare

$$A x + B y + C = o.$$

Prin urmare acest număr este egal cu numărul valorilor incongruente ale lui u cari satisfac ecuațiunea

$$A f(u) + B \varphi(u) + C = o.$$

Insă membrul întâiu al acestei ecuațiuni este o funcțiune eliptică de ordinul n, prin urmare, numărul zerurilor sale este n.

179. Teoremă. *Orice funcțiune eliptică satisface o ecuațiune diferențială de ordinul întâiu cu coeficienți constanți.* Această teoremă este o consecință imediată a celei precedente. Căci $x = f(u)$ fiind o funcțiune eliptică, derivata sa $\frac{dx}{du}$ este o funcțiune eliptică cu aceleași perioade; prin urmare între x și $\frac{dx}{du}$ există o ecuațiune algebrică

$$F\left(x, \frac{dx}{du}\right) = o, \tag{1}$$

care nu conține variabila independentă într'un mod explicit.

Să evaluăm gradul ecuațiunii. Un pol de un ordin α al funcțiunii $f(u)$ fiind pol de ordinul $\alpha + 1$ al derivatei $f'(u)$, urmează că, dacă $f(u)$ are n poluri respectiv de ordinele $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ordinul său este

$$N = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

și ordinul derivatei sale este

$$N + n.$$

Așà dar gradul ecuațiunii (1) este N în raport cu $\frac{dx}{du}$ și $N + n$ în raport cu x.

Dacă toate polurile sunt simple, avem $N = n$ și gradul în raport cu x este $2n$. Dacă polul este unic, gradul ecuațiunii în raport cu x este $n + 1$.

180. Forma ecuațiunii (1) se poate precizà mai mult. Fie m ordinul funcțiunii $x = f(u)$; gradul cel mai mare posibil ce-l poate aveà ecuațiunea (1) în raport cu x este $2m$. De altă parte, derivata unei funcțiuni uniforme neputând devenì infinità decât în acelaș timp cu funcțiunea, urmează că dacă ordonăm ecuațiunea (1) după puterile descrescânde ale derivatei $\frac{dx}{du}$, coeficientul puterii celei mai înalte trebuie să fie o constantă, pe care o putem presupune egală cu unitatea. Forma ecuațiunii este așà dar

$$(2) \qquad x'^m + X_1 x'^{m-1} + \ldots + X_{m-1} x' + X_m = o, \quad x' = \frac{dx}{du},$$

coeficienții X_i fiind polinoame de x de grade cel mult egale cu $2m$.

Suma valorilor argumentelor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ pentru cari $x = f(u)$ primește aceeaș valoare fiind constantă (§ 129, corolar):

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = C,$$

rezultă egalitatea

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{du_m}{dx} = 0,$$

sau

$$(3) \qquad \frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} + \ldots + \frac{1}{x'_m} = 0, \qquad x'_i = \frac{dx}{du_i}.$$

Această egalitate exprimă că suma inverselor rădăcinilor ecuațiunii (2) este nulă. De unde rezultă condițiunea

$$(4) \qquad X_{m-1} = o.$$

Forma ecuațiunii (2) este așa dar

$$(5) \qquad x'^m + X_1 x'^{m-1} + \ldots + X_{m-2} x'^2 + X_m = o.$$

Se poate fixà o limită superioară a gradului fiecărui polinom X_i. Pentru aceasta să facem substituțiunea

$$y = \frac{1}{x};$$

y va fi o funcțiune eliptică de u de același ordin ca x. Avem

$$x' = -\frac{y'}{y^2}, \quad x'^2 = \frac{y'^2}{y^4}, \ldots$$

Ducând aceste valori în ecuațiunea (5), obținem

$$(6) \qquad y'^m - y^2 X_1 y'^{m-1} + y^4 X_2 y'^{m-2} - \ldots \pm y^{2m-4} X_{m-2} y'^2 \mp y^{2m} X_m = o.$$

Coeficienții ecuațiunii trebuind să fie polinoame de y (în urma înlocuirii lui x prin $\frac{1}{y}$), urmează că polinoamele $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sunt respectiv de grade cel mult egale cu $2, 4, \ldots, 2m$.

181. *Aplicațiune. Cazul* $m = 2$. Ecuațiunea între funcțiunea $x = f(u)$ și derivata sa $\frac{dx}{du}$ este de una din formele

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4,$$

sau

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3,$$

după cum $f(u)$ are un pol dublu, sau două poluri simple.

182. Forma ecuațiunii diferențiale (5) (§ 180), necesară între o funcțiune eliptică și derivata sa, nu este suficientă. Să considerăm cazul cel mai simplu, anume, când ecuațiunea se reduce la forma binoamă

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^m = f(x) \tag{1}$$

și să examinăm condițiunile ce trebuie să împlinească polinomul $f(x)$, precum și ce valori poate aveà gradul m, pentru ca integrala să fie o funcțiune eliptică $x = \varphi(u)$.

Inainte de toate avem de căutat condițiunile ca această integrală să fie o funcțiune uniformă, neavând alte singularități de cât poluri. Pentru aceasta, să considerăm integrala

$$u = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt[m]{f(x)}} \tag{2}$$

și, procedând ca în (§ 106), să examinăm desvoltarea ei în domeniul unui punct x_0, diferit de un zero al polinomului $f(x)$, situat la distanță finită sau la infinit și în domeniul unui zero al acestui polinom.

1°. Fie $x = x_0$ un punct oarecare situat la distanță finită, $f(x_0) \neq o$. In domeniul acestui punct avem forma

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}} = P(x - x_0), \quad \left[P(x - x_0)\right]_{x_0} = \frac{1}{\sqrt[m]{f(x_0)}} \neq o.$$

Fie u_0 o valoare finită a lui u ce voim să corespundă lui $x = x_0$. Integrala (2) conduce la o desvoltare de forma

$$u - u_0 = a_0(x - x_0) + a_1(x - x_0)^2 + \ldots, \quad a_0 \neq o;$$

de unde

$$(x - x_0) = P(u - u_0). \tag{3}$$

2°. Să presupunem $x_0=\infty$. Pentru ca integrala u să fie finită [1]) când x tinde către infinit, este necesar și suficient ca gradul lui $f(x)$ să fie cel puțin $m+1$. De altă parte, gradul acestui polinom este cel mult egal cu $2m$ (§ 180). Putem totdeauna presupune că gradul lui $f(x)$ este $2m$. Căci, făcând substituțiunea

$$x=a+\frac{1}{z},$$

a fiind diferit de un zero al lui $f(x)$, ecuațiunea (1) se transformă într'o ecuațiune de aceeaș formă, în care polinomul din membrul al doilea este de gradul $2m$. In acest caz avem, în domeniul punctului $x=\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}}=\frac{1}{x^2}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right),\quad a_0\neq 0;$$

prin urmare

$$u-u_0=-\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{2x^2}-\ldots$$

De unde rezultă, pentru x, o desvoltare de forma

$$(4)\qquad x=-\frac{a_0}{u-u_0}+P(u-u_0).$$

Punctul $u=u_0$ este așà dar un pol al funcțiunii $x=\varphi(u)$.

3°. Fie $x=a$ un zero al polinomului $f(x)$ de un ordin α. Pentru ca integrala (2) să fie finită când x tinde către a, este necesar și suficient ca α să fie $<m$.

In domeniul punctului $x=a$, avem

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}}=(x-a)^{-\frac{\alpha}{m}}P(x-a),\qquad \left[P(x-a)\right]_{x=a}\neq 0;$$

prin urmare

$$(5)\qquad u-u_0=(x-a)^{\frac{m-\alpha}{m}}P_1(x-a),\quad \left[P_1\right]_a\neq 0.$$

De unde rezultă o desvoltare de forma

$$(6)\qquad x-a=(u-u_0)^{\frac{m}{m-\alpha}}\mathscr{P}\left[(u-u_0)^{\frac{m}{m-\alpha}}\right].$$

---

[1]) Nu se consideră valoarea $u=\infty$; căci, dacă $x=\varphi(u)$ este funcțiune eliptică, u este integrală de speța I în raport cu x și prin urmare este finită pe toată sfera (x).

Pentru ca x să fie funcțiune uniformă în domeniul punctului u_o este necesar și suficient ca exponentul $\frac{m}{m-a}$ să fie un număr întreg:

$$\frac{m}{m-a} = k, \tag{7}$$

care, în virtutea expresiunii (5), reprezintă numărul ramurilor u cari se permută în jurul punctului $x=a$. Din (7) rezultă valoarea

$$a = m\left(1 - \frac{1}{k}\right). \tag{8}$$

Numărul m trebuie dar să fie divizibil cu k.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zerurile polinomului $f(x)$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ordinele corespunzătoare acestor zeruri. Din cele ce preced rezultă condițiunile necesare

$$\alpha_i = m\left(1 - \frac{1}{k_i}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{9}$$

numărul k_i având, relativ la punctul a_i, semnificarea numărului k relativ la punctul a.

Așà dar: *dacă polinomul $f(x)$ este de gradul $2m$ și ordinele zerurilor sale împlinesc condițiunile* (9), *integrala generală $x=\varphi(u)$ a ecuațiunii* (1) *este o funcțiune uniformă în domeniul oricărui punct u situat la distanță finită, neavând alte singularități decât poluri.* De unde conchidem, printr'un raționament analog cu cel din (§ 108), că *$\varphi(u)$ este o funcțiune uniformă în tot planul (u), neavând la distanță finită alte puncte singulare decât poluri.*

Să presupunem ecuațiunea (1) ireductibilă și să examinăm soluțiunile posibile ale ecuațiunii (9), adică ce valori pot primi numerele întregi k_i, de unde va rezultà și valoarea gradului m. Să observăm că acest grad, care, precum am văzut, este divizibil cu numerele k_i, este cel mai mic multiplu comun al acestor numere. In adevăr, să presupunem m' cel mai mic multiplu comun al numerelor k_i și fie $m = \mu m'$, μ fiind un număr întreg. Ecuațiunile (9) scrise sub forma

$$\alpha_i = \mu(k_i - 1)\frac{m'}{k_i},$$

arată că exponenții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ și m sunt divizibili cu numărul μ: ecuațiunea (1) n'ar fi ireductibilă; ceeace este contra ipotezei.

Din cele ce preced se poate deduce valorile întregi ale numerelor k_i și prin urmare valorile corespunzătoare ale lui m. Căci,

suma ordinelor $\sum_{i=1}^{n} a_i$ fiind egală cu $2m$, rezultă, în virtutea egalităţii (9),

$$m \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) = 2m;$$

de unde, egalitatea

$$n - 2 = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n}. \tag{10}$$

Numerele k_i, fiind mai mari ca 1, sunt cel puţin egale cu 2, prin urmare membrul al doilea al egalităţii precedente este $\leq \frac{n}{2}$; de unde, dubla inegalitate

$$0 < n - 2 \leq \frac{n}{2}$$

sau

$$2 < n \leq 4. \tag{11}$$

Numărul n al zerurilor *distincte* ale polinomului $f(x)$ *nu poate dar fi decât* 3 *sau* 4.

1). Fie $n = 4$. Ecuaţiunea (10) devine

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 2. \tag{12}$$

Unica soluţiune a acestei egalităţi este

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2,$$

căreia corespunde valoarea $m = 2$ (cel m. m. multiplu comun al numerelor k_i).

In acest caz, ecuaţiunea (1) este de forma

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4). \tag{I}$$

2) Fie $n = 3$. Ecuaţiunea (10) este de forma

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1. \tag{13}$$

Toate soluţiunile întregi sunt cuprinse în tabloul de valori:

k_1	k_2	k_3	m	a_1	a_2	a_3
3	3	3	3	2	2	2
2	4	4	4	2	3	3
2	3	6	6	3	4	5

cărora corespund respectiv ecuațiunile de forma

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\,(x-a_1)^2\,(x-a_2)^2\,(x-a_3)^2,$$

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a_1)^2\,(x-a_2)^3\,(x-a_3)^3,$$

$$\text{(IV)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^5 = A\,(x-a_1)^3\,(x-a_2)^4\,(x-a_3)^5.$$

Din cele ce preced rezultă că dacă gradul polinomului $f(x)$ din ecuațiunea (1) este $2m$, ecuațiunile (I), (II), (III) și (IV) sunt *singurele a căror integrală generală este o funcțiune uniformă în tot planul* (u) *— din care se exclude punctul* $u = \infty$ *— neavând alte singularități decât poluri.*

Dacă substituim variabilei x o altă variabilă astfel ca unul din zerurile lui $f(x)$ să fie aruncat la infinit, punând

$$x - a_i = \frac{1}{z},$$

a_i fiind unul din aceste zeruri, ecuațiunile transformate ale celor patru ecuațiuni considerate se bucură de aceleași proprietăți. Ecuațiunile (I) și (II) dau naștere la câte o singură ecuațiune nouă, a căror formă este respectiv, înlocuind litera z prin litera x,

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c),$$

$$\text{(II}_1\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\,(x-a)^2\,(x-b)^2.$$

Ecuațiunea (III) dă naștere la următoarele două ecuațiuni:

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a)^3\,(x-b)^2,$$

$$\text{(III}_2\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a)^3\,(x-b)^3.$$

In fine, ecuațiunea (IV) dă naștere la trei ecuațiuni transformate:

$$\text{(IV}_1\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^4\,(x-b)^3,$$

$$\text{(IV}_2\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^5\,(x-b)^3,$$

$$\text{(IV}_3\text{)} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^5\,(x-b)^4.$$

Voim să arătăm acum că toate aceste ecuaţiuni definesc funcţiuni eliptice de argumentul u. Această propoziţiune este evidentă pentru ecuaţiunea (I_1). In ce priveşte celelalte ecuaţiuni, se stabileşte lesne că, prin substituţiuni raţionale, le aducem la forma

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X,$$

X fiind un polinom de x de gradul 3 sau 4.

Să le considerăm după rând.

Ecuaţiunea (II_1) se scrie

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^2. \tag{1}$$

Să punem

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^3; \tag{2}$$

de unde

$$2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{dx}{du} = 3t^2\frac{dt}{du};$$

prin urmare, în virtutea ecuaţiunilor (1) şi (2),

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{1}{9}\sqrt[3]{A^2}\left(4t^3 + (a-b)^2\right). \tag{3}$$

Ecuaţiunea (III_1), în care punem

$$x - a = t^2, \tag{4}$$

devine

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt{A}}{4}t(t^2 + a - b). \tag{5}$$

Ecuaţiunea (III_2) se scrie

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^3. \tag{6}$$

Punând

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^2, \tag{7}$$

avem

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{dx}{du} = t\frac{dt}{du};$$

Ecuațiunea considerată devine

$$(8) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{A}\, t\,(4t^2 + (a-b)^2).$$

Ecuațiunile (IV_1) și (IV_2), în cari punem

$$(9) \qquad x - a = t^3,$$

devin respectiv

$$(10) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{A}}{9}\,(t^3 + a - b),$$

$$(11) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{A}}{9}\, t\,(t^3 + a - b).$$

Ecuațiunea (IV_3), în care punem

$$(12) \qquad x - a = \frac{1}{z},$$

devine

$$(13) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^6 = A\, z^3\left[(a-b)\,z + 1\right]^4 = A\,(a-b)^4\, z^3\left[z + \frac{1}{a-b}\right]^4$$

de aceeaș formă cu (IV_1).

Teorema este așà dar demonstrată.

CAPITOLUL XVI.

COFUNCȚIUNILE σ sau FUNCȚIUNILE σ cu INDICI. FUNCȚIUNILE ELIPTICE ALE LUI JACOBI.

I. *Cofuncțiunile* σ.

183. Pe lângă funcțiunea σu se consideră trei funcțiuni, numite cofuncțiuni cu σu, sau funcțiuni σ cu indici și definite în modul următor

$$(1) \qquad \sigma_a u = e^{-\eta_a u}\,\frac{\sigma(u + \omega_a)}{\sigma\omega_a}, \qquad a = 1, 2, 3.$$

Referindu-ne la formula [(14), 156]

$$(2) \qquad \sigma(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a(u + \omega_a)}\,\sigma u$$

și înlocuind u prin $u - \omega_a$, obținem egalitatea

$$(3) \qquad e^{-\eta_a u}\,\sigma(u + \omega_a) = e^{\eta_a u}\,\sigma(\omega_a - u).$$

De unde rezultă dubla definiţiune a funcţiunilor $\sigma_a u$

$$(4) \qquad \sigma_a u = e^{-\eta_a u} \frac{\sigma(u + \omega_a)}{\sigma \omega_a} = e^{\eta_a u} \frac{\sigma(\omega_a - u)}{\sigma \omega_a}\ ^{1)}.$$

Funcţiunile $\sigma_a u$ sunt funcţiuni întregi ca şi funcţiunea σu şi din dubla lor definiţiune rezultă că ele sunt funcţiuni pare

$$(5) \qquad \sigma_a(-u) = \sigma_a u.$$

Făcând în (4) $u = o, \omega_a, \omega_\beta$, obţinem respectiv

$$(6) \qquad \sigma_a 0 = 1, \ \sigma_a \omega_a = 0, \ \sigma_a \omega_\beta = -e^{\eta_a \omega_\beta} \frac{\sigma \omega_\gamma}{\sigma \omega_a}.$$

Zerurile funcţiunilor $\sigma_a u$ sunt valorile cari anulează funcţiunea $\sigma(\omega_a - u)$; ele sunt aşà dar date de expresiunea

$$u = \omega_a + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

sau, într'un mod explicit pentru fiecare din aceste funcţiuni,

$$(7) \qquad u = \begin{cases} (2m+1)\omega_1 + 2n\omega_3 & \text{pentru } \sigma_1 u, \\ (2m+1)\omega_1 + (2n+1)\omega_3 & \text{» } \sigma_2 u, \\ 2m\omega_1 + (2n+1)\omega_3 & \text{» } \sigma_3 u, \end{cases}$$

m şi n fiind numere întregi arbitrare.

Funcţiunile $\sigma_a u$ sunt omogene şi de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3, căci raportul $\frac{\sigma(\omega_a \pm u)}{\sigma \omega_a}$ este de gradul zero şi $\eta_a = \zeta \omega_a$ este funcţiune omogenă, de gradul — 1, în raport cu ω_1 şi ω_3.

184. *Mărirea argumentului cu o perioadă.* Inlocuind în formula (1) u prin $u + 2\omega_a$ şi ţinând seamă de relaţiunea (2), obţinem formula

$$(8) \qquad \sigma_a(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a(u+\omega_a)} \sigma_a u$$

Deasemenea, în virtutea relaţiunii

$$(9) \qquad \eta_a \omega_\beta - \eta_\beta \omega_a = \pm i \frac{\pi}{2},$$

avem egalitatea

$$(10) \qquad \sigma_\beta(u + 2\omega_a) = e^{2\eta_a(u+\omega_a)} \sigma_\beta u, \qquad a, \beta = 1, 2, 3, \ a \neq \beta.$$

---

[1]) Analogie cu formulele $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$.

185. *Mărirea argumentului cu jumătăți de perioade.* Din dubla definițiune (4) (§ 183) a funcțiunii $\sigma_\alpha u$ scoatem

$$\sigma(u \pm \omega_\alpha) = \pm e^{\pm \eta_\alpha u}\, \sigma\omega_\alpha\, \sigma_\alpha u, \tag{11}$$

semnele superioare și inferioare mergând împreună. Inlocuind în formulele de definițiune

$$\sigma_\alpha u = e^{\eta_\alpha u}\frac{\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma\omega_\alpha}, \quad \sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(\omega_\alpha + u)}{\sigma\omega_\alpha} \tag{12}$$

u respectiv prin $u + \omega_\alpha$, $u - \omega_\alpha$, obținem două egalități cuprinse în cea următoare

$$\sigma_\alpha(u \pm \omega_\alpha) = \mp e^{\pm\eta_\alpha u + \eta_\alpha\omega_\alpha}\frac{\sigma u}{\sigma\omega_\alpha}, \tag{13}$$

semnele superioare și inferioare mergând împreună. Inlocuind în a doua formulă (12) u prin $u + \omega_\beta$, iar în cea dintâi u prin $u - \omega_\beta$, obținem respectiv egalitățile

$$(14)\quad \begin{cases} \sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = e^{-\eta_\alpha(u+\omega_\beta)}\dfrac{\sigma(u-\omega_\gamma)}{\sigma\omega_\alpha} = -e^{\eta_\beta u - \eta_\alpha\omega_\beta}\dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha}\sigma_\gamma u, \\ \sigma_\alpha(u-\omega_\beta) = -e^{\eta_\alpha(u-\omega_\beta)}\dfrac{\sigma(u+\omega_\gamma)}{\sigma\omega_\alpha} = -e^{-\eta_\beta u - \eta_\alpha\omega_\beta}\dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha}\sigma_\gamma u. \end{cases}$$

Să facem $u = o$ în una din egalitățile (14); obținem

$$e^{\eta_\alpha\omega_\beta} = -\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha\omega_\beta}. \tag{15}$$

Permutând α cu γ, avem

$$e^{\eta_\gamma\omega_\beta} = -\frac{\sigma\omega_\alpha}{\sigma\omega_\gamma\,\sigma_\gamma\,\omega_\beta}. \tag{16}$$

Multiplicând între ele aceste două egalități, rezultă

$$e^{\eta_\beta\omega_\beta} = \sigma_\alpha\omega_\beta\,\sigma_\gamma\,\omega_\beta,$$

sau, permutând β cu α,

$$e^{\eta_\alpha\omega_\alpha} = \sigma_\beta\omega_\alpha\,\sigma_\gamma\,\omega_\alpha. \tag{17}$$

186. In formula [(1), (§ 160)]

$$pu - p\rho = -\frac{\sigma(u+\rho)\;\sigma(u-\rho)}{\sigma^2 u\;\sigma^2\rho}$$

să facem $v = \omega_a$; obținem

$$pu - e_a = - \frac{\sigma(u + \omega_a)\,\sigma(u - \omega_a)}{\sigma^2\omega_a\,\sigma^2 u},$$

sau, multiplicând între ele cele două expresiuni (4) ale lui $\sigma_a u$,

$$pu - e_a = \frac{\sigma_a^2 u}{\sigma^2 u}. \tag{18}$$

De unde rezultă că cele două determinațiuni ale radicalului $\sqrt{pu - e_a}$ sunt funcțiuni uniforme de u. Vom luà, prin definițiune,

$$\sqrt{pu - e_a} = \frac{\sigma_a u}{\sigma u}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Semnul radicalului fiind determinat de funcțiunea uniformă din membrul al doilea. Din formulele (2), (8) și (10) rezultă că funcțiunile

$$\sqrt{pu - e_1}, \quad \sqrt{pu - e_2}, \quad \sqrt{pu - e_3}$$

sunt funcțiuni eliptice având respectiv ca perioade primitive cantitățile

$$(2\omega_1, 4\omega_3), \quad (4\omega_1, 2\omega_2), \quad (4\omega_1, 2\omega_3).$$

187. Introducând funcțiunile $\sigma_a u$, formula (1) (§ 157)

$$p'u = 2\,\frac{\sigma(u - \omega_1)}{\sigma\omega_1}\,\frac{\sigma(u - \omega_2)}{\sigma\omega_2}\,\frac{\sigma(u - \omega_3)}{\sigma\omega_3}\,\frac{}{\sigma^3 u}$$

se va scrie

$$p'u = -2\,\frac{\sigma_1 u\ \sigma_2 u\ \sigma_3 u}{\sigma^3 u}. \tag{20}$$

Această formulă se mai poate deduce înlocuind în (19) a prin 1, 2, 3 și făcând produsul egalităților corespunzătoare

$$\sqrt{pu - e_1}\ \sqrt{pu - e_2}\ \sqrt{pu - e_3} = \frac{\sigma_1 u\ \sigma_2 u\ \sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

De altă parte avem

$$p'u = -2\sqrt{(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3)},$$

membrul al doilea fiind precedat de semnul — pentru ca valoarea sa principală în domeniul lui $u = o$ să coincidă cu aceea a membrului întâiu. De unde rezultă formula (20). Din această formulă și din egalitatea

$$p'u = -\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} \quad (4\ \S\ 158)$$

rezultă, pentru $\sigma 2u$, expresiunea

$$\sigma 2u = 2\sigma u \; \sigma_1 u \; \sigma_2 u \; \sigma_3 u. \tag{21}$$

187. *Expresiunea funcțiunilor $\sigma_a u$ sub formă de produse.* In expresiunea

$$pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right); \quad w = 2m\omega_1 + 2n\omega,$$

să înlocuim u succesiv prin a și prin $u + a$, a fiind $\not\equiv o$, și să scădem rezultatele între ele. Obținem

$$p(u+a) - pa = \Sigma \left[\frac{1}{(u+a-w)^2} - \frac{1}{(a-w)^2} \right]. \tag{1}$$

Integrând între o și u, rezultă egalitatea

$$\zeta(u+a) - \zeta a + upa = \Sigma \left[\frac{1}{u+a-w} + \frac{1}{w-a} + \frac{u}{(w-a)^2} \right]. \tag{2}$$

Integrând, între aceleași limite, ambele membre ale acestei egalități, avem

$$\log \frac{\sigma(u+a)}{\sigma a} - u\zeta a + \frac{u^2}{2} pa = \log \Pi \left\{ \left(1 - \frac{u}{w-a}\right) e^{\frac{u}{w-a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-a)^2}} \right\};$$

de unde

$$\frac{\sigma(u+a)}{\sigma a} e^{-u\zeta a + \frac{u^2}{2} pa} = \Pi \left[\left(1 - \frac{u}{w-a}\right) e^{\frac{u}{w-a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-a)^2}} \right]. \tag{3}$$

Făcând în această egalitate $a = \omega_a$ și ținând seamă de relațiunea

$$\sigma_a u = e^{-\eta_a u} \frac{\sigma(u+\omega_a)}{\sigma\omega_a},$$

obținem expresiunea căutată

$$\sigma_a u \, e^{\frac{1}{2} e_a u^2} = \Pi \left[\left(1 - \frac{u}{w-\omega_a}\right) e^{\frac{u}{w-\omega_a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-\omega_a)^2}} \right]. \tag{4}$$

188. *Transformarea cantităților e_a și a funcțiunilor $\sigma_a u$ când înlocuim perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ prin două perioade echivalente $2\omega_1'$, $2\omega_3'$.* Fie

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \omega_3' = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \tag{6}$$

formulele de transformare ale perioadelor. Invarianții g_2 și g_3 rămânând neschimbați, rezultă că rădăcinile

$$e_a' = p(\omega_a' | \omega_1', \omega_3') \qquad a = 1, 2, 3, \tag{7}$$

ale ecuațiunii

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0 \tag{8}$$

coincid, abstracțiune făcând de ordinea lor, cu rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale aceleiaș ecuațiuni. Ordinea în care aceste rădăcini se corespund depinde de paritatea coeficienților substituțiunii. Egalitatea (6) arată că numerele din aceeaș coloană sau linie nu pot fi pare în acelaș timp; deasemenea nu toate pot fi în acelaș timp impare. Avem pentru aceste numere șase congruențe (mod. 2).

Figurăm aci printr'un tablou aceste congruențe împreună cu valorile corespunzătoare ale rădăcinilor e'_a:

(9)

$a \equiv$	$b \equiv$	$c \equiv$	$d \equiv$	$e'_1 =$	$e'_2 =$	$e'_3 =$
1	0	0	1	e_1	e_2	e_3
1	0	1	1	e_1	e_3	e_2
1	1	0	1	e_2	e_1	e_3
1	1	1	0	e_2	e_3	e_1
0	1	1	0	e_3	e_2	e_1
0	1	1	1	e_3	e_1	e_2

Să considerăm acum cofuncțiunile σ corespunzătoare sistemului celui nou de perioade. Punând

$$\wp' = 2m'\omega'_1 + 2n'\omega'_3,$$

vom aveà, în virtutea formulei (4),

$$\sigma_\beta(u|\omega'_1, \omega'_3)\, e^{\frac{1}{2}e'_\beta u^2} = \Pi\left\{\left(1 - \frac{u}{\wp' - \omega'_\beta}\right) e^{\frac{u}{\wp' - \omega'_\beta} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(\wp' - \omega'_\beta)^2}}\right\} \tag{10}$$

Expresiunile

$$2m'\omega'_1 + 2n'\omega'_3 - \omega'_\beta, \qquad 2m\omega_1 + 2n\omega_3 - \omega_\alpha$$

reprezintând, în virtutea echivalenții perioadelor, aceleași puncte când m, n, m', n' primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, rezultă că membrele de al doilea (4) și (10) sunt aceleași; prin urmare avem

$$\sigma_\beta(u|\omega'_1, \omega'_3)\, e^{\frac{1}{2}e'_\beta u^2} = \sigma_\alpha(u|\omega_1, \omega_3)\, e^{\frac{1}{2}e_\alpha u^2}. \tag{11}$$

Substituțiunea (5) fiind dată, la fiecare valoare α (1, 2, 3) corespunde o valoare β (1, 2, 3), pentru care, în virtutea tabloului

(9), avem $e'_\beta = e_\alpha$. *Pentru această valoare* β, avem

$$\sigma_\beta(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_3), \tag{12}$$

adică, *înlocuirea perioadelor date prin perioade echivalente are drept efect a permută între ele cofuncțiunile σ în aceeaș ordine în care se permută cantitățile* e_1, e_2, e_3 [1]).

189. *Expresiunea radicalelor* $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$. In formula

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$$

să înlocuim u prin ω_β; obținem

$$(1)\quad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma\omega_\beta} = e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma(\omega_\alpha + \omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\, \sigma\omega_\beta} = -e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha \sigma\omega_\beta},$$

$$(\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3).$$

Permutând numerele α și β, avem

$$(2)\quad \sqrt{e_\alpha - e_\beta} = -e^{-\eta_\beta \omega_\alpha} \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha \sigma\omega_\beta}.$$

Radicalele din membrele dintâiu ale egalităților (1) și (2) sunt astfel determinate fără ambiguitate. In fiecare din egalități sunt cuprinse următoarele radicale:

$$(3)\quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\sigma_2\omega_1}{\sigma\omega_1} = -e^{-\eta_2 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_2}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} = \dfrac{\sigma_1\omega_2}{\sigma\omega_2} = -e^{-\eta_1 \omega_2} \dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_2}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\sigma_3\omega_1}{\sigma\omega_1} = -e^{-\eta_3 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = \dfrac{\sigma_1\omega_3}{\sigma\omega_3} = -e^{-\eta_1 \omega_3} \dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_3}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_3} = \dfrac{\sigma_3\omega_2}{\sigma\omega_2} = -e^{-\eta_3 \omega_2} \dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\, \sigma\omega_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_2} = \dfrac{\sigma_2\omega_3}{\sigma\omega_3} = -e^{-\eta_2 \omega_3} \dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\, \sigma\omega_3}. \end{cases}$$

---

[1]) Acest rezultat se poate deduce din formula $pu - e_\alpha = \dfrac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u}$, în virtutea căreia pătratele $\sigma_\alpha^2 u$ se permită în aceaș ordine ca e_1, e_2, e_3. Pentru $u = o$, cele trei funcțiuni $\sigma_\alpha u$ fiind egale cu 1, rezultă că ele se permută în același mod.

In ipoteza că coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ este pozitiv, avem egalităţile (12) § (153)

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = \eta_3\omega_2 - \eta_2\omega_3 = i\frac{\pi}{2},$$

în virtutea cărora formulele precedente dau

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_1} = e^{\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2}\sqrt{e_1 - e_2} = i\sqrt{e_1 - e_2}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = e^{\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3}\sqrt{e_1 - e_3} = -i\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_2} = e^{\eta_3\omega_2 - \eta_2\omega_3}\sqrt{e_2 - e_3} = i\sqrt{e_2 - e_3}. \end{cases}$$

190. *Relaţiuni între pătratele funcţiunilor* σ. In formula

$$pu - e_\alpha = \frac{\sigma^2\alpha\, u}{\sigma^2 u}$$

să dăm lui α valorile 1, 2, 3 şi să eliminăm funcţiunea pu între ecuaţiunile astfel obţinute. Găsim ecuaţiunile

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma^2 u = 0, \\ \sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\,\sigma^2 u = 0, \\ \sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma^2 u = 0. \end{cases}$$

Multiplicând aceste egalităţi respectiv cu e_3, e_1, e_2 şi adunând, avem

$$(2)\quad (e_2 - e_3)\,\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma_3^2 u = 0.$$

191. *Raporturile funcţiunilor* σ. Din formulele

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u, \\ \sigma_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u, \\ \sigma_\beta(u + 2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\beta u, \end{cases}$$

rezultă că raporturile funcţiunilor σ luate două câte două se reproduc, abstracţiune făcând de semn, când mărim argumentul cu o perioadă oarecare. Aceste raporturi, în număr de 12, se pot exprimă cu ajutorul a trei dintre ele.

Să considerăm cele trei următoare:

$$(2)\quad \sigma_{03}u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u},\quad \sigma_{13}u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u},\quad \sigma_{23}u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u},$$

cari definesc funcţiuni uniforme în tot planul neavând alte singularităţi la distanţă finită decât poluri, anume zerurile numitorului $\sigma_3 u$:

$$(3)\quad u = 2m\omega_1 + (2n + 1)\,\omega_3.$$

Din relațiunile (1) rezultă formulele

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_{03}(u+2\omega_a) = \sigma_{03}\,u & \text{pentru } a=3 \\ \sigma_{03}(u+2\omega_a) = -\sigma_{03}\,u & \text{» } a=1,2. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma_{13}(u+2\omega_a) = \sigma_{13}\,u & \text{» } a=2 \\ \sigma_{13}(u+2\omega_a) = -\sigma_{13}\,u & \text{» } a=1,3. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma_{23}(u+2\omega_a) = \sigma_{23}\,u & \text{» } a=1 \\ \sigma_{23}(u+2\omega_a) = -\sigma_{23}\,u & \text{» } a=2,3. \end{cases}$$

Funcțiunile $\sigma_{03}\,u$, $\sigma_{13}\,u$, $\sigma_{23}\,u$ sunt funcțiuni eliptice de ordinul al doilea, având respectiv ca perioade primitive perioadele

$$(7)\qquad 4\omega_1,\ 2\omega_3;\quad 4\omega_1,\ 2(\omega_1+\omega_3);\quad 2\omega_1,\ 4\omega_3,$$

căci fiecare din ele are în paralelogramul de perioade corespunzător numai două poluri simple, anume

(8)

funcțiuni	poluri
$\sigma_{03}u$	$\omega_3,\ \omega_3+2\omega_1,$
$\sigma_{13}\,u$	$\omega_3+2\omega_1,\ \omega_3+4\,\omega_1,$
$\sigma_{23}\,u$	$\omega_3,\ 3\,\omega_3.$

Funcțiunea $\sigma_{03}u$ este impară, celelalte două sunt pare. Pentru $u=0$, avem

$$(9)\qquad \sigma_{03}\,0 = 0,\ \sigma_{13}\,0 = \sigma_{23}\,0 = 1.$$

Între pătratele acestor funcțiuni luate două câte două există relațiuni ce se deduc din formulele (1) (§ 189), dacă le dividem cu $\sigma_3^2 u$. Considerând cele două din urmă, obținem

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma_{13}^2\,u + (e_1-e_3)\,\sigma_{03}^2\,u = 1, \\ \sigma_{23}^2\,u + (e_2-e_3)\,\sigma_{03}^2\,u = 1. \end{cases}$$

192. *Mărirea argumentului cu jumătăți de perioade.* Din formulele (§ 185)

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(u+\omega_a) = e^{\eta_a u}\,\sigma\omega_a\,\sigma_a\,u, \\ \sigma_a(u+\omega_a) = -e^{\eta_a(u+\omega_a)}\dfrac{\sigma u}{\sigma\omega_a}; \\ \sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = -e^{\eta_\beta u-\eta_a\omega_\beta}\dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_a}\,\sigma_\gamma u, \end{cases}$$

ținând seamă de expresiunea radicalelor $\sqrt{e_\alpha-e_\beta}$ (§ 188), deducem

tabloul următor de egalităţi:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = -e^{\eta_3\omega_1}\dfrac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}, \\ \dfrac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = -e^{\eta_3\omega_2}\dfrac{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} = \dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}, \\ \dfrac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = -e^{\eta_3\omega_3}\sigma^2\omega_3\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = -\dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_1(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = e^{-\eta_2\omega_1}\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} = -\sqrt{e_1-e_2}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}, \\ \dfrac{\sigma_1(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = e^{(\eta_3-\eta_1)\omega_2}\left(\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\right)^2\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} = i\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}}\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u}, \\ \dfrac{\sigma_1(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = e^{\eta_2\omega_3}\dfrac{\sigma\omega_2\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_2(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = e^{(\eta_3-\eta_2)\omega_1}\left(\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\right)^2\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}, \\ \dfrac{\sigma_2(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = e^{-\eta_1\omega_2}\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2}\dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u} = -i\sqrt{e_1-e_2}\dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u}, \\ \dfrac{\sigma_2(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = e^{\eta_1\omega_3}\dfrac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = -\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

192 bis. Din definiţiunea celor trei funcţiuni rezultă că avem

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma_{03}(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda\sigma_{03}(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ \sigma_{\alpha 3}(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \sigma_{\alpha 3}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad (\alpha = 1, 2), \end{cases}$$

λ fiind un factor arbitrar. Aceste funcţiuni sunt dar omogene în raport cu u, ω_1, ω_3, ceà dintâiu de gradul unu şi celelalte două de gradul zero.

De altă parte, radicalele

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha\omega_\beta}{\sigma\omega_\beta}$$

fiind în raport cu ω_1, ω_3 omogene şi de gradul -1, rezultă că produsul funcţiunii $\sigma_{03}u$ printr'unul din aceste radicale este o funcţiune omogenă şi de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3.

II. FUNCȚIUNILE ELIPTICE $sn\varphi$, $cn\varphi$, $dn\varphi$ ale lui JACOBI.

193. Raporturile funcțiunilor σ, considerate mai sus,

$$\sigma_{03}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \sigma_{13}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \sigma_{23}(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

conduc la funcțiunile eliptice introduse în Analiză de Jacobi. Să înlocuim funcțiunea $\sigma_{03}u$ prin produsul

$$\varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\ \sigma_{03}\, u,$$

omogen și de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3 ca și funcțiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ și să facem schimbarea de variabilă

$$(1) \qquad u = \frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Funcțiunile

$$(2) \qquad \varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \mid \omega_1, \omega_3\right), \ \sigma_{\alpha 3}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \mid \omega_1, \omega_3\right), \ (\alpha = 1,2)$$

depind numai de argumentul φ și de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ al perioadelor.

In adevăr, multiplicând ω_1, ω_3 printr'un factor arbitrar λ și reprezintând prin

$$(\sqrt{e_1 - e_3})'$$

ceeace devine $\sqrt{e_1 - e_3}$, avem

$$(\sqrt{e_1 - e_3})' = \frac{1}{\lambda}\sqrt{e_1 - e_3}\ ;$$

prin urmare

$$\varphi\left(\frac{\varphi}{(\sqrt{e_1 - e_3})'} \,\middle|\, \lambda\omega_1, \lambda\omega_3\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{\lambda\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \lambda\omega_1, \lambda\omega_3\right) = \varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right),$$

adică funcțiunea $\varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$ este omogenă și de gradul zero în raport cu ω_1, ω_3; ea depinde așa dar de argumentul φ și de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$.

Aceeaș concluziune se aplică funcțiunilor $\sigma_{\alpha 3}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$, $(\alpha = 1, 2)$.

194. Funcţiunile (2) aşà definite au fost introduse în Analiză de Jacobi, care le reprezintă prin notaţiunile

$$sin\ am\ \varphi\ ,\quad cos\ am\ \varphi\ ,\quad \Delta\ am\ \varphi\ ^{1})$$

şi cari se notează mai scurt:

$$sn\ \varphi\ ,\quad cn\ \varphi\ ,\quad dn\ \varphi.$$

Aceste trei funcţiuni sunt aşa dar definite prin expresiunile

$$(3)\qquad \begin{cases} sn\varphi = \sqrt{e_1 - e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \\ cn\varphi = \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \\ dn\varphi = \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \end{cases} \qquad \varphi = u\sqrt{e_1 - e_3}.$$

cari, în virtutea relaţiunilor (18) (§ 184), se pot scrie

$$(4)\qquad \begin{cases} sn\varphi = \dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{pu - e_3}}, \\ cn\varphi = \dfrac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_3}}, \\ dn\varphi = \dfrac{\sqrt{pu - e_2}}{\sqrt{pu - e_3}}. \end{cases} \qquad \varphi = u\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Cea dintâiu este impară şi celelalte două sunt pare:

$$(5)\qquad sn\,(-\varphi) = -sn\,\varphi,\ cn\,(-\varphi) = cn\,\varphi,\ dn\,(-\varphi) = dn\,\varphi.$$

Pentru $\varphi = o$, avem

$$(6)\qquad sn\,0 = 0,\quad cn\,0 = dn\,0 = 1.$$

Dacă voim să punem în evidenţă raportul $\tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ al perioadelor, scriem

$$sn\,(\varphi, \tau),\ cn\,(\varphi, \tau),\ dn\,(\varphi, \tau).$$

195. Să observăm că semnul radicalului $\sqrt{e_1 - e_3}$, care figurează în definiţiunea funcţiunii $sn\,\varphi$, este indiferent, însă acelaş ca în formula $\varphi = u\sqrt{e_1 - e_3}$; căci schimbând semnul acestui radical, se schimbă semnul lui φ şi ecuaţiunea care defineşte funcţiunea $sn\,\varphi$ rămâne neschimbată.

---

[1]) *Fundamenta nova: sinus amplitudinis* φ, *cosinus amplitudinis* φ, *delta amplitudinis* φ.

196. Să introducem cantitatea k definită de egalitatea

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \tag{1}$$

care se numește *modul* al funcțiunilor eliptice ale lui Jacobi; vom avea, în virtutea egalităților (10) (§ 191), între pătratele acestor funcțiuni, relațiunile următoare:

$$\begin{cases} sn^2 v + cn^2 v = 1, \\ k^2 sn^2 v + dn^2 v = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Pe lângă modulul k se introduce modulul *complementar* k', definit de egalitatea

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \tag{3}$$

Din egalitățile (1) și (3) rezultă egalitatea

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{4}$$

Cantitățile e_1, e_2, e_3 fiind distincte, rezultă că modulele k și k' sunt finite și diferite de 0 și 1. Se presupune totdeauna că dacă cantitățile e_1, e_2, e_3 sunt reale, ele sunt dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$; în cazul când ele sunt complexe și situate în linie dreaptă, reprezintăm prin e_2 punctul cuprins între e_1 și e_3. In aceste cazuri, k^2 și k'^2 sunt reale, pozitive și mai mici decât 1. In cazul general, când cele trei puncte formează un triunghiu, latura (e_1, e_3) este presupusă cea mai mare, sau cel puțin egală cu celelalte laturi; unghiurile $\hat{e}_1$, $\hat{e}_3$ ce ea formează cu acestea sunt așà dar ascuțite. Aceste unghiuri fiind respectiv egale cu cea mai mică valoare absolută a fiecărui argument al raporturilor membrelor de al doilea (1) și (3), rezultă că aceste argumente sunt cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$.

Cu modul acesta, punând

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \varrho e^{i\varphi}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \varrho' e^{i\varphi'},$$

avem inegalitățile

$$\varrho \leq 1, \quad \varrho' \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi' < \frac{\pi}{2}.$$

Prin definițiune, luăm

$$k = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad k' = \varrho'^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi'}{2}},$$

$$\sqrt{k} = \varrho^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi}{4}}, \quad \sqrt{k'} = \varrho'^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi'}{4}},$$

In virtutea acestei definiţiuni, modulele k, k' şi rădăcinile lor sunt reale, pozitive şi mai mici decât 1 în acelaş timp cu k^2 şi k'^2; în *cazul general, partea lor reală este pozitivă.*

Introducând notaţiunea lui Jacobi relativ la perioade, punem

$$(5) \qquad \mathrm{K} = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}, \quad i\,\mathrm{K}' = \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3}.$$

197. Este interesant de observat că modulele k, k', precum şi cantităţile K şi i K′ sunt funcţiuni omogene şi de gradul zero în ω_1, ω_3; ele depind dar numai de raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. De unde rezultă că dându-se una din aceste patru cantităţi, celelalte nu pot fi luate într'un mod arbitrar. Intre modulele k şi k' avem relaţiunea *algebrică* (4). Relaţiunile ce există între k şi K, i K′ sunt transcedente, precum vom vedeà mai departe.

198. *Mărirea argumentului* v *cu* 2K, $2i$K′.

Să înlocuim în formulele

$$(1) \qquad sn v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \quad cn v = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \quad dn v = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \qquad (v = u\sqrt{e_1 - e_3})$$

v succesiv prin $v + 2\mathrm{K}$, $v + 2i\mathrm{K}'$; ceea ce revine, în virtutea formulelor (5) (§ 197), a mări u respectiv cu $2\omega_1$, $2\omega_3$. Obţinem relaţiunile următoare:

$$(2) \quad \begin{cases} sn(v+2\mathrm{K}) = -sn v, \; cn(v+2\,\mathrm{K}) = -cn v, \; dn(v+2\,\mathrm{K}) = dn v, \\ sn(v+2i\mathrm{K}') = sn v, \; cn(v+2i\mathrm{K}') = -cn v, \; dn(v+2i\mathrm{K}') = -dn v. \end{cases}$$

Schimbând v în $-v$, aceste relaţiuni devin

$$(3) \quad \begin{cases} sn(2\,\mathrm{K} - v) = sn v, \; cn(2\,\mathrm{K} - v) = -cn v, \; dn(2\,\mathrm{K} - v) = dn v, \\ sn(2i\mathrm{K}' - v) = -sn v, \; cn(2i\mathrm{K}' - v) = -cn v, \; dn(2i\mathrm{K}' - v) = dn v. \end{cases}$$

Din formulele (2) rezultă că funcţiunile $sn v$, $cn v$, $dn v$ admit respectiv perioadele

$$4\,\mathrm{K},\ 2i\mathrm{K}';\ 4\mathrm{K},\ 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}';\ 2\mathrm{K},\ 4i\mathrm{K}'.$$

Polurile celor trei funcţiuni, fiind punctele corespunzătoare zerurilor funcţiunii $\sigma_3 u$, sunt date de expresiunea

$$(4) \qquad v = 2m\mathrm{K} + (2n+1)\,i\mathrm{K}',$$

m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Aceste poluri sunt de ordinul întâiu, precum sunt zerurile funcţiunii $\sigma_3 u$

și fiecare din funcțiunile $sn v$, $cn v$, $dn v$ are, precum se recunoaște imediat, numai două poluri în paralelogramul respectiv de perioade Perioadele considerate sunt așadar primitive pentru aceste funcțiuni.

Zerurile celor trei funcțiuni, fiind punctele corespunzătoare zerurilor funcțiunilor σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, sunt de ordinul întâi, date, în virtutea formulelor (7) (§ 183), de expresiunile

$$(5)\qquad \begin{cases} v = 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' & \text{pentru } sn v, \\ v = (2m+1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' & \text{» } cn v, \\ v = (2m+1)\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}' & \text{» } dn v. \end{cases}$$

199. *Mărirea argumentului v cu* K, $i\mathrm{K}'$, $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$.

Să înlocuim, în formulele (1), v succesiv prin $v + \mathrm{K}$, $v + i\mathrm{K}'$; ceeace revine a înlocui u respectiv prin $u + \omega_1$, $u + \omega_3$. Obținem, în virtutea formulelor (§ 191), relațiunile următoare:

$$(6)\qquad \begin{cases} sn(v+\mathrm{K}) = \dfrac{cn v}{dn v}, \\ cn(v+\mathrm{K}) = -\sqrt{\dfrac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}\,\dfrac{sn v}{dn v} = -k'\,\dfrac{sn v}{dn v}, \\ dn(v+\mathrm{K}) = \sqrt{\dfrac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}\,\dfrac{1}{dn v} = k'\,\dfrac{1}{dn v} \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} sn(v+i\mathrm{K}') = -\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = \dfrac{1}{k\,sn v}, \\ cn(v+i\mathrm{K}') = \dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = -i\,\dfrac{dn v}{k\,sn v} \\ dn(v+i\mathrm{K}') = -\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = -i\,\dfrac{cn v}{sn v}. \end{cases}$$

Inlocuind în aceste din urmă egalități v prin $v + \mathrm{K}$, obținem, în virtutea formulelor (6),

$$(8)\qquad \begin{cases} sn(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{dn v}{cn v} \\ cn(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = -i\,\dfrac{k'}{k}\,\dfrac{1}{cn v}, \\ dn(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = i\,k'\dfrac{sn v}{cn v}. \end{cases}$$

200. Din formulele precedente rezultă următorul tablou de valori:

(9)

$v =$	0	K	K$+iK'$	iK'
$snv =$	0	1	$\frac{1}{k}$	∞,
$cnv =$	1	0	$-i\frac{k'}{k}$	∞,
$dnv =$	1	k'	0	∞.

201. *Ecuaţiuni diferenţiale.* Funcţiunile snv, cnv, dnv fiind funcţiuni eliptice de ordinul al doilea cu poluri simple, trebuie să satisfacă (§ 181) ecuaţiuni de forma

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = \text{polinom } (x) \text{ de gradul } 4,$$

x reprezintând una oarecare din aceste funcţiuni.

Pentru a formă ecuaţiunea diferenţială a funcţiunii snv, să derivăm, în raport cu v, prima ecuaţiune (4), (§ 194) şi să ţinem seamă de egalitatea

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)}.$$

Obţinem ecuaţiunea căutată

$$(1) \qquad \frac{dsnv}{dv} = cnv\ dnv = \sqrt{(1-sn^2v)(1-k^2sn^2v)}.$$

Derivând celelalte ecuaţiuni (4) sau ecuaţiunile (2) (§ 196), obţinem ecuaţiunile diferenţiale ale celorlalte două funcţiuni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dcnv}{dv} = -snv\ dnv = -\sqrt{(1-cn^2v)(k'^2+k^2cn^2v)}, \\ \frac{d\ dnv}{dv} = -k^2\ snv\ cnv = -\sqrt{(1-dn^2v)(dn^2v-k'^2)}. \end{cases}$$

Punând $x = snv$, ecuaţiunea (1) se scrie

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

Funcţiunea $x = snv$ este o integrală particulară a acestei ecuaţiuni şi de oarece ecuaţiunea nu se schimbă când înlocuim v prin $v + C$, C fiind o constantă arbitrară, rezultă că $x = sn\,(v + C)$ este integrala generală a ecuaţiunii.

Funcţiunea $x = snv$ este funcţiunea inversă a integralei

$$(4) \qquad v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

precum $x = pu$ este funcțiunea inversă a integralei

$$(5) \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Aceste două integrale se numesc integrale *normale*, cea dintâiu a lui *Legendre* și cea de a doua a lui *Weierstrass*. Variabilele independente v, u ale funcțiunilor lui Jacobi și Weierstrass sunt respectiv integralele normale considerate. Între aceste două variabile există relațiunea $v = u\sqrt{e_1 - e_3}$.

Funcțiunile lui Jacobi depind de un singur parametru, modulul k, iar funcțiunea pu a lui Weierstrass depinde de două parametre, invarianții g_2 și g_3. Perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale funcțiunii pu sunt independente între ele, pe când printre perioadele funcțiunilor lui Jacobi numai una poate fi arbitrară.

Dacă voim să punem modulul k în evidență, scriem

$$sn(v, k),\ cn(v, k),\ dn(v, k).$$

202. Integrala (4) conduce, în virtutea tabloului (9) (§ 200), la expresiunile următoare:

$$(6) \qquad \mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \mathrm{K} + i\,\mathrm{K}' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

de unde

$$(7) \qquad i\,\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Integralele sunt luate după drumuri rectilinii (sau altele echivalente) cari nu se întâlnesc decât la limita comună, punctele critice ce se pot află pe aceste drumuri fiind evitate prin câte un arc de cerc infinit mic descris într'un sens convenabil. Acest sens poate fi ales astfel ca în raportul

$$\frac{i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \alpha + i\beta$$

α și β fiind cantități reale, să avem $\beta > 0$.

203. *Desvoltarea integralelor K și K' după puterile modulului k.* Din definițiunea modulelor k și k' (§ 196):

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},\quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

rezultă că dacă punctele e_1, e_2, e_3 sunt notate astfel ca

$$|e_1 - e_3| > \begin{cases} |e_2 - e_3|, \\ |e_1 - e_2|, \end{cases}$$

valorile absolute ale acestor module sunt mai mici ca 1; ceeace vom presupune în cele ce urmează.

I. Să considerăm integrala

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

luată dealungul segmentului (0, 1), valoarea radicalului pentru $x = 0$ fiind egală cu $+1$ și valoarea inițială a integralei fiind egală cu zero. In tot intervalul considerat avem

$$|k^2x^2| < 1;$$

prin urmare putem aplică formula binomului

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}x^{2n} + \ldots,$$

de unde deducem

$$(2) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}x^{2n} + \ldots\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Aplicând formula de reducțiune

$$(3) \qquad \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2n}d\,x\sqrt{1-x^2}$$

și punând

$$(4) \qquad \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n} = a_n, \qquad a_o = 1,$$

obținem egalitatea

$$(5) \qquad \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = a_n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - a_n\,x\sqrt{1-x^2}\,P_n(x),$$

$P_n(x)$ fiind polinomul de gradul $2n-2$

$$(6) \quad P_n(x) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2.4}{3.5}x^4 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-2}.$$

Multiplicând ambele membre (4) cu $a_n k^{2n}$ și făcând suma pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, la care adăugăm întegrala membrului întâiu pentru $n = o$, obținem egalitatea

$$(7) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}\sum_1^\infty a_n^2 k^{2n} P_n(x).$$

Seria

$$(8) \qquad \mathcal{A} = 1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}$$

este absolut convergentă, căci termenii ei sunt în valoare absolută mai mici ca termenii progresiunii geometrice $\sum_{o}^{\infty} |k^{2n}| = \frac{1}{1-|k^2|}$.

Să examinăm seria

$$P(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n^2 k^{2n} P_n(x) = a_1^2 k^2$$

$$+ a_2^2 k^4 \left(1 + \frac{2}{3} x^2\right)$$

$$+ a_3^2 k^6 \left(1 + \frac{2}{3} x^2 + \frac{2.4}{3.5} x^4\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_n^2 k^{2n} \left(1 + \frac{2}{3} x^2 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} x^{2n-2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Seriile formate din termenii situați pe aceeaș coloană sunt absolut convergente și sumele lor sunt în valoare absolută mai mici respectiv ca termenii

$$\frac{|k^2|}{1-|k^2|}, \quad \frac{|k^4 x^2|}{1-|k^2|}, \quad \frac{|k^6 x^4|}{1-|k^2|}, \ldots,$$

a căror sumă este finită pe cât timp $|k^2 x^2| < 1$. Această sumă rămâne finită și pentru $x = 1$.

Seria $P(x)$ este așà dar absolut convergentă și o putem ordonà după puterile lui x:

$$(9) \quad P(x) = c_1 + \frac{2}{3} c_2 x^2 + \frac{2.4}{3.5} c_3 x^4 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} c_n x^{2n-2} + \ldots$$

$$(10) \quad c_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m^2 k^{2n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Avem așà dar egalitatea

$$(11) \quad \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \mathcal{A}\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}\left[c_1 x + \frac{2}{3} c_2 x^2 + \frac{2.4}{3.5} c_3 x^4 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} c_n x^{2n-2} + \ldots\right]$$

De unde, pentru semiperioada K, în interiorul cercului $|k| = 1$, desvoltarea

$$(12) \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n}\right].$$

Observare. Din egalitatea $|k^2x^2| < 1$ rezultă că $1 - k^2x^2$ nu poate fi egal cu un număr negativ; prin urmare, partea reală a radicalului $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ păstrează un semn invariabil când x variază dela 0 la 1. Acest semn fiind acelaș și pentru partea reală a lui K, rezultă că această semiperioadă nu se anulează în cercul $|k| = 1$.

II. Să considerăm acum integrala

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{13}$$

și să facem schimbarea de variabilă

$$k^2x^2 + k'^2y^2 = 1. \tag{14}$$

Obținem, înlocuind litera y prin litera x,

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \tag{15}$$

expresiune care nu diferă de aceea a integralei K decât prin înlocuirea modulului k prin modulul complementar k'. De unde rezultă, pentru K', desvoltarea după puterile lui k'

$$K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k'^{2n}\right]. \tag{16}$$

Seria (12) convergează cu atât mai repede cu cât modulul k este mai aproape de zero, dar atunci k' fiind aproape de 1, seria (16) convergează încet. Viceversa, dacă k' este aproape de zero, seria (16) convergează repede și seria (12) convergează încet. Pentru $k = 1$, seria (12) este divergentă și pentru $k = 0$, seria (16) este divergentă.

Pentru $k = 0$, avem

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty. \tag{17}$$

Punctul $k = 0$ este așadar un punct singular pentru integrala K'. Să căutăm forma analitică a acestei integrale în domeniul punctului $k = 0$. Pentru aceasta, să reluăm formula (12), care, abstracțiune făcând de semn, se poate scrie

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{18}$$

Intre limitele 1 și $\frac{1}{k}$ să intercalăm punctul $\frac{1}{\sqrt{k}}$ și să înlocuim

integrala din membrul al doilea prin suma

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

In ultima integrală să facem substituțiunea

$$x = \frac{1}{kz}, \tag{19}$$

prin care se reproduce prima integrală. Putem dar scrie

$$K' = 2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{20}$$

Pe segmentul $\left(1, \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ avem

$$|kx| \leq |\sqrt{k}| < 1;$$

putem dar aplică formula binomului

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} x^{2n}.$$

Dacă considerăm formula de reducțiune

$$\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2n-1}{2n} \frac{x^{2n-2}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \frac{1}{2n}\,dx^{2n-1}\sqrt{x^2-1}$$

și procedăm ca mai sus, obținem egalitatea

$$K' = 2\sum_0^{\infty} a_n^2 k^{2n} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + 2\sqrt{1-k}\sum_1^{\infty} a_n^2 k^{2n} P_n\left(\frac{1}{k}\right), \tag{21}$$

$P_n\left(\frac{1}{k}\right)$ fiind polinomul (6) în care înlocuim x^2 prin $\frac{1}{k}$. De altă parte, avem expresiunea

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\frac{1+\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\log\frac{(1+\sqrt{1-k})^2}{k} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}},$$

în care trebuie să dăm logaritmului valoarea sa principală [1]), căci numai astfel membrul întâiu este real și pozitiv dacă k, fiind real și cuprins între 0 și 1, luăm pentru $\sqrt{k}$ și $\sqrt{1-k}$ valorile lor pozitive.

---

[1]) Valoarea principală a logaritmului unei cantități $x = \varrho e^{i\theta}$ este definită de egalitatea $\log x = \log \varrho + i\theta$, $\quad -\pi < \theta < \pi$.

Pentru $|k|<1$ avem desvoltările

$$(22)\quad \begin{cases} \sqrt{1-k}=1-\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{2}+\dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{k^3}{3}+\ldots+\dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\dfrac{k^{n+1}}{n+1}+\ldots\right)^{1}), \\ \dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}}=\dfrac{4}{k}\left(1-\dfrac{k}{2}-\dfrac{k^2}{16}-\ldots\right) \\ \log\dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}}=\log\dfrac{4}{k}-\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{3}{16}k^2+\ldots\right). \end{cases}$$

Făcând înlocuirile în egalitatea (21), obţinem expresiunea analitică a lui K′, în domeniul $k=0$ a cărei formă este

$$(23)\quad K'=\left(1+\sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\log\frac{4}{k}-P(k^2)=\frac{2}{\pi}K\log\frac{4}{k}-P(k^2),$$

$P(k^2)$ fiind o serie întreagă de k^2 cu coeficienţi numere raţionale, convergentă în cercul $|k|=1$, ai cărei primii termeni sunt

$$(24)\quad P(k^2)=\frac{1}{4}k^2+\frac{21}{2^7}k^2+\ldots$$

Faptul că seria P conţine numai puteri pare ale lui k se justifică prin aceea că integrala K′, prin definiţiunea sa (12), este funcţiune de k^2 şi primul termen al membrului al doilea (23), în virtutea relaţiunii $\log\frac{4}{k}=\frac{1}{2}\log\frac{16}{k^2}$, este de asemenea funcţiune de k^2.

Tot ce s'a spus despre integrala K′, în domeniul $k=0$, se aplică integralei K, în domeniul $k=1$ sau $k'=0$. Este de ajuns a permută k cu k' şi K′ cu K. Avem aşà dar în domeniul punctului $k'=0$, $k=1$

$$(25)\quad K=\left(1+\sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\log\frac{4}{k'}-P(k'^2)=\frac{2}{\pi}K'\log\frac{4}{k'}-P(k'^2).$$

204. *Desvoltarea în serie a funcţiunii sn v în domeniul originii.* Derivând ecuaţiunea

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)=1-(1+k^2)x^2+k^2x^4,$$

---

[1]) Plecând dela egalitatea

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x}=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots),$$

integrând, obţinem

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}\left(x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\right),\quad a_n=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}.$$

obținem

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -(1+k^2)\,x + 2k^2x^3,$$

$$\frac{d^3x}{d\varphi^3} = -(1+k^2-6k^2x^2)\,\frac{dx}{d\varphi},$$

$$\frac{d^4x}{d\varphi^4} = -(1+k^2-6k^2x^2)\,\frac{d^2x}{d\varphi^2} + 12k^2x\,\frac{dx}{d\varphi},$$

$$\frac{d^5x}{d\varphi^5} = -(1+k^2-6k^2x^2)\,\frac{d^3x}{d\varphi^3} + 24k^2x\,\frac{d^2x}{d\varphi^2} + 12k^2\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2,$$

. . . . . .

Făcând $\varphi = 0$, prin urmare $x = 0$, obținem

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_0 = 1^{1)},\quad \left(\frac{d^3x}{d\varphi^3}\right)_0 = -(1+k^2),\quad \left(\frac{d^5x}{d\varphi^5}\right)_0 = (1+k^2)^2 + 12k^2, \ldots,$$

derivatele de ordin par fiind toate nule.

Desvoltarea căutată este așà dar de forma

$$sn\varphi = \varphi - \frac{1+k^2}{3!}\varphi^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}\varphi^5 + \ldots + \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1} + \ldots,$$

coeficienții a_{2n+1} fiind, precum se recunoaște lesne, polinoame de k^2 cu coeficienți întregi. Această desvoltare este valabilă în cercul cu centrul în punctul $\varphi = o$ și trecând prin polul cel mai apropiat.

205. Plecând dela ecuațiunile diferențiale ale funcțiunilor $cn\varphi$, $dn\varphi$, obținem desvoltări cari conțin numai puteri pare ale lui φ:

$$cn\,\varphi = 1 + \frac{b_2}{2!}\varphi^2 + \ldots + \frac{b_{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} + \ldots,$$

$$dn\,\varphi = 1 + \frac{c_2}{2!}\varphi^2 + \ldots + \frac{c_{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} + \ldots,$$

coeficienții b_{2n}, c_{2n} fiind polinoame de k^2.

206. *Ecuațiunile* $sn\varphi = sna$, $cn\varphi = cna$, $dn\varphi = dna$.

Din formulele

$$sn\,(2k - \varphi) = sn\,\varphi,\quad cn(\pm\varphi) = cn\varphi,\quad dn\,(\pm\varphi) = dn\varphi$$

conchidem, ținând seamă de perioadele primitive ale celor trei funcțiuni, că soluțiunile ecuațiunilor

$$sn\,\varphi = sn\,a,\quad cn\,\varphi = cn\,a,\quad dn\varphi = dn\,a,\quad a \neq 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'$$

---

[1]) Din $\frac{dx}{d\varphi} = cn\varphi\ dn\varphi$ rezultă $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_0 = +1$.

sunt date respectiv de egalităţile

$$v = \begin{cases} a + 4m\,\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}', \\ -a + (4m+2)\,\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'; \end{cases}$$

$$v = \pm a + (4m+2n)\,\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}';$$

$$v = \pm a + 2m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}'.$$

Rădăcinile considerate sunt simple, exceptând respectiv valorile următoare ale lui a:

$$a = \pm \mathrm{K}, \pm(\mathrm{K} + i\mathrm{K}'),$$

$$a = 0,\ 2\mathrm{K},\ (\mathrm{K}+i\mathrm{K}'),\ 3\mathrm{K} + i\mathrm{K}',$$

$$a = 0,\ \mathrm{K},\ \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}',\ 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}',$$

abstracţiune făcând de multipli de perioade corespunzătoare funcţiunilor sn, cn, dn. Aceste valori dau rădăcini duble, căci ele anulează derivatele funcţiunilor respective.

III. FORMULE DE ADIŢIUNE PENTRU FUNCŢIUNILE $sn v$, $cn v$, $dn v$.

207. *Funcţiunea* $sn v$. Să considerăm funcţiunea

$$(1) \qquad f(v) = \frac{sn(v+a) + sn(v-a)}{sn v},$$

a fiind o constantă $\not\equiv \mathrm{K}, i\mathrm{K}'\ \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$. Această funcţiune este pară şi admite perioadele $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$.

Se recunoaşte lesne că $f(v)$ n'are poluri decât cele ale numărătorului, cari, abstracţiune făcând de multipli de perioade, sunt date de expresiunile

$$v = \pm a + i\mathrm{K}'.$$

Polul numitorului, $v = i\mathrm{K}'$, anulează numărătorul, căci avem

$$sn(a + i\mathrm{K}') = sn(a - i\mathrm{K}').$$

Punctul $v = i\mathrm{K}'$ este aşadar un zero dublu al funcţiunii $f(v)$; el nu poate fi de ordin mai înalt, căci, în paralelogramul $(2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$, $f(v)$ are două poluri simple.

Să introducem acum funcţiunea

$$\varphi(v) = 1 + a\,sn^2 v,$$

a fiind o constantă diferită de zero. Această funcţiune are aceleaşi perioade şi admite, abstracţiune făcând de multipli de perioade, unicul pol dublu $v = i\mathrm{K}'$. Să determinăm a astfel ca funcţiunea

$\varphi(\varphi)$ să se anuleze în punctul $\varphi = a + iK'$; ea se va anulà atunci și în punctul $\varphi = -a + iK'$. Trebuie dar să avem

$$1 + a\, sn^2(a + iK') = 0,$$

sau, în virtutea formulei $sn(a + iK') = \frac{1}{k\, sna}$,

$$1 + \frac{a}{k^2\, sn^2 a} = 0.$$

De unde, pentru funcțiunea $\varphi(\varphi)$, expresiunea

$$\varphi(\varphi) = 1 - k^2 sn^2 a\; sn^2\varphi. \tag{2}$$

Produsul $f(\varphi)\,\varphi(\varphi)$ neavând nici un pol este o constantă. Avem dar

$$\frac{sn(\varphi + a) + sn(\varphi - a)}{sn\varphi} = \frac{C}{1 - k^2 sn^2 a\; sn^2\varphi}.$$

Făcând $\varphi = 0$, obținem $C = 2\, sn'a$.

Avem așà dar formula

$$\frac{sn(\varphi + a) + sn(\varphi - a)}{sn\varphi} = \frac{2\, sn'a}{1 - k^2 sn^2\; sn^2\varphi}, \tag{3}$$

sau, ținând seamă de relațiunea

$$sn'a = cna\; dna,$$

avem formula fundamentală

$$sn(\varphi + a) + sn(\varphi - a) = \frac{2 sn\varphi\; cna\; dna}{1 - k^2 sn^2 a\; sn^2\varphi}. \tag{4}$$

Permutând φ cu a, avem

$$sn(\varphi + a) - sn(\varphi - a) = \frac{2\, sn\, a\; cn\varphi\; dn\varphi}{1 - k^2 sn^2 a\; sn^2\varphi}. \tag{5}$$

Adunând aceste două egalități, obținem formula de adițiune

$$sn(\varphi + a) = \frac{sn\varphi\; cna\; dna + sna\; cn\varphi\; dn\varphi}{1 - k^2 sn^2 a\; sn^2\varphi}. \tag{6}$$

208. Formula subsistă și pentru valorile excluse ale lui a. Căci ambele membre ale egalității (6) fiind funcțiuni analitice de a, egale pentru o infinitate de valori ale acestei cantități, sunt egale și pentru acele valori particulare. De altmintrelea, pentru valorile $a = K, iK', K + iK'$ avem (§ 199) expresiunile

$$sn(\varphi + K) = \frac{cn\varphi}{dn\varphi},\quad sn(\varphi + iK') = \frac{1}{k\, sn\varphi},\quad sn(\varphi + K + iK') = \frac{dn\varphi}{k\; cn\varphi}$$

cuprinse în formula generală (6).

209. *Funcţiunea cnv.* Avem

$$cn^2(v+a) = 1 - sn^2(v+a) = \frac{(1-k^2sn^2a\,sn^2v)^2 - (snv\,cna\,dna + sna\,cnv\,dnv)^2}{(1-k^2sn^2a\,sn^2v)^2}.$$

Insă

$$1 - k^2\,sn^2a\,sn^2v = 1 - sn^2v\,(1 - dn^2a) = cn^2v + sn^2v\,dn^2a$$
$$= 1 - sn^2a\,(1 - dn^2v) = cn^2a + sn^2a\,dn^2v.$$

Inlocuind primul termen al numărătorului $(1 - k^2sn^2a\,sn^2v)^2$ prin produsul $(cn^2v + sn^2v\,dn^2a)\,(cn^2a + sn^2a\,dn^2v)$ avem

$$cn^2(v+a) = \frac{(cna\,cnv - sna\,dna\,snv\,dnv)^2}{(1-k^2sn^2a\,sn^2v)^2}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată şi observând că pentru $v = o$, ambele membre trebuie să se reducă la *cna*, obţinem formula

$$(7) \qquad cn(v+a) = \frac{cna\,cnv - sna\,snv\,dna\,dnv}{1 - k^2\,sn^2a\,sn^2v}.$$

210. *Funcţiunea dnv.* Pentru a obţine formula de adiţiune a funcţiunii *dnv*, plecăm dela egalitatea

$$dn^2(v+a) = 1 - k^2\,sn^2(v+a)$$
$$= \frac{(1 - k^2sn^2a\,sn^2v)^2 - k^2\,(snv\,cna\,dna + sna\,cnv\,dnv)^2}{(1 - k^2\,sn^2a\,sn^2v)^2}.$$

Insă

$$1 - k^2\,sn^2a\,sn^2v = dn^2v + k^2sn^2v\,cn^2a$$
$$= dn^2a + k^2\,sn^2a\,cn^2v.$$

Inlocuind primul termen al numărătorului prin produsul $(dn^2v + k^2sn^2v\,cn^2a)\,(dn^2a + k^2sn^2a\,cn^2v)$, obţinem

$$dn^2(v+a) = \frac{(dna\,dnv - k^2\,sna\,snv\,cna\,cnv)^2}{(1 - k^2\,sn^2a\,sn^2v)^2}.$$

De unde, extrăgând rădăcina pătrată şi observând că pentru $v = o$, ambele membre trebuie să coincidă cu *dna*, avem formula

$$(8) \qquad dn(v+a) = \frac{dna\,dnv - k^2sna\,snv\,cna\,cnv}{1 - k^2sn^2a\,sn^2v}.$$

211. Făcând $v = a$ în egalităţile (6), (7) şi (8), obţinem egalităţile

$$(9) \qquad \begin{cases} sn2a = \dfrac{2sna\,cna\,dna}{1 - k^2\,sn^4a}, \\ cn2a = \dfrac{cn^2a - sn^2a\,dn^2a}{1 - k^2\,sn^4a}, \\ dn2a = \dfrac{dn^2a - k^2\,sn^2a\,cn^2a}{1 - k^2\,sn^4\,a}. \end{cases}$$

CAPITOLUL XVII.

Expresiunea funcțiunilor ζu, pu prin serii de funcțiuni simplu periodice.

Funcțiunile σu, $\sigma_\alpha u$ exprimate prin produse de funcțiuni simplu periodice.

FUNCȚIUNILE ζu, pu; σu, $\sigma_\alpha u$.

212. *Funcțiunea ζu.* Seria dublă care definește funcțiunea ζu (II, 137) se poate, printr'o grupare convenabilă a termenilor, transformă într'o serie cu un singur indice. Să facem substituțiunile

$$(1) \qquad \frac{u}{2\omega_1} = v, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau;$$

seria considerată se va scrie

$$(2) \quad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1 v} + \frac{1}{2\omega_1} \Sigma' \left[\frac{1}{v-(m+n\tau)} + \frac{1}{m+n\tau} + \frac{v}{(m+n\tau)^2} \right].$$

Să reunim în membrul al doilea, de o parte, toți termenii în cari $n = 0$ și, de altă parte, toți termenii în cari n are aceeaș valoare oarecare diferită de zero. Reprezintând prima sumă prin s_0, cea de a doua prin s_n și ținând seamă de egalitățile

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n\tau+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 n\pi\tau},^{1)}$$

$$\frac{1}{v} + \Sigma' \left(\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m} \right) = \pi \cot \pi v,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{v-n\tau-m} + \frac{1}{n\tau+m} \right] = \pi \left[\cot \pi (v-n\tau) + \cot n\pi\tau \right];^{2)}$$

vom aveà

$$s_0 = \frac{\pi^2 v}{6\omega_1} + \frac{\pi \cot \pi v}{2\omega_1},$$

$$s_n = \frac{v}{2\omega_1} \frac{\pi^2}{\sin^2 n\pi\tau} + \frac{\pi}{2\omega_1} \left[\cot \pi (v-n\tau) + \cot n\pi\tau \right].$$

---

1) Diferența dintre funcțiunea $\frac{1}{\sin^2 \pi x}$ și seria $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2}$, absolut și uniform convergentă în tot planul, exceptând polurile $x = -m$, este, precum se recunoaște lesne o funcțiune olomorfă în tot planul. Această diferență se reduce dar la o constantă, a cărei valoare este nulă (I, pag. 380—1). Inlocuind x prin $n\tau$, obținem egalitatea de mai sus.

2) I. p. 382.

Raportul τ al perioadelor fiind imaginar, seriile

$$\Sigma' \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau},$$

$$\Sigma' \left[\cot \pi (v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right] = \sin \pi v \, \Sigma' \frac{1}{\sin n\pi\tau \sin \pi (v - n\tau)}$$

sunt absolut convergente. Este de ajuns a probà cà cea dintâiu din aceste două serii este convergentă, de unde, în virtutea egalităţii

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{\sin \pi (v - n\tau)}{\sin n\pi\tau} \right| = 1,$$

va rezultà cà şi cea de a doua este convergentă.

Punând

$$\pi\tau = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq o,$$

avem

$$\sin n\pi\tau = \frac{e^{-n\beta + ni\alpha} - e^{n\beta - ni\alpha}}{2i},$$

de unde egalitatea

$$\frac{1}{|\sin^2 n\pi\tau|} < \frac{1}{n^2 \beta^2},$$

care justificà convergenţa seriei considerate.

Avem aşàdar egalitatea

$$(3) \quad \zeta u = \frac{\pi^2 v}{\omega_1} \left[\frac{1}{6} + \sum_1^\infty \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau}\right] + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \Sigma' \left[\cot \pi (v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right].$$

Făcând $v = \frac{1}{2}$ şi observând cà termenii sumei $\Sigma' \left[\cot \pi \left(\frac{1}{2} - n\tau\right) + \cot n\pi\tau\right]$ corespunzàtori la valori ale lui n egale şi de semne contrare se distrug, obţinem

$$(4) \quad \eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[\frac{1}{6} + \sum_1^\infty \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau}\right].$$

Egalitatea (3) devine

$$(5) \quad \zeta u = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \Sigma' \left[\cot \pi (v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right],$$

$$= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \sum_1^\infty \left[\cot \pi (v - n\tau) + \cot \pi (v + n\tau)\right].$$

213. *Funcţiunea pu.* Derivând egalitatea precedentà în raport cu v, obţinem

$$(6) \quad pu = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi (v - n\tau)}.$$

Făcând succesiv $v = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}$, rezultă

$$\eta_1\omega_1 = -e_1\omega_1^2 + \frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos^2 n\pi\tau},$$

$$\eta_1\omega_1 = -e_2\omega_1^2 + \frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{2n-1}{2}\pi\tau}, \tag{7}$$

$$\eta_1\omega_1 = -e_3\omega_1^2 + \frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{2n-1}{2}\pi\tau},$$

214. *Funcțiunea* σu. Integrând egalitatea (5) în raport cu v, obținem

$$\log\frac{\sigma u}{c\sin\pi v} = 2\eta_1\omega_1 v^2 + \Sigma'\Big[\log\frac{\sin\pi(v-n\tau)}{-\sin n\pi\tau} + \pi v\cot n\pi\tau\Big].$$

Trecând dela logaritmi la numere și făcând $v = 0$, găsim

$$c = \frac{2\omega_1}{\pi}.$$

Avem așà dar expresiunea căutată a funcțiunii σu, sub formă de produs simplu,

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\sin\pi v\,\Pi'\frac{\sin\pi(v-n\tau)}{-\sin n\pi\tau}e^{\pi v\cot n\pi\tau}. \tag{8}$$

O altă formă a acestui produs se obține, dacă grupăm factorii doi câte doi corespunzători la $\pm n$ și ținem seamă de identitatea

$$\sin\pi(v-n\tau)\sin\pi(v+n\tau) = \sin^2\pi v - \sin^2 n\pi\tau.$$

Egalitatea (8) devine

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\sin\pi v\prod_{n}^{1,\infty}\left(1-\frac{\sin^2\pi v}{\sin^2 n\pi\tau}\right). \tag{9}$$

O a treia formă a produsului sub care se poate pune funcțiunea σu se obține, dacă înlocuim în (8) funcțiunile circulare prin funcțiuni exponențiale.

Introducem notațiunile următoare:

$$e^{i\pi v} = z,\quad e^{i\pi\tau} = q \tag{10}$$

și observăm că putem, fără a restrânge generalitatea, presupune $|q| < 1$. Căci, punând

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = a + ib,$$

avem

$$q = e^{-b\pi}.$$

Putem totdeauna dispune ca b să fie *pozitiv*, schimbând, dacă este necesar, semnul lui ω_3; ceea ce n'are influență asupra funcțiunii σu. Vom aveà

$$\sin \pi v = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

$$\sin n\pi\tau = \frac{q^n - q^{-n}}{2i} = i\frac{1-q^{2n}}{2q^n},$$

$$\sin \pi(v - n\tau) = \frac{q^{-n}z - q^n z^{-1}}{2i} = -iz\frac{1-q^{2n}.z^{-2}}{2q^n},$$

$$\sin \pi(v + n\tau) = \frac{q^n z - q^{-n} z^{-1}}{2i} = iz^{-1}\frac{1-q^{2n}z^2}{2q^n}.$$

Substituind aceste valori în egalitatea (8), obținem

$$(11)\quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}.$$

Produsul $\prod_1^\infty (1-q^{2n})$ este absolut convergent, căci $|q| < 1$; de asemenea pentru orice valoare z, finită și diferită de zero, produsele

$$\prod_1^\infty (1-q^{2n}z^2), \quad \prod_1^\infty (1-q^{2n}z^{-2})$$

sunt absolut și uniform convergente. Putem dar descompune produsul din membrul al doilea (11) în trei produse și scrie

$$(12)\quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{z - z^{-1}}{2i} \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n}z^2) \prod_1^\infty (1-q^{2n}z^{-2})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2},$$

sau

$$(13)\quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \sin \pi v \frac{\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}.$$

215. Introducând cantitatea q în egalitatea (4), obținem

$$(14)\quad \eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{6} - 4\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right],$$

expresiune comodă pentru calculul lui η_1. Valoarea lui η_3 se va deduce din formula lui Legendre

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}, \tag{15}$$

în care înlocuim η_1 prin valoarea sa din (14).

Prin introducerea lui q egalitățile (7) devin

$$\eta_1 \omega_1 = -e_1 \omega_1^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{4} + 2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

$$\eta_1 \omega_1 = -e_2 \omega_1^2 + 2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}, \tag{16}$$

$$\eta_1 \omega_1 = -e_3 \omega_1^2 - 2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

216. *Valorile funcțiunii σu pentru $u = \omega_\alpha$*, $(\alpha = 1, 2, 3)$. Făcând în formula (12) succesiv $\nu = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1}$, $\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}$, obținem valorile $\sigma\omega_1$, $\sigma\omega_3$, $\sigma\omega_2$ sub formă de produse.

1°. $\sigma\omega_1$.—Făcând $\nu = \frac{1}{2}$, prima formulă (10) dă $z = i$ și formula (12) devine

$$\sigma\omega_1 = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \frac{\prod_1^\infty (1+q^{2n})^2}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}. \tag{17}$$

2°. $\sigma\omega_3$.—Pentru $\nu = \frac{1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\tau}{2}$, formulele (10) dau $z = e^{i\pi\frac{\tau}{2}} = q^{\frac{1}{2}}$.

Ducând valorile $\nu = \frac{\tau}{2}$, $z = q^{\frac{1}{2}}$ în egalitatea (12), obținem

$$\sigma\omega_3 = \frac{i\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\frac{\omega_3^2}{\omega_1}} q^{-\frac{1}{2}}(1-q) \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n+1}) \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}$$

Insă din formula (15) rezultă

$$\eta_1 \frac{\omega_3^2}{\omega_1} = \eta_3 \omega_3 + \frac{i\pi\tau}{2} \tag{18}$$

Ducând această valoare în expresiunea lui $\sigma\omega_3$ și făcând să intre factorul $(1-q)$ în primul produs al numărătorului, avem

$$\sigma\omega_3 = i\frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3} q^{-\frac{1}{4}} \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n-1})^2}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}. \tag{19}$$

3°. Fie $v=\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}=-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}$; prin urmare $z=-iq^{-\frac{1}{2}}$. Ducând aceste valori ale lui v și z în egalitatea (12), avem

$$\sigma\omega_2=-\frac{\omega_1}{\pi}e^{\frac{1}{2}\eta_1\frac{\omega_2^2}{\omega_1}}q^{-\frac{1}{2}}(1+q)\frac{\prod_1^\infty(1+q^{2n-1})\prod_1^\infty(1+q^{2n+1})}{\prod_1^\infty(1-q^{2n})^2}.$$

Insă din formula

$$\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\frac{i\pi}{2}, \tag{20}$$

rezultă

$$\eta_1\frac{\omega_2^2}{\omega_1}=\eta_2\omega_2-\frac{i\pi}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}=\eta_2\omega_2+\frac{i\pi}{2}(1+\tau). \tag{21}$$

Avem așà dar

$$\sigma\omega_2=-\frac{\omega_1}{\pi}e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\sqrt{i}\,q^{-\frac{1}{4}}\frac{\Pi(1+q^{2n-1})^2}{\Pi(1-q^{2n})^2},\quad\left(\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\right). \tag{22}$$

217. *Funcțiunile* $\sigma_\alpha u$.—Vom calculà succesiv produsele funcțiunilor σ_1, σ_2, σ_3, cari nu pot fi cuprinse într'o singură formulă; căci perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, cari în produsele duble intră în mod simetric, figurează în mod diferit în produsele simple.

1°. Funcțiunea $\sigma_1 u=e^{-\eta_1 u}\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1}$.

A mări u cu ω_1 revine a mări $v=\frac{u}{2\omega_1}$ cu $\frac{1}{2}$, prin urmare a înlocuì $z=e^{i\pi v}$ prin iz. Făcând aceste substituțiuni în formula (12), avem

$$e^{-\eta_1 u}\sigma(u+\omega_1)=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1(v^2+\frac{1}{4})}\frac{z+z^{-1}}{2}\frac{\Pi(1+q^{2n}z^2)\,\Pi(1+q^{2n}z^{-2})}{\Pi(1-q^{2n})^2}.$$

Divizând această egalitate cu $\sigma\omega_1$ (17), obținem

$$\sigma_1 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{z+z^{-1}}{2}\frac{\Pi(1+q^{2n}z^2)\,\Pi(1+q^{2n}z^{-2})}{\Pi(1+q^{2n})^2}, \tag{23}$$

sau

$$\sigma_1 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\cos\pi v\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}. \tag{24}$$

2°. Funcțiunea $\sigma_3 u=e^{-\eta_3 u}\frac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma\omega_3}$.

A înlocuì u cu $u+\omega_3$ revine a mări v cu $\frac{\tau}{2}$ și a înlocuì z prin $q^{\frac{1}{2}}z$. Prin această înlocuire avem, în virtutea egalității (15),

$$2\eta_1\omega_3 v=2\eta_3\omega_1 v+i\pi v=\eta_3 u+i\pi v.$$

Făcând substituțiunea și ținând seamă de egalitatea (18), formula (12) devine

$$e^{-\eta_3 u}\,\sigma(u+\omega_3) = i\frac{\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\,e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\frac{\Pi(1-q^{2n-1}z^2)\,\Pi(1-q^{2n-1}z^{-2})}{\Pi(1-q^{2n})^2}.$$

Divizând ambele membre cu $\sigma\omega_3$ (19), obținem

$$(25)\qquad \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\,\frac{\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}z^2)\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}z^{-2})}{\prod_1^\infty(1-q^{2n-1})^2},$$

sau

$$(26)\qquad \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\prod_1^\infty\frac{1-2q^{2n-1}\cos 2\pi\rho+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

3°. Funcțiunea $\sigma_2 u = e^{-\eta_2 u}\,\dfrac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma u}$.

Inlocuind u prin $u+\omega_2$, adică ρ prin $\rho-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau}{2}$, z prin valoarea corespunzătoare $-izq^{-\frac{1}{2}}$ și, ținând seamă de egalitatea (21), formula (12) devine

$$e^{-\eta_2 u}\,\sigma(u+\omega_2) = -\frac{\omega_1}{\pi}\,e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\,e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\,\sqrt{i}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\frac{\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^{-2})}{\prod_1^\infty(1-q^{2n})^2}$$

Divizând ambele membre cu $\sigma\omega_2$ (22), obținem

$$(27)\qquad \sigma_2(u) = e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\,\frac{\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{\prod_1^\infty(1+q^{2n-1})^2},$$

sau

$$(28)\qquad \sigma_2(u) = e^{2\eta_1\omega_1\rho^2}\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi\rho+q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

218. Să punem

$$(29)\qquad \begin{cases} q_0=\prod_1^\infty(1-q^{2n}), & q_1=\prod_1^\infty(1+q^{2n}),\\ q_2=\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}), & q_3=\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}). \end{cases}$$

Aceste produse sunt absolut și uniform convergente pentru toate valorile lui q cari satisfac inegalitatea $|q|<1$; ele reprezintă dar funcțiuni olomorfe în interiorul cercului $|q|=1$. Aceleași

produse privite ca funcţiuni de τ, sunt olomorfe în semiplanul situat deasupra axei reale a variabilei τ.

Multiplicând între ele produsele situate pe aceeaş linie orizontală (29), obţinem

$$q_0\, q_1 = \prod_1^\infty (1-q^{4n}), \qquad q_2\, q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{4n-2}).$$

Produsele q_0 şi $q_0\, q_1\, q_2\, q_3$ conţin aceiaşi factori; avem aşà dar $q_0\, q_1\, q_2\, q_3 = q_0$, de unde egalitatea

$$q_1\, q_2\, q_3 = 1. \tag{30}$$

Introducând aceste notaţiuni, formulele (17), (19) şi (22) se scriu

$$\begin{cases} \sigma\omega_1 = \dfrac{2\omega_1}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}\, \dfrac{q_1^2}{q_0^2}, \\ \sigma\omega_2 = -\sqrt{i}\, \dfrac{\omega_1}{\pi}\, q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\, \dfrac{q_2^2}{q_0^2}, \\ \sigma\omega_3 = i\, \dfrac{\omega_1}{\pi}\, q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}\, \dfrac{q_3^2}{q_0^2}. \end{cases} \tag{31}$$

219. Cu ajutorul acestor expresiuni, valorile radicalelor $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ (§ 188) devin, ţinând seamă de egalitatea (30) de mai sus,

$$\begin{cases} \sqrt{e_2-e_3} = -i\,\sqrt{e_3-e_2} = -\dfrac{2\pi}{\omega_1}\, q^{\frac{1}{2}}\, q_0^2\, q_1^4, \\ \sqrt{e_1-e_3} = i\,\sqrt{e_3-e_1} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\, q_0^2\, q_2^4, \qquad q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{i\pi\tau}{2}} \\ \sqrt{e_1-e_2} = -i\,\sqrt{e_2-e_1} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\, q_0^2\, q_3^4. \end{cases} \tag{1}$$

Aceste radicale sunt aşà dar funcţiuni uniforme de raportul τ al perioadelor.

In cazul când ω_1 şi $\dfrac{\omega_3}{i}$ sunt reale şi pozitive, $q = e^{i\pi\tau}$ este real şi cuprins între 0 şi 1; prin urmare, cantităţile q_0, q_1, q_2, q_3 sunt reale şi pozitive. De unde rezultă că, în acest caz, radicalele

$$\sqrt{e_1-e_2}, \quad \sqrt{e_1-e_3},$$

sunt reale şi pozitive, iar radicalul

$$\sqrt{e_2-e_3}$$

este real şi negativ.

Egalităţile precedente ne permit a definì, în nod univoc, rădăcinile de ordinul al patrulea ale diferenţelor e_2-e_3, e_1-e_2, e_1-e_3.

Observăm mai întâi că acestor radicale nu se pot da decât două valori egale și de semne contrarii, ale căror pătrate sunt membrele dintâi (1). Să mai observăm că, dacă luăm după voie semnul unuia din cele trei radicale, semnele celorlalte sunt determinate. Căci, din produsul a două din egalitățile (1), de ex., a celor dintâi,

$$\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_1-e_3}=-\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 q^{\frac{1}{2}} q_0^4\, q_1^4\, q_2^4,$$

deducem, luând $\sqrt{-1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}=i\frac{\pi}{\omega_1}\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0^2\, q_1^2\, q_2^2.$$

Semnul produsului fiind determinat, semnul ce se dă unuia din factori determină semnul celuilalt factor.

Putem dar pune

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2-e_3}=2i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0\, q_1^2, \\ \sqrt[4]{e_1-e_3}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0\, q_2^2, \qquad q^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{i\pi\tau}{4}} \\ \sqrt[4]{e_1-e_2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0\, q_3^2. \end{cases}$$

Semnul radicalului $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}$ poate fi luat după voie, însă același în toate egalitățile. Radicalele $\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$ astfel definite sunt funcțiuni uniforme de τ.

Din egalitățile precedente rezultă, pentru rădăcina a opta a discriminantului

$$\Delta=16\,(e_1-e_2)^2\,(e_1-e_3)^2\,(e_2-e_3)^2,$$

expresiunea

$$(3)\qquad \sqrt[8]{\Delta}=\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}=i\frac{\pi}{\omega_1}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_1}}\, q^{1/4}\, q_0^3.$$

220. Am definit modulele k, k' ca rădăcini pătrate ale expresiunilor

$$(4)\qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \qquad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

cu condițiunea ca partea reală a acestor rădăcini să fie pozitivă.

(§ 196). In virtutea acestei definiţiuni, luăm

$$(5)\qquad k=-\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}};$$

căci, precum am văzut mai sus, în cazul când ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale şi pozitive, radicalul $\sqrt{e_2-e_3}$ este negativ, iar celelalte două sunt pozitive. Substituind în locul radicalelor valorile lor (1), avem expresiunile

$$(6)\qquad k=4q^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^4,\quad k'=\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^4;$$

de unde, în virtutea aceleaş definiţiuni,

$$(7)\qquad \sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2,\quad \sqrt{k'}=\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^2.$$

Din a doua egalitate (1) rezultă, pentru cantitatea

$$\mathrm{K}=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},$$

valoarea

$$(8)\qquad \mathrm{K}=\frac{\pi}{2}q_0^2\,q_2^4;$$

de unde expresiunea

$$(9)\qquad \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}=q_0\,q_2^2.$$

Multiplicând egalitatea (3) cu σu (12) (§ 214) şi egalităţile (2) respectiv cu funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ date de egalităţile (23), (27), (25) (§ 217), obţinem expresiunile următoare ale celor patru funcţiuni σ

$$(10)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}(z-z^{-1})\,q^{1/4}q_0\prod_1^\infty(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}),\\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u=ie^{2\eta_1\omega_1 v^2}(z+z^{-1})\,q^{1/4}q_0\prod_1^\infty(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}),\\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}q_0\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}),\\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}q_0\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}). \end{cases}$$

221. Formulele (2) (3) (§ 219) şi formulele (10) (§ 220) au fost stabilite plecând dela două perioade primitive $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Este util a avea formule analoage, corespunzătoare unui sistem oarecare de perioade echivalente $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$.

Fie

$$\tilde{\omega}_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \quad \tilde{\omega}_3 = c\omega_1 + d\omega_3, \quad ad - bc = 1,$$

$$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3 = o. \tag{1}$$

Să punem

$$p\tilde{\omega}_1 = e_\lambda, \quad p\tilde{\omega}_2 = e_\mu, \quad p\tilde{\omega}_3 = e_\nu, \tag{2}$$

indicii λ, μ, ν primind, într'o ordine oarecare, valorile 1, 2, 3 determinate de coeficienții a, b, c, d, conform tabloului (9) (§ 187).

Este esențial de observat că coeficientul lui i în raportul $\frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1}$ are același semn ca în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, precum se recunoaște imediat.

Pentru a obține formulele corespunzătoare celor considerate, este de ajuns a înlocui în acele formule semiperioadele ω_1, ω_2, ω_3 prin semiperioadele transformate $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ și, în același timp, cantitățile construite cu ajutorul celor dintâi prin expresiuni construite în același mod cu ajutorul celor din urmă.

Așa dar, înlocuind ω_1, ω_2, ω_3 respectiv prin $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, vom înlocui η_1, η_2, η_3 prin transformatele corespunzătoare $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$, $\tilde{\eta}_3$, determinate de ecuațiunile

$$\tilde{\eta}_1 = a\eta_1 + b\eta_3, \quad \tilde{\eta}_3 = c\eta_1 + \eta d_3, \quad \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2 + \tilde{\eta}_3 = o\ ^1).$$

In același timp, vom înlocui e_1, e_2, e_3 prin e_λ, e_μ, e_ν și funcțiunile transformate

$$\sigma_1(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3), \quad \sigma_2(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3), \quad \sigma_3(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3),$$

le vom scrie

$$\sigma_\lambda(u|\omega_1,\omega_3), \quad \sigma_\mu(u|\omega_1,\omega_3), \quad \sigma_\nu(u|\omega_1,\omega_3),$$

sau, mai scurt,

$$\sigma_\lambda u, \quad \sigma_\mu u, \quad \sigma_\nu u,$$

subînțelegând perioadele inițiale.

Cantitățile

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad q = e^{i\pi\tau}, \tag{3}$$

se vor înlocui prin

$$\tilde{v} = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1}, \quad \tilde{q} = e^{i\pi\tilde{\tau}} \tag{4}$$

---

1) V. (§ 144).

Pentru a nu încărcà formulele cu prea multe accente, vom păstrà, în formulele generale, literile ρ, τ, q, fără accente; valorile lor însă vor fi cele exprimate prin formulele (4). In fine, produsele

$$(5)\qquad \begin{cases} q_0 = \prod_1^\infty (1-q^{2n}), & q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n}) \\ q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}), & q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-2}) \end{cases}$$

păstrează aceiaş formă, q având valoarea menţionată (4).

Aplicând cele zise mai sus, formulele corespunzătoare formulelor (2), (3) (§ 219) se vor scrie

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = 2i\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0\, q_1^2, \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = q_0\, q_2^2, \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = q_0\, q_3^2, \\ \frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}\sqrt{\frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = i\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0^3. \end{cases}$$

Deasemenea, formulele transformate ale formulelor (10) se vor scrie

$$(7)\qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\ \sigma u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\rho^2}(z-z^{-1})\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0 \prod_1^\infty (1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\rho^2}(z+z^{-1})\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0 \prod_1^\infty (1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\rho^2}\, q_0 \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\rho^2}\, q_0 \prod_1^\infty (1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n+1}z^{-2}). \end{cases}$$

In toate aceste formule, elementele ρ, z, τ şi q sunt definite de egalităţile

$$(8)\qquad \rho = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1},\ z = e^{i\pi\rho},\ \tau = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1},\ q = e^{i\pi\tau}.$$

Observare. Discriminantul Δ este un invariant relativ la orice transformare de perioade echivalente; nu se poate spune acelaş lucru despre radicalul $\sqrt[8]{\Delta}$, a cărui valoare transformată diferă de cea dintâiu printr'un factor ε, ($\varepsilon^8=1$), care depinde de perioadele transformate.

CAPITOLUL XVIII.

FUNCȚIUNILE $\vartheta(v)$ ale lui JACOBI.

Jacobi a introdus în Analiză o clasă de serii cari poartă numele de serii sau funcțiuni ϑ, funcțiuni simplu periodice; în locul acestor funcțiuni, Weierstrass a introdus funcțiunile σ.

222. *Seria* $\vartheta_1(v)$. Pentru a formă seria ce se reprezintă prin simbolul $\vartheta_1(v)$ și a găsi în acelaș timp relațiunea ce o leagă de funcțiunea σu, să plecăm dela expresiunea acestei funcțiuni sub formă de produs simplu (12) (§ 215).

$$(1)\quad \frac{\pi}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}} \sigma u = \frac{1}{q_0^2}\frac{z - z^{-1}}{i}\prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}),$$

$$v = \frac{u}{2\omega_1},\ z = e^{i\pi v},\ q = e^{i\pi\tau},\ q_0 = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}),$$

și să căutăm a transformă membrul al doilea într'o serie de puteri. Să punem

$$(2)\qquad \varphi(z) = (z - z^{-1}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}).$$

In virtutea ipotezei $|q| < 1$, produsele

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2),\ \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^{-2})$$

sunt absolut și uniform convergente, cel dintâiu pentru orice valoare finită a lui z, cel de al doilea în tot planul, exceptând punctul $z = 0$.

Funcțiunea $\varphi(z)$ este așadar uniformă în tot planul z, neavând alte singularități decât punctele $z = 0$, $z = \infty$, cari sunt puncte singulare esențiale; prin urmare ea se desvoltă în serie Laurent, convergentă pentru orice valoare finită z, exceptând valoarea $z = 0$.

Funcțiunea $\varphi(z)$, definită de egalitatea (2), satisface relațiunile

$$(3)\qquad \varphi(-z) = -\varphi(z),$$

$$(4)\qquad \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = -\varphi(z).$$

Din relațiunea (3) rezultă că desvoltarea acestei funcțiuni în serie Laurent conține z numai la puteri impare și este de forma

$$(5)\qquad \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^{2n+1};$$

din relațiunea (4) rezultă că termenii seriei, în cari exponenții lui

z sunt egali şi de semne contrarii, trebuie să fie egali şi de semne contrarii. De unde deducem, pentru $\varphi(z)$, forma

$$(6) \qquad \varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} A_n (z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}).$$

Determinarea coeficienţilor A_n. Să considerăm produsul

$$(7) \qquad \varphi_m(z) = (z - z^{-1}) \prod_{n=1}^{m} (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}),$$

a cărui limită, pentru $m = \infty$, este funcţiunea $\varphi(z)$. Putem scrie sub formă de sumă,

$$(8) \quad \varphi_m(z) = a_0 \left(z - z^{-1}\right) + a_1 \left(z^3 - z^{-3}\right) + \ldots + a_m \left(z^{2m+1} - z^{-(2m+1)}\right).$$

Coeficienţii a_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, variază împreună cu m şi avem $\lim_{m=\infty} a_k = A_k$. Căci: 1° oricare ar fi valoarea finită a lui z, exceptând $z = o$, există un număr întreg pozitiv μ astfel că pentru $m \geq \mu$ avem

$$|\varphi(z) - \varphi_m(z)| < \varepsilon,$$

$\varepsilon >$ o arbitrar de mic; 2° desvoltarea este unică.

Intre coeficienţii a_k există o formulă de recurenţă, care se deduce din egalitatea (6) în care înlocuim z prin qz. Obţinem astfel identitatea

$$\varphi_m(qz) = -\frac{1}{qz^2} \frac{1 - q^{2m+2} z^2}{1 - q^{2m} z^{-2}} \varphi_m(z).$$

sau

$$(9) \qquad (qz^2 - q^{2m+1})\, \varphi_m(qz) = (q^{2m+2} z^2 - 1)\, \varphi_m(z).$$

Să înlocuim $\varphi_m(z)$ prin expresiunea sa (7), precum şi $\varphi_m(qz)$ prin aceeaş expresiune în care scriem qz în loc de z şi să egalăm coeficienţii lui z^{2k+1} din ambele membre (9); obţinem egalitatea

$$a_{k-1} q^{2k} - a_k q^{2m+2k+2} = a_{k-1} q^{2m+2} - a_k;$$

de unde

$$(10) \qquad a_k = -\frac{q^{2k}(1 - q^{2m-2k+2})}{1 - q^{2m+2k+2}} a_{k-1}.$$

Dând lui k valorile 1, 2, 3,... k şi făcând produsul egalităţilor (10) aşà obţinute, găsim

$$(11) \quad a_k = (-1)^k q^{k(k+1)} \frac{(1 - q^{2m})(1 - q^{2m-2}) \ldots (1 - q^{2m-2k+2})}{(1 - q^{2m+4})(1 - q^{2m+6}) \ldots (1 - q^{2m+2k+2})} a_0$$

şi făcând $k = m$,

$$(12) \quad a_m = (-1)^m q^{m(m+1)} \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \ldots (1 - q^{2m})}{(1 - q^{2m+4})(1 - q^{2m+6}) \ldots (1 - q^{4m+2})} a_0.$$

De altă parte, egalitatea (7) ne dă direct valoarea coeficientului puterii celei mai înalte, z^{2m+1}, care este

$$(13) \qquad a_m = (-1)^m q^{m(m+1)}.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

Avem așà dar

$$(14) \qquad a_0 = \frac{(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\ldots(1-q^{4m+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})}.$$

Produsul $\prod_1^\infty (1-q^{2n})$ fiind absolut convergent, la un ε dat corespunde un număr întreg pozitiv μ, astfel că pentru $m \geqslant \mu$, avem inegalitatea

$$\left| \prod_{n=m+1}^{2m} (1-q^{2n+2}) - 1 \right| < \varepsilon;$$

de unde rezultă că numărătorul membrului al doilea tinde către 1, când m tinde către infinit, astfel că avem

$$(15) \qquad A_0 = \lim_{m=\infty} a_0 = \frac{1}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})} = \frac{1}{q_0}.$$

Deasemenea, făcând, în formula (11), $m = \infty$ și înlocuind $\lim a_0$ prin $\frac{1}{q_0}$, obținem, pentru orice valoare finită și întreagă k,

$$(16) \qquad A_k = \lim_{m=\infty} a_k = (-1)^k q^{k(k+1)} A_0 = \frac{(-1)^k}{q_0} q^{k(k+1)}.$$

Desvoltarea funcțiunii $\varphi(z)$, reprezintată prin egalitatea (5), este așà dar

$$(17) \quad \varphi(z) = \frac{1}{q_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} z^{2n+1} = \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{q_0} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1}$$

$$= \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{q_0} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi v}, \qquad z = e^{i\pi v}.$$

Se reprezintă prin $\vartheta_1(v)$ seria

$$(18) \qquad \vartheta_1(v) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi v}.$$

Grupând doi câte doi termenii cari corespund valorilor n și $-(n+1)$, egalitatea precedentă devine

$$(19) \qquad \vartheta_1(v) = 2 \sum_0^\infty (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi v.$$

Referindu-ne la produsul (2), avem, pentru $\vartheta_1(v)$, expresiunile următoare sub formă de produse:

$$(20)\quad \vartheta_1(v) = q_0\, q^{\frac{1}{4}}\, \frac{z-z^{-1}}{i} \prod_1^{\infty} (1-q^{2n}z^2)\,(1-q^{2n}z^{-2})$$

$$(21)\quad \vartheta_1(v) = 2\, q_0\, q^{\frac{1}{4}}\, sin\, \pi v \prod_1^{\infty} (1-2\,q^{2n}\, cos 2\pi v + q^{4n}).$$

Introducând funcţiunea $\vartheta_1(v)$ în formula (1), obţinem relaţiunea

$$(22)\quad \frac{\pi}{\omega_1}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}}\, \sigma u = q_0^{-3}\, q^{-\frac{1}{4}}\, \vartheta_1(v),$$

care leagă între dânsele funcţiunile σu şi $\vartheta_1(v)$.

223. Pe lângă funcţiunea $\vartheta_1(v)$, care corespunde funcţiunii σu, se consideră funcţiunile $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$ corespunzătoare funcţiunilor $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Vom deduce aceste funcţiuni din funcţiunea $\vartheta_1(v)$.

1°. *Funcţiunea* $\vartheta_2(v)$. Să înlocuim în formula (18) v prin $v + \frac{1}{2}$ şi să punem

$$(23)\quad \vartheta_2(v) = \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right);$$

vom aveà egalitatea

$$(24)\quad \vartheta_2(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)i\pi v},$$

sau

$$(25)\quad \vartheta_2(v) = 2\sum_{0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\, cos\,(2n+1)\,\pi v.$$

2°. *Funcţiunea* $\vartheta_3(v)$. Să înlocuim în egalitatea (18) v prin $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$, sau, ceeace este tot una, în (24) v prin $v+\frac{\tau}{2}$; obţinem

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)}\, e^{(2n+1)i\pi v}.$$

Punând în membrul din urmă $n-1$ în loc de n, avem

$$(26)\quad \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}\, e^{-i\pi v} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\, e^{2ni\pi v}.$$

Seria din membrul al doilea se reprezintă prin $\vartheta_3(v)$:

$$(27)\quad \vartheta_3(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\, e^{2ni\pi v},$$

sau

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2\sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos 2nv. \tag{28}$$

Intre funcțiunile $\vartheta_1(v)$ sau $\vartheta_2(v)$ și $\vartheta_3(v)$ avem așà dar relațiunile

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-iv}\, \vartheta_3(v). \tag{29}$$

3°. *Funcțiunea* $\vartheta_0(v)$. Să înlocuim în egalitatea (18) v prin $v + \frac{\tau}{2}$; avem

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 + n + \frac{1}{2}} e^{(2n+1)\, iv}$$

$$= -iq^{-\frac{1}{4}} \Sigma (-1)^n\, q^{(n+1)^2} e^{(2n+1)\, iv},$$

sau, scriind $n - 1$ în loc de n,

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-iv} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niv}. \tag{30}$$

Se reprezintă prin $\vartheta_0(v)$ seria din membrul al doilea:

$$\vartheta_0(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niv} \tag{31}$$

sau

$$\vartheta_0(v) = 1 + 2\sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nv. \tag{32}$$

Intre $\vartheta_1(v)$ și $\vartheta_0(v)$ avem așà dar relațiunea

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-iv} \vartheta_0(v). \tag{33}$$

224. Pentru a obține cele trei funcțiuni $\vartheta(v)$ sub formă de produse, vom face, în produsele (20) și (21) ale funcțiunii $\vartheta_1(v)$, substituțiunile corespunzătoare considerate mai sus.

1°. $\vartheta_2(v)$. Mărind v cu $\frac{1}{2}$, z se înlocuiește prin iz; obținem expresiunile

$$\vartheta_2(v) = q_0 q^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_1^{\infty} (1 + q^{2n} z^2)(1 + q^{2n} z^{-2}),$$

$$= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos v \prod_1^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2v + q^{4n}). \tag{34}$$

2^0. $\vartheta_3(v)$. Să înlocuim în prima egalitate (34) v prin $v+\frac{\tau}{2}$, ceeace revine a înlocui z prin $q^{\frac{1}{2}}z$; obținem

$$\vartheta_2(v+\frac{\tau}{2})=q_0q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

Prin urmare, în virtutea relațiunii (29) dintre $\vartheta_2(v+\frac{\tau}{2})$ și $\vartheta_3(v)$:

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v)&=q_0\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})\\&=q_0\prod_1^\infty(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).\end{aligned}\tag{35}$$

3^0. $\vartheta_0(v)$. Inlocuind în egalitatea (20) v prin $v+\frac{\tau}{2}$, sau z prin $q^{\frac{1}{2}}z$, obținem

$$\vartheta_1(v+\frac{\tau}{2})=iq_0q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}).$$

De unde, în virtutea relațiunii (33),

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v)&=q_0\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})\\&=q_0\prod_1^\infty(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).\end{aligned}\tag{36}$$

225. Să reunim, de o parte, seriile, de altă parte, produsele funcțiunilor ϑ:

$$\left\{\begin{aligned}\vartheta_1(v)&=\frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^nq^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)i\pi v}\\&=2\sum_0^\infty(-1)^nq^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v,\\\vartheta_2(v)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)i\pi v}\\&=2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi v,\\\vartheta_3(v)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{n^2}e^{2ni\pi v}\\&=1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos 2n\pi v,\\\vartheta_0(v)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^nq^{n^2}e^{2ni\pi v}\\&=1+2\sum_1^\infty(-1)q^{n^2}\cos 2n\pi v.\end{aligned}\right.\tag{1}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\ \prod_1^\infty(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}), \\ \vartheta_2(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}), \\ \vartheta_3(v)=q_0\prod_1^\infty(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}), \\ \vartheta_0(v)=q_0\ \prod_1^\infty(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}). \end{cases}$$

226. Funcțiunile $\vartheta(v)$ sunt funcțiuni întregi; $\vartheta_1(v)$ este funcțiune impară, celelalte trei sunt funcțiuni pare. Făcând în formulele precedente $v=o$, avem

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_1(o)=o, \\ \vartheta_2(o)=2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2}=2q^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2=2q^{\frac{1}{4}}q_0q_1^2, \\ \vartheta_3(o)=1+2\sum_1^\infty q^{n^2}=\prod_1^\infty(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2=q_0q_2^2, \\ \vartheta_0(o)=1+2\sum_1^\infty(-1)^nq^{n^2}=\prod_1^\infty(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2=q_0q_3^2. \end{cases}$$

Din egalitățile precedente rezultă

$$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}q^3{}_0(q_1q_2q_3)^2,$$

sau, în virtutea relațiunii (30) (§ 218),

$$(4)\qquad \vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}q_0^3.$$

Derivând funcțiunea $\vartheta_1(v)$ exprimată sub formă de produs (2) și făcând $v=0$, obținem egalitatea

$$(5)\qquad \vartheta'_1(0)=2\pi q^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty(1-q^{2n})^3=2\pi q^{\frac{1}{4}}q_0^3.$$

Avem așà dar identitatea

$$(6)\qquad \vartheta'_1(0)=\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0).$$

227. *Observare.* Este interesant de observat că cele patru serii $\vartheta(v)$ sunt cuprinse în formula

$$\vartheta_{gh}(v)=(-i)^{gh}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{hn}q^{\left(n+\frac{g}{2}\right)^2}e^{2i\pi(n+\frac{g}{2})v},$$

în care indicii g, h primesc respectiv valorile (1, 1), (1, 0), (0, 0), (0, 1), astfel că avem

$$\vartheta_{1,1}(v)=\vartheta_1(v),\ \vartheta_{1,0}(v)=\vartheta_2(v),\ \vartheta_{0,0}(v)=\vartheta_3(v),\ \vartheta_{0,1}(v)=\vartheta_0(v).$$

228. *Mărirea argumentului v respectiv cu 1 și τ.* Din tabloul (1) rezultă relațiunile următoare:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\vartheta_1(v+1)=-\vartheta_1(v),\ \vartheta_2(v+1)=-\vartheta_2(v),\\ &\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v),\ \vartheta_0(v+1)=\vartheta_0(v). \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_1(v),\\ \vartheta_2(v+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_3(v+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_0(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_0(v). \end{cases}$$

De unde

$$(3)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+1+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_1(v),\\ \vartheta_2(v+1+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_3(v+1+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_0(v+1+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_0(v). \end{cases}$$

229. *Mărirea argumentului respectiv cu $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$.* Din același tablou (1) deducem formulele următoare:

$$(4)\qquad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v),\\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0(v),\\ \vartheta_0\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v). \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_0(v),\\ \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v). \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_3(v), \\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=-iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_0(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v), \\ \vartheta_0\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_2(v). \end{cases}$$

230. *Ecuațiune diferențială.* Cele patru funcțiuni $\vartheta(v,\tau)$ privite ca funcțiuni de variabilele v și τ satisfac una și aceeași ecuațiune cu derivate parțiale. In adevăr, reprezintând prin $\vartheta(v,\tau)$ una oarecare din ele, se verifică ecuațiunea diferențială

$$(7)\quad \frac{\delta^2\vartheta(v,\tau)}{\delta v^2}=4i\pi\frac{\delta\vartheta(v,\tau)}{\delta\tau},$$

231. *Expresiunea radicalelor*

$$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta},\ \sqrt[8]{\Delta},\ \sqrt{k},\ \sqrt{k'},\ \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

In virtutea formulelor (3) (§ 225), egalitățile (2) (§ 219) se pot scrie

$$(7)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}=i\vartheta_2(0)=2i\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots\right), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}=\vartheta_3(0)=1+2q+2q^4+2q^9+\ldots \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}=\vartheta_0(0)=1-2q+2q^4-2q^9+\ldots \end{cases}$$

de unde, în virtutea egalităților (6) (§ 189),

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}=i\sqrt{i}\,\vartheta_2(0), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1}=\frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}=\frac{1}{\sqrt{i}}\vartheta_3(0),\ \sqrt{i}=e^{\frac{i\pi}{4}} \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}=\sqrt{i}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}=\sqrt{i}\,\vartheta_0(0). \end{cases}$$

Deasemenea, în virtutea formulei (5) (§ 225), egalitatea (3) (§ 219) se scrie

$$(9)\quad \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}=\frac{i}{2\omega_1}\vartheta_1'(0)=\frac{i\pi}{\omega_1}q^{\frac{1}{4}}(1-3q^2+5q^{2\cdot3}-7q^{3\cdot4}+\ldots).$$

Expresiunile radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, date de egalităţile (7), şi (9) (§ 220) devin, în virtutea egalităţilor (7), şi ţinând seamă de expresiunile (3) (§ 226,)

$$(10) \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$(11) \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

Putem obţine, pentru membrul întâi al egalităţii precedente, o serie mai convergentă, adunând a doua şi a treia din egalităţile (7):

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{\vartheta_3(0) + \vartheta_0(0)}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots);$$

de unde

$$(13) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{2}{1 + \sqrt{k'}} (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots).$$

Din egalitatea (11) rezultă expresiunea

$$(14) \qquad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3(0) - \vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0) + \vartheta_0(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \ldots)}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots}.$$

Membrul din urmă al acestei egalităţi nu diferă de acela al egalităţii (10) decât prin înlocuirea lui q prin q^4; ceeace corespunde la înlocuirea lui τ prin 4τ. Reprezintând membrul întâi prin l şi punând τ în evidenţă, avem egalitatea

$$(15) \qquad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \sqrt{k(4\tau)}.$$

Din egalităţile (10) şi (11) ridicate la pătrat şi ţinând seamă de egalitatea $k^2 + k'^2 = 1$, rezultă identitatea

$$(16) \qquad \vartheta_0^4(0) + \vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0).$$

232. *Expresiunea cantităţilor e_α, a invarianţilor g_2, g_3 şi a invariantului absolut J.*

Din egalităţile (7) rezultă

$$(17) \quad e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_0^4(0), \; e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_2^4(0), \; e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_3^4(0)$$

De unde, în virtutea relațiunii $e_1 + e_2 + e_3 = o$,

$$(18)\quad \begin{cases} 3e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_0'(0) + \vartheta_3'(0)], \\ 3e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_2^4(0) - \vartheta^4{}_0(0)], \\ 3e_3 = -\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]. \end{cases}$$

Adunând cele dintâi două egalități (17) și scăzând a treia, obținem relațiunea (16) de mai sus.

Pentru a obține expresiunea invariantului $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$, să considerăm identitatea

$$(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2 = 2(e_1 + e_2 + e_3)^2 - 6(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1);$$

de unde deducem

$$(19)\quad g_2 = \frac{1}{2^3.3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 [\vartheta_0^8(0) + \vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0)].$$

Expresiunea invariantului $g_3 = 4e_1e_2e_3$ este

$$(20)\quad g_3 = \frac{1}{2^4.3^3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4).$$

Să considerăm invariantul absolut

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta},$$

care, fiind omogen și de gradul zero în raport cu ω_1 și ω_3, depinde numai de raportul $\tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$. Inlocuind g_2 prin valoarea sa (19) și descriminantul

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$$

prin valoarea sa dedusă din formulele (7), adică

$$(21)\quad \Delta = 16\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 (\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^8,$$

obținem expresiunea

$$(22)\quad J(\tau) = \frac{1}{54}\,\frac{(\vartheta_0^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)^3}{(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^8}.$$

233. *Expresiunea funcțiunilor σ prin funcțiunile ϑ.* Intre funcțiunea σu și funcțiunea $\vartheta(v)$ avem (22) (§ 222), relațiunea

$$(1)\quad \frac{\pi}{\omega_1} q^{\frac{1}{4}} q_0^3 e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u = \vartheta_1(v) \qquad (u = 2\omega_1 v).$$

Divizând ambele membre cu v și făcând $v = 0$, obținem egalitatea

$$2\pi q^{\frac{1}{4}} q_0^3 = \vartheta_1'(0), \tag{2}$$

care reproduce relațiunea (5) (§ 226). Relațiunea (1) se poate dar scrie

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}. \tag{3}$$

Să dăm lui u succesiv valorile ω_1, $-\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$, ω_3, cărora corespund valorile $v = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}$; obținem egalitățile

$$\left\{\begin{aligned} e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}} \sigma\omega_1 &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2})}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}} \sigma\omega_2 &= -2\omega_1 \frac{\vartheta_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = -2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}} \sigma\omega_3 &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(\frac{\tau}{2})}{\vartheta'_1(0)} = 2i\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_1'(0)}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

In virtutea formulelor

$$\eta_1 \frac{\omega_2^2}{\omega_1} = \eta_2\omega_2 + \frac{i\pi}{2}(1+\tau), \qquad \eta_1 \frac{\omega_3^2}{\omega_1} = \eta_3\omega_3 + \frac{i\pi\tau}{2} \text{ (§ 216)},$$

egalitățile precedente devin

$$\left\{\begin{aligned} e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}} \sigma\omega_1 &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{2}} \sigma\omega_2 &= -2\omega_1 \sqrt{i}\, \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_3\omega_3}{2}} \sigma\omega_3 &= 2i\omega_1 \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_1'(0)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Pentru a obține relațiunile dintre funcțiunile $\sigma_a u$ și funcțiunile $\vartheta(v)$, să înlocuim în formula (3) u succesiv prin $u + \omega_1$, $u - \omega_2$, $u + \omega_3$, prin urmare v respectiv prin $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{1+\tau}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$; rezultă

$$\left\{\begin{aligned} e^{-\frac{\eta_1(u+\omega_1)^2}{2\omega_1}} \sigma(u+\omega_1) &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v+\frac{1}{2})}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1(u-\omega_2)^2}{2\omega_1}} \sigma(u-\omega_2) &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_1\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1(u+\omega_3)^2}{2\omega_1}} \sigma(u+\omega_3) &= 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v+\frac{\tau}{2})}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1'(0)}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Să facem în aceste egalități $u = v = 0$ și să dividem fiecare din ele prin valoarea care îi corespunde; obținem

$$(7)\quad \begin{cases} e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{-\eta_1 u} \dfrac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1} = \dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{+\frac{\eta_1\omega_2}{\omega_1}u} \dfrac{\sigma(\omega_2-u)}{\sigma\omega_2} = e^{-i\pi v} \dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{-\frac{\eta_1\omega_3}{\omega_1}u} \dfrac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma\omega_3} = e^{-i\pi v} \dfrac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}. \end{cases}$$

Însă, în virtutea formulelor lui Legendre

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = -\frac{i\pi}{2}, \quad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2},$$

avem

$$e^{\frac{\eta_1\omega_2}{\omega_1}u} = e^{\eta_2 u} e^{-i\pi v}, \quad e^{-\frac{\eta_1\omega_3}{\omega_1}u} = e^{-\eta_3 u} e^{-i\pi v}.$$

De unde rezultă *expresiunile funcțiunilor σ prin funcțiunile ϑ*:

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma u = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}, \\ \sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}, \\ \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, \\ \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \dfrac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}. \end{cases}$$

Expresiunile precedente se pot pune sub altă formă, înlocuind numitorii membrelor de al doilea prin valorile lor date de egalitățile (9) și (7) (§ 231). Obținem egalitățile

$$(9)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega_1}{\pi}} \sqrt[8]{\Delta}\, \sigma u = ie^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_1(v), \\ \sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_2-e_3}\, \sigma_1 u = ie^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_2(v), \\ \sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1-e_3}\, \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_3(v), \quad \left(v = \dfrac{u}{2\omega_1}\right) \\ \sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1-e_2}\, \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_0(v). \end{cases}$$

Fiecărei funcțiuni σ corespunde o funcțiune ϑ al cărei indice întrece cu o unitate indicele corespunzător al funcțiunii σ; indicele 4 se înlocuește prin indicele 0.

234. Dacă în locul perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$ introducem un sistem de perioade echivalente $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$, formulele [(7), (9), § 231 și formulele (9) din paragraful precedent se vor înlocui respectiv prin cele două tablouri de formule următoare:

$$(10)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = i\vartheta_2(0|\tau_1) = 2i\,q^{\frac{1}{4}}\,q_0\,q_1^2, \\ \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = \vartheta_3(0\mid\tau_1) = q_0\,q_2^2, \\ \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = \vartheta_0(0\mid\tau_1) = q_0\,q_3^2, \\ \sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = \dfrac{i}{2\tilde{\omega}_1}\vartheta_1'(0\mid\tau_1) = i\dfrac{\pi}{\tilde{\omega}_1}q_1^4\,q_0^3. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}\vartheta_1(\nu_1\mid\tau_1), \\ \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}\vartheta_2(\nu_1\mid\tau_1), \\ \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}\vartheta_3(\nu_1\mid\tau_1), \\ \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}\vartheta_0(\nu_1\mid\tau_1). \end{cases}$$

$$\nu_1 = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1},\quad \tau_1 = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1},\quad q = e^{i\pi\tau_1},\quad q_0 = \prod_1^\infty(1-q^{2n}),$$

$$q_1 = \prod_1^\infty(1+q^{2n}),\quad q_2 = \prod_1^\infty(1+q^{2n-1}),\quad q_3 = \prod_1^\infty(1-q^{2n-1}).$$

Indicii λ, μ, ν sunt numerele 1, 2, 3 în ordinea determinată de tabloul următor în care numerele a, b, c, d sunt date (mod. 2):

(12)

a	b	c	d	λ	μ	ν
1	0	0	1	1	2	3
1	0	1	1	1	3	2
1	1	0	1	2	1	3
1	1	1	0	2	3	1
0	1	1	0	3	2	1
0	1	1	1	3	1	2

Funcțiunile $\sigma_\lambda u$, $\sigma_\mu u$, $\sigma_\nu u$ se referă la perioadele inițiale $(2\omega_1, 2\omega_3)$.

235. *Expresiunea produsului* $\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1$.

Desvoltarea în serie a funcțiunii $\vartheta_1(v)$ după puterile lui v este

$$\vartheta_1(v) = v\vartheta'_1(0) + \frac{v^3}{6}\vartheta_1'''(0) + \ldots,$$

iar funcțiunea σu, desvoltată după puterile lui u, are forma

$$\sigma u = u + a_1 u^5 + a_2 u^7 + \ldots$$

Dacă dar desvoltăm, după puterile lui v, ambele membre ale primei ecuațiuni (8), în care înlocuim $\eta_1 \omega_1$ prin $\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1$ și identificăm ambele membre, obținem egalitatea

$$(13) \qquad \tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 = -\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta'_1(0)} = \frac{\pi^2}{12}\frac{1-3^3q^2+5^3q^6-\ldots}{1-3\,q^2+5\,q^6-\ldots}$$

Această egalitate ca și egalitatea (14) (§ 215) determină cantitatea $\tilde{\eta}_1$, fiind dată $2\tilde{\omega}_1$ și $q = e^{i\pi\tau}$

236. *Zerurile funcțiunilor* $\vartheta(v)$.

Zerurile celor patru funcțiuni $\vartheta(v \mid \tau)$ sunt, în virtutea egalităților (8) sau (9), date de valorile $v = \frac{u}{2\omega_1}$ corespunzătoare zerurilor funcțiunilor σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Aceste zeruri sunt (7) (§ 183) date de tabloul

(14)

funcțiunea	*zeruri*
$\vartheta_1(v)$	$m + n\tau$
$\vartheta_2(v)$	$m+\frac{1}{2}+n\tau$
$\vartheta_3(v)$	$m+\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau$
$\vartheta_0(v)$	$m+(n+\frac{1}{2})\tau$

Zerurile funcțiunilor σ fiind de ordinul întâiu, rezultă că zerurile funcțiunilor $\vartheta(v)$ sunt de același ordin [1]).

237. *Expresiunea funcțiunilor* ζu, *pu prin funcțiunile* $\vartheta(v)$.

Luând, în raport cu v, derivata logaritmică a primei egalități (8) (§ 233), obținem expresiunea

$$(15) \qquad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\,\eta_1\,\omega_1\,v + \frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)}\right].$$

De unde, derivând ambele membre în raport cu v,

$$(16) \qquad pu = -\frac{1}{4\omega_1^2}\left\{4\eta_1\,\omega_1 + \frac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_1''(v) - \vartheta'^2_1(v)}{\vartheta_1^2(v)}\right\}.$$

Se obține o formulă mai simplă, dacă considerăm egalitatea

[1]) Zerurile funcțiunilor $\vartheta(v)$ rezultă și din expresiunile acestor funcțiuni sub formă de produse ((2) (§ 225).

$$(17)\qquad \sqrt{pu-e_a}=\frac{\sigma_a u}{\sigma u}=\frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\vartheta'_1(0)\,\vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_{a+1}(0)\,\vartheta_1(v)},$$

cuprinsă în aceleaşi formule (8); de unde

$$(18)\qquad pu=e_a+\frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{\vartheta'_1(0)\vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_{a+1}(0)\,\vartheta_1(v)}\right]^2,\ (a=1,2,3),\ \vartheta_4=\vartheta_0.$$

238. *Expresiunea funcţiunilor snv, cnv, dnv.*

Formulele (3) (§ 194) cari definesc funcţiunile *snv, cnv, dnv* se pot scrie astfel

$$(19)\qquad \begin{cases} snv=\sqrt{e_1-e_3}\,\dfrac{\sigma\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}, \\ cnv=\dfrac{\sigma_1\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}, \\ dnv=\dfrac{\sigma_2\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}. \end{cases}$$

Inlocuind funcţiunile σ prin valorile lor (8) (§ 233) şi ţinând seamă de relaţiunea $\omega_1\sqrt{e_1-e_3}=K$, obţinem egalităţile

$$(20)\qquad \begin{cases} snv=2K\,\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta'_1(0)}\,\dfrac{\vartheta_1\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)}, \\ cnv=\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\,\dfrac{\vartheta_2\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)}, \\ dnv=\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\,\dfrac{\vartheta_3\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)}. \end{cases}$$

sau, în virtutea egalităților (6) (§ 226) și (10), (11), (12) (§ 231),

$$(21)\qquad \begin{cases} sn v = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{\vartheta_1\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)} \\ cn v = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \dfrac{\vartheta_2\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)} \\ dn v = \sqrt{k'} \dfrac{\vartheta_3\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)} \end{cases}$$

239. *Transformarea lineară a funcțiunilor* $\vartheta(v \mid \tau)$.

Pentru a obține relațiunile dintre funcțiunile $\vartheta(v \mid \tau)$, corespunzătoare perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$, și funcțiunile $\vartheta\left(\bar{v} \mid \bar{\tau}\right)$, corespunzătoare perioadelor echivalente $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$, ne putem servi de formulele generale (11) (§ 234), înlocuind, în primele membre, elementele transformate prin valorile lor determinate de formulele (10), conform tabloului (12), și eliminând, după aceea, funcțiunile σ între ecuațiunile astfel obținute și ecuațiunile (9) (§ 233) corespunzătoare sistemului inițial $(2\omega_1, 2\omega_3)$.

Este deajuns a considerà substituțiunile fundamentale

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cu ajutorul cărora se poate exprimà orice substituțiune lineară (§ 125).

I. Substituțiunii S

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1, \quad \tilde{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_3$$

corespund valorile

$$\tilde{e}_1 = e_1, \quad \tilde{e}_2 = e_3, \quad \tilde{e}_3 = e_2;$$

prin urmare

$$\lambda = 1, \quad \mu = 3, \quad \nu = 2.$$

Vom aveà dar

$$e_\lambda = e_1, \quad e_\mu = e_3, \quad e_\nu = e_2$$

$$\bar{v} = \frac{u}{2\omega_1} = v, \quad \bar{\tau} = \frac{\omega_1 + \omega_3}{\omega_1} = \tau + 1, \quad \tilde{\eta}_1 = \eta_1.$$

Făcând aceste substituțiuni în egalitățile (11) (§ 234) și ținând seamă de egalitatea

$$\sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}, \quad (\S\ 231),$$

de unde rezultă, pentru valoarea corespunzătoare a radicalului $\sqrt[8]{\Delta}$,

$$\left(\sqrt[8]{\Delta}\right)=\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\,\sqrt[8]{\Delta},$$

obținem egalitățile

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{i}\,\sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\vartheta_1(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt{i}\,\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\;\sigma_1 u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\vartheta_2(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\;\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\vartheta_3(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\;\sigma_2 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\vartheta_0(\nu\mid\tau+1). \end{cases}$$

Comparând aceste egalități cu egalitățile (9) (§ 231), deducem formulele de transformare:

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_1(\nu\mid\tau+1)=\sqrt{i}\;\vartheta_1(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_2(\nu\mid\tau+1)=\sqrt{i}\;\vartheta_2(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_3(\nu\mid\tau+1)=\quad\vartheta_0(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_0(\nu\mid\tau+1)=\quad\vartheta_3(\nu\mid\tau). \end{cases}$$

II. Să considerăm acum substituțiunea T

$$\tilde{\omega}_1=\omega_3,\quad \tilde{\omega}_3=-\omega_1,$$

căreia corespund valorile

$$\bar{e}_1=e_3,\quad \bar{e}_2=e_2,\quad \bar{e}_3=e_1;$$

prin urmare

$$\lambda=3,\quad \mu=2,\quad \nu=1.$$

Elementele transfornate sunt

$$(3)\qquad \tilde{\eta}_1=\eta_3,\ \tilde{\eta}_3=-\eta_1;\quad \tau_1=-\frac{\omega_1}{\omega_3}=-\frac{1}{\tau},$$

$$\nu_1=\frac{u}{2\omega_3}=\frac{\omega_1}{\omega_3}\nu=\frac{\nu}{\tau},\quad e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}=e^{\frac{2\eta_3\omega_1^2\nu^2}{\omega_3}}.$$

Insă, în virtutea formulei

$$\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3=-\frac{i\pi}{2},$$

rezultă

$$2\eta_3\frac{\omega_1^2}{\omega_3}=2\eta_1\omega_1-\frac{i\pi}{\tau};$$

prin urmare

$$(4)\qquad e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 v_1^2} = e^{2\eta_1\omega_1 v^2 - \frac{i\pi}{\tau}v^2}.$$

Ducând aceste valori în egalitățile (11) (§ 234) și ținând seamă de egalitățile (8) (§ 231), obținem

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{\omega_3}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u = ie^{2\eta_1\omega_1 v^2 - \frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_1\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = ie^{2\eta_1\omega_1 v^2 - \frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_2\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2 - \frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_3\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2 - \frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_0\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right). \end{cases}$$

Comparând aceste egalități cu egalitățile (9) (§ 233), deducem formulele de transformare:

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right) = \dfrac{1}{i}\sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_1(v|\tau), \\ \vartheta_2\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_0(v|\tau), \\ \vartheta_3\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_3(v|\tau), \\ \vartheta_0\left(\dfrac{v}{\tau}\middle| -\dfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_2(v|\tau). \end{cases}$$

Semnul radicalului $\sqrt{-i\tau}$ este determinat de condițiunea ca partea sa reală să fie pozitivă, căci semnul acestui radical nu se schimbă fără ca partea reală a lui $(-i\tau)$ să-și schimbe semnul; prin urmare partea reală a lui $\sqrt{-i\tau}$ conservă totdeauna același semn. Insă, pentru $\tau=i$ și $v=o$, avem $\vartheta_3(0|i)=\sqrt{1}\,\vartheta_3(0|i)$; de unde $\sqrt{1}=+1$.

240 Făcând $u=v=0$ în formulele (5), obținem expresiunile

$$(7)\quad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \vartheta_2\left(0\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 2\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots\right),$$

$$(8)\quad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_3\left(0\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots, \left(q=e^{\frac{i\pi}{\tau}}\right)$$

$$(9)\quad i\sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = \vartheta_0\left(0\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 1-2q+2q^4-2q^9+\ldots$$

Adunând egalitățile (8) și (9), avem

$$(10) \qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}} = \frac{\vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) + \vartheta_0\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right)}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + i\sqrt[4]{e_2-e_3}}.$$

Inlocuind în egalitățile (8) și (10) $\omega_3\sqrt[4]{e_1-e_3}$ prin iK' (§ 196), obținem expresiunile

$$(11) \qquad \sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots$$

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k}}\,(1+2q^4+2q^{16}+\ldots),$$

a căror formă este aceeaș ca a expresiunilor (12) și (13) (§ 231), din cari ele se pot deduce înlocuind τ, k', K respectiv prin $-\frac{1}{\tau}$, k, K'.

241. Formulele de transformare ale funcțiunilor $\vartheta(v \mid \tau)$, considerate mai sus, se pot obține fără a face uz de formulele generale (11) (§ 234) cari presupun, pentru radicalele $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}$, un semn luat după voie, de care relațiunile dintre funcțiunile ϑ sunt independente.

1°. Să considerăm substituțiunea S, care constă în transformarea

$$\tau' = \tau + 1,$$

căreia corespund valorile

$$q' = e^{i\pi(\tau+1)} = -q, \quad q'^{\frac{1}{4}} = \sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}} \quad \left(\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}\right).$$

Substituind aceste valori în seriile cari definesc funcțiunile $\vartheta(v)$ (1) (§ 225), obținem imediat relațiunile (2) (§ 239).

2°. Cazul substituțiunii T este mai puțin simplu; căci, în acest caz, relațiunea dintre cantitățile

$$q' = e^{-\frac{i\pi}{\tau}} \text{ și } q = e^{i\pi\tau}$$

nu este algebrică. Substituțiunea T permutând între ele cantitățile e_1 și e_3 și lăsând e_2 neschimbat, lasă funcțiunea $\sigma_2 u$ neschimbată și permută între ele funcțiunile $\sigma_1 u$ și $\sigma_3 u$. Pentru transformarea radicalelor, observăm că prin permutarea cantităților e_1 și e_3, se permută între ele pătratele $(e_2 - e_3)^2$, $(e_1 - e_2)^2$, iar pătratul $(e_1 - e_3)^2$

se reproduce; de unde rezultă că rădăcinile de ordinul al optelea ale acestor pătrate, adică radicalele

$$\sqrt[4]{e_2-e_3}\quad \sqrt[4]{e_1-e_3},\quad \sqrt[4]{e_1-e_2}$$

sunt determinate abstracțiune făcând de un factor, rădăcina a opta a unității. Transformatele acestor radicale, precum și a radicalului $\sqrt[8]{\Delta}$, se pot dar scrie

$$(1)\qquad \begin{aligned} \left(\sqrt[4]{e_2-e_3}\right)&=\varepsilon_1\sqrt[4]{e_1-e_2}, \quad \left(\sqrt[4]{e_3-e_1}\right)=\varepsilon_2\sqrt[4]{e_1-e_3}\\ \left(\sqrt[4]{e_1-e_2}\right)&=\varepsilon_3\sqrt[4]{e_2-e_3}, \quad \left(\sqrt[8]{\Delta}\right)=\varepsilon\sqrt[8]{\Delta}, \end{aligned}$$

numerele ε, ε_1, ε_2, ε_3 fiind rădăcini convenabile ale ecuațiunii $\varepsilon^8=1$, între cari există relațiunea $\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, în virtutea definițiunii radicalului $\sqrt[8]{\Delta}$ (3, § 219). De unde rezultă egalitățile

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)&=\varepsilon\sqrt{\tau}\,e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}}\vartheta_1(v|\tau),\\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)&=\varepsilon_1\sqrt{\tau}\,e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}}\vartheta_0(v|\tau),\\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)&=\varepsilon_2\sqrt{\tau}\,e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}}\vartheta_3(v|\tau),\\ \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)&=\varepsilon_3\sqrt{\tau}\,e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}}\vartheta_2(v|\tau). \end{aligned}\right.$$

Aceste egalități subsistă oricare ar fi valoarea lui τ cu condițiunea ca partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ să fie pozitivă [1]). Făcând $v=0$ și $\tau=i$, cele trei din urmă egalități devin

$$(3)\qquad \begin{aligned} \vartheta_2(0|i)&=\varepsilon_1\sqrt{i}\,\vartheta_0(0|i),\\ \vartheta_3(0|i)&=\varepsilon_2\sqrt{i}\,\vartheta_3(0|i),\\ \vartheta_0(0|i)&=\varepsilon_3\sqrt{i}\,\vartheta_2(0|i). \end{aligned}$$

In acest caz, avem valorile

$$q=e^{-\pi},\quad q^{\frac{1}{4}}=e^{-\frac{\pi}{4}},$$

în virtutea cărora formulele (3) (§ 226) dau, pentru cantitățile

[1]) Această condițiune este necesară pentru ca $|q|<1$ și prin urmare pentru ca seriile $\vartheta(v|\tau)$ să fie convergente.

$\vartheta_0(0 \mid i)$, $\vartheta_2(0 \mid i)$, $\vartheta_3(0 \mid i)$, valori reale și pozitive; de unde rezultă valorile necesare

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{i}} \tag{4}$$

și prin urmare

$$\varepsilon = \frac{1}{i\sqrt{i}}. \tag{5}$$

Ducând aceste valori în formulele (2), obținem formulele de transformare (6) (§ 239).

242. ***Transformarea funcțiunilor*** $sn\varphi$, $cn\varphi$, $dn\varphi$ ***prin substituțiuni lineare de perioade.*** Pe când funcțiunea eliptică $p(u; g_2, g_3)$ rămâne neschimbată când înlocuim perioadele inițiale prin perioade echivalente, coeficienții g_2 și g_3 fiind invarianți corespunzători acestor substituțiuni, nu este tot așa cu funcțiunile $sn(\varphi, k)$, $cn(\varphi, k)$, $dn(\varphi, k)$; căci, printr'o transformare lineară a perioadelor, modulul k, definit de ecuațiunea

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

primește, în genere șease valori diferite [1]). Vom considerà substituțiunile S și T.

I. Substituțiunea

$$\text{S)} \qquad \tilde{\omega}_1 = \omega_1, \quad \tilde{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_3$$

transformă expresiunile

$$\varphi = \sqrt{e_1 - e_3}\, u, \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$$

în cele următoare

$$\bar{\varphi} = \sqrt{e_1 - e_2}\, u = k'\varphi, \quad \bar{k}^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = -\frac{k^2}{k'^2};$$

de unde rezultă funcțiunile transformate:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} sn\left(k'\varphi, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = \sqrt{e_1 - e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} = k'\,\dfrac{sn(\varphi, k)}{dn(\varphi, k)}, \\ cn\left(k'\varphi, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{cn(\varphi, k)}{dn(\varphi, k)}, \\ dn\left(k'\varphi, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{1}{dn(\varphi, k)} \end{cases}$$

---

[1]) Prin definițiune, la o valoare a lui k^2 corespunde o valoare unică pentru k (§ 196, 22).

Sau, înlocuind $k'v$ prin v, avem

$$(2)\qquad \begin{cases} sn\left(v,-\dfrac{k^2}{k'^2}\right)=k'\dfrac{sn\left(\dfrac{v}{k'},k\right)}{dn\left(\dfrac{v}{k'},k\right)}, \\ cn\left(v,-\dfrac{k^2}{k'^2}\right)=\dfrac{cn\left(\dfrac{v}{k'},k\right)}{dn\left(\dfrac{v}{k'},k\right)}, \\ dn\left(v,-\dfrac{k^2}{k'^2}\right)=\dfrac{1}{dn\left(\dfrac{v}{k'},k\right)}. \end{cases}$$

II. Substituțiunea

$$T)\qquad \tilde{\omega}_1=\omega_3,\quad \tilde{\omega}_3=-\omega_1$$

ne dă valorile transformate

$$\overline{v}=\sqrt{e_3-e_1}\;u=-i\sqrt{e_1-e_3}\;u=-iv,\quad \overline{k^2}=\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}=k'^2;$$

de unde rezultă

$$(3)\qquad \begin{cases} sn\,(iv,k')=i\,\dfrac{sn\,(v,k)}{cn\,(v,k)}, \\ cn\,(iv,k')=\dfrac{1}{cn\,(v,k)}, \\ dn\,(iv,k')=\dfrac{dn\,(v,k)}{cn\,(v,k)}. \end{cases}$$

Sau înlocuind, iv prin v, avem expresiunile transformate ale celor trei funcțiuni, când înlocuim modulul k prin modulul complementar k':

$$(4)\qquad \begin{cases} sn\,(v,k')=-i\,\dfrac{sn\,(iv,k)}{cn\,(iv,k)}, \\ cn\,(v,k')=\dfrac{1}{cn\,(iv,k)}, \\ dn\,(v,k')=\dfrac{dn\,(iv,k)}{cn\,(iv,k)}. \end{cases}$$

Permutând între ele modulele k și k', avem formulele

$$(5)\quad \begin{cases} sn(\varphi, k) = -i\,\dfrac{sn(i\varphi, k')}{cn(i\varphi, k')}, \\ cn(\varphi, k) = \dfrac{1}{cn(i\varphi, k')}, \\ dn(\varphi, k) = \dfrac{dn(i\varphi, k')}{cn(i\varphi, k')}. \end{cases}$$

Înlocuind în aceste formule φ prin $i\varphi$, avem

$$(6)\quad \begin{cases} sn(i\varphi, k) = i\,\dfrac{sn(\varphi, k')}{cn(\varphi, k')}, \\ cn(i\varphi, k) = \dfrac{1}{cn(\varphi, k')}, \\ dn(i\varphi, k) = \dfrac{dn(\varphi, k')}{cn(\varphi, k')}. \end{cases}$$

243. *Observare asupra diferitelor notațiuni ale funcțiunilor ϑ și ale funcțiunilor sn, cn, dn.* Notațiunile adoptate mai sus pentru funcțiunile ϑ sunt acelea ale lui Weierstrass, [1]) cu deosebirea că litera h este înlocuită prin litera q, după Jacobi. Jacobi [2]) pune

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nix} = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \ldots, \\ \vartheta_1(x) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} i^{2n+1} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots \\ \vartheta_2(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots, \\ \vartheta_3(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nix} = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots \end{cases}$$

Așà dar se trece dela notațiunea lui Jacobi la aceea a lui Weierstrass scriind $\vartheta_a\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ în loc de $\vartheta_a(x)$, $a = 1, 2, 3$, iar indicele zero se suprimă. Avem astfel relațiunile

$$\left[\vartheta(x)\right]_J = \left[\vartheta_0\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]_W, \qquad \left[\vartheta_a(x)\right]_J = \left[\vartheta_a\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]_W,$$

sau

$$a = 1, 2, 3.$$

$$\left[\vartheta_0(x)\right]_W = \left[\vartheta(\pi x)\right]_J, \qquad \left[\vartheta_a(x)\right]_W = \left[\vartheta_a(\pi x)\right]_J,$$

---

[1]) H. A. Schwarz. *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen*, anul 1885. In *Vorlesungen über die Th. der ell. Funktionen*, Band V, notațiunile $\vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3\ \vartheta_0$ sunt înlocuite resp. prin $\vartheta_0\ \vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3$.

[2]) *Gesammelte Werke*, Erster Band, pag. 501.

indicii W J, reprezintând respectiv notațiunea lui Jacobi și a lui Weierstrass.

In «*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*» Jacobi adoptase notațiunile H și Θ, variabila independentă fiind integrala normală a lui Legendre, aceeaș ca în funcțiunile *snv*, *cnv*, *dnv*. Intre aceste funcțiuni și funcțiunile ϑ — notațiunea lui Weierstrass — există relațiunile următoare:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(v) = \vartheta_1\left(\dfrac{v}{2\mathrm{K}}\right) = \vartheta_1\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right), \\ \Theta(v) = \vartheta_0\left(\dfrac{v}{2\mathrm{K}}\right) = \vartheta_0\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right), \qquad v = u\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \mathrm{H}_1(v) = \vartheta_2\left(\dfrac{v}{2\mathrm{K}}\right) = \vartheta_2\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right), \qquad \mathrm{K} = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3}. \\ \Theta_1(v) = \vartheta_3\left(\dfrac{v}{2\mathrm{K}}\right) = \vartheta_3\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right). \end{cases}$$

Cu ajutorul acestor relațiuni avem așa dar

$$(3)\quad snv = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(v)}{\Theta(v)}, \quad cnv = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}_1(v)}{\Theta(v)}, \quad dnv = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(v)}{\Theta(v)}.$$

Formulele după cari se transformă funcțiunile H și Θ când mărim argumentul v cu $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, K, $i\mathrm{K}'$ corespund formulelor (1—6) (§ 228, 229) în cari v se mărește respectiv cu 1, τ, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ și se pot deduce imediat din acelea. Nu le transcriem aci.

244. Să menționăm notațiunea lui Hermite.

K și K′ fiind, nu ca în notațiunea lui Jacobi dependente între ele, ci două constante oarecari, supuse la singura condițiune ca partea reală a raportului $\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$ să fie pozitivă, se pune

$$q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}},$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(u) = 2\sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin\dfrac{(2n+1)\pi u}{2\mathrm{K}}, \\ \Theta(u) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos\dfrac{n\pi u}{\mathrm{K}}, \\ \mathrm{H}_1(u) = 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos\dfrac{(2n+1)\pi u}{2\mathrm{K}}, \\ \Theta_1(u) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos\dfrac{n\pi u}{\mathrm{K}}. \end{cases}$$

Constantele K și K′ fiind arbitrare, putem identifică K cu ω_1 și iK' cu ω_3; avem astfel relațiunile

$$H(u) = \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \quad \Theta(u) = \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\right),$$

(5)

$$H_1(u) = \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \quad \Theta_1(u) = \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right).$$

Cu ajutorul acestor funcțiuni, Hermite scrie

$$(6)\quad sn\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad cnu = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad dnu = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}\ ^{1})$$

Comparând aceste formule cu formulele (21 § 238) și ținând seamă că între constanta K a lui Jacobi din acele formule și ω_1 există relațiunea $K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3}$, rezultă că între funcțiunile *snv*, *cnv*, *dnv* ale lui Jacobi și cele ale lui Hermite există relațiunile

$$(7)\quad [snu]_H = [sn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J,\ [cnu]_H = [cn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J,\ [dnu]_H = [dn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J$$

De unde rezultă că cu notațiunea lui Hermite avem valoarea

$$(8)\quad \left(\frac{dsnu}{du}\right)_0 = \sqrt{e_1 - e_3},$$

pe care Hermite o reprezintă prin ω. Punând $x = snu$, ecuațiunea diferențială a acestei funcțiuni este

$$(9)\quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \omega^2(1 - x^2)(1 - k^2x^2);$$

ω se numește *multiplicatorul* funcțiunii $x = snu$. Această funcțiune dar, ca și funcțiunea *pu* a lui Weierstrass, depinde de două parametre, modulul k și multiplicatorul ω. Constantele K și iK' în această notațiune sunt date de egalitățile

$$(10)\quad K = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad iK' = \frac{1}{\omega}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

---

[1]) Constanta

$$q = e^{i\pi\frac{\omega_3}{\omega_1}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

are aceeași semnificare în toate notațiunile, prin urmare și constantele $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ au pretutindeni același sens, căci seriile (10) și (11) (§ 231), cu cari ele se exprimă sunt aceleași.

CAPITOLUL XIX.

FUNCȚIUNI ELIPTICE DE SPEȚA A DOUA ȘI DE SPEȚA A TREIA.

I. FUNCȚIUNI ELIPTICE DE SPEȚA A DOUA.

245. După *Hermite* se numește *funcțiune eliptică de speța a doua* o funcțiune uniformă în tot planul, neavând la distanță finită alte singularități decât poluri și care se reproduce multiplicată cu un factor constant, când mărim argumentul cu una sau cealaltă perioadă $2\omega_1$, $2\omega_3$. O asemenea funcțiune satisface așà dar două ecuațiuni funcționale independente, de forma

$$(1) \qquad \begin{cases} f(u+2\omega_1)=\mu_1 f(u), \\ f(u+2\omega_3)=\mu_3 f(u), \end{cases}$$

în cari μ_1 și μ_3 sunt două constante numite *multiplicatorii* funcțiunii date. Dacă ambii multiplicatori sunt egali cu 1, $f(u)$ este o funcțiune eliptică ordinară, căreia i se zice, uneori, funcțiune eliptică de speța I. Prin cuvântul de funcțiune eliptică, fără epitet se va înțelege cea de speța I.

Câtul a două funcțiuni eliptice de speța a doua *cu aceiași multiplicatori* este evident o funcțiune eliptică de speța I.

246. Din egalitățile (1) rezultă că dacă un punct $u=u_0$ este un zero sau un pol al funcțiunii $f(u)$, punctele congruente $u=u_0+2m\omega_1+2n\omega_3$ vor fi respectiv zeruri sau poluri, ale funcțiunii de același ordin ca punctul u_0.

Dacă reprezintăm prin A reziduul lui $f(u)$ relativ la polul u_0, reziduul corespunzător punctului $u_0+2m\omega_1+2n\omega_3$ va fi

$$\mu_1^m \mu_3^n \mathrm{A}.$$

Aceasta rezultă din ecuațiunea

$$f(u+2m\omega_1+2n\omega_3)=\mu_1^m \mu_3^n f(u),$$

care este o consecință a ecuațiunilor (1).

247. *Exemplu.* Funcțiunea

$$(2) \qquad \varphi(u)=e^{\lambda u}\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u},$$

în care λ și v sunt constante arbitrare, este o funcțiune eliptică de speța a doua; căci, în virtutea formulelor (3) (§ 156), avem

$$\varphi(u+2\omega_1)=e^{2\lambda\omega_1-2\eta_1 v}\varphi(u),$$

$$\varphi(u+2\omega_3)=e^{2\lambda\omega_3-2\eta_3 v}\varphi(u).$$

Multiplicatorii funcțiunii sunt așà dar

$$(2) \qquad \mu_1 = e^{2\lambda\omega_1 - 2\eta_1\rho}, \qquad \mu_3 = e^{2\lambda\omega_3 - 2\eta_3\rho}.$$

Putem dispune de constantele λ și ρ astfel ca multiplicatorii să aibă valori date după voie. In adevăr, din (3) rezultă egalitățile

$$2\lambda\omega_1 - 2\eta_1\rho = \log \mu_1, \qquad 2\lambda\omega_3 - 2\eta_3\rho = \log \mu_3,$$

din cari, ținând seamă de formula lui Legendre $\eta_1 \omega_3 - \omega_1 \eta_3 = i\frac{\pi}{2}$, scoatem valorile

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{i\pi}\left[\eta_1 \log \mu_3 - \eta_3 \log \mu_1\right], \\ \rho = \frac{1}{i\pi}\left[\omega_1 \log \mu_3 - \omega_3 \log \mu_1\right]; \end{cases}$$

logaritmii având determinațiuni oarecari, însă respectiv aceleași în ambele egalități.

O funcțiune exponențială $\varphi(u) = e^{\lambda u}$, al cărui exponent este o funcțiune lineară de u, poate fi considerată ca o funcțiune eliptică de speța II, cu multiplicatorii $\mu_1 = e^{2\lambda\omega_1}$, $\mu_3 = e^{2\lambda\omega_3}$.

248. Câtul a două funcțiuni eliptice de speța a doua cu aceiași multiplicatori fiind o funcțiune eliptică ordinară, rezultă, din cele ce preced, că o funcțiune $f(u)$ de speța II intră într'unul din tipurile următoare:

$$(6) \qquad f(u) = e^{\lambda u} \, \mathrm{F}(u),$$

sau

$$(7) \qquad f(u) = e^{\lambda u} \frac{\sigma(u-v)}{\sigma u} \mathrm{F}(u),$$

$\mathrm{F}(u)$ fiind o funcțiune eliptică. Din aceste expresiuni rezultă că o funcțiune eliptică de speța II are în paralelogramul perioadelor atâtea poluri câte zeruri, fiecare pol și fiecare zero fiind socotit de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate.

249. Multiplicând o funcțiune $f(u)$ de speța II cu exponențiala e^{cu} și dând lui c o valoare convenabilă, putem face ca unul din multiplicatori să fie egal cu 1. In adevăr, μ_1 și μ_3 fiind multiplicatorii lui $f(u)$ multiplicatorii produsului $e^{cu} f(u)$ vor fi

$$\mu_1 e^{2c\omega_1}, \qquad \mu_3 e^{2c\omega_3}.$$

Pentru ca primul din acești multiplicatori să fie egal cu 1, este de ajuns să luăm $c = -\frac{1}{2\omega_1} \log \mu_1$, oricare ar fi determinațiunea

logaritmului. Făcând, în egalitățile (4), $\mu_1=1$, avem

$$(11)\qquad \rho=\frac{\omega_1}{i\pi}\log\mu_3,\quad \lambda=\frac{\eta_1}{i\pi}\log\mu_3=\frac{\eta_1\rho}{\omega_1}.$$

In cazul particular $\mu_1^n=\mu_3^n=1$, n fiind un număr întreg, puterea a n^a a funcțiunii, $[f(u)]^n$, este o funcțiune eliptică ordinară. Punând

$$\mu_1=e^{-2\frac{k_1 i\pi}{n}},\qquad \mu_3=e^{2\frac{k_3 i\pi}{n}},$$

k_1 și k_3 fiind numere întregi, egalitățile (4) dau

$$\lambda=\frac{2}{n}(k_3\eta_1+k_1\eta_3),\qquad \rho=\frac{2}{n}(k_3\omega_1+k_1\omega_3).$$

De ex., câturile $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u}$ au multiplicatorii $\frac{\mu_1}{\mu_3}=\begin{cases}+1;\\ -1;\end{cases}$ de unde rezultă că pătratele acestor câturi sunt funcțiuni eliptice.

II. FUNCȚIUNI ELIPTICE DE SPEȚA A TREIA.

250. Se dă, după Hermite, numele de funcțiuni eliptice de speța III, funcțiunilor $f(u)$ uniforme, cari n'au la distanță finită alte singularități decât poluri și cari satisfac două ecuațiuni funcționale de forma

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(u+2\omega_1)&=e^{a_1u+b_1}f(u),\\ f(u+2\omega_3)&=e^{a_3u+b_3}f(u),\end{aligned}$$

a_1, b_1, a_3, b_3 fiind constante. Funcțiunile exponențiale $e^{a_1u+b_1}$ și $e^{a_3u+b_3}$ se numesc *multiplicatorii* funcțiunii corespunzători perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$. In această categorie de funcțiuni intră funcțiunile σu, $\sigma_\alpha u$ precum și inversele lor $\frac{1}{\sigma u}$, $\frac{1}{\sigma_\alpha u}$.

Din ecuațiunile (1) rezultă consecințele următoare:

1°. Dacă un punct u_0 este un zero sau un pol al funcțiunii $f(u)$, toate punctele congruente sunt zeruri sau poluri respectiv de același ordin.

2°. Câtul a două funcțiuni de speța III cu aceleași perioade și aceiași multiplicatori este o funcțiune eliptică.

3°. Câtul sau produsul a două funcțiuni de speța III, cu aceleași perioade, este o funcțiune de aceeaș speță ai cărei multiplicatori sunt respectiv câtul sau produsul multiplicatorilor celor două funcțiuni.

4°. Fie c o constantă arbitrară și

$$\varphi(u)=f(u+c);$$

ecuațiunile (1) dau

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(u+2\omega_1)=e^{a_1u+(b_1+a_1c)}\,\varphi(u), \\ \varphi(u+2\omega_3)=e^{a_3u+(b_3+a_3c)}\,\varphi(u). \end{cases}$$

251. Luând derivata logaritmică a ecuațiunilor (1), avem relațiunile

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{f'(u+2\omega_1)}{f(u+2\omega_1)}&=\frac{f'(u)}{f(u)}+a_1, \\ \frac{f'(u+2\omega_3)}{f(u+2\omega_3)}&=\frac{f'(u)}{f(u)}+a_3, \end{aligned}$$

analoage cu cele relative la funcțiunea $\zeta u=\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$:

$$\zeta(u+2\omega_1)=\zeta u+2\eta_1,\quad \zeta(u+2\omega_3)=\zeta u+2\eta_3.$$

Ecuațiunile (3) arată că derivata

$$\frac{d}{du}\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{d^2}{du^2}\log f(u)$$

este o funcțiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Ca și cantitățile η_1, η_3, cantitățile a_1, a_3 nu sunt independente între ele. Pentru a găsi relațiunea ce există între a_1 și a_3 să mărim u în prima ecuațiune (1) cu $2\omega_3$ și în a doua cu $2\omega_1$. Membrele dintâi fiind egale, de oarece funcțiunea $f(u)$ este uniformă, rezultă condițiunea

$$(4)\qquad a_1\omega_3-a_3\omega_1=mi\pi,$$

m fiind un număr întreg pozitiv, negativ sau nul. *Acest număr este egal cu diferența dintre numărul zerurilor și numărul polurilor funcțiunii* $f(u)$ *cuprinse în paralelogramul* $(2\omega_1,\ 2\omega_3)$. In adevăr fie δ această diferență; avem

$$2i\pi\delta=\int\frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

integrala fiind luată dealungul paralelogramului în sensul pozitiv [1]). Ținând seamă de relațiunile (3), găsim (fig. 49, § 154)

$$(AB)+(CD)=\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du-\int_{u_0+2\omega_3}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=-a_3\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1}du=-2a_3\omega_1,$$

$$(BC)+(DA)=\int_{u_0+2\omega_1}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du-\int_{u_0}^{u_0+2\omega_3}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=a_1\int_{u_0}^{u_0+2\omega_3}du=2a_1\omega_3.$$

---

[1]) Condițiunea $R\,\dfrac{\omega_3}{i\omega_1}>0$ este presupusă totdeauna împlinită.

Avem așà dar relațiunea

$$a_1\omega_3 - a_3\omega_1 = i\pi\delta; \tag{5}$$

prin urmare $m=\delta$.

Acest număr se numește *ordinul* funcțiunii; el poate fi pozitiv, negativ sau nul, după cum numărul zerurilor este mai mare, mai mic sau egal cu numărul polurilor. Proprietatea ca numărul zerurilor să fie egal cu numărul polurilor, care aparține funcțiunilor de speța I și II, nu aparține tuturor funcțiunilor de speța a treia.

Dacă funcțiunea eliptică de speța III este o funcțiune întreagă — proprietate imposibilă pentru funcțiunile eliptice ordinare, iar pentru cele de speța II aparținând numai tipului e^{au+b}—numărul $m=\frac{1}{i\pi}(a_1\omega_3 - a_3\omega_1)$ reprezintă numărul zerurilor funcțiunii situate în paralelogramul perioadelor. Acest număr poate fi nul. De ex., funcțiunea

$$e^{au^2+bu+c} \tag{6}$$

a, b, c fiind cantități constante, este o funcțiune eliptică de speța III de ordinul zero.

Orice funcțiune eliptică $f(u)$ de speța III, întreagă și de ordinul zero, intră în tipul precedent. In adevăr, $f(u)$ fiind o funcțiune întreagă și neavând niciun zero este de forma

$$f(u)=e^{G(u)},$$

$G(u)$ fiind o funcțiune întreagă. Insă expresiunea

$$\frac{d^2}{du^2}\log f(u) = G''(u),$$

fiind o funcțiune eliptică întreagă, se reduce la o constantă; de unde rezultă că $f(u)$ este de forma (6).

252. Fie $f(u)$ o funcțiune eliptică de speța III; produsul

$$\varphi(u)=e^{\alpha u^2+\beta u} f(u) \tag{7}$$

este o funcțiune de aceeaș speță, având aceleași zeruri și aceleași poluri. Putem dispune de constantele α, β, astfel ca multiplicatorul lui $\varphi(u)$ corespunzător perioadei $2\omega_1$ să fie $e^{a_1u+b_1}$, a_1 și b_1 fiind constante date. Luând $a_1=b_1=0$, multiplicatorul corespunzător al lui $\varphi(u)$ va fi egal cu 1. Se zice că o funcțiune de speța III este *redusă*, dacă multiplicatorul considerat este egal cu 1.

Ecuațiunea (7) scrisă sub forma

$$f(u)=e^{-\alpha u^2-\beta u}\varphi(u),$$

în care presupunem $\varphi(u)$ *redusă*, arată că orice funcțiune eliptică

de speţa III se poate exprimà printr'o funcţiune redusă, multiplicată cu o exponenţială de forma e^{au^2+bu}.

Făcând $a_1 = o$ în formula (4), obţinem

$$a_3 = -\frac{mi\pi}{\omega_1}. \tag{8}$$

Ecuaţiunile funcţionale (1) corespunzătoare unei funcţiuni reduse sunt dar de forma, scriind $-i\pi b_3$ în loc de b_3,

$$\begin{cases} f(u+2\omega_1) = f(u), \\ f(u+2\omega_3) = e^{-i\pi\left(\frac{mu}{\omega_1}+b_3\right)} f(u). \end{cases} \tag{9}$$

253. *Diferenţa între suma zerurilor şi suma polurilor.* Vom presupune funcţiunea $f(u)$ *redusă*, adică satisfăcând ecuaţiunile (9). Reprezintând prin d diferenţa dintre suma zerurilor şi suma polurilor, avem (fig. 49, § 154).

$$2i\pi d = \int_{ABCD} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du. \tag{10}$$

Ţinând seamă de relaţiunile (3) în cari facem $a_1 = o$, avem

$$(AB)+(CD) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \left[u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega_3)\,\frac{f'(u+2\omega_3)}{f(u+2\omega_3)} \right] du$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \left[u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega_3)\left(\frac{f'(u)}{f(u)} + a_3\right) \right] du$$

$$= -2\omega_3 \log \frac{f(u_0+2\omega_1)}{f(u_0)} - 2a_3\omega_1(u_0+\omega_1+2\omega_3).$$

Funcţiunea $f(u)$ fiind redusă, avem $f(u_0+2\omega_1) = f(u_0)$; deci

$$(AB)+(CD) = 4ki\pi\omega_3 - 2a_3\omega_1(u_0+\omega_1+2\omega_3).$$

De asemenea găsim

$$(BC)+(DA) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_3} \left[-u\,\frac{f'(u)}{f(u)} + (u+2\omega_1)\,\frac{f'(u+2\omega_1)}{f(u+2\omega_1)} \right] du$$

$$= 2\omega_1 \log \frac{f(u_0+2\omega_3)}{f(u_0)} = 2\omega_1(a_3u_0 - i\pi b_1 + 2k'i\pi).$$

Prin urmare

$$\int_{ABCD} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = 4i\pi(k'\omega_1 + k\omega_3) - 2a_3\omega_1(\omega_1+2\omega_3) - 2i\pi b_3\omega_1,$$

k și k' fiind numere întregi. Inlocuind a_3 prin valoarea sa (8), formula (10) devine

$$d=(m-b_3)\omega_1, \quad (mod\,2\omega_1,2\omega_3). \tag{11}$$

254. *Funcțiuni eliptice de speța III întregi.* Fie $f(u)$ o funcțiune eliptică de speța III întreagă, de ordinul m, satisfăcând ecuațiunile (9) și fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zerurile funcțiunii cuprinse în paralelogramul perioadelor; vom aveà (formula (11)):

$$\sum_1^m a_k \equiv (m-b_3)\omega_1. \tag{12}$$

De unde rezultă că dacă $m-1$ zeruri $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ sunt date, cel din urmă a_m este determinat, abstracțiune făcând de un multiplu de perioade. Prin urmare două funcțiuni întregi $f(u)$, $f_1(u)$ satisfăcând aceleași ecuațiuni (9), dacă au $m-1$ zeruri comune vor aveà comun și pe cel din urmă. Aceste funcțiuni nu pot diferì între ele decât printr'un factor constant, căci raportul lor este o funcțiune eliptică ordinară, de ordinul zero.

Inlocuind argumentul u prin $u+C$, C fiind o constantă arbitrară, zerurile funcțiunii $f(u+C)$ vor fi $a'_k = a_k - C$, a căror sumă va satisface congruența

$$\sum_1^m a'_k = \sum_1^m a_k - mC \equiv (m-b_3)\omega_1 - mC. \tag{13}$$

Putem dar dispune de constanta C astfel ca suma zerurilor funcțiunii $f(u+C)$ să aibă o valoare dată după voie. Aceeaș proprietate aparține funcțiunii $e^{au} f(u+C)$, a fiind o constantă arbitrară.

255. Funcțiunea $f(u)$ fiind cea considerată mai sus, să punem

$$T(u)=e^{-g_1 i\pi\frac{u}{2\omega_1}} f(u+\omega_3), \tag{14}$$

g_1 fiind un număr real oarecare. Inlocuind u succesiv prin $u+2\omega_1$, $u+2\omega_3$, avem, în virtutea formulelor (9), ecuațiunile funcționale

$$\begin{cases} T(u+2\omega_1)=e^{-g_1 i\pi}T(u), \\ T(u+2\omega_3)=e^{-i\pi\left(g_1\frac{\omega_3}{\omega_1}+b_3\right)}e^{-\frac{mi\pi}{\omega_1}(u+\omega_3)}T(u). \end{cases} \tag{15}$$

Să punem

$$g_1\frac{\omega_3}{\omega_1}+b_3=g_3. \tag{16}$$

Se recunoaşte lesne că oricare ar fi valoarea parametrului b_3, există un sistem unic de valori reale pentru coeficienţii g_1 şi g_3 [1]). Funcţiunea $T(u)$ satisface dar ecuaţiunile

$$(17)\qquad \begin{cases} T(u+2\omega_1)=e^{-g_1 i\pi}T(u), \\ T(u+2\omega_3)=e^{-g_3 i\pi}e^{-\frac{mi\pi}{\omega_1}(u+\omega_3)}T(u). \end{cases}$$

Numerele g_1, g_3 se numesc *caracteristicele* funcţiunii $T(u)$; se notează $T_{g_1,g_3}(u)$, punând caracteristicele în evidenţă. Relaţiunile (17) rămân neschimbate dacă mărim caracteristicele cu numere pare. Suma zerurilor funcţiunii $T(u)$, cuprinse într'un paralelogram de perioade, rezultă din congruenţa (13) în care facem $C = \omega_3$. Această sumă, abstracţiune făcând de multiplii de perioade, este aşà dar

$$S=m(\omega_1+\omega_3)-b_3\omega_1,$$

sau, în virtutea egalităţii (16)

$$(18)\qquad S=m(\omega_1+\omega_3)+g_1\omega_3-g_3\omega_1.$$

256. Să facem substituţiunile

$$(19)\qquad \frac{u}{2\omega_1}=v,\quad \frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau,\quad e^{i\pi\tau}=q$$

şi să punem

$$(20)\qquad \Theta_{g_1,g_3}(v)=T_{g_1,g_3}(u).$$

Introducem astfel o clasă de funcţiuni întregi numite funcţiunile lui Jacobi, cari satisfac ecuaţiunile funcţionale

$$(21.\qquad \begin{cases} \Theta_{g_1,g_3}(v+1)=e^{-g_1 i\pi}\,\Theta_{g_1,g_3}(v) \\ \Theta_{g_1,g_3}(v+\tau)=q^{-m}\,e^{-g_3 i\pi}\,e^{-2mi\pi v}\,\Theta_{g_1,g_3}(v). \end{cases}$$

Paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ din planul (u) se transformă, în virtutea relaţiunilor (19), în paralelogramul $(1, \tau)$ din planul (v). Suma zerurilor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ale funcţiunii $\Theta_{g_1,g_3}(v)$, cuprinse, în acest paralelogram, satisface, în virtutea formulei (18),[2]) congruenţa

$$(22)\qquad \Sigma a_k \equiv \frac{m}{2}(1+\tau)+\frac{1}{2}(g_1\tau-g_3)\quad (\mathrm{mod}\,1,\tau).$$

---

1) Punând $\frac{\omega_3}{\omega_1}=a+i\beta$, $\beta\neq 0$ şi $b_3=a+ib$, avem $g_1(a+i\beta)+a+ib=g_3$; de unde ecuaţiunile

$$\beta g_1+b=0,\quad ag_1+a=g_3,$$

cari determină valorile reale g_1, g_3.

2) In care se împarte membrul al doila cu $2\omega_1$.

Să considerăm în particular funcțiunea $\Theta_{g_1, g_2}(v)$ de ordinul m ale cărei caracteristice sunt nule și să scrim $\Theta(v)$ în loc de $\Theta_{0,0}(v)$. Relațiunile (21) corespunzătoare acestei funcțiuni vor fi

$$\Theta(v+1) = \Theta(v), \tag{23}$$
$$\Theta(v+\tau) = q^{-m} e^{-2mi\pi v} \Theta(v).$$

Orice altă funcțiune întreagă satisfăcând aceste relațiuni și având $m-1$ zeruri comune cu $\Theta(v)$ este de forma $A\Theta(v)$, A fiind o constantă arbitrară (§ 254). De unde rezultă că funcțiunea cea mai generală $\Theta(v)$ de ordinul m depinde de m constante arbitrare; căci putem luà după voie $m-1$ zeruri ale sale și coeficientul constant A.

257. Teoremă (Hermite). *Funcțiunea $\Theta(v)$ cea mai generală care satisface ecuațiunile* (23) *se poate exprimà în funcțiune lineară și omogenă prin m funcțiuni $\Theta_a(v)$ speciale, satisfăcând aceleași ecuațiuni*, ($a = 0, 1, 2, \ldots, m-1$)

Funcțiunea $\Theta(v)$ fiind o funcțiune întreagă, periodică cu perioada 1, se poate desvoltà în seria Fourier

$$\Theta(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2ni\pi v}, \tag{24}$$

valabilă în tot planul (v). Inlocuind v prin $v+\tau$, avem

$$\Theta(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n q^{2n} e^{2ni\pi v};$$

prin urmare, în virtutea celei de a doua ecuațiuni (23),

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n q^{2n} e^{2ni\pi v} = q^{-m} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2(n-m)i\pi v},$$

sau, înlocuind în membrul al doilea n prin $n+m$, ceeace nu schimbă valoarea acestei serii,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n q^{2n} e^{2ni\pi v} = q^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n+m} e^{2ni\pi v}.$$

De unde formula recurentă

$$A_{n+m} = A_n q^{2n+m}, \tag{25}$$

care arată că numai m din coeficienții A_n pot fi luați după voie. Se obține o relațiune mai simplă dacă punem

$$A_n = B_n q^{\frac{n^2}{m}}, \qquad (n = o, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{26}$$

Formula (25) devine

$$B_{n+m} = B_n. \tag{27}$$

Din această formulă rezultă egalitățile următoare

$$(28)\quad B_{km}=B_0,\ B_{km+1}=B_1,\ldots,\ B_{km+h}=B_h,\ldots,\ B_{km+m-1}=B_{m-1},$$

în cari k primește toate valorile întregi dela $-\infty$ $+\infty$. Seria (24) se poate dar scrie, reunind termenii cu același coeficient B,

$$(29)\quad \Theta(v)=B_0\,\Theta_0(v)+B_1\,\Theta_1(v)+\ldots+B_h\Theta_h(v)+\ldots+B_{m-1}\Theta_{m-1}(v),$$

punând

$$(30)\quad \Theta_h(v)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(km+h)^2}{m}}\, e^{2(km+h)i\pi v},\quad (h=0,\ 1,\ldots,\ m-1).$$

Fiecare din funcțiunile $\Theta_h(v)$ satisface ecuațiunile (23), căci anulând toți coeficienții B afară de B_h, avem $\Theta(v)=B_h\,\Theta_h(v)$.

Cele m funcțiuni sunt linear independente între dânsele, adică nu există între ele o relațiune lineară, omogenă cu coeficienți constanți nu toți nuli; căci punând $e^{2i\pi v}=z$, seriile corespunzătoare nu conțin aceleași puteri ale lui z.

258. *Teoremă. Între $m+1$ funcțiuni de ordinul m*

$$\Theta_1(v),\ \Theta_2(v),\ldots,\ \Theta_{m+1}(v)$$

având aceleași caracteristice există o relațiune lineară, omogenă cu coeficienți constanți nu toți nuli (Hermite).

Pentru a demonstrà această teoremă, să formăm expresiunea

$$(31)\quad f(v)=A_1\Theta_1(v)+A_2\Theta_2(v)+\ldots+A_m\Theta_m(v),$$

coeficienții $A_1\ldots,\ A_m$ fiind constante arbitrare.

Funcțiunea $f(v)$ satisface ecuațiunile (21); să presupunem că ea nu este identic nulă. Exprimând că această funcțiune se anulează în $m-1$ puncte $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{m-1}$, cari sunt zeruri ale funcțiunii $\Theta_{m+1}(v)$, obținem sistemul de $m-1$ ecuațiuni lineare, omogene cu m necunoscute

$$(32)\quad \left|\begin{array}{l} A_1\,\Theta_1(a_1)+A_2\,\Theta_2(a_1)+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_1)=0,\\ A_1\,\Theta_1(a_2)+A_2\,\Theta_2(a_2)+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_2)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ A_1\,\Theta_1(a_{m-1})+A_2\,\Theta_2(a_{m-1})+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_{m-1})=0, \end{array}\right.$$

cari determină raporturile necunoscutelor $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_m$ către una din ele. Printre zerurile funcțiunii $\Theta_{m+1}(v)$ pot fi mai multe egale; unui zero multiplu de ordinul k vor corespunde k ecuațiuni lineare între coeficienții A, obținute, anulând funcțiunea $f(v)$ și cele dintâi $k-1$ derivate; numărul total al ecuațiunilor este același. Funcțiunea $f(v)$ astfel determinată având $m-1$ zeruri comune cu funcțiunea $\Theta_{m+1}(v)$ și satisfăcând ecuațiunile (21), este de forma

$f(v) = -A_{m+1}\,\Theta_{m+1}(v)$, A_{m+1} fiind o constantă. Avem așadar relațiunea

$$\sum_{1}^{m+1} A_k\,\Theta_k\,(v) = 0. \tag{33}$$

Acest rezultat este independent de ipoteza că funcțiunea $f(v)$ este identic nulă. In acest caz, avem $A_{m+1} = 0$.

Corolar. Se poate construi o funcțiune $\Theta(v)$ de ordinul m care să admită $m-1$ zeruri date $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$; ea este de forma (31), coeficienții satisfăcând ecuațiunile (32). Această funcțiune este dar determinată, abstracțiune făcând de un factor arbitrar.

259. Să considerăm cazul când funcțiunile Θ_{g_1, g_3} sunt de ordinul întâi ($m = 1$). In acest caz, unui sistem dat de caracteristice (g_1, g_3) corespunde o singură funcțiune Θ, abstracțiune făcând de un factor constant arbitrar. O funcțiune Θ de ordinul întâi având un singur zero în paralelogramul $(1, \tau)$, acest zero va fi

$$v = \frac{1+\tau}{2} + \frac{1}{2}(g_1\tau - g_3), \quad \text{(formula 22)} \tag{34}$$

Dacă caracteristicile sunt numere întregi, avem patru sisteme

$$(1, 1),\ (1, 0),\ (0, 0),\ (0, 1),$$

căci relațiunile (21) rămân neschimbate dacă mărim g_1 sau g_3 cu un număr par. Funcțiunile Θ_{g_1, g_3} corespunzătoare coincid cu funcțiunile $\vartheta_a(v \mid \tau)$ ($a = 1, 2, 3, 0$). Astfel, funcțiunea $\Theta_{00}(v \mid \tau)$ de ordinul întâi este dată de seria (30), în care facem $m = 1$, $h = 0$; avem

$$\Theta_{00}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi} = \vartheta_3(v). \tag{35}$$

Punctul în care această funcțiune se anulează în paralelogramul $(1, \tau)$ este determinat de expresiunea (34)

$$v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}. \tag{36}$$

Celelalte trei funcțiuni $\Theta_{11}(v)$, $\Theta_{1,0}(v)$, $\Theta_{0,1}(v)$ nu difer de funcțiunile $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_0(v)$ decât printr'un factor constant; ele au respectiv aceleași zeruri și satisfac aceleași ecuațiuni funcționale (21), în cari înlocuim caracteristicele prin sistemele corespunzătoare.

260. Să presupunem $m > 1$ și fie $\Theta_h(v)$ una din cele m funcțiuni Θ cuprinse în egalitatea (30), ale căror caracteristice sunt $(0, 0)$. Scriind această funcțiune sub forma

$$\Theta_h(v \mid \tau) = q^{\frac{h^2}{m}}\, e^{2hi\pi v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2 i\pi (m\tau)}\, e^{2ni\pi (mv + h\tau)},$$

recunoaştem că seria din membrul al doilea coincide cu seria $\vartheta_3(u \mid \tau_1)$ în care $u = m\varrho + h\tau$ şi $\tau_1 = m\tau$.

Avem aşà dar relaţiunea

$$(37)\qquad \Theta_h(\varrho \mid \tau) = q^{\frac{h^2}{m}} e^{2hi\pi\varrho}\, \vartheta_3(m\varrho + h\tau \mid m\tau),\ (h=0,\ 1,\ldots m-1).$$

Pentru $h = 0$, avem

$$(38)\qquad \Theta_0(\varrho \mid \tau) = \vartheta_3(m\varrho \mid m\tau).$$

Zerurile funcţiunilor Θ_h se deduc din zerurile cunoscute ale funcţiunii $\vartheta_3(\varrho \mid \tau)$ (14) (§ 236). Aceste zeruri sunt date de formula

$$m\varrho + h\tau = \mu + \frac{1}{2} + (\nu + \frac{1}{2})\, m\tau,$$

de unde

$$(39)\qquad \varrho = \frac{1}{m}(\mu + \frac{1}{2}) + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{h}{m})\,\tau,$$

μ şi ν fiind numere întregi cari primesc toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$. Această formulă arată că printre cele m funcţiuni Θ_h nu sunt două cari să aibă un zero comun. Toate zerurile sunt simple, căci zerurile funcţiunii $\vartheta_3(\varrho)$ sunt simple.

261. *Aplicaţiuni ale teoremei lui Hermite.*

I. Pătratele funcţiunilor $\vartheta_\alpha(\varrho)$, $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, sunt de ordinul al doilea şi au aceleaşi caracteristice ($g_1 = g_3 = 0$). Prin urmare, între trei oarecari din ele există o relaţiune lineară şi omogenă.

Avem, de ex.:

$$\vartheta_2^2(\varrho) = a\vartheta_0^2(\varrho) + b\,\vartheta_1^2(\varrho),$$
$$\vartheta_3^2(\varrho) = a_1\,\vartheta_0^2(\varrho) + b_1\,\vartheta_1^2(\varrho).$$

Coeficienţii se determină făcând succesiv $\varrho = 0$, $\varrho = \frac{\tau}{2}$ şi ţinând seamă de formulele (4), (5) (§ 229); de unde obţinem

$$a = \left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = \frac{k}{k'},\quad a_1 = \left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = \frac{1}{k'},$$

$$b = -\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = -\frac{1}{k'},\quad b_1 = -\left(\frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = -\frac{k}{k'}.$$

Avem aşa dar relaţiunile

$$\vartheta_1^2(\varrho) = k\,\vartheta_0^2(\varrho) - k'\,\vartheta_2^2(\varrho),$$
$$\vartheta_0^2(\varrho) = k\,\vartheta_1^2(\varrho) + k'\,\vartheta_3^2(\varrho).$$

II. Funcțiunea

$$f(v) = \vartheta_0(v + a)\,\vartheta_0(v - a)$$

este o funcțiune $\Theta(v)$ de ordinul $m = 2$ cu caracteristicele $(0, 0)$. De același ordin cu aceleași caracteristice sunt funcțiunile $\vartheta_0^2(v)$, $\vartheta_1^2(v)$; prin urmare, putem scrie

$$(1) \qquad \vartheta_0(v+a)\,\vartheta_0(v-a) = b\vartheta_0^2(v) + c\,\vartheta_1^2(v).$$

Făcând $v = 0$, avem $\vartheta_0^2(a) = b\vartheta_0^2(0)$. Pentru $v = \frac{\tau}{2}$, avem

$$\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_0\left(a-\frac{\tau}{2}\right) = c\,\vartheta_1^2\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

sau, ținând seamă de formulele (5) (§ 229),

$$\vartheta_1^2(a) = -c\vartheta_0^2(0).$$

Prin urmare

$$(2) \qquad \vartheta_0(v+a)\,\vartheta_0(v-a) = \frac{\vartheta_0^2(a)\,\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(a)\,\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(0)}.$$

III. Funcțiunea

$$f(v) = \vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a)$$

este o funcțiune $\Theta(v)$ de ordinul al doilea cu caracteristicele $(1, 0)$. Funcțiunile $\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)$, $\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)$ sunt de același ordin și au aceleași caracteristice; prin urmare

$$(3) \qquad \vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a) = b\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v) + c\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v).$$

Făcând succesiv $v = 0$, $v = \frac{1}{2}$, obținem valorile

$$c = \frac{\vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)},$$

$$b = \frac{\vartheta_1(a+\frac{1}{2})\,\vartheta_0(a-\frac{1}{2})}{\vartheta_1(\frac{1}{2})\,\vartheta_0(\frac{1}{2})} = \frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}.$$

Ducând aceste valori în ecuațiunea (3), obținem

$$(4) \quad \vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a) = \frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v) + \vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}.$$

Din ecuațiunile (2) și (4) rezultă

$$(5) \quad \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v+a)} = \left(\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\right)^2 \frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v) + \vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_0^2(a)\,\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(a)\,\vartheta_1^2(v)}.$$

Divizând ambii termeni ai membrului al doilea cu $\vartheta_0^2(a)\vartheta_0^2(v)$; înlocuind după aceea a și v prin $\frac{a}{2K}$, $\frac{v}{2K}$ și ținând seamă de

formulele

$$\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'}, \quad \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \quad (\S\ 231)$$

şi de formulele (21) (§ 238), egalitatea (5) devine

$$(6) \qquad sn\,(v+a) = \frac{sn\,v\ cn\,a\ dn\,a + sn\,a\ cn\,v\ dn\,v}{1-k^2\ sn\,a\ sn\,v}.$$

Ceeace este formula de adiţiune a funcţiunii $sn\,v$.

CAPITOLUL XX.

DEGENERAREA FUNCŢIUNILOR ELIPTICE.

262. Funcţiunile eliptice au fost construite în ipoteza că semiperioadele ω_1, ω_3 sunt *finite* şi raportul lor *imaginar*. Vom conservà această din urmă ipoteză (de care depinde convergenţa absolută şi uniformă a seriilor şi a produselor ce definesc funcţiunile eliptice), dar vom presupune succesiv că una sau amândouă perioadele devin infinite. Seriile şi produsele funcţiunilor eliptice fiind absolut şi uniform convergente şi în aceste cazuri, limitele lor vor fi egale cu suma limitelor termenilor, respectiv cu produsul limitelor factorilor corespunzători. Funcţiunile considerate încetând de a fi eliptice, precum vom vedeà, zicem că ele *degenerează*.

Degenerarea funcţiunilor eliptice se mai poate introduce — considerând, de ex., funcţiunile lui Weierstrass — dacă presupunem că discriminantul $\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2$ tinde către zero, adică dacă două sau toate rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale ecuaţiunii $4x^3 - g_2x - g_3 = o$ devin egale. Vom considerà după rând ambele moduri de degenerare.

I. Perioadele devin infinite.

A) ω_1 *finit*, ω_3 *infinit*.

263. *Funcţiunea pu.* Seria care defineşte funcţiunea *pu* devine pentru $\omega_3 = \infty$,

$$(1) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\frac{1}{(u-2m\omega_1)^2} - \frac{1}{4m^2\omega_1^2} \right],$$

căci toţi termenii în cari $n \neq o$ se anulează. Această serie se scrie

$$(2) \qquad pu = -\frac{1}{2\omega_1^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-2m\omega_1)^2},$$

de oarece fiecare din seriile membrului al doilea este absolut convergentă.

Scriind seria din urmă sub forma

$$\frac{1}{4\omega_1^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{u}{2\omega_1}-m\right)^2}$$

și referindu-ne la egalitățile

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-m)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x},\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

obținem, pentru $\lim p(u;\omega_1,\omega_3)$, expresiunea

$$(3)\qquad pu=-\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}}.$$

264. *Funcțiunea* ζu. Din seria care definește funcțiunea ζu, sau integrând egalitatea (3), deducem, pentru $\lim_{\omega_3=\infty}\zeta(u\mid\omega_1,\omega_3)$, formula

$$(4)\qquad \zeta u=\frac{\pi^2 u}{12\omega_1^2}+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

fără constantă, ζu fiind o funcțiune impară.

Făcând în această egalitate succesiv $u=\omega_1,\ \omega_3$, obținem, pentru $|\omega_3|=\infty$,

$$(5)\qquad \eta_1=\frac{\pi^2}{12\omega_1},\qquad \eta_3=\infty.$$

Ultima cantitate se poate deduce din formula lui Legendre

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=i\frac{\pi}{2};$$

de unde rezultă

$$(6)\qquad \lim\frac{\eta_3}{\omega_3}=\lim\frac{\eta_1}{\omega_1}=\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}.$$

265. *Funcțiunea* σu. Plecând dela produsul care definește funcțiunea σu, sau integrând egalitatea (4), obținem

$$\log\frac{\sigma u}{c}=\frac{\pi^2}{24\omega_1^2}u^2+\log\sin\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

de unde, ținând seamă de egalitatea

$$\lim_{u=0}\frac{\sigma u}{u}=1,$$

avem, pentru limita funcțiunii σu, expresiunea

$$(7)\qquad \sigma u=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{\frac{\pi^2}{24\omega_1^2}u^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}.$$

265. *Limitele invarianților* g_2 *și* g_3 *și ale cantităților* e_1, e_2, e_3. Făcând în seriile

$$\frac{1}{60}g_2=\Sigma'\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^4},\quad \frac{1}{140}g_3=\Sigma'\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^6}$$

$\omega_3=\infty$, toți termenii se anulează exceptând termenii corespunzători lui $n=o$. Avem așa dar

$$\frac{1}{60}g_2=\frac{1}{2^3\omega_1^4}\sum_1^\infty\frac{1}{m^4}=\frac{1}{2^3\omega_1^4}\frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{140}g_3=\frac{1}{2^5\omega_1^3}\sum_1^\infty\frac{1}{m^6}=\frac{1}{2^5\omega_1^6}\frac{\pi^6}{945};$$

de unde, pentru limitele celor doi invarianți,

$$g_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_1{}^2}\right)^2,\quad g_3=\frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_1{}^2}\right)^3. \tag{8}$$

Valoarea limită a discriminantului este așà dar

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2=o. \tag{9}$$

Prin urmare două din rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale ecuațiunii

$$4x^3-g_2x-g_3=o$$

devin egale. Se găsește rădăcina dublă

$$x_1=-\frac{3g_3}{2g_2};$$

de unde rezultă rădăcina simplă

$$x_2=-2x_1=\frac{3g_3}{g_2}.$$

Pentru a recunoaște cari din cele trei rădăcini e_1, e_2, e_3 devin egale între ele, observăm că semiperioada $\omega_2=-\omega_1-\omega_3$ devenind infinită împreună cu ω_3, rădăcinile cari devin egale între ele nu pot fi decât $e_2=p\omega_2$ și $e_3=p\omega_3$. Avem așà dar

$$e_1=\frac{3g_3}{g_2}=\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_1{}^2},$$

$$e_2=e_3=-\frac{3g_3}{2g_2}=-\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_1{}^2}. \tag{10}$$

Aceste valori se mai pot obține înlocuind în formula (3) u respectiv prin ω_1, ω_2, ω_3 și observând că

$$\lim_{\omega_a=\infty}\left[\sin\frac{\pi u}{\omega_1}\right]_{u=\omega_a}=\infty,\quad (a=2,3).$$

266. *Funcțiunile* $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Scăzând din egalitatea (3) expresiunile e_1, e_2, e_3 date de formulele (10) și ținând seamă de relațiunea

$$pu - e_a = \left(\frac{\sigma_a u}{\sigma u}\right)^2,$$

obținem egalitățile

$$\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \cot^2 \frac{\pi u}{2\omega_1},$$

$$\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}}.$$

De unde, înlocuind σu prin expresiunea sa (7), extrăgând rădăcinile și ținând seamă că pentru $u = o$ cele trei cofuncțiuni sunt egale cu $+1$, avem pentru limitele lor, expresiunile

$$(11) \qquad \sigma_1 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_1^2}} \cos \frac{\pi u}{2\omega_1}, \qquad \sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_1^2}}.$$

267. *Funcțiunile lui Jacobi.* Ecuațiunile (10) ne dau

$$(12) \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1};$$

de unde rezultă, pentru argumentul $\varphi = u\sqrt{e_1 - e_3}$ și pentru cantitățile $K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}$, $iK' = \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3}$, valorile limite

$$(13) \qquad \varphi = \frac{\pi u}{2\omega_1}, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty.$$

Valorile modulelor $k = -\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ și $k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ devin

$$(14) \qquad k = o, \quad k' = 1.$$

Funcțiunile $sn(\varphi, k)$, $cn(\varphi, k)$, $dn(\varphi, k)$ definite de formulele (3) (§ 194), se reduc la expresiunile

$$(15) \qquad sn\,\varphi = \sin\varphi, \quad cn\,\varphi = \cos\varphi, \quad dn\,\varphi = 1.$$

Pentru a obține limitele funcțiunilor $\vartheta(\varphi|\tau)$ să observăm că raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ tinzând către infinit și coeficientul lui i rămânând, prin ipoteză, pozitiv, este necesar ca acest coeficient să tindă către $+\infty$[1]). De unde rezultă

$$(16) \qquad \lim_{\omega_3 = \infty} q = \lim e^{i\pi\tau} = o, \quad \lim q_0 = \lim \prod_1^\infty \left(1 - q^{2n}\right) = 1.$$

---

[1]) Fie $\tau = \alpha + i\beta = \alpha\left(1 + i\frac{\beta}{\alpha}\right)$ una cel puțin din cantitățile α, β tinde către infinit; însă pentru ca $\frac{\beta}{\alpha}$ să nu se anuleze este necesar ca β să tindă către infinit.

Prin urmare [(2), § 225)]:

$$\lim \vartheta_1(v|\tau) = \lim \vartheta_2(v|\tau) = o, \tag{17}$$

$$\lim \vartheta_3(v|\tau) = \lim \vartheta_0(v|\tau) = 1, \tag{18}$$

$$\lim q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_1(v|\tau) = 2 \sin \pi v, \tag{19}$$

$$\lim q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_2(v|\tau) = 2 \cos \pi v.$$

B) ω_1 *infinit*, ω_3 *finit*.

268. Funcțiunile $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\zeta(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3)$ fiind simetrice în raport cu cele două perioade, limitele către cari ele tind, când ω_1 tinde către infinit pe când ω_3 rămâne finit, sunt date de formulele (3), (4) și (7) în cari înlocuim ω_1 prin ω_3. Limitele cantităților η și ale invarianților vor fi date de egalitățile

$$\eta_1 = \infty, \quad \eta_3 = \frac{\pi^2}{12\omega_3}, \quad \lim \frac{\eta_1}{\omega_1} = \lim \frac{\eta_3}{\omega_3} = \frac{\pi^2}{12\omega_3^2}, \tag{20}$$

$$g_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_3^2}\right)^2, \quad g_3 = \frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_3^2}\right)^2, \quad \Delta = o. \tag{21}$$

Rădăcinile cari devin egale sunt $e_1 = p\omega_1$ și $e_2 = p\omega_2$. Avem

$$e_1 = e_2 = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_3^2}, \quad e_3 = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_3^2}.$$

269. Limitele cofuncțiunilor σ și ale funcțiunilor lui Jacobi, din cauza disimetriei acestor funcțiuni în raport cu ω_1 și ω_3, nu sunt cuprinse în formulele corespunzătoare cazului A) prin permutarea lui ω_1 cu ω_3. Reintrăm, însă, în cazul precedent, aplicând transformarea perioadelor

$$\omega_1' = \omega_3, \quad \omega_3' = -\omega_1. \tag{22}$$

Fie e'_1, e'_2, e'_3, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$ rădăcinile și cofuncțiunile σ corespunzătoare sistemului celui nou de perioade; vom aveà (§ 187)

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_1, \\ \bar{\sigma}_1 &= \sigma_3, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_1. \end{aligned} \tag{23}$$

Semiperioada ω'_1 fiind finită și $\omega'_3 = \infty$, ne regăsim în cazul A). Avem așa dar valorile

$$e'_1 = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_1'^2}, \quad e'_2 = e'_3 = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_1'^2}, \tag{24}$$

și expresiunile

$$\bar{\sigma}_1 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_1'^2}} \cos\frac{\pi u}{2\omega'_1}, \quad \bar{\sigma}_2 u = \bar{\sigma}_3 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_1'^2}}; \tag{25}$$

sau, în virtutea formulelor (22) și (23)

$$e_3=\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_3^2},\quad e_1=e_2=-\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_3^2},$$

valori deja găsite (21) și

$$(26)\qquad \sigma_1 u=\sigma_2 u=e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}},\quad \sigma_3 u=e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}\cos\frac{\pi u}{2\omega_3}.$$

270. *Funcțiunile lui Jacobi.* Ecuațiunile (24) dau

$$\sqrt{e'_1-e'_3}=\frac{\pi}{2\omega'_1}=\frac{\pi}{2\omega_3}.$$

Insă (6) (§ 188):

$$\sqrt{e'_1-e'_3}=\sqrt{e_3-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_3};$$

prin urmare

$$(27)\qquad \sqrt{e_1-e_3}=\frac{i\pi}{2\omega_3},$$

$$(28)\qquad \mathrm{K}=\omega_1\sqrt{e_1-e_3}=\infty,\qquad \mathrm{K}'=\frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2}.$$

Limitele modulelor k și k' sunt

$$(29)\qquad k=1,\ k'=o.$$

Limitele corespunzătoare ale celor trei funcțiuni rezultă din egalitățile:

$$(30)\qquad \begin{cases} sn(v,k)=-i\dfrac{sn(iv,k')}{cn(iv,k')},\\ cn(v,k)=\dfrac{1}{cn(iv,k')},\\ dn(v,k)=\dfrac{dn(iv,k')}{cn(iv,k')}, \end{cases}\qquad (5)\ (\S\ 242)$$

în cari facem $k=1$ și $k'=o$.

Ținând seamă de formulele (15), obținem

$$(31)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{k=1} sn(v,k)=-i\dfrac{\sin iv}{\cos iv}=\dfrac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}},\\ \lim\limits_{k=1} cn(v,k)=\lim\limits_{k=1} dn(v,k)=\dfrac{1}{\cos iv}=\dfrac{2}{e^v+e^{-v}}. \end{cases}$$

C) ω_1 *infinit*, ω_3 *infinit*.

271. Ambele perioade tinzând către infinit astfel ca raportul lor să *nu* devie real, paralelogramul perioadelor acoperă la limită tot planul.

Făcând $\omega_1 = \infty$ în formulele găsite în cazul A), obţinem expresiunile următoare:

$$(32) \qquad p\,u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta\,u = \frac{1}{u}, \quad \sigma\,u = u;$$

$$(33) \qquad g_2 = g_3 = o; \quad e_1 = e_2 = e_3 = o.$$

Din egalitatea $\zeta u = \frac{1}{u}$ rezultă valorile:

$$(34) \qquad \eta_1 = \eta_3 = o;$$

prin urmare

$$(35) \qquad \sigma_1 u = \sigma_2 u = \sigma_3 u = 1.$$

Deasemenea obţinem

$$(36) \qquad \wp = o, \quad sn\,\wp = o, \quad cn\,\wp = dn\,\wp = 1.$$

II. Al doilea mod de degenerare: $\Delta = o$.

272. Dintre funcţiunile lui Weierstrass vom considerà numai funcţiunea *pu*, celelalte putându-se deduce din cea dintâiu.

Să considerăm integrala

$$(1) \qquad u = \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{1}{2}\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}},$$

care defineşte funcţiunea $x = p\,(u, g_2, g_3)$. Discriminantul Δ fiind nul, două sau toate rădăcinile e_1, e_2, e_3 sunt egale.

1° Fie $e_2 = e_3$. Vom aveà

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2}\int_\infty^x \frac{dx}{(x-e_3)\sqrt{x-e_1}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[arctg\,\frac{\sqrt{x-e_1}}{\sqrt{e_1-e_3}} - \frac{\pi}{2}\right];$$

de unde

$$(3) \qquad x = e_1 + (e_1 - e_3)\,cot^2\,u\,\sqrt{e_1-e_3},$$

sau

$$(4) \qquad x = e_3 + \frac{e_1-e_3}{sin^2\,u\,\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Pentru a găsi limitele către cari tind semiperioadele ω_1, ω_3 să considerăm formulele

$$(5) \qquad \omega_1\sqrt{e_1-e_3} = \mathrm{K}, \qquad \omega_3\sqrt{e_1-e_3} = i\,\mathrm{K}'.$$

In cazul nostru ($e_2=e_3$), avem $k=o$; prin urmare $K=\frac{\pi}{2}$, $K'=\infty$.

De unde

$$\omega_1\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2},\quad \omega_3=\infty. \tag{6}$$

Cea dintâiu din aceste două egalități, împreună cu egalitatea

$$e_1+2e_2=o$$

la care se reduce relațiunea $e_1+e_2+e_3=o$, dau valorile rădăcinilor

$$e_1=\frac{\pi^2}{6\omega_1^2},\quad e_2=e_3=-\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}. \tag{7}$$

Ducând aceste valori în egalitatea (4), obținem expresiunea funcțiunii *pu*

$$x=-\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}} \tag{8}$$

sub forma (3), § (264).

2°. Fie $e_2=e_1$.

Avem $k=1$, $k'=o$; cantitățile K și K' permutându-se între ele, rezultă $K=\infty$, $K'=\frac{\pi}{2}$. Prin urmare $\omega_1=\infty$, $\omega_3\sqrt{e_1-e_3}=\frac{i\pi}{2}$. Expresiunea lui *pu* se deduce din egalitățile (4) și (8), permutând e_1 cu e_3, sau ω_1 cu ω_3.

3°. Toate rădăcinile egale: $e_1=e_2=e_3=o$. In acest caz egalitatea (1) devine

$$u=\frac{1}{2}\int_\infty^x\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}; \tag{9}$$

de unde

$$x=\frac{1}{u^2}. \tag{10}$$

Funcțiunea fiind rațională, nu există perioade. De altmintrelea, limitele semiperioadelor ω_1, ω_3 sunt, în valoare absolută, limitele integralelor

$$\omega_1=\int_\infty^{e_1}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\qquad \omega_3=\int_\infty^{e_3}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}, \tag{11}$$

a căror limită comună, pentru $g_2=g_3=0$, este

$$\frac{1}{2}\int_\infty^o\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\infty. \tag{12}$$

273. *Funcţiunile* $sn v$, $cn v$, $dn v$. Degenerarea acestor funcţiuni corespunde valorilor $k=o$, $k=1$. Făcând în integrala

$$v=\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}}, \tag{13}$$

$k = o$, avem

$$v=\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\,sin\,x;$$

de unde

$$x = sn\,v = sin\,v \tag{14}$$

In virtutea relaţiunilor $cn\,v=\sqrt{1-sn^2\,v}$, $dn\,v=\sqrt{1-k^2\,sn^2\,v}$ rezultă

$$cn\,v=cos v, \quad dn v=1. \tag{15}$$

Făcând în integrala (13) $k^2 = 1$, obţinem

$$v=\int_o^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,log\,\frac{1+x}{1-x};$$

de unde

$$x=sn v=\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}, \quad cn v=dn v=\frac{2}{e^v+e^{-v}}. \tag{16}$$

CAPITOLUL XXI.

FUNCŢIUNEA *pu* CU INVARIANŢI REALI.

274. In aplicaţiunile funcţiunilor eliptice, cazul cel mai important este acela în care invarianţii g_2, g_3 sunt reali. Vom distinge două cazuri, după cum discriminantul

$$\Delta=g_2^3-27\,g_3^2$$

este pozitiv sau negativ.

I. $\Delta>o$.

Rădăcinile ecuaţiunii

$$4\,x^3-g_2\,x-g_3=o. \tag{1}$$

sunt reale; le notăm în ordinea descrescândă

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Din relaţiunea $e_1 + e_2 + e_3 = o$, rezultă $e_1 > o$, $e_3 < o$; e_2 poate fi pozitiv, negativ sau nul.

1°. *Valori u reale.* In domeniul $u = 0$, avem

$$pu = \frac{1}{u^2} + P(u^2), \tag{2}$$

$P(u^2)$ fiind o serie întreagă cu coeficienți reali. De unde rezultă că funcțiunea pu este reală dealungul segmentului axei reale cuprins în interiorul cercului cu centrul în origină și trecând prin cel mai apropiat pol al funcțiunii. Ea admite așa dar o perioadă reală și o perioadă pur imaginară (§ 134).

Fie, în valoare absolută, $2\omega_1$ cea mai mică perioadă reală și $2\omega_3$ cea mai mică perioadă pur imaginară. Polurile reale ale funcțiunii pu sunt așà dar toate cuprinse în expresiunea $u = 2m\omega_1$ și cele pur imaginare în expresiunea $u = 2n\omega_3$, m și n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$.

Funcțiunea considerată pu fiind reală pentru valori reale vecine cu $u = o$, rămâne reală pe axa reală, cel puțin până la cel mai apropiat pol [1]), adică până la punctul $u = 2\omega_1$. Insă, oricărui punct al axei reale corespunde un punct congruent cuprins între o și $2\omega_1$; de unde rezultă că funcțiunea pu este reală pe toată axa reală.

Aceleași concluziuni se aplică derivatei $p'u$, în virtutea ecuațiunii

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 2u\,P'(u^2), \tag{3}$$

dedusă din ecuațiunea (2).

Putem presupune semiperioada ω_1 pozitivă; ω_1 este așà dar cea mai mică valoare pozitivă a lui u pentru care derivata $p'u$ se anulează. De unde rezultă că în intervalul $(0, \omega_1)$, din care excludem valorile extreme, derivata $p'u$ păstrează un semn invariabil, care este *negativ*, precum ne arată termenul său principal $-\frac{2}{u^3}$. De aci rezultă că făcând să varieze u dela o până la ω_1, pu *descreşte necontenit* dela $+\infty$ (în virtutea termenului său principal $\frac{1}{u^2}$) până la valoarea $p\omega_1$, care, precum rezultă din ecuațiunea

$$p'^2u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3), \tag{4}$$

este egală cu cea mai mare rădăcină, adică $p\omega_1 = e_1$.

Variațiunea funcțiunii pu în intervalul $(\omega_1, 2\omega_1)$ se deduce din relațiunea

$$p(\omega_1 + u) = p(\omega_1 - u). \tag{5}$$

[1]) I., pag. 305.

Funcţiunea trece dar în al doilea intervalul prin aceleaşi valori ca în cel dintâi, însă în ordinea inversă [1]). De unde rezultă că pe axa reală, *pu* poate primi orice valoare reală $\geq e_1$.

In intervalul $(0, \omega_1)$ derivata fiind negativă, vom scrie, punând semnul în evidenţă,

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3};$$

de unde, în virtutea variaţiunii funcţiunii *pu* în acest interval,

$$(6) \qquad \omega_1 = -\int_{\infty}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

radicalul fiind pozitiv.

Derivata $p'u$ este, precum am văzut, negativă în intervalul $(0, \omega_1)$; din ecuaţiunea (4) rezultă că, în acest interval, ea variază necontenit în acelaş sens dela $-\infty$ la zero.

Din ecuaţiunea (5) rezultă

$$(7) \qquad p'(\omega_1 + u) = -p'(\omega_1 - u),$$

adică în intervalul $(\omega_1, 2\omega_1)$ derivata $p'u$ este pozitivă şi variază necontenit în acelaş sens dela 0 la $+\infty$.

In intervalul $(0, 2\omega_1)$ derivata trece aşà dar o singură dată prin orice valoare reală şi, prin urmare, pe axa reală, ea poate primi orice valoare reală cuprinsă între $-\infty$ şi $+\infty$.

2°. *Valori u pur imaginare* $u = iv$, v *real.* Avem (91 § 148)

$$(8) \qquad p(iv; g_2, g_3) = -p(v; g_2, -g_3),$$

$$(9) \qquad p'(iv; g_2, g_3) = ip'(v; g_2, -g_3).$$

Fie

$$(10) \qquad x = p(v; g_2, -g_3);$$

prin urmare

$$(11) \qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x + g_3.$$

Rădăcinile ecuaţiunii

$$(12) \qquad 4x^3 - g_2 x + g_3 = 0$$

fiind egale şi de semne contrarii cu cele ale ecuaţiunii $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, avem, în ordinea de mărime descrescândă,

$$-e_3 > -e_2 > -e_1.$$

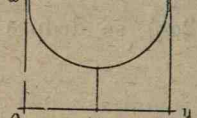

Fig. 51

[1]) Figurând funcţiunea $x = pu$ printr'o curbă raportată la două axe rectunghiulare (Ou, Ox), dreapta $u = \omega_1$ este o axă de simetrie a curbei şi dreptele paralele $u = 0$, $u = 2\omega_1$, sunt asimptote ale ei (fig. 51).

Perioada pur imaginară $2\omega_3$ fiind, precum am presupus mai sus, cea mai mică în valoare absolută, rezultă că ω_3 este, în valoare absolută, cea mai mică valoare pur imaginară pentru care $p'u$ se anulează și prin urmare valoarea $v = \frac{\omega_3}{i}$, pe care o putem presupune pozitivă, este cea mai mică valoare pozitivă a lui v pentru care avem

$$p'\left(\frac{\omega_3}{i}; g_2, -g_3\right) = 0.$$

Valoarea corespunzătoare a funcțiunii $p(v; g_2, -g_3)$ va fi așà dar egală cu cea mai mare rădăcină a ecuațiunii (12) adică

$$p\left(\frac{\omega_3}{i}; g_2, -g_3\right) = -e_3. \tag{13}$$

Conchidem, ca și în cazul 1°, că făcând să varieze v dela 0 până la $\frac{\omega_3}{i}$, funcțiunea $p(v; g_2, -g_3)$ descrește necontenit dela ∞ până la $-e_3$; prin urmare, când u primește valori pur imaginare dela 0 până la ω_3, funcțiunea $p(u; g_2, g_3)$ crește necontenit dela $-\infty$ până la e_3. In intervalul $(\omega_3, 2\omega_3)$, funcțiunea trece prin aceleași valori, în ordinea inversă, în virtutea ecuațiunii $p(\omega_3 + u) = p(\omega_3 - u)$. Unui punct oarecare situat pe axa imaginară corespunde un punct congruent pe segmentul $(0, 2\omega_3)$; de unde rezultă că pe axa imaginară, funcțiunea pu este reală și poate primi orice valoare reală $\leq e_3$.

Din expresiunea (9) rezultă că, pe axa imaginară, derivata $p'u$ este de forma it, variabila t fiind reală și crescând dela $-\infty$ până la 0 când u descrie segmentul $(0, \omega_3)$ și dela 0 la $+\infty$, când u descrie segmentul $(\omega_3, 2\omega_3)$.

Pentru semiperioada ω_3 avem expresiunea

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_{-e_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}, \tag{14}$$

analoagă cu aceea a lui ω_1, dată de formula (6), în care e_1 este înlocuit prin $-e_3$ și g_3 prin $-g_3$.

Cele două perioade considerate $(2\omega_1, 2\omega_3)$ *formează un sistem de perioade primitive.* Paralelogramul acestor perioade este un dreptunghiu. Este de ajuns a arătà că în acest dreptunghiu nu există nici un pol al funcțiunii, afară de vârfurile dreptunghiului, astfel că în dreptunghiul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ funcțiunea admite numărul minimum de poluri, anume polul dublu $u = o$. Aceasta este adevărat pe cele două laturi $(0, 2\omega_1)$, $(0, 2\omega_3)$ și prin urmare pe laturile respectiv paralele cu cele dintâi.

Fie $\alpha + i\beta$ un punct interior dreptunghiului

$$0 < \alpha < 2\omega_1, \quad 0 < \beta < \frac{2\omega_3}{i}.$$

Să considerăm formula de adiţiune

$$p(\alpha+i\beta)+p\alpha+pi\beta=\frac{1}{4}\left[\frac{p'\alpha-p'i\beta}{p\alpha-pi\beta}\right]^2.$$

Cantităţile $p\alpha$, $pi\beta$, $p'\alpha$, $p'i\beta$ au, precum am văzut mai sus, valori finite şi numitorul membrului al doilea este diferit de zero, căci $p\alpha \geq e_1$ şi $pi\beta \leq e_3$. Punctul $\alpha+i\beta$ nu poate dar fi pol al funcţiunii pu.

3°. *Valori* $u=\omega_3+v$, v *real*. Avem formula

$$p(v+\omega_3)-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{pv-e_3}, \tag{15}$$

de unde

$$p'(v+\omega_3)=-\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{(pv-e_3)^2}p'v. \tag{16}$$

Funcţiunile pv şi $p'v$ din membrele de al doilea variază, precum s'a văzut în cazul 1°. De unde rezultă că făcând să varieze v dela 0 la ω_1, $p(v+\omega_3)$ creşte necontenit dela e_3 la e_2. In acelaş interval, derivata $p'(v+\omega_3)$ este pozitivă, anulându-se pentru valorile extreme; ea admite deci un maximum în acest interval: un singur maximum. Căci dacă ea ar aveà două maxime, ar aveà şi un minimum şi reprezintând prin a un număr pozitiv mai mare decât minimul şi mai mic decât cel mai mic din cele două maxime, ar urmà ca ecuaţiunea

$$p'(v+\omega_3)=a$$

să aibă patru rădăcini în intervalul $(0, \omega_1)$. Ceea ce este imposibil, funcţiunea $p'u$ fiind de ordinul al treilea.

Din variaţiunea funcţiunii $p(v+\omega_3)$ în intervalul $(0, \omega_1)$ deducem o nouă expresiune a semiperioadei ω_1. Punând $x=p(v+\omega_3)$, avem

$$dv=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

radicalul fiind pozitiv; căci, în intervalul considerat, derivata $p'(v+\omega_3)$ este pozitivă. De unde rezultă egalitatea

$$\omega_1=\int_{e_3}^{e_2}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}. \tag{17}$$

4°. *Valori* $u=\omega_1+i\varrho$, ϱ *real.* Din formulele

$$p(\omega_1+i\varrho)-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pi\varrho-e_1}$$

conchidem, în virtutea studiului făcut la cazul 2°, că, în intervalul $(0, \frac{\omega_3}{i})$, $p(\omega_1+i\varrho)$ este real și descrește necontenit dela e_1 la e_2. In acest interval, derivata $p'(\omega_1+i\varrho)$ este de forma it, t primind valori reale, pozitive și anulându-se la ambele extremități.

Din cele ce preced rezultă o nouă expresiune a semiperioadei ω_3. Fie

$$y=p(\omega_1+i\varrho)=-p\left(\frac{\omega_1}{i}+\varrho;\ g_2,-g_3\right)$$

și

$$x=p\left(\frac{\omega_1}{i}+\varrho;\ g_2,-g_3\right)=-y.$$

Prin urmare, când ϱ variază dela 0 la $\frac{\omega_3}{i}$, x crește dela $-e_1$ la $-e_2$ și ecuațiunea

$$\left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2=4x^3-g_2x+g_3$$

ne dă egalitatea

$$\frac{\omega_3}{i}=\int_{-e_1}^{-e_2}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x+g_3}},\tag{18}$$

radicalul fiind pozitiv, căci x și ϱ cresc în acelaș timp. Această egalitate se poate deduce imediat din formula (17), observând că dacă înlocuim, în funcțiunea *pu*, semiperioadele ω_1, ω_3 respectiv prin $\frac{\omega_3}{i}$, $\pm i\omega_1$, g_2 nu se schimbă și g_3 își schimbă semnul; ceeace are drept efect a schimbà rădăcinile e_1, e_2, e_3 respectiv în $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$.

Rezumând variațiunea funcțiunii $x=p(u;\ g_2, g_3)$, în cazul $\Delta>0$, când u descrie dreptunghiul (ω_1, ω_3), începând dela $u=0$, în sensul pozitiv, vedem că această funcțiune primește valori reale și variază într'un mod continuu, respectiv pe fiecare latură, dela $+\infty$ la e_1; dela e_1 la e_2; dela e_2 la e_3; dela e_3 la $-\infty$, trecând o singură dată prin fiecare valoare: *perimetrul dreptunghiului* (u) *se transformă punct cu punct în axa reală* (x).

Derivata $p'u$ este reală pe laturile $(0, \omega_1)$, $(\omega_3, \omega_1+\omega_3)$: dealungul celei dintâi, ea variază dela $-\infty$ la 0, trecând o singură dată prin fiecare valoare; dealungul celei de al doilea, ea este pozitivă variând dela 0 la 0 şi admite un singur maximum. Pe celelalte două laturi, $p'u$ este de forma it, t primind valori reale pozitive dela 0 la 0 pe latura $(\omega_1, \omega_1 + \omega_3)$ şi negative dela 0 la $-\infty$ pe latura a patra $(\omega_3, 0)$.

275. Cari sunt în tot planul (u) valorile variabilei pentru cari funcţiunea pu este reală? Fie a o valoare reală oarecare. Există pe conturul dreptunghiului (ω_1, ω_3) un punct ϱ, *unul singur*, pentru care avem $p\varrho = a$. Toate valorile lui u pentru cari $pu = p\varrho$ fiind date de expresiunea

$$u = \pm \varrho + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

rezultă că, abstracţiune făcând de multipli de perioade, singurele puncte u cărora corespund valori reale pentru pu sunt situate pe conturul dreptunghiului considerat şi pe cel simetric cu acesta în raport cu origina $u = 0$. In interiorul fiecărui dreptunghiu pu este dar imaginar.

La valori imaginare conjugate ale lui u corespund, pentru pu, valori imaginare conjugate. Unui punct u situat în interiorul dreptunghiului (ω_1, ω_3) corespunde, pentru $x = pu$, un punct x situat *de desubtul* axei reale. In adevăr, fie a şi b două cantităţi reale satisfăcând inegalităţile

$$0 < a < \omega_1, \qquad 0 < b < \frac{\omega_3}{i}$$

şi fie

$$p(a + ib) = \mathrm{A} + i\mathrm{B}.$$

Formula de adiţiune a funcţiunii $p(a + ib)$ dă pentru iB valoarea

$$i\mathrm{B} = -\frac{1}{2}\frac{p'a\ p'ib}{(pa - pib)^2};$$

însă $p'a < 0$, $p'ib = it$, $t < 0$. Aşà dar B este real şi negativ.

Rezultatul precedent se poate verifică considerând valoarea principală a lui $p(a + ib)$, a şi b fiind numere pozitive foarte mici. Această valoare fiind $\frac{1}{(a+ib)^2}$, coeficientul lui i este $-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$; prin urmare într'un punct interior dreptunghiului (ω_1, ω_3), în vecinătatea originei, coeficientul B este < 0. Acest coeficient însă nu-şi poate schimbà semnul fără a se anulà, adică fără ca u să treacă

prin una din laturile dreptunghiului. Semnul lui B rămâne dar acelaș în tot interiorul dreptunghiului.

276. *Transformare conformă.* Din punctul $u = 0$ să ne închipuim descris un sfert de cerc $a\beta$ cu o rază ϱ foarte mică, mărginit de direcțiunile ω_1, ω_3 (fig. 52) In domeniul acestui punct avem

$$x = pu = \frac{1}{u^2} + u^2 \, \mathrm{P}\,(u).$$

Fie A și B punctele x corespunzătoare punctelor a, β (fig. 53). Când

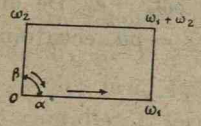

Fig. 52

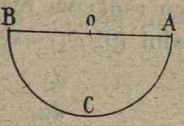

Fig. 53

u *descrie arcul* $a\beta$, x descrie un arc ACB care diferă foarte puțin de arcul descris de punctul $y = \frac{1}{u^2}$, adică de un semicerc situat dedesubtul axei AB. Aceste două arce se corespund punct cu punct. De unde rezultă că conturul dreptunghiului (ω_1, ω_3) limitat de arcul $a\beta$ se transformă punct cu punct, în virtutea ecuațiunii $x = pu$, în conturul ACBA. Insă, în aria limitată de primul contur, funcțiunea pu este olomorfă; prin urmare cele două arii sunt transformate conforme, una a celeilalte. Făcând ϱ să tindă către zero, cele două arii devin respectiv dreptunghiul (ω_1, ω_3) și semiplanul (x) situat de desubtul axei reale. De unde concluziunea: Funcțiunea $x = pu$ *realizează transformarea conformă a dreptunghiului* (ω_1, ω_3) *în semiplanul* (x) *situat dedesubtul axei reale.*

Dreptunghiul simetric cu cel dintâi, în raport cu axa reală, se transformă, în virtutea simetriei, într'un mod conform în semiplanul (x) situat deasupra axei reale. Se recunoaște lesne că aria (u) limitată de cele două dreptunghiuri se transformă, într'un mod conform, în planul (x) limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$. Deasemenea, aria formată de dreptunghiurile (ω_1, ω_3), $(-\omega_1, \omega_3)$, simetrice în raport cu axa imaginară, se transformă într'un mod conform în planul (x) limitat de tăietura $(e_3, +\infty)$. Ambele tăieturi sunt făcute dealungul axei reale [1]).

II. $\Delta < 0$.

276. Dintre cele trei rădăcini ale ecuațiunei (1), una este reală; fie e_2 rădăcina reală și e_1, e_3 rădăcinile imaginare conjugate.

[1]) A comparà variațiunea funcțiunii *pu*, studiată mai sus, cu variațiunea integralei u (§ 109).

1°. *Valori u reale.* Ca și în cazul $\Delta > o$, funcțiunea *pu* și derivata sa $p'u$ sunt reale pentru valori reale ale lui u. De unde rezultă că funcțiunea *pu* admite o perioadă reală și una pur imaginară. Fie $2\tilde{\omega}_2$ cea mai mică perioadă reală pe care o presupunem pozitivă și $2\,\tilde{\omega}'_2$ cea mai mică, în valoare absolută, perioadă pur imaginară, $\frac{\tilde{\omega}'_2}{i}$ fiind deasemenea $> o$.

In intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$ $p'u$ este < 0; prin urmare când u variază dela 0 la $\tilde{\omega}_2$, *pu* descrește necontenit dela $+\infty$ până la valoarea $p\,\tilde{\omega}_2$, egală cu rădăcina reală e_2, adică $p\tilde{\omega}_2 = e_2$. De unde rezultă că în intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$ avem, pentru $x = pu$, ecuațiunea

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = -\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}$$

și, în virtutea variațiunii funcțiunii $x = pu$ în acest interval,

$$(2) \qquad \tilde{\omega}_2 = -\int_{\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}}$$

radicalul fiind pozitiv.

In intervalul $(\tilde{\omega}_2, 2\tilde{\omega}_2)$ *pu* trece, în ordinea inversă, prin aceleași valori prin cari trece în intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$, în virtutea ecuațiunii $p(\tilde{\omega}_2 + u) = p(\tilde{\omega}_2 - u)$. De unde rezultă că, pentru valori reale u, *pu* poate primi orice valoare reală $\geq e_2$.

2°. *Valori $u = iv$, v real.* Prin considerațiuni identice cu cele din (2°, $\Delta > 0$), ținând seamă că $-e_2$ este unica rădăcină reală a ecuațiunii (12) conchidem că $\frac{\tilde{\omega}'_2}{i}$ este cea mai mică valoare pozitivă pentru care derivata $p'(v; g_2, -g_3)$ se anulează; prin urmare

$$(3) \qquad p\left(\frac{\tilde{\omega}'_2}{i};\ g_2, -g_3\right) = -e_2.$$

De unde rezultă că în intervalul $\left(0, \frac{\tilde{\omega}'_2}{i}\right)$, funcțiunea $p(v; g_2 - g_3)$ descrește dela $+\infty$ până la $-e_2$; prin urmare dealungul segmentului $(0, \tilde{\omega}'_2)$ funcțiunea $p(u; g_2, g_3)$ crește dela $-\infty$ pân la e_2 și pe segmentul $(\tilde{\omega}'_2, 2\tilde{\omega}'_2)$ ea descrește dela e_2 până la $-\infty$. Așà dar, dealungul axei imaginare, funcțiunea *pu* este reală și poate prin orice valoare reală $\leq e_2$. In punctul $u = \tilde{\omega}'_2$ *pu* are aceiaș valoare ca în punctul $u = \tilde{\omega}_2$

$$(4) \qquad p\,\tilde{\omega}'_2 = p\tilde{\omega}_2 = e_2.$$

Semiperioada $\tilde{\omega}'_2$ este dată de integrala

$$(5) \qquad \frac{\tilde{\omega}'_2}{i} = \int_{-e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x + g_3}}$$

corespunzătoare egalității (14) (pag. 305).

Cele două perioade $2\tilde{\omega}_2$, $2\tilde{\omega}'_2$ — cea mai mică perioadă reală și cea mai mică perioadă pur imaginară, în valoare absolută — nu formează un sistem primitiv; căci, pe lângă polurile cari coincid cu vârfurile dreptunghiului acestor perioade, funcțiunea *pu* admite, în interiorul dreptunghiului, polul $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$, precum rezultă din formula

$$p(u+\tilde{\omega}_2)-e_2=\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{pu-e_2},$$

în care numitorul din membrul al doilea se anulează pentru $u=\tilde{\omega}'_2$. Acest punct este singurul pol în interiorul dreptunghiului considerat. In adevăr, fie $\alpha+i\beta$ un punct interior dreptunghiului, diferit de $\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2$; prin urmare *nu* avem în acelaș timp $\alpha=\tilde{\omega}_2$, $i\beta=\tilde{\omega}'_2$. Să considerăm formula de adițiune

$$p(\alpha+i\beta)+p\alpha+pi\beta=\frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha-p'i\beta}{p\alpha-pi\beta}\right)^2.$$

Pentru valorile considerate ale cantităților α și β, termenii $p\alpha$, $pi\beta$, $p'\alpha$, $p'i\beta$ au valori finite și $p\alpha$ este diferit de $pi\beta$; de unde rezultă că $p(\alpha+i\beta)$ este finit în interiorul dreptunghiului, exceptând punctul $\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2$.

Punctul $\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2$, fiind un pol al funcțiunii *pu*, este un punct perioadă al acestei funcțiuni; căci polurile funcțiunii *pu* coincid cu vârfurile rețelei de paralelograme, construite pe un sistem oarecare de două perioade primitive. Punctul $\tilde{\omega}_2-\tilde{\omega}'_2$, simetric cu punctul $\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2$ în raport cu axa reală, este, de asemenea, un punct perioadă.

Din cele ce preced rezultă că cantitățile

$$2\omega_1=\tilde{\omega}_2-\tilde{\omega}'_2,\quad 2\omega_3=\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2 \tag{6}$$

formează un sistem de perioade primitive; paralelogramul corespunzător este un romb. Să punem

$$\tilde{\omega}_2=-\omega_2,\quad \tilde{\omega}'_2=-\omega'_2; \tag{7}$$

egalitățile precedente devin

$$2\omega_1=-\omega_2+\omega'_2,\quad 2\omega_3=-\omega_2-\omega'_2,$$

de unde relațiunea $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$.

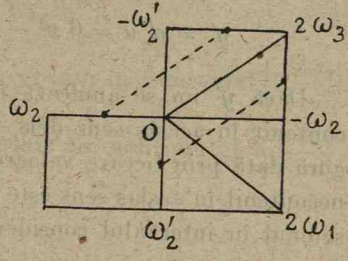

Fig. 54

Să observăm că punctele $u\pm\omega_2$ sunt congruente cu punctele $u\pm\omega'_2$, oricare ar fi valoarea lui u. In particular, considerând dreptunghiul $(-\omega_2, -\omega'_2)$ și simetricul său (ω_2, ω'_2), în raport cu origină, (fig. 54), punctele laturilor $(0, \omega'_2)$, $(0, \omega_2)$ sunt respectiv congruente cu punctele laturilor $(2\omega_3, -\omega_2)$, $(2\omega_3, -\omega'_2)$; prin urmare, dealungul laturilor

$(-\omega_2, 2\omega_3)$, $(-\omega_2', 2\omega_3)$, funcțiunea pu variază respectiv dela e_2 la $-\infty$ și dela e_2 la $+\infty$.

Din cele ce preced conchidem că singurele valori u, abstracțiune făcând de multipli de perioade, pentru cari pu este real, sunt valorile reale și valorile pur imaginare.

In puncte simetrice cu axa reală, $u = a \pm ib$, a și b satisfăcând inegalitățile $0 < a < -\omega_2$, $0 < b < -\frac{\omega_2'}{i}$, avem

$$p(a \pm ib) = A \mp iB,$$

semnele superioare și inferioare corespunzându-se, A și B fiind cantități reale și $B > 0$. De unde rezultă că cele două rădăcini imaginare conjugate

$$e_1 = p\omega_1 = p\left(-\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right), \quad e_3 = p\omega_3 = p\left(-\frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_2'}{2}\right)$$

ale ecuațiunii (1) au coeficientul lui i respectiv $\gtrless 0$:

$$e_1 = \alpha + i\beta, \quad e_3 = \alpha - i\beta, \quad \beta > 0.$$

Din variațiunea funcțiunii $x = pu$, dealungul dreptunghiului $(-\omega_2, -\omega_2')$, rezultă că dacă punctul u descrie conturul evitând vârfurile prin câte un cadran de cerc infinit mic cu centrul în vârf, situat în interiorul dreptunghiului, punctul x descrie de două ori conturul format din axa reală și un semicerc foarte mare cu centrul în origine, situat dedesubtul axei reale. Dreptunghiului considerat (u) corespunde dar de două ori semiplanul (x) situat dedesubtul axei reale. Punctul $x = e_3$ corespunzător punctului $u = \omega_3$ este punct de ramificațiune al suprafeței lui Riemann ($x = pu$, $y = p'u$).

277. Să complectăm studiul variațiunii derivatei $p'u$ pentru valori reale u. Punând $x = pu$, $y = p'u$, avem

$$y' = p''u = 6x^2 - \frac{1}{2}g_2, \quad y'' = p'''u = 12xy.$$

Dacă y' nu se anulează în intervalul $(0, -\omega_2)$, y variază necontenit în același sens dela $-\infty$ la 0 și, prin urmare, trece o singură dată prin fiecare valoare negativă. Pentru ca y să nu varieze necontenit în același sens este necesar și suficient ca y' să-și schimbe semnul în intervalul considerat și, de oarece această derivată rămâne finită, trebuie ca $6x^2 - \frac{1}{2}g_2$ să se anuleze pentru o valoare reală a lui x; prin urmare trebuie ca

$$g_2 > 0.$$

Această condițiune nu este suficientă. In adevăr, valorile extreme ale lui $p'u$ în intervalul considerat fiind $-\infty$ și 0, existența unui maximum trage după sine existența unui minimum. Insă, în acest interval, $x > e_2$; prin urmare este necesar ca cele două rădăcini ale ecuațiunii $6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0$ să fie amândouă mai mari ca e_2. De unde rezultă că e_2 trebuie să fie negativ și prin urmare g_3, al cărui semn este acelaș ca al lui e_2, trebuie să fie negativ. Așadar, în cazul

$$g_2 > 0, \quad g_3 < 0$$

și numai în acest caz, $p'u$ admite în interiorul $(0, -\omega_2)$ un maximum și un minimum.

In intervalul $(0, \omega_2)$ $p'u$ trece prin aceleași valori cu semnele schimbate.

278. *Funcțiunile* σu, ζu; *funcțiunile* snv, cnv, dnv, $(\Delta > 0)$. Funcțiunea σu este reală pentru valori reale ale lui u, căci factorii produsului $\Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$ sunt imaginari conjugați doi câte doi. Această funcțiune anulându-se pentru valorile reale $u = 2m\omega_1$, cari sunt zeruri simple, își schimbă semnul când u trece prin una din aceste valori și păstrează un semn invariabil în fiecare interval $(2m\omega_1, 2(m+1)\omega_1)$. Pentru valori pozitive ale lui u și destul de mici, derivata $\sigma' u$ fiind pozitivă, căci $\sigma'(0) = 1$, funcțiunea σu crește împreună cu u, când u pleacă dela 0; prin urmare, în intervalul $(0, 2\omega_1)$, σu este pozitiv și $\sigma\omega_1$ este o cantitate reală și pozitivă.

Pentru valori pur imaginare $u = iv$, v real, rezultă, în virtutea formulei de omogenitate

$$(1) \qquad \sigma(iv \mid \omega_1, \omega_3) = i\sigma\left(v \mid \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right),$$

că $\frac{\sigma iv}{i}$ este real și pozitiv când v este cuprins în intervalul $\left(0, \frac{2\omega_3}{i}\right)$ și își schimbă semnul când v trece printr'un multiplu al lui $\frac{2\omega_3}{i}$. Cantitatea $\frac{\sigma\omega_3}{i}$ este așà dar pozitivă.

Derivând ambele membre ale formulei (1), avem

$$(2) \qquad \sigma'(iv \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma'\left(v \mid \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right).$$

Derivata $\sigma' u$ este așà dar reală pentru valori pur imaginare ale lui

u. De unde rezultă că funcţiunea

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} \tag{3}$$

este reală pentru valori reale ale lui u şi pur imaginară pentru valori pur imaginare. Prin urmare η_1 şi $\frac{\eta_3}{i}$ sunt cantităţi reale [1]).

279. *Funcţiunile* $\sigma_\alpha u$. Funcţiunile pare $\sigma_\alpha u$ sunt reale pentru u real precum şi pentru u pur imaginar. Aceasta rezultă din expresiunile

$$\sigma_\alpha u = \sigma u \sqrt{pu - e_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Căci pentru u real, avem $pu > e_1$ şi pentru u pur imaginar avem $pu < e_3$, astfel că ambii factori din membrul al doilea sunt pur imaginari în acelaş timp. Pentru $u=0$, cele trei funcţiuni sunt egale cu 1. Funcţiunea $\sigma_1 u$ anulându-se pentru valorile reale, $u = (2m+1)\,\omega_1$ este pozitivă în intervalul $(-\omega_1, +\omega_1)$, negativă în intervalul $(\omega_1, 3\omega_1)$, etc.; celelalte două funcţiuni $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, neavând zeruri reale, rămân pozitive pentru toate valorile reale ale lui u.

Dealungul axei imaginare, funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ neavând nici un zero, rămân totdeauna pozitive, pe când funcţiunea $\sigma_3 u$, care se anulează în punctele $u = (2m+1)\omega_3$, este pozitivă în intervalul $(-\omega_3, +\omega_3)$, negativă în intervalul $(\omega_3, 3\omega_3)$, etc.

280. Din cele ce preced rezultă că radicalele reale

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1} \tag{5}$$

sunt pozitive şi radicalul pur imaginar

$$\sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} \tag{6}$$

are coeficientul lui i negativ. Prin urmare radicalul

$$\sqrt{e_2 - e_3} = -i\sqrt{e_3 - e_2} \qquad (6)\ (\S\ 188) \tag{7}$$

este un număr negativ. De unde rezultă că, în cazul considerat

---

[1]) Rezultat care se deduce şi din formulele (14), 15) (§ 215). Se poate presupune — printr'o schimbare de perioade echivalente, dacă este nevoie — $\left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| \geq 1$; de unde $|q| = |e^{i\pi\tau}| \leq e^{-\pi}$. Din expresiunea (14) se poate astfel conchide $\eta_1 > 0$ şi, prin urmare, din (15), $\frac{\eta_3}{i} < 0$.

($\Delta > 0$), modulele funcțiunilor eliptice

$$(8) \qquad k = -\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

sunt numere reale, pozitive și mai mici decât 1. [1]).

De asemenea sunt reale și pozitive cantitățile

$$(9) \qquad \mathrm{K} = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \mathrm{K}' = \frac{\omega_3}{i} \sqrt{e_1 - e_3}.$$

280. *Funcțiunile eliptice ale lui Jacobi* ($\Delta > 0$):

$$sn v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \quad cn v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \quad dn v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \quad v = u\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Radicalul $\sqrt{e_1 - e_3}$ fiind real și pozitiv, rezultă că variabilele v și u sunt în acelaș timp reale și de acelaș semn.

1°. *Valori reale.* Funcțiunile σ fiind reale pentru valori reale u, rezultă că cele trei funcțiuni ale lui Jacobi sunt reale pentru valori reale ale variabilei v. Funcțiunea $dn v$ este totdeauna pozitivă; funcțiunile $sn v$, $cn v$ sunt pozitive respectiv în intervalul (0, 2K), (0, K). De unde rezultă, în virtutea egalității,

$$\frac{d}{dv} sn v = cn v \; dn v,$$

că funcțiunea $sn v$ crește necontenit dela 0 la $sn\,\mathrm{K} = 1$, (§ 200), când v crește dela 0 la K. Variațiunea acestei funcțiuni în intervalul (K, 2K) se deduce din formula

$$sn\,(2\mathrm{K} - v) = sn v;$$

ea descrește dar în acest interval dela 1 la 0. Din egalitatea $sn\,(-v) = -\,sn v$, rezultă că în intervalul (0,−2K), $sn v$ trece prin valori egale și de semne contrarii cu cele prin cari trece în intervalul (0,2K). De altă parte, la orice valoare reală v corespunde relativ la perioada 4K, o valoare congruentă, reală, cuprinsă între −2K și +2K; prin urmare funcțiunea $sn v$ nu primește, pe axa reală, alte valori decât cele cuprinse între −1 și +1, inclusiv aceste valori.

Variațiunea funcțiunilor $cn v$, $dn v$ rezultă din formulele

$$(1) \qquad cn v = \sqrt{1 - sn^2 v}, \quad dn v = \sqrt{1 - k^2 sn^2 v},$$

radicalele fiind egale cu 1 pentru $v = 0$.

Aceste două funcțiuni descresc necontenit în intervalul (0,K); cea dintâi descrește dela 1 la 0, cea de a doua dela 1 la $\sqrt{1 - k^2} = k'$.

---

[1]) Rezultat care se deduce și din formulele (1) (§ 219).

Din egalităţile

$$(2) \qquad cn\,(2K-v) = -cnv, \quad dn\,(2K-v) = dnv,$$

rezultă că în intervalul (K, 2K) funcţiunea cnv variază dela 0 la -1 şi funcţiunea dnv dela k' la 1; amândouă funcţiunile fiind pare, se reproduc când schimbăm semnul lui v. Aceste două funcţiuni primesc dar, pentru valori reale v, numai valori cuprinse respectiv în intervalele $(-1, +1)$, $(1, k')$. Avem aşà dar tabloul de valori:

$$(3) \qquad \begin{array}{c|ccc} v & 0 & K & 2K \\ snv & 0 & 1 & 0 \\ cnv & 1 & 0 & -1 \\ dnv & 1 & k' & 1 \end{array}$$

2°. *Valori pur imaginare.* Avem, formula (6) (§ 242)

$$(4) \qquad sn\,(iv, k) = i\,\frac{sn\,(v, k')}{cn\,(v, k')},$$

Din permutarea modulelor k şi k' rezultând permutarea cantităţilor K şi K' (14) (§ 203), conchidem că dacă v creşte dela 0 la K', numărătorul creşte dela 0 la 1 şi numitorul descreşte dela 1 la 0; prin urmare, în acest interval, egalitatea (4) este de forma

$$(5 \qquad sniv = it$$

t fiind o variabilă pozitivă care creşte dela 0 la ∞. In intervalul $(0, -K')$, funcţiunea $sniv$ trece prin aceleaşi valori cu semnul schimbat. Aşà dar când v creşte dela $-K'$ la $+K'$, $\frac{sniv}{i}$ creşte necontenit dela $-\infty$ la $+\infty$; prin aceleaşi valori trece în intervalele (K', 3 K'), etc.

Variaţiunea funcţiunilor $cniv$, $dniv$ rezultă din formulele

$$(6) \qquad cn\,(iv, k) = \frac{1}{cn\,(v, k')}, \quad dn\,(iv, k) = \frac{dn\,(v, k')}{cn\,(v, k')}.$$

In intervalul (0, K') ambele funcţiuni sunt reale şi cresc necontenit dela 1 la ∞; în intervalul (K', 2K') ele cresc dela $-\infty$ la -1.

Variaţiunea acestor trei funcţiuni se poate reprezintà prin tabloul

$$(7) \qquad \begin{array}{c|ccc} v & 0 & K' & 2\,K', \\ \frac{1}{i}\,sniv & 0 & \pm\infty & 0 \\ cniv & 1 & \pm\infty & -1, \\ dniv & 1 & \pm\infty & -1. \end{array}$$

3°. $v = iK' + w$. Avem, (7) (§ 199),

$$sn(iK' + w) = \frac{1}{k\, sn\, w},$$

$$cn(iK' + w) = -i\frac{dn w}{k sn w}, \tag{8}$$

$$dn(iK' + w) = -i\frac{cn w}{sn w}.$$

De unde, substituind valorile (3), deducem tabloul de valori:

	w	0	K	2K
	$sn(iK' + w)$	∞	$\frac{1}{k}$	∞
(9)	$\frac{1}{i} cn(iK' + w)$	$-\infty$	$-\frac{k'}{k}$	$-\infty$
	$\frac{1}{i} dn(iK + w)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4°. $v = K + iw$. Avem, (6) (§ 199),

$$sn(K + iw) = \frac{cn\, iw}{dn\, iw},$$

$$cn(K + iw) = -k'\frac{sn\, iw}{dn\, iw}, \tag{10}$$

$$dn(K + iw) = k'\frac{1}{dn\, iw},$$

sau, în virtutea formulelor (6) (§ 242),

$$sn(K + iw) = \frac{1}{dn(w, k')},$$

$$cn(K + iw) = -ik'\frac{sn(w, k')}{dn(w, k')}, \tag{11}$$

$$dn(K + iw) = k'\frac{cn(w, k')}{dn(w, k')}.$$

De unde, înlocuind funcțiunile din membrele de al doilea prin valorile lor, cari rezultă din tabloul (3) prin permutarea cantităților K cu K' și a modulelor k cu k', deducem tabloul de valori

	w.	0	K'	2 K'
	$sn(K + iw)$	1	$\frac{1}{k}$	1
(12)	$\frac{1}{i} cn(K + iw)$	0	$-\frac{k'}{k}$	0
	$dn(K + iw)$	k'	0	$-k'$

Transformare conformă.

281. *Funcţiunea* $x=sn\varphi$. Din variaţiunea funcţiunii $sn\varphi$ de-alungul dreptunghiului (K, iK'), putem conchide că funcţiunea $x=sn\varphi$ transformă, în mod conform, aria acestui dreptunghiu în cadranul planului (x), mărginit de semiaxele de coordonate pozitive. In adevăr, în interiorul dreptunghiului, funcţiunea $x = sn\varphi$ este olomorfă şi derivata $\frac{dx}{d\varphi}$ este diferită de zero. Excepţiune există pentru vârfurile $\varphi = K$ şi $\varphi = K+iK'$, în cari derivata se anulează şi vârful $\varphi = iK'$ care este un pol al funcţiunii. Rămâne să arătăm că unui punct $\varphi=a+ib$, $0<a<K$, $0<b<K'$, corespunde un punct $x = \xi + i\eta$, $\xi > 0$, $\eta > 0$. Aceasta rezultă imediat din formula de adiţiune

$$sn\,(a+ib)=\frac{sna\;cnib\;dnib+snib\;cna\;dna}{1-k^2sn^2a\;sn^2ib},$$

în virtutea valorilor cuprinse în tablourile (3) şi (7).

Din corespondenţa conformă dintre cele două arii, deducem consecinţele următoare:

1°. Latura (0, iK') a dreptunghiului şi semiaxa imaginară pozitivă (x) corespunzându-se punct cu punct, conchidem, în virtutea simetriei în raport cu aceste linii, că dreptunghiul II_φ simetricul dreptunghiului

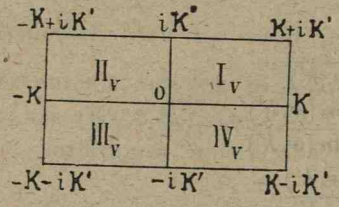

Fig. 55

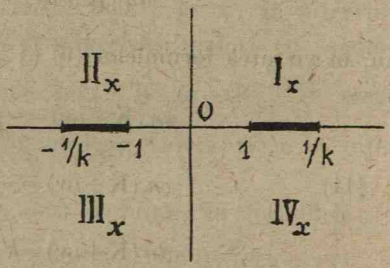

Fig. 56

I_φ (fig. 55) şi cadranul II_x simetricul lui I_x (fig. 56) se corespund în mod conform. Segmentele $(0,-1)$ $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespund respectiv laturilor $(0,-K)$, $(-K,-K+iK')$, $(-K+iK',iK')$.

2°. Latura (0, K) şi segmentul (0, 1) corespunzându-se punct cu punct, conchidem corespondenţa conformă între dreptunghiul IV_φ (K, $-iK'$) şi cadranul IV_x. Segmentele $\left(1,\frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{1}{k},\infty\right)$ corespund respectiv laturilor (K, $K-iK'$), ($K-iK'$, $-iK'$).

3°. Pentru motive analoage de simetrie considerând latura $(0,-iK')$ și semiaxa imaginară negativă (x), conchidem corespondența conformă dintre dreptunghiul III_v simetric cu dreptunghiul IV_v și cadranul III_x simetricul cadranului IV_x. Segmentele $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespund laturilor $(-K,-K-iK')$, $(-K-iK',-iK')$.

Să observăm că segmentul $\left(\frac{1}{k},\infty\right)$ corespunde laturilor opuse $(-iK', K-iK')$, $(iK', K+iK')$, echivalente relativ la perioada $2iK'$. Pentru același motiv segmentul $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespunde laturilor opuse $(-iK', -K-iK')$, $(iK', -K+iK')$. In fine să observăm că segmentul $\left(1,\frac{1}{k}\right)$ corespunde atât laturii $(K, K+iK')$ cât și laturii $(K, K-iK')$; de asemenea, segmentul $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$ corespunde laturilor $(-K,-K-iK')$, $(-K,-K+iK')$. Efectuând două tăieturi dealungul acestor segmente, țărmurile superioare ale lor corespund respectiv laturilor situate deasupra axei reale și țărmurile inferioare corespund laturilor simetrice cu cele dintâi.

Din cele ce preced rezultă că dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$-K-iK',\ K-iK',\ K+iK',\ -K+iK',$$

din care excludem una din cele două laturi paralele echivalente, se transformă în mod conform în tot planul (x), limitat de tăieturile $\left(1,\frac{1}{k}\right)$ $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$. Acest dreptunghiu constitue un *domeniu fundamental* [1]) al funcțiunii $x = sn\,v$.

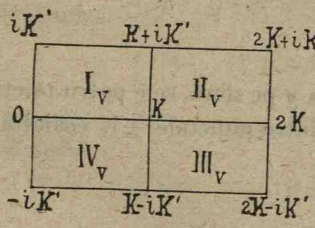

Fig. 57

282. *Funcțiunea* $y = cn\,v$. Din variațiunea funcțiunii $cn\,v$ dealungul dreptunghiului I_v (K, iK'), conchidem prin considerațiuni

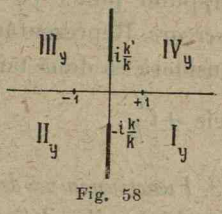

Fig. 58

[1]) Vezi I, pag. 157.

analoage cu cele din cazul funcţiunii $sn v$, că funcţiunea $y = cn v$ transformă, intr'un mod conform, acest dreptunghiu în cadranul I_y, mărginit de semiaxa reală pozitivă şi de semiaxa imaginară negativă. De unde deducem, prin simetrie, corespondenţa conformă între dreptunghiurile II_v, III_v, IV_v cu cadranele II_y, III_y, IV_y. Este de observat că, în virtutea egalităţilor

$$cn(-v) = cn v, \quad cn(2K + iv) = cn(2K - iv),$$

segmentul $(1, \infty)$ corespunde laturilor $(0, iK')$, $(0, -iK')$ şi segmentul $(-1, -\infty)$ corespunde laturilor

$$(2K, 2K + iK'), \quad (2K, 2K - iK'),$$

două câte două simetrice în raport cu axa reală (v).

De asemenea, în virtutea egalităţilor

$$cn(K + iK' + v) = cn(K + iK' - v), \quad cn(K - iK' + v) = cn(K - iK' - v),$$

segmentul $\left(-i\frac{k'}{k}, -i\infty\right)$ corespunde laturilor

$$(K + iK', iK'), \quad (K + iK', 2K + iK'),$$

şi segmentul $\left(i\frac{k'}{k}, i\infty\right)$ corespunde laturilor

$$(K + iK', -iK'), \quad (K - iK', 2K - iK').$$

Din cele ce preced rezultă că dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$-iK', \quad 2K - iK', \quad 2K + iK', \quad iK'$$

şi planul (y) limitat de tăieturile

$$(1, \infty), \quad (-1, -\infty), \quad \left(i\frac{k'}{k}, i\infty\right), \quad \left(-i\frac{k'}{k}, -i\infty\right)$$

se corespund punct cu punct.

Observare. Reprezentând variabila y pe sferă, cele patru tăieturi se pot considerà ca două tăieturi, una între punctele ± 1, cealaltă între punctele $\pm i\frac{k'}{k}$.

283. *Funcţiunea $z = dn v$.* Din variaţiunea funcţiunii $dn v$ dealungul dreptunghiului (K, iK'), conchidem corespondenţa conformă dintre dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$0, \quad 2K, \quad 2K + 2iK', \quad 2iK',$$

și planul (z), în care introducem tăieturile $(1,k')$, $(-1,-k')$, cea dintâiu corespunzând laturilor (0, K), (K, 2K) și cea de a doua laturilor paralele ($2iK'$,K+$2iK'$), (K+$2iK'$, 2K+$2iK'$). Fig. 59 și 60 arată regiunile cari se corespund.

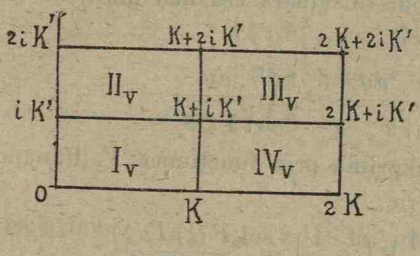

Fig. 59

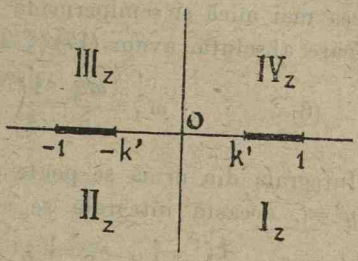

Fig. 60

III. ***Funcțiunile*** *pu, ζu, σu,* ***în cazul când unul din invarianți este nul.***

284. Vom considera succesiv cazul când unul sau celalt din cei doi invarianți este nul.

I. $g_3=0$.

Să facem, în formula de omogenitate

$$p\left(\lambda u;\frac{g_2}{\lambda^4},0\right)=\frac{1}{\lambda^2}p\,(u;g_2,0), \tag{1}$$

substituțiunile

$$\lambda u=\rho,\quad \lambda^2=\frac{\sqrt{g_2}}{2}; \tag{2}$$

obținem formula

$$p\,(u;g_2,0)=\frac{1}{2}\sqrt{g_2}\,p\,(\rho;4,0).^{1)} \tag{3}$$

Funcțiunea

$$y=p(\rho;4,0) \tag{4}$$

---

[1]) Membrul al doilea păstrează aceiaș valoare oricare ar fi determinațiunea radicalului

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{g_2}}{2}}$$

Fie λ_0 una din determinațiunile acestui radical și $\lambda_0 u=\rho_0$; avem

$$\lambda=\lambda_0\varepsilon,\ \rho=\rho_0\varepsilon,\ (\varepsilon^4=1).$$

Membrul al doilea (4) devine

$$\lambda^2\varepsilon^2 p\,(\rho_0\varepsilon;4,0)=\lambda_0^2 p\,(\rho_0;4,0)$$

adică

$$\lambda^2 p\,(\rho;4,0)=\lambda_0^2 p\,(\rho_0;4,0).$$

intră în cazul invarianților reali cu discriminantul $\Delta>0$. Avem

$$(5)\qquad \left(\frac{dy}{d\wp}\right)^2=4y\,(y^2-1),\quad e_1=1,\ e_2=0,\ e_3=-1.$$

Reprezintând prin ω'_1, ω'_3 respectiv semiperioada reală pozitivă cea mai mică și semiperioada pur imaginară cea mai mică, în valoare absolută, avem (17) (§ 274)

$$(6)\qquad \omega'_1=\frac{\omega'_3}{i}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{y^3-y}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y-y^3}}.$$

Integrala din urmă se poate exprimă prin funcțiunea Γ. Punând $y^2=t$, această integrală se scrie

$$\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

De altă parte, avem

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{4}}=\pi\sqrt{2},\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

prin urmare

$$(7)\qquad \omega'_1=\frac{\omega'_3}{i}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Semiperioadele corespunzătoare ω_1, ω_3 ale funcțiunii $p\,(u;g_2,0)$ sunt așà dar, în virtutea substituțiunilor (3),

$$(8)\qquad \omega_1=\frac{\omega_3}{i}=\frac{1}{4\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right),\quad \lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{g_2}}.$$

Paralelogramul acestor perioade este un pătrat.

Viceversa. Relațiunea $\omega_3=i\omega_1$ *trage după sine valoarea* $g_3=0$ In adevăr, grupând în egalitatea

$$\frac{1}{140}g_3=\frac{1}{2^6\omega_1^6}\Sigma'\frac{1}{(m+ni)^6},$$

termenii sumei doi câte doi în modul următor:

$$\frac{1}{(m+ni)^6}+\frac{1}{(n-mi)^6}$$

și observând că $(n-mi)^6=-(m+ni)^6$, rezultă $g_3=0$. Această valoare rezultă și din formula

$$p\,(iu|\omega_1,\omega_3)=-p\left(u\middle|\frac{\omega_3}{i},i\omega_1\right)=-p\,(u|\omega_1,\omega_3),$$

în care făcând $u=\omega_1$, obținem $e_3=-e_1$; prin urmare $e_2=0$. De unde $g_3=0$.

285 Formulele de omogenitate ale funcțiunilor ζu și σu

$$\zeta(iu|i\omega_1, i\omega_3) = -i\zeta(u|\omega_1, \omega_3),$$
$$\sigma(iu|i\omega_1, i\omega_3) = i\sigma(u|\omega_1, \omega_3)$$

devin, în virtutea egalității $\omega_3 = i\omega_1$,

$$(9) \qquad \begin{cases} \zeta(iu|\omega_1, \omega_3) = -i\zeta(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma(iu|\omega_1, \omega_3) = i\sigma(u|\omega_1, \omega_3); \end{cases}$$

de unde, făcând $u = \omega_1$,

$$(10) \qquad \eta_3 = -i\eta_1, \quad \sigma\omega_3 = i\sigma\omega_1.$$

Relațiunea $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}$ devine așà dar

$$(11) \qquad \eta_1\omega_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Funcțiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ fiind omogene și de ordinul zero, avem

$$\sigma_1(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_1\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_1(u|-\omega_3, \omega_1),$$

$$(12) \qquad \sigma_2(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_2\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_2(u|-\omega_3, \omega_1),$$

$$\sigma_3(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_3\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_3(u|-\omega_3, \omega_1).$$

De altă parte, înlocuirea perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$ prin perioadele echivalente $(-2\omega_3, 2\omega_1)$ are drept efect a permută funcțiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_3 u$ și a lăsà funcțiunea $\sigma_2 u$ neschimbată (§ 187). Avem așà dar formulele

$$(13) \qquad \begin{cases} \sigma_1(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_3(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_2(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_2(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_3(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_1(u|\omega_1, \omega_3). \end{cases}$$

II. $g_2 = 0$.

286. Să facem în formula de omogenitate

$$(1) \qquad p\left(\lambda u; 0, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda^2} p(u; 0, g_3)$$

substituțiunile

$$(2) \qquad \lambda u = \varrho, \quad \lambda = \sqrt[6]{\frac{g_3}{4}};$$

obţinem formula

$$(3) \qquad p(u; 0, g_3) = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\, p(\varrho; 0, 4).$$ [1]

Funcţiunea

$$(4) \qquad y = p(\varrho; 0, 4)$$

intră în cazul invarianţilor reali, ($\Delta < 0$.) Avem

$$(5) \qquad \left(\frac{dy}{d\varrho}\right)^2 = 4(y^3 - 1), \quad e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Funcţiunea eliptică y are dar două perioade primitive imaginare conjugate. Reprezintând prin $-\omega_2$, $-\omega'_2$ respectiv partea reală şi partea pur imaginară ale acestor perioade, avem (2) (5) (§ 276)

$$(6) \qquad -\omega_2 = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}, \quad -\frac{\omega'_2}{i} = \frac{1}{2}\int_{-1}^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}.$$

287. *Teoremă. Dacă funcţiunea $p(u; 0, g_3)$ admite perioada ω, ea admite şi perioada $\varepsilon\omega$, ε fiind o rădăcină cubică sau o rădăcină a şasea a unităţii.* In adevăr, să facem $\lambda = \varepsilon$ în formula de omogenitate (1) şi să punem $\varepsilon u = \varrho$; avem

$$(7) \qquad p(\varrho; 0, g_3) = \frac{1}{\varepsilon^2} p(u; 0, g_3).$$

Inlocuind u prin $u + \omega$, obţinem

$$(8) \qquad p(\varrho + \varepsilon\omega; 0, g_3) = \frac{1}{\varepsilon^2} p(u + \omega; 0, g_3) = \frac{1}{\varepsilon^2} p(u; 0, g_3).$$

Din (7) şi (8) rezultă egalitatea

$$(9) \qquad p(\varrho + \varepsilon\omega; 0, g_3) = p(\varrho; 0, g_3),$$

oricare ar fi valoarea lui ϱ.

Paralelogramul perioadelor este un romb ale cărui laturi fac între ele un unghiu de 120^0 sau de 60^0, după cum ε este rădăcina a treia sau a şasea a unităţii.

Cantităţile ω şi $\varepsilon\omega$ fiind perioade, rezultă că $\varepsilon^k\omega$ este o perioadă, k fiind un număr întreg oarecare. Toate aceste perioade se reduc la cele dintâi două, în virtutea egalităţii

$$\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon, \quad \text{dacă } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

---

[1]) Membrul al doilea păstrează aceeaş valoare, oricare ar fi determinaţiunea radicalului

$$\lambda = \sqrt[6]{\frac{g_3}{4}},$$ V. (§ 284) Nota.

sau, în virtutea egalităților

$$\varepsilon^2=-1+\varepsilon,\quad \varepsilon^3=-1,\quad \varepsilon^4=-\varepsilon,\quad \varepsilon^5=1-\varepsilon,\quad \text{dacă } \varepsilon=e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Viceversa. Dacă raportul a două perioade are una din valorile $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ *sau* $e^{\frac{i\pi}{3}}$, *invariantul* g_2 *este nul.* Fie $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Să grupăm trei câte trei termenii sumei

$$\frac{1}{60}\,g_2=\frac{1}{2^4\omega_1^4}\,\Sigma'\frac{1}{(m+n\varepsilon)^4},$$

corespunzători sistemelor de numere (m, n), (m', n'), (m'', n''), legate între ele prin condițiunile

$$(10)\qquad \begin{cases} m'+n'\varepsilon=\varepsilon\,(m+n\varepsilon)=-n+(m-n)\,\varepsilon, \\ m''+n''\varepsilon=\varepsilon^2\,(m+n\varepsilon)=(n-m)-m\varepsilon; \end{cases}$$

de unde rezultă egalitățile

$$(11)\qquad m'=-n,\ n'=m-n,\ m''=n-m,\ n''=-m.$$

Cele trei sisteme de numere sunt distincte, căci expresiunile

$$m+n\varepsilon,\ \varepsilon\,(m+n\varepsilon),\ \varepsilon^2\,(m+n\varepsilon)$$

sunt diferite. Suma celor trei termeni astfel grupați fiind nulă, rezultă $g_2=0$.

Cazul $\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{3}}$ se reduce la cel precedent, dacă înlocuim semiperioadele ω_1, $\omega_3=\varepsilon\omega_1$ prin sistemul echivalent

$$\omega'_1=\omega_1,\quad \omega'_3=\varepsilon^2\,\omega_1=-\omega_1+\omega_3;$$

de unde

$$\frac{\omega'_3}{\omega'_1}=-1+e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

288. Plecând dela $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, avem

$$(12)\qquad \begin{cases} p\,(\varepsilon u;\,0,\,g_3)=\varepsilon\,p(u;\,0,\,g_3), \\ p'\,(\varepsilon u;\,0,\,g_3)=p'\,(u;\,0,\,g_3), \\ \sigma\,\varepsilon u=\varepsilon\sigma u,\quad \zeta\,\varepsilon u=\varepsilon^2\,\zeta u. \end{cases}$$

Din ultima formulă rezultă

$$(13)\qquad \eta_3=\varepsilon^2\,\eta_1;$$

prin urmare, în virtutea relațiunii

$$\eta_1\,\omega_3-\eta_3\,\omega_1=\eta_1\,\omega_1\,(\varepsilon-\varepsilon^2)=\frac{i\pi}{2}.$$

avem

$$(14)\qquad \eta_1\,\omega_1=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

289. *Zerurile funcțiunii* $p\,(u;\,0,\,g_3)$. Se poate găsi expresiunea generală a zerurilor funcțiunii pu în cazul când $g_2=0$. Să presupunem

$\varepsilon^3 = 1$; avem, în virtutea formulei de omogenitate,

$$p(\varepsilon u; 0, g_3) = \varepsilon p(u; 0, g_3). \tag{15}$$

De unde rezultă că dacă u_0 este un zero al funcțiunii, punctele εu_0, $\varepsilon^2 u_0$ vor fi zeruri. Insă funcțiunea pu neavând mai mult decât două zeruri incongruente, urmează că cel puțin două din zerurile u_0, εu_0, $\varepsilon^2 u_0$ sunt congruente. Să presupunem, de ex., verificată congruența $\varepsilon u_0 \equiv u_0$, adică

$$\varepsilon u_0 = u_0 + 2m\omega_1 + 2n\varepsilon\omega_1.$$

Multiplicând ambele membre cu ε și observând că ω_1 și $\varepsilon\omega_1$ fiind semiperioade, $\varepsilon^2\omega_1 = -\omega_1 - \varepsilon\omega_1$ este de asemenea o semiperioadă, obținem congruențele

$$\varepsilon^2 u_0 \equiv \varepsilon u_0 \equiv u_0.$$

La aceeaș concluziune ajungem dacă plecăm dela congruența $\varepsilon^2 u_0 \equiv u_0$. Cele trei zeruri considerate sunt așà dar congruente.

Viceversa, valorile $u \not\equiv 0$, cari satisfac congruența

$$\varepsilon u \equiv u,$$

sunt zeruri ale funcțiunii $p(u; 0, g_3)$; căci altminteri ar urmà, în virtutea acestei, congruențe să avem $p\varepsilon u = pu$: ceeace este în contrazicere cu egalitatea (15).

Vom obține dar toate zerurile distincte căutând valorile incongruente ale lui $u \not\equiv 0$, cari satisfac egalitatea

$$u = \varepsilon u + 2(m + n\varepsilon)\omega_1;$$

de unde

$$u = \frac{2(m+n\varepsilon)}{1-\varepsilon}\omega_1, \tag{16}$$

sau, în virtutea identității

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)} = \frac{2+\varepsilon}{3},$$

zerurile vor fi date de egalitatea

$$u = \frac{2(2+\varepsilon)}{3}(m + n\varepsilon)\omega, \tag{17}$$

Este deajuns, pentru a obține două zeruri incongruente, a face $m = 0$, $n = \pm 1$. Aceste zeruri sunt date de formula

$$u = \pm\frac{2(1-\varepsilon)}{3}\omega_1. \tag{18}$$

Aceeaș formulă se aplică și în cazul $\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{3}}$; căci făcând substituțiunea

$$\omega'_1 = \omega_1, \quad \omega'_3 = -\omega_1 + \omega_3$$

avem

$$\omega'_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}\omega_1.$$

CAPITOLUL XXII.

PROBLEMA INVERSIUNII. INTEGRALE ELIPTICE.

I. *Problema inversiunii.*

290. Am văzut (§ 181) că o funcțiune eliptică de ordinul al doilea $x = f(u)$ satisface o ecuațiune diferențială de forma

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X, \tag{1}$$

X fiind un polinom de x de gradul 3 sau 4, după cum funcțiunea are în paralelogramul perioadelor un pol dublu sau două poluri simple.

Funcțiunea eliptică $f(u)$ fiind dată, putem determină polinomul X. Pentru aceasta este deajuns, dacă $f(u)$ are două poluri simple, să punem

$$X = f'^2(u) = Af^4(u) + A_1 f^3(u) + A_2 f^2(u) + A_3 f(u) + A_4$$

și să desvoltăm ambele membre în domeniul unui pol. Prin identificare, deducem valorile coeficienților A.

Viceversa, fiind dat un polinom X de gradul 3 sau 4, fără factori multipli, limita superioară a integralei de speța I

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} \tag{2}$$

este (§ 107) o funcțiune eliptică de u, având ca perioade două module de periodicitate distincte ale integralei. Determinarea acestei funcțiuni, de unde rezultă și aceea a derivatei sale $\frac{dx}{du} = \sqrt{X}$, constitue *problema inversiunii*. Rezolvirea acestei probleme conduce dar a exprimà x și $\sqrt{X}$ prin funcțiuni eliptice de un același argument, având aceleași perioade; precum, dacă X este un polinom de x de gradul 1 sau 2, exprimăm x și $\sqrt{X}$ respectiv prin funcțiuni raționale sau exponențiale de un același parametru.

291. Să considerăm întâiu cazul când X este un polinom de gradul 3 și fie

$$X = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3. \tag{3}$$

Să aplicăm substituțiunea

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0} y; \tag{4}$$

ecuațiunea (1) devine, după ce dividem ambele membre cu $\left(\frac{4}{a_0}\right)^2$,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \tag{5}$$

coeficienţii g_2 şi g_3 având valorile

$$(6)\qquad g_2=\frac{3}{4}(a_1^2-a_0a_2),\qquad g_3=\frac{1}{16}(3\,a_0a_1a_2-a_0^2a_3-2\,a_1^3).$$

Soluţiunea ecuaţiunii (5), care devine infinită pentru $u=o$, fiind $y=p(u;g_2,g_3)$, rezultă, pentru x şi pentru $\sqrt{X}$, expresiunile

$$(7)\qquad \begin{cases} x=-\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{4}{a_0}pu, \\ \sqrt{X}=\dfrac{dx}{du}=\dfrac{4}{a_0}p'u, \end{cases}$$

argumentul u fiind dat de integrala

$$(8)\qquad u=\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

292. Să considerăm acum cazul când X este un polinom de gradul 4:

$$(9)\qquad X=f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4.$$

Fie a o rădăcină a ecuaţiunii $X=o$. Făcând substituţiunea

$$(10)\qquad x=a+\frac{1}{y},$$

ecuaţiunea (1) ia forma

$$(11)\qquad \left(\frac{dy}{du}\right)^2=Y,$$

în care Y este un polinom de gradul 3:

$$(12)\qquad Y=f'(a)\,y^3+\frac{1}{2}f''(a)\,y^2+\frac{1}{3!}f'''(a)\,y+a_0.$$

De unde rezultă (7) soluţiunea

$$(13)\qquad y=-\frac{f''(a)}{6f'(a)}+\frac{4}{f'(a)}pu.$$

Avem dar expresiunile

$$(14)\qquad \begin{cases} x=a+\dfrac{\frac{1}{4}f'(a)}{pu-\frac{1}{24}f''(a)}, \\ \sqrt{X}=\dfrac{dx}{du}=-\dfrac{\frac{1}{4}f'(a)}{\left[pu-\frac{1}{24}f''(a)\right]^2}p'u, \\ u=\displaystyle\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}}. \end{cases}$$

Invarianții g_2 și g_3 ai funcțiunii pu, cari figurează în egalitățile precedente, se pot calculà cu ajutorul formulelor (6), în cari înlocuim coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3 respectiv prin

$$f'(a), \quad \frac{1}{3!}f''(a), \quad \frac{1}{3.3!}f'''(a), \quad a_0.$$

Obținem

$$(15)\quad \begin{cases} g_2=\frac{1}{48}\left[f'^2(a)-2f'(a)f'''(a)\right], \\ g_3=\frac{1}{24^2}\left[f'(a)f''(a)f'''(a)-\frac{1}{3}f'^3(a)\right]-\frac{a_0}{16}f'^2(a). \end{cases}$$

Efectuând calculele, găsim

$$(16)\quad \begin{cases} g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2, \\ g_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3. \end{cases}$$

Aceste două expresiuni coincid cu cei doi invarianți S și T ai *formei bicuadratice*

$$a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4\ ^1).$$

sau, cum se mai obișnuește a se zice, cu invarianții polinomului X; căci ele rămân neschimbate dacă înlocuim în acest polinom x prin $x+h$, h fiind o constantă arbitrară.

Observare. Punând

$$(17)\qquad z=pu, \quad Z=4z^3-g_2z-g_3,$$

avem, în virtutea formulelor (14),

$$(18)\qquad x=a+\frac{\frac{1}{4}f'(a)}{z-\frac{1}{24}f''(a)},$$

$$(19)\qquad \int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}}=\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\frac{1}{2}\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Funcțiunea x, inversa integralei

$$u=\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

---

1) $S=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$, $\quad T=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$.

Egalitățile $g_2=S$, $g_3=T$ se verifică imediat, dacă privim polinomul $4x^3-g_2x-g_3$ ca de gradul 4 cu coeficientul $a_0=0$ și facem în S și T

$$a_0=a_2=0, \quad a_1=1, \quad a_3=-\frac{g_2}{4}, \quad a_4=-g_3.$$

în care limita inferioară este un zero al polinomului X, este de forma (6) (§ 106)

$$x=a+\mathrm{P}\,(u^2),$$

prin urmare funcțiune pară de u: ceeace explică relațiunea de gradul întâi între funcțiunile eliptice x și $z = pu$, amândouă fiind pare și de ordinul al doilea (§ 177). Formula (18) este cuprinsă printre substituțiunile lineare cari transformă integrala dată în integrala normală a lui Weierstrass (§ 94).

293. *Altă metodă.* Metoda precedentă pentru a efectuà inversiunea integralei de speța I, în cazul când X este un polinom de gradul 4, cere să cunoaștem o rădăcină a ecuațiunii $X=o$. Se poate efectuà această inversiune fără a cunoaște niciuna din rădăcinile acelei ecuațiuni. Ceva mai mult, din formulele de inversiune obținute prin această metodă vom puteà deduce rădăcinile ecuațiunii.

Să considerăm funcțiunea eliptică

$$(1)\qquad y=\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv},$$

în care u este argumentul variabil și v o constantă oarecare. Această funcțiune este de ordinul al doilea, având polurile $u=o$ și $u=-v$; prin urmare ea satisface o ecuațiune diferențială de forma

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\mathrm{Y},$$

Y fiind un polinom de gradul 4. Să căutăm acest polinom.

In virtutea substituțiunii (1), formulele de adițiune

$$p\,(u+v)-pu=-\frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv},$$

$$p\,(u+v)-pv=-\frac{1}{2}\,\frac{d}{dv}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv}=\frac{1}{2}\,\frac{p''v}{pu-pv}-\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{(pu-pv)^2}\,p'v$$

se scriu respectiv

$$(2)\qquad p\,(u+v)-pu=-\frac{dy}{du},$$

$$(3)\qquad 2\left[p\,(u+v)-pv\right]\left[pu-pv\right]=p''v-2y\,p'v.$$

De asemenea formula de adițiune

$$p\,(u+v)+pu+pv=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2$$

devine

$$(4)\qquad p\,(u+v)+pu+pv=y^2;$$

de unde

$$[p(u+\varphi)-p\varphi]+[pu-p\varphi]=y^2-3\,p\varphi. \tag{5}$$

Să ridicăm această egalitate la pătrat și să scădem egalitatea (3) multiplicată cu 2, obținem

$$[p\,(u+\varphi)-pu]^2=(y^2-3\,p\varphi)^2+4\,y\,p'\varphi-2p''\varphi. \tag{6}$$

Prin urmare, în virtutea ecuațiunii (2) și ținând seamă de relațiunea $p''\varphi=6p^2\varphi-\frac{1}{2}\,g_2$, avem ecuațiunea diferențială

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=y^4-6\,p\varphi\,y^2+4p'\varphi\,y+g_2-3\,p^2\varphi. \tag{7}$$

Polinomul căutat Y este așa dar

$$Y=y^4-6\,p\varphi\,y^2+4\,p'\varphi\,y+(g_2-3\,p^2\varphi). \tag{8}$$

Din cele ce preced rezultă că fiind dat acest polinom Y, avem, pentru a efectuà inversiunea integralei

$$u=\int_{\infty}^{y}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \tag{9}$$

formulele (1) și (2), adică

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'\varphi}{pu-p\varphi}\,,\qquad \sqrt{Y}=pu-p\,(u+\varphi). \tag{10}$$

294. Polinomul considerat Y este un polinom *particular*, însă, precum vom vedeà, cazul general se poate aduce la cel precedent.

Fie mai întâiu

$$Y=y^4+6a_2\,y^2+4a_3\,y+a_4 \tag{11}$$

un polinom de gradul 4 fără termen de gradul al treilea. Să identificăm acest polinom cu polinomul (8); vom obține valorile

$$p\varphi=-a_2,\quad p'\varphi=a_3,\quad g_2=3\,p^2\varphi+a_4=3a_2^2+a_4. \tag{12}$$

Invariantul g_3 se deduce din ecuațiunea

$$p'^2\varphi=4\,p^3\varphi-g_2\,p\varphi-g_3$$

care dă

$$g_3=-4a_2^3+g_2a_2-a_3^2=a_2\,a_4-a_2^3-a_3^2. \tag{13}$$

Cunoscând astfel invarianții g_2 și g_3, funcțiunea $p\,(u;\,g_2,\,g_3)$ este definită și relațiunile

$$p\varphi=-a_2,\quad p'\varphi=a_3,$$

compatibile, în virtutea relațiunii care ne-a dat g_3, determină argumentul φ.

295. Să considerăm acum un polinom de gradul al patrulea oarecare

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 \tag{14}$$

și să facem substituțiunea

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\, y. \tag{15}$$

Ecuațiunea

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X \tag{16}$$

va luà forma

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 + 6a_2 y^2 + 4a_3 y + a_4, \tag{17}$$

coeficienții a_2, a_3, a_4 fiind determinați de ecuațiunile

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0}, \quad a_3 = \dfrac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0\sqrt{a_0}}, \\ a_4 = \dfrac{a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4}{a_0^2}. \end{cases} \tag{18}$$

Suntem astfel conduși la cazul precedent și avem

$$y = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \quad \frac{dy}{du} = pu - p(u+v). \tag{19}$$

Invarianții g_2 și g_3 precum și valorile pv și $p'v$ se calculează conform formulelor (12) și (13). Efectuând calculele, regăsim pentru g_2 și g_3 valorile (16), (§ 292).

$$\begin{cases} g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \\ g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_2^3 - a_1^2 a_4; \end{cases} \tag{20}$$

iar pentru pv și $p'v$ avem expresiunile

$$\begin{cases} pv = \dfrac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \\ p'v = \dfrac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0\sqrt{a_0}} \text{ [1)]} \end{cases} \tag{21}$$

Revenind la variabila x, avem

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \tag{22}$$

$$\sqrt{X} = \frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[pu - p(u+v)\right] = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[2pu + pv - \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2\right]. \tag{23}$$

[1)] Dacă $a_1 = a_3 = 0$, avem $p'v = 0$, prin urmare v este o semiperioadă.

Aceste expresiuni în cari toate elementele sunt determinate, în virtutea formulelor (20) și (21), efectuează inversiunea integralei

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{24}$$

X fiind polinomul (14). Funcțiunea x este de ordinul al doilea având două poluri simple: $u \equiv o$, $-\omega$ și $\sqrt{X}$ o funcțiune eliptică de u de ordinul al patrulea, având aceleași poluri ca x, fiecare însă de ordinul al doilea.

Expresiunea (22) este o soluțiune particulară a integralei ecuațiunii diferențiale

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X;$$

ea corespunde valorilor $u = o$, $x = \infty$. Soluțiunea generală se obține înlocuind în (22) u prin $u + C$, C fiind o constantă arbitrară; căci prin această înlocuire, ecuațiunea diferențială nu se schimbă.

296. Să punem

$$z = p(u; g_2, g_3), \sqrt{Z} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = p'u, \; z_0 = p\omega, \; \sqrt{Z_0} = p'\omega; \tag{25}$$

formulele (22) și (23) devin

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\sqrt{Z} - \sqrt{Z_0}}{z - z_0}, \\ \sqrt{X} &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[2z + z_0 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{Z} - \sqrt{Z_0}}{z - z_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Problema inversiunii revine dar, sub formă algebrică, a exprimà x printr'o funcțiune rațională convenabilă de $(z, \sqrt{Z})$ astfel ca să avem egalitatea

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}. \tag{27}$$

De unde rezultă (26) că și $\sqrt{X}$ este funcțiune rațională de aceleași elemente.

Relațiunea dintre x și z devine lineară, dacă în ecuațiunea diferențială (1) facem să se corespundă valoarea $u = o$ și unul din zerurile polinomului X; căci numai în acest caz x este funcțiune pară de u.

Viceversa. Variabila z și radicalul $\sqrt{Z}$ sunt funcțiuni raționale de $(x, \sqrt{X})$.

Aceasta rezultă din ecuațiunile (26), cari dau

$$z = \frac{1}{2}\left[-z_0 + a_0\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \sqrt{a_0}\sqrt{X}\right], \tag{28}$$

$$\sqrt{Z} = \sqrt{Z_0} + \sqrt{a_0}\left[-3z_0 + a_0\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \sqrt{a_0}\sqrt{X}\right].$$

297. Formulele precedente dau loc la interpretări geometrice interesante. Să punem

$$\begin{cases} y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4, \\ \eta^2 = 4z^3 - g_2z - g_3, \end{cases} \tag{29}$$

și să privim (x, y), (z, η) ca coordonate carteziane.

I. Formulele (22), (23), (25) arată că aceste coordonate se exprimă prin funcțiuni eliptice de un acelaș parametru u, precum coordonatele unui punct oarecare al unei curbe unicursale se exprimă prin funcțiuni raționale de un parametru.

II. Curbele (29) se pot deduce una din alta prin *transformări birationale*, adică coordonatele (x, y) sunt funcțiuni raționale de coordonatele (z, η) și viceversa, coordonatele (z, η) sunt funcțiuni raționale de (x, y). Această proprietate rezultă din formulele (26) și (28) în cari înlocuim $\sqrt{X}$ prin y, $\sqrt{Z}$ prin η.

298. *Rezoluțiunea ecuațiunii de gradul al patrulea.* Formula (22) permite a exprimà rădăcinile ecuațiunii

$$X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = o$$

cu ajutorul funcțiunilor eliptice. Este de ajuns, în virtutea egalității (23), a înlocuì, în această formulă, u prin valorile incongruente pentru cari avem

$$p(u + \omega) - pu = o. \tag{30}$$

Aceste valori sunt date de egalitatea

$$u + \omega = \pm u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3.$$

Semnul superior nu convine, căci atunci ω ar fi egal cu o perioadă și $p\omega$ ar fi infinit; ceeace este imposibil precum ne arată formula (21). Avem dar expresiunea

$$u = -\frac{\omega}{2} + m\omega_1 + n\omega_3, \tag{31}$$

în care este de ajuns a da lui m și n valorile 0 și 1. Cele patru rădăcini sunt așa dar cuprinse în formula

$$x = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{p'\left(\frac{\omega}{2} + m\omega_1 + n\omega_3\right) + p'\omega}{p\left(\frac{\omega}{2} + m\omega_1 + n\omega_3\right) - p\omega}. \tag{32}$$

Membrul al doilea se poate pune sub o formă mai simplă. Pentru aceasta să considerăm identitatea

$$\frac{p'u-p'v}{pu-pv}=\frac{p'v+p'(u+v)}{pv-p(u+v)}, \tag{33}$$

care nu este altceva decât formula de adițiune (7), (§ 162), în care înlocuim w prin valoarea sa $-(u+v)$, sau care se verifică direct [1]). Făcând $u=v$, identitatea precedentă devine

$$\frac{p'v+p'2v}{pv-p2v}=\frac{p''v}{p'v}. \tag{34}$$

Să aplicăm această formulă membrului al doilea (32), după ce vom fi înlocuit în pv și în $p'v$, v prin $v+2m\omega_1+2n\omega_3$ ceeace nu schimbă rezultatul. Vom avea, pentru cele patru rădăcini căutate, expresiunea

$$x=-\frac{a_1}{a_0}-\frac{1}{2\sqrt{a_0}}\frac{p''\left(\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3\right)}{p'\left(\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3\right)}, \qquad (m,n=0,1.) \tag{35}$$

II. *Integrale eliptice.*

299. Fie

$$I=\int f(x,\sqrt{X})\,dx \tag{1}$$

o integrală eliptică oarecare, polinomul X fiind de forma normală

$$X=4x^3-g_2x-g_3.$$

Să punem $x=pu$, $\sqrt{X}=-p'u$; ceeace revine a luà ca variabilă independentă integrala normală de speța I

$$u=\int_{\infty}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{X}}. \tag{2}$$

Prin această substituțiune, integrala (1) ia forma

$$I=\int F(pu,\,p'u)\,du, \tag{3}$$

F fiind o funcțiune rațională de pu și $p'u$. Suntem astfel conduși la o problemă studiată (§ 171).

---

[1]) Ambele membre au aceleași poluri cu aceleași reziduuri și partea principală în domeniul lui $u=0$ este aceiaș.

300. Fie

$$(3)\quad \mathrm{F}(pu,\ p'u)=\mathrm{A}_0+\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{A}_k\zeta(u-a_k)+\mathrm{A}_{k,1}\,p(u-a_k)-\frac{\mathrm{A}_{k,2}}{2}p'(u-a_k)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{\alpha_k-1}\frac{\mathrm{A}_{k,k}}{a_k!}p^{\alpha_k-1}(u-a_k)\right]$$

funcţiunea $\mathrm{F}(pu,\ p'u)$ descompusă în elemente simple (§ 167).

Integrând, obţinem un rezultat de forma

$$(4)\quad \mathrm{I}=\mathrm{A}_0u+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k\log\sigma(u-a_k)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{k,1}\,\zeta(u-a_k)+\varphi(pu,\ p'u),$$

φ fiind o funcţiune raţională de pu şi $p'u$. Membrul al doilea se poate pune sub altă formă. Pentru aceasta, să aplicăm funcţiunilor $\zeta(u-a_k)$ formula de adiţiune

$$\zeta(u-a_k)=\zeta u-\zeta a_k+\frac{1}{2}\,\frac{p'u+p'a_k}{pu-pa_k}$$

şi să observăm că, în virtutea egalităţii $\sum_1^n \mathrm{A}_k=0$ (§ 127), putem scrie

$$\sum_1^n \mathrm{A}_k\log\sigma(u-a_k)=\sum_1^n \mathrm{A}_k\log\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma u}.$$

Făcând înlocuirile, egalitatea (4) ia forma

$$(5)\quad \mathrm{I}=\psi(pu,\ p'u)+\mathrm{A}_0u-\zeta u\sum_1^n\mathrm{A}_{k,1}+\sum\mathrm{A}_k\log\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma u},$$

$\psi(pu,\ p'u)$ fiind o funcţiune raţională prin urmare o funcţiune raţională de x şi $\sqrt{\mathrm{X}}$.

Elementele prin cari se exprimă o integrală eliptică oarecare sunt aşà dar: o funcţiune raţională de $(x,\ \sqrt{\mathrm{X}})$, integrala u de speţa I, funcţiunea ζu şi un număr mărginit de funcţiuni de forma $\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}$.

Integrala u este finită pentru orice valoare a lui x.

Funcţiunea ζu, considerată ca funcţiune de x, este exprimată prin integrala de speţa II

$$(6)\qquad \zeta u=\int -pu\,du=\frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

Această integrală este finită pentru orice valoare finită a lui x şi devine infinită pentru $x=\infty$. Acest punct este un pol de ordinul

întâi al integralei, precum rezultă din desvoltarea ei în domeniul acestui punct. Avem

$$\frac{1}{\sqrt{X}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{g_2}{8}x^{-2}+\frac{g_3}{8}x^{-3}+\ldots\right);$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\sqrt{x}\left(1-\frac{g_2}{24}x^{-2}-\frac{g_3}{40}x^{-3}+\ldots\right). \tag{7}$$

Se consideră ca integrală *normală de speța II* integrala definită de membrul al doilea al egalității

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\zeta u, \tag{8}$$

care corespunde desvoltării (7) în domeniul punctului $x=\infty$.

Dacă mărim integrala u cu $2\omega_1$ sau $2\omega_3$, funcțiunea ζu mărindu-se respectiv cu $2\eta_1$, $2\eta_3$, se zice că aceste cantități sunt perioadele integralei normale de speța II, corespunzătoare perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale integralei normale de speța I. Între aceste perioade există relațiunea cunoscută

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{i\pi}{2}.$$

301. Printre elementele egalității (5) mai avem de considerat cele de forma

$$log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}.$$

Pentru a introduce variabila x în această funcțiune, să revenim la expresiunea

$$\zeta(u-a)=\zeta u-\zeta a+\frac{1}{2}\frac{p'u+p'a}{pu-pa};$$

de unde, prin integrațiune,

$$log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=\frac{1}{2}\int\frac{p'u+p'a}{pu-pa}du-u\,\zeta a+C. \tag{9}$$

Să punem $pa=x_0$, $p'a=-\sqrt{X_0}$; vom avea

$$log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{X}+\sqrt{X_0}}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{X}}-u\,\zeta a+C.$$

Integrala

$$I(x,x_0)=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{X}+\sqrt{X_0}}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{X}} \tag{10}$$

este o integrală de speța III, care devine infinită în punctele critice logaritmice $x=x_0$, $x=\infty$, corespunzătoare punctelor $u\equiv a$, $u\equiv 0$ ($mod\delta\delta\ 2\omega_1, 2\omega_3$).

Să determinăm constanta arbitrară C astfel ca desvoltările ambelor membre (9) în domeniul $u = o$ să fie identice. Avem, în domeniul $u=o$,

$$\frac{1}{2}\frac{p'u+p'a}{pu-pa} = -\frac{1}{u}\frac{1-\frac{u^3}{2}p'a-\frac{g_2}{20}u^4-\dots}{1-u^2\,pa+\frac{g_2}{20}u^4+\dots}$$

$$=-\frac{1}{u}-u\,pa+\frac{u^2}{2}p'a+\dots,$$

de unde

$$I(x, x_0)=-log\,u-\frac{u^2}{2}pa+\frac{u^3}{6}p'a+\dots$$

De altă parte

$$\sigma(u-a)=-\sigma(a-u)=-\sigma a+u\sigma' a-\frac{u^2}{2}\sigma'' a+\dots$$

$$\sigma u=u-Au^5-\dots\,^{1})$$

$$\frac{\sigma(a-u)}{\sigma u}=\frac{\sigma a}{u}\left(1-u\frac{\sigma' a}{\sigma a}+\frac{u^2}{2}\frac{\sigma'' a}{\sigma a}+\dots\right);$$

de unde

$$log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=log\,(-1)+log\,\sigma a-log u-u\zeta a-\frac{u^2}{2}pa+\dots$$

Substituind aceste desvoltări în egalitatea (9), obținem

$$C = -\,log\,(-1)+log\,\sigma a.$$

Pentru această valoare a lui C, avem

$$(10)\qquad I(x, x_0)=log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma a\,\sigma u}+u\,\zeta a.$$

Integrala astfel definită se numește *integrala normală de speța III*. Dacă permutăm în membrul al doilea argumentul u cu parametrul a, prin urmare, în membrul întâi, argumentul x cu parametrul x_0, obținem, prin scădere, egalitatea

$$(11)\qquad I(x, x_0)-I(x_0, x)=u\zeta a-a\zeta u+(2k+1)i\pi,$$

k fiind un număr întreg. In această egalitate consistă ceeace se numește *teorema asupra permutării argumentului cu parametrul* în integrala eliptică de speța III.

---

[1]) $A=\frac{g_2}{2^4.3.5}$

Perioadele integralei. Dacă mărim u cu $2\omega_1$ sau $2\omega_3$, membrul al doilea al egalității (10) se reproduce mărit respectiv cu cantitățile

$$(12) \quad 2\Omega_1 = 2\omega_1 \zeta a - 2a\eta_1, \quad 2\Omega_3 = 2\omega_3 \zeta a - 2a\eta_3.$$

Aceste cantități se numesc *perioade ale integralei* de *speța III* $I(x, x_0)$, corespunzătoare perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale integralei u de speța I. Din egalitățile (12) rezultă relațiunea

$$\omega_1 \Omega_3 - \omega_3 \Omega_1 = a(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) = \frac{i\pi a}{2},$$

între perioadele celor două spețe de integrale.

Pe lângă perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, integrala normală de speța III mai admite perioada polară $2i\pi$ [1]), căci, dacă u descrie o curbă închisă în jurul punctului $u = a$, căreia corespunde, în planul (x), o curbă închisă în jurul punctului $x = x_0$, integrala se mărește cu $\pm 2i\pi$. Totalitatea valorilor de care integrala este susceptibilă într'un punct $(x, \sqrt{X})$ este dată de expresiunea

$$I(x, \sqrt{X}; x_0, \sqrt{X_0}) = I_0 + 2m\Omega_1 + 2n\Omega_3 + 2ki\pi,$$

I_0 *fiind una din acele valori* și m, n, k fiind numere întregi oarecari.

302. *Observare.* In notațiunea lui Legendre și Jacobi se consideră ca integrale de speța I, II, III respectiv integralele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

a fiind diferit de punctele critice ale radicalului

In notațiunea lui Riemann, cele trei spețe de integrale sunt reprezintate prin expresiunile

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \int \frac{xdx}{2\sqrt{R(x)}}, \int \frac{\sqrt{R(x_0)}}{\sqrt{R(x)}} \frac{dx}{x-x_0},$$

în cari $R(x) = x(1-x)(1-k^2x)$ și x_0 este diferit de 0, 1, $\frac{1}{k^2}$.

Oricare ar fi notațiunea, caracterele analitice ale celor trei tipuri sunt următoarele:

Ele sunt funcțiuni analitice multiforme, având module de periodicitate.

Integralele de speța I sunt finite în tot planul variabilei, inclusiv punctul ∞.

---

[1]) Se numește perioadă polară a unei integrale $\int f(x)\,dx$, cantitatea cu care se mărește integrala, când variabila x face o rotațiune în jurul unui pol al funcțiunii. Perioada polară este egală cu $2i\pi$ multiplicat cu reziduul corespunzător.

Integralele de speța II sunt finite în tot planul exceptând punctul $x = \infty$, care este un pol de ordinul întâiu.

Integralele de speța III sunt finite în tot planul exceptând două puncte singulare logaritmice, reziduurile logaritmice corespunzătoare [1]) fiind egale și de semne contrarii.

In notațiunile lui Weierstrass și Riemann aceste reziduuri sunt egale cu ± 1.

CAPITOLUL XXIII.

TRANSFORMAREA FUNCȚIUNILOR ELIPTICE.

303. Problema de care ne ocupăm aici are origina sa în problema următoare:

Fiind dată ecuațiunea diferențială

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}},$$

$f(x)$ și $f_1(y)$ fiind polinoame de gradul 3 sau 4, se caută condițiunile ce trebuie să împlinească coeficienții lor pentru ca această ecuațiune să admită o integrală algebrică $F(x, y) = 0$ și găsirea acestei integrale. Pe cale algebrică problema este foarte complicată [2]); ea devine foarte simplă pe cale transcendentă, prin ajutorul funcțiunilor eliptice.

Fie u o nouă variabilă și să punem

$$du = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}};$$

de unde

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}},$$

limitele inferioare x_0, y_0 fiind două constante oarecari. In virtutea acestor ecuațiuni, variabilele x și y sunt funcțiuni eliptice de u:

$$x = \varphi(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad y = \psi(u \mid \omega'_1, \omega'_3),$$

cu perioade bine determinate.

---

[1]) Fie, în domeniul unui punct x_0, $f(x) = A \log (x - x_0) + P(x - x_0)$; coeficientul A, reziduul derivatei $f'(x)$, relativ la polul $x = x_0$ al acestei derivate, se numește *reziduul logaritmic* al funcțiuini $f(x)$ relativ la acest pol.

[2]) *Abel, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques», Oeuvles complètes* p. 518.

Jacobi. Fundamenta nova. Band. I. p. 49.

Sub această formă, problema se reduce la căutarea condițiunilor dintre perioadele celor două funcțiuni eliptice, pentru ca să existe o ecuațiune algebrică

$$F(\varphi(u), \psi(u)) = 0.$$

Pentru aceasta, este necesar și suficient ca cele două funcțiuni să admită un sistem comun de perioade (§ 175—6). Presupunând această condițiune împlinită, să vedem cum se poate găsi ecuațiunea.

304. Putem presupune diferențialele aduse la forma normală a lui Weierstrass

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g'_2 y - g'_3}}.$$

Luând $x_0 = \infty$, avem

$$x = p(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

De altă parte, u_0 fiind una din valorile integralei

$$u = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g'_2 y - g'_3}},$$

avem

$$y = p(u + u_0 \mid \omega_1', \omega'_3).$$

Funcțiunea $p(u+u_0 \mid \omega_1', \omega'_3)$ fiind, în virtutea formulei de adițiune, o funcțiune algebrică de $p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$, problema se reduce la găsirea ecuațiunii

$$F[(p(u \mid \omega_1, \omega_3), p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)] = 0,$$

în ipoteza că cele două funcțiuni $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ și $p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$ admit un sistem comun de perioade.

305. Fie $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ un sistem de perioade distincte comune celor două funcțiuni. Aceste perioade sunt vârfuri comune rețelelor construite pe perioadele $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\omega'_1, 2\omega'_3)$; le presupunem alese astfel ca $2\Omega_1$ să fie vârful cel mai apropiat de punctul $u = 0$ și $2\Omega_3$ să fie la stânga vectorului $(0, 2\Omega_1)$ și ca distanța sa de acest vector să fie cea mai mică posibilă. Cu modul acesta satisfacem două condițiuni:

1°. Nici un vârf comun celor două rețele nu se găsește în interiorul paralelogramului $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, nici pe laturile sale, exceptând vârfurile acestui paralelogram.

2°. Punând $\frac{\Omega_3}{\Omega_1} = A + iB$, avem $B > 0$; căci argumentul raportului considerat este cuprins între 0 și π.

Exprimând că punctele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ sunt vârfuri comune celor

două rețele, avem egalități de forma

$$(1)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 = a'\omega'_1 + b'\omega'_3, \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 = c'\omega'_1 + d'\omega'_3, \end{cases}$$

coeficienții a, b, c, d; a', b', c', d', fiind numere întregi și determinanții

$$ad - bc = n, \qquad a'd' - b'c' = n'$$

diferiți de zero. Acești determinanți pot fi considerați pozitivi.

In adevăr, punând

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \alpha + i\beta, \qquad \beta > 0,$$

avem

$$\frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \mathrm{A} + i\mathrm{B} = \frac{a + b(\alpha + i\beta)}{c + d(\alpha + i\beta)};$$

de unde

$$\mathrm{B} = \beta \frac{ad - bc}{(c + d\alpha)^2 + d^2\beta^2} = \frac{\beta n}{(c + d\alpha)^2 + d^2\beta^2}.$$

Coeficienții B și β fiind de același semn (2⁰), rezultă că numărul n este > 0. In același mod se conchide că n' este pozitiv.

Funcțiunile $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$ admițând perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ și fiind pare se pot exprimă într'un mod rațional cu ajutorul funcțiunii $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$:

$$(2)\qquad \begin{cases} p(u \mid \omega_1, \omega_3) = \mathrm{R}[p(u \mid \Omega_1, \Omega_3], \\ p(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \mathrm{R}_1[p(u \mid \Omega_1, \Omega_3]. \end{cases}$$

Eliminând între aceste două ecuațiuni funcțiunea intermediară $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, obținem ecuațiunea algebrică căutată între cele două funcțiuni eliptice date.

306. Problema transformării algebrice a funcțiunii $p(u \mid \omega_1 \omega_3)$ se poate prezintă astfel:

Să se găsească relațiunea dintre această funcțiune și funcțiunea în care ea se transformă, când substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ alte două perioade $2\omega'_1$, $2\omega'_3$, legate de cele dintâi prin relațiunile (1). Această problemă se reduce, precum am văzut mai sus, la determinarea expresiunilor (2), adică la problema mai simplă, aceea a *transformării raționale.*

307. *Transformarea rațională a funcțiunii* $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$.

Fie

$$(3)\qquad x = p(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad z = p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$$

și egalitățile

$$(4)\qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_3 + d\omega_3,$$

coeficienții a, b, c, d fiind numere întregi și determinantul

$$ad-bc=n>0.$$

Aceste egalități exprimă că vârfurile rețelei cu perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, sunt vârfuri ale rețelei construită cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, adică perioadele funcțiunii z sunt perioade ale funcțiunii x. Reciproca ar fi adevărată *numai* dacă determinantul n al transformării ar fi egal cu 1. In acest caz cele două sisteme de perioade sunt echivalente și avem

$$p(u|\omega_1,\omega_3)=p(u|\Omega_1,\Omega_3).$$

308. Fie, pentru $n>1$, relațiunea rațională

$$x=\mathrm{R}(z).$$

Voim să arătăm că gradul funcțiunii R (z) este egal cu determinantul $ad-bc=n$, numit, pentru acest motiv, gradul transformării (4). Demonstrarea acestei teoreme, precum și studiul transformării raționale, se simplifică dacă înlocuim perioadele primitive $2\omega_1$, $2\omega_3$ prin două perioade echivalente $2\tilde{\omega}_1$, $2\tilde{\omega}_3$, astfel ca substituțiunea (4) să ia forma

$$\Omega_1=a_1\tilde{\omega}_1, \qquad \Omega_3=c_1\tilde{\omega}_1+d_1\tilde{\omega}_3.$$

Să punem

$$\tilde{\omega}_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \tilde{\omega}_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3 \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Formulele (4) devin:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Omega_1=(a\alpha+b\gamma)\tilde{\omega}_1+(a\beta+b\delta)\tilde{\omega}_3, \\ \Omega_3=(c\alpha+d\gamma)\tilde{\omega}_1+(c\beta+d\delta)\tilde{\omega}_3. \end{cases}$$

Dacă coeficientul $a=0$, este deajuns a luà $\alpha=\delta=0$, $\beta=-\gamma=1$; egalitățile (5) iau forma căutată

$$\Omega_1=-b\tilde{\omega}_1, \qquad \Omega_3=-d\tilde{\omega}_1+c\tilde{\omega}_3.$$

Să presupunem $a\neq 0$. Fie σ, cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, și fie

$$(6)\qquad a=\sigma\delta, \qquad b=-\sigma\beta;$$

de unde rezultă

$$(7)\qquad a\beta+b\delta=0, \qquad (c\beta+d\delta)\sigma=n.$$

Numerele β și δ fiind prime între ele, putem satisface ecuațiunea $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, printr'o infinitate de valori întregi α, γ. Cu modul acesta, sistemul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ este echivalent cu sistemul $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$ și substituțiunea (5) ia forma căutată,

$$(8)\qquad \Omega_1=\sigma\tilde{\omega}_1, \quad \Omega_3=(c\alpha+d\gamma)\tilde{\omega}_1+\frac{n}{\sigma}\tilde{\omega}_3,$$

numită *forma normală* a transformării perioadelor. Sub această formă, semiperioada Ω_1 are o valoare determinată, pe când semiperioadei Ω_3 putem da diferite valori, căci coeficientul $c\alpha + d\gamma$ poate aveà o infinitate de valori.

Fie $\alpha=\alpha_0$, $\gamma=\gamma_0$, un sistem particular de valori întregi satisfăcând ecuaţiunea $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; avem

$$\alpha=\alpha_0+k\beta, \quad \gamma=\gamma_0+k\delta,$$

k fiind un număr întreg arbitrar. De unde

$$c\alpha+d\gamma_0=c\alpha_0+d\gamma_0+k(c\beta+d\delta)=c\alpha_0+d\gamma_0+k\frac{n}{\sigma}$$

Reprezintând membrul întâi prin ϱ şi suprimând accentele, avem transformarea normală

$$\Omega_1=\sigma\omega_1, \quad \Omega_3=\varrho\omega_1+\frac{n}{\sigma}\omega_3, \tag{9}$$

în care ϱ este un număr întreg determinat, abstracţiune făcând de un multiplu al numărului întreg $\frac{n}{\sigma}$. Două transformări normale în cari ϱ primeşte valori întregi diferind printr'un multiplu al lui $\frac{n}{\sigma}$ sunt echivalente, în virtutea egalităţii

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ \varrho & \frac{n}{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ \varrho+k\frac{n}{\sigma} & \frac{n}{\sigma}\end{pmatrix}^{1}),$$

k fiind un număr întreg arbitrar; ele transformă funcţiunea primitivă în aceeaş funcţiune raţională. Este dar de ajuns, pentru acelaş σ, a considerà transformările în cari ϱ este egal cu unul din numerele $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{\sigma}-1$.

309. Gradul funcţiunii $R(z)$, sau numărul valorilor lui z corespunzătoare unei valori x, rezultă foarte lesne din cele ce preced.

Unei valori $x = p(u|\ \omega_1, \omega_3)$ corespunde pentru u o infinitate de valori cuprinse în expresiunea

$$\pm u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3,$$

λ şi μ fiind numere întregi arbitrare. Acestor valori corespund funcţiunii $z = p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ valorile

$$z=p(\pm u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3|\Omega_1,\Omega_3).$$

---

[1]) V. pentru produsul celor două substituţiuni (§ 124).

Funcțiunea *pu* fiind pară, aceste valori sunt date de unica expresiune

$$z=p(u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3|\Omega_1,\Omega_3)$$

sau, în virtutea formulelor (9),

$$(10)\qquad z=p\left(u+\frac{2}{\sigma}(\lambda-\frac{\mu}{\nu}\varrho)\Omega_1+2\frac{\mu}{\nu}\Omega_3|\Omega_1,\Omega_3\right),\quad \nu=\frac{n}{\sigma}.$$

Membrul al doilea al acestei expresiuni, în care u are o valoare oarecare, se reproduce numai atunci când dăm lui λ valori congruente (*mod* σ) și lui μ valori congruente (*mod* $\frac{n}{\sigma}$), căci acestor valori, și numai acestora, corespund lui u puncte congruente (*mod* $2\Omega_1$, $2\Omega_3$). Valorile diferite ale lui z, corespunzătoare aceleiaș valori x, sunt dar date de formula (10) în care λ și μ primesc, independent între ele, respectiv valorile

$$\lambda=0,1,2,\ldots\sigma-1;\quad \mu=0,1,2,\ldots,\frac{n}{\sigma}-1.$$

Numărul total al acestor valori este

$$N=\sigma.\frac{n}{\sigma}=n\ ^{1})$$

q. e. d.

310. Dacă considerăm funcțiunea $y=p(u|\omega'_1,\omega'_3)$ conchidem, ca și mai sus, în virtutea formulelor

$$\Omega_1=a'\omega'_1+b'\omega'_3,\quad \Omega_3=c'\omega'_1+d'\omega'_3,\quad a'd'-b'c'=n',$$

că funcțiunea $y=R_1(z)$ este de gradul n' în raport cu z. Ecuațiunea $F(x,y)=0$ care rezultă din eliminarea lui z între ecuațiunile $x=R(z)$, $y=R_1(z)$ este așà dar de gradul n' în raport cu x și de gradul n în raport cu y.

Acest rezultat se poate recunoaște în modul următor, fără a recurge la teoria algebrică a eliminațiunii.

Unui punct u oarecare din plan corespund, în paralelogramul $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, n puncte $u_1, u_2,\ldots, u_n$ congruente (*mod* $2\omega_1$, $2\omega_3$), nu însă, în același timp, congruente (*mod* $2\omega'_1$, $2\omega'_3$), exceptând vârfurile paralelogramului $(2_1\Omega_1, 2\Omega_3)$ (§ 305); acestor puncte corespund dar, pentru y, n valori diferite. Punctul $-u$ dă respectiv aceleași valori ca punctul u. Așà dar unei valori x corespund n

---

[1]) Concluziunea de mai sus rezultă direct din formulele (9) dacă observăm că paralelogramul $(2\Omega_1\, 2\Omega_3)$ cuprinde $\sigma\frac{n}{\sigma}$ paralelograme echivalente cu paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$; ceeace se recunoaște foarte lesne.

valori diferite pentru y. Deasemenea, unei valori y corespund n' valori diferite pentru x.

310 Să revenim la transformarea raţională şi să vedem câte transformări raţionale diferite obţinem când σ şi ϱ primesc diferite valori: σ fiind un divizor al gradului n şi ϱ unul din numerile 0, 1, $2, \ldots, \frac{n}{\sigma} - 1$.

Fie σ' şi ϱ' două numere având aceleaşi semnificări ca σ şi ϱ; să punem

$$(11) \qquad \Omega_1 = \sigma'\omega'_1, \quad \Omega_3 = \varrho'\,\omega'_1 + \frac{n}{\sigma'}\,\omega'_3.$$

Pentru ca să avem egalitatea

$$p\,(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = p\,(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

este necesar şi suficient ca cele două sisteme de perioade să fie echivalente, adică

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\,\omega_3, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Substituind aceste valori în egalităţile (11), în cari înlocuim Ω_1, Ω_3 prin valorile lor (9), rezultă

$$\begin{cases} \sigma'\,(\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_3) = \sigma\omega_1, \\ \varrho'(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3) + \dfrac{n}{\sigma'}\,(\gamma\,\omega_1 + \delta\omega_3) = \varrho\,\omega_1 + \dfrac{n}{\sigma}\,\omega_3. \end{cases}$$

Prima egalitate dă

$$\sigma'\alpha = \sigma, \qquad \beta = 0;$$

prin urmare $\alpha = \delta = 1$; de unde a doua egalitate conduce la

$$\varrho' + \gamma\,\frac{n}{\sigma} = \varrho,$$

γ întreg arbitrar.

Aşà dar, *două transformări raţionale sunt diferite dacă divizorul σ este diferit în cele două transformări, sau fiind acelaş, valorile lui ϱ sunt diferite* $\left(mod\,\frac{n}{\sigma}\right)$.

Transformările diferite corespunzătoare numărului σ se obţin dând lui ϱ valorile 0, 1, 2, ..., $\frac{n}{\sigma} - 1$. Toate transformările de gradul n, în cari σ este acelaş şi ϱ primeşte valori congruente $\left(mod\,\frac{n}{\sigma}\right)$ sunt echivalente; se zice că ele fac parte din aceeaş *clasă*.

Fie

$$1,\ \sigma_1,\ \sigma_2, \ldots,\ \sigma_k,\ n$$

toți divizorii lui n. Acestor divizori corespund lui ϱ respectiv valorile

$$0, 1, 2, \ldots, n-1;\ 0, 1, \ldots, \frac{n}{\sigma_1}-1; \ldots;\ 0, 1, \ldots \frac{n}{\sigma_k}-1;\ 1.$$

Numărul total al claselor diferite, corespunzătoare aceluiaș grad n, este

$$N = n + \frac{n}{\sigma_1} + \ldots + \frac{n}{\sigma_k} + 1, \tag{10}$$

adică egal cu *suma divizorilor lui n.*

Dacă n este un număr prim, numărul claselor diferite este $n+1$. Transformările normale corespunzătoare se reduc la formele

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varrho & n \end{pmatrix}^{1)} \qquad \varrho = 0, 1, \ldots n-1.$$

311. Transformarea perioadelor, în cazul când gradul n este un număr compus, se poate înlocui printr'o succesiune de transformări de grade numere prime. Este deajuns să arătăm că transformarea relativă la un produs de doi factori se poate obține prin două transformări succesive corespunzătoare celor doi factori.

Fie

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3,\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,\quad ad - bc = n, \tag{11}$$

$$\Omega'_1 = a'\Omega_1 + b'\Omega_3,\ \Omega'_3 = c'\Omega_1 + d'\Omega_3,\quad a'd' - b'c' = n', \tag{12}$$

două sisteme de transformări de perioade având respectiv gradele n, n' și fie

$$x = p(u \mid \omega_1, \omega_3),\ y = p(u \mid \Omega_1, \Omega_3),\ z = p(u \mid \Omega'_1, \Omega'_3), \tag{13}$$

funcțiunile eliptice corespunzătoare celor trei sisteme de perioade primitive $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, $(2\Omega'_1, 2\Omega'_3)$. In virtutea egalităților (11) și (12) avem respectiv relațiunile

$$x = R(y),\ y = R_1(z),$$

$R(y)$ și $R_1(z)$ fiind funcțiuni raționale, cea dintâi de gradul n, cea de a doua de gradul n'. De unde rezultă, prin eliminarea lui y, relațiunea rațională

$$x = R_2(z),$$

de gradul nn'.

---

[1]) Numărul ϱ fiind determinat $\left(mod\ \frac{n}{\sigma}\right)$ este indiferent a scrie $-\varrho$ în loc de ϱ.

De altă parte, din egalitățile (11) și (12) rezultă relațiunile dintre perioadele $(2\omega_1, 2\omega_3)$ și $(2\Omega'_1, 2\Omega_3')$

$$\Omega'_1 = (aa' + cb')\,\omega_1 + (ba' + db')\,\omega_3,$$
$$\Omega'_3 = (ac' + cd')\,\omega_1 + (bc' + dd')\,\omega_3,$$

al căror determinant

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = nn',$$

este egal cu produsul gradelor celor două transformări date.

Transformarea perioadelor se poate dar reduce la transformări de gradul al doilea și la transformări de grade numere impare.

Ne vom mărgini la gradul $n = 2$.

312. *Transformarea de gradul al doilea* $(n = 2)$.

Avem trei transformări normale corespunzătoare substituțiunilor

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aceste transformări sunt

$$(1)\ \Omega_1 = 2\omega_1, \quad \Omega_3 = \omega_3; \quad \omega_1 = \frac{\Omega_1}{2}, \quad \omega_3 = \Omega_3,$$

$$(2)\ \Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_3 = 2\omega_3; \quad \omega_1 = \Omega_1, \quad \omega_3 = \frac{\Omega_3}{2},$$

$$(3)\ \Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_3 = -\omega_1 + 2\omega_3; \quad \omega_1 = \Omega_1, \quad \omega_3 = \frac{\Omega_1 + \Omega_3}{2} = -\frac{\Omega_2}{2}.$$

Pentru a exprimă funcțiunea dată $p\,(u \mid \omega_1, \omega_3)$ în funcțiune rațională de $p\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, trebuie să cunoaștem polurile incongruente ale celei dintâi relativ la perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ ale celei de al doilea și părțile principale corespunzătoare acestor poluri.

In cazul transformării (1), funcțiunea

$$p\,(u \mid \omega_1, \omega_3) = p\left(u \middle| \frac{\Omega_1}{2}, \Omega_3\right)$$

admite în paralelogramul $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ polurile $u = 0$, $u = \Omega_1$ de ordinul al doilea, cu termenii principali

$$\frac{1}{u^2}, \qquad \frac{1}{(u - \Omega_1)^2}.$$

Aplicând formula de descompunere a funcțiunilor eliptice în elemente simple, avem

$$p\left(u\left|\frac{\Omega_1}{2},\Omega_3\right.\right)=p\,(u\mid\Omega_1,\Omega_3)+p\,(u-\Omega_1\mid\Omega_1,\Omega_3)+C.$$

Comparând desvoltările ambelor membre în domeniul $u=0$, obținem valoarea constantei $C=-p\Omega_1$.

Avem așà dar, scriind ω_α în loc de Ω_α, expresiunea rațională de gradul al doilea

$$\begin{aligned}p\left(u\left|\frac{\omega_1}{2},\omega_3\right.\right)&=pu+p\,(u-\omega_1)-p\omega_1\\&=pu+\frac{(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)}{pu-e_1}.\end{aligned}\tag{4}$$

Permutând indicii (1, 3) și (1, 2), obținem expresiunile corespunzătoare celorlalte două cazuri:

$$\begin{aligned}p\left(u\left|\omega_1,\frac{\omega_3}{2}\right.\right)&=pu+p\,(u-\omega_3)-p\omega_3\\&=pu+\frac{(e_3-e_2)\,(e_3-e_1)}{pu-e_3},\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}p\left(u\left|\omega_1,\frac{\omega_2}{2}\right.\right)&=pu+p\,(u-\omega_2)-p\omega_2\\&=pu+\frac{(e_2-e_1)\,(e_2-e_3)}{pu-e_2}.\end{aligned}\tag{6}$$

313. Să considerăm transformarea (4)

$$\bar{p}\,u=p\left(u\left|\frac{\omega_1}{2},\omega_3\right.\right)=pu+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pu-e_1},\tag{1}$$

numită transformarea lui *Landen* [1]. Punând

$$\bar{p}\frac{\omega_1}{2}=\bar{e}_1,\quad \bar{p}\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right)=\bar{e}_2,\quad \bar{p}\omega_3=\bar{e}_3\tag{2}$$

avem ecuațiunea

$$\bar{p}'^2u=4\,(\bar{p}u-\bar{e}_1)\,(\bar{p}u-\bar{e}_2)\,(\bar{p}u-\bar{e}_3).\tag{3}$$

Derivând ecuațiunea (1) obținem

$$\bar{p}'u=\frac{p'u}{(pu-e_1)^2}\left[(pu-e_1)^2-(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)\right].\tag{4}$$

Membrul întâi se anulează dacă anulăm unul din cei doi factori ai membrului al doilea. Să considerăm întâi ecuațiunea

$$p'u=0,$$

[1] Matematician englez din secolul al 18-lea.

căreia corespund valorile $pu=e_1$, e_2, e_3. Pentru $pu=e_1$, ambele membre (4) devin infinite. Vom considerà numai celelalte două: $pu=e_2$, $pu=e_3$ şi vom căutà valorile corespunzătoare ale lui $\bar{p}u$.

Inlocuind în ecuaţiunea (1) pu respectiv prin e_2 şi e_3, obţinem valorile

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{p}\omega_2=e_2-(e_1-e_3)=-2e_1, \\ \bar{p}\omega_3=e_3-(e_1-e_2)=-2e_1. \end{cases}$$

Egalitatea $\bar{p}\omega_2=\bar{p}\omega_3$ se explică prin aceea că punctele ω_2, ω_3 sunt congruente pentru funcţiunea $\bar{p}u$, relativ la perioadele ω_1, $2\omega_3$ ale acestui funcţiuni:

$$\omega_2\equiv\omega_3\ (mod\ \omega_1,\ 2\omega_3).$$

Valoarea $\bar{e}_3=-2\bar{e}_1$ a funcţiunii transformate $\bar{p}u$ corespunde semiperioadei primitive ω_3. Ecuaţiunea $p'u=0$ ne-a servit dar numai pentru a determinà valoarea $\bar{e}_3$. Dacă anulăm al doilea factor din (4), avem ecuaţiunea

$$(6)\qquad (pu-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)=0;$$

de unde

$$pu=e_1\pm\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}.$$

Ducând aceste valori în ecuaţiunea (1), obţinem pentru $\bar{p}u$ valorile corespunzătoare semiperioadelor sale $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}+\omega_3$, adică $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$; avem astfel

$$(7)\qquad \begin{cases} \bar{e}_1=e_1+2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \text{ [1]} \\ \bar{e}_2=e_1-2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \\ \bar{e}_3=-2e_1. \end{cases}$$

Dacă cantităţile e_1, e_2, e_3 sunt reale şi dispuse în ordinea $e_1>e_2>e_3$, valorile $\bar{e}_\alpha$ sunt de asemenea reale şi satisfac inegalităţile $\bar{e}_1>\bar{e}_2>\bar{e}_3$.

Invarianţii funcţiunii transformate se pot deduce din formula (1), dacă desvoltăm ambele membre în domeniul $u=0$ şi identificăm coeficienţii termenilor lui u^2 şi u^4. Reprezentând aceşti in-

---

[1]) Semnele celor două radicale sunt determinate de consideraţiunea următoare: Dacă luăm radicalul astfel ca partea sa reală să fie pozitivă, trebuie luat $\bar{p}\frac{\omega_1}{2}$ cu acelaş radical, căci în cazul când ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale, avem $\bar{p}\frac{\omega_1}{2}>\bar{p}\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right)$.

varianți prin $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, găsim

$$(8)\qquad \begin{cases} \bar{g}_2 = g_2 + 20(e_1-e_2)(e_1-e_3) = g_2 + 10\,p''\omega_1, \\ \bar{g}_3 = g_3 + 28(e_1-e_2)(e_1-e_3) = g_3 + \frac{7}{6}\,p^{IV}\omega_1. \end{cases}$$

314. Transformarea (5) (§ 312)

$$(9)\qquad p_1 u = p\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = pu + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{pu-e_3}$$

poartă numele de transformarea lui *Gauss*. Ea nu diferă de cea precedentă decât prin permutarea semiperioadelor ω_1 și ω_3 căreia corespunde permutarea cantităților e_1 și e_3.

Să punem

$$(10)\qquad p_1\omega_1 = \bar{e}_1,\quad p_1\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) = \bar{e}_2,\quad p_1\frac{\omega_3}{2} = \bar{e}_3.$$

Derivând ecuațiunea (9) și procedând ca în cazul de mai sus, găsim, pentru aceste cantități, expresiunile

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{e}_1 = -2e_3 \\ \bar{e}_2 = e_3 + 2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}, \\ \bar{e}_3 = e_3 - 2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

Dacă cantitățile e_α sunt reale și dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$, cantitățile $\bar{e}_\alpha$ sunt reale și dispuse în aceeași ordine.

Să observăm egalitatea $p_1\omega_1 = p_1\omega_2$, punctele ω_1 și ω_2 fiind congruente relativ la perioadele $2\omega_1$, ω_3 ale funcțiunii transformate $p_1 u$.

Valorile transformate ale invarianților se deduc din formulele (8), permutând ω_1 și ω_3:

$$(12)\qquad \begin{cases} \bar{g}_2 = g_2 + 10\,p''\omega_3, \\ \bar{g}_3 = g_3 + \frac{7}{6}\,p^{IV}\omega_3. \end{cases}$$

315. Să considerăm a treia transformare

$$(13)\qquad p_2 u = p\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right) = pu + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{pu-e_2}.$$

Un calcul analog cu cele precedente, derivând ambele membre (13), ne dă valorile

$$(14)\qquad \begin{cases} p_2\,\omega_1 = \bar{e}_1 = -2e_2, \\ p_2\,\frac{\omega_2}{2} = \bar{e}_2 = e_2 + 2\sqrt{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}, \\ p_2\left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{2}\right) = \bar{e}_3 = e_2 - 2\sqrt{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

Dacă semiperioadele $\omega_1 = \alpha - i\beta$, $\omega_3 = \alpha + i\beta$ sunt imaginare conjugate, rădăcina e_2 este reală şi celelalte două e_1, e_3 sunt imaginare conjugate. Formulele (14) ne arată că toate rădăcinile $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ sunt reale. Acest rezultat se justifică *a priori*, observând că semiperioadele primitive, $\omega_1 = \alpha - i\beta$, $\frac{\omega_2}{2} = -\alpha$, ale funcţiunii transformate $p_2 u$ sunt echivalente cu semiperioadele

$$\Omega_1 = \omega_1 + \frac{\omega_2}{2} = -i\beta, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{2},$$

cea dintâi pur imaginară şi cea de a doua reală: celei dintâi corespunde rădăcina reală cea mai mică şi celei de a doua rădăcina reală cea mai mare; de unde rezultă inegalităţile

$$\bar{e}_3 < \bar{e}_1 < \bar{e}_2.$$

Putem aplicà transformarea considerată în cazul când invarianţii funcţiunii pu sunt reali iar discriminantul negativ. Funcţiunea pu transformată are, în virtutea celor ce preced, discriminantul său pozitiv.

Putem dar totdeauna reduce studiul variaţiunii funcţiunilor pu, σu, $\sigma_\alpha u$, $\vartheta(v)$ *în cazul discriminantului negativ la cazul discriminantului pozitiv.*

316. *Transformarea lui Landen aplicată funcţiunii* $sn(v, k)$.

1°. *Transformarea modulului* k *şi a modulului complimentar* k', *definite de ecuaţiunile*

$$(1) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

Să punem

$$(2) \qquad k_1^2 = \frac{\bar{e}_2 - \bar{e}_3}{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}, \quad k_1'^2 = \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}.$$

Formulele (7) (§ 313) ne dau

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{e}_1 - \bar{e}_3 = 3e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \qquad = (\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2})^2 = (e_1 - e_3)(1 + k')^2 \\ \bar{e}_2 - \bar{e}_3 = 3e_1 - 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \qquad = (\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2})^2 = (e_1 - e_3)(1 - k')^2 \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_2 = 4\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = 4(e_1 - e_3)k' \end{cases}$$

De unde rezultă ecuaţiunile

$$(4) \qquad k_1^2 = \left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right)^2, \quad k_1'^2 = 4\frac{k'}{(1 + k')^2}.$$

Presupunem părţile reale ale lui k şi k' pozitive şi $|k| < 1$, $|k'| < 1$. Extrăgând rădăcinile pătrate ale egalităţilor (4), alegem

semnele astfel ca părțile reale ale modulelor k_1 și k'_1 să fie deasemenea pozitive; avem astfel ecuațiunile

$$(5)\qquad \begin{cases} k_1=\dfrac{1-k'}{1+k'}=\dfrac{1-k'^2}{(1+k')^2}=\dfrac{k^2}{(1+k')^2}, \\ k'_1=\dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}. \end{cases}$$ [1]

Eliminând modulul complementar k' între ecuațiunile

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'},\quad k_1=\frac{k^2}{(1+k')^2},$$

obținem ecuațiunea

$$(\cdot)\qquad k^2k_1^2+2(k^2-2)k_1+k^2=0,$$

care leagă între ele modulul transformat k_1 cu modulul k. Această ecuațiune se numește *ecuațiunea modulară a modulului k.*

Din egalitățile (5), ținând seamă de ipotezele de mai sus, relative la modulele k și k', rezultă inegalitățile

$$(6)\qquad \begin{cases} |k_1|<|k^2|<|k|, \\ |k'_1|>|\sqrt{k'}|>|k'| \end{cases}$$

2°. Să examinăm acum transformarea funcțiunii

$$(7)\qquad sn\,(\varphi,k)=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{pu-e_3}},\qquad \varphi=u\sqrt{e_1-e_3}.$$

Avem (3)

$$\bar{\varphi}=u\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=u\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')=\varphi\,(1+k');$$

prin urmare

$$(8)\quad sn\,(\bar{\varphi},k_1)=sn\left[\varphi\,(1+k'),\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}{\sqrt{\bar{p}u-\bar{e}_3}}=\frac{\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')}{\sqrt{\bar{p}u-\bar{e}_3}}.$$

Referindu-ne la formula (4) (§ 312)

$$\bar{p}u=p\left(u\mid\frac{\omega_1}{2},\omega_3\right)=pu+p\,(u-\omega_1)-e_1$$

și ținând seamă de valoarea $\bar{e}_3=-2e_1$ (7) (§ 313), rezultă egalitatea

$$\bar{p}u-\bar{e}_3=pu+p\,(u+\omega_1)+e_1\,[1]).$$

Membrul al doilea se anulează pentru $u=\omega_3$ și $u=\omega_2$; prin urmare egalitatea precedentă se poate pune sub forma

$$\bar{p}u-\bar{e}_3=C\,(pu-e_3)\,[p(u+\omega_1)-e_3].$$

Constanta C se deduce din desvoltarea ambelor membre în

1) $p\,(u-\omega_1)=p\,(u+\omega_1)$.

domeniul $u=0$; găsim

$$C=\frac{1}{e_1-e_3}.$$

Avem aşà dar egalitatea

$$(9)\quad \overline{p}u-\bar{e}_3=\frac{1}{e_1-e_3}(pu-e_3)\left[p(u+\omega_1)-e_3\right]=\frac{(pu-e_3)\,(pu-e_2)}{pu-e_1};$$

de unde, în virtutea formulelor

$$sn^2\varphi=\frac{e_1-e_3}{pu-e_3},\quad cn^2\varphi=\frac{pu-e_1}{pu-e_3},\quad dn^2\varphi=\frac{pu-e_2}{pu-e_3},$$

$$(10)\qquad \overline{p}u-\bar{e}_3=\frac{(e_1-e_3)}{sn^2\varphi}\,\frac{dn^2\varphi}{cn^2\varphi}.$$

Prin urmare, egalitatea (8) se scrie

$$(11)\qquad sn\,(\overline{\varphi},k_1)=sn\left[\varphi\,(1+k'),\frac{1-k'}{1+k'}\right]=(1+k')\frac{sn\varphi.\ cn\varphi.}{dn\varphi.}.$$

In această formulă consistă *transformarea lui Landen* pentru funcţiunea $sn\,(\varphi,k)$.

317. Să introducem în egalitatea (11) notaţiunile

$$(12)\qquad sn\,(\varphi,k)=x,\quad sn\,(\varphi\,(1+k'),\,k_1)=y;$$

vom aveà

$$(13)\qquad y=(1+k')\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

împreună cu egalităţile

$$(14)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}=d\varphi,\\[2ex] \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}}=(1+k')\,d\varphi=\dfrac{2}{1+k_1}d\varphi.\ ^{1})\end{cases}$$

De unde, ţinând seamă că, în virtutea egalităţii (13), x şi y se anulează în acelaş timp, avem egalitatea

$$(15)\qquad \int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}}=\frac{1+k_1}{2}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k_1^2\,y^2)}}.$$

---

[1]) Prima egalitate $k^2=\frac{1-k'}{1+k'}$ $\left((5)\,(\S\,316)\right)$, dă $1+k'=\frac{2}{1+k_1}$

In această egalitate consistă transformarea lui Landen pentru integrala normală a lui Legendre. *Ea reduce calculul integralei al cărei modul k este în valoare absolută mai mic decât 1 la o integrală de aceeaș speță, având un modul k_1 a cărei valoare absolută este mai mică decât $|k|$.*

318. *Transformarea lui Landen aplicată constantelor*

$$(16)\quad K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad iK'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

și integralei

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

modulele k și k' fiind presupuse reale și cuprinse între 0 și 1.

I. Fie K_1 și iK'_1 transformatele constantelor

$$K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},\quad iK'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3};$$

ele sunt date de egalitățile

$$(17)\quad \begin{cases} K_1=\dfrac{\omega_1}{2}\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=\dfrac{\omega_1}{2}\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')=\dfrac{1+k'}{2}K=\dfrac{1}{1+k_1}K, \\ iK_1'=\omega_3\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')=i(1+k')\,K'=\dfrac{2i}{1+k_1}K'. \end{cases}$$

De unde

$$(18)\quad \begin{cases} K=(1+k_1)\,K_1=(1+k_1)\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}}, \\ K'=\dfrac{1+k_1}{2}K'_1=\dfrac{1+k_1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}}, \end{cases}$$

modulele k_1 și k'_1 fiind determinate de formulele (5) (§ 316).

Să ne închipuim că aplicăm transformarea lui Landen constantelor K_1, K'_1 și să reprezintăm prin k_2, k'_2 modulele transformate ale lui k_1 și k'_1 și prin K_2, K_2', transformatele lui K_1 și K'_1; vom avea egalitățile

$$k_2=\frac{k_1^2}{(1+k'_1)^2},\quad k'_2=\frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1},$$

$$K_1=(1+k_2)\,K_2,\quad K'_1=\frac{1+k_2}{2}K'_2,$$

$$K=(1+k_1)(1+k_2)\,K_2,\quad K'=\frac{1}{2^2}(1+k_1)(1+k_2)\,K'_2$$

și inegalitățile

$$k_2 < k_1 < k, \qquad k'_2 > k'_1 > k'.$$

Continuând în același mod, rezultă

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{K} = (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)\,\mathrm{K}_n \\ \mathrm{K}' = \dfrac{1}{2^n}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)\,\mathrm{K}'_n, \end{cases}$$

$$k > k_1 > k_2 > \dots > k_n.$$

Modulele k_n sunt pozitive și descresc necontenit; ele tind către zero când n tinde către infinit. In adevăr, din egalitatea

$$k_{n+1} = \frac{k_n^2}{(1+k'_n)^2}$$

rezultă $k_{n+1} < k_n^2 < k_{n-1}^4 < k_{n-2}^8 \dots < k^{2^n}$; prin urmare, pentru $n = \infty$,

$$(20)\qquad \lim_{n=\infty} k_n = 0.$$

De unde, în virtutea egalității $k_n^2 + k'^2_n = 1$,

$$(21)\qquad \lim_{n=\infty} k'_n = 1.$$

Considerând expresiunile

$$(22)\quad \mathrm{K}_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}}, \qquad \mathrm{K}'_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n'^2x^2)}},$$

conchidem valorile

$$(23)\qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{K}_n = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{K}'_n = \infty.$$

II. In același mod, plecând dela egalitatea (15), obținem

$$(24)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{(1+k_2)(1+k_2)\dots(1+k_n)}{2^n} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}}.$$

Modulul k_n devenind destul de mic, seria

$$(25)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k_n^2 \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}k_n^4 \int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots,$$

sau, punând $x = sin\varphi$, seria transformată

$$(26)\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\,sin^2\varphi}} = \varphi + \frac{1}{2}k_n^2 \int_0^\varphi sin^2\varphi\,d\varphi + \frac{1.3}{2.4}k_n^4 \int_0^\varphi sin^4\varphi\,d\varphi + \dots$$

convergează foarte repede.

319. *Transformarea lui Gauss* poate de asemenea servi la calculul constantelor K și K′ și a integralei de speța I. Din formulele (11) (§ 314) deducem valorile

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{e}_1-\bar{e}_2=-3e_3-2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}=(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3})^2=(e_1-e_3)(1-k)^2, \\ \bar{e}_1-\bar{e}_3=-3e_3+2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}=(\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3})^2=(e_1-e_3)(1+k)^2, \\ \bar{e}_2-\bar{e}_3=4\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

De unde rezultă, pentru modulele k_1 și k'_1, transformatele modulelor k și k', expresiunile

$$(2)\quad \begin{cases} k_1=\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k} \\ k'_1=\dfrac{1-k}{1+k}=\dfrac{1-k^2}{(1+k)^2}=\dfrac{k'^2}{(1+k)^2}, \end{cases}$$

cari diferă de formulele (5) (§ 316) prin permutarea lui k cu k' și în acelaș timp a lui k_1 cu k'_1. De unde se deduce ecuațiunea modulară

$$(\beta)\qquad k_1^2=\frac{4k}{(1+k)^2},$$

care diferă de ecuațiunea (α), din acel paragraf, prin permutarea modulelor k și k_1.

Din formulele (2), ipotezele fiind aceleași ca în transformarea lui Landen, rezultă inegalitățile

$$k_1>k,\quad k'_1<k_1.$$

Se conchide, ca și în cazul precedent, că modulele $k_1, k_2, \ldots$ cresc și tind către 1, pe când modulele complimentare $k'_1, k'_2, \ldots$ descresc și tind către zero.

Procedând ca în cazul transformării lui Landen, obținem egalitatea

$$(3)\qquad pu-\bar{e}_1=\frac{(pu-e_1)(pu-e_2)}{pu-e_3},$$

care nu diferă de formula (9) (§ 316) decât prin permutarea lui e_1 cu e_3 și înlocuirea lui $\bar{e}_3$ prin $\bar{e}_1$.

Cu ajutorul acestei egalități putem obține formula de transformare a funcțiunii $sn\,(v, k)$. Egalitatea (3) scrisă sub forma

$$pu-\bar{e}_3=\bar{e}_1-\bar{e}_3+\frac{(pu-e_1)(pu-e_2)}{pu-e_3}$$

devine, ținând seamă de a doua formulă (1),

$$\frac{pu-\bar{e}_3}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=1+\frac{1}{(1+k)^2}\,\frac{pu-e_3}{e_1-e_3}\,\frac{pu-e_1}{pu-e_3}\,\frac{pu-e_2}{pu-e_3}.$$

Introducând funcțiunile lui Jacobi, această egalitate ia forma

$$\frac{1}{sn^2\varphi} = 1 + \frac{cn^2\varphi\, dn\,\varphi^2}{(1+k)^2\, sn^2\varphi} = \frac{(1+k)^2\, sn^2\varphi + (1 - sn^2\varphi)\,(1 - k^2 sn^2\varphi)}{(1+k)^2\, sn^2\varphi}$$

$$= \frac{(1 + k\ sn^2\varphi)^2}{(1+k)^2\ sn^2\varphi}.$$

Formula de transformare a funcțiunii $sn\ (\varphi, k)$ este așà dar

$$(4) \qquad sn(\overline{\varphi}, k_1) = sn\left[(1+k)\varphi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\, sn\varphi}{1 + k\, sn^2\varphi},$$

$$\overline{\varphi} = u\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = (1+k)\, u\, \sqrt{e_1 - e_3} = (1+k)\varphi;$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

320. Să punem

$$sn\,(\varphi, k) = x, \quad sn\,(\overline{\varphi}, k_1) = y;$$

formula (4) se transformă în expresiunea rațională

$$(5) \qquad y = \frac{(1+k)\, x}{1 + k\, x^2},$$

de gradul al doilea, în virtutea căreia avem egalitatea

$$(6) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k_1^2y^2)}}.$$

Transformatele constantelor K și K′ sunt date, în cazul considerat (Gauss), de egalitățile

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{K}_1 = \omega_1 \sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = (1+k)\,\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} = (1+k)\,\mathrm{K}, \\ i\mathrm{K}'_1 = \dfrac{\omega_3}{2}\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = \dfrac{1+k}{2}\,\omega_3\,\sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{1+k}{2}\, i\,\mathrm{K}'. \end{cases}$$

De unde

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathrm{K} = \dfrac{1}{1+k}\,\mathrm{K}_1 = \dfrac{1+k'_1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k_1^2x^2)}}, \\ \mathrm{K}' = \dfrac{2}{1+k}\,\mathrm{K}'_1 = (1+k'_1)\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k_1'^2x^2)}}, \end{cases}$$

modulele k_1 și k'_1 fiind determinate de formulele (2) (§ 319).

Aplicând de n ori succesiv transformarea lui Gauss, obținem expresiuni de aceeași formă ca în cazul transformării lui Landen, permutând în toate desvoltările modulele k_n și k'_n și în acelaș timp

K_n cu K'_n, $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$(9) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{2^n}(1 + k'_1)(1 + k'_2)\ldots(1 + k'_n)\, K_n, \\ K' = (1 + k'_1)(1 + k'_2)\ldots(1 + k'_n)\, K'_n. \end{cases}$$

Seriile convergează mai repede în cazul întâi dacă $k < k'$ şi mai repede în cazul al doilea dacă $k' < k$. De unde conchidem că este preferabil a ne servi de prima sau a doua transformare după cum $k \lesseqgtr k'$.

CAPITOLUL XXIV.

PROBLEMA DIVIZIUNEI.

I. *Diviziunea argumentului funcţiunii pu.*

321. Problema diviziunei argumentului printr'un număr întreg pozitiv n consistă în a calculà valoarea lui $p\frac{u}{n}$ în funcţiune de pu. Ecuaţiunea care leagă $p\frac{u}{n}$ de pu este dată de ecuaţiunea multiplicaţiunei lui pnu în care înlocuim u prin $\frac{u}{n}$ (13) (§ 174); ea primeşte forma

$$(1) \qquad P\left(p\frac{u}{n}\right) - pu\, P_1\left(p\frac{u}{n}\right) = 0,$$

P şi P_1 fiind polinoame de $p\frac{u}{n}$, cel dintâi de gradul n^2 şi cel de al doilea de gradul $n^2 - 1$. Coeficienţii acestor polinoame sunt polinoame de $\frac{1}{2}g_2$ şi g_3 cu coeficienţi numere întregi. Unei valori pu corespund dar n^2 valori pentru $p\frac{u}{n}$. Acest rezultat se mai poate deduce din consideraţiunea următoare:

Fiind dată valoarea $pu = pu_0$, avem

$$u = \pm u_0 + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3,$$

λ şi μ fiind numere întregi arbitrare; de unde rezultă egalitatea

$$p\frac{u}{n} = p\left(\pm\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right).$$

Insă $p\frac{u}{n}$ fiind funcţiune pară, această egalitate nu se schimbă dacă schimbăm semnul lui u_0 şi în acelaş timp semnele coeficienţilor

λ şi μ. Toate rădăcinile sunt dar cuprinse în expresiunea

$$(2) \qquad y_{\lambda,\mu} = p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right),$$

pentru valorile $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1$.

Rădăcinile sunt în genere distincte; căci pentru ca două rădăcini

$$p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right), \quad p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda'\omega_1 + 2\mu'\omega_3}{n}\right)$$

să fie egale, este necesar ca diferenţa argumentelor

$$\frac{2(\lambda - \lambda')\omega_1 + 2(\mu - \mu')\omega_3}{n},$$

sau, suma lor

$$\frac{2u_0}{n} + \frac{2(\lambda + \lambda')\omega_1 + 2(\mu + \mu')\omega_3}{n}$$

să fie o perioadă (nu neapărat primitivă). Diferenţa argumentelor nu poate fi perioadă, căci diferenţele $\lambda - \lambda'$, $\mu - \mu'$ sunt mai mici decât n şi nu sunt nule în acelaş timp. Suma nu poate fi perioadă decât dacă u_0 ar fi o semiperioadă [1]).

Ecuaţiunea (1) este ireductibilă, adică membrul întâi nu este divizibil cu un polinom de $p\left(\frac{u}{n}\right)$ de grad mai mic, ai cărui coeficienţi să fie funcţiuni raţionale de pu. In adevăr, să presupunem că ar există un polinom

$$(3) \qquad y^m + P_1(pu)\, y^{m-1} + \ldots + P_m(pu) = 0, \qquad m < n^2$$

ai cărui coeficienţi să fie funcţiuni raţionale de pu. Aceşti coeficienţi rămânând neschimbaţi când mărim u cu un multiplu de perioade $2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3$, *oricare ar fi valoarea lui* u, rezultă că dacă $y_{00} = p\frac{u}{n}$ este una din rădăcinile ecuaţiunei (3), valorile

$$(4) \qquad y_{\lambda,\mu} = p\left(\frac{u}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

vor satisface şi ele această ecuaţiune, adică rădăcinile ecuaţiunilor

---

[1]) Din egalitatea

$$\frac{2u_0 + 2(\lambda + \lambda')\omega_1 + 2(\mu + \mu')\omega_3}{n} = \Omega,$$

Ω fiind o perioadă, rezultă $2u_0$ = perioadă.

(1) şi (3) vor coincide: ceeace probează ireductibilitatea ecuaţiunei (1).

Cele n^2 valori (4) sunt, în virtutea formulei de adiţiune, funcţiuni raţionale de cantităţile

$$p\frac{u}{n},\ p'\frac{u}{n},\ p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n},\ p'\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}.$$

De altă parte, dacă, pe lângă pu, presupunem dată valoarea

$$p'u=\sqrt{4p^3u-g_2pu-g_3},$$

recunoaştem că $p'\frac{u}{n}$ este funcţiune raţională de $p\frac{u}{n}$ şi de $p'u$. Căci derivând ecuaţiunea (1), pusă sub forma $pu=\mathscr{R}\left(p\frac{u}{n}\right)$, $\mathscr{R}$ funcţiune raţională, avem

$$p'\frac{u}{n}=\frac{np'u}{\mathscr{R}'\left(p\frac{u}{n}\right)}.$$

Aşà dar, toate rădăcinile ecuaţiunei (1) sunt funcţiuni raţionale de rădăcina $y_{0,0}=p\frac{u}{n}$, ai căror coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de g_2, g_3 şi de cantităţile

$$p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n},\ p'\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}.$$

Cele două din urmă sunt, în virtutea formulelor de adiţiune şi de multiplicaţiune, funcţiuni raţionale de $p\frac{2\omega_1}{n}$, $p\frac{2\omega_3}{n}$ şi de derivatele $p'\frac{2\omega_1}{n}$, $p'\frac{2\omega_3}{n}$, cari se calculează prin două extrageri de rădăcini pătrate.

Se demonstrează că ecuaţiunea diviziunei argumentului funcţiunii pu intră în clasa ecuaţiunilor numite *Abeliane*. Aceste ecuaţiuni se rezolvă algebriceşte prin radicale [1]).

§ 322 Diviziunea argumentului funcţiunii pu printr'un număr compus n se poate reduce la diviziuni succesive, divizorii fiind factorii primi ai lui n.

---

[1]) Durège-Maurer *Th. der elliptischen Functionen* p. 325.

Vom efectuà calculele în cazul cel mai simplu, $n = 2$. Ecuaţiunea corespunzătoare este (V. egalităţile (3), (15), (16), (§ 174).

$$(5)\qquad p\frac{u}{2}-pu=\frac{3\,p^4\frac{u}{2}-\frac{3}{2}g_2\,p\frac{u}{2}-3\,g_3p\frac{u}{2}-\frac{1}{16}g_2^2}{4\,p^3\frac{u}{2}-g_2p\frac{u}{2}-g_3}.$$

Soluţiunea problemei pe cale algebrică, adică rezoluţiunea acestei ecuaţiuni de gradul al patrulea, este, precum se vede, destul de anevoioasă. Ajungem însă foarte lesne la soluţiunea căutată, dacă comparăm membrul întâiu $p\frac{u}{2}-pu$ al ecuaţiunei precedente cu funcţiunea

$$(6)\qquad \varphi(u)=\frac{\sigma_1u\sigma_2u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_2u\,\sigma_3u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_3u\sigma_1u}{\sigma^2u}.$$

Amândouă aceste funcţiuni sunt funcţiuni eliptice, având aceleaşi perioade primitive $4\omega_1$, $4\omega_3$, aceleaşi poluri duble

$$u = 0,\ 2\omega_1,\ \ 2\omega_3,\ \ 2(\omega_1+\omega_3) = -2\omega_2,$$

reziduurile nule şi aceleaşi părţi principale corespunzătoare polurilor. Astfel, în domeniul polului $u = 0$, partea principală în ambele membre este

$$\frac{3}{u^2};$$

în domeniul celorlalte poluri părţile principale sunt

$$\frac{1}{(u-2\omega_1)^2},\ \frac{1}{(u-2\omega_3)^2},\ \frac{1}{(u+2\omega_2)^2}.$$

De unde rezultă egalitatea

$$(7)\qquad p\frac{u}{2}-pu=\frac{\sigma_1u\sigma_2u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_2u\sigma_3u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_3u\sigma_1u}{\sigma^2u},$$

Mărind u cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, obţinem egalităţile

$$(8)\qquad \begin{cases} p\left(\frac{u}{2}+\omega_1\right)-pu=-\frac{\sigma_1u\sigma_2u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_2u\sigma_3u}{\sigma^2u}-\frac{\sigma_3u\sigma_1u}{\sigma^2u}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_2\right)-pu=-\frac{\sigma_1u\sigma_2u}{\sigma^2u}-\frac{\sigma_2u\sigma_3u}{\sigma^2u}+\frac{\sigma_3u\sigma_1u}{\sigma^2u}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_3\right)-pu=\frac{\sigma_1u\sigma_2u}{\sigma^2u}-\frac{\sigma_2u\sigma_3u}{\sigma^2u}-\frac{\sigma_3u\sigma_1u}{\sigma^2u}. \end{cases}$$

De unde, în virtutea formulei

$$\frac{\sigma_a u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_a},$$

avem, pentru cele patru rădăcini, expresiunile:

$$(9)\quad \begin{cases} p\frac{u}{2} = pu + \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} + \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} + \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_1\right) = pu - \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} + \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} - \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_2\right) = pu - \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} - \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} + \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_3\right) = pu + \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} - \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} - \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}. \end{cases}$$

Aceste valori sunt în genere inegale (§ 321). Dacă $u=\omega_a$, $(a=1, 2,3)$, două câte două din ele devin egale. Astfel avem

$$(10)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_1}{2} = p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right) = e_1 + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}. \\ p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right) = p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right) = e_1 - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_2}{2} = p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_2\right) = e_2 + \sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}, \\ p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_1\right) = p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_3\right) = e_2 - \sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_3}{2} = p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_3\right) = e_3 + \sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}, \\ p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_1\right) = p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_2\right) = e_3 - \sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}. \end{cases}$$

Cele şase valori cuprinse în prima coloană a egalităţilor precedente sunt rădăcinile ecuaţiunei

$$\Pi\left(pu - p\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{4}\right) = 0,$$

în care λ şi μ primesc valorile (10) (§ 174), corespunzătoare lui $n = 4$:

$$(\lambda=1, \mu=0, 2), (\lambda=1, \mu=\pm 1), (\lambda=0, 2, \mu=1).$$

II. *Diviziunea perioadelor funcţiunii* pu.

323. In legătură cu problema diviziunei argumentului funcţiunii pu, avem problema mai specială a diviziunei perioadelor acestei

funcțiuni; un exemplu am avut mai sus, unde am obținut valorile $p\frac{\omega_1}{2}$, $p\frac{\omega_2}{2}$, $p\frac{\omega_3}{2}$ în același timp cu valorile diferite

$$p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right),\ p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_3\right),\ p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_1\right).$$

Ecuațiunea corespunzătoare acestei probleme, numită *ecuațiunea diviziunei perioadelor*, se deduce din ecuațiunea (1), în care înlocuim u printr'o perioadă, prin urmare făcând $pu=\infty$. Se obține ecuațiunea

$$P_1\left(p\frac{u}{n}\right)=0, \tag{13}$$

ale cărei rădăcini sunt valorile ce primește $y_{\lambda,\mu}$ din formula (2) pentru $u_0=0$. Aceste valori sunt

$$y_{\lambda,\mu}=p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}, \tag{14}$$

$\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1$, exceptând $\lambda=\mu=0$.

Dacă n este un număr compus, este de ajuns a aplică operațiunea diviziunei succesiv factorilor primi ai acestui număr. Pentru $n=2$, avem valorile $p\,\omega_a = e_a$, $a=1, 2, 3$.

Putem dar considerà n număr prim impar. In acest caz, avem, în virtutea egalității

$$y_{-\lambda,-\mu}=y_{\lambda,\mu},$$

$\frac{n^2-1}{2}$ valori distincte pentru $y_{\lambda,\mu}$. Polinomul $P_1\left(p\frac{u}{n}\right)$ este pătratul polinomului de gradul $\frac{n^2-1}{2}$ reprezintat (2) (§ 174) prin $\varphi(u)$, înlocuind u prin $\left(\frac{u}{n}\right)$. Valorile $y_{\lambda,\mu}$ sunt așa dar rădăcinile ecuațiunei $\varphi_n\left(\frac{u}{n}\right)=0$. Astfel, pentru $n=3$, această ecuațiune coincide cu ecuațiunea ((16), § 174):

$$3y^4-\frac{3}{2}g_2y^2-3g_3y-\frac{1}{16}g_2^2=0, \tag{15}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$p\frac{2\omega_1}{3},\ p\frac{2\omega_3}{3},\ p\frac{2\omega_1+2\omega_3}{3},$$

corespunzătoare valorilor $\lambda=1, \mu=0$; $\lambda=0, \mu=1$; $\lambda=1, \mu=+1$.

Ecuațiunea diviziunei perioadelor nu este, în cazul general, rezolubilă prin radicale[1])

324. *Diviziunea prin 2 a argumentului funcțiunilor* $sn v$, $cn v$, $dn v$. Din formula de multiplicațiune ((9), § 211)

$$(1) \qquad sn 2v = 2\frac{sn v\, cn v\, dn v}{1-k^2 sn^4 v},$$

în care înlocuim v prin $\frac{v}{2}$ și ridicăm la pătrat, rezultă ecuațiunea de gradul al optulea în $sn\frac{v}{2}$

$$(2) \qquad sn^2 v = 4\frac{sn^2\frac{v}{2}\left(1-sn^2\frac{v}{2}\right)\left(1-k^2 sn^2\frac{v}{2}\right)}{\left(1-k^2 sn^4\frac{v}{2}\right)^2},$$

ale cărei rădăcini sunt două câte două egale și de semne contrarii. Acest rezultat se poate justificà *a priori*:

1°. La valoarea dată $sn v = sn v_0$ corespunde, pentru v, dubla serie de valori

$$v = \begin{cases} v_0 + 4\lambda K + 2\mu i K', \\ 2K - v_0 + 4\lambda K + 2\mu i K'; \end{cases}$$

de unde, pentru $sn\frac{v}{2}$,

$$(3) \qquad sn\frac{v}{2} = \begin{cases} sn\left(\frac{v_0}{2} + 2\lambda K + \mu i K'\right), \\ sn\left(K - \frac{v_0}{2} + 2\lambda K + \mu i K'\right) \end{cases} \qquad \lambda = 0, 1;\ \mu = 0, 1.$$

2°. Din relațiunea

$$sn(u + 2K + \mu i K') = -sn(u + \mu i K'),$$

în care dăm lui μ valorile 0 și 1 și înlocuim u succesiv prin $\frac{v}{2}$ și prin $K - \frac{v}{2}$, rezultă că patru din valorile lui $sn\frac{v}{2}$ sunt respectiv egale și de semne contrarii cu celelalte patru.

---

[1]) Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di variabile complessa e delle Funzioni ellitiche.* (p. 309)

O altă proprietate a ecuațiunei (2) rezultă din prima formulă (7), (§ 199),

$$\sqrt{k}\, sn(v + iK') = \frac{1}{\sqrt{k}\, sn v}.$$

Dacă dar punem $x = \sqrt{k}\, sn\frac{v}{2}$, ecuațiunea (2) se transformă în ecuațiunea reciprocă

$$k^2 sn^2 v (1 - x^4)^2 - 4x^2 (k - x^2)(1 - kx^2) = 0,$$

care se rezolvă prin rădăcini pătrate suprapuse.

325. Se obține o formulă mai simplă pentru $sn\frac{v}{2}$, precum și pentru $cn\frac{v}{2}$, $dn\frac{v}{2}$, dacă le exprimăm în funcțiune de cnv, dnv.

Din formulele de multiplicațiune (9) (§ 211)

$$cnv = \frac{cn^2\frac{v}{2} - sn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}}, \quad dnv = \frac{dn^2\frac{v}{2} - k^2 sn^2\frac{v}{2}\, cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}},$$

deducem egalitățile

$$1 + cnv = \frac{2cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}}, \quad 1 + dnv = \frac{2dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}},$$

$$1 - cnv = \frac{2sn^2\frac{v}{2}\, dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}}, \quad 1 - dnv = \frac{2k^2 sn^2\frac{v}{2}\, cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}},$$

$$cnv + dnv = \frac{2cn^2\frac{v}{2}\, dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}};$$

din cari rezultă expresiunile

$$(5) \quad \begin{cases} sn\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - cnv}{1 + dnv}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1 - dnv}{1 + cnv}}, \\ cn\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{cnv + dnv}{1 + dnv}}, \quad dn\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{cnv + dnv}{1 + cnv}}. \end{cases}$$

Se justifică lesne *a priori* că fiind date valorile funcțiunilor $cn v$, $dn v$, avem pentru funcțiunile $sn\frac{v}{2}, cn\frac{v}{2}, dn\frac{v}{2}$ câte două valori egale și de semne contrarii.

Din formulele (5) rezultă valorile

$$(6)\quad \begin{cases} sn\dfrac{K}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}, & sn\dfrac{K+iK'}{2}=\sqrt{\dfrac{k+ik'}{k}}, \\ cn\dfrac{K}{2}=\sqrt{\dfrac{k'}{1+k'}}, & cn\dfrac{K+iK'}{2}=\sqrt{\dfrac{-ik'}{k}}, \\ dn\dfrac{K}{2}=\sqrt{k'}, & dn\dfrac{K+iK'}{2}=\sqrt{\dfrac{-ik'}{k-ik'}}. \end{cases}$$

Pentru a obține valoarea $sn\frac{iK'}{2}$ să facem $v=-\frac{iK'}{2}$ în egalitatea $sn(v+iK')=\frac{1}{ksnv}$; de unde rezultă $sn^2\frac{iK'}{2}=-\frac{1}{k}$ și prin urmare $cn^2\frac{iK'}{2}=1+\frac{1}{k}$, $dn^2\frac{iK'}{2}=1+k$. Avem așà dar valorile

$$(7)\quad sn\frac{iK'}{2}=\frac{i}{\sqrt{k}}, cn\frac{iK'}{2}=\sqrt{\frac{1+k}{k}}, dn\frac{iK'}{2}=\sqrt{1+k}.$$

Radicalele sunt reale și pozitive dacă k este real și cuprins între 0 și 1.

CAPITOLUL XXV.

CALCULUL NUMERIC AL FUNCȚIUNILOR ELIPTICE.

326. Formulele deduse din seriile ϑ dau mijlocul practic de a calculà funcțiunile eliptice, definite printr'un sistem de perioade, sau prin invarianți. Pentru ca seriile, de cari ne servim, să convergeze cât mai repede este necesar ca valoarea absolută a cantității $q=e^{i\pi\tau}$ să fie cât mai *mică* posibilă; pentru aceasta trebuie ca partea reală a raportului $\frac{\tau}{i}=\frac{\omega_3}{i\omega_1}$, care este presupusă *pozitivă*, să fie cât mai *mare* posibilă.

Acest rezultat este atins dacă valoarea absolută a perioadei $2\omega_1$, este cea mai mică posibilă. In adevăr, fie

$$2\omega_1=a+ib,\quad 2\omega_3=c+id;$$

avem

$$\tau=\frac{c+id}{a+ib}.$$

De unde, punând $\tau = \alpha + i\beta$,

$$\beta = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} = \frac{S}{|2\omega_1|^2};$$

S reprezintând aria paralelogramului $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Această arie având aceeaș valoare, pentru toate sistemele de perioade echivalente, propoziţiunea este justificată.

327. Fiind dat un sistem de două perioade primitive $(2\omega, 2\omega')$, să ne închipuim construită reţeaua de paralelograme corespunzătoare, având origina ca unul din vârfuri. Punctele perioade (vârfurile paralelogramelor) fiind aceleași oricare ar fi sistemul echivalent cu cel dintâi, să considerăm punctul perioadă a cărui distanţă de origină este cea mai mică.

Nu există de cât cel mult două asemenea puncte, căci puncte perioade nu pot fi decât vârfuri ale reţelei. Fie $2\omega_1$ acest punct, sau unul din cele două și fie $2\omega'_1$ una din perioadele, care împreună cu $2\omega_1$ formează un paralelogram elementar, astfel ca unghiul format de aceste două perioade să fie cuprins între 0 și π. Toate punctele perioade, cari împreună cu $2\omega_1$ formează paralelograme elementare, sunt date de expresiunea

$$2\omega'_1 + 2k\omega_1,$$

k fiind un număr întreg oarecare. Printre aceste puncte există unul, cel mult două, a cărui distanţă de origină este cea mai mică. Acest punct sau unul din ele, îl notăm $2\omega_3$. Sistemul de perioade primitive astfel determinat se numește *sistem principal.*

Dacă facem abstracţiune de sistemele formate din aceleași perioade cu semnele schimbate, avem un singur sistem principal, sau excepţional două, având perioada comună $2\omega_1$, celelate două fiind egale în valoare absolută. Nu facem, în genere, deosebire între aceste două sisteme.

Din definiţiunea sistemului principal, rezultă inegalităţile

$$(1)\quad |\omega_3| \geqslant |\omega_1|, \quad |\omega_3 + \omega_1| \geqslant |\omega_3|, \quad |\omega_3 - \omega_1| \geqslant \omega_3;$$

căci paralelogramele $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(\pm 2\omega_1 + 2\omega_3, 2\omega_3)$ sunt echivalente și, în virtutea determinării punctului $2\omega_3$, distanţa acestui punct de origină este mai mică, cel mult egală cu distanţa de origină a unuia din punctele $2\omega_3 \pm 2\omega_1$.

De unde

$$\left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| \geqslant 1, \quad \left|\frac{\omega_3 \pm \omega_1}{\omega_3}\right| \geqslant 1,$$

sau

$$(2)\qquad |\tau| \geqslant 1, \quad |\tau \pm 1| \geqslant |\tau|.$$

Interpretare geometrică. Să considerăm cercul $|\tau| = 1$ și două drepte perpendiculare pe axa reală duse prin punctele $\tau = \pm\frac{1}{2}$ (fig. 61). Prima inegalitate (2) exprimă că punctul τ este exterior cercului sau pe cerc. Inegalitatea $|\tau| \leqq |\tau - 1|$ exprimă că distanța punctului τ de origină este mai mică sau cel mult egală cu distanța sa de punctul $\tau = 1$; prin urmare punctul τ se găsește la stânga perpendicularei dusă prin $\tau = \frac{1}{2}$ sau pe această perpendiculară. In fine,

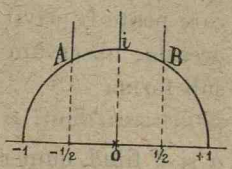

Fig. 61

în virtutea inegalității $|\tau| \leqslant |\tau + 1|$, punctul τ se găsește la dreapta perpendicularei dusă prin punctul $\tau = -\frac{1}{2}$. De unde rezultă că *punctul τ este situat în aria exterioară cercului $|\tau| = 1$, limitată de arcul AB al cercului și de cele două perpendiculare, sau pe una din aceste trei linii.*

Afixele punctelor A, B fiind respectiv $\mp\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că dacă punem $\tau = \alpha + i\beta$, avem

$$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \quad \beta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

328. Din desvoltările precedente rezultă, pentru valoarea absolută a cantității $q = e^{i\pi\tau}$, o limită superioară, dată de inegalitatea

$$|q| = e^{-\pi\beta} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{9}.$$

Dacă ω_1 și $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale, obținem pentru q o limită superioară mai mică. Căci, presupunând aceste cantități pozitive, ceeace este posibil, raportul $\frac{\tau}{i}$ este real și satisface inegalitatea

$$\frac{\tau}{i} \geqslant 1.$$

In acest caz, cantitatea q este reală, pozitivă și avem

$$q \leqq e^{-\pi} < \frac{1}{23}.$$

329. Fiind date perioadele $(2\omega_1, 2\omega_3)$ deducem valoarea raportului τ, de unde aceea a cantităților q și $q^{\frac{1}{4}}$ cu ajutorul cărora se

construesc seriile $\vartheta(v, q)$. Rămâne să examinăm între ce limite putem face să fie cuprins termenul

$$q^{n^2}z^{2n}, \quad (z=e^{i\pi v}),$$

care poate fi privit ca termenul general al seriilor $\vartheta(v, q)$. Pentru aceasta, observăm că orice valoare a cantității v se poate pune sub forma

$$v=a+b\tau,$$

a și b fiind numere reale. In virtutea formulelor de transformare a funcțiunilor $\vartheta(v)$ (§ 229), putem, în calculul acestor funcțiuni să considerăm valorile a și b, cuprinse între $-\frac{1}{2}$ și $+\frac{1}{2}$. Valoarea absolută a cantității $z=e^{i\pi v}$ fiind

$$|e^{bi\pi\tau}|=|q^b|,$$

rezultă că pentru $|b|\leq\frac{1}{2}$, această valoare este cuprinsă între $\left|q^{\frac{1}{2}}\right|$ și $\left|q^{-\frac{1}{2}}\right|$. Prin urmare valoarea absolută a termenului $q^{n^2}z^{2n}$ este cuprinsă între $\left|q^{n^2+n}\right|$ și $\left|q^{n^2-n}\right|$.

Seriile astfel construite convergează așa dar foarte repede.

330. Seriile $\vartheta(v)$ fiind calculate, putem obține valorile elementelor cari se prezintă în funcțiunile lui Weierstrass, precum și valorile acestor funcțiuni, în virtutea relațiunilor ce leagă funcțiunile lui Weierstrass cu cele ale lui Jacobi. Astfel formulele (18) (§ 232) ne dau cantitățile e_1, e_2, e_3, de unde rezultă valorile invarianților g_2, g_3, a discriminantului Δ și a invariantului absolut J. Cantitatea η_1 este dată de formula (13) (§ 235)

$$(1) \quad \eta_1\omega_1=-\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta'_1(0)}=\frac{\pi^2}{12}\frac{1-3^3.q^{1.2}+5^3.q^{2.3}-\ldots}{1-3q^{1.2}+5.q^{2.3}-\ldots}$$

și valoarea lui η_3 rezultă din egalitatea

$$(2) \quad \eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{i\pi}{2}.$$

331. Să presupunem că funcțiunea eliptică ce voim să calculăm este definită de invarianții g_2 și g_3. Cunoștința acestor invarianți trage după sine cunoștința rădăcinilor e_1, e_2, e_3 ale ecuațiunii

$$(1) \quad 4x^3-g_2x-g_3=0.$$

Să presupunem rădăcinile dispuse astfel ca să avem inegalitățile

$$(2) \quad |e_1-e_3|\geqslant\begin{cases}|e_1-e_2|\\|e_2-e_3|\end{cases}$$

Punând

$$(3) \qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

avem, în virtutea inegalităților (2).

$$|k^2|\leqq 1, \quad |k'^2|\leqq 1.$$

Dacă punctele e_1, e_2, e_3 sunt în linie dreaptă, e_2 fiind situat între e_1 și e_3, k^2 și k'^2 sunt reale și pozitive.

In cazul general, când cele trei puncte formează un triunghiu, latura $\overline{e_1 e_3}$ fiind cea mai mare, sau, cel puțin, nefiind mai mică ca nici una din celelalte două, unghiurile ce ea formează cu acestea sunt unghiuri ascuțite. Aceste unghiuri fiind respectiv egale cu cea mai mică valoare absolută a fiecărui argument al raporturilor

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

rezultă că aceste argumente sunt cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$ [1]). De unde rezultă că cel mai mic argument în valoare absolută al modulelor k și k' este cuprins între $-\frac{\pi}{4}$ și $+\frac{\pi}{4}$ și cel corespunzător al radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ este cuprins între $-\frac{\pi}{8}$ și $+\frac{\pi}{8}$. Prin urmare putem totdeauna luà radicalele

$$\sqrt{k}=\sqrt[4]{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}, \quad \sqrt{k'}=\sqrt[4]{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}},$$

astfel ca partea reală a fiecăruia să fie pozitivă [2]). Dacă rădăcinile e_1, e_2, e_3 sunt reale, dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$ radicalele $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ sunt reale, pozitive și mai mici decât 1.

---

[1]) Considerând figurile 62 și 63, avem (fig. 62)

$$\arg\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\hat{\alpha}_3, \quad \arg\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=-\hat{\alpha}_1$$

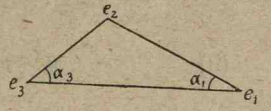

Fig. 62

și (fig 63)

$$\arg\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=-\hat{\alpha}_3, \quad \arg\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\hat{\alpha}_1$$

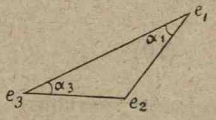

Fig. 63

[2]) Rezultat care concordă cu definițiunea modulelor k, k' și a radicalelor acestor module (§ 196).

332. *Calculul lui q.* Radicalele $\sqrt{k}$ şi $\sqrt{k'}$ fiind astfel determinate, putem, aplicând una din formulele (10) (11) sau (14) (§ 231), să calculăm cantitatea q. Cea dintâi din aceste trei formule

$$(4) \qquad \sqrt{k}=\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=2\frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$

în care punem

$$(5) \qquad \frac{\sqrt{k}}{2}=g, \quad q^{\frac{1}{4}}=h,$$

devine

$$(6) \qquad g=h\,\frac{1+h^8+h^{24}+h^{48}+\ldots}{1+2h^4+2h^{16}+2h^{36}+\ldots}.$$

Seria $\vartheta_3(0, q)$, absolut şi uniform convergentă pentru $|q|<1$, nu se anulează în interiorul cercului $|q|=1$, precum ne arată expresiunea sa sub formă de produs (3) (§ 226)

$$\vartheta_3(0,q)=\Pi(1-q^{2n})\,(1+q^{2n-1})^2$$

De unde rezultă că numitorul fracţiunii din urmă nu se anulează în interiorul cercului $|h|=1$ şi, prin urmare, membrul al doilea (6) se desvoltă într'o serie întreagă de h, convergentă în acest cerc, ai cărei primi termeni sunt

$$(7) \qquad g=h(1-2h^4+5h^8-10h^{12}+18h^{16}+\ldots).$$

Din această desvoltare rezultă, prin inversiune pentru h, o serie de forma

$$(8) \qquad h=g(1+a_1g^4+a_2g^8+\ldots)\ ^{1}).$$

Calculând coeficienţii, precum se ştie, şi înlocuind g şi h prin valorile lor (5), obţinem

$$(9) \qquad q^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{k}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5+15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9+\ldots$$

De unde, ridicând ambele membre la puterea a patra,

$$(10) \qquad q=\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4+\frac{21}{1024}k^6+\ldots$$

---

[1]) Dacă în ecuaţiunea (7) multiplicăm h cu i, g se reproduce multiplicat cu i; rezultă, viceversa, în virtutea transformării conforme, că, înlocuind g prin ig, h trebue să se reproducă multiplicat cu i.

Seriile (9) și (10) convergează în domeniul punctului $k = 0$. Se poate proba că ele convergează în interiorul cercului $|k| = 1$. Pentru aceasta, să ne referim la formula (23) (§ 203)

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{4}{k} - P(k^2),$$

din care se deduce egalitatea

$$-\pi \frac{K'}{K} = \log \frac{k^2}{16} + \pi \frac{P(k^2)}{K}.$$

Ambii termeni ai fracțiunii din membrul al doilea fiind funcțiuni olomorfe de k^2 în cercul $|k| = 1$ și numitorul neanulându-se în interiorul acestui cerc (observare § 203), rezultă că ultimul termen din membrul al doilea se poate desvoltă într'o serie întreagă $\mathcal{P}(k^2)$ convergentă în interiorul cercului $|k| = 1$. Putem dar scrie

$$-\pi \frac{K'}{K} = \log \frac{k^2}{16} + \mathcal{P}(k^2);$$

de unde

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{\log \frac{k^2}{16}} e^{\frac{k^2}{2} + \dots}$$

$$= \frac{k^2}{16} \left(1 + \frac{k^2}{2} + c_1 k^4 + \dots\right).$$

333. Putem obține pentru q o serie mai convergentă decât seria (10), plecând dela egalitatea (14) (§ 231), în care reprezintăm membrul dintâi prin l:

$$(11) \qquad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3(0) - \vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0) + \vartheta_0(0)} = 2 \frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots}.$$

Membrul din urmă al acestei egalități nu diferă de membrul al doilea al egalității (4) decât prin înlocuirea lui $q^{\frac{1}{4}}$ prin q; prin urmare, înlocuind în egalitatea (9) $q^{\frac{1}{4}}$ prin q și $\sqrt{k}$ prin l, avem seria

$$(12) \qquad q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \dots$$

Să căutăm o limită superioară a valorii absolute a cantității

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}.$$

Partea reală a radicalului $\sqrt{k'}$ fiind pozitivă, valoarea absolută a lui l este mai mică decât 1 și cu atât mai mică cu cât k' este mai aproape de 1.

Să presupunem $|k| \leq |k'| < 1$. In acest caz avem inegalitățile

$$|e_2 - e_3| \leq |e_1 - e_2| \leq |e_1 - e_3|.$$

Latura $\overline{e_2 e_3}$ a triunghiului (e_1, e_2, e_3) fiind mai mică decât celelalte două sau cel mult egală cu una din ele, sau cu amândouă (triunghiul echilateral) rezultă, pentru unghiul $\hat{e}_1$ cu vârful în punctul e_1, inegalitatea

$$\hat{e}_1 \leq \frac{\pi}{3}.$$

Acest unghiu fiind egal cu valoarea absolută a celui mai mic argument al lui k'^2 (§ 331), rezultă inegalitățile

$$-\frac{\pi}{3} \leq |\arg k'^2| \leq \frac{\pi}{3};$$

prin urmare, punând, pentru prescurtare, $k'^2 = \lambda$, avem

$$|\lambda| \cos e_1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Punctul λ este așa dar situat în porțiunea planului cuprinsă în interiorul cercului $|\lambda| = 1$, limitată de dreapta perpendiculară pe axa reală trecând prin punctul $\lambda = \frac{1}{2}$ (fig. 64). In această regiune, cantitatea

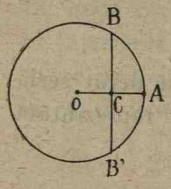

Fig. 64

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \sqrt[4]{\lambda}}{1 + \sqrt[4]{\lambda}} \tag{13}$$

este o funcțiune olomorfă de λ; valoarea absolută a acestei funcțiuni atinge dar limita sa superioară pe conturul regiunii formată din arcul B'AB și din coarda B'B. Insă, l fiind real pentru valori reale ale lui λ, primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice cu axa reală. Este dar de ajuns a considerà numai arcul AB și semicoarda CB (fig. 64).

1°. Pe arcul AB, avem

$$\lambda = e^{i\theta}; \tag{14}$$

prin urmare

$$l = \frac{1 - e^{i\frac{\theta}{4}}}{1 + e^{i\frac{\theta}{4}}} = -i \operatorname{tg} \frac{\theta}{8}.$$

Valoarea absolută

$$|l| = \operatorname{tg} \frac{\theta}{8}$$

crește când θ variază dela 0 la $\frac{\pi}{3}$; de unde, pentru limita superioară

$$|l| = tg\frac{\pi}{24} < \frac{2}{15} < 0{,}13.$$

2°. Pe dreapta CB, avem

$$(15) \qquad \lambda = \frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta} = \frac{1}{2}(1 + itg\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Pentru a examină cum variază $|l|$, vom examină cum variază logaritmul lui $|l|$. Pentru aceasta, să luăm derivata logaritmică a ambelor membre (13); obținem

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\sqrt{\lambda}}\frac{d\lambda}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}}{1-\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}.$$

Din egalitatea (13) scoatem expresiunile

$$1-\lambda = \frac{1}{2\cos\theta} e^{-i\theta}, \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{i}{2\cos^2\theta};$$

prin urmare

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = -\frac{i}{2\cos\theta}\left(\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}\right)e^{i\theta} = -i\left(\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}\right)\lambda = -i\left(\lambda^{\frac{1}{4}} + \lambda^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= -i\left[(2\cos\theta)^{-\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{4} + i\sin\frac{\theta}{4}\right) + (2\cos\theta)^{-\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{3\theta}{4} + i\sin\frac{3\theta}{4}\right)\right].$$

De unde, pentru partea reală a membrului întâi, expresiunea

$$(16) \qquad R\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta}\right) = \sin\frac{\theta}{4}(2\cos\theta)^{-\frac{1}{4}} + \sin\frac{3\theta}{4}(2\cos\theta)^{-\frac{3}{4}},$$

care este pozitivă în intervalul considerat. Ținând seamă că partea reală a logaritmului unei cantități este egală cu logaritmul valorii sale absolute, conchidem că logaritmul lui $|l|$, prin urmare $|l|$ crește când θ variază dela 0 la $\frac{\pi}{3}$. Inlocuind, în egalitatea (13), λ prin valorile sale extreme, $\frac{1}{2}$, $e^{\frac{i\pi}{3}}$, conchidem că valoarea absolută $|l|$ crește dela

$$\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1} < \frac{19}{218} < 0{,}09$$

până la valoarea limită

$$(17) \qquad |l| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}}} = tg\frac{\pi}{24},$$

obținută mai sus.

334. Cantitatea q fiind cunoscută, obținem semiperioada K cu ajutorul seriei (12) (§ 231):

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0,q) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots,$$

sau, cu ajutorul seriei mai convergente (13)

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k'}}(1+2q^4+2q^{16}+\ldots).$$

A doua semiperioada iK' este determinată de egalitatea

$$\frac{iK'}{K} = \tau;$$

de unde

$$(17) \qquad K' = -\frac{K}{\pi}\log q.$$

Valorile de cari logaritmul este susceptibil pentru aceeaș valoare a lui q, diferind între ele prin multipli de $2i\pi$, rezultă, pentru iK', o infinitate de valori cuprinse în expresiunea

$$K' = K'_0 - 2ni\,K,$$

K'_0 fiind una din ele. Insă, oricare ar fi valoarea întreagă a lui n, sistemele $(2K, 2iK'_0)$, $(2K, 2iK')$ sunt echivalente. Dispunem de numărul n astfel ca valoarea absolută a lui K' să fie cea mai mică.

335. S'a presupus $|k| \leqq |k'|$. Dacă $|k| > |k'|$, adică

$$|e_2 - e_3| > |e_1 - e_2|,$$

aplicăm formulele de transformare prin substituțiunea

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

care permută între ele cantitățile e_1, e_3; de unde rezultă permutarea radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$. Avem în acest caz (11) (§ 231):

$$\sqrt{k} = \frac{1-2q_1+2q_1^4-2q_1^9+\ldots}{1+2q_1+2q_1^4+\ldots\ldots}$$

și valorile

$$q_1 = e^{i\pi\tau_1} = e^{-\frac{i\pi}{\tau}},$$

$$l_1 = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}};$$

de unde

$$q_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9 + \ldots$$

Semiperioada K′ este dată de una din seriile

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \vartheta_3(0, q_1) = 1 + 2q_1 + 2q_1^4 + \ldots$$

sau

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k}}(1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \ldots).$$

Semiperioada K se deduce din egalitatea

$$K = \frac{K'}{\pi} \log \frac{1}{q_1}.$$

În rezumat, deosebirea dintre cazul din urmă și cel precedent este că mai întâi calculăm semiperioada K′ și apoi semiperioada K. În ambele cazuri semiperioadele primitive ale lui Weierstrass sunt determinate de egalitățile

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{i\,K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

336. *Calculul numeric al integralei de speța I:*

$$(1) \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Integrala u este susceptibilă de o infinitate de valori, cari depind de drumul urmat de limita superioară x; ele sunt cuprinse în expresiunea

$$u = \pm u_0 + \text{multiplu de perioade.}$$

Dacă drumul de integrațiune nu trece prin nici unul din punctele critice și determinațiunea inițială a radicalului este dată, valoarea integralei este determinată.

Pentru a obține valoarea numerică a integralei este mai comod a o aduce la forma normală a lui Legendre. Pentru aceasta, putem aplică substituțiuni diferite pe cari le alegem astfel ca seriile, analoage cu cele ce am întâlnit la calculul perioadelor (§ 203), să fie cât mai convergente.

Să presupunem

$$|e_1 - e_3| \geqslant |e_1 - e_2| \geqslant |e_2 - e_3|,$$

prin urmare

$$|k| \leqq |k'| \leqq 1. \tag{2}$$

Să aplicăm substituțiunea

$$\frac{x-e_1}{x-e_2} = y^2, \tag{3}$$

care transformă expresiunea (1) în cea următoare

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \left[-\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}} \right] \\ &= -\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dacă pe tot drumul de integrațiune avem inegalitatea

$$|k^2y^2| < 1, \tag{5}$$

putem desvoltà binomul $(1-k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie și integra termen cu termen, precum s'a procedat la calculul semiperioadelor K și K′ (§ 203). Metoda însă nu este aplicabilă dacă inegalitatea (5) încetează de a fi satisfăcută. In acest caz, permutăm e_1 cu e_3 punând

$$\frac{x-e_3}{x-e_2} = y^2. \tag{6}$$

Integrala devine

$$u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}} = -\omega_3 + \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}}. \tag{7}$$

Lăsând la o parte factorul constant din membrul din urmă, să considerăm integrala

$$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}}. \tag{8}$$

Este important de observat că pentru a calculà integrala (8) este de ajuns a ne mărginì la un semiplan (y) situat de o parte sau de alta a unei drepte nelimitate care trece prin origina $y = 0$; căci pe drumuri simetrice în raport cu origina, v trece prin valori egale și de semne contrarii. Dacă dar aplicăm variabilei o substituțiune lineară, care să transforme acea dreaptă într'un cerc cu centrul

în origină, astfel ca semiplanul în care se mișcă y să se transforme în *interiorul* cercului, variabila cea nouă nu va ieși din acel cerc.

Fie $2a$ argumentul cel mai mic în valoare absolută a lui $\frac{1}{k'}$; avem (§ 331)

$$-\frac{\pi}{4} < 2a < \frac{\pi}{4}.$$

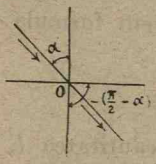

Fig. 65

Fie D dreapta care trece prin origină și face cu direcțiunea pozitivă a axei imaginare un unghiu egal cu a, acest unghiu fiind privit pozitiv (fig. 65) sau negativ (fig. 66), după cum semidreapta D situată deasupra axei reale este la stânga sau la dreapta axei imaginare.

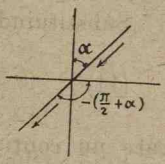

Fig. 66

Reprezintând prin $\left|\frac{1}{l}\right|$ raza cercului ce voim să introducem, substituțiunea care transformă semiplanul (y), situat la dreapta liniei D, în interiorul cercului

$$|z| = \frac{1}{|l|}, \tag{9}$$

este de forma

$$y = a e^{ia} \frac{1-lz}{1+lz} \text{ [1]} \tag{10}$$

a fiind un număr pozitiv.

Punctul $y = \frac{1}{k'}$ fiind situat la dreapta liniei D ca și punctul $y = +1$, punctele transformate corespunzătoare vor fi în interiorul cercului (9). Să dispunem de constantele a și l astfel ca punctele $y = +1$, $y = \frac{1}{k'}$ să se transforme în punctele $z = 1$, $z = -1$. Obținem egalitățile

$$1 = a e^{ia} \frac{1-l}{1+l}, \qquad \frac{1}{k'} = a e^{ia} \frac{1+l}{1-l};$$

---

[1]) Punând $lz = e^{i\theta}$, $y = te^{i\beta}$, $\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, avem $t = a\,tg\frac{\theta}{2}$. Când θ variază dela $-\pi$ la O, punctul y descrie semidreapta D, situată deasupra axei reale, dela ∞ la O și când θ variază dela O la π, y descrie a doua jumătate a acestei drepte dela O la ∞. Semiplanul (y), limitat de dreapta D descrisă în sensul indicat, se găsește dar la stânga frontierei ca și interiorul cercului descris în sensul pozitiv. Ceeace justifică transformarea conformă a celor două arii.

de unde, făcând produsul lor:

$$\frac{1}{k'}=a^2 e^{2ia};$$

prin urmare

$$a e^{ia}=\frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Substituind această valoare în egalitatea (10), avem formula

$$y=\frac{1}{\sqrt{k'}}\frac{1-lz}{1+lz}, \tag{11}$$

care nu conține altă cantitate nedeterminată decât cantitatea l. In această formulă să facem să se corespundă punctele $y=-1$ și $z=\frac{1}{l^2}$; rezultă egalitatea

$$l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}. \tag{12}$$

Cantitatea l determinată de această egalitate coincide cu expresiunea (13) (§ 333) a cărei limită superioară în valoare absolută este dată de inegalitatea

$$|l|\leq\frac{2}{15}.$$

Inlocuind în egalitatea (11) y prin $-\frac{1}{k'}$, rezultă

$$z=-\frac{1}{l^2}.$$

In rezumat, avem tabloul următor de corespondențe

$$\begin{array}{c|cccc} y & 1 & \frac{1}{k'} & -1 & -\frac{1}{k'} \\ z & 1 & -1 & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \end{array}, \tag{13}$$

Să aplicăm integralei (7) substituțiunea (11). Avem

$$1-y^2=1-\frac{1}{k'}\left(\frac{1-lz}{1+lz}\right)^2=\frac{4l}{(1-l)^2}\frac{(z-1)(1-l^2z)}{(1+lz)^2},$$

$$1-k'^2y^2=\frac{4l}{(1+l)^2}\frac{(1+z)(1+l^2z)}{(1+lz)^2},$$

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}=\frac{4l}{1-l^2}\frac{\sqrt{(z^2-1)(1-l^4z^2)}}{(1+lz)^2},$$

$$dy=-\frac{2l}{\sqrt{k'}}\frac{dz}{(1+lz)^2}.$$

De unde

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k'^2y^2)}} = -\frac{2}{(1+\sqrt{k'})}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\,(1-l^4z^2)}}$$

și prin urmare

$$(14) \qquad u = \frac{2}{\sqrt{e_1-e_3}\,(1+\sqrt{k'})^2}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-l^4z^2)}}.$$

In integrala din urmă, punctul z neeșind din cercul $|z| = \frac{1}{|l|}$, avem

$$|lz| < 1;$$

prin urmare, valoarea absolută a lui l fiind mai mică decât 1, avem $|l^2z| < 1$ și cu atât mai mult

$$|l^4z^2| < 1.$$

Putem așa dar desvoltà binomul $(1-l^4z^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie și integrà termen cu termen. Calculele de efectuat sunt aceleași ca pentru semiperioada K; obținem (11) § 203 desvoltarea

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-l^4z^2)}} = \mathcal{A}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - z\sqrt{1-z^2}\left[c_1 + \frac{2}{3}c_2z^2 + \frac{2.4}{3.5}c_3z^4 + \ldots\right]$$

în care

$$\mathcal{A} = 1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 l^{4n},$$

$$c_n = \sum_{m=n}^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 l^{4m}.$$

337. S'a presupus $|e_2 - e_3| \leq |e_1 - e_2|$. In cazul inegalității $|e_2 - e_3| > |e_1 - e_2|$, care trage după sine inegalitatea $|k| > |k'|$, aplicăm transformarea (3). Obținem aceleași desvoltări, în cari k' este înlocuit prin k și prin urmare

$$l = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}.$$

CAPITOLUL XXVI.

APLICAȚIUNI GEOMETRICE.

Cubica plană.

338. Orice curbă ireductibilă de gradul al treilea fără punct dublu se poate aduce, printr'o transformare omografică, la forma normală a lui Weierstrass

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

g_2 și g_3 fiind două constante reale, dacă coeficienții curbei sunt reali.

Să observăm mai întâiu că cubica (1) admite un punct de inflexiune la infinit, cu tangenta în acest punct paralelă la axa Oy. Putem pune acest fapt în evidență aplicând, de ex., transformarea

$$(2) \qquad x = \frac{x'}{y'}, \quad y = \frac{1}{y'};$$

ecuațiunea (1) devine

$$(3) \qquad y' = 4x'^3 - g_2 x' y'^2 - g_3 y'^3.$$

Punctul $x' = o$, $y' = o$ este un punct de inflexiune al curbei transformate și $y' = o$ este tangenta în acest punct, căruia corespunde punctul $(x=\infty, y=\infty)$ în direcțiunea $\left(\frac{y}{x}\right)_{x=\infty} = \infty$.

Pentru a aduce ecuațiunea unei cubice la forma normală, va fi dar necesar să aplicăm ecuațiunii o transformare omografică astfel încât unul din punctele sale de inflexiune împreună cu tangenta în acest punct să fie aruncate la infinit, într'o direcțiune convenabilă.

Fie

$$(1) \qquad f(x,y) = o$$

ecuațiunea unei cubice ireductibile și

$$(2) \qquad ax + by + c = o,$$

ecuațiunea tangentei într'unul din punctele sale de inflexiune. Ecuațiunea (1) se va puteà pune sub forma

$$(3) \qquad (ax+by+c)\,\varphi(x, y) + A\,(a'x+b'y+c')^3 = 0,$$

$\varphi(x, y)$ fiind o funcțiune de gradul al doilea și coeficientul A diferit de zero, căci dacă $A = o$, curba s'ar descompune într'o dreaptă și o conică. Punctul de inflexiune este punctul de intersecțiune al dreptelor

$$(4) \qquad ax + by + c = o, \qquad a'x + b'y + c' = o.$$

Să punem

$$(5) \qquad y' = ax + by + c, \qquad x' = a'x + b'y + c'$$

și să substituim variabilele x', y' în locul variabilelor x, y. Ecuațiunea (3) ia forma

$$(6) \qquad y'\varphi_1(x', y') + Ax'^3 = o,$$

în care $\varphi_1(0, 0) \neq 0$, căci cubica este, prin ipoteză, fără punct dublu.

Făcând în această ecuațiune substituțiunea

$$(7) \qquad x' = \frac{X}{Y}, \quad y' = \frac{1}{Y},$$

obținem o ecuațiune de forma

$$(8) \qquad (Y + B_1X + B_2)^2 + AX^3 + A_1X^2 + A_2X + A_3 = 0.$$

Aplicând, în fine, transformarea

$$(9) \qquad \xi = mX + n, \qquad \eta = Y + B_1X + B_2$$

și dispunând de parametrele m și n astfel ca termenul în ξ^2 să dispară și ca coeficientul lui ξ^3 să fie 4, ecuațiunea (8) ia forma normală

$$(10) \qquad \eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3,$$

g_2 și g_3 având valori determinate în funcțiune de coeficienții ecuațiunii propuse.

Din ecuațiunile (5), (7) și (9) rezultă că între coordonatele primitive (x, y) și cele finale (ξ, η) avem relațiuni de forma

$$(11) \qquad x = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}, \qquad y = \frac{\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}.$$

Aceste formule constitue transformarea omografică prin care ecuațiunea (1) este adusă la forma (10) [1])

339. Teoremă. *Coordonatele cartesiane ale unui punct oarecare al unei cubice plane se pot exprimă într'un mod rațional cu ajutorul a două funcțiuni eliptice având aceleași perioade și același argument,*

---

[1]) Transformarea omografică pentru a aduce ecuațiunea generală a cubicei la forma normală revine la o proiecțiune stereografică pe un plan convenabil. Vârful conului proiectant fiind în afară din planul figurii, se ia drept plan de perspectivă un plan paralel cu planul care conține vârful și tangenta la cubică în unul din punctele sale de inflexiune. Curba proiectată variând împreună cu vârful ales și cu planul de perspectivă, rezultă că transformarea considerată se poate efectuă într'o infinitate de moduri.

precum coordonatele unei curbe unicursale, se exprimă într'un mod rațional în funcțiune de un acelaș parametru.

In adevăr, ecuațiunea normală (10) se reduce la identitate dacă punem

$$(12) \qquad \xi = p(u;\ g_2,\ g_3), \quad \eta = p'(u;\ g_2,\ g_3).$$

Ducând aceste valori în formulele (11), obținem, pentru coordonatele (x, y) ale cubicei (1) expresiunile

$$(13) \quad x = \frac{\alpha_1 pu + \beta_1 p'u + \gamma_1}{\alpha pu + \beta p'u + \gamma}, \quad y = \frac{\alpha_2 pu + \beta_2 p'u + \gamma_2}{\alpha pu + \beta p'u + \gamma}.$$

Viceversa. Ecuațiunea (13) reprezintă o cubică plană, căci eliminând pu și $p'u$ între aceste ecuațiuni și ecuațiunea

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

obținem o ecuațiune de gradul al treilea în x, y.

In cazul $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0$, ecuațiunea (13) reprezintă o linie dreaptă.

340. Teorema precedentă se mai poate stabili în modul următor, fără a reduce ecuațiunea cubicei la forma normală.

Printr'un punct al cubicei luat ca origine să ducem o secantă

$$y = tx,$$

care taie cubica în două puncte mobile ale căror abscise sunt determinate de o ecuațiune de forma

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

A, B, C fiind polinoame de t de grade respectiv egale cu 3, 2 și 1. De unde

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad y = tx.$$

Expresiunea de sub radical este un polinom $R(t)$ de gradul 3 sau 4, fără factori multipli. Căci dacă $R(t)$ ar fi de un grad mai mic, sau dacă ar aveà un factor multiplu, x și prin urmare y s'ar puteà exprimà în funcțiune rațională de un parametru și cubica ar fi unicursală, caz ce presupunem exclus.

La o valoare a lui t, la care asociăm una din determinațiunile radicalului $\sqrt{R(t)}$, corespunde un punct al cubicei; și reciproc, unui punct (x, y) al cubicei corespunde o valoare pentru $t = \frac{y}{x}$ și o singură valoare pentru $\sqrt{R(t)}$, căci la două valori diferite ale radicalului corespund două puncte diferite. Putem dar scrie, fără a

specifică cele două puncte corespunzătoare aceluiaș t,

$$(14) \qquad x = \frac{-B + \sqrt{R(t)}}{A}, \qquad y = tx.$$

Introducând variabila

$$(15) \qquad u = \int_{\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

putem exprimă variabila t și radicalul $\sqrt{R(t)}$ prin funcțiuni raționale de pu și $p'u$ [Problema inversiunii]. Ceeace demonstră teorema.

341. *Observare.* Zerurile polinomului $R(t)$ au o semnificare geometrică interesantă. Fiecăruia din ele, corespund, pentru x și prin urmare pentru y, două valori egale; secanta corespunzătoare devine dar tangentă și valoarea considerată a lui t reprezintă coeficientul unghiular al tangentei dusă din origine la curbă. *Polinomul $R(t)$ este de gradul 3 sau 4, după cum origina este sau nu un punct de inflexiune* [1]).

342. *Transformările omografice lăsând neschimbate proprietățile proiective*, vom considerà, pentru a studià aceste proprietăți ale cubicei, forma normală

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

coeficienții g_2 și g_3 fiind reali. Această ecuațiune este identic satisfăcută de expresiunile

$$(2) \qquad x = p(u; g_2, g_3) \qquad y = p'(u; g_2, g_3).$$

Fiecărei valori a lui u corespunde un punct al cubicei și viceversa, fiecărui punct (x, y) al cubicei corespunde o singură valoare pentru u, abstracțiune făcând de multipli de perioade. Avem astfel ceeace se numește o *reprezentațiune parametrică perfectă*. Valorile congruente ale lui u dau acelaș punct, prin urmare, pentru a obține cubica întreagă, este de ajuns a da lui u toate valorile, cuprinse în paralelogramul perioadelor, pentru cari pu și $p'u$ au valori reale.

Să examinăm mai întâiu proprietățile cubicei cari sunt independente de semnul discriminantului $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$.

343. *Condițiunea ca trei puncte ale cubicei să fie în linie dreaptă.* O funcțiune lineară

$$Ax + By + C$$

de coordonatele unui punct $(x = pu,\ y = p'u)$ al cubicei este o

[1]) V. mai departe (§ 349).

funcţiune eliptică de u, de ordinul al treilea, având $u = o$ ca pol triplu; suma zerurilor acestei funcţiuni este aşa dar congruentă cu zero. Reprezentând prin u_1, u_2, u_3 argumentele punctelor de intersecţiune ale cubicei cu dreapta

$$Ax + By + C = 0,$$

vom aveà condiţiunea

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0. \tag{3}$$

Această condiţiune este suficientă. Căci, dacă prin cele două puncte ale căror argumente sunt u_1, u_2 ducem o dreaptă şi numim v argumentul punctului al treilea de intersecţiune al cubicei cu această dreaptă, avem

$$u_1 + u_2 + v = 0.$$

prin urmare $u_3 \equiv v$ şi punctul corespunzător lui u_3 coincide cu cel ce corespunde lui v.

Dacă ecuaţiunea dreptei este $x - a = 0$, unul din punctele de intersecţiune este la infinit şi valoarea corespunzătoare a lui u este $\equiv 0$; ecuaţiunea de condiţiune (3) se reduce la $u_1 + u_2 \equiv 0$.

344. *Formula de adiţiune a funcţiunii pu* se poate deduce din consideraţiunile precedente. Fie

$$x_1 = pu_1, \quad x_2 = pu_2, \quad x_3 = pu_3,$$

abscisele punctelor de intersecţiune ale cubicei cu dreapta

$$y = a x + b.$$

Vom aveà, de o parte, pentru a determinà aceste abscise, ecuaţiunea

$$4 x^3 - g_2 x - g_3 - (ax + b)^2 = 0,$$

de unde

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a^2}{4};$$

şi, de altă parte, avem ecuaţiunea de condiţiune (3). Insă a fiind coeficientul unghiular al dreptei, avem

$$a = \frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2};$$

prin urmare

$$pu_1 + pu_2 + pu_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}\right)^2.$$

sau, în virtutea condițiunii (3),

$$p(u_1 + u_2) + pu_1 + pu_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}\right)^2,$$

ceeace este formula de adițiune a funcțiunii pu.

345. Fie, într'un mod mai general, $f(x, y)$ o funcțiune rațională întreagă de gradul n în care nu lipsește termenul în y^n. Această funcțiune devine, pe cubică, o funcțiune eliptică $f(pu, p'u)$ de ordinul $3n$, având în paralelogramul perioadelor unicul pol $u = 0$ de ordinul $3n$. Să reprezentăm prin u_i $(i = 1, 2, \ldots, 3n)$ zerurile acestei funcțiuni, adică argumentele punctelor de intersecțiune ale cubicei cu curba $f(x, y) = 0$; vom aveà condițiunea

$$\sum_{i=1}^{3n} u_i = 0. \tag{4}$$

De exemplu, făcând $n = 2$, obținem condițiunea ca șase puncte ale cubicei să fie pe o conică:

$$\sum_{i=1}^{6} u_i = 0. \tag{5}$$

Dacă conica este tangentă la cubică în trei puncte, ale căror argumente sunt u_1, u_2, u_3, condițiunea precedentă devine, socotind ca dublu fiecare din aceste puncte,

$$2(u_1 + u_2 + u_3) = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ [1]};$$

de unde

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{cases}. \tag{6}$$

Avem așa dar trei familii de conice de trei ori tangente la cubică. Două din punctele de contact ale unei conice dintr'o familie sunt arbitrare, al treilea este determinat de ecuațiunea corespunzătoare (6) a familiei.

346. Prin punctele de contact ale căror argumente sunt u_1, u_2, u_3, ce satisfac, de ex., condițiunea

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \omega_1, \tag{7}$$

să facem să treacă o conică, care va tăià cubica în alte trei puncte cu argumentele u_4, u_5, u_6. Între aceste șase argumente există relațiunea (5), care în virtutea condițiunii (7), devine

$$u_4 + u_5 + u_6 \equiv \omega_1, \tag{8}$$

[1] Luând $m = n = o$, cele trei puncte sunt în linie dreaptă: conica se reduce la o dreaptă dublă.

adică cele din urmă trei puncte sunt şi ele puncte de contact ale unei conice de trei ori tangentă la cubică şi aparţinând aceleiaş familii (7).

347. *Tangente duse dela un punct al cubicei.* Fie v argumentul unui punct al cubicei dela care ducem tangente la cubică; fie u argumentul punctului de contact al uneia din ele. Acest punct trebuind să fie socotit ca două puncte, condiţiunea (3) va fi

$$2u+v=2m\omega_1+2n\omega_3; \tag{9}$$

de unde argumentele punctelor de contact

$$u=-\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3 \quad (m,n=0,1). \tag{10}$$

Prin urmare dintr'un punct al cubicei se pot duce patru tangente, diferite de tangenta în punctul considerat (v).

Corolar. Conica care trece prin cele patru puncte (10) şi prin punctul v este tangentă la cubică în acest punct. In adevăr, fie v_1 argumentul celui de al şaselea punct de intersecţiune al cubicei cu conica considerată, avem (5)

$$v+v_1-2v+2\omega_1+2\omega_3\equiv 0;$$

de unde $v_1\equiv v$, adică al şaselea punct de intersecţiune coincide cu punctul (v).

348. *Puncte de inflexiune.* Un punct de inflexiune fiind socotit ca trei puncte comune ale cubicei cu tangenta dusă în acest punct, avem (3), reprezentând prin u argumentul punctului de inflexiune,

$$3u=2m\omega_1+2n\omega_3; \tag{11}$$

de unde

$$u=\frac{2m\omega_1+2n\omega_3}{3}, \quad (m,n=0,1,2). \tag{12}$$

Avem dar nouă puncte de inflexiune, ale căror argumente sunt respectiv

$$\begin{gathered} 0, \quad \frac{2\omega_1}{3}, \quad \frac{4\omega_1}{3}, \\ \frac{2\omega_3}{3}, \quad \frac{2(\omega_1+\omega_3)}{3}, \quad \frac{4\omega_1+2\omega_3}{3}, \\ \frac{4\omega_3}{3}, \quad \frac{2\omega_1+4\omega_3}{3}, \quad \frac{4(\omega_1+\omega_3)}{3}. \end{gathered} \tag{13}$$

Punctele figurate de fiecare linie orizontală, cele figurate de fiecare coloană, şi, în fine, cele figurate de diagonalele tabloului precedent, sunt respectiv în linie dreaptă.

Punctul $u=0$ $(x=\infty, y=\infty)$ este la infinit în direcțiunea axei Oy, căci

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=o} = \left(\frac{p''u}{p'u}\right)_{u=o} = \infty.$$

349. *Dintr'un punct de inflexiune se pot duce numai trei tangente la cubică.* In adevăr, fie φ argumentul punctului de inflexiune dela care ducem tangentele; avem

$$\varphi = \frac{2m\omega_1 + 2n\omega_3}{3} \tag{14}$$

Argumentele punctelor de contact fiind

$$-\frac{\varphi}{2},\ -\frac{\varphi}{2}+\omega_1,\ -\frac{\varphi}{2}+\omega_3,\ -\frac{\varphi}{2}+\omega_1+\omega_3, \tag{15}$$

unul din ele este congruent cu φ, precum se recunoaște ușor; prin urmare unul din cele patru puncte de contact coincide cu punctul inițial.

350. *Punctele de contact ale tangentelor duse dintr'un punct de inflexiune sunt în linie dreaptă.* In adevăr, fie s suma argumentelor (15):

$$s = -2\varphi + 2(\omega_1 + \omega_3);$$

unul din aceste argumente fiind congruent cu φ, suma celorlalte trei satisface congruența

$$s - \varphi = -3\varphi + 2(\omega_1 + \omega_3) \equiv o,$$

care exprimă condițiunea ca cele trei puncte să fie în linie dreaptă (3) (§ 343). Această dreaptă se numește *polara armonică*[1]) a punctului de inflexiune (φ). Fiecărui punct de inflexiune corespunde o polară armonică.

350. Teoremă. *Raportul anarmonic a patru tangente duse la cubică dintr'un punct P al ei este independent de poziținea lui P.* (Salmon).

Fie P (x_0, y_0, u_0) punctul dela care se duc tangentele și

A (x_1, y_1, u_1), B (x_2, y_2, u_2), C (x_3, y_3, u_3), D (x_4, y_4, u_4)

punctele de contact. Să considerăm raportul anarmonic

$$R = \frac{sin\ CPA}{sin\ CPB} : \frac{sin\ DPA}{sin\ DPB}, \tag{1}$$

care se poate scrie

$$R = \frac{s_1}{s_2} : \frac{s_3}{s_4}, \tag{2}$$

[1]) Acest nume este justificat prin aceea, că o secantă oarecare dusă prin punctul de inflexiune taie polara considerată într'un punct armonic conjugat cu el relativ la cele două puncte de intersecțiune cu cubica.

s_1, s_2, s_3, s_4 reprezentând suprafețele triunghiurilor CPA, CPB, DPA, DPB.

Exprimând aceste suprafețe prin determinanți în funcțiune de coordonatele vârfurilor triunghiurilor, și ținând seamă de identitatea [form. (10). § 166] în care facem $n=2$,

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & p\rho & p'\rho \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix} = 2\,\frac{\sigma(u+\rho+w)\ \sigma(u-\rho)\ \sigma(\rho-w)\ \sigma(w-u)}{(\sigma u\ \sigma\rho\ \sigma w)^3},$$

obținem

$$(4)\quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\sigma(u_0-u_1)\ \sigma(u_1-u_3)\ \sigma(u_0+u_1+u_3)}{\sigma(u_0-u_2)\ \sigma(u_2-u_3)\ \sigma(u_0+u_2+u_3)} \left(\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1}\right)^3,$$

$$(5)\quad \frac{s_3}{s_4} = \frac{\sigma(u_0-u_1)\ \sigma(u_1-u_4)\ \sigma(u_0+u_1+u_4)}{\sigma(u_0-u_2)\ \sigma(u_2-u_4)\ \sigma(u_0+u_2+u_4)} \left(\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1}\right)^3;$$

de unde

$$(6)\quad \mathrm{R} = \frac{\sigma(u_1-u_3)\ \sigma(u_2-u_4)\ \sigma(u_0+u_1+u_3)\ \sigma(u_0+u_2+u_4)}{\sigma(u_2-u_3)\ \sigma(u_1-u_4)\ \sigma(u_0+u_1+u_4)\ \sigma(u_0+u_2+u_3)}.$$

Argumentele punctelor de contact fiind congruente cu expresiunile

$$u_1 = -\frac{u_0}{2},\quad u_2 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\alpha,\quad u_3 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\beta,\quad u_4 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\gamma,$$

avem, făcând substituțiunile

$$(7)\quad \mathrm{R} = \frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\gamma)\ \sigma(\omega_\alpha+\omega_\gamma)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\ \sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)} \left(\frac{\sigma\omega_\beta}{\sigma\omega_\alpha}\right)^2.$$

Insă

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\gamma)\ \sigma(\omega_\alpha+\omega_\gamma)}{\sigma^2\omega_\alpha\ \ \sigma^2\omega_\gamma} = p\omega_\gamma - p\omega_\alpha = e_\gamma - e_\alpha,$$

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\ \sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma^2\omega_\alpha\ \ \sigma^2\omega_\beta} = p\omega_\beta - p\omega_\alpha = e_\beta - e_\alpha;$$

prin urmare

$$(8)\quad \mathrm{R} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta},$$

α, β, γ fiind numerele 1, 2, 3 într'o ordine oarecare. Ceace demonstrează teorema.

Făcând între numerele 1, 2, 3 toate permutările posibile, expresiunea (8) primește 6 valori diferite. Reprezentând prin ϱ una

din ele, cele 6 valori vor fi

$$\varrho, \frac{1}{\varrho}; 1-\varrho, \frac{1}{1-\varrho}; \frac{\varrho-1}{\varrho}, \frac{\varrho}{\varrho-1},$$

două câte două inverse una alteia. Acestea sunt valorile de cari este susceptibil raportul anarmonic al unui fascicol de patru drepte.

351. *Distincțiunea cazurilor după semnul lui* Δ.

I. $\Delta > 0$. Avem cu notațiunea obicinuită: ω_1 și $\frac{\omega_3}{i}$ reale și pozitive; $e_1 > e_2 > e_3$. Referindu-ne la variațiunea funcțiunilor pu și $p'u$, recunoaștem că, în cazul considerat, obținem cubica întreagă, dând lui u cele două serii de valori următoare:

1°. u real și variând dela $-\omega_1$ la $+\omega_1$,

2°. $u = \omega_3 + v$, v real și variând în acelaș interval.

Axa Ox este o axă de simetrie; valorilor reale ale lui u corespunde o ramură infinită și, anume, intervalul $(0, +\omega_1)$ dă ramura situată dedesubtul axei și intervalul $(0, -\omega_1)$ dă ramura simetrică. A doua serie de valori ale lui u dă un oval: valorilor v cuprinse în intervalul $(0, +\omega_1)$ corespunde ramura situată deasupra axei Ox, și valorilor intervalului $(0, -\omega_1)$ corespunde ramura simetrică. Punctele de intersecțiune ale cubicei cu axa Ox sunt date de $u = \omega_1$, $\omega_1 + \omega_3$, ω_3 cărora corespund abscisele $x = e_1$, e_2, e_3. In aceste puncte tangentele sunt paralele cu Oy, căci avem

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_a = p'\omega_a = 0, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_a = \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_a = p''\omega_a \neq 0\ ^1), \quad (a = 1, 2, 3).$$

Puncte de inflexiune reale sunt trei, date de valorile

$$u = 0, \frac{2\omega_1}{3}, \frac{4\omega_1}{3} \equiv -\frac{2\omega_1}{3};$$

punctul corespunzător lui $u = 0$ este la infinit și celelalte două sunt simetrice în raport cu axa Ox, situate pe ramura infinită.

Tangente duse dintr'un punct (u_0) *al cubicei.* Coordonatele punctelor de contact sunt date de valorile

$$u = -\frac{u_0}{2} + m\omega_1 + n\omega_3, \quad (m, n = 0, 1).$$

---

[1]) $p''\omega_a$ nu poate fi nul, căci altmintrelea ω_a ar fi un zero dublu al funcțiunii $p'u$, care ar avea în paralelogramul perioadelor cel puțin patru zeruri: ceeace este imposibil.

1°. u_0 *real.* Două argumente $-\frac{u_0}{2}$, $-\frac{u_0}{2}+\omega_1$ sunt reale: punctele de contact corespunzătoare sunt pe ramura infinită, unul deasupra şi celalt dedesubtul axei Ox. Celelalte două argumente fiind de forma $\omega_3+\rho_1$, $\omega_3+\rho_2$ (ρ_1, ρ_2 reale), punctele de contact corespunzătoare sunt pe oval, unul deasupra şi celalalt dedesubtul axei Ox.

2°. $u_0=\omega_3+\rho$, ρ *real.* Argumentele punctelor de contact nu sunt nici reale, nici de forma $\omega_3+\rho$. Aşa dar dintr'un punct al ovalului nu putem duce la cubică nici o tangentă reală, diferită de tangenta în punctul dat.

Tangente paralele cu Ox. In intervalul $(0, +\omega_1)$ ca şi în intervalul simetric $(0, -\omega_1)$ $p'u$ variând necontenit în acelaş sens, urmează că pe ramura infinită nu există tangentă paralelă cu Ox; pe când pe oval există două asemenea tangente în puncte simetrice cu axa. Aceste puncte sunt date de valorile lui u pentru cari $p'u$ este maximum (§ 274, 3°).

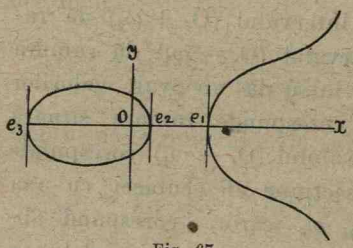

Fig. 67

Forma cubicei poate fi reprezentată prin (fig. 67).

II. $\Delta<0$: $-2\omega_2$ cea mai mică perioadă reală, $e_2=p\omega_2$.

Există numai ramura infinită, căci pu şi $p'u$ nu sunt reale în acelaş timp decât pentru valori reale ale lui u, abstracţiune făcând de multipli de perioade.

Avem trei puncte de inflexiune reale, date de valorile

$$u=0, -\frac{2\omega_2}{3}, -\frac{4\omega_2}{3}\equiv\frac{2\omega_2}{3}.$$

Dintr'un punct al cărui argument este u_0, putem duce două tangente reale, punctele de contact corespunzătoare având argumentele

$$-\frac{u_0}{2}, \quad -\frac{u_0}{2}-\omega_2.$$

Tangente paralele cu Ox. Din studiul derivatei $p'u$ (§ 277) rezultă că dacă $g_2<0$, sau dacă $g_2>0$ şi $g_3>0$, nu există tangentă paralelă cu Ox: curba are aceeaş formă ca ramura infinită din cazul I.

Dacă însă avem

$$g_2>0, \quad g_3<0,$$

de unde $e_2<0$, curba are patru tangente paralele cu Ox în puncte două câte două simetrice în raport cu aceastăă axă. Abscisele acestor puncte sunt rădăcinile ecuațiunii

$$6x^2-\frac{1}{2}g_2=0.$$

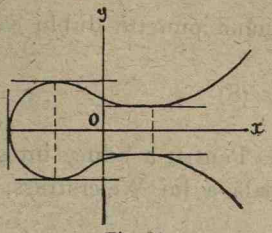

Fig. 68

Forma cubicei, în acest caz, este reprezentată de (fig 68)

II. *Lemniscata.*

352. Fie

$$\varrho^2=a^2\cos 2\theta \tag{1}$$

ecuațiunea lemniscatei; avem, reprezintând prin u lungimea unui arc,

$$du^2=d\varrho^2+\varrho^2d\theta^2=a^2\frac{d\theta^2}{1-2\sin^2\theta}. \tag{2}$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$\sqrt{2}\sin\theta=\sin\varphi, \tag{3}$$

avem, pentru lungimea unui arc mai mic decât sfertul lemniscatei, luat dela extremitatea axei,

$$u=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

Membrul al doilea este o integrală eliptică de speța I, cu modulul $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Lungimea sfertului lemniscatei este

$$l=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{K}, \tag{5}$$

K fiind sfertul celei mai mici perioade reale, adică

$$\mathrm{K}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}}, \quad (t=\sin\varphi)$$

Din egalitatea (4) rezultă relațiunile

$$\varphi=am\frac{u\sqrt{2}}{a}, \sin\varphi=sn\left(\frac{u\sqrt{2}}{a}\right), \varrho=a\cos\varphi=acn\left(\frac{u\sqrt{2}}{a}\right). \tag{6}$$

353. Să introducem raza vectoare ϱ ca variabilă independentă; formula (2) devine

$$du^2=a^2\frac{d\varrho^2}{a^4-\varrho^4}. \tag{7}$$

Luând punctul dublu ca origina arcelor, avem

$$u=a^2\int_0^{\varrho}\frac{d\varrho}{\sqrt{a^4-\varrho^4}}. \tag{8}$$

Pentru a aduce integrala din membrul al doilea la forma normală a lui Weierstrass, să punem

$$\frac{a^2}{\varrho^2}=z; \tag{9}$$

rezultă

$$u=a\int_{\infty}^{z}\frac{-dz}{\sqrt{4(z^3-z)}}. \tag{10}$$

$$z=p\left(\frac{u}{a}\,\middle|\,4,0\right). \tag{11}$$

Rădăcinile ecuațiunii $z^3-z=0$ fiind $e_1=1$, $e_2=0$, $e_3=-1$, avem pentru semiperioadele primitive ω_1, ω_3 expresiunile [(6), § 284]

$$\omega_1=\frac{\omega_3}{i}=\int_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z^3-z)}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z-z^3}}. \tag{12}$$

Lungimea jumătății unei bucle este dată de egalitatea (10) corespunzătoare limitei superioare $z=1$ $(\varrho=a)$; prin urmare lungimea unei bucle este

$$l=2a\omega_1. \tag{13}$$

354. Să luăm, pentru simplificarea formulelor, lungimea semiaxei $a=1$; vom avea

$$\begin{cases}\varrho^2=\cos 2\theta\\ z=\dfrac{1}{\varrho^2}=p\,(u|4,0)\\ l=2\omega_1.\end{cases} \tag{14}$$

Pentru funcțiunile $\cos\theta$, $\sin\theta$ rezultă expresiunile eliptice următoare:

$$\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\varrho^2}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{pu+1}}{\sqrt{pu}},\\ \sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\varrho^2}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{pu-1}}{\sqrt{pu}}.\end{cases} \tag{15}$$

Coordonatele rectunghiulare $x=\varrho\cos\theta$, $y=\varrho\sin\theta$ vor fi dar exprimate prin formulele

$$(16)\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{pu+1}}{pu},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{pu-1}}{pu};$$

sau, ținând seamă de relațiunile

$$\sqrt{pu-e_a}=\frac{\sigma_a u}{\sigma u},\quad (a=1,2.3),$$

cari, în cazul considerat, sunt

$$\sqrt{pu-1}=\frac{\sigma_1 u}{\sigma u},\quad \sqrt{pu}=\frac{\sigma_2 u}{\sigma u},\quad \sqrt{pu+1}=\frac{\sigma_3 u}{\sigma u},$$

avem

$$(17)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}. \end{cases}$$

Funcțiunea σu este pozitivă în intervalul $(0,2\omega_1)$ și negativă în intervalul $(2\omega_1, 4\omega_1)$; funcțiunea $\sigma_1 u$ este pozitivă în intervalele $(0, \omega_1)$, $(3\,\omega_1, 4\omega_1)$ și negativă în intervalul $(\omega_1, 3\omega_1)$; funcțiunile $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ sunt pozitive pentru orice valoare reală u (§ 278). De unde concluziunea: Când u variază dela 0 la $2\omega_1$, punctul (x,y) descrie, în sensul negativ, bucla din dreapta axei ordonatelor, iar când u variază dela $2\omega_1$ la $4\omega_1$, punctul (x, y) descrie, în sensul pozitiv, bucla din stânga axei.

355. *Diviziunea lemniscatei în părți egale.* Să presupunem una din buclele lemniscatei împărțită în n părți egale; lungimea acestei bucle fiind egală cu cea mai mică semiperioadă reală pozitivă $2\omega_1$, rezultă, pentru inversele pătratelor razelor vectorii corespunzătoare punctelor de diviziune, valorile

$$(18)\qquad \frac{1}{\varrho^2}=p\left(\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right)\quad (\lambda=1,2,\ldots,n-1).$$

Problema diviziunii buclei în n părți egale revine dar la determinarea valorii

$$p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right);$$

căci, în virtutea formulelor de multiplicațiune, $p\left(\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right)$ se exprimă în funcțiune rațională de $p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right)$.

Am văzut (§ 174) că pnu se exprimă în funcțiune de pu prin egalitatea

$$pnu = \frac{g_{n^2}(pu)}{g_{n^2-1}(pu)}, \tag{19}$$

numărătorul fiind un polinom de gradul n^2 și numitorul de gradul n^2-1. Dacă n este impar, numitorul este pătratul unui polinom de gradul $\frac{1}{2}(n^2-1)$ și dacă n este par, numitorul este de forma $p'^2u\ G^2(pu)$, G fiind un polinom de gradul $\frac{1}{2}(n^2-4)$.

Dacă înlocuim u prin $\frac{2\omega_1}{n}$, membrul întâi al ecuațiunii (19) devine infinit, prin urmare $p\frac{2\omega_1}{n}$ este una din rădăcinile reale ale ecuațiunii

$$\bar{g}_{n^2-1}(pu) = 0. \tag{20}$$

Pentru $n = 2$, ecuațiunea (20) nu există. Punctul de diviziune coincide cu vârful buclei.

Să considerăm, în particular, valorile $n=3$ și $n=4$.

1°. $n=3$. In acest caz, ecuațiunea diviziunii este de gradul $\frac{n^2-1}{2}=4$, dată de a doua egalitate (16) (§ 174):

$$3p^4u - \frac{3}{2}g_2\,pu - 3g_3\,pu - \frac{1}{16}g_2^2 = 0$$

Făcând $g_2=4$, $g_3=0$ ea se reduce la ecuațiunea bipătrată

$$3p^4u - 6p^2u - 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$p\frac{2\omega_1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$p\frac{2\omega_3}{3} = p\frac{2i\omega_1}{3} = -p\frac{2\omega_1}{3},$$

$$p\frac{2(1\pm i)\omega_1}{3} = \mp\frac{i}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

In ultima egalitate semnele superioare și cele inferioare se corespund; ele sunt determinate în virtutea formulei de adițiune. Razele vectorii corespunzătoare punctelor de diviziune sunt determinate de valorile $p\frac{2\omega_1}{3}$ și $p\frac{4\omega_1}{3} = p\frac{2\omega_1}{3}$. Ele sunt așa dar egale și cele două puncte de diviziune sunt punctele de intersecțiune ale lemniscatei cu cercul având centrul în punctul dublu și

raza

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{p2\omega_1}{3}}}.$$

2^0. $n=4$. Ecuaţiunea este dată de a treia egalitate (16) a paragrafului menţionat mai sus, în care facem $g_2=4$, $g_3=0$:

$$x^6-5x^4-5x^2+1=(x^4-6x^2+1)\,(x^2+1), \quad (x=pu)$$

Rădăcinile acestei ecuaţiuni sunt

$$p\,\frac{\omega_1}{2}=1+\sqrt{2}, \quad p\,\frac{\omega_3}{2}=p\,\frac{i\omega_1}{2}=-1-\sqrt{2}$$

$$p\,(\omega_1+\frac{\omega_3}{2})=-1+\sqrt{2}, \quad p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right)=1-\sqrt{2}$$

$$p\,\frac{\omega_1\pm\omega_3}{2}=\mp i.$$

Razele vectorii sunt determinate de valorile

$$p\,\frac{\omega_1}{2}, \quad p\omega_1, \quad p\,\frac{3\omega_1}{2}=p\,\frac{\omega_1}{2}.$$

Unul din aceste trei puncte de diviziune este vârful buclei ($p\omega_1=1$) şi celelalte două sunt punctele de intersecţiune ale lemniscatei cu cercul având centrul în punctul dublu şi raza

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{p\,\frac{\omega_1}{2}}}.$$

III. TEOREMA LUI PONCELET.

356. *Fiind date două conici, nu există, în general, poligon închis într'una din ele şi circumscris celeilalte; dacă există unul, există o infinitate având acelaş număr de laturi.*

Teoreme preliminare. I. *Coordonatele carteziene x, y ale unei conici oarecari se pot pune sub forma*

$$(1) \qquad x=\frac{a_1\,p^2u+b_1\,pu+c_1}{ap^2u+b\,pu+c}, \quad y=\frac{a_2p^2u+b_2\,pu+c_2}{ap^2u+b\,pu+c},$$

invarianţii g_2, g_3 ai funcţiunii pu fiind determinaţi în mod convenabil.

Pentru a stabili această teoremă să plecăm dela ecuaţiunile

$$(2) \qquad x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{at^2+bt+c}, \quad y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{at^2+bt+c},$$

cari exprimă coordonatele unui punct (x,y) al conicei prin funcţiuni raţionale de un parametru t. In virtutea acestor ecuaţiuni, unei valori t corespunde un singur punct (x,y) şi, viceversa, unui punct

(x,y) corespunde o singură valoare a lui t; căci eliminând t^2 între cele două ecuaţiuni, obţinem o ecuaţiune de gradul întâiu în t cu coeficienţi raţionali în (x,y) [1]).

Fie t_0, t_1, t_2, t_3 valorile parametrului t corespunzătoare la patru puncte date oarecari ale conicei şi fie

$$f(t)=(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3). \tag{3}$$

Să introducem acum funcţiunea $p(u \mid g_2, g_3)$, coeficienţii g_2 şi g_3 fiind invarianţii polinomului $f(t)$ şi să punem

$$u=\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\sqrt{f(t)}}. \tag{4}$$

Vom aveà (14) (§ 292)

$$\left|\begin{array}{l} t=t_0+\dfrac{1}{4}\dfrac{f'(t_0)}{pu-\dfrac{1}{24}f''(t_0)}, \\ \\ \sqrt{f(t)}=\dfrac{dt}{du}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{f'(t_0)}{\left[pu-\dfrac{1}{24}f''(t_0)\right]^2}\,p'u. \end{array}\right. \tag{5}$$

In virtutea acestor egalităţi, lui $u=0$ corespunde valoarea t_0 şi semiperioadelor ω_1, ω_2, ω_3, corespund valorile t_k $(k=1, 2, 3)$; viceversa, valorilor t_0, t_1, t_2, t_3, corespund, abstracţiune făcând de multiplii de perioade, valorile $u=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Inlocuind în egalităţile (2), t prin valoarea sa (5), obţinem, pentru coordonatele (x,y) expresiuni de forma (1). Ceeace demonstră teorema.

II. *Infăşurătoarea unei drepte mobile trecând prin două puncte ale conicei, ale căror argumente au o sumă constantă, este o conică care trece prin cele patru puncte fixe corespunzătoare argumentelor* $u=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Fie c suma constantă şi u argumentul unuia din cele două puncte, $c-u$ va fi argumentul celuilalt punct. Referindu-ne la formulele (1), vedem că coordonatele celor două puncte sunt funcţiuni algebrice de parametrul pu; căci, în virtutea formulei de adiţiune, $p(c-u)$ este funcţiune algebrică de pu. De unde rezultă că înfăşurătoarea căutată este o curbă algebrică. Se poate determină gradul acestei înfăşurătoare. Pentru aceasta, să observăm că printr'un punct al conicei trec două şi numai două drepte ale familiei considerate, căci argumentele u şi $-u$ dau acelaş punct pe conică şi acestor două argumente corespund argumentele $c-u$, $c+u$, cari dau puncte distincte, afară de cazul când constanta c

[1]) Dacă prin eliminarea lui t^2 ar dispare şi t, ecuaţiunile (2) ar reprezentà o linie dreaptă.

este o semiperioadă [1]). Prin urmare printr'un punct oarecare al conicei date nu se pot duce decât două tangente la înfășurătoarea căutată. Aceasta este așà dar o conică.

357. *Punctele de intersecțiune ale celor două conici.* Fie φ argumentul unui punct de intersecțiune ale celor două conici; tangentele duse din acest punct la înfășurătoare coincidând, rezultă congruența

$$c+\varphi \equiv \pm (c-\varphi) \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}.$$

Luând semnul superior [2]), avem, abstracțiune de multipli de perioade, valorile

$$\varphi = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3.$$

---

[1]) In virtutea egalității $p(\omega_a - u) = p(\omega_a + u)$, rezultă că din orice punct al conicei nu se poate duce decât o singură tangentă la înfășurătoare. Aceasta se reduce dar la un singur punct, situat la distanță finită sau la infinit.

[2]) Semnul inferior dă pentru c o valoare egală cu o semiperioadă, căreia nu corespunde nici o înfășurătoare, precum am văzut mai sus. Să considerăm, ca exemplu, elipsa

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = 2b\frac{t}{1+t^2}$$

și fie valorile $t_0=\infty$, $t_1=1$, $t_2=0$, $t_3=-1$, cari determină vârfurile axelor elipsei. Acestor valori corespund invarianții $g_2=4$, $g_3=0$; prin urmare avem

$$t = p(u; 4, 0)$$

$$e_1=1, \quad e_2=0, \quad e_3=-1,$$

$$u_0=0, \quad u_1=\omega_1, \quad u_2=\omega_2, \quad u_3=\omega_3.$$

Să considerăm întâi cazul $c=\omega_2$ și fie (x_0, y_0), (x_1, y_1) două puncte ale elipsei, cel dintâi arbitrar având argumentul $u=\varphi$ și cel de al doilea argumentul $\omega_2-\varphi \equiv \omega_2+\varphi$. Fie θ_0, θ_1 valorile lui t cari determină cele două puncte; avem

$$\theta_0 = pu, \quad \theta_1 = p(\varphi+\omega_2) = -\frac{1}{\theta_0},$$

$$x_0 = a\frac{1-\theta_0^2}{1+\theta_0^2}, \quad y_0 = 2b\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2},$$

$$x_1 = a\frac{1-\theta_1^2}{1+\theta_1^2} = a\frac{\theta_0^2-1}{\theta_0^2+1} = -x_0,$$

$$y_1 = 2b\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -2b\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2} = -y_0,$$

adică dreapta care unește cele două puncte trece prin centrul elipsei.

2°. Fie $c=\omega_1$; θ_0 și θ_1 având aceiaș semnificare ca mai sus; găsim, în virtutea formulei $p(\varphi+\omega_1) - e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p\varphi - e_1}$,

$$(\theta_1-1)(\theta_0-1) = 2.$$

De unde rezultă $\quad x_1 = -2a\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2}, \quad y_1 = b\frac{\theta_0^2-1}{1+\theta_0^2};$

prin urmare $\quad \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{b}{a}.$

Dreapta considerată păstrează dar o direcțiune constantă, oricare ar fi argumentul φ.

3°. La acelaș rezultat se ajunge, dacă luăm $c=\omega_3$.

cărora corespund pe conica dată patru puncte fixe, independente de valoarea lui c. *Făcând să varieze c, obținem o infinitate de conici trecând prin aceleași patru puncte ale conicei date.*

Să observăm că obținem aceiaș conică înfășurătoare dacă înlocuim condițiunea ca suma argumentelor să fie egală cu c, prin aceea ca diferența lor să fie egală cu aceiaș constantă c; căci punctele ale căror argumente sunt $-c\mp u$ coincid respectiv cu punctele având argumentele $c\mp u$.

Viceversa. Prin patru puncte ale conicei C, pe cari în virtutea teoremei I le putem considerà determinate de argumentele $u=0$, ω_1, ω_2, ω_3, să facem să treacă diferite conici: fiecare din ele este *înfășurătoarea unei drepte mobile care unește două puncte ale lui* C, *ale căror argumente au o sumă sau o diferență constantă.*

In adevăr, fie C′ una din aceste conici; să ducem în punctul al cărui argument este $u=0$ o tangentă la C′ și fie c argumentul punctului în care această tangentă taie conica C. Infășurătoarea dreptei mobile, corespunzătoare constantei c, este o conică care trece prin aceleași patru puncte ca C′, având aceeaș tangentă în punctul $u=0$; prin urmare coincide cu C′.

358. *Demonstrațiunea teoremei lui Poncelet.*

Fie C și C′ conici date oarecari. Precum am văzut, putem privì C′ ca înfășurătoarea unei drepte care unește două puncte ale lui C având argumente a căror sumă sau diferență este o constantă convenabilă c. Dintr'un punct oarecare al lui C, al cărui argument fie u_0, să ducem o tangentă la C′; punctul de intersecțiune al acestei tangente cu C va aveà argumentul $u_1=u_0+c$. Din punctul (u_1) să ducem o a doua tangentă la C′; ea va tăia conica C într'un al treilea punct al cărui argument va fi

$$u_2=u_1+c=u_0+2c.$$

Continuând în acelaș mod, obținem pe conica C, puncte ale căror argumente sunt

$$u_0,\ u_0+c,\ u_0+2c,\ \ldots,\ u_0+nc,$$

formând vârfurile unei linii poligonale ale cărei laturi sunt tangente la C′. Pentru ca linia să se închidă cu n laturi, este necesar ca vârful al $n+1^{lea}$ să coincidă cu cel inițial, adică să avem

$$u_0+nc\equiv\mp u_0. \tag{6}$$

Luând semnul superior, avem

$$nc\equiv 0, \tag{7}$$

relațiune independentă de punctul inițial u_0. Dacă această condițiune este împlinită, linia poligonală se va închide oricare ar fi

punctul inițial. *Prin urmare, sau nu există poligon de n laturi înscris în C și circumscris lui C' (cazul general), sau, dacă există un asemenea poligon, există o infinitate cu același număr de laturi.*

Dacă în egalitatea (6) am lua semnul inferior, am obține o linie poligonală ale cărei vârfuri se suprapun două câte două: întâiul cu al $n+1^{lea}$, al doilea cu al n^{lea}, etc. Căci din congruența

$$u_0+nc\equiv -u_0,$$

rezultă congruențele

$$u_0+(n-h)c\equiv -(u_0+hc), \quad h=1, 2, \ldots, n;$$

de unde

$$p[u+(n-h)c]=p(u_0+hc).$$

Prin urmare, revenim la punctul de plecare, descriind laturile poligonului în sens invers.

CAPITOLUL XXVII.

FUNCȚIUNI MODULARE.

I. ***Perioadele integralei eliptice de speța I considerate ca funcțiuni de modulul integralei.***

359. Să considerăm integrala eliptică de speța I sub forma generală

$$(1) \qquad u=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X=a_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

și fie ω, ω' două semiperioade determinate de integralele

$$(2) \qquad \omega=\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \omega'=\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Aplicând variabilei x o transformare lineară

$$(3) \qquad x=\frac{ay+b}{cy+d}, \quad \Delta=ad-bc\neq 0$$

și reprezintând prin α_1, α_2, α_3, α_4 valorile lui y corespunzătoare valorilor a_1, a_2, a_3, a_4 ale lui x, prin

$$Y=a_0(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3)(y-\alpha_4)$$

polinomul transformat al polinomului X și prin ω_1, ω'_1 semiperioadele corespunzătoare ale integralei transformate, avem egalitățile

$$(4) \qquad u=\Delta\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad \omega_1=\Delta\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad \omega'_1=\Delta\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Relativ la substituţiunea (1), integrala u este un *covariant* şi perioadele sunt *invarianţi relativi* (transcendenţi) ai polinomului X. Prin urmare raportul perioadelor $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ este un invariant absolut (transcendent). Acest raport rămâne aşa dar neschimbat când aplicăm lui x o transformare lineară oarecare. De altă parte, reprezentând prin λ una din valorile raportului anarmonic a celor patru zeruri ale polinomului X, raport, de asemenea invariant relativ la substituţiunea (3) prin care zerurile polinoamelor X şi Y se corespund [1]) (§ 99), rezultă că τ depinde *numai* de λ. Avem aşa dar teorema:

Raportul τ al perioadelor este funcţiune de λ şi, viceversa, λ este funcţiune de τ.

Această teoremă se mai poate stabili, aducând integrala u la forma normală a lui Riemann

$$(5) \qquad u = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

în care λ are semnificarea menţionată mai sus, şi luând ca semiperioade (§ 105) integralele

$$(6) \quad \omega = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \quad \omega' = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

dealungul liniilor drepte $(0, 1)$ şi $(1, \frac{1}{\lambda})$.

Pentru ca integralele (6) să fie bine determinate este necesar ca, în prima integrală, x să nu treacă prin punctul $\frac{1}{\lambda}$ şi, în a doua integrală, x să nu treacă prin punctul 0. Luând drumurile de integraţiune rectilinii şi făcând dealungul axei reale două tăieturi,

$$(1, +\infty), \ (0, -\infty),$$

va fi necesar ca, în expresiunea lui ω, punctul λ să nu străbată tăietura $(1, +\infty)$ şi, în expresiunea lui ω', să nu străbată tăietura $(0, -\infty)$. Dacă λ este real şi respectiv mai mare ca 1 sau mai mic ca zero, vom privi punctul λ situat pe unul sau celalt ţărm al tăieturii respective şi îl vom evită într'un mod convenabil. Cu modul acesta, luând $arg\lambda = 0$ când λ este real şi cuprins în intervalul $(0,1)$, $arg\lambda$ va fi totdeauna cuprins între 0 şi π, sau între 0 şi $-\pi$, după cum λ va fi deasupra sau dedesubtul axei reale.

---

[1]) Dacă unul din polinoame este de gradul 3, cel de al patrulea zero se înlocueşte prin ∞.

360. *Teoremă. Funcțiunile* $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ *sunt olomorfe în domeniul oricărui punct* λ *situat la distanță finită și diferit de* 0 *și* 1.

Să considerăm funcțiunea $\omega(\lambda)$ și fie λ_0 un punct diferit de 0 și 1, nu situat pe axa reală în intervalul $(1, +\infty)$. Există atunci un număr real $r > 0$ destul de mic, astfel ca să avem $r < |1 - \lambda_0 x|$, oricare ar fi valoarea lui x în intervalul (0, 1).

In interiorul cercului $|\lambda - \lambda_0| = r$, expresiunea

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0 x}} \left(1 - \frac{(\lambda-\lambda_0)x}{1-\lambda_0 x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

se desvoltă într'o serie $P(\lambda - \lambda_0)$, ai cărei coeficienți au valori finite când x variază dela 0 la 1. De unde rezultă, pentru integrala lui ω, o expresiune de forma

$$\omega = \mathcal{F}(\lambda - \lambda_0),$$

$\mathcal{F}(\lambda - \lambda_0)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|\lambda - \lambda_0| = r$.

Să considerăm acum funcțiunea $\omega'(\lambda)$ și să facem substituțiunea

$$\lambda x + (1-\lambda)z = 1; \tag{7}$$

obținem

$$\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \pm i \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-(1-\lambda)z)}}. \tag{8}$$

Integrala din membrul al doilea, lăsând la o parte factorul $\pm i$, este de aceeași formă ca aceea a lui ω, în care λ este înlocuit prin $1 - \lambda$. De unde conchidem că $\omega'(\lambda)$ este o funcțiune olomorfă în domeniul oricărui punct λ_0, care nu este situat pe axa reală în intervalul $(0, -\infty)$.

Dacă λ_0 este real > 1, sau < 0, vom privi punctul λ_0 situat pe țărmul superior sau pe țărmul inferior al tăieturii coreapunzătoare și modificând puțin drumul de integrațiune, astfel ca drumul modificat să fie echivalent cu cel primitiv, conchidem ca mai sus că $\omega(\lambda)$ și $\omega'(\lambda)$ sunt olomorfe în domeniul acelui punct. Teorema este așa dar demonstrată.

361. Să examinăm cum se comportă funcțiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ în domeniul fiecăruia din punctele $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Pentru aceasta, să observăm că dacă în integrala lui Legendre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

punem $x^2 = y$, $k^2 = \lambda$, această integrală se schimbă în integrala lui

Riemann; de unde, pentru perioadele ω, ω', valorile

$$\omega = 2\,\mathrm{K}, \quad \omega' = 2i\mathrm{K}'. \tag{9}$$

Dacă dar ne referim la desvoltările semiperioadelor K, iK′ (§ 203) și facem înlocuirile corespunzătoare, avem, în virtutea formulelor (12) și (23) în domeniul $\lambda = 0$,

$$\omega = \pi\,\mathcal{A}(\lambda), \quad \frac{\omega'}{i} = \mathcal{A}(\lambda)\,\log\frac{16}{\lambda} + \mathrm{P}(\lambda), \tag{10}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\lambda^n\right], \quad \mathrm{P}(0) = 0.$$

Deasemenea, în virtutea formulelor (25) și (16) din același paragraf avem, în domeniul punctului $\lambda = 1$,

$$\omega = \mathcal{A}(1-\lambda)\,\log\frac{16}{1-\lambda} + \mathrm{P}(1-\lambda), \tag{11}$$

$$\frac{\omega'}{i} = \pi\,\mathcal{A}(1-\lambda), \quad \mathrm{P}(1) = 0.$$

In formulele (10) seriile sunt convergente pentru $|\lambda| < 1$ și, în formulele (11), ele sunt convergente pentru $|1-\lambda| < 1$. Punctul $\lambda = 0$ este un punct ordinar pentru funcțiunea $\omega(\lambda)$ și punct singular logaritmic pentru funcțiunea $\omega'(\lambda)$; contrariul are loc relativ la punctul $\lambda = 1$.

Din desvoltările precedente rezultă că dacă λ descrie în, sensul pozitiv, cercul $|\lambda| = r < 1$, funcțiunea $\omega(\lambda)$ se reproduce, pe când $\omega'(\lambda)$ devine

$$\omega'(\lambda) + 2\pi\,\mathcal{A}(\lambda) = \omega' + 2\omega. \tag{12}$$

Deasemenea, dacă λ descrie, în sensul negativ, cercul $|1-\lambda| = r < 1$, $\omega'(\lambda)$ se reproduce, iar $\omega(\lambda)$ devine

$$\omega(\lambda) + 2i\pi\,\mathcal{A}(1-\lambda) = \omega + 2\omega'. \tag{13}$$

Să presupunem, într'un mod general, că λ plecând dela un punct oarecare λ_0, diferit de 0 și 1, descrie un drum închis care să conțină punctul $\lambda = 0$, nu însă punctul $\lambda = 1$, drum ce putem înlocui printr'un contur elementar corespunzător și fie ω_1, ω'_1 valorile finale; conchidem, scriind ω_1 în loc de $\omega_1(\lambda_0), \ldots$, egalitățile

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega'_1 = \pm 2\omega + \omega'. \tag{14}$$

Deasemenea, dacă curba închisă conține punctul $\lambda = 1$, fără a conține punctul $\lambda = 0$, avem

$$\omega_1 = \omega \pm 2\omega', \quad \omega'_1 = \omega'. \tag{15}$$

Semnele $\pm$ depind de sensul în care curbele sunt descrise.

Din cele ce preced se conchide că dacă λ descrie un drum închis, care înconjoară ambele puncte critice, fiecare din ele un număr

oarecare de ori, valorile finale ale semiperioadelor vor fi date de egalitățile

$$(16) \qquad \Omega = \alpha\omega + \beta\omega', \qquad \Omega' = \gamma\omega + \delta\omega',$$

α și δ fiind numere întregi *impare*, β și γ numere întregi *pare*, satisfăcând relațiunea

$$(17) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Transformarea considerată a perioadelor, care rezultă din drumurile diferite ale lui λ, constitue o transformare lineară, ai cărei coeficienți satisfac congruențele

$$(18) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$$

Aceste congruențe sunt tocmai cele ce corespund permutărilor dintre punctele critice ale radicalului $\sqrt{X}$, cari nu schimbă raportul anarmonic λ [1]).

II. ***Raportul perioadelor privit ca funcțiune de modulul λ și, vice-versa, λ privit ca funcțiune de raportul perioadelor.***

362. Raportul $$\tau(\lambda) = \frac{\omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)}$$

fiind imaginar pentru orice valoare finită λ diferită de 0 și 1, rezultă că funcțiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ nu se anulează pentru nici o valoare finită $\lambda \neq 0$ și 1. De unde rezultă, în virtutea teoremei (§ 360), că $\tau(\lambda)$ *este o funcțiune olomorfă în domeniul oricărui punct λ, care nu coincide nici cu punctul zero nici cu punctul* 1. Voim să studiăm corespondența ce există între planul (τ) și planul (λ), mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$ și $(0, -\infty)$. Pentru aceasta, vom examină mai întâi cum variază funcțiunile $\omega(\lambda)$ și $\omega'(\lambda)$ când λ descrie axa reală, evitând punctele $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ prin semicercuri, situate deasupra acestei axe, și un semicerc cu o rază foarte mare R, având centrul în origine și situat de asemenea în semiplanul pozitiv. In aria limitată de conturul simplu astfel format, funcțiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$, $\tau(\lambda)$ sunt olomorfe [2]).

---

[1]) Intre semiperioadele ω_1, ω_3 ale funcțiunii $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ și semiperioadele (6), avem (10, § 105)

$$\omega = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \omega' = \omega_3\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Prin urmare, reprezintând prin ω_1', ω_3' semiperioadele corespunzătoare lui Ω și Ω_3', avem egalitățile

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \quad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3,$$

cari în virtutea congruențelor (18), reproduc valorile e_1, e_2, e_3, și prin urmare lasă λ neschimbat.

[2]) O funcțiune olomorfă în domeniul oricărui punct situat într'o arie, limitată de un contur simplu, este olomorfă în toată aria (I, § 154).

1^0. $0 < \lambda < 1$. Integrala

$$(1) \qquad \omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x)}},$$

în care luăm $\arg x = \arg(1-x) = \arg(1-\lambda x) = 0$ şi radicalul pozitiv creşte necontenit dela

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

până la $+\infty$, când λ variază dela 0 la 1.

Pentru a doua perioadă ω', avem

$$(3) \qquad \omega' = \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x)}} = i\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(1-\lambda x)}},$$

radicalul din urmă fiind real şi pozitiv. Această integrală, ale cărei limite sunt punctele critice 1 şi $\frac{1}{\lambda}$, se poate înlocui prin integrala ale cărei limite sunt celelalte două puncte critice (§ 77), anume punctul 0 şi punctul infinit, care, în cazul nostru este $-\infty$, căci linia $(-\infty, 0)$ n'are punct comun cu linia $\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$. Avem aşa dar egalitatea

$$(4) \qquad \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(1-\lambda\,x)}} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}},$$ [1]

radicalul din membrul al doilea fiind real şi pozitiv ca şi cel din membrul întâi.

Schimbând în ultima integrală semnul lui x, avem

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)\,(1+\lambda x)}};$$

prin urmare

$$(5) \qquad \omega' = i\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)\,(1+\lambda x)}}.$$

Făcând λ să crească dela 0 la 1, integrala descreşte necontenit dela $+\infty$ până la valoarea

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

---

[1] Substituţiunea $\lambda x = \frac{1-\lambda z}{1-z}$ realizează aceiaş transformare.

Din cele ce preced rezultă, pentru raportul $\frac{\omega'}{\omega}$, o expresiune de forma

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = it, \tag{6}$$

t fiind funcțiunea reală de λ, care, pe când λ crește dela 0 la 1, descrește necontenit dela $+\infty$ la 0.

Așà dar: *Când λ descrie segmentul $(0 \ldots 1)$, τ descrie, necontenit în acelaș sens, axa imaginară de la $+i\infty$ până la* 0, valorile extreme fiind

$$\lim_{\lambda=+0} \tau(\lambda) = +i\infty, \qquad \lim_{\lambda=+0} \tau(1-\lambda) = 0.$$

2°. $\lambda > 1$. Punctul λ trecând dela $1-\varepsilon$ la $1+\varepsilon$ după un semicerc situat deasupra axei reale, punctul $\frac{1}{\lambda}$ descrie un arc care diferă foarte puțin de un semicerc având același centru și situat dedesubtul axei reale. Când λ descrie axa reală dela 1 la $+\infty$, pe țărmul superior, $\frac{1}{\lambda}$ descrie segmentul $(1 \ldots 0)$ pe țărmul inferior; de unde rezultă drumurile care determină perioadele ω, ω'.

Pentru ω, drumul este format din segmentul $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ și din țărmul superior al segmentului $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$; pentru ω', drumul este format din țărmul inferior al segmentului $\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$[1], sau, ceeace este tot una, din țărmul superior al segmentului $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$ (fig. 69). Avem așà dar,

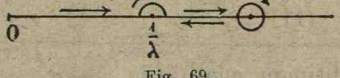

Fig. 69

pentru $\varepsilon = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + i\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \\ \omega' &= i\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

radicalele fiind reale și pozitive.

---

[1]) După ce punctul $\lambda=1$ a fost înconjurat.

Să înlocuim aceste integrale prin altele ale căror limite să fie independente de λ. Considerațiuni analoage cu cele din cazul precedent ne conduc a înlocui drumul $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, care unește punctele critice 0 și $\frac{1}{\lambda}$, prin drumul $(1 \ldots \infty)$, care unește celelalte două puncte critice; iar drumul $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$ prin drumul $(-\infty, 0)$. Avem așadar egalitățile

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(\lambda x-1)}},$$

$$(9) \qquad \int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\,(\lambda x-1)}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}} \text{ [1]} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)\,(1+\lambda\, x)}}.$$

Să punem

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(\lambda x-1)}}, \\ \beta = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)\,(1+\lambda x)}}, \end{cases}$$

și să facem substituțiunile

$$(11) \qquad x = \frac{1}{z}, \quad \lambda = \frac{1}{\lambda_1};$$

obținem egalitățile

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\lambda_1} \displaystyle\int_0^{1} \frac{dz}{\sqrt{z\,(1-z)\,(1-\lambda_1 z)}}, \\ \beta = \sqrt{\lambda_1} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z\,(1+z)\,(1+\lambda_1 z)}}, \end{cases}$$

în cari λ_1 este cuprins între 0 și 1.

Integralele din aceste două egalități coincid respectiv cu integralele (1) și (5); prin urmare, făcând λ să crească dela 1 la $+\infty$

---

[1] Substituirea $x = \frac{1-z}{1-\lambda z}$ realizează aceeaș transformare.

sau λ_1 să descrească dela 1 la 0, raportul $\frac{\beta}{\alpha}$ crește necontenit dela 0 la $+\infty$. De unde, în virtutea egalităților (7),

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{i\beta}{\alpha+i\beta}=\frac{it}{1+it}, \tag{13}$$

t fiind o variabilă reală care crește dela 0 la ∞, când λ crește dela 1 la ∞. Acestei variațiuni a lui t, corespunde, pentru τ, un semicerc cu centrul în punctul $\tau=\frac{1}{2}$ și raza $\frac{1}{2}$, situat deasupra axei reale, precum rezultă din egalitatea

$$\left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{it-1}{it+1}\right|=\frac{1}{2}.$$

Așadar: *Când punctul λ descrie țărmul superior* $(1, +\infty)$, *punctul τ descrie necontenit în același sens un semicerc dela punctul* $\tau=0$ *până la punctul* $\tau=1$, *situat deasupra axei reale.* Valorile extreme sunt

$$\lim_{\lambda=+o}\ \tau\ (1+\lambda)=0, \qquad \lim_{\lambda=-\infty}\ \tau\ (\lambda)=1$$

3°. $\lambda<0$. Punctul λ fiind situat pe țărmul superior al tăieturii $(0, -\infty)$, punctul $\frac{1}{\lambda}$ este situat pe țărmul inferior al acestei tăieturi; expresiunea lui ω rămâne dar aceaș ca în cazul 1°, iar expresiunea lui ω' este

$$\omega'=\int_1^o \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}+\int_o^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}.$$

In prima integrală avem (fig. 70)

$$\arg\,(1-x)=-2\pi,$$
$$\arg x=\arg\,(1-\lambda x)=0;$$

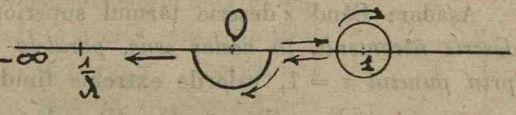

Fig. 70

iar în a doua

$$\arg\,(1-x)=-2\pi, \quad \arg x=-\pi, \arg\,(1-\lambda x)=0.$$

Avem așa dar egalitățile

$$\left\{\begin{aligned}\omega&=\int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}},\\ \omega'&=\int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}+i\int_{\frac{1}{\lambda}}^o \frac{dx}{\sqrt{-x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ultima integrală se poate înlocui printr'alta ale cărei limite sunt 1 şi $+\infty$. Găsim, ca şi în cazul 2^0, egalitatea

$$(15)\qquad \int_{\frac{1}{\lambda}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}} = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(1-\lambda x)}}.$$

Punând

$$(16)\qquad \alpha = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\,(1-\lambda x)}},\quad \beta = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(1-\lambda x)}},$$

avem egalitatea

$$(17)\qquad \tau = \frac{\alpha + i\beta}{\alpha} = 1 + it,\quad t > 0.$$

Pentru a vedeà cum variază t când λ creşte dela $-\infty$ la 0, să facem substituţiunile

$$(18)\qquad x = 1 - z,\quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1};$$

obţinem

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{1-\lambda_1} \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z\,(1-z)\,(1-\lambda_1 z)}}, \\ \beta = \sqrt{1-\lambda_1} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{\sqrt{-z(1-z)(1-\lambda_1 z)}} = \sqrt{1-\lambda_1} \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1+\lambda_1 z)}}. \end{cases}$$

Când λ variază dela $-\infty$ la 0, λ_1 variază dela 1 la 0; prin urmare integralele (19) coincid respectiv cu integralele (12) şi $t = \frac{\beta}{\alpha}$ creşte necontenit dela 0 la ∞.

Aşadar: Când λ descrie ţărmul superior $(-\infty, 0)$, *punctul* τ *descrie necontenit, în acelaş sens, paralela la axa imaginară dusă prin punctul* $\tau = 1$, valorile extreme fiind

$$\lim_{\lambda=-\infty} \tau(\lambda) = 1,\quad \lim_{\lambda=-0} \tau(\lambda) = 1 + i\infty.$$

363. Să complectăm studiul de mai sus, examinând în ce se transformă semicercul superior $|\lambda| = R$, R foarte mare, precum şi semicercurile $|\lambda - 1| = r$, $|\lambda| = r$, r foarte mic (fig. 71).

Relativ la semicercul (R), observăm că punctelor $\lambda = \pm R$ corespund două puncte τ_0, τ_1, foarte apropiate de punctul $\tau = 1$, situate respectiv pe semicercul $|\tau - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ şi pe paralela la axa imaginară dusă prin punctul $\tau = 1$. (fig. 72) Dealungul semicercului (R), funcţiunea $\tau(\lambda)$, fiind continuă, rezultă că pe când λ descrie acest semicerc în sensul pozitiv, $\tau(\lambda)$ descrie în sensul negativ un arc foarte mic care uneşte punctele τ_0 şi τ_1. (fig. 72).

Deasemenea, semicercului $|\lambda - 1| = r$, r foarte mic, descris în sensul negativ, corespunde pentru τ un arc foarte mic, descris în acelaș sens, care unește cele două puncte β,γ corespunzătoare valorilor $\lambda = 1 \mp r$, cel dintâiu fiind situat pe axa imaginară, cel de al doilea pe semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (fig. 72).

In fine, pentru a vedeà care este drumul (τ) corespunzător semicercului $|\lambda| = r$, să ne referim la desvoltările celor două perioade în domeniul lui $\lambda = 0$ (10) (§ 361):

$$(20) \qquad \omega = \pi\, \mathcal{A}(\lambda), \quad \omega' = i\left(\mathcal{A}(\lambda)\, log\frac{16}{\lambda} + P(\lambda)\right);$$

de unde, punând $\lambda = r\, e^{i\theta}$, rezultă egalitatea

$$(21) \qquad \tau = \frac{1}{\pi}\left[\theta + i\, log\frac{1}{r}(1+\varepsilon)\right],$$

în care ε tinde către zero împreună cu r. Pentru $\theta = \pi$ și $\theta = 0$, egalitatea ia respectiv forma

$$\tau = 1 + it, \quad \tau = it,$$

t fiind pozitiv, tinzând către infinit împreună cu $\frac{1}{r}$. Dacă dar θ variază dela π la 0, τ descrie, în sensul negativ, un arc $(a_0\, a)$ care diferă cu atât mai puțin de un segment de linie dreaptă paralelă cu axa reală, cuprins între axa imaginară și paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$, cu cât r este mai mic.

Din cele ce preced rezultă că dacă λ descrie, în sensul săgeților, conturul $a\, b\, c\, R(-R)\, a_0 a$, reprezintat prin figura 71, semicercul cel mare având raza R și semicercurile cele mici având raza r, τ descrie, necontenit în acelaș sens, conturul $\alpha\beta\gamma\tau_0\tau_1\alpha_0\alpha$ reprezintat prin fig. 72, plecând dela punctul a corespunzător punctului a. De unde rezultă, $\tau\ (\lambda)$ fiind funcțiune olomorfă în aria limitată de conturul (fig. 71), că λ este funcțiune olomorfă de τ în aria limitată de conturul (fig. 72) (I. Transformare conformă, § 358). Făcând R să tindă către infinit și r către zero, avem, de o parte, semiplanul $\lambda > 0$ și, de altă parte, aria limitată de semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, de axa imaginară și de paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$. Conturul acestei arii poate fi privit

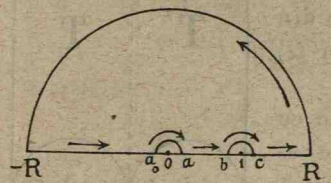

Fig. 71

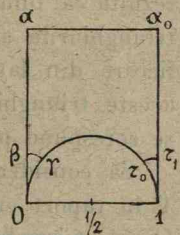

Fig. 72

ca un triunghiu având vârfurile $\tau = 0$, $\tau = 1$, $\tau = i\infty$ și unghiurile nule. Reprezintând acest triunghiu prin T (fig. 73), conchidem:

Funcțiunea $\lambda(\tau)$ este olomorfă în triunghiul T; unui punct τ interior sau pe laturile triunghiului, corespnunde un punct λ în semiplanul pozitiv λ. Viceversa, unui punct λ, situat în acest semiplan, corespunde un singur punct τ în triunghiul T. Axa imaginară (τ) corespunde segmentului $\lambda(0 \ldots 1)$; latura circulară și paralela la axa imaginară corespund respectiv țărmurilor superioare ale tăieturilor $(1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$

Corolar. Din corespondența biunivocă dintre ariile (λ) și (τ), reprezintate prin figurile 71 și 72, și din corespondența analoagă dintre semicercul $\lambda = re^{i\theta}$, $\theta(0 \ldots \pi)$ și linia $a_0\, a$, care se depărtează la infinit când r tinde către zero, rezultă că $|\lambda|$ tinde către zero când τ tinde către infinit dealungul unei paralele la axa imaginară, cuprinsă între această axă și paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$.

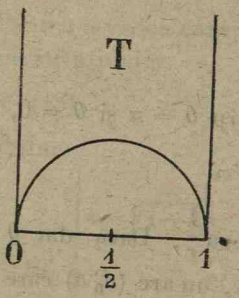

Fig. 73

364. Din proprietățile funcțiunii $\lambda(\tau)$, de a fi olomorfă în triunghiul T (fig. 73) precum și ca laturile acestui triunghiu și axa reală (λ) să se corespundă punct cu punct, rezultă că funcțiunea $\lambda(\tau)$ se prelungește în afară din triunghiu prin fiecare din laturile sale, astfel ca la două puncte simetrice în raport cu una din aceste laturi să corespundă puncte simetrice în raport cu axa reală (I, § 364). De unde rezultă că funcțiunea $\lambda\ (\tau)$ este olomorfă în triunghiurile simetrice cu T, în raport cu fiecare din laturile sale, și că fiecare din aceste triunghiuri și semiplanul inferior (λ) se corespund punct cu punct.

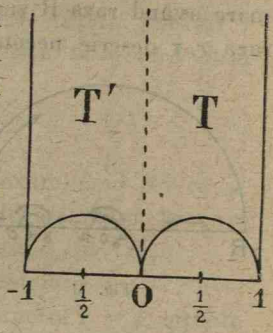

Fig. 74

Să considerăm triunghiul T' simetric cu T în raport cu axa imaginară; laturile acestui triunghiu sunt semiaxa imaginară $(\tau = it,\ t>0)$, semicercul $\left|\tau + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ situat deasupra axei reale, și paralela la axa imaginară $(\tau = -1 + it,\ t>0)$. Acest triunghiu și semiplanul negativ se corespund punct cu punct. Triunghiurile T și T' din care suprimăm latura comună, semiaxa imaginară, formează un patrulater circular (fig. 74). Funcțiunea $\lambda\ (\tau)$ este olomorfă în acest

patrulater; ea tinde către infinit când λ, fiind pe contur sau în interiorul patrulaterului, se apropie de vârfurile $\tau = \pm 1$. In acest patrulater, inclusiv conturul, $\lambda(\tau)$ poate primi orice valoare voim, fiecare o *singură* dată; exceptând valorile corespunzătoare conturului pe care le primește de *două ori*: anume, orice valoare reală $\lambda < 0$ corespunde la două puncte $\tau = \pm 1 + it$; orice valoare reală $\lambda > 1$ corespunde la două puncte situate pe laturile circulare, simetrice în raport cu axa imaginară.

365 Corespondența biunivocă între semiplanul inferior (λ) și triunghiul T' se mai poate obține în același mod ca între semiplanul superior și triunghiul T. Este de ajuns, pentru aceasta, a face ca λ să descrie axa reală, evitând punctele critice 0 și 1 prin semicercuri situate *dedesubtul* axei reale, adică segmentul λ (0...1) care este privit comun celor două semiplane și țărmurile inferioare ale tăieturilor $(1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$. Este dar de ajuns a considerà valorile $\lambda > 1$ și $\lambda < 0$.

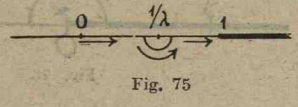

Fig. 75

1°. $\lambda > 1$. Punctul λ fiind situat pe țărmul inferior, punctul $\frac{1}{\lambda}$ este situat pe țărmul superior între 0 și 1. Vom aveà, în locul formulelor (7) pe cele două următoare:

$$(22)\quad \begin{cases} \omega = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} - i\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \\ \omega' = i\displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}; \end{cases}$$

coeficientul lui i în ω' este de semn contrar cu cel din ω, căci în integrala

$$\omega' = -i\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}$$

nu se înconjoară punctul $x = 1$ (fig. 75).

2^0. $\lambda < 0$. In locul formulelor (14) avem egalităţile

$$(23)\quad \begin{cases} \omega = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \\ \omega' = -\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + i\int_{\frac{1}{\lambda}}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}}; \end{cases}$$

căci în evaluarea lui ω' se evită numai punctul $x = 0$ printr'un semicerc superior (fig. 76). Radicalele sunt pretutindeni reale şi pozitive.

Fig. 76

366. Comparând formulele (7) şi (22), vedem că în două puncte λ', λ'' situate faţă în faţă respectiv pe ţărmul superior şi pe ţărmul inferior, avem

$$(24)\quad \begin{aligned} \omega(\lambda') &= \omega(\lambda'') + 2\omega', \\ \omega'(\lambda') &= \omega'(\lambda''). \end{aligned}$$

Deasemenea din comparaţiunea formulelor (14) şi (23), rezultă egalităţile

$$(25)\quad \begin{cases} \omega(\lambda') = \omega(\lambda''), \\ \omega'(\lambda') = \omega'(\lambda'') + 2\omega. \end{cases}$$

Ceeace revine a zice că dacă λ străbate tăietura $(1, +\infty)$, ω' nu se schimbă, iar ω se schimbă în

$$\omega \pm 2\omega',$$

după cum λ trece din semiplanul inferior în cel superior, sau în sens invers. Dacă însă λ străbate tăietura $(-\infty, 0)$, ω rămâne neschimbat şi ω' se schimbă în

$$\omega' \pm 2\omega,$$

semnele fiind determinate în acelaş mod ca relativ la tăietura $(1, +\infty)$. Regăsim astfel formulele de transformare (14) şi (15) (§ 361).

367. Să considerăm formulele generale

$$(1)\quad \Omega = \alpha\omega + \beta\omega', \quad \Omega' = \gamma\omega + \delta\omega',$$

cari cuprind toate valorile ce pot primi perioadele integralei

$$u = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

pentru aceeaș valoare oarecare λ, formule deduse din perioadele inițiale ω, ω', când punctul λ străbate cele două tăieturi un număr oarecare de ori (16) (§ 361).

In aceste formule, coeficienții sunt numere întregi satisfăcând egalitatea

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1 \tag{2}$$

și congruențele

$$\alpha\equiv\delta\equiv 1,\quad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \pmod 2. \tag{3}$$

De unde rezultă că între funcțiunile

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega},\quad \tau'=\frac{\Omega'}{\Omega},$$

există relațiunea

$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}. \tag{4}$$

Toate punctele τ, legate între ele prin această relațiune, sunt situate în același semiplan cu τ. Căci, punând

$$\tau=\xi+i\eta,\quad \tau'=\xi'+i\eta',$$

avem

$$\eta'=\frac{\eta}{(\alpha+\beta\xi)^2+\beta^2\eta^2};$$

η' este așà dar de același semn cu η.

368. Formula (4) cuprinde totalitatea valorilor lui τ corespunzătoare aceleași valori oarecari a lui λ. De unde rezultă că $\tau(\lambda)$ este o funcțiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc din cea dintâu, în virtutea relațiunii (4). Una din aceste ramuri, cea studiată mai sus, este reprezintată geometricește prin patrulaterul D(T, T'), care constitue *domeniul* acestei ramuri.

Dacă λ descrie o curbă închisă fără a străbate nici una din cele două tăieturi, adică fără a înconjurà nici unul din punctele 0 sau 1, punctul τ descrie o curbă închisă situată toată în domeniul D.

III. *Substituțiuni modulare. Grup modular.*

369. *Substituțiunile* (4) *formează un grup.* In adevăr, fie

$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau},\quad \tau''=\frac{\gamma'+\delta'\tau'}{\alpha'+\beta'\tau'},$$

două substituțiuni ai căror coeficienți satisfac condițiunile (2) și (3). Subtituind în a doua formulă valoarea lui τ', obținem

egalitatea

$$\tau'' = \frac{\gamma_1 + \delta_1 \tau}{\alpha_1 + \beta_1 \tau},$$

în care avem egalitățile

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\alpha' + \gamma\beta', & \beta_1 = \beta\alpha' + \delta\beta', \\ \gamma_1 = \alpha\gamma' + \gamma\delta', & \delta_1 = \beta\gamma' + \delta\delta', \end{cases}$$

ai căror coeficienți $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ satisfac condițiunile (2) și (3); prin urmare, aplicând două oarecari din substituțiunile (4), sau făcând, după expresiunea obicinuită, *produsul* a două din ele, obținem o substituțiune cuprinsă printre substituțiunile (4). Printre aceste substituțiuni se găsește și substituțiunea *identică*, adică aceea care dă $\tau' = \tau$. Ceeace demonstră teorema.

Substituțiunile (4) se numesc *substituțiuni modulare* și grupul, pe care îl reprezintăm prin G, se numește *grup modular*. Două substituțiuni modulare

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

se zic *congruente* (*mod* 2), dacă avem congruențele

$$\alpha' \equiv \alpha, \quad \beta' \equiv \beta, \quad \gamma' \equiv \gamma, \quad \delta' \equiv \delta \ (mod\ 2).$$

Două puncte τ, τ' se numesc *echivalente*, relativ la grupul G, dacă sunt legate între ele prin relațiunea (4). Două arii se numesc *echivalente*, dacă toate punctele lor sunt echivalente două câte două.

Două puncte echivalente nu pot coincide decât pentru valori particulare ale lui τ. Să facem în (4) $\tau' = \tau$; obținem ecuațiunea

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt, în virtutea relațiunii (2),

$$\tau = \frac{\delta - \alpha \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4}}{2\beta}.$$

Punctele astfel determinate sunt punctele *fixe* ale substituțiunii. Toate aceste puncte sunt situate pe axa reală [1]).

370. Am văzut mai sus că punctul τ fiind situat în domeniul D rămâne în acelaș domeniu cât timp punctul λ nu străbate nici una din cele două tăieturi. Ce se întâmplă când λ străbate una din aceste tăieturi?

---

[1]) Egalitatea $\alpha + \delta = 0$ este incompatibilă cu condițiunile (2) și (3); căci, în virtutea acestor condițiuni, punând $\alpha = 2k + 1$, $\beta\gamma = 4h$, ar rezulta egalitatea imposibilă

$$2(k^2 + k + h) = -1.$$

Să presupunem că λ descrie o curbă închisă străbătând o dată tăietura $(0,-\infty)$, adică se învârtește o dată în jurul punctului $\lambda=0$, punctul $\lambda=1$ fiind exterior curbei. Prin această mișcare, ω se reproduce iar ω' devine (14) (§ 361) $\omega' \pm 2\omega$; de unde

$$\tau' = \tau \pm 2, \tag{5}$$

după cum rotațiunea se face în sensul pozitiv sau negativ.

O rotațiune în jurul punctului $\lambda = 1$, reproducând ω' și schimbând ω în $\omega \pm 2\omega'$, conduce la substituțiunea

$$\tau' = \frac{\omega'}{\omega \pm 2\omega'} = \frac{\tau}{1 \pm 2\tau}, \tag{6}$$

după cum rotațiunea se face în sensul negativ sau pozitiv. Formulele (5) și (6) sunt cuprinse în formula generală (4), cea dintâi pentru valorile

$$\alpha=\delta=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=\pm 2;$$

cea de a doua pentru valorile

$$\alpha=\delta=1, \quad \beta=\pm 2, \quad \gamma=0.$$

Domeniul ramurilor transformate (5) rezultă dintr'o translațiune a lui D spre dreapta sau spre stânga cu o distanță egală cu 2.

371. Să considerăm domeniul uneia din ramurile transformate (6), de ex., aceea care corespunde substituțiunii

$$\tau' = \frac{\tau}{1+2\tau}.$$

Pentru a obține transformările triunghiurilor T, T' să facem observarea generală următoare:

O substituțiune lineară transformând cercurile și liniile drepte în cercuri (cari se pot reduce la linii drepte), T și T' se vor transformà în triunghiuri ale căror laturi sunt rectilinii sau circulare, având o latură comună corespunzătoare semiaxei imaginare. Laturile acestor triunghiuri fiind perpendiculare pe axa reală, care se reproduce prin substituțiunile (4), rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că cercurile în cari ele se transformă au centrele lor pe această axă. Prin urmare, pentru a obține transformata unei laturi este de ajuns a cunoaște transformatele a două din punctele laturii.

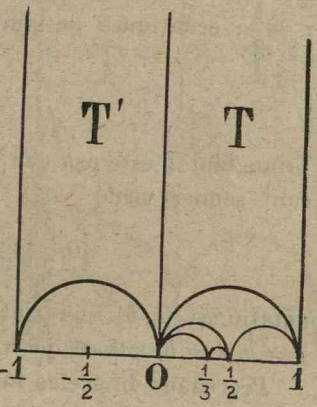

Fig. 77

Să considerăm triunghiul transformat al lui T.

1°. Punctele $\tau = 0$, $\tau = i\infty$ ale semiaxei imaginare se transformă respectiv în punctele

$$\tau' = 0, \quad \tau' = \frac{1}{2};$$

linia transformată este dar semicercul

$$\left|\tau' - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4},$$

care trece prin punctele 0 și $\frac{1}{2}$.

2°. Semiparalela la axa imaginară $\tau = 1 + it$, $(t > 0)$, se transformă în semicercul

$$\left|\tau' - \frac{5}{12}\right| = \frac{1}{12},$$

care trece prin punctele $\tau' = \frac{1}{3}$, $\tau' = \frac{1}{2}$ corespunzătoare punctelor $\tau = 1$ și $\tau = 1 + i\infty$.

3°. Semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ având punctul $\tau = 0$ comun cu axa imaginară și punctul $\tau = 1$, comun cu paralela $\tau = 1 + it$, se transformă într'un semicerc trecând prin punctele $\tau = 0$ și $\tau = \frac{1}{3}$; ecuațiunea acestui semicerc este

$$\left|\tau - \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

Triunghiul T este așà dar transformat în triunghiul ale cărui laturi sunt semicercurile

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right),$$

notațiunea (a, b) reprezintând semicercul care trece prin punctele $\tau = a$, $\tau = b$, situate pe axa reală.

Procedând în acelaș mod, găsim că triunghiul T' se transformă în triunghiul ale cărui laturi sunt .

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (1, 0)$$

corespunzătoare respectiv axei imaginare, paralelei la această axă trecând prin punctul $\tau = -1$ și semicercului $\left|\tau + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Dacă din cele două triunghiuri transformate suprimăm latura comună $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, obținem patrulaterul transformat al lui D, format de semicercurile $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, (1,0) (fig. 77). Acest patrulater este așà dar echivalent cu D, relativ la grupul G; el corespunde punct cu punct cu planul λ, mărginit de cele două tăieturi și constitue domeniul ramurii transformate.

372. In mod general, unui sistem de valori $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sau aceluiaș sistem în care schimbăm semnele tuturor coeficienților, corespunde o ramură a funcțiunii $\tau(\lambda)$; fiecare ramură posedă un domeniu în semiplanul $\tau > 0$. Acest domeniu se obține transformând domeniul (T, T') cu ajutorul substituțiunii corespunzătoare.

Metoda de transformare prin simetrie sau inversiune (transformare prin raze vectorii reciproce).

373. Să aplicăm triunghiului T inversiunea în raport cu fiecare din laturile sale, reprezentând prin A semiaxa imaginară, paralela ei prin B și semicercul prin C. In raport cu latura A avem triunghiul T', considerat mai sus; în raport cu latura B avem triunghiul T_1, simetric cu T, ale cărui laturi sunt latura B comună, latura paralelă trecând prin punctul $\tau = 2$ și semicercul $\left|\tau - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Triunghiul simetric în raport cu latura C este format din această latură care rămâne neschimbată și din semicercurile $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, inversele laturilor A și B (fig. 78).

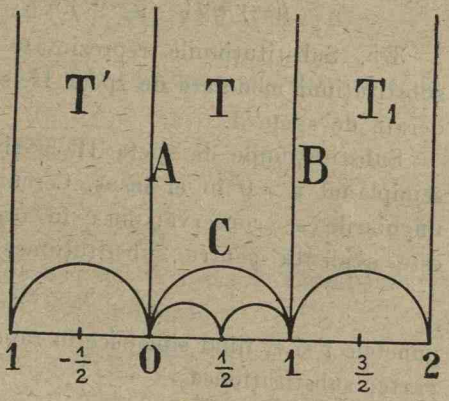

Fig. 78

374. *Expresiunea analitică a celor trei simetrii.*

Fie

$$\tau = \xi + i\eta, \quad \overline{\tau} = \xi - i\eta,$$

două puncte simetrice în raport cu axa reală; punctele τ și $-\overline{\tau}$ vor fi simetrice în raport cu axa imaginară. De aci rezultă, pentru

simetria în raport cu laturile A și B, respectiv expresiunile

$$(1) \qquad \tau' = -\overline{\tau},$$

$$(2) \qquad \tau' = -\overline{\tau} + 2,$$ [1])

τ fiind un punct interior triunghiului T. Simetria în raport cu latura C rezultă din egalitatea

$$\left(\overline{\tau} - \frac{1}{2}\right)\left(\tau' - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$ [2]);

de unde

$$(3) \qquad \tau' = \frac{\overline{\tau}}{2\overline{\tau} - 1}.$$

Expresiunile (1), (2), (3) sunt cuprinse într'o formulă generală care se obține înlocuind în substituțiunea modulară

$$(4) \qquad \tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau},$$

τ prin $-\overline{\tau}$; de unde

$$(5) \qquad \tau' = \frac{\gamma - \delta\overline{\tau}}{\alpha - \beta\overline{\tau}}.$$

Această formulă cuprinde pe cele dintâi trei, dacă pe lângă egalitatea $\alpha = \delta = 1$, facem respectiv

$$\beta = \gamma = 0; \quad \beta = 0, \gamma = 2; \quad \beta = -2, \gamma = 0.$$

375. Substituțiunile reprezintate prin formula (5) se numesc substituțiuni modulare de speța II, substituțiunile (4) fiind considerate de speța I.

Substituțiunile de speța II ca și cele de speța I, transformă semiplanul $\tau > 0$ în el însuș. Cercurile se transformă în cercuri, unghiurile se conservă, însă în ordinea inversă. Propoziționea este evidentă pentru substituțiunea

$$\tau_1 = -\overline{\tau},$$

punctele τ și τ_1 fiind simetrice în raport cu axa imaginară. De altă parte, substituțiunea

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau_1}{\alpha + \beta\tau_1},$$

---

[1]) $\tau = \xi + i\eta$, $\tau' = \xi' + i\eta$, $\xi + \xi' = 2$ $\tau' = 2 - (\xi - i\eta) = 2 - \overline{\tau}$

[2]) Din relațiunea $\tau - \frac{1}{2} = \varrho e^{i\theta}$, rezultă $\overline{\tau} - \frac{1}{2} = \varrho e^{-i\theta}$; prin urmare, punând $\tau' - \frac{1}{2} = \varrho' e^{-i\theta}$, rezultă $\left(\tau' - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{\tau} - \frac{1}{2}\right) = \varrho\varrho' = \frac{1}{2^2}$.

transformând semiplanul $\tau_1 > 0$ în el însuș, conservă unghiurile cu rotațiunea în sens direct. Ceeace justifică propoziținea pentru substituțiunea generală (5).

376. *Produsul a două substituțiuni de speța II este o substituțiune de speța I și produsul a două substituțiuni de spețe diferite este o substituțiune de speța II.*

1°. Fie

$$\tau_1 = \frac{\gamma - \delta\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}}, \qquad \tau_2 = \frac{\gamma_1 - \delta_1\bar{\tau}_1}{\alpha_1 - \beta_1\bar{\tau}_1},$$

două substituțiuni de speța II. Din cea dintâi rezultă valoarea

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\gamma - \delta\tau}{\alpha - \beta\tau}.$$

Ducând această valoare în substituțiunea a doua, obținem produsul

$$\tau_2 = \frac{\gamma_2 + \delta_2\tau}{\alpha_2 + \beta_2\tau},$$

în care avem egalitățile

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha\alpha_1 - \gamma\beta_1, & \beta_2 = \delta\beta_1 - \beta\alpha_1, \\ \gamma_2 = \alpha\gamma_1 - \gamma\delta_1, & \delta_2 = \delta\delta_1 - \beta\gamma_1, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = 1, \quad \alpha_2 \equiv \delta_2 \equiv 1, \quad \beta_2 \equiv \gamma_2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Produsul celor două substituțiuni este așa dar o substituțiune de speța I.

2°. Să considerăm substituțiunile

$$\tau_1 = \frac{\gamma - \delta\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}}, \quad \tau_2 = \frac{\gamma_1 + \delta_1\tau_1}{\alpha_1 + \beta_1\tau_1},$$

cea dintâi de speța II și cea de a doua de speța I. Eliminând τ_1 între cele două substituțiuni, obținem produsul

$$\tau_2 = \frac{(\alpha\gamma_1 + \gamma\delta_1) - (\beta\gamma_1 + \delta\delta_1)\bar{\tau}}{(\alpha\alpha_1 + \gamma\beta_1) - (\beta\alpha_1 + \delta\beta_1)\bar{\tau}},$$

al cărui determinant este

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 + \gamma\beta_1 & \beta\alpha_1 + \delta\beta_1 \\ \alpha\gamma_1 + \gamma\delta_1 & \beta\gamma_1 + \delta\delta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 1$$

și ai cărui coeficienți satisfac aceleași congruențe ca în cazul 1°. Produsul celor două substituțiuni este așa dar o substituțiune de speța II.

In acelaş mod se recunoaşte că intervertind ordinea factorilor, produsul este o substituţiune de speţa II.

Din cele ce preced rezultă că substituţiunile modulare de speţa I şi de speţa II, luate împreună, formează un grup, pe care îl numim *grup modular amplificat* şi îl notăm $\overline{G}$. Grupul G este un subgrup al grupului amplificat $\overline{G}$.

Două puncte τ, τ' sunt *echivalente*, relativ la grupul $\overline{G}$, dacă sunt legate între ele printr'o substituţiune a acestui grup, substituţiune de speţa I sau de speţa II. Două arii se zic relativ echivalente, dacă toate punctele lor sunt relativ echivalente, două câte două.

Substituţiunile modulare de speţa II, periodice de ordinul al doilea.

377. Se zice despre o substituţiune oarecare că este *periodică* de un ordin n, dacă aplicând-o de n ori succesiv, se obţine substituţiunea identică sau dacă puterea a n^a a substituţiunii este egală cu unitatea.

Printre substituţiunile modulare de speţa II sunt cu deosebire importante cele a căror perioadă este 2. Pentru ca substituţiunea

$$\tau' = \frac{\gamma - \delta\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}} \tag{1}$$

să fie periodică de ordinul al doilea este necesar şi suficient ca pătratul ei să fie egal cu 1, sau ceeace este tot una, ca substituţiunea τ' şi inversa ei să fie egale între ele. Din (1) rezultă egalitatea

$$\bar{\tau} = \frac{\gamma - \alpha\tau'}{\delta - \beta\tau'}.$$

Luând în această egalitate valorile conjugate în ambele membre, şi scriind τ' în loc de τ şi viceversa, avem, pentru inversa substituţiunii (1), formula

$$\tau' = \frac{\gamma - \alpha\bar{\tau}}{\delta - \beta\bar{\tau}}, \tag{2}$$

de asemenea de speţa II. Egalând substituţiunile (1) şi (2), rezultă egalitatea

$$\delta = \alpha. \tag{3}$$

Substituţiunile de speţa II periodice de ordinul al doilea sunt aşa dar date de expresiunea

$$\tau' = \frac{\gamma - \alpha\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}}, \tag{4}$$

cu condiţiunile

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 1, \quad \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2. \tag{5}$$

378. Substituțiunile (4) au o semnificare geometrică interesantă Să căutăm punctele ce una oarecare din aceste substituțiuni lasă neschimbate. Pentru aceasta, să facem în (4) $\tau' = \tau$; obținem egalitatea

$$\beta\tau\bar{\tau} - \alpha(\tau + \bar{\tau}) + \gamma = 0. \tag{6}$$

Să punem $\tau = \xi + i\eta$; ecuațiunea precedentă devine

$$\beta(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha\xi + \gamma = 0. \tag{7}$$

1°. Dacă $\beta = 0$, avem, în virtutea primei egalități (5), $\alpha = \pm 1$ și punând $\gamma = 2n$, conform congruenții $\gamma \equiv 0 \pmod 2$, ecuațiunea (7) se reduce la

$$\xi = n, \tag{8}$$

n fiind un număr întreg oarecare. Ecuațiunea (4) ia forma

$$\tau' = 2n - \bar{\tau}. \tag{9}$$

Substituțiunile reprezentate prin această ecuațiune lasă dar neschimbate punctele $\tau = \xi + i\eta$ situate pe liniile (8), perpendiculare pe axa reală, n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$; ele exprimă că punctele τ și τ' sunt simetrice în raport cu aceste linii, numite, pentru acest motiv, *linii de simetrie* [1]).

2°. Fie $\beta \neq 0$. In virtutea primei ecuațiuni (5), ecuațiunea (7) se poate scrie

$$\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{\beta^2}. \tag{10}$$

Această ecuațiune reprezintă o familie de cercuri reale, având centrele lor pe axa reală în punctele $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$ și razele corespunzătoare egale cu $\frac{1}{\beta}$, β fiind un număr par. Aceste cercuri se reproduc prin substituțiunile (4); raza cea mai mare a acestor cercuri este $\frac{1}{2}$ corespunzătoare lui $\beta = 2$. Acestei valori a razei corespund sistemele

α	$\pm 1,$	$\pm 3,$	$\pm 5, \ldots$
γ	$0,$	$4,$	$12, \ldots$

Centrele cercurilor a căror rază este $\frac{1}{2}$ au dar abscisele

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

[1]) Fie $\tau = \xi + i\eta$, $\tau' = \xi' + i\eta$; avem în virtutea ecuațiunii (9), $\xi + \xi' = 2n$.

379. *Transformarea* (4) *este o inversiune (transformare prin raze vectorii reciproce) în raport cu cercul ce această transformare lasă invariabil.*

Pentru a demonstrà această teoremă, să punem

$$\tau = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho e^{i\theta},$$

de unde

$$\overline{\tau} = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho e^{-i\theta}.$$

Să punem deasemenea

$$\tau' = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho' e^{i\theta'}.$$

Substituind aceste valori în (4), obţinem ecuaţiunea

$$\varrho\varrho' e^{i(\theta'-\theta)} = \frac{1}{\beta^2},$$

care nu este posibilă decât dacă $\theta' - \theta \equiv 0$, abstracţiune făcând de un multiplu de 2π.

q. e. d.

Două puncte τ, τ' inverse unul altuia, se zic *simetrice* în raport cu cercul corespunzător, numit *cerc de simetrie*, prin analogie cu cazul când, cercul reducându-se la o linie dreaptă, cele două puncte sunt simetrice în sensul obicinuit al cuvântului de simetrie.

Liniile (8) şi cercurile (10) se numesc *linii de simetrie* ale grupului amplificat $\overline{G}$.

380. *Teoremă. Orice substituţiune a grupului amplificat* $\overline{G}$ *transformă un cerc de simetrie într'un cerc de simetrie (cercurile se pot reduce la linii drepte).*

In adevăr, fie C un cerc de simetrie şi V o substituţiune a lui $\overline{G}$, de speţa I sau de speţa II, care transformă cercul C în cercul C_1.

Substituţiunea inversă V^{-1} transformă C_1 în C. Fie V_1 inversiunea care lasă cercul C neschimbat; produsul $V^{-1} V_1$ este o substituţiune care ca şi V^{-1}, schimbă C_1 în C şi produsul $V^{-1} V_1 V$ va transformà C în C_1; prin urmare substituţiunea $V_2 = V^{-1} V_1 V$ reproduce cercul C_1; acest cerc este aşà dar un cerc de simetrie.

Observare. Substituţiunea V_2 este de speţa II sau de speţa I, după cum V este de speţa I sau de speţa II, căci V_1 este de speţa II.

381. *Nici o dreaptă sau cerc de simetrie a grupului* $\overline{G}$ *nu străbate triunghiul T.* Aceasta rezultă din poziţiunea în plan a acestor linii:

dreptele de simetrie sunt date de ecuațiunile $\xi = n$ și cercurile de simetrie au centrele lor în punctele $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$, cu raza $\frac{1}{\beta}$, β fiind un număr par; prin urmare nici una din aceste linii nu pătrunde în interiorul lui T.

382. Prin metoda inversiunii putem acoperi tot semiplanul pozitiv (τ) printr'o rețea de triunghiuri echivalente relativ la grupul G. Pentru aceasta, să inversăm triunghiul T pe semicercul C(0,1). Această latură rămâne neschimbată, iar axa imaginară și paralela ei se transformă respectiv în semicercurile $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, pe cari le reprezintăm prin c_1, c_2. Triunghiul transformat t are vârfurile sale pe axa reală în punctele $0, \frac{1}{2}, 1$; unghiurile sunt toate nule. (fig. 79).

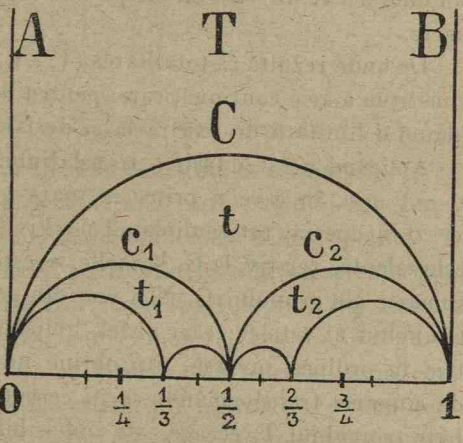

Fig. 79

Aplicând triunghiului t inversiunea în raport cu fiecare din laturile inferioare c_1, c_2, obținem două triunghiuri t_1, t_2 simetrice în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, având vârfurile lor pe axa reală. Inversiunea pe semicercul c_1 lăsând această latură neschimbată, două din vârfurile triunghiului t_1 sunt punctele 0 și $\frac{1}{2}$; al treilea vârf, transformatul punctului $\tau = 1$ este, în virtutea inversiunii, punctul $\tau = \frac{1}{3}$. Inversul t_2 al triunghiului t în raport cu semicercul c_2 fiind simetric cu triunghiul t_1 în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, are vârfurile sale în punctele $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$. Laturile inferioare, al căror număr este 4, formează un lanț continuu între punctele extreme 0,1.

Inversând fiecare din cele două din urmă triunghiuri t_1, t_2 pe laturile sale inferioare, obținem un număr îndoit de triunghiuri, două câte două simetrice în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, anume, inversele triunghiului t_1 pe laturile $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ sunt triunghiurile

$\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$; cele ale triunghiului t_2 sunt triunghiurile simetrice $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$, etc.

După n operaţiuni analoage, numărul laturilor inferioare este 2^n, formând un lanţ continuu între punctele $\tau = 0, \tau = 1$.

Triunghiurile cari se succed prin aceste inversiuni, sunt exterioare unele altora, două triunghiuri vecine neavând alte puncte comune decât un vârf situat pe axa reală, sau o latură care le desparte.

De unde rezultă că totalitatea $(T, t, t_1, t_2, \ldots)$ a acestor triunghiuri constitue o arie continuă, care, pentru $n = \infty$, acoperă toată partea planului limitată de axa reală şi de laturile A, B.

Aplicând acestei fâşii o translaţiune, exprimată prin egalitatea $\tau' = \tau + n$, în care n primeşte toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, acoperim tot semiplanul pozitiv (τ) cu o reţea de triunghiuri echivalente, relativ la $\overline{G}$, laturile acestor triunghiuri fiind linii de simetrie ale grupului $\overline{G}$. Nici una din aceste linii nu străbate vreun triunghiu al reţelei; căci altfel, aplicând transformarea prin simetrie în ordinea inversă, am obţine un cerc de simetrie (cercurile de simetrie transformându-se în cercuri de simetrie), care ar străbate triunghiul T, ceeace este imposibil (§ 381).

Orice punct din jumătatea planului pozitiv (τ) este interior sau situat pe o latură a unui triunghiu al reţelei. Unui punct τ din triunghiul T corespunde un singur punct în fiecare triunghiu al reţelei şi, viceversa, unui punct dintr'un triunghiu corespunde un singur punct în T. Pentru acest motiv se zice că triunghiul T este un *domeniu fundamental* al grupului $\overline{G}$. Această numire se poate aplică oricărui triunghiu al reţelei.

383. Reunind două triunghiuri cari au o latură comună şi suprimând această latură, obţinem un patrulater curbiliniu, echivalent, relativ la grupul G, cu patrulaterul D(T, T'), format din triunghiul T şi simetricul lui T' în raport cu axa imaginară.

Orice punct din semiplanul $\tau > 0$ este relativ echivalent cu un punct al lui D şi numai cu unul, afară dacă acest punct cade pe una din laturile conturului; în acest caz el este relativ echivalent şi cu punctul simetric în raport cu axa imaginară. Vom considerà ca făcând parte din conturul patrulaterului cele două laturi din stânga, iar celelalte două laturi ca aparţinând respectiv patrulaterelor vecine. Patrulaterul D constitue un *domeniu fundamental* al *grupului* G; el corespunde, punct cu punct, cu planul (λ) mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$, $(0, -\infty)$: triunghiul T

corespunde semiplanului (λ) pozitiv și triunghiul T' semiplanului (λ) negativ (§ 364).

384. ***Funcțiunea modulară*** $\lambda(\tau)$. Funcțiunea $\lambda(\tau)$ olomorfă în dreptunghiul D (T, T') (§ 368) este, în virtutea prelungirii sale analitice, olomorfă în dreptunghiurile cari au câte o latură comună cu D și prin urmare olomorfă în tot semiplanul pozitiv (τ). Funcțiunea $\lambda(\tau)$ reia aceeaș valoare în toate punctele echivalente, relativ la grupul G, adică avem

$$\lambda\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=\lambda(\tau)$$

cu condițiunile

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \alpha\equiv\delta\equiv 1,\ \beta\equiv\gamma\equiv 0\ (mod\ 2).$$

Această funcțiune intră dar în clasa funcțiunilor automorfe[1]; ea a primit numele de *funcțiune modulară*, λ fiind modulul funcției eliptice $sn(\nu, \lambda)$. Din corespondența biunivocă dintre planul (λ) mărginit de cele două tăieturi și patrulaterele echivalente ale grupului G, rezultă că, în fiecare din aceste patrulatere, $\lambda(\tau)$ trece o *singură dată* prin orice valoare, convenindu-se, precum s'a văzut în paragraful precedent, ca dintre laturile echivalente, două câte două, să se considere ca făcând parte din patrulater numai cele două din stânga. Fiecare patrulater al rețelei grupului G constitue un domeniu fundamental al funcțiunii $\lambda(\tau)$. Funcțiunea $\lambda(\tau)$ nu se prelungește dincolo de axa reală din planul (τ). Căci patrulaterele rețelei tinzând către zero când punctul τ se apropie de axa reală, rezultă că domeniul unui punct τ_0, în care egalitatea

$$\lambda-\lambda_0=P(\tau-\tau_0)$$

este posibilă, tinde către zero, când punctul τ_0 tinde către un punct oarecare al axei reale. Axa reală este așă dar o limită naturală a funcțiunii $\lambda(\tau)$.

385. Să menționăm expresiunea analitică a funcțiunii $\lambda(\tau)$ (§ 231)

$$\lambda=k^2=\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4=16q\left(\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right)^4.$$

Seriile $\vartheta(0, q)$ fiind absolut și uniform convergente în cercul $|q|=1$, fără a se anulă în interiorul cercului, precum rezultă din expresiunea lor sub formă de produse (3), § 226), rezultă că $\lambda(q)$ este o funcțiune olomorfă în interiorul acestui cerc. Cercul $|q|=1$ transformatul axei reale (τ) este o frontieră naturală a funcțiunii $\lambda(q)$.

[1]) O funcțiune uniformă $f(z)$ se numește *automorfă*, dacă se reproduce când aplicăm variabilei transformările lineare ale unui grup.

Avem, pentru primi termeni ai desvoltării

$$\lambda = 16q\,(1 - 8q + 44q^2 - \ldots);$$

de unde, înlocuind q prin $e^{i\pi\tau}$,

$$\lambda = 16e^{i\pi\tau}\,(1 - 8e^{i\pi\tau} + 44e^{2i\pi\tau} - \ldots).$$

386. Este interesant a arătà că plecând dela expresiunea

$$(1) \qquad \lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{p\omega_2 - p\omega_3}{p\omega_1 - p\omega_3},$$

se poate probà că $\lambda(\tau)$ este o funcțiune automorfă și a găsì grupul acestei funcțiuni.

Termenii membrului din urmă fiind funcțiuni omogene de ordinul -2 în raport cu semiperioadele ω_1, ω_2, ω_3 ale funcțiunii pu, rezultă că λ este o funcțiune de raporturile $\frac{\omega_3}{\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1} = -1 - \frac{\omega_3}{\omega_1}$; prin urmare λ este o funcțiune de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Făcând să varieze semiperioadele ω_1, ω_3 astfel ca raportul lor să nu înceteze de a fi imaginar, cantitățile $p\omega_\alpha$ variază în mod continuu și rămân diferite între ele. Funcțiunea $\lambda(\tau)$ se prezintă dar sub forma unui raport a două funcțiuni analitice uniforme, continue, cari nu se anulează și nu devin egale între ele. De unde rezultă că $\lambda(\tau)$ este o funcțiune analitică uniformă care rămâne finită, variând într'un mod continuu fără a trece prin valorile 0 și 1. Aceste valori nu pot fi atinse, precum și valoarea ∞, decât în cazul când discriminantul $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ tinde către zero; căci, în acest caz două din rădăcinile e_1, e_2, e_3 devenind egale, raportul (1) poate primì una din valorile excepționale menționate $0, 1, \infty$.

387. Să căutăm condițiunile ce trebuie să împlinească două puncte τ, τ' pentru ca să avem egalitatea

$$(1) \qquad \lambda(\tau') = \lambda(\tau).$$

Să considerăm două funcțiuni

$$p(u|\omega_1, \omega_3) = p(u; g_2, g_3),$$
$$p(u|\omega_1', \omega_3') = p(u; g_2', g_3'),$$

cu perioade diferite. Fie

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \tau' = \frac{\omega_3'}{\omega_1'}$$

și e_1, e_2, e_3; e'_1, e'_2, e'_3 rădăcinile respective ale ecuațiunilor

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0, \quad 4x^3 - g'_2x - g'_3 = 0.$$

Avem, prin definiție,

$$\lambda(\tau)=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=-\frac{e_1+2e_3}{e_1-e_3},$$

$$\lambda(\tau')=\frac{e_2'-e_3'}{e_1'-e_3'}=-\frac{e_1'+2e_3'}{e_1'-e_3'}.$$

Pentru ca egalitatea (1) să fie satisfăcută, trebuie să avem

$$\frac{\dfrac{e_1}{e_3}+2}{\dfrac{e_1}{e_3}-1}=\frac{\dfrac{e_1'}{e_3'}+2}{\dfrac{e_1'}{e_3'}-1};$$

de unde

$$\frac{e_1'}{e_3'}=\frac{e_1}{e_3},$$

sau, punând $\frac{e_1'}{e_1}=k$, avem egalitățile

$$\frac{e_1'}{e_1}=\frac{e_3'}{e_3}=\frac{e_2'}{e_2}=k. \tag{2}$$

De unde, între invarianții celor două funcțiuni, relațiunile

$$g_2'=k^2g_2,\quad g_3'=k^2g_3. \tag{3}$$

Să construim o a treia funcțiune

$$p(u|\omega_1'',\omega_3'')=p(u;g_2,g_3)$$

ale cărei perioade să fie determinate de ecuațiunile

$$\left(\frac{\omega_1''}{\omega_1'}\right)^2=k,\quad \frac{\omega_3''}{\omega_1''}=\tau'.$$

De unde rezultă valorile invarianților

$$\begin{cases} g_2''=\dfrac{15}{4\omega_1''^4}\Sigma'\dfrac{1}{(m+n\tau)^4}=\left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_1''}\right)^4g_2'=\dfrac{1}{k^2}g_1'=g_2, \\ g_3''=\dfrac{35}{16\omega_1''^6}\Sigma'\dfrac{1}{(m+n\tau)^6}=\left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_1''}\right)^6g_3'=\dfrac{1}{k^3}g_3'=g_3. \end{cases} \tag{4}$$

Funcțiunea $p(u|\omega_1'',\omega_3'')$ având aceeași invarianți ca funcțiunea inițială $p(u|\omega_1,\omega_3)$, este *necesar, ca sistemele* (ω_1'',ω_3''), (ω_1,ω_3) *să fie echivalente*, adică

$$\omega_1''=\alpha\omega_1+\beta\omega_3,\quad \omega_3''=\gamma\omega_1+\delta\omega_3,\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1; \tag{5}$$

de unde substituțiunea modulară

$$\tau'=\frac{\omega_3'}{\omega_1'}=\frac{\omega_3''}{\omega_1''}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}. \tag{6}$$

De altă parte, în virtutea egalității invarianților $g_2''=g_2$, $g_3''=g_3$, rezultă că rădăcinile e_1'', e_2'', e_3'' coincid, în *totalitatea* lor, cu rădă-

cinile e_1, e_2, e_3 şi sunt respectiv egale *numai* pentru valorile cari satisfac condiţiunile

$$(7) \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1, \quad \alpha\equiv\delta\equiv 1, \quad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \pmod 2.$$

Aşadar, *egalitatea* $\lambda(\tau')=\lambda(\tau)$ *este posibilă pentru toate substituţiunile grupului* G.

Din analiza precedentă rezultă dar că pentru *toate valorile* $\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\alpha+i\beta$, *satisfăcând condiţiunea ca coeficientul lui* i *să nu se anuleze, adică într'unul din cele două semiplane* (τ) ~ *în cazul nostru, semiplanul pozitiv,* β *fiind presupus* >0 ~ $\lambda(\tau)$ *este o funcţiune automorfă aparţinând grupului* G. q. e. d.

388. Să considerăm un sistem complect de substituţiuni ale grupului G, mărginind valorile pare ale coeficienţilor la 0 şi cele impare la ± 1; alăturând valorile corespunzătoare ale semiperioadelor şi ale rădăcinelor e_α, avem tabloul

(1)

α	β	γ	δ	ω_1'	ω_2'	ω_3'	e_1'	e_2'	e_3'
1	0	0	1	ω_1	ω_2	ω_3	e_1	e_2	e_3
1	0	1	1	ω_1	ω_3	ω_2	e_1	e_3	e_2
1	1	0	1	ω_2	ω_1	ω_3	e_2	e_1	e_3
1	1	−1	0	ω_2	ω_3	ω_1	e_2	e_3	e_1
0	1	−1	0	ω_3	ω_2	ω_1	e_3	e_2	e_1
0	−1	1	1	ω_3	ω_1	ω_2	e_3	e_1	e_2

Acestui tablou corespunde tabloul următor, care cuprinde, în prima coloană, valorile $\tau'=\frac{\omega_3'}{\omega_1'}$ şi, în a doua coloană, valorile corespunzătoare $\lambda'=\lambda(\tau')$:

(2)

	τ'	λ'
1^0	τ	λ
2^0	$1+\tau$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$
3^0	$\frac{\tau}{1+\tau}$	$\frac{1}{\lambda}$
4^0	$-\frac{1}{1+\tau}$	$\frac{1}{1-\lambda}$
5^0	$-\frac{1}{\tau}$	$1-\lambda$
6^0	$-\frac{1+\tau}{\tau}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$

Să considerăm, pe lângă cele şease substituţiuni din coloana întâi, substituţiunile în cari ele se tranformă prin simetrie în raport cu axa imaginară. Funcţiunea $\lambda(\tau)$ fiind reală pe axa imaginară (τ), valorile transformate ale lui λ sunt respectiv imaginar conjugate cu cele dintâi. Reprezintând prin $\overline{\lambda}$ valoarea conjugată cu λ, avem tabloul de transformări corespunzătoare tabloului (2):

(3)

	τ'	λ'
1^0	$-\overline{\tau}$	$\overline{\lambda}$
2^0	$-1-\overline{\tau}$	$\dfrac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-1}$
3^0	$-\dfrac{\overline{\tau}}{1+\overline{\tau}}$	$\dfrac{1}{\overline{\lambda}}$
4^0	$\dfrac{1}{1+\overline{\tau}}$	$\dfrac{1}{1-\overline{\lambda}}$
5^0	$\dfrac{1}{\overline{\tau}}$	$1-\overline{\lambda}$
6^0	$\dfrac{1+\overline{\tau}}{\overline{\tau}}$	$\dfrac{\overline{\lambda}-1}{\overline{\lambda}}$

Substituţiunile 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 sunt inversiuni pentru ambele variabile τ şi λ. Punând

$$\tau=\xi+i\eta, \qquad \lambda=x+iy$$

şi făcând $\tau'=\tau$, $\lambda'=\lambda$, obţinem liniile de simetrie corespunzătoare

(4)

$\xi=0$	$y=0$
$2\xi+1=0$	$x^2+y^2-2x=0$
$\xi^2+\eta^2+2\xi=0$	$x^2+y^2-1=0$
$\xi^2+\eta^2-1=0$	$2x-1=0$

389. Tabloul (7) ne permite a determină valorile ce primeşte λ în punctele următoare

$$\tau=i, \quad \frac{-1+i}{2}, \quad \frac{+1+i\sqrt{3}}{2}, \quad 1+i\equiv-1+i \pmod 2$$

1^0. Transformarea $\tau'=\dfrac{-1}{\tau}$ admite punctul fix $\tau=i$, căruia corespunde egalitatea $\lambda=1-\lambda$; de unde

(1) $$\lambda(i)=\frac{1}{2}.$$

2°. Substituțiunea $\tau' = \frac{-1}{1+\tau}$ transformă λ în $\frac{1}{1-\lambda}$ și pentru $\tau = i$, avem $\tau' = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1+i}{2}$; prin urmare

$$\lambda\left(\frac{-1+i}{2}\right) = \frac{1}{1-\lambda(i)} = 2. \tag{2}$$

3°. Aceeaș substituțiune admite punctul fix $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; acestui punct corespunde dar egalitatea $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$, sau ecuațiunea

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Soluțiunea admisibilă este

$$\lambda\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \tag{3}$$

căci punctul $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ fiind situat în triunghiul T', punctul corespunzător λ este situat în semiplanul negativ.

Punctul $\tau = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ fiind simetric cu punctul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ în raport cu axa imaginară, valorile corespunzătoare ale lui λ sunt conjugate; avem așà dar

$$\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

Valorile (3) și (4) ale lui λ se pot deduce plecând dela substituțiunea $\tau' = -\frac{1+\tau}{\tau}$ care admite același punct fix $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ și căreia corespunde transformarea

$$\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

4°. Avem (2°)

$$\lambda(1+\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1};$$

de unde, în virtutea egalității (1) și ținând seamă de echivalența punctelor $\pm 1+i$, avem

$$\lambda(-1+i) = \lambda(1+i) = \frac{\lambda(i)}{\lambda(i)-1} = -1. \tag{5}$$

IV. *Grupul modular* $\Gamma(\tau)$. — *Funcțiunea modulară* $J(\tau)$

390. Substituțiunile grupului G sunt cuprinse printre substituțiunile modulare

$$\tau' = \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}, \tag{1}$$

ai cărei coeficienți sunt numere întregi, satisfăcând *unica condițiune*

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1. \tag{2}$$

Grupul modular format de aceste substituțiuni se notează Γ. Două puncte τ, τ' se numesc *echivalente*, relativ la grupul Γ, dacă sunt legate între ele prin egalitatea (1). Ele sunt toate situate în același semiplan cu τ. Punctele fixe ale substituțiunii sunt rădăcinile ecuațiunii ce se obține făcând $\tau'=\tau$; ele sunt date de ecuațiunea

$$\tau=\frac{\delta-\alpha\pm\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4}}{2\beta}. \tag{3}$$

Substituțiunea considerată este *eliptică*, *parabolică*, sau *iperbolică* după cum avem

$$|\alpha+\delta|<2, \quad |\alpha+\delta|=2, \quad |\alpha+\delta|>2.$$

§ 391. *Grupul* G. *este un subgrup invariant al grupului* Γ.

Pentru a demonstra această teoremă să reamintim noțiunile următoare din teoria generală a grupurilor.

I. Fie

$$g_0=1, \ g_2, \ g_3, \ldots, \ g_n, \ldots \tag{1}$$

un șir de substituțiuni in număr limitat sau nelimitat, formând un grup G și fie h o substituțiune oarecare. Substituțiunea reprezintată prin produsul

$$g'_\lambda = h^{-1}g_\lambda h, \qquad (\lambda=0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

se numește *transformata* substituțiunei g_λ prin substituțiunea h. De unde, vice-versa,

$$g_\lambda = hg'_\lambda h^{-1}, \tag{3}$$

adică substituțiunea g_λ este transformata substituțiunei g'_λ prin substituțiunea inversă h^{-1}.

Făcând produsul a două substituțiuni de forma (2), obținem egalitatea

$$g'_\lambda g'_\mu = \left(h^{-1}g_\lambda h\right)\left(h^{-1}g_\mu h\right) = h^{-1}\left(g_\lambda g_\mu\right)h, \tag{4}$$

care exprimă că produsul $g'_\lambda g'_\mu$, a două substituțiuni transformate, este substituțiunea transformată a produsului $g_\lambda g_\mu$, prin aceiaș substituțiune h; de unde rezultă că substituțiunile transformate ale tuturor substituțiunilor lui G, printr'o aceiaș substituțiune h, formează un grup G', numit grupul *transformat* al lui G. Se notează

$$G' = h^{-1} G h. \tag{5}$$

Fiecărei substituțiuni a lui G corespunde o substituțiune a lui G' și viceversa, fiecărei substituțiuni a lui G' corespunde o substituțiune a lui G. Se zice că cele două grupuri sunt *izomorfe*. Dacă substituțiunea h aparține grupului G, substituțiunile transformate reproduc substituțiunile inițiale, într'o ordine diferită oarecare: grupul G' coincide cu grupul G.

II. *Subgrupuri.* Dacă o parte din substituțiunile unui grup G, pe cari le reprezintăm prin

$$S_0 = 1, \quad S_1, \quad S_2, \ldots \tag{1}$$

al căror număr poate fi limitat sau nelimitat, formează un grup H, se zice că H este un *subgrup* al lui G. Fie T_1 o substituțiune a lui G care nu aparține lui H, substituțiunile

$$T_1, \quad S_1 T_1, \quad S_2 T_1, \ldots \tag{2}$$

sunt diferite între ele, ceeace este evident; ele sunt diferite și de substituțiunile (1). Căci, dacă am avea $S_\lambda T_1 = S_\mu$ ar urma să avem $T_1 = S_\lambda^{-1} S_\mu$, adică T_1 ar face parte din substituțiunile (1): contra ipotezei.

Dacă G conține substituțiuni diferite de cele din (1) și (2), fie T_2 una din ele. Substituțiunile

$$T_2, \quad S_1 T_2, \quad S_2 T_2, \ldots \tag{3}$$

sunt dar diferite între ele și de substituțiunile (1). Ele sunt diferite și de substituțiunile (2); căci din $S_\lambda T_2 = S_\mu T_1$ rezultă $T_2 = S_\lambda^{-1} S_\mu T_1$, adică T_2 ar face parte din substituțiunile (2): contra ipotezei.

Continuând în acelaș mod, formăm un tablou

$$\left\{\begin{array}{l} 1, \quad S_1, \quad S_2, \ldots \\ T_1, \quad S_1 T_1, \quad S_2 T_1, \ldots \\ T_2, \quad S_1 T_2, \quad S_2 T_2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

compus dintr'un număr limitat sau nelimitat de linii, care conține toate substituțiunile lui G, fiecare o singură dată. Prima linie

constitue grupul H; celelalte linii neconținând substituțiunea 1, nu formează grupuri.

Dacă liniile (4) sunt în număr limitat, fie m acest număr, se zice că m este *indicele* subgrupului H.

Transformarea subgrupului H prin substituțiunile lui G.

Toate substituțiunile unei linii a tabloului (4) transformă H într'un acelaș grup, precum rezultă din egalitatea

$$(S_i T_k)^{-1} H (S_i T_k) = T_k^{-1} (S_i^{-1} H S_i) T_k = T_k^{-1} H T_k.$$

Substituțiunile din linii diferite transformă H în grupuri în genere diferite. In cazul indicelui limitat m, avem așa dar cel mult m subgrupuri transformate,

$$H_1, \quad H_2, \ldots, \quad H_m$$

printre cari unul coincide cu H. Se zice că aceste subgrupuri sunt *conjugate* în grupul G. Dacă subgrupurile conjugate sunt identice, prin urmare grupul H se reproduce, oricare ar fi substituțiunea lui G prin care îl transformăm, se zice că H este un subgrup *invariant* al lui G.

Demonstrarea teoremei enunțată la începutul paragrafului rezultă imediat. Fie

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

o substituțiune oarecare a lui G, și

$$V = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

o substituțiune oarecare a lui Γ, neaparținând lui G. Avem

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} v = \begin{pmatrix} -\delta' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\delta' + \beta\gamma' & \alpha\beta' - \beta\alpha' \\ -\gamma\delta' + \delta\gamma' & \gamma\beta' - \delta\alpha' \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} v V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

coeficienții $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ fiind determinați de ecuațiunile

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha'(-\alpha\delta' + \beta\gamma') + \beta'(-\gamma\delta' + \delta\gamma') \equiv -\alpha + (\alpha + \delta)\beta'\gamma' \equiv -\alpha \equiv 1, \\ \beta_1 &= \alpha'(\alpha\beta' - \beta\alpha') + \beta'(\gamma\beta' - \delta\alpha') \equiv (\alpha - \delta)\alpha'\beta' \equiv 0, \\ \gamma_1 &= \gamma'(-\alpha\delta' + \beta\gamma') + \delta'(-\gamma\delta' + \delta\gamma') \equiv (\delta - a)\gamma'\delta' \equiv 0. \\ \delta_1 &= \gamma'(\alpha\beta' - \beta\alpha') + \delta'(\gamma\beta' - \delta\alpha') \equiv a - (\alpha + \delta)\alpha'\delta' \equiv 1 \end{aligned}\right\} (mod\ 2)$$

Coeficienţii substituţiunei transformate satisfac dar aceleaşi congruenţe ca coeficienţii substituţiunilor grupului G., prin urmare grupul transformat coincide cu grupul iniţial: $V^{-1}GV=G$.

q. e. d.

392. *Toate substituţiunile grupului Γ se pot exprimà printr'un produs de puteri pozitive şi negative ale substituţiunilor elementare:*

$$S(\tau) = \tau + 1, \qquad T(\tau) = -\frac{1}{\tau}, \tag{4}$$

precum rezultă din teorema (§ 125), relativă la orice transformare liniară omogenă

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3;$$

de unde se deduce substituţiunea (1) a raportului $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$.

Substituţiunile S şi T pot fi dar considerate ca substituţiunile *generatoare* ale grupului modular Γ. Cea dintâi este parabolică având punctul fix $\tau = \infty$; aplicând această substituţiune de n ori, avem $S^n = \tau + n$. Cea de a doua este eliptică având ca punct fix $\tau = i$. Ea este periodică de ordinul al doilea:

$$T^2 = 1.$$

Pe lângă substituţiunile S şi T să notăm substituţiunea reprezentată prin simbolul U, corespunzătoare valorilor

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \delta = 1:$$

$$U = \tau' = -\frac{1+\tau}{\tau}. \tag{5}$$

Pătratul acestei substituţiuni este

$$U^2 = -\frac{1}{1+\tau} = U^{-1}; \tag{6}$$

de unde

$$U^3 = 1. \tag{7}$$

Substituţiunea U este aşà dar periodică de ordinul al treilea; punctul fix al acestei substituţiuni este

$$\tau = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Intre substituţiunile S, T şi U există relaţiunea

$$S\,T = U, \tag{8}$$

de unde, în virtutea egalităţii (7),

$$ST\ ST\ ST = 1. \tag{9}$$

Substituţiunile fundamentale S şi T nu sunt dar independente.

393. Toate substituțiunile lui Γ se pot grupà în *șase clase* satisfăcând congruențele reprezintate prin primele patru coloane ale tabloului (1) (§ 388) pe cari le reproducem aici:

(10)

	$a\equiv$	$\beta\equiv$	$\gamma\equiv$	$\delta\equiv$
1^0	1	0	0	1
2^0	1	0	1	1
3^0	1	1	0	1
4^0	1	1	1	0
5^0	0	1	1	0
6^0	0	1	1	1

(mod 2)

Substituțiunile din aceeaș clasă sunt congruente între ele; două substituțiuni din clase diferite sunt incongruente (*mod* 2). Substituțiunile din clasa 1^0 formează grupul G, care se mai notează Γ_6. Substituțiunile din celelalte clase nu formează grupuri.

Putem ordonà toate substituțiunile lui Γ în șase clase conform tabloului precedent. Fie

$$(11) \qquad v_1 = 1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$$

substituțiunile lui Γ_6 și

$$(12) \qquad V_1 = 1, V_2, V_3, \ldots, V_6,$$

șase substituțiuni ale lui Γ aparținând respectiv claselor (10). Grupul Γ se va puteà reprezintà prin tabloul

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots \\ V_2, V_2v_2, V_2v_3, \ldots, V_2v_n, \ldots \\ V_3, V_3v_2, V_3v_3, \ldots, V_3v_n, \ldots \\ V_4, V_4v_2, V_4v_3, \ldots, V_4v_n, \ldots \\ V_5, V_5v_2, V_5v_3, \ldots, V_5v_n, \ldots \\ V_6, V_6v_2, V_6v_3, \ldots, V_6v_n, \ldots \end{array} \right.$$

Substituțiunile fiecărei linii ale acestui tablou aparțin clasei din care face parte primul element al liniei; prin urmare, elementele din două linii diferite sunt diferite. Cele din aceeaș linie sunt de asemenea diferite între ele; căci din egalitatea

$$Vv_i = Vv_k$$

ar urma $v_i = v_k$. In fine, orice substituțiune a lui Γ, trebuind să aparțină uneia din cele șase clase, este cuprinsă în tabloul (13). Numărul liniilor orizontale fiind șase, se zice că sub grupul G are, relativ la grupul Γ, *indicele* 6; de unde vine notațiunea Γ_6 pentru acest subgrup.

Observare. Se verifică uşor că dacă în locul celor şase substituţiuni V_i, cu ajutorul cărora am format tabloul precedent, am alege alte şase incongruente (*mod* 2), am obţine aceleaşi substituţiuni ale lui Γ; ceeace se modifică este ordinea liniilor şi aceea a substituţiunilor cuprinse în aceste linii.

Să ne închipuim, de ex., că am înlocuì substituţiunea V_2 prin substituţiunea V_3V_k, linia a doua a tabloului ar deveni

$$V_3V_k\,,\ V_3V_kV_2\,,\ V_3V_kV_3\,,\ldots,\ V_3V_kV_n\,,\ldots$$

Insă substituţiunile

$$V_k\,,\ V_kV_2\,,\ V_kV_3\,,\ldots$$

nu difer de substituţiunile (11) decât prin ordinea lor. Linia a doua ar fi înlocuită prin a treia şi, în această linie, substituţiunile ar fi dispuse într'o ordine diferită decât în cea dintâi.

394. *Amplificarea grupului Γ.* Este util, pentru împărţirea semiplanului pozitiv (τ) în domenii fundamentale, de a amplificà grupul Γ, precum am amplificat grupul G, introducând substituţiunile modulare de speţa II

$$(1)\qquad \tau' = \frac{\gamma - \delta\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}}.$$

Produsul a două substituţiuni de speţa II fiind o substituţiune de speţa I şi produsul a două substituţiuni de speţe diferite fiind o substituţiune de speţa II, totalitatea acestor substituţiuni formează grupul modular amplificat $\bar{\Gamma}$.

Printre substituţiunile (1) să considerăm cele periodice de ordinul al doilea

$$(2)\qquad \tau' = \frac{\gamma - \alpha\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}},$$

caracterizate prin egalitatea $\delta = \alpha$ (3) (§ 377). Relaţiunea dintre coeficienţi se reduce la

$$(3)\qquad \alpha^2 - \beta\gamma = 1.$$

Propoziţiunile (§§ 379, 380) relative la grupul amplificat $\bar{G}$ subsistă şi în cazul grupului amplificat $\bar{\Gamma}$, anume:

1.° Substituţiunile periodice de ordinul al doilea (2) sunt inversiuni; substituţiunea (2) lasă neschimbată linia a cărei ecuaţiune este

$$(4)\qquad \beta(\xi^2+\eta^2) - 2\alpha\xi + \gamma = 0, \qquad \tau = \xi + i\eta.$$

2.° Orice substituţiune a grupului $\bar{\Gamma}$ transformă un cerc într'un cerc.

Dacă $\beta = 0$, avem, în virtutea ecuaţiunii (3), $\alpha = \pm 1$; ecuaţiunea (4) se reduce la

$$(5)\qquad 2\xi = \gamma$$

γ număr întreg arbitrar. Substituțiunea corespunzătoare (2) ia forma

$$\tau' = \gamma - \overline{\tau}. \tag{6}$$

Punctele τ și τ' legate prin această ecuațiune sunt simetrice în raport cu dreapta (5).

Dacă $\beta \neq 0$, liniile, ce substituțiunea (2) lasă neschimbate, sunt cercurile

$$\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{\beta^2}, \tag{7}$$

ale căror centre sunt pe axa reală în punctele $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$. Numărul întreg β poate fi presupus pozitiv, căci putem schimbă semnele tuturor coeficienților substituțiunii. Pentru $\beta = 1$, α poate primi orice valoare întreagă, valoarea corespunzătoare a lui γ, în virtutea relațiunii (3), va fi $\gamma = \alpha^2 - 1$. Obținem astfel tabloul

α	0,	± 1,	± 2,	± 3, ...,
γ	-1,	0,	3,	8, ...;

abscisele centrelor cercurilor sunt date de valorile lui α.

Făcând $\beta = 2$, raza cercurilor este $\frac{1}{2}$. Valorile lui γ fiind date de ecuațiunea $2\gamma = \alpha^2 - 1$, rezultă că α primește numai valori impare. Avem tabloul de valori

α	± 1,	± 3,	± 5, ...,
γ	0,	4,	12, ...;

centrele cercurilor corespunzătoare sunt determinate de abscisele

$$\pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

Pentru $\beta = 3$, valorile lui γ sunt date de ecuațiunea $3\gamma = \alpha^2 - 1$; avem tabloul

α	± 1,	± 2,	± 4,	± 5, ...
γ	0,	1,	5,	8, ...

Raza cercurilor este $\frac{1}{3}$ și abscisele sunt

$$\pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{5}{3}, \ldots$$

395. Să ne închipuim trase toate liniile de simetrie; obținem astfel triunghiuri ale căror laturi sunt arce de cercuri. Să considerăm liniile de simetrie următoare: axa imaginară, paralela ei dusă prin punctul $\tau = -\frac{1}{2}$ și cercul $|\tau| = 1$. Figura 80 formată de

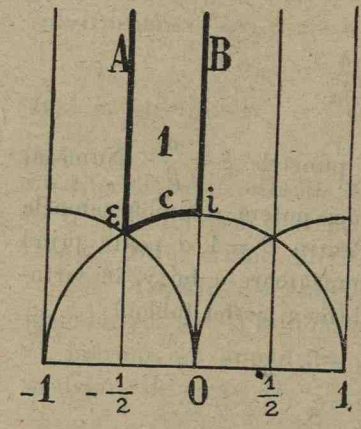

Fig. 80

cele două drepte nelimitate *exterioare* cercului și de arcul cuprins între ele poate fi privit ca un triunghiu ale cărui vârfuri sunt punctele

$$\tau = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \qquad \tau = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varepsilon, \qquad \tau = i\infty$$

și unghiurile corespunzătoare $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$. Să reprezintăm acest triunghiu prin 1.

Proprietăți. I. *Nici o dreaptă sau cerc de simetrie nu străbate triunghiul* 1. Aceeași demonstrațiune, ca pentru triunghiul T al grupului G (§ 381). Unicul cerc de simetrie, care are cu triunghiul 1 un singur punct comun punctul ε, este cercul cu centrul în punctul $\tau = -1$ cu raza 1.

II. *Nu există substituțiune modulară de speța I sau de speța II diferită de substituțiunea identică* ($\tau' = \tau$) *care să transforme triunghiul* 1 *în el însuși.* In adevăr, în virtutea acestor substituțiuni, unghiurile se conservă; aceste unghiuri fiind inegale $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$, urmează ca vârfurile să rămână fixe. Insă, dacă substituțiunea este de speța I, ea nu poate admite mai mult decât două puncte fixe, fără a se reduce la identitate [1]); prin urmare este imposibil ca toate vârfurile să se reproducă. Dacă substituțiunea este de speța II, ea lasă o latură neschimbată, iar pe celelalte două le transformă în linii simetrice în raport cu cea fixă. Triunghiul nu se poate dar reproduce.

III. *Nu există în triunghiul* 1 *două puncte echivalente relativ la grupul* Γ. Această propoziție rezultă din considerațiunile următoare:

1°. Dacă ar există, în interiorul triunghiului 1, două puncte P_1, P_2 echivalente, substituțiunea V care ar transformă P_1 în P_2, ar transformă punctele vecine cu P_1 în punctele vecine cu P_2 (în

[1]) Punctele fixe sunt rădăcinile ecuațiunii

$$\beta\tau^2 + (\delta - \alpha)\tau - \gamma = 0.$$

virtutea continuității), prin urmare triunghiul 1 în el însuș: ceeace este imposibil (II).

2°. Dacă P_1 este pe contur, substituțiunea V care ar transformă P_1 în P_2, ar transformă latura pe care se află P_1, adică o linie de simetrie, într'o linie de simetrie (§ 394) trecând prin P_2; triunghiul 1 ar fi străbătut de o linie de simetrie: ceeace este imposibil (I).

3°. Dacă P_1 și P_2 sunt pe contur, substituțiunea V care ar transformă P_1 în P_2, ar transformă un punct vecin cu P_1, *interior* triunghiului 1, într'un punct *exterior* acestui triunghiu, căci două puncte interioare nu pot fi echivalente (1°); prin urmare substituțiunea V transformă triunghiul 1 într'un triunghiu adiacent, având cu 1 latura comună pe care se află punctul P_2. Substituțiunea V lăsând latura comună neschimbată, transformă punctul P_1 într'un punct simetric cu el, în raport cu această latură. V nu poate dar transformă P_1 în P_2. q. e. d.

396. *Expresiunea analitică a simetriei în raport cu laturile triunghiului* 1. Fie τ un punct în triunghiul 1 și fie τ' punctul simetric cu τ în raport cu axa imaginară, sau în raport cu paralela la această axă, sau în raport cu cercul. Acestor simetrii corespund, respectiv substituțiunile, pe cari le reprezintăm prin aceleași litere A, B, C ca ale laturilor triunghiului

$$A = \tau' = -\overline{\tau}$$
$$B = \tau' = -1 - \overline{\tau},$$
$$C = \tau' = \frac{1}{\overline{\tau}}.$$

Aceste formule sunt cuprinse în formula generală (2) (§ 394), în care facem respectiv

$$\beta = \gamma = 0; \quad \beta = 0,\ \gamma = -1,\ \alpha = 1; \quad \beta = 1,\ \gamma = -1,\ \alpha = 0.$$

Se verifică imediat egalitățile

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1$$

$$AB = -1 + \tau, \quad BA = 1 + \tau, \quad AC = CA = -\frac{1}{\tau},$$

$$BC = -\frac{1}{1+\tau}, \quad CB = -\frac{1+\tau}{\tau}$$

Produsele BA și AC = CA coincid respectiv cu substituțiunile generatoare

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ale grupului Γ (4) (§ 392). Celelalte produse se exprimă cu ajutorul acestora. Avem

$$BA = S, \quad AB = S^{-1}, \quad BC = ST = U, \quad CB = (ST)^2 = U^2.$$

Substituţiunea $T=AC=CA=-\frac{1}{\tau}$ reprezintă dar simetria A, urmată sau precedată de simetria C.

Toate substituţiunile grupului $\bar{\Gamma}$ se pot exprima cu ajutorul simetriilor elementare A, B, C. Căci $\bar{\Gamma}$ este format din Γ şi din produsul substituţiunilor lui Γ printr'o substituţiune de speţa II, de ex., prin substituţiunea A; iar substituţiunile lui Γ se exprimă prin produsele formate cu puteri întregi pozitive şi negative ale substituţiunilor S=BA şi T=AC (§ 392).

397. *Construcţiunea reţelei de triunghiuri ale grupului $\bar{\Gamma}$.* Să inversăm triunghiul 1 pe fiecare din laturile sale; vom obţine trei triunghiuri având cu 1 latura de simetrie comună. Se obişnueşte a se nota triunghiurile transformate prin aceleaşi simboale cu cari se efectuează inversiunile. Avem astfel triunghiurile A, B, C: cele dintâiu două fiind simetrice în raport cu axa imaginară şi cu paralela ei, cel de al treilea fiind simetric cu cercul $|\tau|=1$. Vârfurile triunghiului A sunt punctele $i, \varepsilon'=e^{\frac{i\pi}{3}}$, $i\infty$; cele ale triunghiului B sunt punctele $-1+i$, ε, $-\frac{1}{2}+i\infty$ şi ale triunghiului C sunt punctele i, ε, 0. Unghiurile în aceste vârfuri sunt $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. (fig. 81) [1])

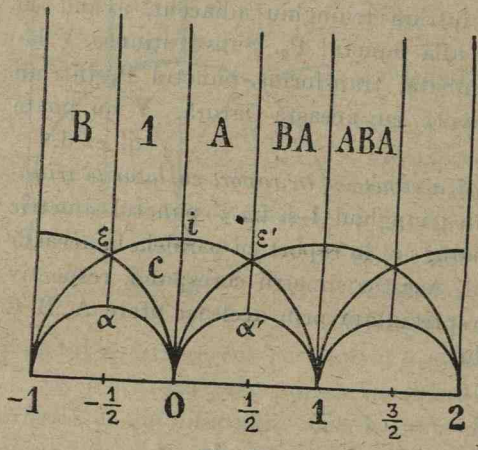

Fig. 81

Inversând triunghiurile A, B, C pe laturile lor libere şi aplicând aceiaş operaţiune triunghiurilor transformate, etc., acoperim semiplanul pozitiv (τ) printr'o infinitate de triunghiuri echivalente cu triunghiul 1, ale căror laturi sunt liniile de simetrie în cari se

[1]) Pentru a obţine simetricul unui triunghiu, în raport cu una din laturile sale, este de ajuns a găsi simetricul vârfului care nu se găseşte pe aceă latură. Astfel simetricul vârfului ∞ al triunghiului 1, în raport cu latura C, este punctul $\tau = o$; de unde rezultă triunghiul C cu vârfurile o, i, ε. Vârful i al acestui triunghiu se transformă, în raport cu latura $O\varepsilon$, într'un punct a determinat de intersecţia liniilor de simetrie în cari se transformă semiaxa imaginară şi arcul $i\varepsilon$.

Aceste linii sunt semicercul (0,—1) şi dreapta $\xi = -\frac{1}{2}$; etc.

transformă laturile triunghiului **1** prin substituțiunile formate de produsele substituțiunilor A, B, C, adică prin toate substituțiunile grupului $\overline{\Gamma}$ (§ 396).

In particular, domeniul fundamental D (T, T') al grupului G (Fig. 74), căruia aparține funcțiunea $\lambda(\tau)$, este acoperit de 12 triunghiuri, determinate de intersecțiunile liniilor de simetrie (fig. 81).

$$|\tau|=1, \quad |\tau\pm 1|=1, \quad |\tau\pm\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2}, \quad \xi=0, \quad \xi=\pm 1, \quad \xi=\pm\tfrac{1}{2}.$$

§ 398 Nici unul din triunghiurile rețelei lui $\overline{\Gamma}$ nu este străbătut de linii de simetrie și nu conține două puncte echivalente între ele; căci altmintrelea, triunghiul inițial **1** ar fi străbătut de asemenea linii și ar conține două puncte echivalente. Ceeace nu este (§ 395).

Totalitatea acestor triunghiuri constitue *rețeaua grupului modular* $\overline{\Gamma}$. Două triunghiuri vecine ale rețelei n'au alte puncte comune decât latura comună în raport cu care ele sunt simetrice. Vârfurile pot aparține mai multor triunghiuri. Astfel vârful i aparține la patru triunghiuri, vârful ε la șase triunghiuri și vârful ∞ la o infinitate de triunghiuri. Vârfurile echivalente cu cele precedente aparțin respectiv aceluiaș număr de triunghiuri.

Orice număr rațional fiind echivalent cu punctul ∞ [1]), rezultă că fiecare punct rațional al axei reale (τ) este vârf al unui număr infinit de triunghiuri ale rețelei lui $\overline{\Gamma}$.

Triunghiul **1**, precum și oricare triunghiu echivalent, relativ la grupul $\overline{\Gamma}$, este un domeniu fundamental al acestui grup.

399. Fie $\tau'=V(\tau)$ substituțiunea de speța I sau de speța II care transformă triunghiul (**1**) într'un triunghiu V al rețelei [2]). Când punctul τ descrie triunghiul **1**, punctul τ' descrie triunghiul V și când τ străbate latura A, devenind $\tau_1=-\overline{\tau}$ (τ fiind interior triunghiului **1**), τ' străbate latura echivalentă și devine $\tau'=V_1(\tau)=V(-\overline{\tau})$. Triunghiul V_1, adiacent cu V prin latura echivalentă cu latura A, este dar transformatul lui 1 prin $V(-\overline{\tau})$, însă când τ descrie triunghiul **1**, $-\overline{\tau}$ descrie triunghiul A. Așà dar triunghiul V_1 se obține transformând triunghiul **1** în A și aplicând lui A transformarea $V(\tau)$. Această substituțiune este așà dar egală cu produsul $AV(\tau)$ și triunghiul V_1 este reprezentat prin simbolul AV.

---

[1]) $\tau'=\left(\dfrac{\gamma-\delta\overline{\tau}}{\alpha-\beta\overline{\tau}}\right)_{\tau=\infty}=\dfrac{\delta}{\beta}$

[2]) Precum s'a văzut mai sus, triunghiul transformat al triunghiului (**1**) se reprezintă prin același simbol prin care se efectuează transformarea.

Deasemenea, dacă punctul τ străbate latura B sau latura C a triunghiului **1**, τ' va străbate latura respectiv echivalentă cu cea dintâi sau cu cea de a doua și triunghiul în care V se transformă va fi reprezintat prin BV sau CV. Așà dar dacă V reprezintă un triunghiu al rețelei lui Γ, cele trei triunghiuri adiacente vor fi reprezintate prin AV, BV, CV. Din cele ce preced rezultă că se poate lesne determină simbolul corespunzător fiecărui triunghiu al rețelei.

400. Ca aplicațiune, să determinăm simboalele celor 12 triunghiuri cari compun patrulaterul D (T, T'). Pentru aceasta, să observăm că plecând dela triunghiul inițial **1** și făcând o rotațiune, în sensul pozitiv, în jurul punctului $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, care este un vârf comun al celor șease triunghiuri cari compun triunghiul T', obținem succesiv simboalele acestor triunghiuri; iar pentru a obține simboalele triunghiurilor cari compun triunghiul T, simetric cu T' în raport cu axa imaginară, este de ajuns, a multiplică pe cele dintâiu cu factorul A ($\tau' = -\bar{\tau}$). Obținem tabloul

T'	τ'	T	τ'
1	τ	A	$-\bar{\tau}$
B	$-1-\bar{\tau}$	BA	$1+\tau$
CB	$-\frac{1+\tau}{\tau}$	CBA	$\frac{1+\bar{\tau}}{\bar{\tau}}$
BCB	$-\frac{\bar{\tau}}{1+\bar{\tau}}$	BCBA	$\frac{\tau}{1+\tau}$
CBCB	$-\frac{1}{1+\tau}$	CBCBA	$\frac{1}{1+\bar{\tau}}$
BCBCB = C	$\frac{1}{\bar{\tau}}$	CA	$-\frac{1}{\tau}$ [1]

[1]) Din $B = -1-\bar{\tau}$, $C = \frac{1}{\bar{\tau}}$ rezultă expresiunea lui CB:

$$\tau_1 = \frac{1}{\bar{\tau}}, \quad \tau' = -1-\bar{\tau}_1 = -1-\frac{1}{\tau} = -\frac{1+\tau}{\tau};$$

mai departe, BCB

$$B) \quad \tau_1 = -1-\bar{\tau}$$

$$BCB) \quad \tau' = -\frac{1+\tau_1}{\tau_1} = -\frac{\bar{\tau}}{1+\tau}, \text{ etc.}$$

Din $B = -1-\bar{\tau}$, $A = -\bar{\tau}$ rezultă expresiunea lui BA:

$$\tau_1 = -1-\bar{\tau}, \quad \tau' = -\bar{\tau}_1 = 1+\tau, \text{ etc.}$$

Să mai observăm că din expresiunile lui B și C, rezultă egalitatea BCB = CBC, de unde CBCB = BC, CBCBA = BCA.

Primele două coloane reprezintă triunghiurile lui T' în ordinea rotațiunei și substituțiunile cari transformă respectiv triunghiul 1 în aceste triunghiuri. Coloana a treia conține triunghiurile simetrice cu cele dintâi și coloana a patra conține substituțiunile cari transformă respectiv triunghiul 1 în triunghiurile coloanei a treia; ele se mai pot obține făcând rotațiunea triunghiului A în sensul negativ în jurul punctului $\tau = e^{\frac{i\pi}{3}}$, vârful comun al celor 6 triunghiuri cari compun triunghiul T.

Substituțiunile deduse din substituțiunea identică $\tau' = \tau$ printr'un număr par de simetrii sunt de clasa I, cele deduse printr'un număr impar sunt de clasa II; ceeace este conform cu teorema (§ 376).

401. ***Rețeaua grupului*** Γ *(rețeaua modulară).* Din rețeaua grupului amplificat $\bar{\Gamma}$ se deduce rețeaua modulară a grupului Γ. Reunind triunghiul 1 cu triunghiul A formăm un dublu triunghiu Δ, limitat de cele două paralele cu axa imaginară, cari trec prin punctele $\tau = \pm\frac{1}{2}$, exterioare cercului $|\tau| = 1$. Unghiurile acestui triunghiu sunt $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. In acest triunghiu nu sunt două puncte echivalente relativ la grupul Γ, exceptând punctele simetrice în raport cu axa imaginară, situate pe conturul lui. Pentru a justifică această propoziție să observăm că două puncte echivalente în grupul Γ sunt *a fortiori* echivalente în grupul amplificat $\bar{\Gamma}$; prin urmare în nici una din jumătățile acestui triunghiu nu pot fi două puncte echivalente în Γ. Pentru ca două puncte situate, unul în triunghiul 1 și celălalt în triunghiul A să fie echivalente în Γ, trebuie să fie simetrice în raport cu axa imaginară (echivalente relativ la $\bar{\Gamma}$); prin urmare, ele nu pot fi echivalente în Γ, decât dacă sunt legate prin una din substituțiunile

$$\tau' = \tau \pm 1, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau},$$

ale grupului Γ. In cazul celor d'intâi două, punctele sunt situate pe laturile paralele, în cazul din urmă, pe cercul $|\tau| = 1$, simetrice în ambele cazuri în raport cu axa imaginară

Convenim a privi ca făcând parte din conturul dublului triunghiu Δ latura din stânga axei imaginare și arcul cercului situat de aceiaș parte, iar laturile respectiv simetrice, ca făcând parte din triunghiurile alăturate. Triunghiul Δ constitue un *domeniu fundamental* al grupului Γ.

Reunind două câte două triunghiurile reţelei, cari au o latură comună, formăm o reţea de triunghiuri având unghiurile $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$. Aceste triunghiuri acoperă tot semiplanul pozitiv; ele formează *reţeaua modulară* a grupului Γ.

Prin analogie cu notaţiunea reţelei lui $\overline{\Gamma}$, un triunghiu al reţelei Γ se notează prin simbolul care transformă triunghiul Δ în acel triunghiu. De unde rezultă, pentru triunghiurile alăturate de Δ, notaţiunile S, S^{-1}, T şi dacă V este o substituţiune care transformă triunghiul Δ în triunghiul V, cele trei triunghiuri alăturate se vor notà respectiv

$$SV,\ S^{-1}V,\ TV.$$

în care $S = AB,\quad S^{-1} = BA,\quad T = AC = CA.$

Corolar. Dacă $\tau = \xi + i\eta$ este un punct oarecare situat în triunghiul Δ, avem

$$-\frac{1}{2} \leqq \xi < \frac{1}{2},\quad \eta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De unde rezultă că putem înlocui un sistem de perioade $2\omega_1$, $2\omega_3$ printr'un sistem echivalent, astfel ca coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$ să fie $\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Acestor perioade corespunde inegalitatea

$$|q| = |e^{i\pi\tau}| \leqq e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

care asigură convergenţa cea mai repede a seriilor $\vartheta(v, q)$ (§ 225).

402. FUNCŢIUNEA MODULARĂ $J(\tau)$.

402. *Se numeşte, într'un mod general, funcţiune modulară, o funcţiune analitică de o variabilă, care se reproduce dacă aplicăm variabilei o substituţiune oarecare a grupului modular Γ, sau a unui subgrup al lui Γ, şi se schimbă pentru orice altă substituţiune lineară.*

Funcţiunea $\lambda(\tau)$ este cea dintâiu funcţiune modulară considerată, care a condus la funcţiuni analitice având *frontiere naturale.* Este evident că orice funcţiune raţională de λ este o funcţiune modulară, aparţinând grupului lui λ, sau unui grup modular conţinând pe cel dintâiu ca subgrup.

Să considerăm invariantul absolut

$$(1)\qquad J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2},$$

a cărui expresiune în funcțiune de λ este (11) (§ 100)

$$(2) \qquad J = \frac{4}{27} \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Membrul al doilea fiind o funcțiune rațională și simetrică, de gradul 6, în raport cu cele șase valori ce $\lambda(\tau)$ primește prin toate substituțiunile lui Γ, se reproduce când aplicăm lui τ o substituțiune oarecare a grupului Γ și *numai* pentru acestea; căci funcțiunea fiind de gradul 6 nu poate relua aceiași valoare decât pentru șase valori λ.

Funcțiunea $J(\tau)$ nu se poate dar reproduce decât în puncte echivalente; prin urmare în triunghiul **1**, precum și pe contur ea nu poate primi aceiași valoare decât o singură dată. In acest triunghiu, λ fiind diferit de 1 și tinzând către zero numai când τ tinde către infinit dealungul unei paralele la axa imaginară (Corolar, § 363) rezultă, în virtutea egalității (2), că funcțiunea $J(\tau)$ este olomorfă în triunghiul **1** și tinde către infinit în același timp cu τ.

§ 403 Să examinăm variațiunea funcțiunii dealungul conturului triunghiului **1**. Dealungul axei imaginare, λ fiind real și cuprins între 0 și 1, rezultă că, pe această axă, funcțiunea $J(\tau)$ este reală și prin urmare, în puncte simetrice în raport cu această axă, ea primește valori conjugate. De unde rezultă că pe paralelele la axa imaginară, duse prin punctele $\tau = \pm \frac{1}{2}$, $J(\tau)$ primește valori conjugate; însă punctele acestor paralele, simetrice în raport cu axa imaginară, sunt echivalente, în virtutea substituțiunilor $\tau' = \tau \pm 1$, prin urmare, în aceste puncte, valorile lui $J(\tau)$ sunt egale: ele nu pot fi dar decât reale.

Deasemenea, punctele cercului $|\tau| = 1$, cuprinse între punctele $\left(i, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$ și $\left(i, e^{\frac{i\pi}{3}}\right)$, simetrice în raport cu axa imaginară, fiind echivalente, în virtutea substituțiunii $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, rezultă că $J(\tau)$ este real dealungul acestor arce. Funcțiunea $J(\tau)$ este așà dar reală dealungul conturului triunghiului **1**.

Pentru a determinà variațiunea acestei funcțiuni dealungul conturului, este de ajuns să cunoaștem valorile ei în vârfurile triunghiului: i, $i\infty$, ε; căci, punctele acestui contur nefiind echivalente, între două puncte ale conturului, funcțiunea variază necontenit în același sens.

Referindu-ne la valoarea $\lambda(i\infty) = 0$ și la valorile

$$\lambda(i) = \frac{1}{2}, \quad \lambda(\varepsilon) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

[formulele (1), (3)] (§ 389), deducem, din egalitatea (2) tabloul de valori cari se corespund:

$$(3) \qquad \begin{array}{c|ccc} \tau & i\infty & i & \varepsilon \\ \hline J & \infty & 1 & 0 \end{array}.$$

De unde concluziunea: *dealungul laturii* $(i, i\infty)$, *funcţiunea* J *creşte necontenit dela* 1 *la* ∞ *şi dealungul arcului* (ε, i) *ea creşte necontenit dela* 0 *la* 1. Pe a doua latură rectilinie J este negativ, căci este real şi nu trece prin nici una din valorile ce primeşte pe celelalte două laturi. Aşà dar, când τ variază pe această laturi dela ε la $\varepsilon + i\infty$, J descreşte necontenit dela 0 la $-\infty$.

404. Din variaţiunea funcţiunii $J(\tau)$ dealungul triunghiului 1, rezultă că transformarea dintre acest triunghiu şi semiplanul pozitiv (J) este o *transformare conformă*. De asemenea, în virtutea simetriei, triunghiul A, simetric cu triunghiul 1 în raport cu axa imaginară, şi semiplanul negativ (J) se corespund punct cu punct şi transformarea dintre ele este o transformare conformă. Dublul triunghiului Δ, format din cele două triunghiuri considerate [domeniu fundamental al grupului Γ, (§ 401)] este un domeniu fundamental al funcţiunii $J(\tau)$ [1]). Aceleaşi concluziuni dacă înlocuim domeniul fundamental iniţial prin oricare altul. Axa reală (τ) este o *frontieră naturală* a funcţiunii $J(\tau)$ ca şi pentru funcţiunea $\lambda(\tau)$. Toate punctele acestei axe sunt puncte singulare ale funcţiunii.

405. Punctele $\tau = i$, $\tau = \varepsilon$ sunt puncte multiple ale funcţiunii $J(\tau)$. Cel dintâiu este punct dublu, fiind vârf comun a două triunghiuri ale reţelei lui Γ, cel de al doilea este punct triplu fiind vârf comun a trei triunghiuri. Punctele echivalente τ şi $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ coincid în punctul $\tau = i$. In domeniul acestui punct, avem dar forma

$$(4) \qquad J(\tau) - 1 = (\tau - 1)^2 P(\tau - 1), \qquad P(i) \neq 0.$$

Punctele

$$\tau, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau+1}, \quad \tau'' = -\frac{\tau+1}{\tau},$$

echivalente cu τ coincid în punctul $\tau = \varepsilon$. In domeniul acestui

---

[1]) Domeniu fundamental al grupului este o regiune conexă astfel că la orice punct al semiplanului pozitiv (τ) corespunde un punct echivalent în aceà regiune şi numai unul. Domeniu fundamental al funcţiunii este o regiune conexă în care funcţiunea primeşte orice valoare posibilă, fiecare o singură dată.

punct, avem forma

$$(5) \qquad J(\tau)=(\tau-\varepsilon)^3P(\tau-\varepsilon), \qquad P(\varepsilon)\neq 0.$$

Punctul ∞. Acest punct este echivalent cu orice punct real rațional, precum rezultă din expresiunea

$$\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)_{\tau=\infty}=\frac{\delta}{\beta},$$

care poate reprezintă orice număr rațional. Punctul ∞ este așà dar punct singular esențial. Când τ tinde către ∞ dealungul axei imaginare, J tinde către $+\infty$; iar dealungul ordonatelor $\xi=\mp\frac{1}{2}$, J tinde, precum am văzut mai sus, către $-\infty$.

406. Reprezintând prin λ una din rădăcinile ecuațiunii (2), (§ 402): cele șase rădăcini sunt determinate de substituțiunile (2) (§ 388); ele corespund celor șase clase de substituțiuni ale grupului modular Γ și formează un grup de șase substituțiuni lineare cari reproduc funcțiunea J, privită ca funcțiune de λ. Se poate descompune planul (λ) în șase regiuni astfel ca fiecare din ele și planul (J) să se corespundă punct cu punct. Acest rezultat se poate obține, de ex., determinând regiunile din planul (λ) corespunzătoare celor șase triunghiuri (τ) echivalente, relativ la grupul Γ, conținute în patrulaterul D (domeniul fundamental al grupului Γ_6), căci fiecare din aceste triunghiuri și planul (J) se corespund punct cu punct (§ 404). Se ajunge lesne la acest rezultat, dacă considerăm cele 12 triunghiuri cari compun patrulaterul D, echivalente, relativ la grupul amplificat $\overline{\Gamma}$, cari reunite două câte două formează cele șase triunghiuri menționate ale grupului Γ. Acestor 12 triunghiuri (τ) ale căror laturi sunt porțiuni din liniile de simetrie

$$(1) \quad \xi=0, \quad 2\xi+1=0, \quad \xi^2+\eta^2+2\xi=0, \quad \xi^2+\eta^2-1=0$$

corespund, în planul (λ), 12 triunghiuri determinate de liniile de simetrie

$$(2) \quad y=0, \quad x^2+y^2-2x=0, \quad x^2+y^2-1=0, \quad 2x-1=0 \quad (4)\ (\S\ 388).$$

Cele dintâi împart triunghiul T′ (jumătatea din stânga patrulaterului D) în șease triunghiuri echivalente relativ la grupul amplificat $\overline{\Gamma}$ (§ 400) și cele din urmă împart, în același număr de triunghiuri, *semiplanul negativ* (λ), care corespunde triunghiului T într'un mod conform (§ 364). Laturile triunghiurilor sunt porțiuni din liniile de simetrie considerate, cuprinse între punctele de

intersecțiune ale acestor linii; unghiurile sub cari ele se taie sunt

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}.$$ [1]

Triunghiului I din planul (τ) (fig. 82), limitat de liniile

$$\xi = 0, \quad \xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

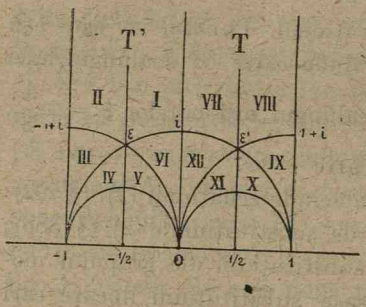

Fig. 82

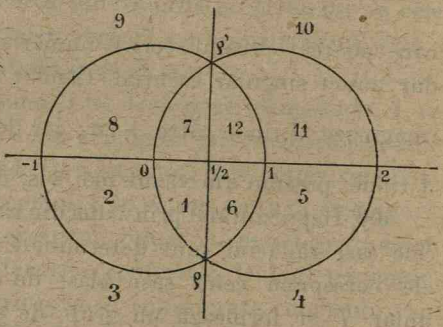

Fig. 83

corespunde, triunghiul limitat de liniile

$$y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad 2x = 1 \text{ (fig. 83)}$$

Corespondența este biunivocă. Vârfurile acestui triunghiu sunt (§ 389).

$$\lambda(i\infty) = 0, \quad \lambda(i) = \frac{1}{2}, \quad \varrho = \lambda(\varepsilon) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Triunghiului II simetric cu triunghiul I, în raport cu dreapta $\xi = -\frac{1}{2}$, corespunde triunghiul (2) simetric în raport cu latura $(0, \varrho)$, situată pe cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$; al treilea vârf este punctul $\lambda(-1 + i) = -1$ (§ 389).

Triunghiului III simetric cu triunghiul II, în raport cu latura $(\varepsilon, -1 + i)$, corespunde triunghiul simetric în raport cu latura $(\varrho, -1)$, situată pe cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$; al treilea vârf este $\lambda(-1 + it) = \infty$. Acest triunghiu se întinde la infinit, având laturile $(\varrho, -1)$, $(-1, -\infty)$, $(\varrho, -i\infty)$.

---

[1] Unghiurile triunghiurilor din rețeaua $\overline{\Gamma}$ sunt $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, o$. Vârfurile, cărora corespund cele dintâi două, sunt puncte ordinare; acestor unghiuri corespund, în planul (λ), unghiuri respectiv egale. Al treilea vârf fiind punct singular esențial al funcțiunii $\lambda(\tau)$, corespondența încetează de a fi conformă în domeniul acestui punct: unghiului o corespunde unghiul $\frac{\pi}{2}$.

Celorlalte trei triunghiuri IV, V, VI ale lui T' corespund triunghiurile (4), (5), (6) respectiv simetrice cu triunghiurile (3), (2), (1), în raport cu dreapta $2x=1$.

Din cele ce preced, ținând seamă de corespondența biunivocă dintre semiplanul pozitiv (J) și fiecare din triunghiurile I, III, V, precum și a semiplanului negativ cu triunghiurile II, IV, VI, rezultă aceiaș corespondență, dacă înlocuim triunghiurile (τ) cu triunghiurile corespunzătoare (λ).

Celor șease triunghiuri cuprinse în triunghiul T respectiv simetrice cu triunghiurile din T', în raport cu axa imaginară, corespund, în semiplanul pozitiv (λ), șease triunghiuri simetrice, în raport cu axa reală, cu cele șease triunghiuri din semiplanul negativ.

Reunind două câte două triunghiurile (λ), simetrice în raport cu axa reală, obținem planul (λ) descompus în șease regiuni continue, astfel că fiecare din ele și planul (J) se corespund într'un mod conform. Fiecare din aceste regiuni cuprinde dar una și numai una din rădăcinile ecuațiunii (2) (§ 402). Dacă una din aceste rădăcini este dată, se deduce, în virtutea corespondenții dintre τ și λ [(2), (3), (§ 308)] regiunea în care se găsește fiecare din celelalte rădăcini.

407. Funcțiunea J (τ) fiind reală pe liniile de simetrie ale grupului Γ și numai pe acelea, rezultă, în virtutea corespondenții biunivoce dintre aceste linii și liniile de simetrie (λ), că funcțiunea J(λ) este reală, în planul (λ), numai pe aceste linii. Vârfurile triunghiurlor

$$-1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \infty,\ \varrho,\ \varrho'$$

sunt puncte multiple ale funcțiunii J(λ), anume: punctele -1, $\frac{1}{2}$, 2 sunt zeruri duble ale diferenței $J-1$; punctele 0 și ∞ sunt poluri duble; punctele ϱ, ϱ' sunt zeruri triple ale lui J(λ). De unde rezultă expresiunea

$$J(\lambda)-1=A\,\frac{(\lambda+1)^2(2\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Coeficientul A se deduce comparând părțile principale ale lui J(λ), în domeniul $\lambda=\infty$, în această egalitate și în egalitatea (2) (§ 402). Se obține $A=\frac{1}{27}$. Avem așà dar egalitatea

$$J-1=\frac{1}{27}\,\frac{(\lambda+1)^2(2\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

408. ***Funcţiunea inversă*** $\tau(J)$. Din proprietăţile funcţiunii $J(\tau)$ rezultă proprietăţile următoare ale funcţiunii inverse $\tau(J)$:

1°. Unui punct dat J corespunde lui τ o infinitate de valori echivalente, reprezintate prin substituţiunea modulară

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}, \tag{1}$$

căci J nu se reproduce decât în puncte echivalente.

2°. Fie J_0 o valoare finită a lui J, diferită de 0 şi 1 şi fie τ_0 una din valorile corespunzătoare a lui τ; avem, în domeniul lui J_0, forma

$$\tau - \tau_0 = P(J - J_0), \tag{2}$$

în care $P(J_0) \neq 0$, în virtutea corespondenţei biunivoce dintre domeniile corespunzătoare (τ_0) şi (J_0).

3°. Dacă $J_0 = 1$, τ_0 este un vârf echivalent cu punctul $\tau = i$; avem

$$\tau - \tau_0 = (J-1)^{\frac{1}{2}} P(J-1), \qquad P(1) \neq 0, \tag{3}$$

căci vârfurile echivalente cu $\tau = i$ sunt puncte duble.

4°. Dacă $J_0 = 0$, τ_0 este un vârf echivalent cu punctul

$$\tau = \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

avem expresiunea

$$\tau - \tau_0 = J^{\frac{1}{3}} P(J), \qquad P(0) \neq 0, \tag{4}$$

punctele echivalente sunt puncte triple.

409. Să facem în planul (J), dealungul axei reale, tăietura $(1, -\infty)$. Planul astfel limitat este o suprafaţă simplu conexă în care funcţiunea $\tau(J)$, dedusă din egalitatea (2) prin prelungire analitică, nu are nici un punct singular, afară de punctul $J = \infty$. Această funcţiune este aşà dar o ramură de funcţiune analitică olomorfă în tot planul (J) limitat de această tăietură.

Considerând triunghiul iniţial al grupului Γ, recunoaştem că laturile acestui triunghiu, situate la stânga axei imaginare, corespund ţărmului superior al tăieturii şi laturile din dreapta corespund ţărmului inferior. Căci, unei rotaţiuni de 180° în jurul punctului $J = 1$, făcută în sensul pozitiv sau negativ, corespunde, în jurul punctului $\tau = i$, în virtutea egalităţii (3), o rotaţiune de 90°, în acelaş sens. Unei rotaţiuni de 180°, în jurul punctului $J = 0$, corespunde în virtutea egalităţii (4), în jurul punctului $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, o rotaţiune de 60°, amândouă rotaţiunile fiind în acelaş sens. Această

corespondență se aplică laturilor triunghiurilor echivalente cu cele ale triunghiului inițial. Punctul J rămâne în același triunghiu al rețelei Γ, pe cât timp τ nu străbate tăietura și trece dintr'un triunghiu într'un triunghiu vecin, în cazul contrar.

Funcțiunea $\tau(J)$ este așà dar o funcțiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele prin prelungire analitică, când punctul J străbate tăietura, într'un sens sau altul, un număr oarecare de ori. Fiecărei ramure corespunde un triunghiu determinat în rețeaua grupului Γ.

CAPITOLUL XXVIII.

TEOREMELE D-LUI PICARD.

410. *Teorema I. O funcțiune întreagă transcendentă primește orice valoare finită dată, exceptând poate una singură.*

Să presupunem că există două valori finite a, b pe cari funcțiunea întreagă $f(x)$ nu le poate primi. Putem dispune ca aceste constante să fie 0 și 1, aplicând transformarea

$$F(x)=\frac{f(x)-a}{b-a}.$$

Vom presupune dar că funcțiunea $f(x)$ nu poate deveni egală nici cu 0, nici cu 1. Să introducem funcțiunea modulară $J(\tau)$, punând

$$J(\tau)=f(x) \tag{1}$$

și să studiăm funcțiunea de x, definită de ecuațiunea

$$\varphi(x)=\tau(f(x)). \tag{2}$$

Pentru a fixà într'un mod complect această funcțiune, să ne închipuim că printre valorile în număr nelimitat ale lui τ, corespunzătoare unei valori x_0 a lui x, alegem una din ele; fie τ_0 acea valoare. Cu modul acesta, fixăm o ramură a funcțiunii $\tau(f(x))$, olomorfă în domeniul oricărui punct x în care $f(x)$ este diferit de 0 și 1 (§ 409). Prin ipoteză, funcțiunea $f(x)$ împlinește aceste condițiuni în tot planul (x), fără excepțiune; funcțiunea $\tau(f(x))$ este așàdar o funcțiune întreagă de x. De altă parte, din proprietățile funcțiunii $\tau(J)$, rezultă că punând

$$x=u+iv,\quad \varphi(x)=X(u,v)+iY(u,v)$$

u și v fiind variabile reale, Y păstrează un semn invariabil în tot

planul (x). Presupunând $Y > 0$, avem

$$\left| e^{i\varphi(x)} \right| = e^{-Y} < 1,$$

oricare ar fi valoarea lui x; ceeace nu este posibil decât dacă funcţiunea $\varphi(x)$ este constantă. La acelaş rezultat ajungem, dacă $Y < 0$; căci, în acest caz avem

$$\left| e^{-i\varphi(x)} \right| = e^{Y} < 1.$$

In ambele cazuri dar, $\varphi(x)$ fiind constantă, rezultă

$$f(x) = \text{constantă}. \qquad \text{q. e. d.}$$

411. *Teorema II. O funcţiune uniformă având un număr oarecare de poluri şi un singur punct singular esenţial $x=\infty$, primeşte orice valoare finită sau infinită, exceptând cel mult două valori finite.*

Să presupunem că funcţiunea meromorfă $f(x)$, cu unicul punct singular esenţial $x=\infty$, nu devine egală cu nici una din cantităţile finite şi distincte a, b, c; funcţiunea

$$F(x) = \frac{1}{f(x) - a}$$

are acelaş punct singular esenţial $x = \infty$ şi nu are poluri. $F(x)$ este aşà dar o funcţiune întreagă care nu primeşte valorile distincte

$$\frac{1}{b-a}, \quad \frac{1}{c-a}$$

şi prin urmare, în virtutea teoremei precedente, se reduce la o constantă. De unde aceiaş concluziune pentru $f(x)$.

Observare. Cele două teoreme precedente pot intrà una într'alta, prin enunţul următor: O funcţiune uniformă având punctul ∞ ca unicul punct singular esenţial, primeşte orice valoare, exceptând cel mult două valori, dintre cari una poate fi infinită. Dacă funcţiunea este întreagă, una din valorile pe care ea nu o poate primì fiind ∞, rămâne cel mult o valoare finită *excepţională*. Funcţiunea e^x nu devine infinită, nici nulă. Funcţiunea *sin x* nu devine infinită. Funcţiunea *tgx* nu primeşte valorile $\pm i$.

412. *Teorema III. (Teorema generală). O funcţiune uniformă $f(x)$, care admite un punct singular esenţial izolat x_0, primeşte, în domeniul acestui punct, o infinitate de ori, orice valoare, exceptând cel mult două valori, printre cari una poate fi ∞* [1]).

Să presupunem că $f(x)$ nu primeşte, în domeniul lui x_0, trei valori distincte a, b, c. Putem dispune ca aceste valori să fie 0, 1,

---

[1]) E. Picard. *Traité d'Analyse, t. III, deuxième édition, p. 365.*

∞. Dacă, de ex., $c=\infty$, funcţiunea

$$F(x)=\frac{f(x)-a}{b-a}$$

nu primeşte valorile 0, 1, ∞. Dacă cele trei valori sunt finite, funcţiunea

$$F(x)=\frac{c-a}{c-b}\,\frac{f(x)-b}{f(x)-a}$$

admite aceleaşi valori excepţionale. In ambele cazuri, funcţiunea transformată $F(x)$ are acelaş punct singular esenţial x_0.

Vom presupune dar că funcţiunea uniformă $f(x)$ are un punct singular esenţial izolat a şi că nu primeşte într'un cerc cu centrul în punctul a, nici una din valorile 0, 1, ∞.

Să introducem, ca şi în (§ 410), funcţiunea modulară $J(\tau)$ şi să punem

$$J(\tau)=f(x). \tag{1}$$

Funcţiunea inversă $\tau=F(J)$ devine o funcţiune de x

$$\tau=F(J)=F(f(x))=\varphi(x), \tag{2}$$

pe care o vom studiă în domeniul punctului a.

Când x descrie o curbă închisă în jurul lui a, fără a ieşi din domeniul acestui punct, $f(x)$ se reproduce; prin urmare şi funcţiunea $J(\tau)$. De unde rezultă (§ 408) că funcţiunea $\tau=\varphi(x)$ sau se reproduce, sau se schimbă într'una din substituţiunile modulare

$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}, \tag{3}$$

care poate fi *iperbolică*, *eliptică* sau *parabolică*. Vom examinà, în fiecare din aceste cazuri, forma analitică a funcţiunii (2).

1°. *Substituţiunea iperbolică*: $(\alpha+\delta)^2>4$.

Substituţiunea (3) are două puncte fixe reale p, q şi se poate pune sub forma

$$\frac{\tau'-p}{\tau'-q}=\mu\,\frac{\tau-p}{\tau-q}, \tag{4}$$

coeficientul μ fiind real, pozitiv şi diferit de 1 [1]). Raportul

$$\frac{\tau-p}{\tau-q}=\frac{\varphi(x)-p}{\varphi(x)-q}$$

reproducându-se multiplicat cu factorul μ, când x se învârteşte

[1]) I, p. 401.

în jurul lui a, se poate reprezintă prin expresiunea analitică

$$(5) \qquad \frac{\tau-p}{\tau-q}=(x-a)^{\lambda}\psi(x), \qquad e^{2i\pi\lambda}=\mu$$

$\psi(x)$ fiind funcţiune uniformă în domeniul (a). Această funcţiune nu are în domeniul considerat nici pol, nici nu se anulează; căci, dacă s'ar anulà, sau dacă ar aveà un pol, ar urmà ca, în aceste puncte, să avem respectiv $\tau = p$, $\tau = q$. Aceste egalităţi însă sunt imposibile; căci funcţiunea $f(x) = J(\tau)$ fiind, prin ipoteză, diferită de 0, 1, ∞, partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ este pozitivă. Funcţiunea $\psi(x)$ este aşà dar olomorfă într'o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrul în a, raza cercului interior fiind oricât de mică voim, şi nu se anulează în această coroană. In virtutea acestei proprietăţi, ea se poate pune sub forma [1])

$$(6) \qquad \psi(x)=e^{Q(x)},$$

$Q(x)$ fiind o funcţiune uniformă în domeniul (a) neavând, în acest domeniu, alt punct singular posibil decât punctul a. Putem dar scrie

$$(7) \qquad \frac{\tau-p}{\tau-q}=e^{\lambda\log(x-a)+Q(x)}=e^{U+iV},$$

U şi V fiind funcţiuni reale de ξ, η, $(x = \xi + i\eta)$. Coeficientul lui i în membrul întâiu având un semn invariabil, urmează ca V să fie cuprins între doi multipli consecutivi ai lui π, prin urmare între două limite finite. Punând în egalitatea precedentă

$$(8) \qquad 2i\pi\lambda=\mu=k,$$

logaritmul având valoarea sa aritmetică, rezultă egalitatea

$$e^{\log(x-a)+\frac{2i\pi}{k}Q(x)}=e^{-\frac{2\pi}{k}V+\frac{2i\pi}{k}U},$$

sau

$$(9) \qquad (x-a)\,e^{\frac{2i\pi}{k}Q(x)}=e^{-\frac{2\pi}{k}V}\cdot e^{\frac{2i\pi}{k}U}.$$

Această egalitate este imposibilă, căci membrul întâi tinde către zero când x tinde către a într'un mod oarecare, pe când valoarea absolută $e^{-\frac{2\pi}{k}V}$ a membrului al doilea este cuprinsă între două limite determinate diferite de zero. De unde rezultă că substituţiunea (3) *nu poate fi iperbolică.*

2°. *Substituţiunea eliptică:* $(\alpha+\delta)^2<4$.

---

[1]) I, p. 353.

Punctul fix al substituțiunii (3), situat în semiplanul pozitiv, este echivalent cu unul din punctele multiple $\tau=i$, $\tau=\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ale funcțiunii $J(\tau)$ (§ 405). Printr'o substituțiune modulară convenabilă putem face ca acel punct fix să coincidă respectiv cu $\tau=i$ sau cu $\tau=\varepsilon$.

In domeniul lui $\tau = i$, avem (§ 408)

$$\tau-i=(J-1)^{\frac{1}{2}}P(J-1),\quad P(o)\neq 0;$$

prin urmare

$$(10)\qquad \tau-i=[f(x)-1]^{\frac{1}{2}}P[f(x)-1].$$

Funcțiunea $f(x)$ fiind uniformă în domeniul (a), putem scrie

$$(11)\qquad [f(x)-1]^{\frac{1}{2}}P[f(x)-1]=(x-a^{\frac{1}{2}})\psi(x),$$

$\psi(x)$ fiind funcțiune uniformă. Această egalitate este imposibilă, căci nici unul din factorii membrului întâi nu se anulează în domeniul (a) ~ primul factor, în virtutea ipotezei $f(x)\neq 1$, cel de al doilea, în virtutea inegalității $P(0)\neq 0$ ~ pe când membrul al doilea tinde către zero, când x se apropie de a, într'un mod oarecare.

In domeniul $\tau=\varepsilon$, avem (§ 408)

$$(12)\qquad \tau-\varepsilon=J^{\frac{1}{3}}P(J),\quad P(0)\neq 0;$$

prin urmare

$$(13)\qquad \tau-\varepsilon=[f(x)]^{\frac{1}{3}}P[f(x)]=(x-a)^{\frac{1}{3}}\psi(x),$$

$\psi(x)$ funcțiune uniformă în domeniul (a). Pentru un motiv analog cu cel din cazul $\tau = i$, egalitatea (13) este imposibilă. Conchidem că substituțiunea (3) *nu poate fi eliptică.*

3°. *Substituțiunea parabolică*: $(\alpha+\delta)^2=4$.

Aplicând lui τ o substituțiune modulară convenabilă, putem aduce substituțiunea dată la forma

$$(14)\qquad \tau'=\tau+1.$$

Pentru ca funcțiunea

$$\tau=F(J)=F[f(x)]=\varphi(x)$$

să se schimbe în $\tau+1$ când x descrie un cerc în jurul lui a, fără a ieși din domeniul acestui punct, este necesar ca $\varphi(x)$ să fie de forma

$$(15)\qquad \tau(x)=\varphi(x)=\frac{1}{2i\pi}\log(x-a)+\psi(x),$$

$\psi(x)$ funcțiune uniformă în domeniul (a); de unde

$$(16)\qquad e^{2i\pi\tau(x)}=(x-a)\,e^{2i\pi\psi(x)}$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

Această egalitate arată că $\psi(x)$ este funcțiune olomorfă în domeniul (a); căci un punct singular al lui $\psi(x)$ este punct singular esențial pentru funcțiunea exponențială, prin urmare valoarea absolută a membrului al doilea ar puteà devenì oricât de mare voim, pe când valoarea absolută a membrului întâi este mai mică decât 1.

Fie $x - a = r e^{i\theta}$; de unde

$$\frac{1}{2i\pi}\log(x-a) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{i}{2\pi}\log\frac{1}{r}.$$

Ducând această expresiune în egalitatea (15), avem

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{i}{2\pi}\log\frac{1}{r} + \psi(x). \tag{17}$$

Coeficientul lui i din membrul al doilea tinzând către $+\infty$, când r tinde către zero, iar funcțiunea $\psi(x)$ rămânând finită în vecinătatea punctului a, rezultă că partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ tinde către $+\infty$ când x se apropie de a într'un mod oarecare. In acest caz, J tinde către infinit; prin urmare $f(x)$ tinde către infinit când x se apropie de a, într'un mod oarecare. Punctul *a ar fi dar un pol al funcțiunii* $f(x)$ *și nu punct singular esențial*; ceeace este contra ipotezei.

4°. *Substituțiunea identică*: $\tau' = \tau$.

In acest caz, funcțiunea

$$\tau(x) = \mathrm{F}(\mathrm{J}) = \mathrm{F}[f(x)] = \varphi(x) \tag{17}$$

este uniformă în domeniul (a); ea este olomorfă. In adevăr, dacă a ar fi punct singular esențial, $\varphi(x)$ s'ar puteà apropià, în acest domeniu, de orice valoare voim, ceeace este incompatibil cu membrul întâiu în care coeficientul lui i este pozitiv. Dacă a ar fi pol de un ordin n

$$\varphi(x) = (x-a)^{-n}\,\mathrm{P}(x-a),$$

coeficientul lui i nu ar păstrà un semn invariabil când x fiind destul de aproape de a se învârtește în jurul acestui punct: aceiaș incompatibilitate. Așà dar funcțiunea $\varphi(x)$ tinde către o valoare finită $\varphi(a)$, având coeficientul lui i pozitiv. Acestei valori corespunde, pentru funcțiunea

$$\mathrm{J}(\tau) = f(x),$$

o valoare determinată, oricare ar fi drumul urmat de x, când se apropie de a. *Punctul* $x = a$ *ar fi dar punct ordinar al funcțiunii* $f(x)$; ceeace este contra ipotezei.

Din toate incompatibilităţile constatate mai sus, rezultă că, dacă a este un punct singular esenţial izolat al funcţiunii $f(x)$, este imposibil ca această funcţiune să nu primească, în domeniul (a), cel puţin una din valorile 0, 1, ∞. In mod general, este imposibil ca, în acest domeniu, ea să nu poată devenì, o *infinitate de ori* egală cu o constantă oarecare C, exceptând cel mult două valori ale constantei. Căci, dacă rădăcinile ecuaţiunii $f(x) = C$ ar fi în număr limitat, ar există un număr $r > 0$, astfel ca, în domeniul $|x - a| < r$, $f(x)$ să nu poată primì valoarea C, diferită de una din valorile excepţionale posibile. Punctul a n'ar fi punct singular esenţial.

q. e. d.

413. *Exemple.* 1°. Ecuaţiunea

$$e^{\frac{1}{x}} - a = 0$$

are, în domeniul punctului $x = 0$, o infinitate de rădăcini pentru orice valoare a lui a, exceptând $a = o$, $a = \infty$. Aceste rădăcini sunt date de egalitatea

$$x = \frac{1}{\log a + 2 n i \pi},$$

în care n primeşte valori întregi pozitive şi negative arbitrar de mari, log a fiind *una* din valorile logaritmului lui a.

Valorile excepţionale $a = 0$, $a = \infty$ sunt *valori limite* către cari tinde funcţiunea când x, fiind pe axa reală, se apropie de zero respectiv din partea pozitivă sau negativă.

2°. Ecuaţiunea

$$tg \frac{1}{x} = i \frac{1 - e^{\frac{2i}{x}}}{1 + e^{\frac{2i}{x}}} = a$$

are, în domeniul aceluiaş punct $x = 0$, o infinitate de rădăcini, pentru orice valoare a, exceptând valorile $a = \pm i$. Aceste valori sunt valori limite ale funcţiunii când x, fiind pe axa imaginară, se apropie de zero respectiv pe semiaxa negativă sau pozitivă.

NOTA I.

DESPRE FUNCȚIUNILE UNIFORME CARI ADMIT O TEOREMĂ DE ADIȚIUNE ALGEBRICĂ.

Funcțiunile uniforme de o variabilă u despre cari știm că posedă o teoremă de adițiune algebrică sunt: funcțiunile raționale de u; funcțiunile raționale de exponențiala e^{au}, a fiind o constantă oarecare; funcțiunile eliptice.

Acestea sunt singurile funcțiuni uniforme de o variabilă cari posedă o teoremă de adițiune algebrică. Această teoremă, datorită lui Weierstrass, este cuprinsă într'o teoremă mai generală, în care se consideră funcțiuni analitice multiforme [1]).

Fie $f(u)$ o funcțiune analitică uniformă satisfăcând o ecuațiune algebrică

$$(1) \qquad F[f(u), f(v), f(u+v)] = o,$$

oricare ar fi valorile argumentelor u și v. *In virtutea acestei ecuațiuni, funcțiunea $f(u)$ nu poate admite punct singular esențial la distanță finită.* In adevăr, să presupunem că $f(u)$ are, la distanță finită, un punct singular esențial a, izolat sau limită a unui număr infinit de puncte singulare esențiale. Funcțiunea $f(u)$ s'ar apropia în domeniul acestui punct, oricât de mult voim, de o infinitate de valori date; valorile corespunzătoare ale funcțiunii $f(u+v)$, *privită ca rădăcină a ecuațiunii* (1), ar diferi dar, în vecinătatea lui $u = a$, oricât de puțin voim (în virtutea continuității rădăcinilor unei ecuațiuni algebrice în funcțiune de coeficienții ecuațiunii) de o infinitate de valori date, oricare ar fi valoarea lui v. Sau, ceeace este tot una, funcțiunea analitică uniformă $f(u)$ ar primi, în domeniul punctului $u = a + v$, valori diferind, oricât de puțin voim, de o infinitate de valori date, oricare ar fi poziționea punctului v în plan, adică în tot planul. Ceeace este absurd. Așà dar, funcțiunea

[1]) Phragmen, *Acta Mathematica*, t. VII, p. 35. Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di variabile complessa*, p. 292.

$f(u)$ nu poate admite alt punct singular esențial, dacă admite unul, decât punctul $u = \infty$.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei.

1°. Dacă $u = \infty$ nu este punct singular esențial, funcțiunea $f(u)$, neavând în tot planul, inclusiv punctul ∞, nici un punct singular esențial, este o funcțiune rațională.

2°. Să presupunem că punctul $u = \infty$ este singular esențial. Vom demonstrà că $f(u)$ este funcțiune periodică.

In adevăr, în virtutea teoremei generale a d-lui Picard, funcțiunea $f(u)$ primește, în domeniul punctului singular esențial $u = \infty$, o infinitate de ori, aceeaș valoare oarecare, exceptând cel mult două valori. Există dar în planul (u) o infinitate de puncte în cari $f(u)$ primește aceeaș valoare. Fie m gradul ecuațiunii (1) în raport cu $f(u + \varphi)$ și

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m+1} \tag{2}$$

$m + 1$ puncte în care $f(u)$ reia aceeaș valoare pe care o reprezintăm prin a. Ecuațiunea (1) în care înlocuim φ prin valorile (2) și punem $x = f(u + \varphi)$, adică ecuațiunea

$$F[f(u), a, x] = o \tag{3}$$

va admite dar, pentru x, rădăcinile

$$x = f(u + \varphi_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, m + 1), \tag{4}$$

oricare ar fi valoarea lui u; prin urmare două cel puțin din aceste rădăcini sunt egale, *oricare ar fi punctul* u. Fie

$$f(u + \varphi_1) = f(u + \varphi_2);$$

de unde punând $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\omega$, avem egalitatea

$$f(u + 2\omega) = f(u), \tag{5}$$

oricare ar fi punctul u. *Funcțiunea* $f(u)$ *este așà dar periodică, având perioada* 2ω.

Presupunând că 2ω este o perioadă primitivă a funcțiunii $f(u)$ — în cazul contrar înlocuim perioada 2ω prin cel mai mic submultiplu al său —, să punem

$$x = e^{\frac{i\pi u}{\omega}} \tag{6}$$

și fie

$$f(u) = \varphi(x). \tag{7}$$

Funcțiunea $\varphi(x)$ este o funcțiune analitică uniformă în tot planul (x), care nu poate aveà alte singularități esențiale decât punctele cari corespund lui $u = \infty$, adică, în virtutea substituțiunii (6),

$x = o$ şi $x = \infty$. Dacă aceste puncte nu sunt puncte singulare esenţiale, funcţiunea $\varphi(x)$ este raţională şi prin urmare

$$f(x) = f^{ne} \text{ raţ. } (e^{\frac{i\pi u}{\omega}}). \tag{8}$$

3°. Să presupunem că punctele $x = o$ şi $x = \infty$ sunt puncte singulare esenţiale ale funcţiunii $\varphi(x)$ şi fie

$$x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \tag{9}$$

$m + 1$ puncte distincte în cari $\varphi(x)$ reia aceeaş valoare. Acestor puncte corespund, în virtutea substituţiunii (6), $m + 1$ puncte

$$u_1, u_2, \ldots, u_{m+1} \tag{10}$$

incongruente în raport cu 2ω, în cari funcţiunea $f(u)$ reia aceeaş valoare. De unde se conchide, ca şi în cazul 2°, că printre punctele (10) există cel puţin două a căror diferenţă este o perioadă $2\omega'$. Această perioadă este, în virtutea incongruenţii (mod. 2ω) a punctelor (10), diferită de un multiplu al lui 2ω şi prin urmare, 2ω fiind o perioadă primitivă, raportul său către 2ω este imaginar (§ 116). Funcţiunea $f(u)$ având două perioade distincte şi neavând punct singular esenţial la distanţă finită, este o funcţiune eliptică de u.

q. e. d.

NOTA II.

DESPRE TRANSFORMAREA FUNCŢIUNII MODULARE $J(\tau)$ PRINTR'O SUBSTITUŢIUNE DE UN GRAD > 1.

Să presupunem că, în loc de o transformare de gradul întâiu, aplicăm perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$ o transformare de gradul n, ceeace revine a aplică raportului $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ o transformare de forma

$$t = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \tag{1}$$

a, b, c, d fiind numere întregi al căror determinant

$$ad - bc = n > 1. \tag{2}$$

Se pune întrebarea: ce relaţiune poate există între funcţiunile $J(t)$ şi $J(\tau)$?

Pentru a răspunde la această întrebare, să examinăm de câte valori este susceptibilă funcţiunea $J(t)$, când aplicăm lui τ o substituţiune modulară

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{3}$$

adică o substituţiune prin care $J(\tau)$ se reproduce.

Fie

$$(4) \qquad t' = \frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}, \qquad a'd' - b'c' = n$$

o transformare de acelaş ordin ca transformarea (1).

Pentru a avea egalitatea

$$J(t') = J(t)$$

este necesar şi suficient ca punctele t şi t' să fie echivalente relativ la grupul Γ, adică să avem

$$(5) \qquad t' = \frac{\gamma + \delta t}{\alpha + \beta t}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Putem presupune transformarea perioadelor adusă la forma normală (9) (§ 308)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & o \\ \varrho & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix}$$

şi să ne mărginim la cazul când n este un număr prim (§ 311).

Să considerăm dar funcţiunea

$$(6) \qquad J' = J\left(\frac{\varrho + \frac{n}{\sigma}\tau}{\sigma}\right),$$

ϱ fiind un număr întreg oarecare. Această funcţiune se reproduce dacă mărim ϱ cu un multiplu pozitiv sau negativ al lui σ; este dar de ajuns a da lui ϱ valorile $o, 1, \ldots, \sigma - 1$.

Numărul n fiind prim, valorile lui σ pot fi 1 şi n. Lui $\sigma = 1$ corespunde valoarea unică $J(n\tau)$.

Lui $\sigma = n$ corespund valorile $J\left(\frac{\varrho + \tau}{n}\right)$, $\varrho = o, 1, \ldots, n - 1$.

Unei valori $J(\tau)$ corespund dar $n + 1$ valori pentru $J(t)$:

$$(7) \qquad J(n\tau), J\left(\frac{\tau}{n}\right), J\left(\frac{\tau+1}{n}\right), \ldots, J\left(\frac{\tau+n-1}{n}\right).$$

Aceste valori sunt în genere distincte. In adevăr, pentru ca egalitatea

$$J(n\tau) = J\left(\frac{\tau + \varrho}{n}\right), \qquad o \leqq \varrho < n$$

să fie posibilă trebuie ca punctele $n\tau$ şi $\frac{\tau + \varrho}{n}$ să fie echivalente,

adică să avem

$$(8) \qquad \frac{\tau+\varrho}{n} = \frac{\gamma+\delta(n\,\tau)}{\alpha+\beta\,(n\,\tau)}.$$

Pentru ca această egalitate să poată există este necesar ca β să fie nul, prin urmare $\alpha = \delta = 1$; aşà dar

$$\frac{\tau+\varrho}{n} = \gamma + n\,\tau,$$

egalitate imposibilă pentru $n > 1$. In acelaş mod se recunoaşte imposibilitatea egalităţii

$$J\left(\frac{\tau+\varrho}{n}\right) = J\left(\frac{\tau+\varrho'}{n}\right), \quad \varrho \not\equiv \varrho' \pmod{n}.$$

Cele $n+1$ valori (7) se reproduc, în totalitatea lor, dacă aplicăm lui τ o substituţiune modulară oarecare.

Să aplicăm substituţiunile generatoare S şi T.

Substituţiunea S) $\tau' = \tau + 1$ reproduce funcţiunea $J\,(n\,\tau)$ şi permută pe cele n următoare.

Substituţiunea T) $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ dă transformările

$$J\left(n\,\tau\right) = J\left(-\frac{n}{\tau}\right) = J\left(\frac{\tau}{n}\right),$$

$$J\left(\frac{\tau}{n}\right) = J\left(-\frac{1}{n\tau}\right) = J\,(n\tau).$$

Această substituţiune permută dar între ele valorile $J(n\,\tau)$, $J\left(\frac{\tau}{n}\right)$. Aplicând lui $J\,(n\,\tau)$ substituţiunea T, urmată de o putere S^k a substituţiunei S, obţinem valoarea $J\left(\frac{\tau+k}{n}\right)$. O substituţiune modulară oarecare fiind un produs al substituţiunilor S şi T (§ 392), propoziţiunea enunţată mai sus este justificată.

Din cele ce preced rezultă că funcţiunea $J'\,(\tau) = J\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$, *transformata lui $J\,(\tau)$, printr'o substituţiune de gradul n, n fiind un număr prim, are $n+1$ valori diferite corespunzătoare unei valori $J\,(\tau)$.* Aceste valori nu pot decât să se permute între ele când J descrie o curbă închisă în planul său; căci unui drum închis descris de J corespunde o substituţiune modulară pentru τ şi prin urmare o permutare între valorile (7). Funcţiunea $J\,(\tau)$ fiind uniformă în semiplanul pozitiv (τ) şi nedevenind infinită decât în punctul $\tau = \infty$ şi în punctele echivalente, cari corespund valorilor reale

raţionale ale lui τ (§ 405), aceleaşi proprietăţi aparţin funcţiunii $J'(\tau)$.

Din cele ce preced rezultă că J', privit ca funcţiune de J, este o funcţiune analitică multiformă cu un număr limitat de ramuri, care nu devine infinită decât în punctul $J = \infty$. De unde se conchide că J' satisface o ecuaţiune algebrică de forma

$$J'^{n+1} + A_1 J'^n + \ldots + A_n = o, \tag{9}$$

ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni raţionale şi întregi de J (§ 31, 32). Această ecuaţiune se numeşte *ecuaţiunea modulară* a funcţiunii $J(\tau)$. Nu ne ocupăm acì de formarea acestei ecuaţiuni [1]).

NOTA III.

MULTIPLICAŢIUNEA COMPLEXĂ.

Dacă m este un număr întreg, avem

$$p(mu \mid \omega_1, \omega_3) = R[p(u \mid \omega_1, \omega_3)], \tag{1}$$

membrul al doilea fiind o funcţiune raţională de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, oricari ar fi perioadele primitive $2\omega_1$, $2\omega_3$. Se pune întrebarea dacă există o asemenea relaţiune când multiplicatorul m nu este întreg.

Relaţiunea (1) se poate scrie

$$\frac{1}{m^2} p\left(u \mid \frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right) = R\left(p(u \mid \omega_1, \omega_3)\right). \tag{2}$$

Pentru ca $p\left(u \mid \frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right)$ să fie funcţiune raţională de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ este, conform teoriei transformării raţionale (§ 305), necesar şi suficient ca între perioadele acestor două funcţiuni să avem egalităţile

$$\omega_1 = \alpha \frac{\omega_1}{m} + \beta \frac{\omega_3}{m}, \quad \omega_3 = \gamma \frac{\omega_1}{m} + \delta \frac{\omega_3}{m},$$

sau

$$m\omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \quad m\omega_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3, \tag{3}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fiind numere întregi, al căror determinant $n = \alpha\delta - \beta\gamma$

---

[1]) Se poate vedea L. Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Fuzioni di variabile complessa e delle Funzioni ellitiche*, p. 440.

reprezintă gradul transformării, adică gradul funcțiunii raționale este n. Ne putem mărginì la cazul când n este un număr prim (§ 311).

Două cazuri sunt de considerat:

I. Ecuațiunile (3) sunt satisfăcute oricari ar fi ω_1, ω_3; de unde

$$\alpha = \delta = m, \quad \beta = \gamma = o.$$

Multiplicatorul m este un număr întreg; ceeace este cazul multiplicațiunii ordinare.

II. Ecuațiunile (3) nu sunt identități. Punând $\omega_3 = \omega_1 \tau$, avem ecuațiunile

$$m = \alpha + \beta\tau, \quad m\tau = \gamma + \delta\tau. \tag{4}$$

Eliminând m între aceste ecuațiuni, obținem

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0. \tag{5}$$

Raportul τ al perioadelor fiind imaginar, trebuie să avem inegalitatea

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma < 0. \tag{6}$$

Dintre cele două rădăcini ale ecuațiunii (5) luăm, pentru τ, valoarea a cărei parte imaginară este pozitivă. Acestei valori corespund, pentru m, expresiunile

$$m = \alpha + \beta\tau = \delta + \frac{\gamma}{\tau}, \tag{7}$$

din cari rezultă că numerele β și γ trebuie să fie diferite de zero. Așà dar, dacă multiplicatorul m nu este întreg, relațiunea (1) nu poate există decât dacă m este un număr complex. Se zice, în acest caz, că *pu* admite o *multiplicațiune complexă*.

Din cele ce preced conchidem că *pu nu poate admite o multiplicațiune complexă decât dacă* τ *este rădăcina unei ecuațiuni de gradul al doilea cu coeficienți întregi având rădăcinile imaginare.*

Viceversa. Să presupunem că τ satisface o ecuațiune de gradul al doilea cu coeficienți întregi

$$a\tau^2 + 2b\tau + c = 0, \tag{8}$$

al cărei discriminant satisface inegalitatea

$$D = ac - b^2 > 0. \tag{9}$$

Coeficienții a și c, fiind de acelaș semn, pot fi presupuși pozitivi și a, b, c fără divizor comun.

Pentru a determină multiplicaţiunile complexe ce $p\,u$ poate admite, trebuie să identificăm ecuaţiunea (8) cu ecuaţiunea (5). Vom considerà două speţe de ecuaţiuni (8): de speţa I sau de speţa II, după cum numerele a, $2\,b$, c sunt prime între ele, sau au ca divizor comun numărul 2. In acest din urmă caz, a şi c sunt numere pare şi b număr impar; de unde rezultă, pentru discriminantul (9), forma

$$(10) \qquad D = 4k - 1, \quad k \text{ număr întreg} > 0.$$

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa I, punem

$$(11) \qquad \beta = a\varrho, \quad \alpha - \delta = 2b\varrho, \quad -\gamma = c\varrho, \quad \alpha + \delta = 2\varrho';$$

de unde

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha = \varrho' + b\varrho, \quad \delta = \varrho' - b\varrho, \\ n = \alpha\delta - \beta\gamma = \varrho'^2 + D\varrho^2, \\ \tau = \dfrac{-b + i\sqrt{D}}{a}, \quad m = \alpha + \beta\tau = \varrho' + i\varrho\sqrt{D} \end{cases}$$

Numerele $a, 2\,b$ şi c fiind prime între el, pentru ca $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ să fie numere întregi, trebuie ca ϱ şi ϱ' să fie întregi.

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa II (a şi c pare, b impar), punem

$$(13) \qquad \beta = \frac{a}{2}\varrho, \quad \alpha - \delta = b\varrho, \quad -\gamma = c\varrho, \quad \alpha + \delta = 2\varrho'$$

unde

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\varrho' + b\varrho), \quad \delta = \frac{1}{2}(\varrho' - b\varrho), \\ 4n = \varrho'^2 + D\varrho^2 \\ \tau = \dfrac{-b + i\sqrt{D}}{a}, \quad m = \alpha + \beta\tau = \dfrac{\varrho' + i\varrho\sqrt{D}}{2}. \end{cases}$$

Numerele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vor fi întregi dacă ϱ şi ϱ' sunt numere întregi şi de aceeaş paritate.

Aşà dar, condiţiunea enunţată mai sus ca necesară pentru ca pu să admită o multiplicaţiune complexă este şi suficientă.

Numerele ϱ şi ϱ' putând primì orice valori întregi, cu restricţiunea de a fi de aceeaş paritate în cazul formulelor (13) şi (14), rezultă că dacă funcţiunea $p\,u$ admite o multiplicaţiune complexă, ea admite o infinitate de multiplicatori complexi. Nu se presupune $\varrho = 0$; căci lui $\varrho = 0$ corespund, în virtutea egalităţilor (11) şi (12), valorile $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta = \varrho' = m$: cazul multiplicaţiunei ordinare.

Dintre valorile lui m, cea mai mică în valoare absolută, pe care o reprezintăm prin μ, se obţine, în cazul când ecuaţiunea (8) este de speţa I, făcând $\varrho' = 0$, $\varrho = \pm 1$; iar dacă această ecuaţiune este de speţa II, făcând $\varrho = \pm 1$, $\varrho' = \pm 1$. Ducând aceste valori în egalităţile (12) şi (14), obţinem respectiv

$$n = \mathrm{D}, \quad \mu = i\sqrt{n} \tag{15}$$

$$4n = \mathrm{D} + 1^{1}), \quad \mu = \frac{\pm 1 + i\sqrt{4n-1}}{2}^{2}) \tag{16}$$

Expresiunea generală a multiplicatorului complex m este dar în ambele cazuri $m = \varrho' + \varrho\,\mu$.

Să considerăm cazul $n = 1$. Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa I, avem

$$\mu = i,$$

$$a\,c - b^2 = 1; \quad a = c = 1, \quad b = 0,$$

$$\tau^2 + 1 = 0, \quad \tau = i.$$

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa II, avem

$$\mu = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon,\ \varepsilon^2; \qquad \varepsilon = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$a\,c - b^2 = 3; \qquad a = c = 2, \qquad b = \pm 1,$$

$$2\tau^2 \pm 2\tau + 2 = 0, \qquad \tau = \varepsilon,\ \varepsilon^2.$$

Valorilor $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = i$, ε (sau ε^2) corespund respectiv valorile invarianţilor $g_3 = 0$. $g_2 = 0$ (§ 284, 286). Regăsim transformările

$$p\,(i\,u;\ g_2,\ 0) = -\,p\,(u;\ g_2,\ 0),$$

$$p\,(\varepsilon\,u;\ 0,\ g_3) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,p\,(u;\ 0,\ g_3).$$

NOTA IV.

Seria $\sum_{0}^{\infty} x^{n^2}$ *nu se prelungeşte în afară din cercul său de convergenţă* $|x| = 1$.

---

[1]) D este în cauzul considerat de forma $4k-1$ (formula 10).

[2]) Este inutil de considerat, pentru μ, valori egale şi de semne contrarii, în virtutea egalităţii $\mathrm{p}(\pm\mu u) = \mathrm{p}(\mu u)$.

Această serie coincide cu funcţiunea ((3), § 225)

$$\frac{1}{2}\Big(1 + \vartheta_3\,(0,\, q)\Big),$$

în care înlocuim q prin x. Ea a fost primul exemplu, dat de Weierstrass, al unei serii care nu se prelungeşte în afară din cercul său de convergenţă [1]). Avem ((7), § 231).

$$(1)\qquad \sqrt{\frac{2\,\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \vartheta_3\,(0, q) = 1 + 2\sum_1^{\infty}\Big(1 + q^{n^2}\Big), \quad q = e^{i\pi\tau}$$

Dacă aplicăm perioadelor $(2\,\omega_1,\ 2\,\omega_3)$ transformarea lineară

$$(2)\qquad \omega_1' = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_3,\ \ \omega_3' = \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_3,\ \ \ \alpha\,\delta - \beta\gamma = 1$$

ai cărei coeficienţi satisfac congruenţele

$$(3)\qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2),$$

cantităţile e_1 şi e_3 nu se schimbă şi putem scrie

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{2\,\omega_1'}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \vartheta_3\,(0, q'), \quad q' = e^{i\pi\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}}.$$

De unde

$$(5)\qquad \vartheta_3\,(0, q') = \sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\,\vartheta_3\,(0, q) = \sqrt{\alpha + \beta\tau}\,\vartheta_3\,(0, q).$$

Să punem $\tau = it$ şi să facem $t = +\infty$; rezultă

$$(6)\qquad \lim_{t=+\infty} q = 0, \quad \lim_{t=+\infty} q' = e^{i\pi\frac{\delta}{\beta}}.$$

Ducând aceste valori în egalitatea (5), în care punem $q' = x$, conchidem că suma

$$\left|1 + 2\sum_1^{\infty} x^{n^2}\right|$$

tinde către $+\infty$ când x, a cărui valoare absolută este < 1, tinde către punctul

$$e^{i\pi\frac{\delta}{\beta}}.$$

Acest punct este aşà dar un punct singular [2]). Insă oricare, ar fi punctul

$$x_0 = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\,\pi$$

---

[1]) K. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre* pag. 95; Mathematische Werke, II Bd, pag. 221.

[2]) I. p. 111.

pe cercul $|x| = 1$, putem determinà numerele α, β, γ, δ astfel ca inegalitatea

$$\left| \theta - \pi \frac{\delta}{\beta} \right| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. In domeniul oricărui punct al cercului, oricât de mic ar fi acel domeniu, se găsesc dar puncte singulare: *tot cercul este așà dar o linie de puncte singulare și seria nu se poate prelungì în afară din acest cerc.*

q. e. d.