

256708 (M)
256709
EDITURA CASEI ȘCOALELOR

Inv. A.19.783



LECȚIUNI DE TEORIA FUNCȚIUNILOR

PARTEA I

CURS PROFESAT
LA FACULTATEA
DE ȘTIINȚE
DIN BUCUREȘTI

DE

DAVID EMMANUEL

Profesor la Facultatea de Științe din București



25689
CULTURA
NAȚIONALĂ

BIBLIOTECA UNIVERSITARA
BUCURESTI
COTA 61308

PC24/03

B.C.U. Bucuresti



C59689

PREFAȚĂ

Lecțiunile ce apar în această edițiune au fost, în parte, autografiate, sub îngrijirea elevilor mei, pentru prima dată în anul 1904. Mai târziu, în 1909, ele au fost reeditate în mod mai complet, iar pentru a treia oară, cu puține modificări în anul școlar 1921—22.

Lecțiunile conținute în acest volum sunt cele din ultima edițiune, corectată, în care s'au făcut oarecari modificări și puține adaose. Ele constituie partea I a cursului ce predau la Facultatea noastră de Științe. Obiectul lor este studiul principiilor generale ale funcțiilor de variabilă complexă.

Relativ la metoda ce am urmat, voi menționa ceea ce urmează:

Primele lecțiuni consistă într-o revedere a câtorva proprietăți fundamentale relative la funcțiunile de variabile reale, proprietăți esențiale în studiul funcțiunilor în genere. După o expunere foarte sumară a unor proprietăți ale grămezilor de puncte, urmează introducerea cantităților complexe și propozițiunile principale asupra seriilor și produselor infinite de asemenea cantități.

Partea fundamentală a lecțiunilor următoare o constituie seriile de puteri. Pe baza teoriei acestor serii se introduce, după ideile lui Weierstrass, noțiunea de funcțiune analitică monogenă și se dezvoltă proprietățile generale ale acestor funcțiuni. Aplicațiunea teoriei se face la câteva funcțiuni elementare. Funcțiunea algebrică se consideră în cazul cel mai simplu, când funcțiunea este definită de o ecuațiune binoamă și se introduce suprafața lui Riemann corespunzătoare.

Mai departe — aproximativ la a doua jumătate a cursului — se introduce noțiunea de funcțiune analitică după Cauchy. Integrala de variabilă complexă și teoremele fundamentale relative la asemenea integrale, creațiunea celebrului autor, dau loc la numeroase aplicațiuni. Plecând dela integrala lui Cauchy, dela care, ca primă consecință, se deduce că o funcțiune analitică, în condițiuni generale date, se poate dezvoltă într-o serie de puteri, se recunoaște că ceea ce caracterizează funcțiunea analitică, după Weierstrass, coincide cu condițiunile lui Cauchy, precum și reciproc.

Identitatea funcțiunei analitice, definită de acești doi autori, fiind stabilită, se utilizează, în expunerea teoriei generale, când seriile de puteri ($W.$), când integrala de variabila complexă ($C.$), după cum se găsește că una sau cealaltă metodă conduce mai repede la rezultatul ce avem în vedere.

Principiul transformării conforme este deasemenea introdus în aceste lecțiuni; pe baza acestui principiu se stabilesc anume proprietăți generale simple ale funcțiunilor analitice.

Cred inutil de a intra în alte detalii; tabla de materie indică chestiunile tratate și dispozițiunea lor.

Fie-mi permis a exprima aci recunoștința mea Casei Școalelor pentru buna voință ce a avut de a dispune tipărirea acestor lecțiuni.

Domnului conferențiar universitar Octav Onicescu exprim vîile mele mulțumiri pentru ajutorul ce mi-a dat la revizuirea corecturilor și pentru atențiunea cu care a urmărit executarea lucrării, făcută cu atîta grijă de «Cultura Națională».

Mulțumesc deasemenea tinerilor ingineri E. Abason și T. Tănăsescu pentru desenarea figurilor.

Urmează aici o listă de principalele tratate de cari m'am servit în deosebi, în alcătuirea cursului meu.

D. E.

Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques.

Hermite. Cours (lith).

E. Picard. Traité d'Analyse.

E. Goursat. Cours d'Analyse mathématique.

E. Borel. { Leçons sur la théorie des fonctions.
 { Leçons sur les fonctions entières.

Weierstrass. Abhandlungen aus der Funktionenlehre.

O. Biermann. Theorie der analytischen Funktionen.

H. Burkhardt. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen.

W. F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie.

Vivanti — A. Gutzmer. Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.

L. Bianchi. Lezioni sulla teoria delle Funzioni di variabile complessa.

S. Pincherle. Lezioni sulla teoria delle Funzioni analitiche. (Litogr.).

A. R. Forsyth. Theory of functions of a complex variable.

I. Harkness and F. Mosley. Introduction to the theory of analytic function.

TABLA DE MATERIE

CAPITOLUL I

Variabile reale

- § 1—14. *Limita* unui şir de numere. Şir *convergent*, *divergent*. Limita *inferioară* şi limita *superioară*. Condiţiunea necesară şi suficientă pentru existenţa unei limite finite. Funcţiuni reale de o variabilă reală. *Continuitate*. Propoziţiuni generale. *Continuitate uniformă*. Funcţiuni reale de două variabile reale. *Domeniul* unui punct. *Domeniul punctului* ∞ . Propoziţiuni generale. 14

CAPITOLUL II

Noţiuni sumare asupra grămezilor de puncte

- § 15—37. Definiţiuni. Punct de *îngrămădire* sau punct *limită*. Punct *izolat*. O grămadă infinită admite cel puţin un punct *limită*. Derivata unei grămezi. Grămezi perfecte. Grămezi numărabile şi grămezi nenumărabile. Totalitatea numerelor algebrice reale formează o grămadă numărabilă. Totalitatea numerelor reale cuprinse într'un interval dat formează o grămadă nenumărabilă. Echivalenţa a două grămezi. *Continuu* cu o dimensiune este echivalent cu *continuu* cu două dimensiuni. 14

CAPITOLUL III

Cantităţi complexe —

- § 38—77. Introducerea cantităţilor complexe. Operaţiuni. Şiruri şi serii simple. Serii absolut şi serii semiconvergente. Suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea termenilor. Suma unei serii semiconvergente depinde de ordinea termenilor. Şiruri şi serii duble. Convergenţă absolută. Condiţiunea de convergenţă a seriei duble

$$\sum \frac{1}{(m^2 + n^2)^a},$$

- m şi n primind toate valorile întregi pozitive şi negative, exceptând sistemul $m=n=0$. Produse a două serii absolut convergente. Produse nelimitate. Regula de convergenţă 26

CAPITOLUL IV

Variabila complexă

- § 78—97. Reprezentarea variabilei pe plan. Domeniul unui punct. Domeniul punctului ∞ . Reprezentarea variabilei complexe pe sferă. Funcţiuni de variabila complexă. *Continuitate uniformă*. Modulul unei funcţiuni continue este o funcţiune continuă. Serii de funcţiuni. Convergenţă uniformă. Suma unei serii uniform convergente este o funcţiune continuă. Produse nelimitate de funcţiuni. 50

CAPITOLUL V

Serii de puteri

Pag.

- § 98—124. Serii întregi *Notațiunea* $P(x)$. Teorema I-a lui Abel. Cerc de convergență. Teorema II a lui Abel. Teorema asupra razei cercului de convergență. Seria *Laurent*. Teoremă asupra coeficienților seriilor de puteri. Propozițiuni generale asupra seriilor întregi. Teorema lui *Weierstrass* asupra seriilor ai căror termeni sunt serii de puteri. Consecințe 64

CAPITOLUL VI

Seria Taylor

- § 125—144. Transformarea seriei întregi $P(x)$ într-o serie $P(x-x_0)$. Prelungirea analitică a seriei Taylor. Propozițiuni generale. Zerurile seriei $P(x)$ sunt puncte *izolate*. Dacă seria $P(x)$ este nulă într-o infinitate de puncte, ea este identic nulă. Dacă două serii $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ sunt egale într-o infinitate de puncte, în regiunea comună de convergență, ele sunt egale în toată regiunea comună și fiecare din ele este prelungirea celeilalte. Limite între cari se cuprinde raza cercului de convergență al seriei $P(x-x_0)$ dedusă din $P(x)$. *Puncte singulare* pe cerc. Există cel puțin un punct singular. Exemple de serii având toate punctele cercului ca puncte singulare. 95

CAPITOLUL VII

Funcțiuni analitice

- § 145—154. *Elemente* de funcțiune analitică. Totalitatea elementelor deduse dintr'un element dat constituie o *funcțiune analitică monogenă*. Determinarea din aproape în aproape a unei funcțiuni analitice. Puncte singulare. Funcțiuni uniforme și multiforme. O ramură a unei funcțiuni multiforme se comportă ca o funcțiune uniformă într-o regiune în care nu există puncte singulare. 116

CAPITOLUL VIII

Funcțiuni uniforme

- § 155—196. Propozițiuni generale asupra funcțiunilor uniforme. Funcțiuni *olomorfe*. Puncte singulare ale funcțiunilor uniforme: poluri și puncte singulare esențiale. Un punct singular esențial este singular esențial și pentru funcțiunea inversă. O funcțiune olomorfă pe toată sfera este o constantă. Permanența relațiunilor analitice. Derivata. Interpretare geometrică. Funcțiunile raționale sunt funcțiuni analitice monogene neavând alte singularități decât poluri în număr limitat. Viceversa, o funcțiune uniformă cu un număr limitat de poluri este o funcțiune rațională. Dacă punctul ∞ este unicul pol, funcțiunea este rațională întreagă. Teorema generală a Algebrii. Două teoreme generale asupra funcțiunilor întregi, relative la modul de a se comporta în domeniul punctului ∞ 122

CAPITOLUL IX

Funcțiuni analitice având o infinitate de puncte singulare

	Pag.
§ 197—208. <i>Linii singulare</i> . Exemple de serii având linii singulare. Seria Tan- nery. Expresii analitice reprezentând diferite funcțiuni analitice în diferite regiuni ale planului. Exemple de funcțiune lacunară	141

CAPITOLUL X

Studiul câtorva funcțiuni analitice elementare

§ 209—235. Funcțiunile e^x , $\sin x$, $\cos x$. Periodicitatea acestor funcțiuni. Reprezentare geometrică. Nedeterminarea absolută a funcțiunii e^x în punctul $x = \infty$. Funcțiunile $\sin hx$, $\cos hx$. Funcțiunile $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$. Punctele singulare ale acestor funcțiuni sunt poluri de ordinul I-ii. Formula lui Hermite pentru expresiunea unei funcțiuni raționale de $\sin x$, $\cos x$ cu ajutorul funcțiunii $\cot x$	151
---	-----

CAPITOLUL XI

Funcțiuni algebrice definite de ecuațiuni binoame

§ 236—252. Ecuațiunile $y^p = x$, $y^m = R(x)$, $R(x)$ fiind o funcțiune rațio- nală. Puncte de ramificațiune. Drumuri echivalente. Contururi elemen- tare. <i>Tăieturi</i> (coupures). Variațiunea funcțiunii $y = \sqrt{1-x^2}$ pentru valori reale ale lui x . Variațiunea funcțiunii $y = \sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}$ pentru valorile reale ale lui x , $0 < k < 1$.— Suprafața lui Riemann pentru funcțiunile y definite de ecuațiunile $y^2 = x$, $y^2 = (x-a)(x-b)$, $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, $y^m = x$, ($m > 2$).	172
--	-----

CAPITOLUL XII

Inversiunea funcțiunilor e^x , $\operatorname{tg} x$, $\sin x$

§ 253—273. Funcțiunea $\log x$ este analitică monogenă cu o infinitate de ramuri. Punct critic logaritmice. Ramura principală. Reprezentarea geometrică a ramurilor funcțiunii $y = \log x$. Suprafața lui Riemann pentru funcțiunea $y = \log x$. Funcțiunea x^m . Funcțiunile $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsin} x$	188
---	-----

CAPITOLUL XIII

Teoria funcțiunilor de variabilă complexă după Cauchy

§ 274—287. Definițiunea funcțiunii monogene (analitice). Ecuațiunile de condițiune. Integrale definite. Limita superioară a modulului in- tegralei luată după o linie dată. Valoarea medie a integralei (Darboux). Schimbarea variabilei	204
---	-----

CAPITOLUL XIV

Teoremele fundamentale ale lui Cauchy ✓

§ 288—309. Teorema lui Cauchy: Integrala unei funcțiuni olomorfe după un contur închis este nulă (demonstrațiunea lui Riemann). Demon-	
---	--

strațiunea aceleiaș teoreme dată de d-l Goursat. Arie cu contur multiplu. Dacă conturul C cuprinde în interiorul său contururile $C_1, C_2, \dots, C_n$, avem

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_n}.$$

Valoarea integralei unei funcțiuni olomorfe într'o arie cu contur simplu este independentă de linia de integrațiune care unește punctele extreme. Într'o arie cu contur simplu integrala unei funcțiuni olomorfe, a cărei una din limite este fixă, este o funcțiune olomorfă de cealaltă limită. Derivata acestei integrale. Integrala lui Cauchy. O funcțiune olomorfă într'o regiune dată admite derivate de orice ordin în acea regiune. Teoremă (Riemann): Dacă

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (z = x + iy)$$

este o funcțiune olomorfă într'o arie limitată de un contur C , avem inegalitatea

$$\int_C u dv \geq 0.$$

Teorema lui Morera. Teoremă asupra seriei Taylor. Identitatea celor două definițiuni ale funcțiunii analitice după Cauchy și Weierstrass. 218

CAPITOLUL XV

Funcțiuni armonice

§ 310—317. Câteva proprietăți ale funcțiunilor armonice deduse din proprietățile funcțiunilor analitice. Diferite teoreme. Teorema fundamentală a Algebrii. Integrala lui Poisson. 237

CAPITOLUL XVI

Teoreme și dezvoltări în serii, consecințe ale integralei lui Cauchy

§ 318—332. Teorema Laurent. În domeniul unui punct singular esențial izolat o funcțiune analitică se poate apropia de o valoare arbitrară, oricât de mult voim. Seria Fourier. Dezvoltarea unei funcțiuni analitice continue dealungul axei reale (Poincaré). Serii de funcțiuni raționale convergente în arii limitate de arce de cercuri (Appell). Dezvoltarea unei funcțiuni olomorfe în serii de polinoame. 242

CAPITOLUL XVII

Reziduuri (Cauchy). Aplicațiuni

§ 333—350. Reziduul unei funcțiuni uniforme relative la un punct la distanță finită, sau la infinit. Suma rezidurilor unei funcțiuni raționale este nulă. Calculul rezidurilor relative la poluri. Aplicațiuni. Determinarea câtorva integrale definite de variabila reală. Integrala Fresnel.

Expresiunea sumei

$$\sum \frac{1}{n^{2k}}.$$

Calculul sumei (Gauss)

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}.$$

Numărul zerurilor și al polurilor unei funcțiuni uniforme cuprinse într'o regiune dată. Desvoltarea unei funcțiuni meromorfe într'o serie de fracțiuni raționale. Aplicațiuni la funcțiunile $\cot \pi x$, $\frac{1}{\sin \pi x}$. Două funcțiuni $f(x)$, $\varphi(x)$ fiind olomorfe într'o regiune limitată de un contur C , dacă dealungul lui C avem $|\varphi(x)| < |f(x)|$, funcțiunile $f(x)$ și $f(x) + \varphi(x)$ au acelaș număr de zeruri în interiorul lui C . Expresiunea unui zero sau pol printr'o integrală 258

CAPITOLUL XVIII

Inversiunea seriilor întregi. Transformarea conformă. Prelungirea analitică

§ 351—368. Inversiunea seriei $y = x P(x)$, în cazul $P(0) \neq 0$. Inversiunea seriei $y = x^n P(x)$, ($P(0) \neq 0$, $n > 1$). O funcțiune rațională întreagă și simetrică de cele n ramuri (x) ale ecuațiunii $y = x^n P(x)$ este o funcțiune olomorfă de y în domeniul $y = 0$. Seria *Lagrange*. Diferite teoreme asupra transformării conforme și a prelungerii analitice. O funcțiune olomorfă reală dealungul unui segment de linie dreaptă primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu dreapta. Generalizarea teoremi, înlocuind segmentul de dreaptă printr'un arc de curbă *analitică*. . . 290

CAPITOLUL XIX

Funcțiuni analitice reprezentate prin integrale definite

§ 369—392. Integrale definite considerate ca funcțiuni de una din cele două limite. *Tăieturi*. Linii de discontinuitate. Aplicațiuni: Integralele

$$u = \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Transformarea planului (x) în planul (u). Integrale de funcțiuni algebrice simple. Multiplicitatea valorilor integralei în număr limitat sau nelimitat. Exemple

$$u = \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Transformarea planului (x) în planul (u) al ultimei integrale. Inversiunea acestei integrale. Integrala eliptică de speța I. Module de periodicitate. Raportul perioadelor este imaginar. Studiul integralei

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad (0 < k < 1).$$

Transformarea planului (x) în planul (u). Inversiunea acestei integrale. 305

CAPITOLUL XX

Funcțiuni analitice reprezentate prin integrale definite ale căror limite sunt constante.

§ 393—402. Considerațiuni generale. Exemple

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x}, \quad \int_a^b \frac{f(z)}{z-x} dz, \quad \int_a^b \frac{G_1(x,z)}{G(x,z)} dz \quad (f(x,z)=0).$$

Studiul integralei

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz.$$

341

CAPITOLUL XXI

Funcțiuni întregi

§ 403—427. Expresiunea funcțiilor întregi sub formă de produse de factori. Factori primi. Metoda lui Weierstrass pentru a construi funcțiuni întregi având un număr nelimitat de zeruri date. Rangul unei funcțiuni întregi. Diferite teoreme asupra funcțiilor întregi al căror rang este limitat. Aplicațiuni: Expresiunea sub formă de produse a funcțiilor $\sin \pi x$, $\cos \pi x$. Relațiunea între funcțiunile $\Gamma(x)$ și $\sin \pi x$. Funcțiunea $\sigma(x)$ a lui Weierstrass având o dublă serie infinită de zeruri. Câteva propozițiuni elementare asupra funcțiilor întregi transcendente 352

CAPITOLUL XXII

Funcțiuni analitice uniforme nu întregi

§ 428—438. Expresiunea unei funcțiuni uniforme având un număr nelimitat de poluri și un singur punct singular esențial. Teorema lui Mittag-Leffler pentru construirea unei funcțiuni uniforme având un număr nelimitat de puncte singulare oarecare. Aplicațiune la funcțiunile $\frac{1}{\sin \pi x}$, $\cot \pi x$. Funcțiunea $\Gamma(x)$ n'are în tot planul alte puncte singulare decât poluri simple. 373

CAPITOLUL XXIII

Substituțiuni lineare

§ 439—467. Substituțiunile lineare formează un grup. Nu există altă substituțiune decât cea lineară care să transforme într'un mod conform două plane unul într'altul. Substituțiunile lineare transformă cercurile în cercuri. Transformarea unui cerc dat într'un cerc dat, sau într'o dreaptă dată. O substituțiune care transformă un cerc într'o linie dreaptă, transformă două puncte armonice conjugate în două puncte simetrice în raport cu dreapta. Două puncte armonice conjugate în raport cu un cerc se transformă în puncte de acelaș fel în raport cu cercul transformat. Determinarea unei substituțiuni lineare care să transforme două cercuri excentrice în două cercuri concentrice. Transformarea prin raze vectorii reciproce. Transformarea unui cerc în el însuș. Nu există altă substituțiune decât cea lineară care să transforme într'un mod conform un cerc în el însuș. 384

CAPITOLUL I.

VARIABLE REALE.

I. — DEFINIȚIUNI ȘI PROPOZIȚIUNI FUNDAMENTALE.

1. *Limite.* Fie

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots x_n, \dots$$

un șir nelimitat de numere. Zicem că șirul tinde către o limită a , sau că are o limită a , dacă la un număr pozitiv ε , arbitrar de mic, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel încât, pentru $n \geq N$, să avem inegalitatea

$$|x_n - a| < \varepsilon;$$

se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. În acest caz șirul (1) se zice convergent.

Dacă A fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, există un număr întreg pozitiv N astfel încât pentru $n \geq N$ să avem inegalitatea

$$x_n > A,$$

zicem că x_n tinde către infinit ($\pm \infty$). În acest caz șirul (1) se zice divergent. Un al treilea caz posibil este acela când numerele (1) sunt cuprinse între două numere finite și nu tind către nici o limită; se zice atunci că numerele șirului *oscilează* între cele două numere date. Exemplu: $x_n = (-1)^n$.

2. *Un șir de numere neconținut crescând, este convergent sau divergent, nu oscilează niciodată.* Presupunem

$$(1) \quad x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

Se poate întâmpla ca pentru N crescând, să avem

$$(2) \quad x_n > A,$$

A fiind un număr pozitiv oricât de mare voim. În acest caz șirul este divergent.

Să presupunem acum că există un număr a , astfel că, oricât de mare ar fi n , avem

$$(3) \quad x_n < a.$$

În acest caz, dacă există un număr întreg pozitiv N astfel ca pentru $n \geq N$ să avem inegalitățile

$$(4) \quad x_n > a, \quad x_n - a < \varepsilon,$$

a fiind un număr convenabil, mai mic ca a , și ε un număr pozitiv, arbitrar de mic, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Să presupunem că a doua inegalitate (4) este imposibilă oricât de mare ar fi n ; ceea ce înseamnă că există un număr N astfel că, pentru $n \geq N$, avem

$$x_n > a + \varepsilon = a_1.$$

În virtutea aceleiaș ipoteze, pentru $n_1 > n$ și destul de mare, vom avea

$$x_{n_1} > a_1 + \varepsilon = a_2,$$

căci altminteri ar rezulta $\lim x_{n_1} = a_1$.

Pentru acelaș motiv, vom avea pentru indici crescânzi și destul de mari

$$x_{n_2} > a_2 + \varepsilon = a_3, \dots$$

De unde rezultă

$$(5) \quad x_{n_p} > a + (p + 1) \varepsilon.$$

Membrul al doilea al acestei inegalități, pentru p destul de mare, poate deveni mai mare ca orice număr dat și prin urmare mai mare decât a : ceea ce este în contradicție cu inegalitatea (3). De unde rezultă că inegalitatea (3) trage după sine convergența șirului (1).

Cazul unui șir de numere neconținut descrescând se reduce la cel precedent, dacă schimbăm semnele tuturor termenilor.

3. *Limită inferioară și limită superioară. Un șir nelimitat de numere*

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

cuprinse între două numere date A, B , admite o limită inferioară și o limită superioară, adică există două numere a (limita inferioară) și b (limita superioară) satisfăcând condițiunile următoare:

1°. Pentru orice valoare a lui n avem

$$a \leq x_n \leq b.$$

2°. Există cel puțin o valoare n' a lui n pentru care

$$x_{n'} < a + \varepsilon$$

și cel puțin o valoare n'' pentru care

$$x_{n''} > b - \varepsilon,$$

ε fiind număr pozitiv, arbitrar de mic.

Să demonstrăm existența limitei superioare b . Pentru aceasta, să considerăm două numere a și β ($a < \beta$), astfel ca β să fie mai mare ca toate numerele șirului (1) și ca a să fie mai mic ca unele numere ale acestui șir. Să dividem intervalul (a, β) în 10 părți egale și să considerăm numerele

$$(2) \quad a, \quad a + \frac{\beta - a}{10}, \quad a + 2 \frac{\beta - a}{10}, \quad \dots, \quad \beta.$$

Unul cel puțin din numerele acestui șir este mai mare ca toate numerele (1). Fie β_1 cel dintâiu ce se întâlnește dela stânga la dreapta care împlinește această condițiune și să numim a_1 numărul care-l precede imediat; a_1 și β_1 vor înlocui numerele a și β .

Operând asupra numerelor a_1 și β_1 în acelaș mod ca asupra lui a și β , vom obține două numere a_2 și β_2 astfel că β_2 este mai mare ca toate numerele (1) și că printre aceste numere există unul sau mai multe mai mari ca a_2 . Continuând în acelaș mod, obținem două șiruri de numere (a_n) , (β_n) satisfăcând condițiunile:

$$(3) \quad \begin{cases} a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \\ \beta \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq \dots \end{cases}$$

$$(4) \quad \beta_n - a_n = \frac{\beta - a}{10^n}.$$

De unde rezultă că cele două șiruri (a_n) , (β_n) au aceeaș limită, ce reprezentăm prin b : aceasta este limita superioară a șirului (1). În adevăr, avem

$$(5) \quad a_n < b < \beta_n.$$

De altă parte, între a_n și β_n există numere ale șirului (1); fie x_m unul oarecare din aceste numere, adică

$$(6) \quad a_n < x_m < \beta_n.$$

De unde, punând $\frac{\beta - a}{10^n} = \varepsilon$, avem

$$x_m > \beta_n - \varepsilon$$

și a fortiori

$$(7) \quad x_m > b - \varepsilon.$$

Rămâne să arătăm că $x_m < b$. Să presupunem contrariul: $x_m > b$; vom avea, pentru n destul de mare,

$$\beta_n - b < x_m - b,$$

(căci $\beta_n - b$ poate deveni mai mic ca orice cantitate dată), adică

$$\beta_n < x_m,$$

ceea ce este în contradicțiune cu (6). Așa dar b este *limita superioară* a șirului (1).

În același mod se stabilește existența *limitei inferioare*.

Observare. Limitele a căror existență a fost stabilită pot sau nu face parte din șirul numerelor date. Exemplu: șirurile

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots,$$

$$0,9, 0,99, 0,999 \dots,$$

au, cel dintâiu ca limită inferioară zero, cel de-al doilea ca limită superioară 1, însă aceste numere nu se găsesc printre numerele șirului respectiv.

Dacă șirul atinge limita superioară sau inferioară se zice că are un *maximum* sau *minimum*.

4. Condițiunea necesară și suficientă pentru ca un șir

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

să fie convergent, este ca să putem fixa un număr întreg pozitiv N astfel încât pentru $n \geq N$, $n' \geq N$ să avem

$$(2) \quad |x_n - x_{n'}| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

1°. Condițiunea este *necesară*, căci dacă șirul (1) are o limită a , putem scrie

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și prin urmare

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - a| + |x_{n'} - a| < \varepsilon.$$

2°. Condițiunea este *suficientă*. În adevăr, din inegalitatea (2) rezultă că pentru $n \geq N$, numerele

$$(3) \quad x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$$

sunt toate cuprinse între numerele $x_N - \varepsilon$, $x_N + \varepsilon$. De unde rezultă, în virtutea teoremei precedente, că șirul (3) are o limită inferioară și una superioară cuprinse între aceste două numere, a căror diferență 2ε poate fi oricât de mică voim. Prin urmare aceste două limite coincid: valoarea lor comună este limita șirului (1).

¹⁾ Fie pentru moment a limita inferioară, b limita superioară; avem $x_n - a < 2\varepsilon$, $b - x_n < 2\varepsilon$; de unde $b - a < 4\varepsilon$. Însă membrul al doilea poate fi oricât de mic voim, pe când membrul întâiu este fix, ceea ce nu este compatibil decât cu condițiunea $b - a = 0$.

II. — FUNCTIUNI REALE DE O VARIABILĂ REALĂ.

5. Se zice despre o funcțiune reală de o variabilă reală că rămâne finită într'un interval dat (a, b) , dacă există două numere între cari se cuprind toate valorile ce funcțiunea primește în acel interval. În cazul când funcțiunea primește valori mai mari ca un număr dat, oricât de mare ar fi, se zice că are limita superioară $+\infty$; deasemenea, dacă primește valori mai mici ca un număr dat, oricât de mic ar fi, se zice că are limita inferioară $-\infty$.

Teoremă. O funcțiune reală $f(x)$ de o variabilă reală, definită într'un interval dat (a, b) , are o limită inferioară și o limită superioară.

Aceste limite pot fi respectiv $\mp \infty$ conform definițiunii de mai sus. Să presupunem că funcțiunea rămâne finită și fie

$$x_1, x_2, \dots, x_n \dots$$

un șir de numere intercalate între a și b , oricât de apropiate între dănsese voim. Valorile

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$$

fiind prin ipoteză cuprinse între două numere date, admit în virtutea § 3, o limită inferioară m și o limită superioară M .

Diferența $M - m$ se numește *oscilațiunea* funcțiunii în intervalul (a, b) .

6. Figurând valorile lui x prin puncte pe o axă, vom numi *domeniul* (sau *vecinătatea*) unui punct x , segmentul $x - \delta, x + \delta$ al axei, care cuprinde în interiorul său punctul x , δ fiind un număr pozitiv care poate deveni oricât de mic voim, dar a cărui limită inferioară este > 0 . Segmentul considerat constituie intervalul $(x - \delta, x + \delta)$.

7. *Teoremă (Weierstrass).* Dacă o funcțiune $f(x)$ este finită în intervalul (a, b) , $a < b$, există cel puțin un punct $x = \xi$ în acest interval, astfel că în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, limita superioară M a funcțiunii este aceeași ca în intervalul primitiv.

(Un enunț analog și pentru limita inferioară).

Să împărțim intervalul (a, b) în două părți egale; este evident că în nici unul din aceste intervale limita superioară nu poate fi mai mare ca M și că cel puțin în unul din ele ea este M . Din aceste două intervale să considerăm pe acela în care limita superioară este M , sau unul oarecare din ele, dacă ambele se bucură de această proprietate, și fie a_1, b_1 extremitățile sale ($a_1 < b_1$). Este evident că una din valorile a_1 ori b_1 coincide cu a sau b . Subdivizând acest nou interval (a_1, b_1) în două părți egale și raționând în mod analog,

obținem un alt interval (a_2, b_2) în care limita superioară a funcțiunii este M . Continuând cu subdiviziunile, formăm un șir de intervale

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_n), \dots,$$

cuprinse fiecare în precedentul său, în care limita superioară este M și astfel că

$$(1) \quad \begin{cases} a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b, \\ b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots > a, \end{cases}$$

$$(2) \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

În virtutea condițiilor (1) și (2) șirurile $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ admit o limită comună, pe care o reprezentăm prin ξ .

Aceasta este valoarea căutată. Într'adevăr, ξ fiind limita comună a celor două șiruri, la un număr pozitiv δ oricât de mic vom, corespunde un număr întreg pozitiv N , astfel că pentru $n \geq N$ avem

$$a_n > \xi - \delta, \quad b_n < \xi + \delta.$$

Intervalul (a_n, b_n) este deci situat în interiorul intervalului $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Însă în intervalul (a_n, b_n) limita superioară este M ; M este așadar limita superioară și în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

8. *Continuitate.* — O funcțiune $f(x)$ este *continuă* în domeniul unui punct x_0 , dacă la un număr pozitiv dat ε , corespunde un număr pozitiv η , astfel ca să avem

$$(1) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pentru toate valorile lui x satisfăcând inegalitatea

$$(2) \quad |x - x_0| < \eta.$$

O funcțiune continuă în fiecare punct al unui interval dat se zice continuă în acel interval.

9. *Proprietăți.* — I. Dacă o funcțiune $f(x)$ este continuă în domeniul unui punct x_0 , oscilațiunea sa $M - m$, în domeniul acestui punct poate deveni mai mică ca ε , ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

În adevăr, funcțiunea $f(x)$ fiind continuă în domeniul lui x_0 , putem scrie

$$(1) \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(2) \quad |f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

x și x' fiind două puncte oarecare în domeniul $|x - x_0| < \eta$ al lui x_0 . De unde rezultă inegalitatea

$$(3) \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De altă parte, putem presupune η destul de mic astfel încât să avem:

$$(4) \quad M - f(x) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad f(x') - m < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Adunând aceste două inegalități și ținând seamă de (3), obținem

$$(5) \quad M - m < \varepsilon.^1)$$

Reciproca este evidentă. Inegalitatea (5) trage după sine inegalitatea $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ și poate prin urmare fi luată ca definițiune a continuității.

Observare. Fie $x = x_0 + h$, $|h| < \eta$; inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

devine

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

inegalitate echivalentă, prin definițiune, cu următoarea:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

II. *O funcțiune continuă într'un interval (a, b) , inclusiv limitele, este finită în acel interval.*

Să arătăm pentru aceasta că limita superioară M a funcțiunii nu poate fi infinită. În adevăr, dacă limita M ar fi infinită, ar exista, conform teoremei lui Weierstrass (§ 7), în intervalul (a, b) , o valoare ξ , astfel ca în noul interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, oricât de mic ar fi δ , limita superioară să fie infinită. Oscilațiunea funcțiunii în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ ar fi dar infinită și prin urmare funcțiunea n'ar fi continuă în vecinătatea punctului ξ , ceea ce este contra ipotezei. Funcțiunea are deci o limită superioară finită. În mod analog se probează că limita inferioară nu poate fi $-\infty$.

Observare. Teorema presupune ca limitele fac parte din interval; în cazul contrar se poate întâmpla să nu fie adevărată. Astfel funcțiunea $f(x) = \frac{1}{x}$ în intervalul $0 < x \leq 1$ este continuă, dar limita sa superioară este ∞ .

¹⁾ M și m depind evident de x_0 și de η .

III. *O funcțiune continuă într'un interval (a, b) inclusiv limitele, atinge limita sa superioară, precum și cea inferioară, sau mai scurt, admite în acel interval un maximum și un minimum.*

În virtutea teoremei lui Weierstrass (§ 7) există în intervalul (a, b) un punct ξ astfel că în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, oricât de mic ar fi δ , limita superioară a funcțiunii este aceeași ca în intervalul (a, b) așa încât putem scrie

$$M - f(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice x cuprins în $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, ε fiind pozitiv și arbitrar de mic. De altă parte, funcțiunea fiind continuă în punctul ξ , avem în același interval

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De unde rezultă, în virtutea inegalităților precedente,

$$M - f(\xi) \leq (M - f(x)) + |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Diferența între cantitățile constante M și $f(\xi)$ putând deveni mai mică decât orice cantitate dată, este riguros nulă. Deci avem

$$M = f(\xi),$$

adică există, în intervalul dat, un punct ξ în care funcțiunea este egală cu limita sa superioară.

În același mod se demonstrează teorema relativ la limita inferioară.

IV. *O funcțiune continuă într'un interval dat, primește în acel interval orice valoare cuprinsă între minimumul și maximumul ei.*

Fie A un număr oarecare cuprins între minimumul m și maximumul M , a și b valorile lui x pentru cari avem $f(a) = m$, $f(b) = M$. În virtutea continuității, în vecinătatea lui a , $f(x)$ diferă de m cu oricât de puțin voim. Există dar o valoare X în intervalul (a, b) astfel că pentru toate valorile lui x cuprinse între a și X avem $f(x) < A$, pe când această inegalitate nu există pentru toate valorile lui x cuprinse între X și b . Presupunând, de exemplu, $a < b$ valorile lui X , cari satisfac aceste condițiuni admit o limită superioară ξ , căci ele cresc începând de la a și sunt $< b$.

Numărul ξ este dar definit astfel că pentru toate valorile lui x cuprinse între a și ξ , avem $f(x) < A$, că această proprietate nu mai aparține numărului $\xi + \delta$, δ fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

De unde rezultă egalitatea:

$$(1) \quad f(\xi) = A.$$

În adevăr, dacă am avea $f(\xi) > A$, ar exista în virtutea continuității funcțiunii $f(x)$, un $\delta > 0$ astfel ca în intervalul $(\xi - \delta, \xi)$ să avem $f(x) > A$; iar dacă am presupune $f(\xi) < A$, ar urma ca în intervalul $(\xi, \xi + \delta)$ și prin urmare în tot intervalul $(a, \xi + \delta)$, să avem $f(x) < A$. Ambele aceste inegalități fiind contrare definițiunii lui ξ , egalitatea (1) este justificată.

V. *Continuitate uniformă.* O funcțiune continuă într'un interval închis (adică inclusiv limitele) este uniform continuă în acel interval.

Noțiunea de continuitate uniformă se introduce în Analiză prin considerațiunile următoare:

Dându-se o funcțiune continuă într'un interval (a, b) , la fiecare valoare x cuprinsă în acest interval, corespunde, conform definițiunii, un interval $(x - \delta, x + \delta)$ în care oscilațiunea funcțiunii este mai mică ca un număr pozitiv ε , arbitrar de mic. Dacă x coincide cu a sau cu b , intervalul considerat trebuie înlocuit respectiv cu $(a, a + \delta)$ sau $(b - \delta, b)$. Cantitatea δ poate admite o infinitate de valori, căci dacă am fixat o valoare a ei, toate valorile mai mici vor satisface evident și ele aceeași condițiune. Toate aceste valori admit o limită superioară Δ , care depinde de x și de ε , așa încât ε rămânând constant mărimea intervalelor variază împreună cu x . Se pune întrebarea: Se pot uniformiza aceste intervale, cu alte cuvinte, există o cantitate pozitivă η astfel ca în intervalul $(x - \eta, x + \eta)$ oscilațiunea funcțiunii să fie mai mică decât ε , oricare ar fi x în intervalul (a, b) ?

În cazul unei funcțiuni continue aceasta este posibil; ceeace se enunță zicând că o funcțiune continuă este *uniform continuă*.

Pentru a demonstra această propozițiune, vom arăta mai întâiu că $\Delta(x)$ este o funcțiune continuă de x în tot intervalul (a, b) . În adevăr fie x' o valoare cuprinsă în intervalul $[x - \Delta(x), x + \Delta(x)]$ și fie $\Delta' = \Delta(x')$. Intervalul $(x' - \Delta', x' + \Delta')$ al cărui centru este punctul x' se întinde evident cel puțin până la cea mai apropiată extremitate $x - \Delta$ sau $x + \Delta$. Avem așa dar (Fig. 1):

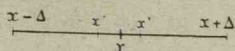


Fig. 1

$$(1) \quad \Delta' \geq \Delta - (x' - x), \text{ dacă } x' > x,$$

sau

$$(2) \quad \Delta' \geq x' - (x - \Delta), \text{ dacă } x' < x$$

Însă putem presupune x' destul de aproape de x , pentru ca intervalul $(x' - \Delta', x' + \Delta')$ să cuprindă în interiorul său punctul x ;

atunci printr'un raționament analog cu cel precedent, permutând x cu x' și Δ cu Δ' , obținem inegalitățile

$$(3) \quad \Delta \geq \Delta' - (x - x'), \quad x > x'$$

$$(4) \quad \Delta \geq x - (x' - \Delta'). \quad x < x'$$

Din inegalitățile (1) și (4) rezultă:

$$-(x' - x) \leq \Delta - \Delta' \leq (x' - x).$$

Deasemenea inegalitățile (2) și (3) reunite dau

$$-(x - x') \leq \Delta' - \Delta \leq x - x',$$

adică, în toate cazurile avem inegalitatea:

$$(5) \quad |\Delta - \Delta'| \leq |x - x'|;$$

ceeace demonstrează continuitatea funcțiunii $\Delta(x)$.

Această propozițiune fiind stabilită, continuitatea uniformă rezultă imediat. În adevăr, cantitatea Δ fiind pozitivă și continuă, admite o limită inferioară $\eta > 0$ pe care o atinge pentru o valoare $x = \xi$ cuprinsă în intervalul (a, b) .

Acest minimum este neapărat mai mare ca zero; căci $\eta = 0$ însemnează că în domeniul punctului ξ oscilațiunea funcțiunii nu poate deveni mai mică ca ε , adică funcțiunea n'ar fi continuă în acel punct; ceeace este contra ipotezei.

Minimul η satisface condițiunea cerută și prin urmare putem enunța următorul rezultat:

Dacă o funcțiune este continuă într'un interval (a, b) există totdeauna un număr pozitiv η astfel că oricare ar fi valoarea lui x cuprinsă între a și b , oscilațiunea funcțiunii în intervalul $(x - \eta, x + \eta)$ este mai mică ca ε , ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

III. — FUNCȚIUNI REALE DE DOUĂ VARIABLE REALE.

10. Să considerăm acum o funcțiune reală $f(x, y)$ de două variabile reale x, y definită pentru toate valorile

$$a \leq x \leq b,$$

$$c \leq y \leq d,$$

său, conform reprezentațiunilor geometrice, în interiorul și pe periferia dreptunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele

$$(a, c), (b, c), (a, d), (b, d)$$

situate într'un plan — planul (x, y) —, axele fiind rectangulare. Totalitatea punctelor (x, y) cărora corespund valori determinate pentru funcțiunea $f(x, y)$ constituie câmpul în care această funcțiune este definită.

Câmpul în loc de a fi un dreptunghi, precum am presupus mai sus, poate fi o porțiune a planului, limitat de un contur închis format de o curbă unică oarecare sau de arce de curbe diferite.

Numim *domeniul* (sau *vecinătatea*) unui punct (ξ, η) totalitatea punctelor (x, y) , cari satisfac condițiunile:

$$|x - \xi| < \delta, \quad |y - \eta| < \delta,$$

δ fiind un număr pozitiv destul de mic. In locul pătratului astfel definit se poate considera un cerc cu centrul în punctul (ξ, η) și cu o rază r destul de mică.

Prin convențiune (convențiune justificată prin transformarea $x = \frac{1}{x'}$, în cazul variabilei complexe) vom înțelege prin *domeniul punctului dela infinit* spațiul din plan, exterior unui cerc descris din origină ca centru cu o rază oricât de mare voim. In teoria funcțiunilor punctul dela infinit este un punct unic căruia nu-i putem da nici o reprezentare în plan.

11. Teoremele asupra funcțiunilor de o variabilă independentă, demonstrate în paragrafele precedente, se aplică funcțiunilor de două și de mai multe variabile, cu modificarea naturală, în ce privește funcțiunile de două variabile, ca să înlocuim pretutindeni cuvântul de interval cuprins între două numere, prin acela de *porțiune a planului, regiune sau arie* interioară unui dreptunghi sau limitată de un contur închis de o formă oarecare. Cuvântul de domeniu al unui punct, în sensul restrâns de interval linear foarte mic care cuprinde acest punct, se va înlocui prin acela de domeniu în sensul mai general definit mai sus.

12. Să considerăm teoremele următoare:

Teorema I. O funcțiune $f(x, y)$ definită într-o regiune dată, admite în acea regiune o limită superioară și o limită inferioară, cari pot fi finite sau respectiv $\pm \infty$.

Căci dacă funcțiunea primește, în regiunea dată, valori mai mari ca un număr dat, oricât de mare ar fi, zicem că are limita superioară $+\infty$. Deasemenea, dacă primește valori mai mici ca un număr dat, oricât de mic, zicem că are limita inferioară $-\infty$. Dacă funcțiunea rămâne finită, valorile ce ea primește în puncte situate în regiunea dată și foarte apropiate între ele pot fi ordonate într'un șir de numere cuprinse între două numere date. Ele admit dar o limită superioară și o limită inferioară finite.

Teorema II. Există cel puțin un punct $P(\xi, \eta)$ în interiorul regiunii date astfel că în pătratul al cărui centru este P și latura 2δ ,

δ fiind un număr pozitiv oricât de mic voim, limita superioară (inferioară) a funcțiunii este aceeaș ca în regiunea primitivă.

Pentru a demonstra această teoremă, să presupunem funcțiunea $f(x, y)$ definită într'un dreptunghi d și fie M limita sa superioară. Să împărțim dreptunghiul d în patru dreptunghiuri egale prin paralele cu laturile sale. În nici unul din aceste dreptunghiuri limita superioară nu este mai mare ca M și în unul cel puțin, această limită este M . Fie d_1 dreptunghiul sau unul din dreptunghiurile în care limita superioară este M . Descompunem în acelaș mod dreptunghiul d_1 în patru părți egale, etc. Formăm astfel un șir ilimitat de dreptunghiuri $d, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ în cari limita superioară a funcțiunii este M și fiecare din ele este cuprins în interiorul celui precedent.

Să considerăm două axe paralele cu laturile dreptunghiului și fie

$$a, a'; x_1, x'_1; \dots; x_n, x'_n; \dots,$$

abscisele vârfurilor dreptunghiurilor considerate. Șirurile de numere $a, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots; a', x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$ satisfăcând condițiile

$$(1) \quad \begin{cases} a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots, \\ a' \geq x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq x'_n \geq \dots, \end{cases}$$

$$(2) \quad x'_n - x_n = \frac{a' - a}{2^n},$$

admit o limită comună ξ .

În acelaș mod se arată că ordonatele y_n, y'_n ale vârfurilor acelorași dreptunghiuri au o limită comună η .

Din cele ce preced se vede imediat că există un număr pozitiv întreg N astfel că pentru $n \geq N$, dreptunghiul d_n ale cărui laturi sunt $|x'_n - x_n|$ și $|y'_n - y_n|$, este interior pătratului cu centrul în punctul (ξ, η) , având latura δ , oricât de mic ar fi δ . Ceeace demonstrează teorema.

13. O funcțiune $f(x, y)$ se zice *continuă în domeniul unui punct* (x_0, y_0) dacă, la un număr pozitiv ε arbitrar de mic, corespunde un număr pozitiv δ astfel încât să avem:

$$(1) \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

cu condițiile

$$(2) \quad |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

O funcțiune continuă în toate punctele unei regiuni date se numește *continuă în acea regiune*.

Ca și în cazul unei singure variabile, se demonstrează că osci-

lățiunea unei funcțiuni continue $f(x, y)$ în domeniul unui punct (x_0, y_0) poate deveni oricât de mică voim.

Să mai notăm egalitatea

$$\lim_{x=x_0, y=y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

echivalentă cu inegalitatea (1).

Proprietăți. a) O funcțiune $f(x, y)$ continuă într-o regiune dată, inclusiv conturul ce o limitează, admite un maximum și un minimum în acea regiune.

b) O funcțiune $f(x, y)$ continuă într-o regiune dată, este uniform continuă în acea regiune, adică fiind dat un număr pozitiv ε oricât de mic voim, există un număr pozitiv δ , același pentru toate punctele regiunii, astfel că oscilațiunea funcțiunii în domeniul corespunzător oricărui punct situat în interiorul regiunii este mai mică ca ε .

Demonstrația acestor propozițiuni este identică cu aceea a unei funcțiuni de o singură variabilă.

14. *Observare.* O funcțiune $f(x, y)$ continuă în domeniul unui punct (x_0, y_0) este evident continuă în vecinătatea lui $x = x_0, y$ fiind privit constant, situat în domeniul lui y_0 ; și viceversa, continuă în vecinătatea lui $y = y_0, x$ fiind privit constant, situat în domeniul lui x_0 . Reciproca poate să nu fie adevărată, precum se constată prin exemple.

Fie

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{x y}{x^2 + y^2}.$$

Această funcțiune n'are sens în punctul $x = y = 0$. Să-i dăm valoarea zero în acest punct. Privită ca funcțiune de x, y fiind constant și diferit de zero, ea este evident continuă și se anulează împreună cu x ; aceeași concluziune în privința lui y, x fiind constant și diferit de zero. Să punem acum:

$$(2) \quad y = mx;$$

obținem

$$(3) \quad f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Funcțiunea păstrează așadar o valoare constantă dealungul dreptei (2), ce trece prin origină și limita sa când punctul (x, y) se apropie de origină dealungul acestei drepte, nu mai este nulă, ci egală cu $\frac{m}{1 + m^2}$, cantitate care variază împreună cu m .

Iată un al doilea exemplu :

$$(4) \quad f(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$

Acceptând pentru această funcțiune valoarea zero în origină și punând $y = mx$, funcțiunea devine:

$$(5) \quad f(x, y) = m^2 x$$

și tinde către zero când punctul (x, y) se apropie de origină după o direcțiune oarecare. Să facem acum ca punctul (x, y) să descrie parabola $y^2 = ax$, obținem :

$$f(x, y) = a.$$

Prin urmare când punctul (x, y) se apropie de origină *dealungul acestei parabole*, limita funcțiunii nu mai este zero, ci a .

CAPITOLUL II.

NOȚIUNI SUMARE ASUPRA GRĂMEZILOR DE PUNCTE ¹⁾.

15. În Analiză se numește *punct*, relativ la un sistem de una sau mai multe variabile reale, un grup de valori numerice determinate date acestor variabile.

Se zice despre o *grămadă de puncte* (ensemble, Punktmenge) că este dată sau bine definită, dacă dându-se un punct se poate recunoaște că face parte sau nu din grămadă.

Grămada este *finită* sau *infinită* după cum numărul punctelor constitutive este limitat sau ilimitat. Numărul variabilelor cari determină un punct al grămezii se numește *dimensiunea ei*; în special când punctele sunt determinate de o singură variabilă, grămada se zice *liniară*. Punctele acestor grămezi figurate pe o axă (axa absciselor) reprezintă numere reale.

Ne vom mărgini a considera grămezile de puncte cu una și cu două dimensiuni, adică grămezile de puncte situate pe o axă și grămezile de puncte situate într'un plan.

Exemple: 1^o. Șirurile $x = n$, $x = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$).

2^o. Totalitatea numerelor raționale sau a numerelor reale cuprinse între două limite date formează grămezi cu o dimensiune.

¹⁾ Teoria grămezilor a fost creată de *G. Cantor* și cele mai multe propozițiuni fundamentale ale acestei teorii sunt datorite acestui matematician. Pentru o teorie mai completă a se vedea *E. Borel*, *Leçons sur la théorie des fonctions*.

3°. Totalitatea punctelor interioare sau exterioare unui cerc dat, ale căror coordonate sunt numere raționale, formează grămezi cu două dimensiuni.

O grămadă A se zice conținută într-o grămadă B, dacă toate elementele lui A aparțin lui B.

16. *Punct de îngrămădire sau punct limită.* Un punct a se numește *punct de îngrămădire* sau *punct limită* al unei grămezi, dacă în domeniul ¹⁾ său, oricât de mică ar fi întinderea acestui domeniu, se găsesc puncte ale grămezii diferite de a ²⁾. Punctele limite pot să aparțină sau nu grămezii. De exemplu grămada liniară

$$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

are ca punct limită punctul $x = 0$ și acest punct nu aparține grămezii.

Grămada punctelor cari reprezintă pe o axă numerele raționale cuprinse într'un interval dat, admite ca puncte limite totalitatea punctelor din acel interval, căci orice număr rațional sau irațional poate fi privit ca limita unui șir de numere raționale; acea grămadă admite deci ca puncte limite pe lângă punctele grămezii și o altă grămadă de puncte străine (puncte reprezentând numerele iraționale).

Un punct care nu este punct limită se zice *punct izolat*.

17. Să considerăm în special o grămadă formată de un șir nelimitat de numere reale. Aveim următoarea teoremă:

Teorema. Dacă limita superioară M a șirului nu face parte din șir, punctul $x = M$ este un punct limită al acestui șir, adică în intervalul $(M - \delta, M)$ oricât de mic ar fi $\delta > 0$, se găsește o infinitate de elemente ale șirului. Căci dacă în acest interval s'ar afla un număr mărginit de elemente, unul din ele ar fi cel mai mare și acela ar fi limita superioară. Ceeace este contrar ipotezei.

O propozițiune analoagă există relativ la limita inferioară.

18. Este evident că dacă un șir nemărginit de numere

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

admite mai multe valori limite, una din ele este cea mai mare și alta cea mai mică. Fie M și m respectiv cea mai mare și cea mai mică. Din definițiunea acestor numere rezultă proprietățile următoare:

¹⁾ Vezi definițiunea acestui cuvânt (11).

²⁾ Numărul acestor puncte este neapărat infinit; căci dacă numărul lor ar fi mărginit, reprezentând prin δ distanța dela a la cel mai apropiat din ele, cercul cu centrul în a și cu raza $r < \delta$ n'ar conține nici un punct al grămezii.

1^o. Elementele şirului pentru care avem inegalităţile

$$x_n > M + \varepsilon, \quad x_n < m - \varepsilon$$

sunt în număr mărginit.

2^o. Elementele ce satisfac inegalităţile

$$x_n > M - \varepsilon, \quad x_n < m + \varepsilon$$

sunt în număr nemărginit, oricât de mic ar fi numărul $\varepsilon > 0$.

19. Din cele ce preced şi din teorema (§ 17) rezultă că dacă limita superioară a unui şir nelimitat de numere reale (respectiv limita inferioară) nu aparţine şirului, ea coincide cu cea mai mare (resp. cea mai mică) dintre limite (în sensul de puncte limite).

20. *O grămadă infinită admite cel puțin un punct limită.*

Pentru a fixa ideile să considerăm cazul unei grămezi de două dimensiuni. Se pot întâmpla două cazuri: sau există un dreptunghi de dimensiuni finite care să conţină toate punctele grămezii, sau nu există un asemenea dreptunghi. Cazul din urmă revine a zice că oricât de mari ar fi dimensiunile dreptunghiului există în afară dintr'însul puncte ale grămezii, adică referindu-ne la definiţia domeniului punctului dela infinit, există în acest domeniu o infinitate de puncte. Punctul dela infinit este aşadar un punct limită şi teorema este demonstrată.

Să considerăm primul caz şi să împărţim dreptunghiul în patru părţi egale, prin paralele la laturile sale; este evident că în unul cel puțin din dreptunghiurile astfel obţinute se va găsi un număr ilimitat de puncte. Împărţim pe acesta în patru părţi egale şi considerăm pe acela în care numărul punctelor cuprinse este ilimitat. Continuând aşa mai departe, obţinem un şir nelimitat de dreptunghiuri

$$d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots$$

conţinând fiecare un număr nelimitat de puncte şi cuprins fiecare în cel precedent.

Printr'un raţionament identic cu cel al teoremei II (§ 12), se demonstrează că există un punct $P(\xi, \eta)$ care se bucură de proprietatea că la un număr pozitiv δ , oricât de mic voim, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel că pentru $n \geq N$ dreptunghiul d_n este interior pătratului al cărui centru este în acest punct şi a cărui latură este δ . Punctul $P(\xi, \eta)$ este deci un punct limită.

21. *O grămadă finită nu admite punct limită.*

În adevăr, punctul dela infinit nu este punct limită, căci putem descrie din origină ca centru un cerc cu o rază destul de mare care

să cuprindă toate punctele grămezii situate la distanța finită. De altă parte, nici un punct la distanță finită nu poate fi punct limită, căci un cerc descris dintr'un asemenea punct ca centru, cu o rază mai mică decât distanța sa la punctul grămezii cel mai apropiat, nu va conține nici un alt punct al grămezii.

22. Un punct se zice *interior* unei grămezi, dacă un domeniu al acestui punct aparține cu totul grămezii, adică, dacă la orice punct A al grămezii corespunde un număr pozitiv δ astfel că toate punctele interioare cercului cu centrul în A și cu raza δ aparțin grămezii.

Un punct se zice *punct-frontieră* al unei grămezi, dacă orice domeniu al acestui punct conține puncte ale grămezii precum și puncte ce nu aparțin grămezii. Punctele frontiere sunt puncte limite ale grămezii.

Punctele grămezii cari nu sunt nici puncte interioare, nici puncte frontiere se zic puncte *exterioare*.

Există grămezi relativ la cari nu se poate vorbi de puncte interioare, nici de puncte exterioare. De exemplu: grămada de puncte ale căror coordonate sunt numere raționale.

23. *Derivata unei grămezi.* Grămada formată de punctele limite ale unei grămezi A se numește *derivata* grămezii A și se înseamnă A' . Dacă grămada A' conține o infinitate de puncte, va admite și ea o derivată A'' , zisă derivata doua a lui A , etc.

Oricare ar fi grămada infinită A , derivata a doua A'' este conținută în A' .

Se presupune, bine înțeles, că aceste derivate există.

În adevăr, fie P un punct al lui A' ; într'un domeniu (r) al acestui punct se găsesc, în virtutea definițiunei, puncte ale lui A' diferite de P . Fie Q unul dintre acestea și (ϱ) domeniul său, ϱ fiind destul de mic pentru ca P să fie exterior cercului (ϱ) . Însă Q fiind un punct al lui A' , cercul (ϱ) conține puncte ale lui A ; prin urmare în (r) se găsesc puncte ale lui A diferite de P , ceea ce înseamnă că P este un punct limită al lui A și prin urmare aparține lui A' .

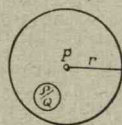


Fig. 2

24. Relativ la derivata sa, o grămadă poate fi de diferite feluri:

1^o. *izolată*, dacă este formată din puncte izolate, adică n'are nici un punct comun cu derivata sa.

întregi a cărei derivată este punctul dela infinit. Numerele cuprinse în formula

$$x = m + \frac{1}{n+1},$$

m și n fiind numere întregi pozitive și $n \neq 0$, formează o grămadă izolată; căci derivata acestei grămezi este grămada numerelor $y = m$, și între aceste două grămezi nu este nici un element comun.

2^o. *închisă*, dacă conține derivata sa. Exemplu: numerele date de expresiunea

$$x = m + \frac{n}{p}, \quad (p = 1, 2, \dots, \infty)$$

$$\left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

a cărei derivată este grămada $y = m$. Această grămadă este evident cuprinsă în grămada dată, care mai conține puncte diferite de cele ale derivatei sale. Punctele frontieră fiind puncte limite ale grămezii, urmează că o grămadă închisă conține punctele frontierei sale.

3^o. *densă*, într'un interval (a, b) , dacă orice interval oricât de mic ar fi, cuprins în (a, b) , conține puncte ale grămezii. De unde rezultă că toate punctele grămezii sunt puncte limite; prin urmare grămada este cuprinsă în derivata sa. Exemplu: grămada numerelor raționale, cuprinse într'un interval (a, b) este densă, căci ea este conținută în derivata sa, care în afară de numerele raționale, conține toate numerele iraționale cuprinse în acel interval.

4^o. *perfectă*, dacă coincide cu derivata sa. De exemplu, toate numerele cuprinse între 0 și 1, raționale și iraționale, inclusiv valorile extreme 0 și 1, formează o grămadă perfectă.

25. O grămadă se zice *conexă*, dacă fiind dat un număr pozitiv ε oricât de mic și două puncte arbitrare P și Q ale grămezii, se poate intercală între ele un număr limitat de puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$, ale grămezii astfel ca segmentele $PA_1, A_1A_2, \dots, A_nQ$ să fie mai mici ca ε . O grămadă perfectă și conexă se numește continuă; se mai zice că formează un *continuum*. Continuul se zice că este cu una sau mai multe dimensiuni, după numărul variabilelor cari determină un punct al sistemului.

26. O grămadă conexă este densă în toată întinderea sa.

În adevăr, dacă grămada n'ar fi densă în toată întinderea sa, ea ar conține cel puțin un punct P care să nu fie punct limită. Un cerc cu centrul în acest punct având o rază ε destul de mică, nu

ar conține alt punct al grămezii decât P . Prin urmare între acest punct și alt punct Q al grămezii nu am putea realiza intercalarea unui număr limitat de puncte ale grămezii astfel ca segmentele cari unesc două puncte consecutive, să fie mai mică ca ε ; grămada n'ar fi conexă.

27. În ordinea de idei care domină teoria grămezilor, o linie poate fi definită ca o grămadă de puncte conexă, închisă (adică punctele limite ale grămezii fac parte din grămadă) și fără puncte interioare: toate punctele cari formează linia, sunt numai puncte ale frontierei. O suprafață poate fi definită ca având pe lângă proprietățile precedente și puncte interioare; punctele frontiere pot fi considerate ca făcând parte sau nu din suprafață.

În teoria funcțiunilor nu vom avea de considerat linii și suprafețe definite în așa grad de generalitate. Vom considera liniile și suprafețele în sensul obicinuit, așa cum le consideră Geometria analitică. O asemenea linie zisă *regulată*, are în fiecare punct, exceptând unele puncte, o tangentă determinată și, dacă curba n'are ramuri infinite, ea se poate descompune într'un număr limitat de arce care să fie întâlnite de o linie dreaptă în cel mult două puncte; ceea ce permite a distinge o parte concavă și o parte convexă a curbei.

O porțiune de suprafață este un continuum cu două dimensiuni, mărginit de una sau de mai multe linii regulate. Aceste linii formează conturul suprafeții. Prin definițiune dar, o suprafață (arie) are puncte interioare și este totdeauna posibil a uni două puncte oarecari ale ei printr'o linie ale cărei puncte sunt interioare suprafeții.

O arie se zice cu *conexiune simplă* dacă orice curbă închisă situată în interiorul ariei limitează complet o porțiune a ei. Ceea ce caracterizează conexiunea simplă este faptul că orice curbă închisă situată în interiorul ariei se poate reduce, prin o deformațiune continuă, la un punct, fără a eși din arie. Conturul care limitează o arie cu conexiune simplă se zice *contur simplu*. Un asemenea contur poate fi descris în totalitatea lui de un punct mobil care se mișcă în mod continuu fără a pătrunde în interiorul ariei.

Exemple: aria unui cerc, a unei elipse, a unui pătrat este cu conexiune simplă. Aria mărginită de două cercuri concentrice este cu conexiune *multiplă* (dublă); conturul acestei arii este format de cele două cercuri; un cerc concentric și cuprins între ele, nu poate, prin deformațiune continuă, să fie redus la un punct fără a eși din aria considerată.

28. Două grămezi A și B se zic *echivalente* sau *de aceeași putere* și se reprezintă prin simbolul:

$$A \sim B,$$

dacă între elementele lor se poate stabili o corespondență biunivocă, adică dacă se poate stabili o lege astfel că la fiecare element al unei grămezi să corespundă un element și numai unul din cealaltă grămadă și viceversa. De exemplu: grămada numerelor pare 2, 4, 6, ..., 2n, ... și a numerelor impare 1, 3, 5, ..., 2n-1, ... sunt echivalente între ele și fiecare este echivalentă cu șirul numerelor naturale 1, 2, 3, ..., n, ...

Dacă grămezile sunt formate dintr'un număr limitat de elemente, este evident că echivalența lor cere ca numărul elementelor să fie același în ambele grămezi.

Din definițiune rezultă că două grămezi echivalente cu o a treia sunt echivalente între ele. Dacă avem

$$A \sim C, \quad B \sim C,$$

rezultă

$$A \sim B.$$

Se numește *sumă* a două grămezi A și B, grămada C ale căre elemente sunt elementele celor 2 grămezi și se notează

$$C = A + B.$$

29. *Grămezi numărabile.* O grămadă se numește *numărabilă* dacă este echivalentă cu grămada numerelor întregi pozitive. O grămadă nelimitată de elemente a_n , reprezentate printr'o literă afectată de indicii 1, 2, ..., n, ..., constituie o grămadă numărabilă, căc unui număr n din șirul numerelor naturale corespunde un singur element a_n (elementele sunt presupuse distincte) și vice-versa.

Intr'un mod mai general, să considerăm o grămadă de elemente $a_{m,n}$ reprezentate printr'o literă afectată de doi indici întregi pozitivi m, n dintre care unul cel puțin primește o infinitate de valori întregi pozitive ¹⁾.

Pentru a arată că aceste elemente formează o grămadă numărabilă, să le dispunem în ordinea în care suma indicilor $m + n$ merge crescând și elementele în care această sumă este constantă să fie dispuse în ordinea crescândă a primului indice m. Vom obține șirul

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \dots,$$

¹⁾ Nu este necesar să primească toate valorile întregi pozitive, este de ajuns să primească o infinitate deasemenea valori; de exemplu: valori pare, sau impare, sau...

care se poate scrie

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots,$$

dacă punem:

$$a_{11} = b_1, a_{12} = b_2, a_{21} = b_3, a_{13} = b_4, \dots$$

Grămada propusă $(a_{m,n})$ fiind identică cu grămada numerelor (b_n) este numărabilă.

În același mod se probează că grămada, ale cărei elemente sunt de forma:

$$a_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n},$$

este numărabilă, indicii $a_1, a_2, \dots, a_n$, fiind numere întregi pozitive, dintre care unul cel puțin primește o infinitate de asemenea valori.

30. *O grămadă numărabilă G ale cărei elemente $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ sunt grămezi numărabile, este o grămadă numărabilă.*

În adevăr, A_m ($m = 1, 2, \dots$) fiind o grămadă numărabilă, putem reprezenta elementele sale prin $a_{m,n}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$). Într-însul astfel în cazul în care elementele sunt de forma $a_{m,n}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Corolar. Suma ¹⁾ a două grămezi numărabile este o grămadă numărabilă.

De unde rezultă: 1^o. Grămada (a_n) , în care n primește o infinitate de valori întregi pozitive și negative, este numărabilă, căci ea se poate privi ca suma a două grămezi în cari n primește valori întregi respectiv pozitive și negative: 2^o. A și B fiind două grămezi numărabile, avem

$$A + B \sim A \sim B.$$

Căci grămezele numărabile fiind, prin definițiune, echivalente cu grămada numerelor întregi, sunt echivalente între ele.

31. *Grămada numerelor raționale este numărabilă.*

Putem să ne mărginim la cele pozitive. Demonstrarea acestei teoreme este imediată, dacă observăm că un număr rațional pozitiv este de forma

$$a_{m,n} = \frac{m}{n},$$

în care m și n primesc o infinitate de valori întregi pozitive.

32. *Totalitatea numerelor algebrice reale formează o grămadă numărabilă.*

¹⁾ Grămadă formată din elementele celor două grămezi.

Se numește *număr algebric* orice număr care este rădăcina unei ecuațiuni algebrice cu coeficienți raționali. Un număr algebric satisface o infinitate de ecuațiuni algebrice, printre cari, făcând abstracțiune de un multiplicator constant, există *numai una* al cărei grad este cel mai mic (ecuațiune ireductibilă). Gradul acestei ecuațiuni se zice *gradul numărului algebric*. Un număr algebric de gradul n satisface dar o singură ecuațiune ireductibilă de forma:

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

coeficienții fiind numere întregi.

Considerăm numai numerele algebrice reale, adică rădăcinile reale ale ecuațiunii (1) și le notăm

$$x a_0, a_1, a_2, \dots a_n; k$$

k primind valori întregi pozitive $\leq n$.

Aceste rădăcini variabile împreună cu indicii considerați, n rămânând constant, formează o grămadă numărabilă G_n (29). Grămada G , ale cărei elemente sunt grămezile G_n ($n = 1, 2, \dots$), fiind numărabilă (30) teorema este demonstrată.

Această teoremă cuprinde evident pe cea relativă la numerele raționale. Ecuațiunile cari admit aceste numere ca rădăcini sunt de gradul întâiu; grămada G se reduce la Grămada G_1 .

33. *Totalitatea numerelor reale cuprinse între două limite date formează o gramadă care nu este numărabilă.* Să considerăm intervalul $(0,1)$ și să demonstrăm că grămada numerelor reale cuprinse în acest interval nu este numărabilă. Pentru aceasta să demonstrăm întâiu propozițiunea preliminară:

Orice număr cuprins în intervalul $(0,1)$ poate fi exprimat printr'o fracțiune zecimală de un număr nelimitat de cifre, cele ce încep dela un rang destul de depărtat neîfiind toate nule.

Propozițiunea este evidentă pentru o fracțiune rațională ce se transformă într'o fracțiune zecimală periodică, simplă sau mixtă. Dacă fracțiunea ordinară se transformă exact în zecimală, este de ajuns să micșorăm ultima cifră semnificativă cu o unitate și să adăugăm la dreapta numărului cifra 9 repetată de un număr infinit de ori.

Dacă numărul este incomensurabil, el se poate defini ca limita unui șir ilimitat de numere raționale, de exemplu, de redusele fracțiunei continue în care el se poate desvoltă. Redusele fiind transformate în fracțiuni zecimale (cu câte un număr ilimitat de zecimale), numărul incomensurabil va fi definit de un șir ilimitat de asemenea fracțiuni, având fiecare un număr ilimitat de cifre.

Să revenim la teorema noastră. Să presupunem că grămada numerelor reale cuprinse în intervalul $(0,1)$, este numărabilă. Vom putea reprezintă elementele sale printr'un șir

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Însă, în virtutea propozițiunii preliminare, un număr oarecare a_n , din acest șir se poate reprezintă printr'o fracțiune zecimală nelimitată:

$$(2) \quad a_n = 0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{np} \dots,$$

în care cifrele dela un rang determinat nu sunt toate nule. La fiecare valoare a lui n , să facem să corespundă o cifră arbitrară

$$(3) \quad \beta_n \neq a_{nn}$$

și să considerăm numărul

$$(4) \quad b = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots,$$

care evident este cuprins în intervalul $(0,1)$ și care nu se găsește în șirul (1); căci b diferă de a_1 , prin prima cifră zecimală β_1 , de a_2 prin a doua cifră zecimală β_2 , ..., de a_n prin a n^a cifră zecimală, etc. Prin urmare există numere reale în intervalul $(0,1)$ cari nu fac parte din șirul (1), ceea ce este în contradicțiune cu ipoteza după care acest șir ar conține toate numerele reale.

q. e. d.

Teorema precedentă se poate enunța geometric astfel:

Totalitatea punctelor segmentului de dreaptă $(0-1)$ formează o grămadă care nu este numărabilă.

34. Putem înlocui segmentul $(0-1)$ printr'un segment de dreaptă oarecare. Căci între punctele a două segmente de dreaptă oarecări se poate stabili o corespondență biunivocă. Să observăm că putem considera segmentele situate pe aceeaș dreaptă, deoarece un segment de dreaptă și proiecțiunea sa ortogonală pe o axă, cu care face un unghi diferit de un unghi drept, se corespund punct cu punct.

Fie dar (a, b) , (a', b') cele două segmente situate pe axa absciselor, x și x' abscisele a două puncte ce voim să se corespundă pe cele două segmente. Substituțiunea

$$(1) \quad \frac{x'-a'}{b'-a'} = \frac{x-a}{b-a}$$

stabilește corespondența cerută. Cele două segmente considerate sunt dar echivalente

$$(2) \quad (a, b) \sim (a', b').$$

Dacă unul din cele două segmente devine infinit, fie de exemplu $b' = \infty$, înlocuim substituțiunea precedentă prin cea următoare

$$(3) \quad \frac{x' - a'}{x'} = \frac{x - a}{b - a}$$

Grămada punctelor situate pe un segment de dreaptă constituie ceea ce se numește un continuum liniar sau un continuum cu o dimensiune. Putem dar zice că:

Două continuuri liniare oarecari sunt echivalente sau au aceeași putere.

Intr'un mod mai general: *Două continuuri oarecari cu un același număr de dimensiuni sunt echivalente.*

Numim continuum cu n dimensiuni o grămadă cu n dimensiuni ale cărei variabile primesc toate valorile reale cuprinse în intervale date.

Mărginindu-ne la continuuri cu două dimensiuni:

$$(4) \quad \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d, \end{cases} \quad \begin{cases} a' \leq x' \leq b', \\ c' \leq y' \leq d', \end{cases}$$

propozițiunea rezultă din echivalențele

$$(a, b) \sim (a', b'), \quad (c, d) \sim (c', d').$$

35. *Teoremă. Orice grămadă nenumărabilă conține o grămadă numărabilă.*

În adevăr, oricâte elemente am scoate dintr'o grămadă infinită dată A , ea mai conține alte elemente. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ elementele scoase din A ; aceste elemente formează o grămadă numărabilă (a_n) , $(n = 1, 2, \dots)$.

36. *Teoremă. Dacă dintr'o grămadă nenumărabilă scoatem o grămadă numărabilă, diferența este o grămadă echivalentă cu grămada dată.*

Fie A o grămadă nenumărabilă și B o grămadă numărabilă conținută într'însa; diferența $A - B = C$, este o grămadă nenumărabilă, căci altfel A ar fi numărabilă (30).

Deasemenea, fie D o grămadă numărabilă conținută în C , diferența $C - D = E$ este nenumărabilă. Să comparăm între ele egalitățile.

$$A = B + D + E, \quad C = D + E.$$

Grămezile D și $B + D$ fiind numărabile, sunt echivalente între ele; de unde rezultă echivalența între grămezile A și C :

$$A \sim C.$$

Corolar. Grămada numerelor iraționale dintr'un interval dat, este echivalentă cu aceea a tuturor numerelor reale din același in-

terval, căci diferența lor, adică grămada numerelor raționale, este numărabilă.

Deasemenea, grămada numerelor transcendente (adică a numerelor cari nu sunt algebrice) dintr'un interval dat este echivalentă cu aceea a tuturor numerelor reale din acelaș interval, căci numerele algebrice formează o grămadă numărabilă.

Trecând dela grămezile cu o dimensiune la cele cu două dimensiuni, conchidem că grămada tuturor punctelor situate într'un dreptunghi este echivalentă cu grămada punctelor aceluiaș dreptunghi ale căror coordonate carteziane sunt numere iraționale.

37. *Teoremă. Continuul cu o dimensiune este echivalent cu continuul cu două dimensiuni.*

Putem înlocui continuul liniar prin intervalul $(0, 1)$ și continuul cu două dimensiuni, format dintr'un dreptunghi oarecare, prin pătratul $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (34). De altă parte, în virtutea corolarului precedent, ne putem mărgini a considera în regiunile date, numai punctele ale căror coordonate sunt numere iraționale.

Teorema de demonstrat revine dar a proba că unui număr irațional z , cuprins în intervalul $(0, 1)$, corespunde un singur punct ale cărui coordonate x, y sunt două numere iraționale cuprinse în acelaș interval și viceversa.

Să presupunem numărul z dezvoltat într'o fracțiune continuă

$$(1) \quad z = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

în care $a_1, a_2, a_3, \dots$ sunt numere întregi pozitive determinate și diferite de zero. Oricărui număr z din intervalul considerat corespunde un șir determinat deasemenea numere. Viceversa, unui șir dat de numere pozitive, printre care nici unul nu e nul, corespunde un număr unic z cuprins în intervalul $(0, 1)$.

Din șirul numerelor $a_1, a_2, \dots$ cari determină numărul z să separăm numerele cu indicii impari de cele cu indicii pari și să formăm expresiunile

$$(2) \quad x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_5 + \dots}}} \quad , \quad y = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_6 + \dots}}} \quad ,$$

cari determină un punct unic (x, y) . Așadar unui punct z corespunde un punct unic (x, y) . Viceversa, presupunând punctul (x, y) determinat de valorile precedente, să luăm pentru z expresiunea (1): punctului (x, y) corespunde un punct unic z . q. e. d.

Observare. Corespondența biunivocă între cele două grămezi de dimensiuni diferite nu poate fi continuă, adică punctelor infinit apropiate ale unei grămezi, nu corespund neapărat puncte infinit apropiate ale celeilalte grămezi.

Să presupunem contrariul și să considerăm totalitatea paralelelor la axa absciselor duse în interiorul pătratului; fiecărei paralele trebuie să-i corespundă în virtutea continuității, un segment al axei absciselor. Aceste segmente, în virtutea corespondenței biunivoce, n'au părți comune. Din această cauză, totalitatea lor este evident numărabilă, pe când totalitatea paralelelor considerate este echivalentă cu totalitatea numerelor cuprinse în intervalul $(0, 1)$ și prin urmare, nu este numărabilă. Ipoteza corespondenței continue este dar absurdă.

CAPITOLUL III.

CANTITĂȚI COMPLEXE. ȘIRURI. SERII ȘI PRODUSE CU TERMENI CONSTANȚI.

I — CANTITĂȚI COMPLEXE.

38. Să introducem cantitatea complexă

$$(1) \quad a + ib,$$

în care a și b sunt două numere pozitive sau negative iar i un simbol deocamdată nedeterminat și să ne propunem a determina natura acestui simbol astfel încât calculul aritmetic să se aplice fără nici o deosebire acestei cantități. Aceasta înseamnă mai precis că, păstrând definițiunile și modurile de operațiune din aritmetică, caracterele fundamentale ale acestor operațiuni să se păstreze și rezultatele obținute din aceste operațiuni să fie și ele cantități de forma (1).

Să observăm înainte de toate că nu poate exista o relațiune de forma

$$a + ib = 0,$$

fără ca $a = b = 0$, căci altminterlea

$$i = -\frac{a}{b}$$

n'ar mai fi un număr distinct de numerele reale; ceeace noi nu presupunem. Să definim acum operațiunile cu cantități complexe de forma (1) și să vedem cum se particularizează simbolul i prin condițiunile impuse mai sus.

39. *Adunarea* se va defini prin egalitatea

$$(2) \quad (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b');$$

rezultatul este deci o cantitate complexă. Această egalitate arată în acelaș timp că proprietatea fundamentală a adunării de a fi o operațiune *comutativă* este păstrată; căci A și B fiind două cantități complexe, avem în virtutea definițiunii (2)

$$A + B = B + A.$$

40. *Scăderea* se va defini prin egalitatea

$$(3) \quad (a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b');$$

rezultatul este deci o cantitate complexă. In acelaș timp vedem că scăderea este operațiunea inversă adunării, adică

$$(A - B) + B = A.$$

Până acum n'am fost nevoiți să facem nici o restricțiune asupra simbolului i . Oricare ar fi natura lui, operațiunile de adunare și scădere își păstrează proprietățile lor caracteristice, iar rezultatele sunt cantități complexe.

41. *Inmulțirea*. Să considerăm produsul

$$(a + ib)(a' + ib')$$

și să-l tratăm după cum arată semnele, ca un produs de două sume neefectuate. Obținem astfel:

$$(4) \quad (a + ib)(a' + ib') = aa' + i(ab' + ba') + i^2bb'.$$

Produsul nu mai este de forma (1) deoarece conține i^2 . Pentru ca membrul al doilea să se poată reduce la forma (1) este necesar și suficient ca i^2 să fie de forma

$$(5) \quad i^2 = \alpha + i\beta,$$

α și β fiind cantități reale. In acest caz vom avea

$$(6) \quad (a + ib)(a' + ib') = aa' + bb'a + i(ab' + ba' + bb'\beta).$$

Sîmbolul i este așadar supus la restricțiunea de a verifică relațiunea (5). Este de observat însă că α și β nu sunt arbitrari ci trebuie să satisfacă inegalitatea

$$(7) \quad \beta^2 + 4\alpha < 0,$$

deoarece i privit ca rădăcină a ecuațiunii (5), scrisă sub forma

$$(8) \quad i^2 - \beta i - a = 0,$$

nu este o cantitate reală.

Ne rămâne să cercetăm dacă, sub condițiunile (5) și (7), proprietățile fundamentale ale înmulțirii se păstrează. Egalitatea (6) ne arată că dacă permutăm factorii între ei produsul nu se schimbă; prin urmare înmulțirea cantităților complexe este *comutativă*.

Să arătăm acum că un produs de doi factori nu se anulează decât împreună cu unul din factorii săi. Intr'adevăr, pentru ca membrul al doilea din (6) să fie nul, trebuie să avem

$$(9) \quad aa' + abb' = 0, \quad ba' + (a + \beta b)b' = 0.$$

Dacă $a = b = 0$, ecuațiunile precedente sunt satisfăcute; deci proprietatea este stabilită. Să presupunem acum că unul din aceste numere, de exemplu, $b \neq 0$. Determinantul

$$\begin{vmatrix} a & ab \\ b & a + \beta b \end{vmatrix} = b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \beta \frac{a}{b} - a \right)$$

nu se anulează niciodată în virtutea condițiunii (7). Sistemul (9) nu admite deci în acest caz altă soluțiune decât

$$a' = b' = 0.$$

Proprietatea este așadar stabilită în toate cazurile.

42. Impărțirea. Câtul

$$\frac{a + ib}{c + id},$$

a două cantități complexe $a + ib$, $c + id$, în care c și d nu sunt nuli în acelaș timp, se va defini prin egalitatea:

$$(10) \quad (a + ib) = (c + id) (x + iy)$$

sau, în virtutea egalității (5),

$$(11) \quad (a + ib) = (cx + ady) + i(dx + (c + \beta d)y).$$

De unde rezultă ecuațiunile

$$(12) \quad cx + ady = a, \quad dx + (c + \beta d)y = b,$$

cari admit un sistem unic de valori pentru x și y , deoarece determinantul

$$\begin{vmatrix} c & ad \\ d & c + \beta d \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, în virtutea condițiunii (7).

Rezultatul împărțirii intră deci în același tip ca și termenii săi și este unic.

În sfârșit, proprietatea caracteristică a împărțirii de a fi operațiunea inversă înmulțirii, rezultă din însăși definițiunea pe care am dat-o.

În rezumat, putem spune că cele patru operațiuni aritmetice se aplică în întregime cantităților de forma $a + ib$, i fiind o rădăcină a ecuațiunii

$$(8) \quad i^2 - \beta i - \alpha = 0,$$

în care α și β sunt două numere reale supuse la condițiunea

$$(7) \quad \beta^2 + 4\alpha < 0.$$

Pentru a simplifica calculele și a avea o reprezentare geometrică interesantă, se ia

$$(13) \quad \beta = 0, \alpha = -1.$$

Ecuațiunea de condițiune (8) devine

$$(14) \quad i^2 + 1 = 0,$$

de unde rezultă: $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ...

Rezultatele înmulțirii și împărțirii se simplifică precum arată egalitățile

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba'),$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Formula binomului lui *Newton*, care rezultă din proprietățile înmulțirii, se aplică evident cantităților complexe. De unde conchidem expresiunile

$$(a + ib)^m = A + iB, \quad (a - ib)^m = A - iB,$$

A și B fiind cantități reale.

Cantitățile complexe $a + ib$ astfel definite, se mai numesc și cantități *imaginare*; a se numește *partea reală*, iar ib *partea pur imaginară* a cantității complexe.

43. Modul. Cantitatea

$$+ \sqrt{a^2 + b^2}$$

se numește *valoarea absolută* sau *modulul* cantității complexe $a + ib$. Avem, precum se verifică imediat, relațiunile

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

$$\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

$$\sqrt{(a^2 + b)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2},$$

care exprimă proprietățile următoare:

1^o. Modulul unei sume este mai mic sau egal cu suma modulelor termenilor;

2^o. Modulul unei diferențe este mai mare sau egal cu diferența modulelor termenilor;

3^o. Modulul unui produs este egal cu produsul modulelor factorilor.

44. Reprezentarea geometrică a cantităților complexe.

Cantitatea complexă $a + ib$ se reprezintă în plan printr'un punct M ale cărui coordonate rectangulare sunt a, b .

Punctul M se numește *afixul* cantității complexe $a + ib$. Introducând coordonatele polare (ϱ, θ) putem scrie

$$a + ib = \varrho (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cantitatea pozitivă $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ este modulul cantității complexe date, ea este reprezentată prin distanța dela origină până la punctul (a, b) . Unghiul θ , numit *argumentul* lui $a + ib$, este determinat, abstracțiune făcând de un multiplu de 2π .

Egalitatea

$$\varrho (\cos \theta + i \sin \theta) = \varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

trage dar după sine egalitățile

$$\varrho = \varrho', \quad \theta = \theta' + 2k\pi,$$

k fiind un număr întreg arbitrar.

Egalitățile următoare se verifică imediat:

$$\varrho (\cos \theta + i \sin \theta) \times \varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta') = \varrho \varrho' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$\frac{\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)}{\varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{\varrho}{\varrho'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')],$$

$$[\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)]^m = \varrho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta),$$

m fiind un număr întreg pozitiv. Ultima egalitate subsistă și pentru m întreg negativ, precum rezultă din transformările

$$\begin{aligned} [\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)]^{-m} &= \frac{1}{[\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)]^m} \\ &= \frac{1}{\varrho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)} = \varrho^{-m} [\cos(-m)\theta + i \sin(-m)\theta]. \end{aligned}$$

În fine, m fiind un număr întreg pozitiv, se recunoaște imediat că avem egalitatea

$$\sqrt[m]{\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)} = \varrho^{\frac{1}{m}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{m} \right],$$

în care k este un număr întreg arbitrar. Obținem m valori diferite dând lui k valorile: $0, 1, 2, \dots, m-1$.

II. — ȘIRURI ȘI SERII SIMPLE CU TERMENI CONSTANȚI. ✓

45. Ca și în cazul numerelor reale, se zice că un șir de cantități complexe

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

este *convergent*, sau admite o limită $A + iB$, dacă la un număr pozitiv ε arbitrar de mic corespunde un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geq N$ să avem

$$(2) \quad |a_n - (A + iB)| < \varepsilon.$$

46. *Teoremă.* Pentru ca șirul (1) să admită o limită $A + iB$, A și B fiind cantități reale, este necesar și suficient ca șirurile (α_n) și (β_n) să fie convergente și să aibă respectiv ca limite A și B .

În adevăr, să presupunem șirul (1) convergent și limita sa $A + iB$; vom avea inegalitatea (2) sau

$$(3) \quad \sqrt{(\alpha_n - A)^2 + (\beta_n - B)^2} < \varepsilon;$$

de unde rezultă inegalitățile

$$(4) \quad |\alpha_n - A| \leq \varepsilon, \quad |\beta_n - B| \leq \varepsilon.$$

Condițiunea este deci *necesară*.

Viceversa. Să presupunem că avem $\lim \alpha_n = A, \lim \beta_n = B$; vom putea scrie pentru $n \geq N$, N fiind un număr întreg pozitiv destul de mare,

$$|\alpha_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n - B| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de unde rezultă inegalitatea

$$|\alpha_n + i\beta_n - (A + iB)| < \varepsilon.$$

Condițiunea este deci *suficientă*.

47. *Teoremă.* Pentru ca șirul (1) să fie convergent, este necesar și suficient ca la un ε dat să corespundă un N astfel ca, pentru $n \geq N$, $n' \geq N'$, să avem

$$|a_n - a_{n'}| < \varepsilon.$$

Această teoremă este o consecință a teoremei precedente și a teoremei (§ 4) cu acelaș enunț ca cel de sus, relativ la un șir de cantități reale.

48. Șirul (1) se numește *divergent* dacă la un număr pozitiv M ,

oricât de mare vom, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel că pentru $n \geq N$ avem

$$|a_n| > M.$$

Dacă șirul dat nu este nici convergent, nici divergent, se zice că *oscilează*.

49. Serii. O serie

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

ai cărei termeni sunt cantități oarecare, reale sau complexe, se zice *convergentă*, *divergentă* sau că *oscilează* după cum șirul

$$(2) \quad s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

este convergent, divergent sau oscilează.

În cazul de convergență, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se numește *suma seriei* (1).

Să enunțăm teorema următoare, consecință imediată a teoremei (46).

Teoremă. Pentru ca seria

$$\Sigma a_n, \quad (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

să fie convergentă este necesar și suficient ca seriile

$$\Sigma \alpha_n, \quad \Sigma \beta_n$$

să fie convergente.

50. Teoremă. Dacă seria modulelor unei serii date

$$(1) \quad \Sigma a_n \quad (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

este convergentă, seria este convergentă.

În adevăr, din inegalitățile

$$|\alpha_n| \leq |a_n|, \quad |\beta_n| \leq |a_n|,$$

rezultă că convergența seriei $\Sigma |a_n|$ trage după sine convergența seriilor $\Sigma \alpha_n, \Sigma \beta_n$ și prin urmare a seriei propuse.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată, căci se poate întâmpla ca seria (1) să fie convergentă fără ca seria modulelor să fie convergentă.

Se zice că o serie este *absolut convergentă* dacă seria modulelor este convergentă și că este *semiconvergentă* în cazul când ea este convergentă, pe când seria modulelor este divergentă.

O serie ai cărei termeni sunt reali și de același semn, este sau absolut convergentă sau divergentă, ea nu poate să fie semiconvergentă.

51. *Teoremă. Suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea termenilor.*

Este evident că schimbarea ordinei unui număr mărginit de termeni într-o serie convergentă oarecare nu poate modifica suma seriei. Este vorba să probăm aci că oricare ar fi *legea după care termenii seriei absolut convergente se succed, suma rămâne aceeași.*

Fie

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

o serie absolut convergentă, pe care s'o ordonăm într'un mod diferit oarecare, scriind-o sub forma

$$(2) \quad a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots$$

Termenii seriei (2) nu diferă de aceia ai seriei (1) decât prin rangul ce ocupă, astfel că orice termen al seriei (1) se găsește în seria (2) și viceversa, orice termen al seriei (2) se găsește în seria (1). Să punem

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ S'_n &= a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n. \end{aligned}$$

Este evident că oricare ar fi valoarea numărului întreg n , putem să alegem pentru n' o valoare întreagă destul de mare pentru ca printre primii n' termeni ai seriei (2) să se găsească cei dintâi n termeni ai seriei (1). Vom putea deci scrie

$$S'_{n'} - S_n = a_\alpha + a_\beta + \dots + a_\lambda,$$

indicii $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ fiind toți superiori lui n ; de unde

$$|S'_{n'} - S_n| \leq |a_\alpha| + |a_\beta| + \dots + |a_\lambda|$$

și *a fortiori*

$$|S'_{n'} - S_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|,$$

$n + p$ fiind cel mai mare dintre indicii $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. Însă seria propusă fiind absolut convergentă, putem presupune n destul de mare astfel ca membrul din urmă să fie mai mic ca $\frac{\varepsilon}{2}$ oricât de mic ar fi ε , și oricât de mare ar fi p , adică să avem

$$|S'_{n'} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

precum și

$$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

S fiind suma seriei (1). De unde

$$|S - S'_{n'}| = |(S - S_n) + (S_n - S'_{n'})| \leq |S - S_n| + |S_n - S'_{n'}|$$

adică

$$|S - S'_{n'}| < \varepsilon.$$

Această inegalitate demonstrează teorema.

52. *Serii semiconvergente. Intr'o serie semiconvergentă suma seriei poate varia când schimbăm ordinea termenilor.*

Această proprietate se constată lesne pe seria

$$(1) \quad S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots,$$

dacă ordonăm termenii în diferite moduri.

1^o. Să ordonăm termenii acestei serii astfel încât un termen pozitiv să fie urmat de doi termeni negativi și să reprezentăm prin S' suma seriei astfel obținută; vom avea

$$(2) \quad S' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$

Însă

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{4n-2};$$

prin urmare putem scrie

$$S' = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right),$$

adică

$$(3) \quad S' = \frac{1}{2} S.$$

2^o. Să ordonăm aceeași serie astfel încât doi termeni pozitivi să fie urmați de un termen negativ și fie S'' suma corespunzătoare, adică

$$(4) \quad S'' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Suma din paranteză se poate înlocui prin suma

$$\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right);$$

ceea ce permite să scriem

$$S'' = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

adică

$$(5) \quad S'' = S + \frac{1}{2} S = \frac{3}{2} S.$$

Să demonstrăm teorema generală următoare:

53. *Teoremă (Riemann).* — *Intr'o serie semiconvergentă ai cărei termeni sunt reali, putem ordona termenii în așa fel ca suma seriei să fie egală cu o cantitate dată după voie.*

Fie

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

o serie semiconvergentă cu termeni reali; acești termeni sunt prin urmare de semne diferite (50). Să reprezentăm prin a_n termenii pozitivi și prin $-\beta_n$ termenii negativi ai seriei (1). Seriile

$$(2) \quad \Sigma a_n, \quad \Sigma \beta_n$$

sunt neapărat divergente; căci dacă amândouă ar fi convergente, seria (1) ar fi absolut convergentă, iar dacă una din ele ar fi convergentă și cealaltă divergentă, seria propusă ar fi divergentă.

De unde rezultă că reprezentând prin σ o cantitate reală oarecare, putem determina două numere întregi $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$, astfel ca să avem inegalitățile

$$(3) \quad \begin{cases} S_\mu = a_1 + \dots + a_\mu > \sigma, \\ S_{\mu-1} = a_1 + \dots + a_{\mu-1} \leq \sigma \end{cases}$$

și

$$(4) \quad \begin{cases} S_{\mu+\nu} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) \leq \sigma, \\ S_{\mu+\nu-1} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_{\nu-1}) > \sigma. \end{cases}$$

Numerele μ și ν fiind astfel determinate, putem pentru același motiv (divergența seriilor (2)), să determinăm două numere întregi $\mu' \geq 1$, $\nu' \geq 1$ astfel ca să avem inegalitățile

$$(5) \quad \begin{cases} S_{\mu+\nu+\mu'} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu) + (a_{\mu+1} + \dots + a_{\mu+\mu'}) > \sigma, \\ S_{\mu+\nu+\mu'-1} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) + (a_{\mu+1} + \dots + a_{\mu+\mu'-1}) \leq \sigma, \end{cases}$$

și

$$(6) \quad \begin{cases} S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) + (a_{\mu+1} + \dots + a_{\mu+\mu'}) - (\beta_{\nu+1} + \dots + \beta_{\nu+\nu'}) \leq \sigma, \\ S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1} = (a_1 + \dots + a_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) + (a_{\mu+1} + \dots + a_{\mu+\mu'}) - (\beta_{\nu+1} + \dots + \beta_{\nu+\nu'-1}) > \sigma. \end{cases}$$

Continuând în același mod obținem șirurile

$$(7) \quad \begin{cases} S_\mu, S_{\mu+\nu-1}, S_{\mu+\nu+\mu'}, S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1}, \dots, \\ S_{\mu-1}, S_{\mu+\nu}, S_{\mu+\nu+\mu'-1}, S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'}, \dots \end{cases}$$

sumele din prima linie orizontală, fiind mai mari ca σ , cele din a doua linie mai mici, cel mult egale cu σ . Numărul σ se află așadar cuprins între două sume situate pe aceeași coloană

$$(S_\mu, S_{\mu-1}), (S_{\mu+\nu-1}, S_{\mu+\nu}), (S_{\mu+\nu+\mu'}, S_{\mu+\nu+\mu'-1}), \dots$$

a căror diferență este respectiv

$$a_\mu, \beta_\nu, a_{\mu+\mu'}, \beta_{\nu+\nu'}, \dots$$

Însă termenii $a_\mu, a_{\mu+\mu'}, \dots, \beta_\nu, \beta_{\nu+\nu'}, \dots$ devenind mai

mici ca orice cantitate dată, când indicii lor sunt destul de mari, rezultă că printre numerele

$$(8) \quad \mu, \mu+v, \mu+v+\mu', \mu+v+\mu'+v', \dots,$$

există un număr N astfel încât pentru orice număr n , cuprins printre ele și satisfăcând inegalitatea $n \geq N$, să avem

$$(9) \quad |\sigma - S_n| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε .

Dacă n este cuprins între două numere ale șirului (8), S_n va fi cuprins între sumele corespunzătoare acestor numere și inegalitatea (9) încă subsistă. q. e. d.

Corolar. Suma seriei semiconvergente cu termeni complexi

$$\Sigma(a_n + i\beta_n) = \Sigma a_n + i\Sigma \beta_n$$

poate deveni egală cu o cantitate $\sigma + i\sigma'$ în care una din cantitățile σ sau σ' este dată după voie.

Se poate întâmpla ca ambele serii Σa_n , $\Sigma \beta_n$ să fie semiconvergente, sau numai una din ele. Putem așadar ordona termenii seriei propuse $\Sigma(a_n + i\beta_n)$ astfel ca una din seriile Σa_n , $\Sigma \beta_n$ să aibă o sumă dată după voie. Ordinea termenilor celeilalte serii fiind cu modul acesta determinată, suma corespunzătoare nu poate fi arbitrară.

Din cele ce preced rezultă că o serie a cărei sumă este independentă de ordinea termenilor este absolut convergentă.

54. *Adițiunea seriilor.* Fie

$$s = \sum_1^{\infty} a_n, \quad s' = \sum_1^{\infty} b_n$$

sumele a două serii convergente; vom avea

$$\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n.$$

În adevăr, punând

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad s'_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

$$S_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n);$$

avem

$$S_n = s_n + s'_n,$$

de unde

$$\lim S_n = s + s'.$$

Regula adițiunii se aplică evident la un număr limitat oarecare de serii convergente.

Dacă seriile date sunt absolut convergente, seria $\Sigma(a_n + b_n)$ este absolut convergentă; iar dacă una este absolut și cealaltă semiconvergentă, seria rezultantă este semiconvergentă.

Se poate întâmpla ca seriile Σa_n , Σb_n să fie semiconvergente sau chiar divergente și seria $\Sigma(a_n + b_n)$ să fie absolut convergentă.

Astfel seriile

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \Sigma \frac{(-1)^n}{2n}$$

sunt semiconvergente și seriile

$$\Sigma \frac{1}{2n-1}, \quad \Sigma \frac{(-1)^n}{2n}$$

sunt divergente, pe când seriile

$$\Sigma (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

$$\Sigma \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{n(2n-1)},$$

sunt absolut convergente.

III. — ȘIRURI ȘI SERII DUBLE CU TERMENI CONSTANȚI.

55. Fie

$$a_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

un număr real sau complex a cărei valoare se presupune determinată când se dau valorile indicilor m, n . Se zice că $a_{m,n}$ este termenul general al unui șir *de două ori infinit* sau *dublu* (relativ la indicii m, n). Termenii șirului dublu se așează de obicei într'un tablou de formă dreptunghiulară

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

și se reprezintă pentru prescurtare prin $(a_{m,n})$. Termenii în cari primul indice este constant se află pe aceeași linie orizontală, aceia în cari al doilea indice este constant, se află pe aceeași coloană și în fine termenii în cari ambii indici sunt egali se zice că se află pe diagonala tabloului.

Termenii unui șir dublu pot fi considerați ca o grămadă numărabilă cu două dimensiuni; această grămadă fiind echivalentă cu grămada numerelor întregi pozitive, rezultă că un șir dublu se poate transforma într'un șir simplu, ordonând termenii lui într'un mod

convenabil oarecare, de exemplu, în ordinea în care am ordonat elementele unei grămezi cu două dimensiuni pentru a o transforma într-o grămadă cu o dimensiune (§ 29).

56. Un șir $(a_{m,n})$ se zice *convergent* sau că admite o limită A , dacă la un ε dat corespund două numere pozitive întregi M, N astfel încât pentru $m \geq M, n \geq N$ să avem

$$|A - a_{m,n}| < \varepsilon.$$

În acest caz se scrie

$$\lim_{m=\infty, n=\infty} a_{m,n} = A.$$

Dacă P fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, avem

$$|a_{m,n}| > P, \text{ pentru } m \geq M, n \geq N,$$

șirul se zice *divergent*. În fine dacă șirul nu este convergent, nici divergent, se zice că oscilează.

57. Avem teoremele:

1^o. Un șir nelimitat dublu $(a_{m,n})$ de numere reale, cuprinse între două numere date, admite o limită inferioară și o limită superioară.

2^o. Condițiunea necesară și suficientă ca șirul $(a_{m,n})$ să fie convergent este ca la un ε dat să corespundă două numere pozitive întregi M, N astfel ca pentru $m' \geq M, n' \geq N$ să avem

$$|a_{m,n} - a_{m',n'}| < \varepsilon.$$

Aceeaș demonstrațiune ca în cazul șirurilor simple.

58. Convergența unui șir dublu $(a_{m,n})$ nu trage după sine convergența șirului simplu obținut când unul din cei doi indici m sau n rămâne constant.

Exemplu:

$$a_{m,n} = (-1)^{m+n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right);$$

avem

$$\lim_{m,n} a_{m,n} = 0,$$

pe când

$$\lim_{m=\infty} a_{m,n} = \pm \frac{1}{n}, \quad \lim_{n=\infty} a_{m,n} = \pm \frac{1}{m}.$$

Să presupunem însă că și aceste șiruri sunt convergente și fie

$$\lim_{m=\infty} a_{m,n} = A_n, \quad \lim_{n=\infty} a_{m,n} = B_m, \quad \lim_{m=\infty, n=\infty} a_{m,n} = A;$$

vom avea

$$\lim_{n=\infty} A_n = \lim_{m=\infty} B_m = A.$$

In adevăr, putem scrie

$$|a_{m,n} - A_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m \geq M, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

şı

$$|a_{m,n} - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m \geq M, n \geq N.$$

De unde

$$|A - A_n| \leq |A - a_{m,n}| + |a_{m,n} - A_n| < \varepsilon, m \geq M, n \geq N,$$

adică

$$\lim A_n = A.$$

In acelaş mod se probează că $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = A$.

59. Dacă $\lim A_n \neq \lim B_n$, A_n și B_n având semnificațiile de mai sus, șirul $(a_{m,n})$ nu poate fi convergent. Dar, chiar în cazul când limitele precedente sunt egale, încă se poate întâmpla ca șirul dat să nu fie convergent, precum ne arată exemplul

$$a_{m,n} = \frac{1}{1 + (m-n)^2}.$$

Oricare ar fi valoarea lui m sau oricare ar fi valoarea lui n , avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = 0,$$

pe când, dacă facem m și n să tindă în același timp către infinit, $m - n$ este nedeterminat și $a_{m,n}$ nu tinde către nici o limită.

60. *Serii duble.* Numim serie dublă seria

[illegible]

dedusă din şirul dublu $(a_{m,n})$. Să punem

$$(2) \quad S_{m,n} = \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n a_{h,k}.$$

Seria (1) se zice convergentă, divergentă sau se zice că oscilează, după cum şirul dublu $(S_{m,n})$ este convergent, divergent sau osci-

lează. În cazul când seria este convergentă, $\lim S_{m,n} = S$, pentru $m = \infty$ și $n = \infty$ se numește suma seriei și se reprezintă, pentru prescurtare, prin

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n}.$$

61. Din proprietățile șirurilor duble rezultă:

1°. O serie dublă poate fi convergentă fără ca seriile formate de liniile sau de coloanele de un rang limitat din tabloul (1) să fie convergente.

2°. Fie A_m suma seriei formată de linia m^a , B_n suma seriei formată de coloana n^a ; chiar dacă avem

$$\sum_m A_m = \sum_n B_n,$$

se poate ca seria (1) să nu fie convergentă.

62. Dacă seria modulelor unei serii duble este convergentă, seria dată este convergentă.

Fie $S'_{m,n}$ suma modulelor termenilor cari figurează în $S_{m,n}$. Prin ipoteză, $S'_{m,n}$ tinde către o limită pentru $m = \infty$, $n = \infty$; prin urmare la un ε dat corespund două numere pozitive întregi M , N astfel că pentru $m \geq M$, $n \geq N$ avem

$$|S'_{m+p, n+q} - S'_{m,n}| < \varepsilon,$$

p și q fiind două numere pozitive întregi arbitrare. Însă membrul întâiu al acestei inegalități este suma modulelor termenilor cari figurează în diferența $S_{m+p, n+q} - S_{m,n}$, indicii având aceleași valori ca mai sus. Prin urmare

$$|S_{m+p, n+q} - S_{m,n}| \leq S'_{m+p, n+q} - S'_{m,n};$$

de unde rezultă inegalitatea:

$$|S_{m+p, n+q} - S_{m,n}| < \varepsilon, \quad (m \geq M, n \geq N),$$

care exprimă că șirul dublu $(S_{m,n})$ este convergent; prin urmare seria propusă este convergentă.

Ca și în cazul seriilor simple, o serie dublă se zice *absolut convergentă* dacă seria modulelor termenilor este convergentă.

63. Teoremă. Dacă seria $\sum \sum a_{m,n} = S$ este absolut convergentă, conchidem:

1°. Liniile și coloanele (1) sunt serii absolut convergente.

2°. Punând

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}, \quad \sigma'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}, \quad \text{vom avea}$$

$$\lim \sigma_n = S = \lim \sigma'_m.$$

Propozițiunea 1^o este evidentă căci $\Sigma |a_{m,n}|$, când unul din cei doi indici variază pe când celalt este fix, este mai mică ca $\Sigma \Sigma |a_{m,n}|$ în care ambii indici variază.

Propozițiunea 2^o este identică cu propozițiunea relativă la șiruri duble (58) în care am înlocui A_n, B_m, A respectiv prin σ_n, σ'_m, S .

64. *Teoremă. Suma seriei duble $\Sigma \Sigma a_{m,n}$ absolut convergentă este independentă de ordinea termenilor.*

Demonstrațiune analoagă cu cea relativă la serii simple.

Din această teoremă rezultă că fiind dată o serie dublă absolut convergentă, putem, într-o infinitate de moduri, scrie termenii ei într'un șir și formă o serie simplă, a cărei valoare este independentă de ordinea termenilor. Dacă seria este semiconvergentă, suma ei nu este definită decât dacă se dă legea de succesiune a termenilor.

65. *Aplicațiuni:* 1^o. Să considerăm seria dublă

$$\Sigma \Sigma \frac{1}{(m^2 + n^2)^a},$$

în care m și n primesc toate sistemele de valori întregi, pozitive și negative, afară de 0,0, a fiind un număr real și valoarea adoptată pentru numitor fiind reală și pozitivă. Să examinăm cum trebuie să fie numerele a pentru ca seria să fie convergentă.

Termenii seriei fiind toți pozitivi, seria nu poate fi decât absolut convergentă în cazul când ea este convergentă. Putem așadar ordona termenii seriei după voie. Să procedăm în modul următor: Ordonăm termenii astfel ca reunindu-i în grupuri, grupul de gradul p să conțină termenii ai căror ambii indici primesc toate valorile dela $-p$ la $+p$, exceptând pe aceia ai căror indici sunt amândoi în valoare absolută mai mici decât p .

Astfel, valorile lui m și n din primul grup sunt cuprinse în tabloul

$$\begin{array}{ccc} -1, -1 & -1, 0 & -1, 1 \\ 0, -1 & & 0, 1 \\ 1, -1 & 1, 0 & 1, 1 \end{array}$$

Valorile indicilor din al doilea grup sunt date de tabloul

$$\begin{array}{ccccccc} -2, 2 & -2, -1 & -2, 0 & -2, 1 & -2, 2 \\ -1, -2 & & & & -1, 2 \\ 0, -2 & & & & 0, 2 \\ 1, -2 & & & & 1, 2 \\ 2, -2 & 2, -1 & 2, 0 & 2, 1 & 2, 2 \end{array}$$

În general, grupul de rangul p va fi dat de tabloul

$$\begin{array}{ccc}
 -p, -p & -p, -(p-1) \dots -p, 0 & -p, 1 \dots -p, p \\
 -(p-1), -p & & -(p-1) \dots p \\
 \vdots & & \vdots \\
 -1, -p & & -1, -p \\
 0, -p & & 0, p \\
 1, -p & & 1, p \\
 \vdots & & \vdots \\
 p, -p & p, -(p-1) \dots p, 0 & p, 1 \dots p, p
 \end{array}$$

Acest tablou este compus din câte $2p + 1$ termeni în liniile extreme și din câte doi în cele $2p - 1$ linii intermediare; el conține deci

$$2(2p + 1) + 2(2p - 1) = 8p \text{ termeni.}$$

Fie S_p suma termenilor grupului p ; seria propusă va fi convergentă sau divergentă în același timp cu seria $\sum_{p=1}^{\infty} S_p$.

Însă cel mai mare termen al grupului p fiind $\frac{1}{p^{2a}}$ și cel mai mic $\frac{1}{2^{ap^{2a}}}$, avem

$$\frac{8}{2^{ap^{2a}}} < S_p < \frac{8}{p^{2a-1}}.$$

De unde rezultă că condițiunea necesară și suficientă ca seria $\sum S_p$ și prin urmare seria propusă să fie convergentă este ca să avem $2a - 1 > 1$, adică

$$a > 1.$$

2°. Seria

$$\sum \sum \frac{1}{(am^2 + 2bm + cn^2)^a}$$

în care a, b, c sunt numere reale satisfăcând inegalitatea

$$b^2 - ac < 0,$$

este convergentă sau divergentă în același timp cu seria considerată mai sus, căci raportul

$$\left(\frac{am^2 + 2bm + cn^2}{m^2 + n^2} \right)^a$$

a doi termeni corespunzători din ambele serii rămâne cuprins între două numere finite și de același semn, oricare ar fi valorile lui m și n , exceptând sistemul $m = n = 0$, care este exclus.

66. *Produsul a două serii absolut convergente.* Fie

$$(1) \quad s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad s' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

două serii absolut convergente. Seria dublă, al cărei termen general este $c_{ik} = a_i b_k$, este absolut convergentă și suma sa S este dată de egalitatea $S = ss'$.

Pentru a stabili această propozițiune, să punem

$$s_m = \sum_1^m a_i, \quad s'_n = \sum_1^n b_k, \quad s_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ik}$$

$$\sigma_m = \sum_1^m |a_i|, \quad \sigma'_n = \sum_1^n |b_k|, \quad \lim_{m=\infty} \sigma_m = \sigma, \quad \lim_{n=\infty} \sigma'_n = \sigma'$$

și fie R_m, R'_n resturile corespunzătoare ale celor două serii date. Vom avea

$$s = s_m + R_m, \quad s' = s'_n + R'_n, \quad s_{mn} = s_m s'_n;$$

de unde

$$(2) \quad s s' - s_{mn} = s_m R'_n + s'_n R_m + R_m R_n.$$

Însă, în virtutea convergenței absolute a seriilor (1), există două numere întregi pozitive M, N astfel încât pentru $m \geq M, n \geq N$, să avem

$$|R_m| < \varepsilon, \quad |R'_n| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De altă parte, ținând seamă de inegalitățile

$$(3) \quad S_m \leq \sigma_m < \sigma, \quad S'_n \leq \sigma'_n < \sigma',$$

egalitatea (2) ne dă

$$(4) \quad |s s' - s_{mn}| < (\sigma + \sigma' + \varepsilon)\varepsilon, \quad (m \geq M, n \geq N).$$

Această inegalitate demonstrează teorema.

IV. — CONVERGENȚA UNUI PRODUS DE UN NUMĂR NELIMITAT DE FACTORI CONSTANȚI.

67. Fie

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

un șir nelimitat de cantități oarecare reale sau complexe diferite de -1 . Să considerăm produsul care are ca factori

$$1 + a_1, 1 + a_2, \dots, 1 + a_n, \dots$$

Fie

$$(2) \quad p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$$

produsul celor dintâi n factori. Se poate întâmpla ca făcând n să crească neconținut, p_n să tindă către o limită finită sau să nu tindă

către nici o limită. În cazul întâiu, dacă limita este *diferită de zero*, vom zice că produsul este *convergent*. În orice alt caz vom zice că produsul este *divergent*.

Pentru ca produsul p_n să tindă către o limită, sau ceeace este tot una, pentru ca șirul

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

să fie convergent este necesar și suficient ca la un număr pozitiv ε dat ε , arbitrar de mic, să corespundă un număr pozitiv N astfel încât pentru $n \geq N$ să avem

$$(3) \quad |p_{n+m} - p_n| < \varepsilon,$$

m fiind un număr pozitiv oricât de mare voim.

Produsul p_n fiind prin ipoteză finit și diferit de zero, inegalitatea precedentă se poate înlocui prin cea următoare

$$(4) \quad \left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

în care am scris ε în loc de $\frac{\varepsilon}{|p_n|}$.

Făcând $m = 1$ și dând lui n valori din ce în ce mai mari, conchidem că pentru convergența produsului dat este necesar, însă nu suficient, ca începând dela un rang destul de depărtat, termenii șirului (1) să descrească în valoare absolută și să tindă către zero.

68. Să considerăm mai întâiu cazul când termenii șirului sunt reali și pozitivi. Vom avea

$$(5) \quad p_n = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + (a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n) + \dots + a_1 a_2 \dots a_n > 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

de unde rezultă că pentru ca p_n să tindă către o limită finită, când n tinde către infinit, limită neapărat pozitivă, este *necesar* ca suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să tindă către o limită finită, adică ca seria

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

să fie convergentă.

Condițiunea este *suficientă*. În adevăr, termenii a_n fiind reali și pozitivi, avem inegalitățile

$$1 + a_1 < e^{a_1}, \quad 1 + a_2 < e^{a_2}, \quad \dots, \quad 1 + a_n < e^{a_n};$$

de unde

$$(7) \quad p_n < e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < e^s,$$

s fiind suma seriei (4). Așadar produsul p_n , care crește împreună

cu n , rămâne mai mic decât o cantitate finită, prin urmare p_n tinde către o limită finită p ; vom scrie

$$\lim p_n = p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

69. *Observări.* 1^o. Inegalitatea (7) arată că dacă seria (6) este divergentă, produsul p_n tinde către infinit.

2^o. Din convergența seriei (6) rezultă convergența seriilor $\Sigma a_{n-1} a_n$, $\Sigma a_{n-2} a_{n-1} a_n \dots$, ai căror termeni sunt produsele termenilor șirului (1), luați doi câte doi, trei câte trei, ..., căci termenii acestor serii fiind pozitivi, dacă una din ele ar fi divergentă, p_n ar tinde către infinit, ceea ce este în opoziție cu ipoteza că produsul este convergent.

70. Să considerăm acum cazul când termenii șirului (1) sunt reali, negativi și în valoare absolută mai mici ca 1. Punând semnul în evidență să scriem

$$P_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n).$$

Acest produs pozitiv descrește necontenit când n crește, prin urmare admite o limită finită mai mare sau egală cu zero. Această limită este mai mare sau egală cu zero după cum seria Σa_n este convergentă sau divergentă.

În adevăr, să considerăm produsul

$$\frac{1}{p_n} = \frac{1}{1 - a_1} \cdot \frac{1}{1 - a_2} \dots \frac{1}{1 - a_n}$$

care se poate scrie

$$(7) \quad \frac{1}{p_n} = \left(1 + \frac{a_1}{1 - a_1}\right) \left(1 + \frac{a_2}{1 - a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n}{1 - a_n}\right).$$

Termenii șirului

$$(8) \quad \frac{a_1}{1 - a_1}, \frac{a_2}{1 - a_2}, \dots, \frac{a_n}{1 - a_n}, \dots$$

fiind toți pozitivi, produsul (5) tinde către o limită finită sau tinde către infinit, după cum seria

$$\Sigma \frac{a_n}{1 - a_n}.$$

este convergentă sau divergentă. Însă această serie este convergentă sau divergentă în același timp cu seria Σa_n , căci raportul a doi termeni corespunzători

$$a_n : \frac{a_n}{1 - a_n} = 1 - a_n$$

rămâne neconținut finit și diferit de zero. Prin urmare $\frac{1}{p_n}$ tinde către o limită finită sau tinde către infinit, după cum seria Σa_n este convergentă sau divergentă; de unde rezultă că în aceleași condițiuni, produsul p_n tinde respectiv către o limită diferită de zero sau tinde către zero.

Numai în cazul întâiu vom zice, conform definițiunii, că produsul $\Pi(1-a_n)$ este convergent.

Dacă termenii a_n sunt de acelaș semn începând dela un rang m , lăsând la o parte produsul celor dintăiu m factori, ne regăsim în cazurile examinate mai sus.

71. Să considerăm în fine cazul când cantitățile a_n sunt oricum, reale sau complexe, diferite de -1 . Voim să arătăm că *dacă seria Σa_n este absolut convergentă, produsul p_n tinde către o limită finită și diferită de zero.*

Pentru aceasta să punem $|a_n| = a_n$ și

$$q_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n);$$

vom avea $|1 + a_n| \leq 1 + a_n$; prin urmare

$$|p_n| \leq q_n.$$

De unde rezultă că dacă seria Σa_n este convergentă, produsul p_n rămâne finit pentru orice valori ale lui n .

Să considerăm identitatea

$$(9) \quad p_k = p_{k-1}(1 + a_k) = p_{k-1} + p_{k-1} a_k;$$

de unde, dând lui k valorile $1, 2, \dots, n$ și adunând, obținem

$$(10) \quad p_n = 1 + a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + \dots + p_{n-1} a_n.$$

Deasemenea, înlocuind n prin $n + m$, m fiind număr întreg pozitiv oarecare, avem

$$p_{n+m} = 1 + a_1 + p_1 a_2 + \dots + p_{n+m-1} a_{n+m}.$$

Scăzând aceste două egalități una din alta, avem:

$$p_{n+m} - p_n = p_n a_{n+1} + p_{n+1} a_{n+2} + \dots + p_{n+m-1} a_{n+m}.$$

De unde, reprezentând prin P o limită superioară a produselor $|p_n|$,

$$|p_{n+m} - p_n| \leq P(a_{n+1} + \dots + a_{n+m}).$$

Însă, în virtutea convergenței seriei Σa_n , există un număr pozitiv întreg N , astfel că pentru $n \geq N$, membrul al doilea al inegalității precedente este mai mic ca ε , oricât de mic ar fi ε și oricât de mare ar fi numărul întreg pozitiv m , adică

$$|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Ceeace este condițiunea necesară și suficientă ca produsul p_n să aibă o limită finită.

Pentru a arăta că această limită este diferită de zero, să observăm că începând dela un rang destul de depărtat ν , termenii seriei Σa_n fiind toți mai mici ca unitatea avem:

$$|1 + a_n| \geq 1 - a_n, \quad n \geq \nu$$

de unde

$$\prod_{n=\nu}^{\infty} |1 + a_n| \geq \prod_{n=\nu}^{\infty} (1 - a_n).$$

Însă membrul al doilea are, în ipoteza considerată, o limită mai mare ca zero; de unde rezultă justificarea propozițiunii.

Produsul $\prod (1 + a_n)$ pentru care seria Σa_n este absolut convergentă, se zice *produs absolut convergent*.

Din cele ce preced rezultă că un asemenea produs nu poate fi nul decât dacă unul din factorii săi este nul.

Observare. Egalitatea (40) scrisă sub forma

$$(11) \quad \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = 1 + \sum_{k=1}^n p_{k-1} a_k \quad (p_0 = 1)$$

ne arată că putem transforma un produs într'o serie. Produsul $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ este convergent sau divergent în acelaș timp cu seria $\Sigma p_{n-1} a_n$, cu condițiunea ca în cazul când seria este convergentă, suma ei să nu fie nulă.

Viceversa. O serie se poate transforma într'un produs. Căci din identitatea

$$(12) \quad s_{k+1} = s_k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{s_k} \right) \quad (s_k = a_1 + \dots + a_k)$$

deducem

$$(13) \quad s_{n+1} = s_1 \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_{k+1}}{s_k} \right).$$

72. Valoarea unui produs absolut convergent este independentă de ordinea factorilor.

Să ne închipuim că scriem factorii într'o ordine diferită și fie $p'_{n'}$ produsul celor dintăiu n' factori, în noul produs. Putem lua n' destul de mare pentru ca $p'_{n'}$ să cuprindă toți factorii lui p_n ; vom avea, servindu-ne de expresiunea (10) a lui p_n ,

$$p'_{n'} - p_n = p_{\alpha-1} a_{\alpha} + p_{\beta-1} a_{\beta} + \dots + p_{\lambda-1} a_{\lambda},$$

indicii $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ fiind toți diferiți și mai mari ca n .

Reprezentând prin $n + m$ cel mai mare din acești indici, vom avea

$$|p'_{n'} - p_n| \leq |p_n a_{n+1}| + |p_{n+1} a_{n+2}| + \dots + |p_{n+m-1} a_{n+m}|.$$

De unde rezultă, precum am văzut (69), inegalitatea

$$|p'_{n'} - p_n| < \varepsilon,$$

dacă presupunem n destul de mare. Inșă n' tinde către infinit în acelaș timp cu n ; conchidem deci

$$\lim_{n'=\infty} p'_{n'} = \lim_{n=\infty} p_n.$$

73. Un produs $\prod_1^\infty (1 + a_n)$ poate avea o valoare finită și diferită de zero, fără ca seria $\sum a_n$ să fie absolut convergentă. In acest caz produsul se zice *semiconvergent*.

De exemplu produsul

$$\prod_0^\infty \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

este semiconvergent, căci are o valoare finită, diferită de zero și seria $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ este semiconvergentă. Avem în adevăr

$$p_{2m+1} = \prod_0^{2m-1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m-1}{2m}\right) = 1, \quad p_{2m} = 1 + \frac{1}{2m+1}$$

Valoarea produsului este așa dar egală cu 1.

74. Valoarea unui produs semiconvergent depinde de ordinea factorilor.

In adevăr, din egalitatea

$$\prod (1 + a_n) = 1 + a_1 + p_1 a_2 + \dots + p_{n-1} a_n + \dots$$

rezultă că seria din membrul al doilea este semiconvergentă în acelaș timp cu produsul din membrul întâiu. Căci dacă această serie ar fi divergentă, produsul ar fi divergent și dacă ar fi absolut convergentă, ar urmă ca seria $\sum a_n$ să fie absolut convergentă, deoarece seria $\sum |p_n a_{n+1}|$, în care produsele parțiale p_n sunt finite și diferite de zero, este convergentă împreună cu seria $\sum |a_n|$. Ceeace justifică propozițiunea.

Să considerăm ca exemplu produsul de mai sus:

$$\prod_0^\infty \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

a cărui valoare în ordinea dată a factorilor este egală cu 1.

10. Să scriem factorii în ordinea următoare:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{1} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{5} \right) \left(1 + \frac{1}{7} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right] \dots \dots$$

$$\dots \dots \left[\left(1 + \frac{1}{4n-3} \right) \left(1 + \frac{1}{4n-1} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right] \dots$$

a cărei lege de succesiune reiese imediat. Primul produs de trei factori este egal cu $\frac{3}{4}$ și fiecare din grupurile următoare este mai mare ca 1. Produsul corespunzător este așadar mai mare ca $\frac{4}{3}$.

20. Scriind acelaș produs în ordinea următoare

$$\left[\left(1 + \frac{1}{1} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{6} \right) \left(1 - \frac{1}{8} \right) \right] \dots \dots$$

$$\dots \dots \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) \left(1 - \frac{1}{4n+2} \right) \left(1 - \frac{1}{4n+4} \right) \right] \dots$$

se recunoaște prin considerațiuni analoage că produsul este mai mic ca $\frac{3}{4}$.

Să observăm că produsele

$$\prod \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right), \quad \prod \left(1 - \frac{1}{2n} \right)$$

sunt divergente: primul este infinit, al doilea nul.

75. Să considerăm produse nelimitate duble de forma

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_{m,n}).$$

Putem într-o infinitate de moduri scrie factorii într'un rând și formă un produs simplu, precum o serie dublă se poate pune sub forma unei serii simple. Produsul $\prod (1 + a_{m,n})$ este așadar absolut convergent în acelaș timp cu seria dublă

$$\sum \sum a_{m,n}.$$

În acest caz, valoarea sa este independentă de ordinea factorilor.

76. *Produsul a două produse convergente se poate înlocui printr'un produs unic.*

Fie

$$p = \prod_1^{\infty} (1 + a_n), \quad q = \prod_1^{\infty} (1 + b_n)$$

două produse convergente; p_m și q_m respectiv produsele primilor m factori; avem

$$p_m q_m = \prod_{n=1}^m (1 + a_n) (1 + b_n).$$

Făcând m să tindă către infinit, rezultă egalitatea

$$p \cdot q = \prod_1^{\infty} (1 + a_n) (1 + b_n).$$

77. Dacă produsul convergent

$$p = \prod (1 + a_n)$$

n'are nici un factor nul, avem

$$\prod \left(\frac{1}{1 + a_n} \right) = \frac{1}{p}.$$

În adevăr, putem pune produsul, ai cărui factori sunt $\frac{1}{1 + a_n}$, sub forma

$$\prod \left(\frac{1}{1 + a_n} \right) = \prod \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n} \right).$$

Acest produs este aşadar convergent în acelaş timp cu produsul dat; de unde rezultă

$$p \prod \left(\frac{1}{1 + a_n} \right) = \prod (1 + a_n) \frac{1}{1 + a_n} = 1.$$

Deasemenea, dacă

$$p = \prod_1^{\infty} (1 + a_n), \quad q = \prod_1^{\infty} (1 + b_n)$$

sunt două produse convergente, dintre cari cel de al doilea este diferit de zero, avem

$$\frac{p}{q} = \prod \left(\frac{1 + a_n}{1 + b_n} \right),$$

căci

$$\frac{p}{q} q = \prod \frac{1 + a_n}{1 + b_n} (1 + b_n) = p.$$

CAPITOLUL IV.

VARIABILĂ COMPLEXĂ. FUNCȚIUNI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ. SERII ȘI PRODUSE DE FUNCȚIUNI.

I. — VARIABILĂ COMPLEXĂ ȘI FUNCȚIUNI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ.

78. *Variabila complexă.* Cantitatea complexă $x = u + iv$ în care u și v sunt două variabile reale se numește variabilă complexă. Ea este figurată printr'un punct raportat la două axe rectangulare Ou , Ov . Se dă de obicei lui x numele de *afix* al punctului figurativ. Dacă u și v variază independent între ele, x ¹⁾ se mișcă

¹⁾ Pentru prescurtare vom spune x sau punctul x în loc de punctul al cărui afix este x .

arbitrar în plan; stabilind însă o relațiune $f(u, v) = 0$, x va descrie curba reprezentată prin această relațiune.

O curbă închisă, fără puncte multiple, desparte planul în două regiuni: internă și externă. Un punct se zice că descrie o curbă închisă în sensul pozitiv, dacă un observator identificat cu acest punct are la stânga sa aria interioară curbei. Sensul invers celui pozitiv se numește sens negativ.

Un punct se zice interior unei arii A , dacă un cerc descris din acel punct ca centru cu o rază destul de mică este cu totul în interiorul ariei A . Un punct se zice situat pe limita ariei, dacă cercul descris din acel punct ca centru cu o rază arbitrar de mică, conține puncte interioare și puncte exterioare ariei.

Punând $x = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, fiecărui punct din plan, exceptând punctele $x = 0$ și $x = \infty$, corespunde o valoare unică pentru r și o valoare determinată pentru θ , abstracțiune făcând de un multiple de 2π . In cele două puncte exceptate, avem respectiv $r = 0$, $r = \infty$, însă argumentul θ este nedeterminat.

Dacă x descrie o curbă închisă revenind la punctul de plecare, r își revine valoarea inițială, nu totdeauna însă θ . Se recunoaște lesne că θ se reproduce dacă origina este exterioară curbei și că se mărește cu $\pm 2\pi$ dacă origina este în interiorul curbei (presupusă pentru mai multă claritate fără puncte multiple).

Modulul $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ și argumentul $\theta = \arctg \frac{v}{u}$ sunt funcțiuni continue de u și v , excepțiune este pentru θ când x trece prin origină. In acest caz, valoarea lui θ se mărește într'un mod brusc cu $\pm \pi$.

Numim *domeniul* unui punct x_0 totalitatea punctelor x cari satisfac inegalitatea $|x - x_0| < r$, r fiind un număr pozitiv destul de mic.

79. *Simbolul* $x = \infty$. Iată cum suntem conduși a considera punctul dela infinit ca punct unic în plan.

Fie x și x' două variabile complexe reportate la două plane diferite (u, v) , (u', v') și legate între ele prin relațiunea biunivocă și reciprocă

$$(1) \quad x' = \frac{1}{x}.$$

Punând

$$x = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

avem

$$x' = \frac{1}{r} [\cos (-\theta) + i \sin (-\theta)].$$

Aceste două expresii arată că dacă x descrie un cerc în sensul pozitiv având centrul în origina O ($x = 0$) și raza r , x' descrie în sensul negativ un cerc cu centrul în origina O' ($x' = 0$) cu rază $\frac{1}{r}$. Oricărui punct exterior cercului cu centrul în O îi corespunde prin transformarea (4) un punct interior cercului cu centrul în O' și reciproc. Când punctul x' tinde către zero într-o direcțiune oarecare, zicem că x tinde către infinit. Punctului $x' = 0$ îi corespunde astfel un punct unic, punctul $x = \infty$.

Pentru a păstră analogia, vom numi *domeniu* al punctului $x = \infty$, totalitatea punctelor din planul (x) corespunzătoare domeniului punctului $x' = 0$, adică toată întinderea planului exterioară unui cerc descris din O ca centru cu o rază arbitrar de mare.

80. Reprezentarea variabilei complexe pe o sferă.

În loc de a reprezinta variabila complexă pe un plan, se obișnuiește de multe ori a o reprezintă pe o sferă, raportând punctele planului pe o sferă printr'o proiecțiune stereografică cu polul pe sferă.

Să ne închipuim o sferă tangentă în origină la planul variabilei

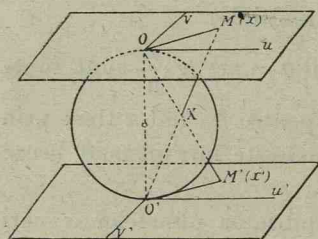


Fig. 3

x , dedesubtul acestui plan și având un diametru egal cu unitatea. Fie O' extremitatea diametrului dus prin O ; să unim un punct oarecare M al planului variabilei x cu O' printr'o linie dreaptă, care va străpunge sfera într'un punct X . Unui punct M din planul x îi corespunde pe sferă un punct unic X ; viceversa, unind O' cu un punct oarecare X al sferei,

obținem în planul x un singur punct.

Prin această construcțiune se stabilește între planul variabilei x și suprafața sferei o corespondență punctuală biunivocă, adică o corespondență punct cu punct a celor două suprafețe, excepțiune făcând de punctul O' de pe sferă căruia nu corespunde nici un punct determinat pe plan. Noi zicem însă că punctul O' corespunde punctului dela infinit în planul x . Această convențiune se justifică prin considerațiunile următoare: Să ducem în O' un al doilea plan tangent la sferă și să considerăm în acest plan două axe perpendiculare $O'u'$ și $O'v'$ (fig. 3); prima $O'u'$ fiind paralelă și de acelaș sens cu Ou , a doua $O'v'$ paralelă și de sens invers lui Ov . Să unim punctul X de pe sferă cu O și fie M' punctul unde dreapta OX taie planul $O'u'v'$.

Triunghiurile MOO' , $M'OO'$ fiind asemenea cu triunghiul OXO' , rezultă egalitatea

$$\frac{OM}{1} = \frac{1}{O'M},$$

sau

$$(1) \quad |x| |x'| = 1,$$

reprezentând prin x' afixul punctului M' . De altă parte, din pozițiunea axelor rezultă că avem

$$(2) \quad \arg x' = - \arg x,$$

abstracțiune făcând de multiple de 2π . Prin urmare, punând

$$x = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

avem între x și x' relațiunea

$$(3) \quad x' = \frac{1}{x}.$$

De unde rezultă că punctului $x' = 0$ din planul (x') corespunde punctul $x = \infty$ din planul (x) . Însă, în virtutea construcțiunii noastre, punctul $x' = 0$ coincide cu punctul O' al sferei; conchidem dar că punctului O' al sferei corespunde punctul $x = \infty$.

Din cele ce preced rezultă că sfera poate servi a reprezintă variațiunea totală a variabilei complexe, punctul zero și punctul ∞ fiind approximate respectiv prin extremitățile diametrului OO' ¹⁾).

§1. *Funcțiune de variabilă complexă.* Prin analogie cu variabila reală, vom zice că o variabilă y este funcțiune de o variabilă complexă x , dacă la fiecare valoare a lui x , aparținând unei regiuni date a planului, corespunde una sau mai multe valori determinate pentru y .

Vom da mai târziu o definițiune a funcțiunii de variabilă complexă mai restrictivă decât cea precedentă, funcțiune ce poartă numele de *analitică* și care singură va face obiectul cursului nostru. Păstrând deocamdată definițiunea de mai sus, vom zice că o funcțiune este *uniformă* sau *multiformă* într-o regiune dată, după cum la o valoare lui x din acea regiune corespunde una sau mai multe valori pentru y .

Punând $x = u + iv$, y poate fi privit ca o funcțiune de două variabile reale u și v ; îi se pot deci aplica toate teoremele relative la funcțiunile de două variabile reale, în cari nu intervine realitatea

¹⁾ Trebuie să observăm că teoria funcțiunilor este stabilită independent de vreo reprezentare specială a variabilei. Reprezentarea geometrică rămânând un simplu auxiliar intuitiv, care poate ușura vorbirea și enunțarea teoremelor.

lui y . Nu este însă inutil a repeta câteva din acele definițiuni și proprietăți al căror enunț primește, în cazul actual, o formă mai simplă.

82. *Continuitate.* Vom zice că o funcțiune $y = f(x)$ este continuă în domeniul punctului x_0 , dacă la un număr pozitiv ε oricât de mic ar fi, putem face să corespundă un număr pozitiv ϱ astfel încât să avem

$$(1) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pentru toate punctele x cari satisfac inegalitatea

$$(2) \quad |x - x_0| < \varrho.$$

Ca și în cazul unei funcțiuni de variabilă reală se probează că inegalitatea (1) trage după sine inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon' \quad (\varepsilon' = 2\varepsilon)$$

x' și x'' fiind două puncte oarecari situate în interiorul cercului $|x - x_0| < \varrho$.

Să mai observăm că în virtutea definițiunii cuvântului de limită, inegalitatea (1) este echivalentă cu egalitatea

$$(3) \quad \lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0),$$

când x se apropie de x_0 după orice direcțiune.

Dacă $f(x)$ este o funcțiune continuă în domeniul fiecărui punct dintr'o regiune dată a planului, $f(x)$ se zice continuă în acea regiune.

83. *Modulul unei funcțiuni $f(x)$ continuă în domeniul unui punct $x = x_0$ este o funcțiune continuă în acelaș domeniu.*

În adevăr, din inegalitatea

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

rezultă, presupunând inegalitatea (1) satisfăcută, că avem:

$$|f(x)| - |f(x_0)| < \varepsilon.$$

De aci rezultă că modulul unei funcțiuni continue de variabilă complexă, fiind o funcțiune reală de variabilele reale u și v , continuă în regiunea considerată, atinge cel puțin într'un punct al regiunii de continuitate limitele sale superioară și inferioară, adică există în această regiune cel puțin un punct în care $|f(x)|$ este maximum și cel puțin un punct în care $|f(x)|$ este minimum.

84. *Continuitate uniformă.* — O funcțiune $f(x)$ de variabilă complexă este uniform continuă în regiunea în care ea este continuă.

Aceasta înseamnă că la un ε pozitiv arbitrar de mic, corespunde un număr pozitiv ϱ astfel că oricare ar fi punctul x_0 în regiunea considerată, avem inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

pentru toate punctele x', x'' situate în interiorul cercului $|x - x_0| < \varrho$.

Fie x_0 un punct în regiunea A în care $f(x)$ este continuă și R maximul lui ϱ corespunzător lui x_0 . Presupunând ε constant, R variază împreună cu x_0 . Să arătăm că R este o funcțiune continuă de x . Pentru aceasta fie x_1 un punct în interiorul cercului

$$(1) \quad |x - x_0| = R$$

și R_1 valoarea corespunzătoare a lui R . Cercul

$$(2) \quad |x - x_1| = R_1$$

taie cercul (1) sau cel puțin este tangent la acest cerc. Punând $\delta = |x_1 - x_0|$, vom avea, prin urmare,

$$(3) \quad R_1 \geq R - \delta.$$

Să presupunem δ astfel ca x_0 să fie în interiorul cercului (2); vom avea, pentru același motiv,

$$(4) \quad R \geq R_1 - \delta.$$

Din inegalitățile (3) și (4) rezultă inegalitatea

$$|R - R_1| \leq \delta,$$

care probează că R este o funcțiune continuă de pozițiunea (u_0, v_0) a punctului $x_0 = u_0 + iv_0$. Această funcțiune admite deci într'un punct a din A un minimum $\varrho > 0$. Căci dacă ϱ ar fi nul, aceasta ar însemna că în domeniul lui a , inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

este imposibilă. Ceeace este contra ipotezei, după care funcțiunea $f(x)$ este continuă în toată aria A . q. e. d.

Proprietățile relative la continuitatea unei sume, diferențe, produs și cât de funcțiuni continue de variabilă reală se aplică evident și funcțiilor de variabilă complexă.

II. — SERII ȘI PRODUSE DE FUNCȚIUNI.

85. *Serii de funcțiuni.* — Fie

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

un șir nelimitat de funcțiuni de variabila x și să considerăm seria

$$(2) \quad \sum_1^{\infty} f_n(x).$$

Această serie poate fi convergentă pentru unele valori ale lui x și divergentă pentru altele. Totalitatea punctelor x în care seria este convergentă constituie regiunea de convergență a seriei.

86. *Definițiune.* Seria (2) se zice *uniform convergentă în aria* A *a regiunii sale de convergență, dacă la un număr pozitiv* ε *arbitrar de mic, corespunde un număr întreg pozitiv* N , *astfel încât pentru* $n \geq N$ *să avem*

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m(x) \right| < \varepsilon,$$

oricare ar fi pozițiunea punctului x în aria A .

Ceeace caracterizează convergența uniformă este faptul că numărul N , care în cazul unei serii convergente oarecare, depinde de x și de ε , depinde în cazul considerat numai de ε .

Numărul N așa considerat se poate privi ca limită superioară a valorilor lui n pentru cari inegalitatea

$$\left| \sum_1^{\infty} f_m(x) - \sum_1^n f_m(x) \right| < \varepsilon,$$

este satisfăcută, x fiind un punct oarecare în A . Dacă limita superioară a acestor numere este infinită, seria dată nu este uniform convergentă în aria A , deși este convergentă în fiecare punct al ei.

Exemple: 1^o. Seria

$$(3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

absolut convergentă în interiorul cercului $|x| = 1$, este uniform convergentă în acest cerc.

În adevăr, fie r_0 un număr pozitiv oricât de aproape voim de 1, însă mai mic ca 1 și x un punct oarecare situat în interiorul cercului $|x| = r_0$:

$$|x| = r, \quad 0 < r < r_0 < 1.$$

Reprezentând prin $R_n(x)$ restul seriei (3):

$$R_n(x) = x^n + x^{n+1} + \dots = \frac{x^n}{1-x},$$

avem

$$|R_n(x)| \leq \frac{r^n}{1-r} < \frac{r_0^n}{1-r_0}.$$

Este totdeauna posibil a satisface inegalitatea

$$\frac{r_0^n}{1-r_0} < \varepsilon,$$

pentru o valoare $n = N$. Luând logaritmi ambelor membre, obținem

$$n > \frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0}.$$

Este de ajuns să luăm N egal cu numărul întreg imediat superior membrului al doilea, adică

$$\frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0} < N \leq 1 + \frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0},$$

pentru ca în interiorul cercului $|x| = r_0$, precum și pe cercul înșuș, să avem

$$|R_n| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

20. Să considerăm seria

$$(4) \quad x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots,$$

care pentru valori reale ale lui x este convergentă pentru $0 \leq x < 2$, însă nu este uniform convergentă în vecinătatea lui $x = 0$. În adevăr avem

$$R_n(x) = x(1-x)^n + x(1-x)^{n+1} + \dots = (1-x)^n.$$

Punând $|1-x|^n < \varepsilon$, deducem

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |1-x|}.$$

Când x tinde către zero, valoare pentru care seria este convergentă, având valoarea zero, membrul al doilea tinde către infinit. De unde rezultă că în intervalul considerat, seria nu este uniform convergentă.

87. O serie $\Sigma f_n(x)$ poate fi uniform convergentă fără a fi absolut convergentă. De exemplu seria

$$\Sigma \frac{1}{x+n},$$

în care n primește toate valorile pozitive și negative, afară de zero, este uniform convergentă în cercul $|x| = 1$, însă nu absolut convergentă. În adevăr, presupunând termenii seriei dispuși în ordinea valorilor crescânde ale lui $|n|$, avem

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{x+m} + \frac{1}{x-m} + \frac{1}{x+m-1} + \frac{1}{x-(m+1)} + \dots \\ &= 2x \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}. \end{aligned}$$

De unde, punând $|x| = r < r_0 < 1$, avem

$$|R_m| < 2r_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2 - r_0^2}.$$

Însă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - r_0^2}$ ai cărei termeni sunt pozitivi, fiind convergentă, există un număr N , astfel că pentru $m \geq N$, membrul al doilea al inegalității precedente este mai mic ca ε . Așadar seria dată este uniform convergentă.

Această serie nu este absolut convergentă, căci seria modulelor $\sum \frac{1}{|x+n|}$ este divergentă.

88. În privința seriilor absolut și uniform convergente într'o arie dată, avem teorema următoare a lui Weierstrass:

Teoremă. Dacă există un șir de numere pozitive

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

astfel că oricare ar fi pozițiunea lui x în A , avem

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

și dacă seria

$$\sum a_n$$

este convergentă, seria

$$\sum_1^{\infty} f_n(x)$$

este absolut și uniform convergentă în interiorul lui A .

Convergența absolută a seriei este evidentă, căci fiecare termen al seriei este mai mic sau egal cu termenul corespunzător al unei serii convergente cu termeni pozitivi.

În ce privește convergența uniformă, să observăm că seria numerelor a_n fiind convergentă, la un ε dat corespunde un număr întreg N astfel încât

$$a_n + a_{n+1} + \dots < \varepsilon,$$

pentru $n \geq N$. Însă

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m(x) \right| \leq a_n + a_{n+1} + \dots;$$

prin urmare avem pentru $n \geq N$, inegalitatea

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

în toată aria considerată.

q. e. d.

89. Fie x_0 un punct al regiunii de convergență a seriei

$$\sum f_n(x).$$

Să presupunem că există un număr pozitiv ϱ astfel ca seria să convergeze uniform pentru toate valorile lui x cari împlinesc condițiunea

$$|x - x_0| \leq \varrho;$$

vom zice că seria convergează uniform în vecinătatea punctului x_0 .

Fie R limita superioară a lui ϱ ; aria cuprinsă în interiorul cercului $|x - x_0| = R$ se va numi relativ la seria dată, *domeniul* ¹⁾ punctului x_0 și R raza acestui domeniu.

Fie x_1 un punct oarecare în domeniul lui x_0 . Este evident că seria convergează uniform în vecinătatea lui x_1 . Să presupunem că domeniul acestui punct cuprinde puncte în afară din domeniul lui x_0 și să considerăm un punct x_2 situat în domeniul său, etc. Totalitatea domeniilor astfel obținute constituie o arie continuă (adică o arie astfel că putem uni două puncte oarecari ale ei, printr'o linie continuă situată în interiorul ariei), mărginită de una sau mai multe linii, de linii și puncte sau chiar de puncte izolate. În aria astfel obținută seria convergează uniform în domeniul fie cărui punct; ceeace rezultă din însăși formarea acestei arii.

90. *Viceversa. Dacă seria $\sum f_n(x)$ convergează uniform în vecinătatea oricărui punct situat într'o arie A și pe conturul ei, ea convergează uniform în toată aria.*

Să observăm mai întâiu că dacă seria convergează uniform într'un număr limitat de porțiuni ale planului formând în totalitatea lor o regiune conexă, ea convergează uniform în toată regiunea; căci este de ajuns a lua pentru numărul N , care figurează în definițiunea convergenței uniforme (86), cea mai mare din valorile corespunzătoare acestor porțiuni.

Fie x un punct situat în aria A și R raza domeniului corespunzător acestui punct. Făcând să varieze x fără a eși din A , raza R admite un minimum $R_0 > 0$ ²⁾. De unde rezultă că dacă ducem drepte paralele la axele de coordonate, depărtate între ele cu distanța $\frac{R_0}{2}$, descompunem aria A într'un număr limitat de porțiuni (pătrate și părți din pătrate mărginite de conturul lui A) astfel că distanța a două puncte oarecari a fiecăreia din ele este mai mică ca R_0 . Seria convergează dar uniform, în virtutea ipotezei, în fiecare din aceste porțiuni și prin urmare, după observațiunea de mai sus, ea convergează uniform în toată aria.

¹⁾ Acest cuvânt are deci în cazul considerat o semnificare mai precisă decât cea care rezultă din definițiunea sa (18), unde raza cercului este nedeterminată.

²⁾ Demonstrația este identică cu cea relativă la continuitatea uniformă (84).

91. Se poate întâmpla să existe puncte în afară din aria obținută mai sus, în domeniul cărora seria dată să fie uniform convergentă; plecând de la unul din ele și procedând în același mod, obținem o nouă arie continuă în care seria este uniform convergentă. Această a doua arie nu va avea nici un punct comun cu cea dintâi, afară poate, unul sau mai multe puncte ale conturului; sau chiar, poate, conturul întreg.

Să considerăm, ca exemplu, seriile

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Cea dintâi este, precum am văzut, uniform convergentă în cercul $|x| = r_0 < 1$; sau, mai scurt, în interiorul cercului $|x| = 1$. Ea este divergentă în afară din acest cerc.

Cea de a doua serie este absolut și uniform convergentă atât în interiorul cercului $|x| = 1$, cât și în tot planul exterior; ea este divergentă pe cerc. În adevăr, punctul x fiind în interiorul cercului, fie

$$|x| = r < r_0 < 1,$$

r_0 diferind de 1 cu oricât de puțin voim; avem

$$\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| < \frac{r_0^n}{1-r_0^n}.$$

Însă seria al cărui termen general este $\frac{r_0^n}{1-r_0^n}$ este convergentă în același timp cu seria al cărei termen general este r_0^n , căci raportul acestor doi termeni rămâne neconținut finit și diferit de zero. Așa dar seria (2) este absolut și uniform convergentă în interiorul cercului $|x| = 1$.

Să presupunem acum punctul x exterior cercului $|x| = 1$ și să punem $x = \frac{1}{x'}$; termenul general devine

$$\frac{x'^n}{1+x'^{2n}}.$$

Seria transformată fiind de aceeași formă ca seria propusă, este absolut și uniform convergentă în interiorul cercului $|x'| = 1$, și prin urmare seria (2) este absolut și uniform convergentă în tot planul exterior cercului $|x| = 1$.

În fine, x fiind un punct oarecare al cercului $|x| = 1$, avem

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \geq \frac{1}{2};$$

de unde rezultă că dealungul cercului seria este divergentă. Astfel, cele două regiuni de convergență uniformă ale seriei considerate n'au nici un punct comun între ele.

92. Fiind dată o serie convergentă

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

într-o arie A ai cărei termeni $f_n(x)$ sunt funcțiuni continue, se poate oare afirma că suma ei

$$F(x) = \sum f_n(x),$$

a cărei valoare este determinată în fiecare punct al ariei A , este o funcțiune continuă în această arie? Răspunsul este negativ.

De exemplu, seria

$$F(x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots,$$

convergentă pentru valorile reale ale lui x , $0 \leq x < 1$, ai cărei termeni sunt funcțiuni continue, este egală cu 1 pentru $x \neq 0$ și prin urmare.

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1;$$

valoarea sa însă pentru $x = 0$ este nulă. Ea este deci discontinuă pentru $x = 0$.

93. O condițiune suficientă, nu însă necesară ¹⁾, pentru ca suma unei serii de funcțiuni continue să fie o funcțiune continuă este dată de teorema următoare:

Teoremă. Suma unei serii uniform convergente de funcțiuni continue într-o arie dată este o funcțiune continuă în acea arie.

În adevăr, fie $F(x) = \sum f_n(x)$ și x, x_0 două puncte oarecari în regiunea dată. Să considerăm diferența $F(x) - F(x_0)$, pe care o putem scrie

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{n=1}^m [f_n(x) - f_n(x_0)] + \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x_0).$$

¹⁾ Condițiunea necesară și suficientă este ca convergența să fie quasi-uniformă, noțiune introdusă de Arzela (E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles, pag. 41). O serie se zice că convergează *quasi-uniform* între două numere reale a, b : 1°. dacă este convergentă în intervalul (a, b) ; 2°. dacă la un ε dat și la un număr întreg pozitiv N oricât de mare voim putem face să corespundă un număr finit $N' \geq N$, astfel ca pentru orice valoare a lui x cuprinsă în intervalul (a, b) , să existe un număr întreg n_x cuprins între N și N' și astfel ca să avem

$$\left| \sum_{\mu=n_x}^{\infty} U_{\mu}(x) \right| < \varepsilon.$$

Seria dată fiind uniform convergentă, la un ε dat corespunde un număr întreg m , astfel că

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De altă parte, funcțiunile $f_n(x)$ fiind continue, suma unui număr limitat de termeni este o funcțiune continuă, și prin urmare există, un număr pozitiv r , astfel că pentru $|x - x_0| < r$, avem

$$\left| \sum_1^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

de unde rezultă

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

pentru $|x - x_0| < r$.

q. e. d.

94. *Produse de funcțiuni.* — Noțiunea de convergență uniformă a produselor nelimitate de funcțiuni se introduce în acelaș mod ca pentru serii de funcțiuni.

Fie

$$(1) \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad u_n = f_n(x),$$

un șir nelimitat de funcțiuni de variabila x ; vom zice că produsul

$$(2) \quad p = \prod_1^{\infty} (1 + u_n)$$

este uniform convergent într'o porțiune A a regiunii sale de convergență, dacă la un număr pozitiv ε , oricât de mic vom, corespunde un număr întreg N , astfel ca pentru $n \geq N$, inegalitatea

$$\left| \prod_1^{\infty} (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută, oricare ar fi pozițiunea punctului x în A .

Se mai poate zice că produsul dat este uniform convergent, dacă seria echivalentă

$$(3) \quad 1 + u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_{n+1} + \dots, \quad \left(p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \right)$$

este uniform convergentă.

95. *Teoremă.* Dacă seria $\sum u_n$ este absolut și uniform convergentă într'o regiune dată, produsul

$$p = \prod_1^{\infty} (1 + u_n)$$

este absolut și uniform convergent în aceeaș regiune ¹⁾.

¹⁾ Factorii în cari $u_n = -1$ se presupun scoși din produs.

Partea întâiu a propozițiunii rezultă din definițiunea convergenței absolute a unui produs.

Pentru a demonstra partea a doua să înlocuim produsul (2) prin seria (3) și să reprezentăm prin P_n și P produsele corespunzătoare lui p_n și p când înlocuim funcțiunile u_n prin modulele lor,

$$P_n = \prod_1^n (1 + |u_m|), \quad P = \prod_1^\infty (1 + |u_m|);$$

vom avea

$$|p_n| < P_n < P.$$

De unde rezultă, servindu-ne de seria (3) echivalentă produsului,

$$\left| \prod_1^\infty (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| \leq P_n |u_{n+1}| + P_{n+1} |u_{n+2}| + \dots \\ < P[|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots].$$

Seria $\sum |u_n|$ fiind uniform convergentă, la un ε dat corespunde un număr pozitiv întreg N , astfel ca pentru $n \geq N$, să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots < \frac{\varepsilon}{P},$$

oricare ar fi pozițiunea punctului x în regiunea considerată. De unde rezultă inegalitatea

$$\left| \prod_1^\infty (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| < \varepsilon,$$

valabilă în aceeași regiune îndată ce $n \geq N$.

q. e. d.

96. *Teoremă. Dacă funcțiunile $u_n = f_n(x)$ sunt continue într'oa arie A , produsul*

$$p(x) = \prod_1^\infty (1 + u_n)$$

uniform convergent în A , definește o funcțiune continuă în această arie.

În adevăr, fie x și x_0 două puncte situate în A , vom avea pentru n destul de mare,

$$|p(x) - p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |p(x_0) - p_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε fiind arbitrar de mic. Însă $p_n(x)$ fiind un produs de un număr limitat de factori este o funcțiune continuă în același timp cu factorii săi, prin urmare există un număr pozitiv r astfel că pentru $|x - x_0| < r$ avem

$$|p_n(x) - p_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Din aceste trei inegalități rezultă inegalitatea

$$|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon,$$

pentru $|x - x_0| < r$. Ceeace demonstrează teorema.

97. *Teoremă.* Dacă seria $\sum |a_n|$ este convergentă, produsul

$$\prod_1^{\infty} (1 + a_n x)$$

este absolut și uniform convergent pentru orice valoare finită a lui x și se poate pune sub formă

$$(4) \prod_1^{\infty} (1 + a_n x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

coeficienții A_n având valori finite.

Convergența absolută și uniformă a produsului pentru orice valoare finită a lui x este o consecință imediată a teoremei (95).

Pentru a justifica dezvoltarea (4), să considerăm produsul p_n al celor dintâi n factori și să efectuăm acest produs după puterile lui x :

$$p_n = 1 + (\sum a_1) x + (\sum a_1 a_2) x^2 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n x^n.$$

Făcând n să tindă către infinit, sumele $\sum a_1 a_2$, $\sum a_1 a_2 a_3$, ... tind către valori finite în același timp cu suma $\sum |a_n|$ ¹⁾. De unde rezultă teorema enunțată.

CAPITOLUL V.

SERII DE PUTERI. PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR INTREGI.

98. I. *Serii de puteri.* Printr-o serie de puteri de x înțelegem o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

exponenții variabilei x fiind numere întregi pozitive și negative și coeficienții a_n cantități constante oarecare, reale sau complexe.

Vom considera mai întâi seriile de puteri în cari exponenții sunt numere pozitive, adică serii de forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

numite serii întregi și vom reprezenta o asemenea serie prin simbolul

$$P(x).$$

¹⁾ V. (§ 69).

Aceste serii joacă în Analiza matematică un rol preponderant. Vom demonstra aci proprietățile fundamentale ale acestor serii și vom începe prin teorema datorită lui *Abel*, a cărei importanță este capitală în Teoria funcțiunilor.

99. *Teorema lui Abel.* — Fiind dată seria întreagă

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dacă pentru o valoare $x = x_0$ a variabilei și pentru toate valorile întregi pozitive ale lui n , avem

$$|a_n x_0^n| < M,$$

M fiind un număr pozitiv oarecare dat, seria $P(x)$ va fi absolut convergentă pentru toate valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x| < |x_0|.$$

Fie

$$|x| = r, \quad |x_0| = r_0, \quad r < r_0;$$

avem prin ipoteză

$$|a_n| r_0^n < M,$$

de unde

$$\left| a_n x^n \right| < M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n.$$

Însă seria

$$M \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$$

este convergentă, căci termenii ei formează o progresiune geometrică a cărei rație este $\frac{r}{r_0} < 1$; prin urmare seria $P(x)$ este absolut convergentă în interiorul cercului descris din origină ca centru cu raza r_0 . q. e. d.

Corolar. — Dacă seria $P(x)$ este convergentă pentru o valoare $x = x_0 \neq 0$, ea va fi absolut convergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea $|x| < |x_0|$. În adevăr, în acest caz, termenii $|a_n x^n|$ tinzând către zero când n tinde către infinit, există un număr pozitiv M pentru care inegalitatea

$$|a_n x^n| < M$$

este satisfăcută pentru toate valorile întregi și pozitive ale lui n .

100. Din cele ce preced rezultă că dacă o serie întreagă este divergentă pentru o valoare $x = x_0$, ea va fi divergentă pentru toate valorile lui x a căror module sunt mai mari ca $|x_0|$. Căci

dacă seria ar fi convergentă pentru o valoare $x = x_1$, $|x_1| > |x_0|$, ar urmă, în virtutea corolarului precedent, ca ea să fie convergentă pentru $x = x_0$; ceea ce este contrar ipotezei.

Așadar, dacă o serie întreagă este divergentă într'un punct x_0 , ea va fi divergentă în tot planul variabilei situat în afară din cercul descris din origină ca centru cu raza $r = |x_0|$.

101. *Cercul de convergență.* Fiind dată o serie întreagă $P(x)$, se poate întâmpla ca ea să nu fie convergentă decât în punctul $x = 0$.

De exemplu seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n,$$

Se poate întâmpla din contra ca seria să fie convergentă oricare ar fi valoarea lui x ; de exemplu seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Lăsând la o parte aceste două cazuri extreme, să presupunem că există o valoare x_0 , diferită de zero, pentru care seria $P(x)$ este convergentă și o valoare x_1 , finită, pentru care seria este divergentă. În acest caz există cercuri cu centrul în origină în interiorul cărora seria $P(x)$ este absolut convergentă, precum și cercuri concentrice astfel că în tot planul exterior lor seria $P(x)$ este divergentă. În prima categorie intră cercurile ale căror raze sunt *cel puțin* egale cu $|x_0|$ și în a doua categorie, cercurile ale căror raze sunt *cel mult* egale cu $|x_1|$.

Să ne închipuim acum toate numerele pozitive, împărțite în două clase: un număr R se va zice de clasa întâi, dacă în interiorul cercului $|x| = R$, seria $P(x)$ este absolut convergentă; numărul R se va zice de clasa doua, dacă în regiunea exterioară cercului $|x| = R$ seria $P(x)$ este divergentă. Există cel mult un număr, aparținând celor două clase. Voim să demonstrăm că un asemenea număr există.

Fie R' și R'' două numere respectiv din clasa I și din clasa II-a; avem $R' < R''$. Fie R_1 un număr cuprins între R' și R'' , egal depărtat de fiecare din aceste numere:

$$R_1 = \frac{R' + R''}{2}.$$

Dacă R_1 aparține de odată ambelor clase, teorema este demonstrată. Dacă acest număr face parte din clasa I, îl vom substitui

lui R' ; iar dacă face parte din clasa II, îl vom substitui lui R'' . Să reprezentăm, pentru uniformitatea notațiunilor, prin R'_1 și R''_1 două numere respectiv de clasa I și II, pe cari le substituim astfel numerelor R' și R'' . Vom avea

$$R''_1 - R'_1 = \frac{R'' - R'}{2}, R'_1 \geq R', R''_1 \leq R''.$$

În același mod, vom substitui numerelor R'_1 și R''_1 două numere R'_2, R''_2 satisfăcând condițiunile

$$R''_2 - R'_2 = \frac{R''_1 - R'_1}{2} = \frac{R'' - R'}{2^2}, R'_2 \geq R'_1, R''_2 \leq R''_1.$$

Continuând în același mod, obținem două șiruri de numere

$$\begin{aligned} R', R'_1, R'_2, \dots, R'_n, \dots, \\ R'', R''_1, R''_2, \dots, R''_n, \dots, \end{aligned}$$

în cari numerele primului șir nu descresc și numerele celui de al doilea șir nu cresc și astfel că diferența

$$R''_n - R'_n = \frac{R'' - R'}{2^n}$$

ține către zero când n tinde către infinit. De unde rezultă că cele două șiruri admit o limită comună R . Acest număr R face parte din ambele clase considerate.

Cercul cu centrul în origină și a cărui rază este numărul R , așa determinat se numește *cerul de convergență* al seriei date. Acest cerc separă planul în două regiuni: în regiunea interioară cercului seria $P(x)$ este convergentă și în tot planul exterior lui seria este divergentă. Pe cercul însuși este dubiu.

Se poate întâmpla ca seria să fie convergentă sau divergentă pe tot cercul. Se poate întâmpla să existe puncte pe cerc în care seria este convergentă și altele în care ea este divergentă.

Astfel, seriile

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_0^{\infty} x^n, \quad \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

au același cerc de convergență a cărui rază $R = 1$: cea dintâi este convergentă pe tot cercul și chiar absolut convergentă; cea de a doua este divergentă pe tot cercul, căci modulele termenilor sunt egale cu *unitatea*, oricare ar fi punctul x pe cerc. Seria a treia este divergentă pentru $x = 1$ și convergentă pentru $x = -1$. Se poate proba că această serie este convergentă pe tot cercul (nu absolut) exceptând punctul $x = 1$.

Să demonstrăm mai întâiu teorema următoare:

102. *Teoremă.* — Dacă coeficienții unei serii întregi $\sum a_n x^n$ sunt reali și pozitivi și dacă termenii

$$a_n R^n,$$

R fiind raza cercului de convergență al seriei, descresc necontenit și tind, începând dela un rang destul de depărtat, către zero, seria este convergentă pe tot cercul, exceptând poate punctul $x = R$.

Putem fără a restrânge generalitatea presupune $R = 1$; căci făcând substituțiunea

$$x = Ry,$$

seria propusă se transformă într'o serie întreagă de y :

$$\sum b_n y^n, \quad b_n = a_n R^n$$

și raza de convergență a acestei serii este 1.

Vom presupune așa dar coeficienții a_n descrescând și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Să punem

$$x = \cos \theta + i \sin \theta;$$

vom avea

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Vom să probăm că seriile

$$\sum a_n \cos n\theta, \quad \sum a_n \sin n\theta$$

sunt convergente pentru orice valoare a lui θ diferită de un multiplu de 2π .

Fie

$$S_n = a_0 + a_1 \cos \theta + \dots + a_n \cos n\theta.$$

Multiplicând ambele membre cu $2 \sin \frac{\theta}{2}$ obținem

$$(1) \quad 2 S \sin \frac{\theta}{2} = a_0 \sin \frac{\theta}{2} + (a_0 - a_1) \sin \frac{\theta}{2} + (a_1 - a_2) \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \\ + (a_{n-1} - a_n) \sin \frac{2n-1}{2} \theta + a_n \sin \frac{2n+1}{2} \theta.$$

Să considerăm seriile

$$(2) \quad (a_0 - a_1) \sin \frac{\theta}{2} + (a_1 - a_2) \sin \frac{3\theta}{2} + \dots + (a_{n-1} - a_n) \sin \frac{2n-1}{2} \theta + \dots,$$

$$(3) \quad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + \dots,$$

Seria din urmă este convergentă, căci reprezentând prin σ_n suma celor dintâi n termeni ai ei, avem

$$\sigma_n = a_0 - a_n,$$

de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a_0.$$

Însă începând dela un rang destul de depărtat, termenii seriei (3) sunt pozitivi și aceia ai seriei (2) sunt în valoare absolută respectiv mai mici; prin urmare seria (2) este convergentă.

De aci rezultă că membrul al doilea al egalității (1) tinde către o limită finită când n tinde către ∞ , căci această expresiune diferă de suma celor dintâi n termeni ai seriei (2) printr-o sumă de doi termeni, unul constant $a_0 \sin \frac{\theta}{2}$ și celalt $a_n \sin \frac{2n+1}{2} \theta$ având ca limită zero. Prin urmare, dacă θ este diferit de un multiplu de 2π , S_n va tinde către o limită finită și deci seria $\sum a_n \cos n\theta$ este convergentă.

În acelaș mod se probează convergența seriei

$$\sum a_n \sin n\theta$$

pentru θ diferit de $2k\pi$. Această serie însă este evident convergentă și pentru $\theta = 2k\pi$.

De unde rezultă că seria propusă este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$, exceptând poate punctul care corespunde lui $\theta = 0$.
q. e. d.

103. Aplicațiune. Seria

$$(4) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} + \dots$$

este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$ și este divergentă numai în punctul $x = 1$. Deasemenea seria

$$(5) \quad 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

este convergentă pe acelaș cerc și divergentă numai în punctul $x = -1$, căci ea se reduce la seria (4) când înlocuim x prin $-x$.

Să considerăm într'un mod general seria

$$1 + \frac{x^m}{1} + \frac{x^{2m}}{2} + \dots + \frac{x^{nm}}{n} + \dots,$$

m fiind un număr întreg pozitiv. Făcând substituțiunea $x^m = x'$, seria transformată

$$1 + \frac{x'}{1} + \frac{x'^2}{2} + \dots + \frac{x'^n}{n} + \dots$$

este convergentă pe tot cercul $|x'| = 1$, exceptând punctul $x' = 1$; de unde rezultă că seria propusă este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$, exceptând punctele

$$x = e^{\frac{2ki\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (m-1).$$

104. *O serie întreagă este uniform convergentă în interiorul cercului său de convergență.*

Fie R raza cercului de convergență și $R' < R$, însă oricât de aproape voim de R . În punctele $|x| \leq R'$, avem

$$|a_n x^n| \leq |a_n| R'^n.$$

Însă seria $\sum |a_n| R'^n$ este convergentă, prin urmare seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă în toate punctele satisfăcând inegalitatea $|x| \leq R'$, adică în interiorul cercului de convergență al seriei.

Din această teoremă rezultă că o serie întreagă este o funcțiune continuă în interiorul cercului său de convergență.

105. *Teorema II a lui Abel. O serie întreagă*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

convergentă într'un punct x_0 situat pe cercul său de convergență, este o funcțiune continuă dealungul razei care trece prin acest punct, inclusiv punctul extrem x_0 .

Am văzut mai sus că seria este o funcțiune continuă în interiorul cercului său de convergență; acea teoremă nu ne spune însă nimic în privința punctelor situate pe cercul de convergență, căci raționamentul care a servit la stabilirea ei, nu se aplică acestor puncte.

Putem, precum am mai văzut, presupune $R = 1$ și, fără a restrânge generalitatea, să luăm $x_0 = 1$. Este de ajuns pentru aceasta a face substituțiunea

$$x = x_0 y$$

și a demonstra că seria este uniform convergentă dealungul razei care trece prin punctul $y = 1$, inclusiv acest punct.

Așa dar, fie

$$(6) \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă al cărei cerc de convergență are drept rază unitatea și să presupunem seria

$$(7) \quad P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

convergentă. Prin urmare la un număr pozitiv dat ε , oricât de mic vom, corespunde un număr întreg pozitiv m astfel că restul acestei serii, relativ la un rang n ,

$$R_n(1) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}$$

satisface inegalitatea

$$(8) \quad |R_n(1)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru toate valorile lui $n \geq m$. Să punem

$$(9) \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= \sigma_1, \\ a_{n+1} + a_{n+2} &= \sigma_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} &= \sigma_k, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

De unde

$$\sigma_k = R_{n+k}(1) - R_n(1)$$

și prin urmare

$$(10) \quad |\sigma_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

Egalitățile (9) ne dau

$$(11) \quad a_{n+k} = \sigma_k - \sigma_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Să considerăm restul seriei (6) corespunzător rangului n :

$$R_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}.$$

Înlocuind coeficienții a_{ν} prin valorile lor date (11), obținem

$$R_n(x) = x^{n+1} (\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)x + (\sigma_3 - \sigma_2)x^2 + \dots).$$

Seria din paranteză este evident limita sumei

$$(1-x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \dots + \sigma_{k+1} x^{k+1}),$$

când facem k să tindă către infinit. Însă termenul din urmă tinde în același timp către zero, ($|x| < 1$); prin urmare

$$R_n(x) = x^{n+1} (1-x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \dots).$$

Ținând seamă de inegalitățile (10) și presupunând $0 < x < 1$ avem

$$|R_n(x)| < \varepsilon x^{n+1} (1-x)(1+x+x^2+\dots),$$

sau

$$(12) \quad |R_n(x)| < \varepsilon x^{n+1} < \varepsilon, \quad (n \geq m, \quad 0 < x < 1).$$

Inegalitatea (8) care se poate înlocui prin cea următoare

$$(13) \quad |R_n(1)| < \varepsilon, \quad n \geq m$$

și inegalitatea (12) ne arată că la un ε dat corespunde un *acelaș* număr m , pentru care

$$|R_n(x)| < \varepsilon, \quad (n \geq m, \quad 0 < x \leq 1),$$

q. e. d.

106. În virtutea teoremei precedente putem scrie

$$\lim_{x=x_0} P(x) = P(x),$$

când punctul x situat în cercul de convergență se apropie de x_0 , dealungul razei care trece prin acest punct. Cu alte cuvinte: *Valoarea către care tinde seria $P(x)$, când variabila se apropie dealungul razei de un punct al cercului său de convergență în care ea este convergentă, este egală cu valoarea ce primește seria în acest punct.* În acest rezultat consistă importanța teoremei precedente.

Aplicațiune. Pentru valori reale ale lui x și mai mici în valoare absolută decât 1, avem, precum se știe, egalitatea

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \log(1+x).$$

Însă seria din membrul întâiu fiind convergentă pentru $x=1$, rezultă

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2.$$

107. *Observare.* Seria $P(x)$ fiind în interiorul cercului său de convergență absolut convergentă, limita către care tinde, când x se apropie de un punct x_0 al cercului, este independentă de ordinea termenilor. În adevăr, să reprezentăm prin $Q(x)$ seria $P(x)$ scrisă într'o ordine diferită oricare, vom avea, în interiorul cercului și oricât de aproape de cerc: $P(x) = Q(x)$. Prin urmare dacă avem

$$\lim_{x=x_0} P(x) = A,$$

adică

$$|P(x) - A| < \varepsilon,$$

vom avea și

$$|Q(x) - A| < \varepsilon,$$

când x este destul de aproape de x_0 și interior cercului de convergență, adică

$$\lim_{x=x_0} Q(x) = A.$$

Însă valoarea seriei $P(x_0)$ în cazul când această serie este semi-convergentă depinde de ordinea termenilor. Prin urmare, pentru ca teorema lui Abel să fie adevărată, este necesar, precum rezultă

din demonstrarea ei, ca seria să fie ordonată după puterile crescânde ale lui x . Dacă n'am ținut seamă de cele zise aci, am putea ajunge la rezultate false.

Să ordonăm, de exemplu, seria

$$P(x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

în modul următor

$$P(x) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2(2n-1)}}{2(2n-1)} - \frac{x^{4n}}{4n} \right].$$

Ambele serii sunt egale cu $\log(1+x)$, ($|x| < 1$), și tind către $\log 2$, când x tinde către 1. Pe când, dacă înlocuim x prin 1 în aceste serii avem

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \log 2,$$

$$\sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} \right] = \frac{1}{2} \log 2.$$

Ultima egalitate se justifică imediat, dacă observăm că avem

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

108. *Teoremă asupra razei cercului de convergență (Cauchy-Hadamard).*

Fiind dată seria întreagă

$$(14) \quad P(x) = \sum a_n x^n;$$

să considerăm șirul de numere pozitive

$$(15) \quad |a_1|, \left| \sqrt{a_2} \right|, \left| \sqrt[3]{a_3} \right|, \dots, \left| \sqrt[n]{a_n} \right|, \dots$$

Se poate întâmpla ca acest șir să conțină termeni cari trec peste orice limită, de exemplu, dacă

$$|a_n| = n^n,$$

sau ca toți termenii să fie inferiori unui număr dat. În cazul întâiu seria (14) nu poate fi convergentă decât în punctul $x = 0$. Căci pentru orice valoare $x \neq 0$ avem, începând dela un rang destul de depărtat,

$$\sqrt[n]{|a_n|} |x| > 1.$$

Să considerăm cazul al doilea și să presupunem că toți termenii șirului (15) sunt mai mici ca un număr pozitiv dat. În acest caz, cea mai mare dintre limitele șirului (15) este un număr finit λ , care se bucură de proprietățile următoare (§ 18):

1^o. Termenii șirului mai mari ca $\lambda + \varepsilon$ sunt în număr mărginit;

2^o. Șirul conține un număr nemărginit de termeni mai mari ca $\lambda - \varepsilon$, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε .

Să demonstrăm acum teorema următoare a lui *Cauchy*, regăsită de d-l *J. Hadamard*:

Teoremă. Raza cercului de convergență al seriei $P(x)$ este egală cu $\frac{1}{\lambda}$.

1^o. Fie $|x| < \frac{1}{\lambda}$; putem pune:

$$|x| \leq \frac{1}{\lambda + \delta},$$

δ fiind un număr pozitiv destul de mic. În virtutea proprietății 1^o a lui λ , există un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geq N$ să avem

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \lambda + \delta_1, \quad 0 < \delta_1 < \delta;$$

prin urmare

$$\left| \sqrt[n]{a_n x^n} \right| < \frac{\lambda + \delta_1}{\lambda + \delta} < 1.$$

Așa dar seria $P(x)$ este convergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x| < \frac{1}{\lambda}.$$

2^o. Fie $|x| > \frac{1}{\lambda}$; putem pune

$$|x| \geq \frac{1}{\lambda - \delta},$$

δ având aceeași semnificație ca mai sus. În virtutea proprietății (2^o) a lui λ , avem, pentru o infinitate de valori ale lui n ,

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| > \lambda - \delta_1, \quad 0 < \delta_1 < \delta;$$

prin urmare

$$\left| \sqrt[n]{a_n x^n} \right| > \frac{\lambda - \delta_1}{\lambda - \delta} > 1,$$

adică seria $P(x)$ este divergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x| > \frac{1}{\lambda},$$

căci o infinitate de termeni ai seriei cresc, în valoare absolută, peste orice limită.

Din cele ce preced rezultă că raza cercului de convergență nu poate fi mai mare ca $\frac{1}{\lambda}$; dar, privită mai mică, ea poate fi oricât de aproape voim de $\frac{1}{\lambda}$. Diferența $\frac{1}{\lambda} - R$ poate dar fi mai mică ca orice cantitate dată; însă fiind constantă, rezultă că ea este nulă. Avem așa dar

$$R = \frac{1}{\lambda}.$$

Corolar. Raza cercului de convergență a unei serii întregi depinde numai de modulele coeficienților seriei.

109. *Observări.* — 10. Dacă șirul (15) este convergent, numărul λ coincide cu $\lim \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$ și avem

$$(16) \quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}.$$

20. Dacă șirul

$$(17) \quad \left| \frac{a_1}{a_0} \right|, \left| \frac{a_3}{a_2} \right|, \dots, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \dots$$

este convergent, se știe că și șirul (15) este convergent și că limitele lor sunt egale¹⁾. În acest caz avem așa dar

$$(18) \quad R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Reciproca nu este adevărată. Convergența șirului (15) nu trage după sine convergența șirului (17). Exemplu:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Raportul a doi termeni consecutivi este când 2, când $\frac{1}{4}$; prin urmare șirul considerat nu este convergent, pe când $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a termenului de rang n este $\frac{1}{2}$.

¹⁾ Fie $|a_n| = a_n$ și $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$. La un ε dat va corespunde un N astfel încât pentru $n \geq N$ să avem $P - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < P + \varepsilon$. Făcând $n = N, N+1, \dots, N+m-1$ și multiplicând inegalitățile între ele, obținem, extragând rădăcina n^{a} ,

$$(P - \varepsilon)^{1 - \frac{m}{n}} < \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_N}} < (P + \varepsilon)^{1 - \frac{m}{n}};$$

de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = P.$$

110. Să considerăm seria

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots + a_n x^{-n} + \dots,$$

ordonată după puterile întregi și negative ale lui x . O asemenea serie se bucură de proprietăți analoage cu ale seriilor întregi de x , la care se reduce imediat prin substituțiunea

$$x = \frac{1}{x'}.$$

Punctul $x = \infty$ joacă în aceste serii rolul pe care-l joacă punctul $x = 0$ în seriile întregi. Astfel se poate întâmpla ca seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$ să nu fie convergentă decât în punctul $x = \infty$, sau să fie convergentă în tot planul exceptând punctul $x = 0$.

Lăsând la o parte aceste cazuri extreme, există un număr pozitiv R , astfel că seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$ este absolut și uniform convergentă în toată întinderea planului (inclusiv punctul ∞) exterior cercului $|x| = R$ și divergentă în interiorul acestui cerc. R va fi raza cercului de convergență al seriei $P\left(\frac{1}{x}\right)$.

111. *Seria Laurent*. Să considerăm într'un mod mai general seria

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

ordonată după puterile întregi pozitive și negative ale lui x .

Să punem

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad P_1\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n};$$

de unde

$$Q(x) = P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Fie R și R' razele cercurilor de convergență ale seriilor $P(x)$, $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$. Dacă $R < R'$, nu există nici un punct în plan în care ambele serii să fie convergente; seria $Q(x)$ n'are sens. Dacă $R > R'$, cele două serii au ca regiune comună de convergență coroana cuprinsă între cercurile concentrice (R) , (R') , având centrele în origină. În această coroană, seria $Q(x)$, zisă seria *Laurent*, este absolut și uniform convergentă, căci fiecare din seriile $P(x)$, $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$ se bucură de aceste proprietăți.

În cazul $R = R'$, nu pot să existe decât puncte ale cercului $|x| = R$ în care seria $Q(x)$ să fie convergentă; se poate întâmpla ca această serie să fie convergentă dealungul cercului întreg, sau în nici un punct.

112. Tot ce s'a spus asupra seriilor întregi $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ se aplică seriilor de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

x_0 fiind un punct oarecare în planul variabilei x . În cazul când o asemenea serie este convergentă într'un punct diferit de x_0 , ea va admite un cerc de convergență având centrul său în punctul x_0 și o rază finită sau infinit de mare. Ne vom servi de notațiunea

$$P(x-x_0) = \sum_0^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

și vom înțelege prin $P(x-x_0)$ o serie întreagă de $x-x_0$, convergentă în domeniul punctului x_0 .

În cazul când $x_0 = \infty$, simbolul $P(x-\infty)$ va fi înlocuit prin $P\left(\frac{1}{x}\right)$, simbol care reprezintă, precum am văzut, o serie întreagă de $\frac{1}{x}$, convergentă în domeniul punctului $x = \infty$.

Dacă în seria Laurent înlocuim x prin $x-x_0$, obținem seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

convergentă într'o coroană de două cercuri concentrice cu centrul în x_0 .

113. *Teoremă asupra coeficienților seriilor de puteri (Cauchy).*
Fie seria

$$(1) \quad Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice cu centrul în origină și având razele R, R' ($R > R'$). Fie ϱ un număr pozitiv cuprins între R și R' și M o limită superioară a lui $|Q(x)|$ dealungul cercului descris din origină ca centru cu raza ϱ . Vom avea

$$(2) \quad |a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pentru a demonstra această teoremă să multiplicăm ambele membre ale egalității (1) cu x^{-m} , m fiind un număr întreg, pozitiv, negativ sau nul; vom obține

$$x^{-m} Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^{n-m}.$$

Făcând $x = \varrho [\cos \theta + i \sin \theta]$ și punând pentru prescurtare

$$(\cos m \theta - i \sin m \theta) Q(x) = F(\theta),$$

avem

$$\varrho^{-m} F(\theta) = \sum a_n \varrho^{n-m} [\cos (n-m) \theta + i \sin (n-m) \theta].$$

$F(\theta)$ este o funcțiune continuă de θ pentru toate valorile $0 \leq \theta \leq 2\pi$ și $|F(\theta)| \leq M$. Multiplicând ambele membre cu $d\theta$ și integrând între 0 și 2π ¹⁾, toate integralele din membrul al doilea vor fi nule, exceptând aceea pentru care $n = m$. Așa dar avem

$$\varrho^{-m} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 2\pi a_m;$$

de unde

$$2\pi |a_m| \leq \varrho^{-m} M \int_0^{2\pi} d\theta,$$

sau

$$(3) \quad |a_m| \leq \frac{M}{\varrho^m}.$$

114. *Alte inegalități pentru modulele coeficienților seriilor întregi.*

Fie

$$(1) \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă și R raza cercului său de convergență. Să punem

$$(2) \quad x = \varrho e^{i\varphi}, \quad a_n = |a_n| e^{i\alpha_n};$$

vom putea scrie

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n e^{i(a_n + n\varphi)} &= u(\varrho, \varphi) + iv(\varrho, \varphi), \\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n e^{-i(a_n + n\varphi)} &= u(\varrho, \varphi) - iv(\varrho, \varphi), \end{aligned}$$

$u(\varrho, \varphi)$ și $v(\varrho, \varphi)$ fiind serii reale de variabilele reale ϱ și φ , convergente pentru valorile

$$\varrho < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

¹⁾ Pentru justificarea operațiunii de mai sus, să observăm că punând $a_n = r_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n)$, putem înlocui membrul al doilea printr'o sumă $S(\theta) + iS_1(\theta)$, S și S_1 fiind două serii reale absolut și uniform convergente pentru ϱ constant și prin urmare integralele lor se obțin integrând fiecare termen în parte. Deasemenea $F(\theta)$ se poate pune sub forma $F_1(\theta) + iF_2(\theta)$, F_1 și F_2 fiind funcțiuni reale. În fine, prin definițiune, $\int (F_1 + iF_2) d\theta = \int F_1 d\theta + i \int F_2 d\theta$.

Adunând egalitățile (3) obținem

$$(4) \quad \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n \left[e^{i(a_n + n\varphi)} + e^{-i(a_n + n\varphi)} \right] = u(\varrho, \varphi).$$

Înmulțind ambele membre cu $e^{-mi\varphi}$ și integrând între 0 și 2π , rezultă

$$(5) \quad \pi a_m \varrho^m = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) e^{-mi\varphi} d\varphi \quad m > 0$$

și pentru $m = 0$,

$$(6) \quad 2\pi |a_0| \cos a_0 = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) d\varphi.$$

Scăzând egalitățile (3) obținem, procedând în același mod,

$$(7) \quad \pi a_m \varrho^m = i \int_0^{2\pi} v(\varrho, \varphi) e^{-mi\varphi} d\varphi \quad m > 0,$$

$$(8) \quad 2\pi |a_0| \sin a_0 = \int_0^{2\pi} v(\varrho, \varphi) d\varphi.$$

Fie A maximul lui $|u(\varphi, \varrho)|$ și B maximul lui $|v(\varrho, \varphi)|$, ϱ fiind privit constant; vom avea inegalitățile căutate

$$(9) \quad |a_m| \leq \frac{A}{\varrho^m}, \quad |a_m| \leq \frac{B}{\varrho^m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

II. — PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR ÎNTREGI.

115. *Teoremă. Fie*

$$(1) \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

o serie întreagă convergentă într-un cerc (R)¹. Dacă coeficientul $a_0 \neq 0$, există un număr pozitiv $r < R$ astfel că pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea $|x| < r$, avem

$$(2) \quad |a_0| > |a_1x + a_2x^2 + \dots|.$$

Această inegalitate este o consecință imediată a continuității seriei (1) în interiorul cercului (R), căci pentru $|x|$ destul de mic membrul al doilea poate fi mai mic ca ε , oricât de mic ar fi ε . Teorema lui Cauchy asupra coeficienților seriilor de puteri ne conduce la un rezultat mai precis.

Să reprezentăm prin M modulul maximum al lui $P(x) - a_0$ de-a lungul unui cerc (ϱ), $\varrho < R$; vom avea

$$|a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

¹) Adică în cercul $|x| = R$.

Fie x un punct oarecare în interiorul cercului (ϱ) și $|x| = \varrho' < \varrho$; avem

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^n = M \frac{\varrho'}{\varrho - \varrho'}.$$

Să punem

$$\frac{M\varrho'}{\varrho - \varrho'} < |a_0|;$$

de unde

$$\varrho' < \frac{|a_0|\varrho}{M + |a_0|}.$$

Este deajuns să luăm

$$(3) \quad r = \frac{|a_0|\varrho}{M + |a_0|},$$

pentru ca în interiorul cercului (r) inegalitatea (2) să fie satisfăcută.

Corolare. 1^o. În interiorul cercului (r) seria $P(x)$ nu se poate anula.

2^o. Să presupunem $a_0 = 0$ și fie a_m primul coeficient al seriei, diferit de zero; vom avea

$$P(x) = x^m (a_m + a_{m+1}x + \dots) \quad a_m \neq 0$$

și vom zice că $x \neq 0$ este un zero de ordinul m al seriei $P(x)$ ¹⁾.

Fie M maximul expresiunii

$$|a_{m+1}x + a_{m+2}x^2 + \dots|$$

dealungul cercului (ϱ) , $\varrho < R$ și

$$r = \frac{a_m \varrho}{M + |a_m|}.$$

Seria $P(x)$ nu se va anula în interiorul cercului (r) pentru altă valoare a lui x decât $x = 0$.

116. *Teoremă.* Dacă seria $P(x)$ se anulează într-o înfinitate de puncte având ca punct limită punctul $x = 0$, toți coeficienții ei sunt nuli.

În adevăr, dacă coeficienții seriei date n'ar fi toți nuli, ar urmă, în virtutea teoremei precedente, ca într'un cerc (r) destul de mic, seria să n'aibă nici un zero sau să nu aibă alt zero decât punctul $x = 0$; ceea ce este incompatibil cu faptul că seria admite o înfinitate de zeruri vecine cu punctul $x = 0$.

¹⁾ Numim zero al unei funcțiuni $f(x)$, valoarea lui x care anulează funcțiunea.

Demonstrațiune directă. Fie

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

un șir nelimitat de zeruri ale seriei $P(x)$ având ca punct limită punctul $x = 0$. Din definițiunea punctului limită rezultă că un cerc (r) descris din $x = 0$ ca centru cu o rază r oricât de mică voim, cuprinde în interiorul său puncte ale șirului (4). Fie ε un număr pozitiv arbitrar de mic căruia corespunde în virtutea continuității seriei $P(x)$, un număr pozitiv r , astfel că pentru orice punct x care satisface inegalitatea $|x| < r$, avem

$$|P(x) - P(0)| < \varepsilon.$$

Înlocuind x printr'unul din punctele șirului (4), situat în interiorul cercului (r) , rezultă

$$|P(0)| < \varepsilon,$$

și prin urmare

$$P(0) = 0;$$

De unde

$$a_0 = 0.$$

Fie

$$P(x) = x P_1(x),$$

$$P_1(x) = a_1 + a_2 x + \dots$$

Seria $P_1(x)$ are acelaș cerc de convergență ca $P(x)$ și abstracțiune făcând de punctul $x = 0$, are aceleași zeruri. De unde rezultă ca mai sus: $a_1 = 0$. Acelaș raționament prelungit arată că toți coeficienții seriei sunt nuli.

Corolar. Dacă două serii întregi

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sunt egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu $x = 0$, ele sunt identice. Căci, în virtutea ipotezei, seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

este nulă într'o infinitate de puncte având ca punct limită punctul $x = 0$.

117. Seriile de forma

$$P(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

se bucură, în domeniul punctului $x = x_0$, de proprietăți identice cu ale seriilor $P(x)$ în domeniul punctului $x = 0$; căci punând $x - x_0 = x'$, avem

$$P(x-x_0) = P(x').$$

Să enunțăm aceste proprietăți:

1^o. Dacă seria $P(x-x_0)$ nu se anulează în punctul x_0 , există un număr pozitiv r , astfel că în interiorul cercului $|x-x_0|=r$, $P(x-x_0)$ nu are nici un zero.

2^o. Dacă $P(x-x_0)$ se anulează în punctul x_0 , există un număr $r > 0$, astfel că în cercul $|x-x_0|=r$, $P(x-x_0)$ nu are alt zero decât punctul x_0 . Zicem că punctul x_0 este *izolat* de celelalte puncte în cari $P(x-x_0)$ se poate anula.

3^o. Dacă seria $P(x-x_0)$ se anulează într'o infinitate de puncte având x_0 ca punct limită, ea este identic nulă, adică toți coeficienții a_n sunt nuli. De unde rezultă că dacă $P(x-x_0)$ primește aceeaș valoare A într'o infinitate de puncte având x_0 ca punct limită, $P(x-x_0)$ se reduce la o constantă egală cu A .

4^o. Dacă două serii $P(x-x_0)$, $P_1(x-x_0)$ sunt egale într'o infinitate de puncte $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ pentru cari x_0 este un punct limită, ele coincid.

118. *Sumă de serii de puteri (Weierstrass).*

O sumă de serii absolut convergente, în număr limitat, se poate înlocui printr'o serie unică absolut convergentă.

Fie

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_{m-1}(x)$$

m serii de puteri, convergente într'o coroană limitată de două cercuri concentrice $(R), (R')$, $R > R'$:

$$u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{in} x^n \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Vom avea, reunind într'un singur termen, puterile egale ale lui x ,

$$\sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{0,n} + a_{1,n} + \dots + a_{m-1,n}) x^n.$$

Să considerăm acum cazul unui număr nelimitat de serii Laurent.

$$(1) \quad u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots$$

convergente în aceeaș coroană. Operațiunea precedentă nu se mai aplică totdeauna. Vom demonstra teorema următoare a lui Weierstrass:

Teoremă. Dacă seria

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$$

este uniform convergentă dealungul unui cerc $|x| = \varrho$, ϱ fiind un număr oarecare cuprins între R și R' , $R > \varrho > R'$:

1^o. *Seriile*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sunt convergente.

 2^o. *Punând*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,n} = A_n,$$

seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n$$

este convergentă în aceeaș coroană, prin urmare absolut convergentă.

 3^o. *Avem*

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n.$$

1^o. În virtutea ipotezei, la un număr pozitiv dat ε oricât de mic voim, corespunde un număr întreg m , astfel că

$$(2) \quad \left| \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de unde ¹⁾

$$(3) \quad \left| \sum_{i=m}^{m+p} u_i(x) \right| < \varepsilon,$$

p fiind un număr întreg pozitiv oricât de mare voim. Membrul întâiu al acestei inegalități conținând un număr limitat de serii absolut convergente, putem grupă termenii sumei după puterile lui x . Această inegalitate se va putea dar scrie

$$(4) \quad \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{m,n} + a_{m+1,n} + \dots + a_{m+p,n}) x^n \right| < \varepsilon.$$

Aplicând teorema lui *Cauchy* asupra coeficienților seriilor de puteri, coeficientul lui x^n va satisface inegalitatea

$$(5) \quad \left| a_{m,n} + a_{m+1,n} + \dots + a_{m+p,n} \right| < \frac{\varepsilon}{Q^n},$$

cecece probează că seria $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n}$ este convergentă.

Făcând p să tindă către infinit ²⁾, restul seriei oprită la rangul m , va satisface inegalitatea.

$$(6) \quad \left| \sum_{i=m}^{\infty} a_{i,n} \right| < \frac{\varepsilon}{Q^n},$$

n fiind constant și având una din valorile $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

¹⁾ $\left| \sum_{i=m}^{\infty} u_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{i=m+p}^{\infty} u_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=m}^{i=m+p} u_i = \sum_{i=m}^{\infty} u_i - \sum_{i=m+p}^{\infty} u_i; \quad \left| \sum_{i=m}^{m+p} u_i(x) \right| < \varepsilon.$

²⁾ Ceeace este permis, seria fiind convergentă.

2°. Pentru a demonstra convergența seriei

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n,$$

s'o descompunem în două serii: una relativă la cele dintâi m serii (5) și cealaltă relativă la cele rămase.

Să punem

$$A'_n = \sum_{i=0}^{m-1} a_{in},$$

$$A''_n = \sum_{i=m}^{\infty} a_{in};$$

vom avea

$$(7) \quad A_n = A'_n + A''_n,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n x^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_n x^n,$$

coeficienții A''_n satisfăcând inegalitatea

$$(8) \quad \left| A''_n \right| < \frac{\varepsilon}{\varrho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Prima serie din membrul al doilea (7) fiind egală cu suma celor dintâi m serii (5), adică

$$(9) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n x^n = \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x)$$

este absolut convergentă în coroana considerată. Să ne ocupăm de cea de a doua și să examinăm separat seriile

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n},$$

corespunzătoare valorilor pozitive și negative ale lui n .

Fie r și r' două numere cuprinse între R și R' ,

$$R > r > r' > R'.$$

Să înlocuim în (8) ϱ respectiv prin r și r' după cum $n \geq 0$ sau $n < 0$, ceea ce este permis căci ϱ este un număr oarecare cuprins între R și R' ¹⁾. Vom obține inegalitățile:

$$(11) \quad |A''_n| < \frac{\varepsilon}{r^n}, \quad |A''_{-n}| < \varepsilon r'^n,$$

sau

$$(12) \quad |A''_n| r^n < \varepsilon, \quad |A''_{-n}| r'^{-n} < \varepsilon,$$

cari, în virtutea primei teoreme a lui Abel, probează convergența

¹⁾ Este deajuns a lua pentru m cea mai mare din valorile sale corespunzătoare lui r și r' .

seriilor (15): cea dintâiu în interiorul cercului $|x| = r$ și cea de a doua în exteriorul cercului $|x| = r'$. Însă r poate fi presupus oricât de aproape de R și r' oricât de aproape de R' ; prin urmare seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_n x^n$$

este convergentă în coroana limitată de cercurile (R) și (R') . De unde rezultă aceeași concluziune pentru seria propusă

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n.$$

3°. Fie q un număr cuprins între r și r' ,

$$r' < q < r$$

și x un punct oarecare pe cercul (q) ; vom avea, în virtutea inegalităților (14) și (12),

$$(13) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A''_n| q^n < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{r} \right)^n = \varepsilon \frac{r}{r-q},$$

$$(14) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A''_{-n}| q^{-n} < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r'}{q} \right)^n = \varepsilon \frac{r'}{q-r'}.$$

Să considerăm acum diferența

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n,$$

care, în virtutea egalității (9), este egală cu diferența

$$\sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_n x^n = \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=c}^{\infty} A''_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n};$$

prin urmare

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n \right| &\leq \left| \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n \right| \\ &+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n} \right|. \end{aligned}$$

De unde, în virtutea inegalităților (2), (13), (14), rezultă inegalitatea

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n \right| < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{r-q} + \frac{r'}{q-r'} \right)$$

Însă membrul întâiu fiind independent de ε , rezultă că el este nul; de unde

$$(15) \quad \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n.$$

q. e. d.

119. Dacă seriile $u_i(x)$ se reduc la serii întregi $P_i(x)$, convergente în acelaș cerc (R) și astfel ca suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)$$

să fie uniform convergentă dealungul unui cerc (r), r fiind un număr pozitiv oarecare, mai mic ca R și oricât aproape voim de acest din urmă număr, vom avea în interiorul cercului (R)

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

În ce privește raza cercului de convergență al sumei, este evident că dacă razele cercurilor seriilor date sunt înegale, ea este egală cu cea mai mică dintre raze; în cazul când toate razele sunt egale, raza cercului de convergență al sumei este egală cu raza comună, și, în cazuri particulare, ea poate fi oricât de mare. Să considerăm ca exemplu două serii

$$P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - 1 \right) x^n,$$

ale căror raze sunt egale cu 1. Suma

$$P_1 + P_2 = \sum \frac{x^n}{n!}$$

are raza $R = \infty$.

Observare. Dacă seria $\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ este uniform convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice (R) și (R'), ea este evident convergentă dealungul oricărui cerc (r), r fiind cuprins între R și R'. Sub această formă se prezintă în genere, în aplicațiuni, teorema lui *Weierstrass*.

120. *Consecințe. I. Produsul a două serii întregi este o serie întreagă.*

Fie

$$P_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

două serii întregi, R_1 și R_2 razele cercurilor lor de convergență, $R_1 \geq R_2$. Să considerăm produsul

$$P_1 P_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n x^n P_1(x)).$$

În membrul al doilea avem o sumă de un număr nelimitat de serii întregi

$$u_n(x) = b_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

corespunzătoare valorilor $n = 0, 1, 2, \dots$, convergente în cercul

(R_1). Suma acestor serii este uniform convergentă în cercul (R_2). În adevăr, fie M maximul lui $|P_1(x)|$ în cercul (R_1)¹⁾; la un ε dat putem face să corespundă un număr întreg n' astfel ca să avem

$$\left| \sum_{n=v}^{\infty} b_n x^n \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad v \geq n',$$

oricare ar fi punctul x în interiorul cercului (R_2); prin urmare, oricare ar fi x în interiorul acestui cerc, avem inegalitatea

$$\left| P_1(x) \sum_{n=v}^{\infty} b_n x^n \right| < \varepsilon,$$

care probează convergența uniformă a seriei $\sum u_n(x)$ în cercul (R_2).

Putem dar aplica teorema lui *Weierstrass*, care ne dă

$$P_1(x) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n.$$

Raza cercului de convergență al produsului este cel puțin egală cu cea mai mică dintre cele două raze R_1, R_2 , dar poate fi egală cu cea mai mare, sau chiar mai mare decât aceasta. Exemple

$$1^0 \quad P_1(x) = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad R_1 = 1,$$

$$P_2(x) = (1-x) \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad R_2 = 2.$$

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad R = R_2 = 2.$$

$$2^0 \quad P_1(x) = (1+x) \sum x^n, \quad R_1 = 1$$

$$P_2(x) = (1-x) \{ \sum (-1)^n x^n \} \sum \frac{x^n}{n!}, \quad R_2 = 1.$$

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) = \sum \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty.$$

Observare. Fie $R_1 = R_2 = 1$; vom avea pentru $|x| < 1$,

$$P_1(x) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n.$$

Dacă seriile $P_1(x)$, $P_2(x)$ precum și seria din membrul al doilea sunt convergente în punctul $x = 1$, fără a fi absolut convergente, egalitatea precedentă va subsista în acest punct, conform teoremei II a lui *Abel*; deci vom avea

$$(1) \quad \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0).$$

¹⁾ Se va vedea că maximul este atins pe cercul de convergență.

Se știe că produsul a două serii Σa_n , Σb_n dintre cari una cel puțin este absolut convergentă este dat de formula precedentă ¹⁾. În cazul când ambele serii sunt semiconvergente, această regulă poate să nu mai fie aplicabilă, căci se poate întâmpla ca seria din membrul al doilea să fie divergentă. Să considerăm, de exemplu, seriile

$$\Sigma a_n = \Sigma b_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Seria al cărui termen general este

$$+c_n = \frac{1}{\sqrt{1n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n.1}},$$

este divergentă căci avem ²⁾

$$|c_n| > n \frac{1}{\frac{n+1}{2}} = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Rezultatul obținut mai sus ne arată că dacă seria din membrul al doilea (1) este convergentă, regula înmulțirii subsistă ca și în cazul când una cel puțin din cele două serii date este absolut convergentă.

Corolar. $P(x)$ fiind o serie întreagă convergentă într'un cerc (R), puterile sale $P^2(x)$, $P^3(x)$, ... sunt serii întregi convergente în acelaș cerc.

Aplicațiune. Seria

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

convergentă în cercul cu raza 1, multiplicată cu ea însăși, ne dă

$$P^2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Inmulțind ambele membre ale acestei egalități cu $P(x)$ obținem

$$P^3(x) = 1 + 3x + \dots + 6x^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^{n-1} + \dots$$

Continuând în acelaș mod, obținem

$$P^m(x) = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{n!} x^{n-1} + \dots$$

Se recunoaște ușor că formula fiind adevărată pentru un exponent m , este adevărată și pentru $m+1$.

¹⁾ *Goursat*, Cours d'Analyse, tome I, pag. 397, edit. I-a.

²⁾ În virtutea inegalității $a \cdot b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

De altă parte, avem

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x};$$

de unde conchidem egalitatea

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + mx + \dots + \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{n!} x^{n-1} + \dots,$$

valabilă în interiorul cercului $|x| = 1$.

II. Fiind dat un număr limitat n de serii întregi

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x),$$

convergente în acelaș cerc (R), o funcțiune rațională și întreagă de aceste serii

$$f(P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x))$$

este o serie întreagă de x , convergentă în cercul (R). Aceasta rezultă din I și din corolarul precedent.

III. Fie

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

o serie întreagă de variabila y , convergentă într'un cerc (R) și

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = P(x)$$

o serie întreagă de x , convergentă într'un cerc (R₁). Nu se poate afirmă a priori că $f(y)$ devine o serie întreagă de x , când înlocuim y prin valoarea sa $P(x)$. Să considerăm, ca exemplu seria

$$f(y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y_n}{n} + \dots$$

al cărei cerc de convergență are raza $R = 1$ și fie seria

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots$$

având aceeaș rază pentru cercul său de convergență. Se recunoaște imediat că $f(y)$ nu se poate pune sub forma

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

căci avem, pentru coeficientul c_0 , valoarea

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Este evident înainte de toate că, pentru ca să putem avea o egalitate de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

este necesar ca seriile din ambele membre să aibă o regiune comună de convergență; prin urmare ca seria din membrul întâiu să fie convergentă în domeniul ($x=0$). Pentru aceasta este necesar ca punctelor x vecine cu punctul $x=0$, să corespundă puncte y interioare cercului (R), căci altfel seria $\sum a_n y^n$ n'ar fi convergentă. În special valoarea lui y corespunzătoare lui $x=0$, trebuie să fie în *valoare absolută* mai mică ca R , adică *trebuie* să avem

$$(1) \quad |P(0)| < R^1)$$

Această condițiune este *suficientă*. În adevăr, fie δ un număr pozitiv, destul de mic, pentru ca să avem

$$(2) \quad |P(0)| < R - 2\delta;$$

de altă parte, $P(x)$ fiind funcțiune continuă în domeniul $x=0$, există un cerc (r), $r < R$, astfel că în interiorul lui avem

$$|P(x) - P(0)| < \delta$$

și a *fortiori*

$$|P(x)| - |P(0)| < \delta;$$

prin urmare

$$|P(x)| < R - \delta.$$

Însă, în virtutea ipotezei, seria $\sum a_n y^n$ fiind convergentă în cercul (R), seria

$$(5) \quad \sum |a_n| (R - \delta)^n$$

este convergentă; prin urmare în interiorul cercului (r) seria

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n(x)$$

este uniform convergentă. Așa dar teorema lui Weierstrass se aplică acestei sume de serii, și în domeniul lui $x=0$, putem scrie

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Valorile coeficienților c_m se pot obține înlocuind y prin $P(x)$ și identificând ambele membre. Avem, pentru coeficientul c_0 , valoarea

$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_0^n.$$

¹⁾ În exemplul considerat mai sus, condițiunea $|P(0)| < R$ nefiind împlinită, căci $P(0) = 1$, substituțiunea este imposibilă, precum s'a recunoscut.

Până unde se întinde domeniul în care egalitatea (7) este valabilă? Acest domeniu, consistând în regiunea comună de convergență a ambelor membre, când înlocuim y prin $P(x)$, este un cerc cu centrul în $x = 0$ — în ipoteza, bine înțeles, că $|P(0)| < R$ — și trecând prin cel mai apropiat punct x , în care inegalitatea $|P(x)| < R$ nu mai este satisfăcută.

Observare. Este totdeauna posibil a transforma seria $f(y) = \sum a_n y^n$, prin ajutorul substituțiunii $y = P(x)$, într'o serie întreagă de x , dacă $P(0) = 0$. Deasemenea transformarea este totdeauna posibilă, dacă seria $f(y)$ este convergentă în toată întinderea planului (y).

În fine să mai observăm că cercul de convergență al seriei $\sum c_n x^n$ poate să conțină puncte în cari seria $P(x)$ nu este convergentă. În aceste puncte, evident, egalitatea (7) nu este valabilă. Fie, de exemplu,

$$y = P(x) = x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}$$

și

$$f(y) = 1 - y + y^2 - \dots = \frac{1}{1+y}$$

Rezultă $f(y) = 1 - x$.

IV. Fie

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

un șir nelimitat de serii convergente într'un cerc (R), cu condițiunea

$$|P_n(x)| < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

și seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

absolut și uniform convergentă. Fie

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

un șir nelimitat de cantități constante, ale căror module sunt mai mici decât un număr pozitiv dat a ; seria

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} [a_1 P_n(x) + a_2 P_n^2(x) + \dots + a_k P_n^k(x) + \dots]$$

se va exprima printr'o serie întreagă de x , convergentă în cercul (R).

Este de ajuns a proba că seria S este uniform convergentă în cercul (R). Fie, pentru prescurtare,

$$u_n = |P_n(x)|;$$

vom avea

$$|S| < a \sum (u_n + u_n^2 + \dots) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1-u_n}.$$

Însă seria

$$\sum \frac{u_n}{1-u_n}$$

este absolut și uniform convergentă în acelaș timp cu seria $\sum u_n$; de unde rezultă că seria S este absolut și uniform convergentă în cercul (R).

V. — Fie

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Punând

$$(8) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

și reprezentând prin r un număr pozitiv, astfel ca pentru $|x| < r$ să avem $|y| < |a_0|$, vom putea scrie, pentru aceste valori ale lui x ,

$$(9) \quad \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0 + y} = \frac{1}{a_0} \sum (-1)^m \left(\frac{y}{a_0}\right)^m.$$

Deoarece în virtutea ecuațiunii (8), y se anulează împreună cu x , seria din urmă și prin urmare $\frac{1}{P(x)}$ se poate exprima totdeauna printr'o serie întregă de x , convergentă în domeniul punctului $x = 0$. Vom avea dar o egalitate de forma

$$(10) \quad \frac{1}{P(x)} = P_1(x),$$

valabilă (III) într'un cerc cu centrul în origină și trecând prin punctul cel mai apropiat, interior cercului de convergență al seriei $P(x)$, în care inegalitatea

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \dots| < |a_0|$$

încetează de a fi satisfăcută, adică prin cel mai apropiat punct în care numitorul $P(x)$ se anulează.

Calculul seriei $P(x)$ se poate face astfel:

Punem

$$\frac{1}{P(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

de unde

$$1 = (a_0 + a_1 x + \dots)(a_0 + a_1 x + \dots)$$

și identificăm ambele membre; obținem ecuațiunile

$$a_0 a_0 = 1, \quad a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0, \quad a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 0, \dots,$$

cari determină coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots$.

121. Să considerăm două serii întregi $P(x), P_1(x)$ convergente în acelaș cerc (R), cea dintâi diferită de zero pentru $x = 0$; vom

avea, în domeniul acestui punct, o dezvoltare de forma

$$(11) \quad \frac{P_1(x)}{P(x)} = P_1(x) \cdot \frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

valabilă, după cele ce am văzut mai sus, într'un cerc cu centrul în origină și trecând prin punctul cel mai apropiat interior cercului (R), în care numitorul $P(x)$ se anulează.

Dacă $P(0) = 0$, astfel că

$$P(x) = x^m P_2(x) \quad P_2(0) \neq 0,$$

vom avea, în domeniul lui $x = 0$,

$$\frac{P_1(x)}{P(x)} = \frac{1}{x^m} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{1}{x^m} P(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă. Expresiunea câtului este dar, în acest caz, de forma

$$(12) \quad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n x^n.$$

122. Teorema lui Weierstrass asupra seriilor de puteri de x , precum și consecințele ei, subsistă pentru seriile de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

convergente într'o coroană formată de două cercuri concentrice având centrul lor în punctul x_0 .

Să considerăm, ca aplicațiune, o funcțiune rațională de x

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F(x)$ și $F_1(x)$ fiind polinoame de x fără factori comuni, de grade respectiv egale cu m și n . Fie x_0 un punct oarecare în plan; vom putea scrie, precum se știe din Algebră,

$$(13) \quad f(x) = \frac{A_0 + A_1(x-x_0) + \dots + A_m(x-x_0)^m}{B_0 + B_1(x-x_0) + \dots + B_n(x-x_0)^n}.$$

Dacă x_0 nu anulează numitorul $F(x)$; avem $B_0 = F(x_0) \neq 0$; de unde rezultă, în domeniul lui x_0 , expresiunea

$$(14) \quad f(x) = P(x-x_0).$$

Dacă x_0 este un zero al lui $F(x)$ de ordin k , avem

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{k-1} = 0, \quad B_k \neq 0;$$

expresiunea (13) devine

$$(15) \quad f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} \cdot \frac{A_0 + A_1(x-x_0) + \dots + A_m(x-x_0)^m}{B_k + B_{k+1}(x-x_0) + \dots + B_n(x-x_0)^{n-k}};$$

de unde, în domeniul lui x_0 , o expresiune de forma

$$(16) \quad f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} P(x-x_0) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Egalitățile (14) și (16) sunt, precum s'a văzut în paragraful precedent, valabile în cercul cu centrul în x_0 și trecând prin punctul cel mai apropiat de x_0 în care $F(x)$ se anulează.

123. Fie

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

un și nelimitat de funcțiuni raționale de x . Dacă seria $\sum f_n(x)$ este uniform convergentă într'o regiune dată, vom avea în domeniul unui punct x_0 ¹⁾, situat în acea regiune,

$$\sum_1^{\infty} f_n(x) = P(x-x_0);$$

căci în domeniul lui x_0 avem $f_n(x) = P_n(x-x_0)$ și seria

$$\sum P_n(x-x_0) = \Sigma f_n(x)$$

este, în virtutea ipotezei, uniform convergentă într'un cerc $|x-x_0| = r$, situat în regiunea dată.

124. Seria Laurent intră în cazul precedent.

Fie

$$Q(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a_n x^n + \sum_{+1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$$

și x_0 un punct în coroană; avem

$$a_n x^n = a_n (x_0 + x-x_0)^n = P_n^{(1)}(x-x_0),$$

$$a_{-n} x^{-n} = a_{-n} \frac{1}{(x_0 + x-x_0)^n} = P_n^{(2)}(x-x_0);$$

prin urmare

$$Q(x) = P(x-x_0).$$

Fie

$$Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

un șir nelimitat de serii Laurent și seria $\sum Q_n(x)$, uniform convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice. Fie x_0 un punct în interiorul coroanei. Vom avea, în domeniul lui x_0 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = P(x-x_0),$$

căci membrul întâiu se poate înlocui, în virtutea teoremei lui *Weierstrass*, printr'o serie unică Laurent, $Q(x)$.

¹⁾ Punctele în cari vreuna din funcțiunile $f_n(x)$ devine infinită nu fac parte din regiunea de convergență.

CAPITOLUL VI.

SERIA TAYLOR. PRELUNGIREA ANALITICĂ A SERIEI TAYLOR.

I. — SERIA TAYLOR.

125. Fie

$$(1) \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă și R raza cercului de convergență al ei. Fie x_0 un punct dat în interiorul cercului (R) ; punând

$$x = x_0 + h,$$

cu condițiunea ca punctul $(x_0 + h)$ să fie în interiorul cercului (R) , vom avea

$$P(x) = P(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0^n + n x_0^{n-1} h + \dots + h^n).$$

Să examinăm dacă seria din membrul al doilea se poate înlocui printr'o serie întreagă convergentă de h . Pentru aceasta, fie R' un număr pozitiv, mai mic ca R , însă oricât de aproape voim de R , și să privim h variabil, cu condițiunea

$$|x_0| + |h| \leq R'.$$

Raportând punctul figurat de h la x_0 ca origină, acest punct va fi situat în interiorul cercului sau pe cercul având centrul în x_0 și raza

$$\varrho = R' - |x_0|.$$

În aceste puncte h , avem

$$|a_n (x_0 + h)^n| \leq |a_n| R'^n;$$

prin urmare seria ai cărei termeni sunt funcțiunile raționale și întregi de h

$$a_n (x_0 + h)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

este absolut și uniform convergentă și suma sa se poate reprezenta printr'o serie întreagă de h , convergentă în acest cerc. Însă R' fiind oricât de aproape voim de R , conchidem că seria $P(x_0 + h)$, ordonată după puterile lui h , este convergentă în interiorul cercului cu centrul în x_0 și cu raza

$$\varrho = R - |x_0|,$$

adică în interiorul cercului descris din x_0 ca centru și tangent in-

de unde

$$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}.$$

Aplicând seriei $P'(x)$ formula (2), avem

$$P'(x_0 + h) = P'(x_0) + \frac{P''(x_0)}{1} h + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} + \dots;$$

de unde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + h) - P'(x_0)}{h} = P''(x_0).$$

Intr'un mod general, avem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P^{(n)}(x_0 + h) - P^{(n)}(x_0)}{h} = P^{(n+1)}(x_0).$$

126. Din transformarea seriei $P(x)$ în seria Taylor a rezultat, cum am văzut, seriile derivate $P'(x)$, $P''(x)$, ..., cari sunt convergente în interiorul cercului (R) . Convergența seriilor derivate în cercul (R) se poate stabili direct în modul următor: Fie R' un număr oarecare pozitiv mai mic ca R și M maximul lui $|P(x)|$ dealungul lui (R') ; avem

$$|a_n| \leq \frac{M}{R'^n}.$$

Fie x un punct situat în interiorul cercului (R') :

$$|x| = \varrho < R';$$

vom avea inegalitățile

$$n |a_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{R'} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{n-1},$$

din cari rezultă că seria

$$P'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$$

este convergentă în interiorul cercului (R') , prin urmare și în interiorul cercului (R) , căci putem presupune R' oricât de aproape vom de R .

Se poate proba că cercul de convergență al seriei derivate $P'(x)$ coincide cu cercul de convergență al seriei $P(x)$. Este de ajuns a arăta că raza cercului său de convergență nu poate fi mai mare ca R . Această propozițiune rezultă imediat din comparațiunea seriilor

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + \dots),$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots;$$

căci, seria din paranteză

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

are evident acelaș cerc de convergență ca seria $P(x)$ și începând dela $n = 2$, avem

$$n |a_n x^{n-1}| > |a_n x^{n-1}|.$$

Așadar seria derivată $P'(x)$ are acelaș cerc de convergență ca și seria primitivă $P(x)$.

În acelaș mod se conchide că seria $P''(x)$ are acelaș cerc de convergență ca $P'(x)$, prin urmare ca $P(x)$, etc. Așadar toate seriile derivate au acelaș cerc de convergență ca seria primitivă $P(x)$.

Să observăm că într'un punct situat *pe cercul* de convergență seria $P(x)$ poate fi convergentă și derivata sa $P'(x)$ divergentă. Astfel, de exemplu, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$, exceptând punctul $x = 1$, pe când derivata sa $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ este divergentă pe tot cercul.

127. Să înlocuim în (2) $x_0 + h$ prin x și h prin $x - x_0$, vom avea

$$(4) \quad P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1} (x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0) + \dots$$

Cercul de convergență al seriei din membrul al doilea al căruia centru este x_0 , este cel puțin tangent interior cercului primitiv (R), adică raza sa este cel puțin egală cu $R - |x_0|$. Reprezentând această serie prin $P(x - x_0)$, avem egalitatea

$$(5) \quad P(x) = P_1(x - x_0),$$

valabilă în toate punctele x situate în interiorul cercului descris din x_0 ca centru cu raza $R - |x_0|$. Seria $P_1(x - x_0)$ poate fi privită ca transformata seriei $P(x) = \sum a_n x^n$, în care înlocuim x prin $x_0 + (x - x_0)$ și punem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [x_0 + (x - x_0)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = P_1(x - x_0).$$

128. Referindu-ne la proprietatea 2^o a seriilor $P(x - x_0)$ (§117) conchidem, în virtutea egalității (5), propozițiunea următoare:

Dacă o serie întreagă $P(x)$ se anulează într'un punct oarecare x_0 , situat în cercul său de convergență, există un cerc cu centrul în x_0 având o rază $r > 0$, astfel că, în interiorul său, $P(x)$ n'are alt zero decât x_0 : adică zerurile lui $P(x)$ în interiorul cercului său de convergență sunt puncte izolate.

II. — PRELUNGIREA ANALITICĂ A SERIEI TAYLOR.

Serii deduse dintr'o serie de forma $P(x-x_0)$ sau continuarea seriilor.

129. Să considerăm seria

$$P(x-x_0) = \sum_0^x a_n (x-x_0)^n,$$

al cărei cerc de convergență să-l reprezentăm prin (R), R fiind raza acestui cerc. Fie x_1 un punct situat în (R); vom avea în domeniul lui x_1 , înlocuind x_1 prin $x_1 + (x-x_1)$,

$$P(x-x_0) = P[x_1-x_0 + (x-x_1)] = \sum_0^x \frac{P^{(n)}(x_1-x_0)}{n!} (x-x_1)^n,$$

formulă care se deduce din egalitatea

$$P(x_0+h) = \sum \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

dacă înlocuim x_0 prin x_1-x_0 și h prin $x-x_1$. Se reprezintă seria din membrul al doilea prin

$$P(x-x_0, x_1)^1).$$

Acest simbol va defini o serie întreagă de $x-x_1$, provenită din seria $P(x-x_0)$ în modul determinat mai sus. Avem așadar egalitatea

$$(2) \quad P(x-x_0) = P(x-x_0, x_1),$$

valabilă în interiorul cercului descris din x_1 ca centru și tangent interior cercului (R).

Se poate întâmpla ca cercul de convergență (C_1) al seriei $P(x-x_0, x_1)$ să se întindă în afară din cercul (R); prin urmare reprezentând prin R_1 raza cercului (C_1) și punând $d = |x_1-x_0|$, avem

$$R_1 \geq R-d.$$

Vom vedea mai departe că în cazul $R_1 > R-d$, egalitatea (2) subsistă nu numai în regiunea considerată mai sus, ci în toată aria comună cercurilor (R) și (C_1).

Fie x_2 un punct situat în interiorul cercului (C_1). Înlocuind x prin $x_2 + (x-x_2)$ în seria $P(x-x_0, x_1)$, obținem o nouă serie ordonată după puterile lui $x-x_2$, pe care o reprezentăm prin

$$P(x-x_0, x_1, x_2).$$

¹⁾ Dacă seria inițială este $P(x)$, seria dedusă relativ la punctul x_0 se notează $P(x, x_0)$.

Conchidem, ca mai sus, că în interiorul cercului descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (C_1) , avem egalitatea

$$P(x-x_0, x_1) = P(x-x_0, x_1, x_2).$$

Fie R_2 raza cercului de convergență (C_1) al seriei din membrul al doilea și $d_1 = |x_2 - x_1|$, vom avea

$$R_2 \geq R_1 - d_1.$$

Continuând în același mod, obținem seriile

$$P(x-x_0, x_1, x_2, x_3), \dots, P(x-x_0, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

punctul x_3 fiind situat în interiorul cercului de convergență (C_2) al seriei $P(x-x_0, x_1, x_2), \dots$, punctul x_n în cercul (C_{n-1}) al seriei $P(x-x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Seriile

$$P(x-x_0, x_1), P(x-x_0, x_1, x_2), \dots, P(x-x_0, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

deduse, precum am văzut, constituie *continuarea sau prelungirea analitică* a seriei primitive $P(x-x_0)$, cea d'întăiu este continuarea imediată a ei, cele următoare o continuă prin intermediul punctelor $x_1, x_2, \dots$. Dealtmintrelea, fiecare din aceste serii este o continuare a celei care o precede imediat.

130. Fie x_1 un punct în interiorul cercului (R) ; să reprezentăm prin (Γ_1) cercul cu centrul în x_1 și tangent interior cercului (R) . Fie x_2 un punct oarecare în (Γ_1) și $P(x-x_0, x_1, x_2)$ seria dedusă din $P(x-x_0, x_1)$. Punctul x_2 fiind în interiorul cercului (R) , putem din seria primitivă $P(x-x_0)$ să deducem direct seria $P(x-x_0, x_2)$.

Vom să probăm că seriile $P(x-x_0, x_1, x_2)$ și $P(x-x_0, x_2)$ coincid.

În adevăr, în interiorul cercului (γ) (fig. 4) descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (Γ_1) , seria $P(x-x_0, x_1)$ este egală, în virtutea egalității (2), în același timp cu seria $P(x-x_0)$ dela care provine și cu seria $P(x-x_0, x_1, x_2)$ la care dă naștere. Prin urmare,

$$P(x-x_0) = P(x-x_0, x_1, x_2).$$

De altă parte, reprezentând prin (Γ_2) cercul descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (R) , avem în interiorul lui (Γ_2) ,

$$P(x-x_0) = P(x-x_0, x_2).$$

Însă (Γ_2) cuprinzând în interiorul său cercul (γ) , rezultă că, în interiorul acestui din urmă cerc, avem

$$P(x-x_0, x_1, x_2) = P(x-x_0, x_2).$$

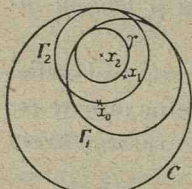


Fig. 4

Aceste două serii fiind ordonate în *acelaş mod* după puterile lui $x-x_0$ şi egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu x_2 sunt identice.

Din identitatea celor două serii rezultă că cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x_1, x_2)$ se întinde în afară din cercul (Γ_1) , căci este cel puţin egal cu (Γ_2) . Vedem astfel posibilitatea ca cercul de convergenţă al unei serii deduse dintr'o serie dată de forma $P(x-x_0)$ să se întindă în afară din cercul de convergenţă al acelei serii.

În acelaş mod se recunoaşte că seria

$$P(x-x_0, x_1, x_2, x_3),$$

x_3 fiind un punct oarecare în interiorul lui (Γ_2) , este identică cu seria $P(x-x_0, x_3)$, dedusă direct din $P(x-x_0)$. Într'un mod general, x_i fiind un punct interior în acelaş timp cercurilor (R) şi (Γ_{i-1}) , cel din urmă tangent interior celui d'întăiu, $(i=1, 2, 3, \dots n)$, avem identitatea

$$P(x-x_0, x_1, \dots x_i) \equiv P(x-x_0, x_i).$$

Dacă $x_n = x_0$, rezultă

$$P(x-x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_0) \equiv P(x-x_0).$$

Observare. În cele ce preced putem evident înlocui cercurile (Γ_i) prin cercurile de convergenţă (C_i) ale seriilor deduse $P(x-x_0, x_1, \dots x_i)$, cu condiţiunea ca punctele x_i să fie toate interioare cercului (R) .

131. *Teoremă.* — Dacă dintr'o serie $P(x-x_0)$ deducem direct o serie $P(x-x_0, a)$, vice-versa, din cea de a doua putem deduce pe cea d'întăiu.

Se poate întâmpla ca punctul x_0 , centrul cercului de convergenţă (R) al seriei $P(x-x_0)$, să fie cuprins în cercul de convergenţă (C) al seriei $P(x-x_0, a)$, sau să fie exterior acestui cerc. În cazul întâiu, din seria $P(x-x_0, a)$ deducem imediat seria $P(x-x_0, a, x_0)$ care este identică cu $P(x-x_0)$.

Să presupunem că x_0 nu se găseşte în interiorul cercului (C) . Pe raza care uneşte x_0 şi a să luăm între ele un punct x_1 , interior cercului (C) , şi din seria $P(x-x_0, a)$ să deducem $P(x-x_0, a, x_1)$ serie identică cu seria $P(x-x_0, x_1)$, dedusă direct din seria primitivă. Prin urmare raza cercului de convergenţă (C_1) al seriei $P(x-x_0, a, x_1)$ este mai mare sau cel puţin egală cu $R - |x_0 - x_1|$.

Dacă (C_1) conţine punctul x_0 , deducem din ultima serie pe cea următoare

$$P(x-x_0, a, x_1, x_0)$$

care coincide cu seria $P(x-x_0)$. În cazul contrar, fie x_2 , un

punct situat pe aceeași rază între x_0 și x_1 , interior lui (C_1) . Din $P(x-x_0, a, x_1)$ deducem seria $P(x-x_0, a, x_1, x_2)$, identică cu seria $P(x-x_0, x_2)$, dedusă direct din $P(x-x_0)$; prin urmare raza cercului de convergență (C_2) este mai mare sau cel puțin egală cu $R - |x_0 - x_2|$.

Se pune întrebarea dacă, continuând în acelaș mod, vom ajunge ca, prin intermediul unui număr *limitat* de puncte intercalate

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

să obținem o serie $P(x-x_0, a, x_1, \dots, x_n)$ al cărei cerc de convergență să conțină punctul x_0 ? În caz afirmativ, seria $P(x-x_0, a, x_1, \dots, x_n, x_0)$ dedusă dintr'însa este identică cu seria primitivă $P(x-x_0)$.

Rămâne dar de demonstrat că numărul operațiunilor menționate este *limitat*. Vom presupune toate cercurile C tangente interior cercului (R) . Dacă propozițiunea este adevărată în acest caz, ea va fi cu atât mai mult adevărată în cazul când C taie cercul (R) .

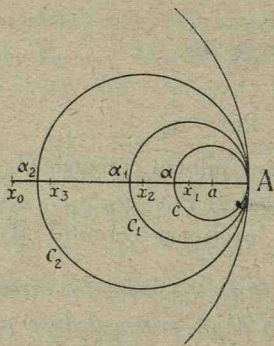


Fig. 5

$\delta_2, \dots$, distanțele respective dintre x_0 și aceste puncte. Avem (fig. 5) egalitățile

$$(3) \begin{cases} r = R - d, r_1 = R - d_1, r_2 = R - d_2, \dots \\ \delta = d - r, \delta_1 = d_1 - r_1, \delta_2 = d_2 - r_2, \dots \end{cases}$$

Teorema va fi demonstrată dacă arătăm că dela un rang încolo, cantitățile $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots$, încep a fi negative. Să presupunem punctele $x_1, x_2, \dots$ luate astfel ca distanțele

$$x_1 a = x_2 a_1 = \dots = \varepsilon < \frac{r}{2}.$$

Vom avea (fig 5).

$$\overline{x_1 a_1} = \overline{x_1 A} = r_1 > r + \frac{r}{2}, \text{ de unde } \overline{a a_1} > r;$$

prin urmare

$$(4) \quad \delta_1 = \delta - \overline{a a_1} < d - 2r.$$

Deasemenea

$\overline{x_2 a_2} = \overline{x_2 \Lambda} = r_2 > 2r_1 - \frac{r}{2} > 2r + \frac{r}{2}$; de unde $\overline{a_1 a_2} > 2r$
și prin urmare

$$(5) \quad \delta_2 = \delta_1 - \overline{a_1 a_2} < d - 4r.$$

În același mod

$$\overline{x_3 a_3} = \overline{x_3 \Lambda} = r_3 > 2r_2 - \frac{r}{2} > 4r + \frac{r}{2};$$

de unde

$$\overline{a_2 a_3} > 4r$$

și prin urmare

$$(6) \quad \delta_3 = \delta_2 - \overline{a_2 a_3} < d - 8r.$$

Continuând astfel, găsim

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta_4 &< d - 2^4 r, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_n &< d - 2^n r. \end{aligned}$$

Aceste inegalități justifică propozițiunea noastră.

132. *Observare.* Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ punctele prin intermediul cărora trecem dela seria $P(x-x_0)$ la seria $P(x-x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dacă alegem aceste puncte astfel ca fiecare să fie nu numai în interiorul cercului al cărui centru este punctul care-l precede, ceea ce este necesar ca una oarecare din seriile succesive să fie prelungirea imediată a celei ce o precede, ci încă să se găsească în interiorul cercului al cărui centru este punctul următor, atunci aceleași puncte pot servi ca puncte intermediare pentru trecerea în sens invers dela $P(x-x_0, x_1, \dots, x_n)$ la $P(x-x_0)$. Numind R_i raza cercului de convergență al seriei $P(x-x_0, x_1, \dots, x_i)$, avem în condițiunile date

$$\left| x_{i+1} - x_i \right| < \frac{R_i}{2}.$$

133. *Teoremă.* — Dacă cercurile de convergență a două serii $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ au o regiune comună și dacă în vecinătatea unui punct c din această regiune seriile sunt egale într-o infinitate de puncte: 1^o. aceste două serii sunt egale în toată regiunea comună; 2^o. ele se pot deduce una din alta prin metoda prelungirii analitice.

1^o. Din seriile $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ să deducem respectiv seriile $P(x-a, c)$, $P_1(x-b, c)$; vom avea, într'un cerc (C) descris din c ca centru și cuprins în regiunea comună, egalitățile

$$P(x-a) = P(x-a, c), \quad P_1(x-b) = P_1(x-b, c).$$

Însă seriile din membrul întâiu fiind, prin ipoteză, egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu c , rezultă că seriile din membrul al doilea, ordonate amândouă după puterile lui $x-c$, sunt identice

$$(8) \quad P(x-a, c) \equiv P_1(x-b, c).$$

Prin urmare pentru toate punctele x situate în cercul (C) avem egalitatea

$$P(x-a) = P_1(x-b).$$

Fie x_1 un punct oarecare în interiorul cercului (C). Din x_1 ca centru să descriem un cerc (C_1) cât se poate de mare, dar care să rămână în interiorul regiunii comune de convergență a seriilor date. Cele două serii date fiind egale într'o infinitate de puncte vecine cu x_1 , vom conchide, ca mai sus, că ele sunt egale în tot cercul (C_1). Continuând astfel din aproape în aproape, rezultă că seriile $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ sunt egale între ele în toată regiunea comună de convergență.

2^o. Partea a doua a teoremei rezultă imediat din identitatea (8), obținută mai sus. Căci seria $P_1(x-b)$ putând fi dedusă din seria $P_1(x-b, c)$, se poate considera ca o prelungire a seriei identice $P(x-a, c)$ și prin urmare ea este o prelungire a seriei $P(x-a)$. Viceversa, seria $P(x-a)$ se poate privi ca o prelungire a seriei $P_1(x-b)$.

Corolar. Dacă cercul de convergență al seriei $P(x-x_0, x_1)$ se întinde în afară din cercul de convergență al seriei $P(x-x_0)$, vom avea egalitatea

$$P(x-x_0) = P(x-x_0, x_1),$$

pentru toate valorile lui x cuprinse în regiunea comună celor două cercuri. Aceasta rezultă din propozițiunea 1^o.

134. *Consecințe.* 1^o. Dacă o serie întreagă $P(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ se anulează într'o infinitate de puncte, situate în interiorul cercului său de convergență, ea este identic nulă, adică toți coeficienții a_n sunt nuli.

În adevăr, fie x_0 un punct limită al grămezii punctelor considerate și $P_1(x-x_0)$ seria dedusă din $P(x)$; seria $P_1(x-x_0)$ este, în virtutea ipotezei, nulă într'o infinitate de puncte vecine cu x_0 și prin urmare identic nulă. De unde rezultă că și seria $P(x)$ este nulă în toată regiunea comună celor două cercuri de convergență.

Fie x_1 un punct situat în această regiune, cât mai aproape de punctul $x=0$; seria $P(x)$ va fi nulă în regiunea comună cercului său de convergență și cercului de convergență al seriei $P_1(x-x_0, x_1)$.

Continuând în același mod, ajungem, prin intermediul unui număr limitat de puncte, să deducem o serie al cărei cerc să conțină punctul $x = 0$, în domeniul căruia seria $P(x)$ este nulă și prin urmare identic nulă.

Intr'un mod general, dacă seria $P(x)$ este egală cu o constantă oarecare A într'un număr nelimitat de puncte interioare cercului său de convergență, vom avea $P(x) = A$ în tot cercul. Căci seria $P(x) - A$ se anulează în acele puncte și prin urmare este identic nulă.

2°. Dacă două serii $P(x)$, $P_1(x)$ sunt egale într'o infinitate de puncte, interioare regiunii comune de convergență ele coincid.

3°. Dacă derivatele de orice ordin ale seriei $P(x)$ sunt nule într'un punct x_0 , situat în cercul său de convergență, seria se reduce la o constantă. Căci din egalitatea

$$P(x) = \sum_0^{\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

rezultă că în domeniul punctului x_0 avem egalitatea

$$P(x) = P(x_0)$$

și prin urmare, în virtutea celor ce am văzut mai sus, această egalitate subsistă în tot cercul de convergență al seriei $P(x)$.

135. *Limite între cari este cuprinsă raza cercului de convergență al seriei $P(x - x_0, x_1)$ dedusă din seria $P(x - x_0)$.*

Fie R raza cercului de convergență al seriei primitive $P(x - x_0)$ și $d = |x_1 - x_0|$; avem

$$R_1 \geq R - d.$$

Vom să arătăm că limita superioară a lui R_1 este $R + d$, adică

$$R_1 \leq R + d.$$

Dacă $d < \frac{R}{2}$, seria $P(x - x_0)$ se deduce direct din $P(x - x_0, x_1)$; putem așadar permuta R_1 cu R , ceace dă

$$R \geq R_1 - d,$$

de unde

$$R_1 \leq R + d.$$

Inegalitatea subsistă și în cazul $d > \frac{R}{2}$. În adevăr, să presupunem $R_1 > R + d$. În acest caz cercul de convergență al seriei $P(x - x_0, x_1)$ conținând punctul x_0 , avem $R \geq R_1 - d$; ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

Așa dar în toate cazurile, avem

$$R_1 \leq R + d.$$

Iată o demonstrațiune directă a acestei inegalități:

Să presupunem $d > \frac{R}{2}$. Nu se mai poate afirma că seria $P(x-x_0)$ se deduce direct din $P(x-x_0, x_1)$, însă ea se va putea totdeauna deduce prin intermediul unui număr limitat de puncte $x_2, x_3, \dots$, intercalate între x_0 și x_1 , pe raza care unește aceste două puncte. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că trecerea se face prin intermediul a două puncte x_2 și x_3 (fig 6).

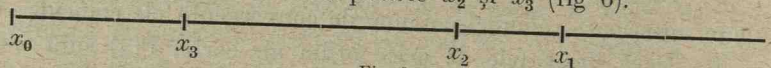


Fig. 6

Să punem:

$$d = x_1 - x_0, \quad d_1 = x_1 - x_2, \quad d_2 = x_2 - x_3, \quad d_3 = x_3 - x_0;$$

vom avea

$$(9) \quad d = d_1 + d_2 + d_3.$$

Fie R_2 și R_3 razele cercurilor de convergență ale seriilor deduse succesiv din $P(x-x_0, x_1)$; vom avea

$$(10) \quad R_2 \geq R_1 - d_1, \quad R_3 \geq R_2 - d_2.$$

Din seria $P(x-x_0, x_1, x_2, x_3)$ se deduce prin ipoteză seria primitivă $P(x-x_0)$, astfel că trebuie să avem

$$(11) \quad R \geq R_3 - d_3.$$

Adunând egalitățile (10) și (11) și ținând seamă de relațiunea (9), obținem $R \geq R_1 - d$. De unde

$$(12) \quad R_1 \leq R + d.$$

q. e. d.

Prin urmare în toate cazurile avem

$$(13) \quad R - d \leq R_1 \leq R + d.$$

Așadar limitele căutate sunt

$$R - d, \quad R + d.$$

Limita superioară a lui d , când x variază, fiind R , rezultă

$$0 \leq R_1 \leq 2R.$$

Se recunoaște lesne că R_1 este o funcțiune continuă de pozițiunea punctului x_1 . În adevăr, fie x_1' un punct vecin cu x_1 și interior cercului (R) , R_1' raza cercului de convergență al seriei $P(x-x_0, x_1')$. Această serie fiind identică cu seria $P(x-x_0, x_1, x_1')$, vom avea, în virtutea inegalității (13), punând $|x_1' - x_1| = \delta$,

$$|R_1' - R_1| < \delta;$$

ceceace justifică aserțiunea noastră.

136. Din proprietatea continuității, rezultă că R_1 admite un minimum. Voin să probăm că *minimumul său este zero*. Este evident că acest minimum nu poate corespunde unui punct x , situat în interiorul cercului (R), ci acest punct va trebui să fie pe cercul (R).

Să luăm, pentru a simplifica scrierea, punctul x_0 ca origină și să considerăm seria

$$P(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

al cărei cerc de convergență va fi reprezentat prin (R). Fie x_0 un punct situat în interiorul cercului (R); avem

$$P(x) = P(x, x_0) = \sum_0^{\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x - x_0| + |x_0| < R.$$

Să presupunem că minimumul razei cercului de convergență al seriei $P(x, x_0)$, când punctul x_0 se mișcă în interiorul cercului (R), este un număr pozitiv r . Vom proba că raza cercului de convergență al seriei primitive $P(x)$ este $R + r$.

Prin ipoteză, seria $P(x, x_0)$ este convergentă într'un cerc cu centrul în x_0 și cu raza r , x_0 fiind în interiorul cercului (R). Fie ϱ un număr pozitiv mai mic ca r și M maximul lui $|P(x, x_0)|$ când x descrie cercul

$$|x - x_0| = \varrho;$$

vom avea (113)

$$\frac{|P^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{M}{\varrho^n}.$$

De altă parte, avem

$$P^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1) \dots (m-n+1) a_m x^{m-n};$$

prin urmare

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} a_m x_0^{m-n} \right| \leq \frac{M}{\varrho^n}.$$

Fie $\mathcal{M}$ cea mai mare dintre valorile pe cari le primește M , când x_0 descrie cercul

$$|x| = R', \quad R' < R.$$

Vom avea

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} |a_m| \leq \frac{\mathcal{M}}{\varrho^n} \cdot \frac{1}{R'^{m-n}}.$$

sau

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} |a_m| R'^m \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \leq M \left(\frac{R'}{R}\right)^n.$$

Făcând $n = 0, 1, 2, \dots, m$ și adunând toate aceste inegalități, obținem

$$|a_m| R'^m \left(1 + \frac{\varrho}{R}\right)^m \leq M \frac{1 - \left(\frac{R'}{R}\right)^{m+1}}{1 - \frac{R'}{R}} < M \frac{R}{R - R'}.$$

Expresiunea $|a_m| R'^m \left(1 + \frac{\varrho}{R}\right)^m$ rămânând mai mică decât o cantitate constantă, oricât de mare ar fi m , rezultă că seria

$$P(x) = \sum_0^{\infty} a_m x^m$$

este convergentă pentru toate valorile lui x , cari satisfac inegalitatea

$$|x| < R' \left(1 + \frac{\varrho}{R}\right).$$

Însă R' poate fi oricât de aproape de R și ϱ de r , prin urmare raza cercului de convergență al seriei $P(x)$ diferă oricât de puțin voim de $R + r$. De altă parte, raza cercului de convergență fiind o cantitate constantă, nu poate diferi de $R + r$ cu oricât de puțin voim, fără să coincidă cu această cantitate. Așadar raza cercului de convergență al seriei $P(x)$ este $R + r$. q. e. d.

137. Din teorema precedentă rezultă că dacă R este raza cercului de convergență al unei serii de forma $P(x)$ sau $P(x - x_0)$, razele cercurilor de convergență ale seriilor deduse din ele, prin metoda prelungirii analitice, au ca limită inferioară zero.

Așadar pe cercul (R) există cel puțin un punct a astfel că raza cercului de convergență al seriei $P(x - x_0, x')$, x' fiind în interiorul cercului (R) , tinde către zero când x' se apropie de a . Un asemenea punct se numește *punct singular*.

138. *Teoremă.* — *Dealungul razei care trece printr'un punct singular a , seria $P(x - x_0)$ nu se poate continua în afară din cercul său de convergență (R) .*

Această propozițiune este cuprinsă în cea următoare:

Oricare ar fi punctul x' interior cercului (R) , cercul de convergență C al seriei $P(x - x_0, x')$ nu conține în interiorul său punctul a .

Să presupunem că teorema nu este adevărată și că ar exista un punct x' interior cercului (R) astfel că cercul de convergență

C al seriei $P(x-x_0, x')$ să conțină în interiorul său punctul a . Fie δ distanța cea mai scurtă dintre a și cercul C și x'' un punct interior regiunii comune cercurilor (R) și C , situat între punctele x' și a pe dreapta ce unește aceste două puncte. Raza R'' a cercului de convergență al seriei $P(x-x_0, x', x'')$ dedusă din seria $P(x-x_0, x')$, este mai mare ca δ . Însă această serie este identică cu seria $P(x-x_0, x'')$ dedusă direct din cea primitivă. Așadar raza cercului de convergență al acestei serii este mai mare ca δ și prin urmare nu poate tinde către zero când x'' se apropie de a ; ceea ce este contra ipotezei. Prin urmare cercul de convergență al seriei $P(x-x_0, x')$ nu poate cuprinde în interiorul său punctul a . q. e. d.

Corolar. Nu există serie de forma $P_1(x-a)$ al cărei cerc de convergență să conțină punctul a și care în regiunea comună cu cercul (R) să fie egală cu seria $P(x-x_0)$. Căci atunci dacă x_1 este un punct interior regiunii comune, seriile respectiv deduse $P_1(x-a, x_1)$, $P(x-x_0, x_1)$ ar fi identice. Presupunând punctul x_1 destul de aproape de a , cercul de convergență al seriei $P_1(x-a, x_1)$ și prin urmare acela al seriei $P(x-x_0, x_1)$ ar conține punctul a ; ceea ce este contrar teoremei precedente.

139. *Teoremă.* — Dacă seria

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

cu cercul de convergență (R) , are toți coeficienții săi reali și pozitivi, punctul $x = R$ este un punct singular.

Pentru a stabili această teoremă, să considerăm două puncte $x = a$, $x = x_0$ situate la aceeași distanță de origină, cel dintâiu pe axa reală între origină și punctul $x = R$, cel de al doilea având o pozițiune oarecare pe cercul $|x| = a$. Fie

$$P(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad P(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

seriile deduse din $P(x)$. Din expresiunea

$$P^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) a_n x^{n-m}$$

rezultă, în virtutea ipotezei, că coeficienții seriei $P(x, a)$ sunt toți reali și pozitivi. În același timp, în virtutea egalității $|x_0| = a$, avem

$$|P^{(m)}(x_0)| \leq P^{(m)}(a) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

De aci rezultă că raza cercului de convergență al seriei $P(x, a)$

este *mai mică*, sau *cel mult egală* cu aceea a cercului de convergență al seriei $P(x, x_0)$, oricare ar fi punctul x_0 pe cercul $|x_0| = a$. De unde conchidem că prelungirea seriei $P(x)$, în afară din cercul (R) , nu se poate face dealungul razei care trece prin punctul $x = R$. De unde rezultă că acest punct este un punct singular.

De exemplu, seriile $\sum \frac{x^n}{n}$, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ au punctul $x = 1$, ca punct singular.

Corolare. I. Dacă înlocuind x prin $-x$, coeficienții seriei, presupuși reali, devin toți pozitivi, punctul $x = -R$ este un punct singular.

II. — Dacă coeficienții fiind toți reali și pozitivi, seria nu se schimbă când înlocuim x prin $-x$, punctele $x = \pm R$ sunt puncte singulare. Intr'un mod mai general, dacă coeficienții fiind toți reali și pozitivi, seria conține *numai* puteri de x ai căror exponenți sunt multipli ai unui număr întreg pozitiv m , punctele

$$x = Re^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

sunt puncte singulare. Căci seria dată rămâne neschimbată când înlocuim x prin

$$xe^{\frac{2ki\pi}{m}}$$

140. Observări asupra punctelor singulare.

I. — Fie $x = a$ un punct *ordinar* (adică nu singular) pe cercul de convergență (R) al seriei $P(x)$ și x_0 un punct situat pe raza care trece prin punctul c , interior cercului. Presupunând x_0 destul de aproape de a , cercul de convergență C al seriei deduse $P(x-x_0)$ va conține în interiorul său punctul a ; prin urmare $P(a-x_0)$ va avea o valoare *finită* și, în virtutea continuității, vom avea

$$\lim_{x=a} P(x, x_0) = P(a, x_0).$$

Însă în regiunea comună cercurilor (R) și C , seriile $P(x)$ și $P(x, x_0)$ fiind egale, rezultă

$$\lim_{x=a} P(x) = \lim_{x=a} P(x, x_0) = P(a, x_0),$$

când x tinde către a dealungul razei. Așadar conchidem, că dacă x tinde către un punct *ordinar* al cercului (R) , dealungul razei care trece prin acest punct, seria $P(x)$ tinde către o limită *finită*.

II. — De aci nu rezultă convergența seriei într'un punct *ordinar* al cercului (R) . Contrariul poate avea loc. Aceasta se poate verifica lesne pe seria

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x},$$

din care deducem seria

$$P(x, x_0) = \frac{1}{1 - x_0 - (x - x_0)} = \frac{1}{1 - x_0} \left[1 + \frac{x - x_0}{1 - x_0} + \left(\frac{x - x_0}{1 - x_0} \right)^2 + \dots \right],$$

al cărei cerc de convergență C are centrul său în x_0 și trece prin punctul $x = 1$. Acest cerc taie cercul (R) dacă x_0 nu este real și pozitiv. De unde rezultă că prelungirea analitică a seriei $P(x)$, în afară din cercul de convergență, se poate face după orice rază, exceptând raza care trece prin punctul $x = 1$. Așadar unicul punct singular este punctul $x = 1$, pe când seria este divergentă pe tot cercul.

III. — Din cele zise mai sus (I), rezultă că dacă suma seriei $P(x)$ tinde către infinit când x se apropie de un punct a al cercului (R) , dealungul razei care trece prin acest punct, a este un punct singular.

Reciproca nu este adevărată. Un punct a pe (R) poate fi *singular* și limita către care tinde $P(x)$, când x se apropie de a , să fie *finită*. Se poate chiar ca seria să fie convergentă în acel punct, ceea ce trage după sine [teorema II a lui *Abel* (105)] ca $P(x)$ să tindă către o limită finită. Astfel seria

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

este convergentă pe tot cercul său de convergență, deși are pe acest cerc cel puțin un punct singular, anume punctul $x = 1$. Vom vedea mai târziu că punctul $x = 1$ este unicul punct singular pe cercul considerat.

IV. Se poate întâmpla ca toate punctele cercului de convergență al seriei să fie puncte singulare.

1^o. Astfel este seria

$$(1) \quad P(x) = \sum_1^{\infty} x^{n!}$$

al cărei cerc de convergență are ca rază 1.

Să observăm mai întâiu că în virtutea teoremei (139) punctul $x = 1$ este un punct singular¹⁾. Al doilea, să considerăm un punct interior cercului $|x| = 1$ și reprezentat prin expresiunea

$$(2) \quad x = \varrho e^{2i\pi \frac{q}{p}} \quad \varrho < 1,$$

q și p fiind două numere întregi pozitive satisfăcând inegalitatea

$$(3) \quad 0 \leq \frac{q}{p} < 1.$$

¹⁾ Aceasta rezultă și din observarea III.

Pentru aceste valori ale lui x , seria se poate scrie

$$(4) \quad P(x) = \sum_{n=1}^{p-1} x^{n!} + \sum_{n=p}^{\infty} \varrho^{n!}.$$

Seria $P(x)$ nu diferă deci de seria

$$(5) \quad \sum_{n=p}^{\infty} \varrho^{n!}$$

decât printr'o sumă de un număr mărginit de termeni. Însă $\varrho = 1$ este un punct singular al seriei (5); prin urmare punctul

$$(6) \quad \alpha = e^{2i\pi \frac{q}{p}},$$

către care tinde punctul (2), când ϱ tinde către 1, este un punct singular al seriei $P(x)$.

Dând lui p și q toate valorile pozitive satisfăcând inegalitatea (3), obținem o infinitate de puncte singulare α , formând o *grămadă densă* pe cercul $|x| = 1$; căci, precum se știe, totalitatea numerelor raționale cuprinse într'un interval dat, constituie o grămadă densă. De unde rezultă că *nu numai grămada* (α), *cî și grămada derivată a ei, adică toate punctele cercului* $|x| = 1$, *sunt puncte singulare ale seriei* $P(x)$. În adevăr, fie β un punct oarecare al cercului, diferit de un punct α : β este un punct limită. Dacă β n'ar fi punct singular al seriei, ar exista un punct x_0 interior cercului și un număr $\varrho > 0$, astfel încât cercul $|x - x_0| = \varrho$ să conțină punctul β și în care seria $P(x, x_0)$ dedusă din $P(x)$ să fie convergentă. Ceeace este imposibil, căci un cerc care conține în interiorul său punctul β conține și puncte α . q. e. d.

2^o. Iată un al doilea exemplu: Seria

$$(1) \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{b^n},$$

în care a este o cantitate finită oarecare și b un număr întreg mai mare ca 1, nu se prelungește în afară din cercul său de convergență. Să căutăm raza cercului de convergență al acestei serii. Pentru aceasta observăm că șirul $\left| a^{\frac{n}{b^n}} \right|$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a^{\frac{n}{b^n}} \right| = 1.$$

¹⁾ $\frac{n}{b^n}$ descrește neconținut începând dela $n = 2$ și limita sa, pentru $n = \infty$, este zero.

De unde rezultă, în virtutea teoremei Cauchy-Hadamard (108) că raza căutată este egală cu 1.

Dacă avem $|a| < 1$, seria este convergentă pe tot cercul; în orice caz însă toate punctele cercului sunt puncte singulare. În adevăr, seria având cel puțin un punct singular pe cerc, fie α acest punct și β un alt punct pe acelaș cerc, legat de cel dintâiu prin relațiunea

$$\beta = \alpha e^{2i\pi \frac{q}{b^p}}$$

p și q fiind două numere întregi pozitive, dintre cari q poate primi valorile $0, 1, 2, \dots, b^p - 1$. Înlocuind x prin $\frac{\beta}{\alpha} x$, obținem

$$(3) \quad P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) = \sum_{n=0}^{p-1} a^n \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^{b^n} + \sum_{n=p}^{\infty} a^n x^{b^n}.$$

Însă orice punct singular al seriei $P(x)$ este evident un punct singular al seriei

$$\sum_p^{\infty} a^n x^{b^n}$$

și prin urmare, în virtutea egalității (3), un asemenea punct este punct singular și al seriei $P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)$. Așadar $x = \alpha$ este un punct singular al acestei serii; ceea ce revine a zice că $x = \beta$ este un punct singular al seriei $P(x)$.

Se recunoaște ușor că dând lui p valorile întregi $1, 2, \dots, \infty$ și lui q valorile $0, 1, 2, \dots, b^p - 1$, numerele $\frac{q}{b^p}$ formează o grămadă densă în intervalul $(0, \dots, 1)$. De unde rezultă, ca și în exemplul precedent, că toate punctele cercului de convergență sunt puncte singulare.

3°. Exemplele precedente sunt cuprinse într-o clasă mai generală de serii

$$(4) \quad P(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^{b_n},$$

în cari exponenții b_n au pentru $n \geq m$, m fiind un număr întreg pozitiv, un divizor comun care tinde către infinit împreună cu m .

În adevăr, servindu-ne de notațiunile de mai sus, avem, în acest caz,

$$P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^{b_n} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{b_n}.$$

De unde tragem aceeaș concluziune ca în exemplul 2°.

141. *Weierstrass* este cel dintâiu care a pus în evidență faptul că există serii întregi cari nu se pot continua în afară din cercul lor de convergență. Primul exemplu ce a considerat este seria

$$\sum_1^{\infty} x^{n^2},$$

care se prezintă în teoria funcțiilor eliptice (*Werke*, t. II, pag. 226). Demonstrațiunea dată de *Weierstrass* se bazează pe formule stabilite în această teorie.

Seriile ce nu se pot continua în afară din cercul lor de convergență au fost considerate la început ca excepțiuni. Astăzi însă s'a recunoscut că *tocmai* aceste serii constituie cazul general ¹⁾, pe când acele ce se pot prelungi sunt excepțiuni. Iată în ce mod *Pringsheim* (*M. A.*, t. 44, pag. 50) justifică această aserțiune:

Fiind dată o serie întreagă

$$P(x) = \sum a_n x^n,$$

putem, într'o infinitate de moduri, să extragem dintr'însa o serie întreagă

$$\varphi(x) = \sum a_{p_n} x^{p_n},$$

care nu se prelungește. Este de ajuns, de exemplu, să luăm (²o, 140) $p_n = b^n$, b fiind un număr întreg oarecare mai mare ca 1. Seria așa obținută admite cercul de convergență ca linie singulară ²⁾. Să reprezentăm prin

$$\psi(x) = \sum a_{q_n} x^{q_n}$$

seria formată cu termenii rămași; vom avea

$$P(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Pentru ca $P(x)$ să se poată prelungi în afară din cercul (R), este evident necesar ca, cel puțin, dealungul unui arc al cercului, toate punctele să fie puncte singulare ale seriei $\psi(x)$, în așa mod încât aceste singularități să se compenseze cu acelea ale seriei $\varphi(x)$ și să dispară în suma lor; ceeace nu poate avea loc decât dacă există relațiuni speciale între coeficienții a_{p_n} , a_{q_n} , adică dacă există relațiuni speciale între coeficienții a_n ai seriei date. De unde rezultă că dacă între coeficienții a_n nu există nici o relațiune particulară seriea nu se poate prelungi în afară din cercul său de convergență.

¹⁾ O serie Taylor se zice *generală*, dacă valoarea coeficientului de un rang oarecare este independentă de valorile coeficienților precedenți (*Borel*, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 147).

²⁾ Iată un exemplu foarte simplu: seria $P(x) = \sum x^n$ se prelungește în afară din cercul său de convergență prin toate punctele, exceptând punctul $x=1$, pe când seria $P(x) = \sum x^{2^n}$, extrasă dintr'însa, nu se prelungește după nici o direcțiune (³o, § 140).

142. *Derivata unei serii de puteri.* Derivata unei serii de puteri negative $P\left(\frac{1}{x}\right)$ se reduce la derivata unei serii de puteri pozitive prin substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$. De unde rezultă

$$\frac{d}{dx} P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right),$$

și se conchide că derivata seriei se obține făcând suma derivatelor termenilor săi. Aceeaș concluziune pentru o serie de puteri întregi pozitive și negative.

143. *Teoremă.* Derivata unei sume nelimitate de serii de puteri se obține făcând suma derivatelor seriilor.

Fie în mod general

$$Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

un șir nelimitat de serii *Laurent*, convergente într'o coroană și astfel ca suma $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ să fie uniform convergentă în aceeaș coroană. Vom putea serie egalitățile

$$Q_n(x) = P_n(x - x_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x - x_0) = P(x - x_0),$$

x_0 fiind un punct interior coroanei. Pentru a simplifica puțin scrierea, să presupunem origina transportată în punctul x_0 ; vom avea

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = P(x).$$

Să ordonăm seriile cari figurează în ambele membre după puterile lui $x - x_1$, x_1 fiind un punct interior cercului comun de convergență; vom avea identitatea

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(m)}(x_1) \right] \frac{(x - x_1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(x_1) \frac{(x - x_1)^m}{m!};$$

de unde rezultă, dacă egalăm coeficienții aceluiași puteri ale lui $x - x_1$ din ambele membre și dacă înlocuim x_1 prin x

$$P^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(m)}(x), \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

q. e. d.

144. Dacă seria $P(x, x_0)$ este prelungirea seriei $P(x)$, derivata sa $P'(x, x_0)$ va fi prelungirea derivatei $P'(x)$.

Să reprezentăm prin $P^{(1)}(x, x_0)$ prelungirea seriei $P'(x)$; vom avea, în domeniul punctului x_0 ,

$$P(x) = P(x, x_0), \quad P'(x) = P^{(1)}(x, x_0).$$

Însă cea dintâi din aceste egalități dă $P'(x) = P'(x, x_0)$; prin urmare

$$P^{(1)}(x, x_0) = P'(x, x_0).$$

Ambele serii ale acestei egalități fiind egale în domeniul lui x_0 , sunt identice.

q. e. d.

CAPITOLUL VII.

FUNȚIUNI ANALITICE.

FUNȚIUNI ANALITICE UNIFORME ȘI MULTIFORME.

I. — FUNȚIUNI ANALITICE.

145. Fiind dată seria

$$(1) \quad P(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

al cărei cerc de convergență C are o rază finită și diferită de zero, să presupunem că ea se poate prelungi în afară din C , și fie $P(x-x_0, x_1)$ continuarea ei prin intermediul punctului x_1 și C_1 cercul de convergență al acestei serii. Dacă $P(x-x_0, x_1)$ se poate prelungi, fie $P(x-x_0, x_1, x_2)$ continuarea ei și C_2 cercul de convergență corespunzător, etc.

Toate seriile

$$(2) \quad P(x-x_0), P(x-x_0, x_1), \dots, P(x-x_0, x_1, \dots, x_n) \dots$$

sunt legate între ele în așa mod, că plecând dela una din ele obținem pe toate celelalte.

*Totalitatea seriilor (2) constituie, ceeace Weierstrass numește funcțiune analitică monogenă*¹⁾ *de variabila x .*

Una oarecare din aceste serii se numește un *element* al funcțiunii. Funcțiunea este complet definită dacă se cunoaște un element al ei, căci din el putem deduce pe toate celelalte.

Printre elementele unei funcțiuni analitice monogene trebuie să considerăm și seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$, care ține locul seriei $P(x-\infty)$, dacă această serie se poate deduce dintr'un element al funcțiunii.

¹⁾ Semnificarea epitetului de *monogenă* va reieși mai departe când vom vorbi despre expresiuni analitice.

Pe cercul de convergență al fiecărui element se află cel puțin un punct singular, care poate fi comun mai multor cercuri. Punctele singulare ale elementelor se zic puncte singulare ale funcțiunii. De unde rezultă că o funcțiune analitică admite cel puțin un punct singular.

Fie $P(x)$ o serie întreagă, convergentă în toată întinderea planului. Orice serie $P(x-x_0)$ dedusă din cea dintâiu va da aceleași valori ca ea însăși. Funcțiunea ce această serie definește a primit numele de *funcțiune analitică întreagă*. În special se zice funcțiune *întreagă rațională*, sau funcțiune *întreagă transcendentă*, după cum numărul termenilor lui $P(x)$ este limitat sau nelimitat.

O funcțiune întreagă (rațională sau transcendentă) nu poate avea alt punct singular decât punctul ∞ . Vom vedea că acest punct este punct singular.

146. Se poate întâmpla ca seria dată $P(x-x_0)$ să nu se prelungească în afară din cercul său de convergență după nici o direcțiune. În acest caz seria reprezintă prin sine însăși o funcțiune analitică a cărei regiune de existență constă în aria interioară cercului de convergență. Cercul poartă numele de *limita naturală* a funcțiunii.

147. În cazul când seriile se pot prelungi, cercurile lor de convergență acoperă o porțiune de plan, mai mult sau mai puțin mare, sau acoperă tot planul.

Funcțiunea fiind definită în fiecare cerc, regiunea de existență a ei este formată din aria acoperită de toate cercurile de convergență din cari putem suprima arcele interioare. Arcele rămase din cari unele sau toate se pot reduce la puncte în număr limitat sau nelimitat, constituiesc *limita regiunii de existență* a funcțiunii.

Regiunea așa limitată este evident *conexă* (adică putem uni două puncte oarecari ale ei printr'o linie cu totul cuprinsă în interiorul regiunii); ea este formată dintr'o porțiune limitată sau nelimitată a planului.

Din cele ce preced rezultă că o funcțiune analitică poate admite un număr limitat sau nelimitat de puncte singulare. Punctele situate în regiunea de existență a funcțiunii și cari nu sunt singulare, se numesc puncte *ordinare*.

148. Să reprezentăm prin simbolul $f(x)$ o funcțiune analitică și fie $P(x-a)$ elementul primitiv care i-a dat naștere. Valoarea funcțiunii într'un punct ordinar x_0 , interior cercului de convergență al lui $P(x-a)$, este valoarea ce primește acest element în punctul x_0 .

Dacă punctul x_0 nu se găsește în interiorul cercului de convergență considerat, putem, pentru a obține valoarea funcțiunii în acest punct, proceda în modul următor: unim punctul a cu punctul x_0 printr'o linie arbitrară care să nu treacă prin nici un punct singular și intercalăm pe această linie, între punctele extreme, un număr suficient de puncte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, prin intermediul cărora formăm lanțul de elemente:

$$P(x-a, a_1), P(x-a, a_1, a_2), \dots, P(x-a, a_1, \dots, a_n),$$

astfel ca ultimul element să conțină în interiorul cercului său punctul x_0 . Valoarea acestui element pentru $x = x_0$ este valoarea corespunzătoare a funcțiunii. Din elementul din urmă putem deduce seria

$$P(x-a, a_1, a_2, \dots, a_n, x_0)$$

pe care o vom reprezenta prin $P(x-x_0)$ și care poate fi privită ca element al funcțiunii, astfel că în toate punctele interioare cercului de convergență al acestui element, avem

$$f(x) = P(x-x_0).$$

Valoarea funcțiunii în x_0 este termenul independent de $(x-x_0)$ al seriei $P(x-x_0)$.

Se vede în același timp că în domeniul unui punct ordinar x_0 o funcțiune analitică se pune sub forma unei serii întregi de $x-x_0$, al cărei cerc de convergență are ca centru punctul x_0 și ca rază distanța δ dela acest punct până la punctul singular cel mai apropiat. Căci, dacă raza ar fi mai mare ca δ , cercul de convergență ar conține în interiorul său un punct singular și dacă ar fi mai mică ca δ , n'ar exista nici un punct singular pe periferia cercului.

Seriile de forma $P(x-x_0)$ fiind funcțiuni continue în cercul lor de convergență, rezultă că o funcțiune analitică este continuă în domeniul oricărui punct ordinar. De unde rezultă că putem scrie

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

149. Din proprietățile seriilor $P(x-x_0)$ rezultă imediat următoarele proprietăți ale funcțiunilor analitice:

1^o. Dacă o funcțiune analitică ¹⁾ primește aceeași valoare într'o infinitate de puncte, având ca punct limită un punct oarecare x_0 , interior regiunii sale de existență, funcțiunea este o constantă.

De unde rezultă că punctele ordinare ale funcțiunii $f(x)$, în cari ea primește aceeași valoare, sunt puncte *izolate*, adică, dacă avem $f(x_0) = A$, există un număr pozitiv r astfel că în cercul $|x-x_0| = r$, funcțiunea $f(x) - A$ n'are alt zero decât punctul x_0 .

¹⁾ Vom presupune totdeauna că funcțiunea este *monogenă*.

2^o. Dacă două funcțiuni analitice, având o regiune comună de existență, sunt egale între ele într-o infinitate de puncte având ca limită un punct x_0 interior regiunii, ele sunt identice.

Proprietățile precedente pot să nu fie adevărate dacă punctul x_0 considerat face parte din limita regiunii de existență a funcțiunii, adică dacă x_0 este un punct singular al funcțiunii.

Din cele ce preced rezultă că dacă, în vecinătatea unui punct, o funcțiune analitică primește aceeași valoare de o infinitate de ori, fără a fi constantă, acel punct este neapărat un punct singular.

150. *Grămada punctelor singulare ale unei funcțiuni analitice este închisă* ¹⁾.

În adevăr, dacă un punct limită a al grămezii punctelor singulare, n'ar fi singular, ar urmă să existe un $r > 0$, astfel ca în cercul $|x-a| = r$ să avem $f(x) = P(x-a)$, ceea ce este imposibil, căci oricât de mic ar fi r , există puncte singulare ale funcțiunii în interiorul cercului.

II. FUNCȚIUNI ANALITICE UNIFORME ȘI MULTIFORME

151. Fie $P(x-a)$ un element al funcțiunii analitice $f(x)$ și x_0 un punct ordinar oarecare. Să unim punctele a și x_0 printr-o linie oarecare L de o formă arbitrară situată în regiunea de existență a funcțiunii și care să nu treacă prin nici un punct singular. Pe linia L să intercalăm, între punctele extreme, un număr suficient de puncte prin intermediul cărora să formăm șirul de elemente corespunzătoare care conduc la elementul $P(x-x_0)$ relativ la punctul x_0 . Vom exprima această operațiune zicând că elementele *se continuă dealungul liniei* L .

Se mai poate zice că, dacă, luând ca valoare inițială a funcțiunii, valoarea corespunzătoare elementului primitiv, ajungem la valoarea sa finală în punctul x_0 , făcând ca variabila x să descrie linia dată dela a la x_0 . Însă între a și x_0 putem imagina o infinitate de drumuri, situate în regiunea de existență a funcțiunii și nimic nu ne permite a afirma că după toate aceste drumuri vom obține în x_0 același element.

Se zice că o funcțiune analitică este *uniformă* în regiunea sa de existență, dacă elementul inițial rămânând același, elementul corespunzător unui punct ordinar x_0 oarecare este independent de drumul considerat L . În cazul contrar funcțiunea se zice *multi-formă* cu un număr limitat sau nelimitat de *ramuri*, după cum elementele corespunzătoare unui punct ordinar oarecare sunt în număr limitat sau nelimitat.

¹⁾ Grămadă care conține derivata sa (2^o. § 12).

Făcând să coincidă punctul final x_0 cu punctul inițial a , rezultă, din definițiune, că dacă $f(x)$ este o funcțiune analitică uniformă, elementul său final este identic cu cel inițial.

Din definițiune rezultă că o funcțiune analitică uniformă admite o valoare unică în fiecare punct ordinar.

152. *Câteva considerațiuni asupra funcțiunilor analitice multiforme.* Dacă funcțiunea analitică este multiformă, se poate întâmpla ca în unele puncte ale regiunii sale de existență, două sau mai multe elemente să primească valori egale; vom zice atunci că atâtea valori ale funcțiunii sunt egale între ele în aceste puncte.

Să observăm că două elemente $P_\alpha(x-x_0)$ și $P_\beta(x-x_0)$ nu pot fi egale între ele într-o infinitate de puncte în domeniul unui punct ordinar x_0 , căci atunci ar coincide.

153. *O funcțiune analitică multiformă se comportă ca o funcțiune uniformă în orice porțiune a regiunii sale de existență, în care nu există puncte singulare și care este limitată de un contur simplu.*

Vom să înțelegem prin aceasta, că, plecând dela un punct $x=a$, situat într-o asemenea regiune, cu un element dat $P(x-a)$ al funcțiunii, vom obține într'un punct oarecare x_0 , un element final, independent de drumul urmat de variabilă, pe cât timp acest drum rămâne în interiorul regiunii considerate.

Propozițiunea este evidentă dacă regiunea considerată constă din cercul de convergență al elementului dat.

Să considerăm, pentru a fixa ideile, o porțiune a planului formată de cercul de convergență C al elementului dat și de cercurile C_1 , C_2 ale elementelor prelungite $P(x-a, a_1)$, $P(x-a, a_1, a_2)$, din care suprimăm arcele interioare ariei. În această regiune ramura corespunzătoare elementelor precedente

n'are nici un punct singular.

Fie L și L' două linii situate în interiorul acestei arii și unind între ele punctele a și x_0 . (Fig. 7). Să le presupunem destul de apropiate una de alta pentru ca fixând pe fiecare din ele câte două puncte α, β ; α', β' , arcele

aa, aa' ; $\alpha\beta, \alpha'\beta'$; $\beta x_0, \beta' x_0$

să fie cuprinse respectiv în cercurile C, C_1, C_2 , astfel ca punctele α, α' ; β, β' , să fie, cele dintâiu două în regiunea comună cercurilor C, C_1 și cele două din urmă în regiunea comună cercurilor

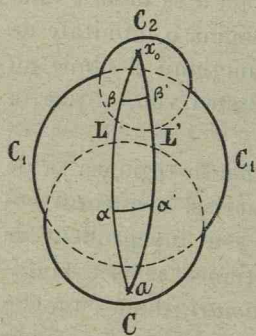


Fig. 7

C, C_1 și cele două din urmă în regiunea comună cercurilor

C_1, C_2 . Să unim respectiv punctele a și a' ; β și β' prin câte o linie situată fiecare în regiunea comună în care se află punctele extreme. În virtutea acestei construcțiuni, ariile

$$aa', a'\alpha\beta\beta', \beta'\beta x_0$$

sunt cuprinse fiecare respectiv în interiorul cercurilor C, C_1, C_2 ; prin urmare elementul $P(x-a)$ prelungit dealungul arcului aa sau dealungul drumului $aa'a$ conduce la acelaș element final $P_1(x-a)$. Plecând din punctul a cu acest element, vom obține după arcu $\alpha\beta$, precum și după drumul $aa'\beta'\beta$, acelaș element final $P_2(x-\beta)$. În fine, acest element va da după drumurile βx_0 sau $\beta\beta'x_0$ acelaș element final $P(x-x_0)$.

Reunind la un loc de o parte drumurile $aa, \alpha\beta, \beta x_0$ și de cealaltă parte celelalte drumuri considerate și observând că liniile $aa', \beta\beta'$ fiind percorse de două ori după rând în sens invers, pot fi suprimate, rezultă că liniile L și L' conduc, dacă plecăm din punctul a cu elementul $P(x-a)$, la acelaș element final în punctul x_0 . Vom zice pentru acest motiv că liniile L și L' sunt echivalente.

Considerând între punctele a și x_0 un șir de linii $L, L', L'', \dots$ astfel ca două consecutive oarecari să fie destul de apropiate una de alta, prin urmare echivalente, conchidem că toate liniile cari unesc două puncte oarecari și sunt situate cu totul în regiunea considerată, sunt echivalente. Ceeace demonștră teorema.

Se recunoaște lesne că două drumuri L, L' , cari unesc aceleași puncte și cari nu trec prin nici un punct singular, sunt echivalente sau nu, după cum elementul final obținut când descriem curba închisă formată de cele două drumuri — punctul de plecare fiind acelaș — coincide sau nu cu elementul inițial.

154. Din teorema precedentă rezultă că dacă variabila x descrie o curbă închisă, situată într'o regiune limitată de un contur simplu și în care nu se găsește nici un punct singular, elementul cu care plecăm dintr'un punct oarecare al curbei se va reproduce. Cu alte cuvinte, dacă un element $P(x-a)$ se poate prelungi după un drum oarecare în interiorul unei arii A , limitată de un contur simplu, toate prelungirile formează o funcțiune uniformă în A . Nu este tot așa dacă aria este cu contur multiplu. De exemplu, seria

$$P(x-1) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots,$$

care, precum vom vedea, dă naștere funcțiunii $\log x$, se poate prelungi în toate direcțiunile în interiorul unei coroane limitată de două

cercuri concentrice cu centrul în origină, pe când funcțiunea $\log x$ nu este uniformă în această coroană.

Reciproca nu este adevărată.

Se poate întâmpla ca în interiorul ariei limitată de un contur simplu să existe puncte singulare și elementul final să coincidă cu cel inițial.

Observare. Într-o regiune în care o ramură de funcțiune analitică multiformă n'are puncte singulare, se pot găsi puncte singulare ale altor ramuri; prin urmare, în interiorul cercului de convergență al unui element al său, o asemenea funcțiune poate avea puncte singulare.

CAPITOLUL VIII.

FUNCȚIUNI UNIFORME.

I. — GENERALITĂȚI ASUPRA FUNCȚIUNILOR ANALITICE UNIFORME

155. *Dacă două elemente ale unei funcțiuni analitice uniforme au o regiune comună de convergență, ele primesc valori egale în toate punctele acelei regiuni.* Căci în regiunea comună funcțiunea fiind reprezentată, prin definițiune, de unul sau celalt element și având o valoare unică în fiecare punct, rezultă că cele două elemente sunt egale în fiecare punct al regiunii.

Deaci urmează că o funcțiune analitică uniformă nu poate avea puncte singulare în interiorul cercului de convergență al unuia din elementele sale. Căci dacă un punct singular a situat pe cercul de convergență al unui element $P(x-a)$ ar fi în interiorul cercului de convergență al unui alt element $P_1(x-b)$, cele două cercuri ar avea o regiune comună în care elementele corespunzătoare ar fi egale; ceea ce este imposibil.

Din cele ce preced conchidem că punctele singulare ale unei funcțiuni analitice uniforme nu pot forma o arie, oricât de mică ar fi; prin urmare în domeniul unui punct singular oarecare se găsesc puncte ordinare ale funcțiunii.

156. Se zice despre o funcțiune analitică uniformă, care n'are puncte singulare într-o regiune dată, că este *olomorvă* în acea regiune.

Fie $f(x)$ o funcțiune analitică uniformă într-o regiune dată și x_0 un punct ordinar oarecare interior acelei regiuni. În domeniul lui

x_0 funcțiunea $f(x)$ este olomorfă și se poate pune sub forma

$$(1) \quad f(x) = P(x - x_0),$$

membrul al doilea fiind o serie întreagă de $(x - x_0)$, convergentă în cercul cu centrul în x_0 și trecând prin punctul singular al lui $f(x)$, cel mai apropiat de x_0 , adică de punctul cel mai apropiat de x_0 în care funcțiunea încetează de a fi olomorfă. Căci, *primo*, cercul de convergență al lui $P(x - x_0)$ nu poate conține în interiorul său puncte singulare ale funcțiunii (155); *secundo*, dacă punctele singulare ale lui $f(x)$ ar fi toate exterioare cercului, acest cerc n'ar fi adevăratul cerc de convergență, care conține pe periferia sa cel puțin un punct singular al funcțiunii. Egalitatea (1) este valabilă în interiorul cercului de convergență al elementului $P(x - x_0)$, căci $f(x)$ se confundă cu elementul său în cercul de convergență corespunzător.

Dacă funcțiunea este olomorfă în domeniul punctului ∞ ($x_0 = \infty$), egalitatea (1) trebuie înlocuită prin cea următoare

$$(2) \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right);$$

căci punând $x = \frac{1}{x'}$, funcțiunea $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ este, în virtutea ipotezei, olomorfă în domeniul punctului $x' = 0$, de unde rezultă forma

$$f\left(\frac{1}{x'}\right) = P(x')$$

și prin urmare forma (2).

157. *Teoremă (Weierstrass). O serie de funcțiuni olomorfe, uniform convergentă într-o regiune dată, definește o funcțiune olomorfă în aceeași regiune.*

Demonstrațiunea acestei teoreme este identică cu cea dată (§ 123) în care funcțiunile considerate sunt raționale.

158. Fie

$$(1) \quad y = f(x), \quad z = F(y),$$

două funcțiuni analitice olomorfe, cea dintâiu într-o regiune (A) în planul variabilei x , cea de a doua într-o regiune (B) în planul variabilei y . Dacă unui punct x_0 din (A) corespunde un punct y_0 din (B), z devine, prin substituțiunea $y = f(x)$, o funcțiune analitică de x , olomorfă în domeniul punctului x_0 . În adevăr, în virtutea ipotezei, putem scrie respectiv în domeniile punctelor x_0, y_0 ,

$$(2) \quad y - y_0 = (x - x_0) P(x - x_0),$$

$$(3) \quad z = P_1(y - y_0).$$

Seria (2), care reprezintă funcțiunea $y - y_0$, anulându-se în acelaș timp cu $x - x_0$, rezultă că membrul al doilea din (3) devine, prin substituțiunea (2), o serie întreagă de $x - x_0$,

$$z = P_2(x - x_0),$$

convergentă în domeniul punctului x_0 .

q. e. d.

159. *Puncte singulare.* Fie $f(x)$ o funcțiune analitică uniformă și a un punct singular. În domeniul acestui punct, funcțiunea nu se poate pune sub forma

$$f(x) = P(x - a).$$

Se poate însă întâmpla ca produsul funcțiunii printr'o putere convenabilă $(x - a)^m$, m fiind un întreg pozitiv, să se poată pune sub forma

$$(x - a)^m f(x) = P(x - a),$$

sau ca o asemenea expresiune să fie imposibilă. În cazul întâiu, punctul a se zice *pol*; în cazul al doilea ¹⁾ acest punct a primit numele de *punct singular esențial*. Polurile și punctele singulare esențiale sunt *puncte de discontinuitate* ale funcțiunii.

160. Fie a un pol al funcțiunii $f(x)$. Dacă m este cel mai mic număr întreg pozitiv, astfel ca în domeniul polului să avem

$$(1) \quad (x - a)^m f(x) = P(x - a) = \sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

coeficientul a_0 va fi diferit de zero. Numărul m așa determinat se zice *ordinul* polului a .

Ecuatiunea (1) se poate scrie

$$(2) \quad f(x) = (x - a)^{-m} P(x - a),$$

sau

$$(3) \quad f(x) = \frac{a_0}{(x - a)^m} + \frac{a_1}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x - a} + P_1(x - a), \quad a_0 \neq 0.$$

Suma termenilor din membrul al doilea, în care figurează $(x - a)$ la numitor, se zice *partea principală* a dezvoltării funcțiunii în domeniul polului a . Expresiunile precedente ale lui $f(x)$ ne arată că multiplicând funcțiunea $f(x)$ cu $(x - a)^m$, sau scăzând din $f(x)$ partea sa principală relativ la polul a , rezultatele obținute

$$(x - a)^m f(x), \quad f(x) - \left[\frac{a_0}{(x - a)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x - a} \right]$$

sunt funcțiuni olomorfe în domeniul acestui punct.

¹⁾ Este vorba esențialmente de funcțiuni uniforme.

161. Dacă în domeniul unui punct a funcțiunea $f(x)$ se poate pune sub forma

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x-a}\right) + P_1(x-a),$$

în care

$$P\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots,$$

punctul a este un pol sau un punct singular esențial, după cum

$$P\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

are un număr limitat sau nelimitat de termeni. Căci în cazul din urmă nu există număr pozitiv m pentru care forma (1) să poată fi satisfăcută.

162. Polurile funcțiunii analitice uniforme sunt *izolate* de zerurile funcțiunii. În adevăr, presupunând că punctul a este un pol de ordinul m , avem expresiunea (2) în care $P(x-a)$ este diferit de zero în punctul $x=a$. Însă, în acest caz, există un număr pozitiv r , astfel că pentru toate valorile lui x interioare cercului $|x-a|=r$, $P(x-a)$ nu se anulează; așa dar în interiorul acestui cerc, $f(x)$ nu se poate anula.

Aceeaș expresiune (2) arată ca polurile sunt *puncte izolate* între ele; căci, în cercul de convergență al seriei $P(x-a)$, funcțiunea $f(x)$ n'are alt pol decât punctul a .

163. Din cele ce preced rezultă că dacă o funcțiune analitică uniformă are în domeniul unui punct a o infinitate de zeruri sau de poluri, acel punct este *punct singular esențial*. Căci un asemenea punct nu poate fi nici punct ordinar, nici pol.

Reciproca nu este adevărată. În domeniul unui punct singular esențial o funcțiune uniformă poate să n'aibă nici un zero și nici un pol. De exemplu, funcțiunea $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pe care o vom studia mai târziu, pentru care $x=0$ este punct singular esențial.

164. Se zice despre o funcțiune analitică uniformă, care n'are nici un punct singular esențial într-o regiune dată că este *meromorfa* în acea regiune. Zerurile și polurile unei funcțiuni meromorfe într-o regiune dată sunt, în virtutea celor zise mai sus, în număr limitat. Dacă dar o funcțiune analitică uniformă admite o infinitate de zeruri sau de poluri, ea are cel puțin un punct singular esențial, situat la distanță finită sau la infinit.

165. Fie a un pol de ordinul m și r raza cercului cu centrul în acest punct în interiorul căruia $f(x)$ nu se anulează și nu are alt punct singular decât a . Punând $f(x)$ sub forma (2) (§ 160), $|P(x-a)|$ va admite în cercul considerat un minimum $\mu > 0$. Vom avea

$$|f(x)| = \frac{|P(x-a)|}{|(x-a)|^m} \geq \frac{\mu}{\varrho^m},$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac condițiunea

$$|x-a| \leq \varrho \quad p < r.$$

De unde rezultă că $|f(x)|$ poate deveni mai mare ca orice număr pozitiv M , când x se apropie de a , după orice direcțiune voim. Este deajuns a lua

$$\varrho \leq \sqrt[m]{\frac{\mu}{M}}.$$

166. Seria $P(x-a)$, considerată mai sus, fiind diferită de zero în interiorul cercului $|x-a|=r$, vom putea scrie, în domeniul punctului a ,

$$\frac{1}{P(x-a)} = \mathcal{P}(x-a);$$

de unde

$$\frac{1}{f(x)} = (x-a)^m \mathcal{P}(x-a).$$

Așa dar, în domeniul unui pol a de ordinul m , inversa funcțiunii, $\frac{1}{f(x)}$, este o funcțiune olomorfă, pentru care punctul a este un zero de acelaș ordin. Viceversa, dacă a este un zero de ordinul m al funcțiunii $f(x)$, a va fi un pol de acelaș ordin al funcțiunii inverse $\frac{1}{f(x)}$.

167. Un punct singular esențial al unei funcțiuni analitice uniforme $f(x)$ este punct singular esențial și pentru funcțiunea inversă $\frac{1}{f(x)}$.

Fie a un punct singular esențial al funcțiunii $f(x)$. Dacă a ar fi pol al funcțiunii $\frac{1}{f(x)}$, ar urmă, după cele văzute mai sus, ca în domeniul acestui punct, inversa sa, $f(x)$, să fie olomorfă, admițând punctul a ca zero.

Dacă a ar fi un punct ordinar al funcțiunii $\frac{1}{f(x)}$, inversa sa, $f(x)$, ar admite acest punct ca pol sau ca punct ordinar, după cum a ar fi un zero sau nu al lui $\frac{1}{f(x)}$. Ambele rezultate însă fiind con-

trare ipotezei, punctul a nu poate fi decât un punct singular esențial al funcțiunii $\frac{1}{f(x)}$.

168. Tot ce s'a zis despre o funcțiune analitică uniformă în domeniul unui punct a , ordinar, pol sau punct singular esențial, subsistă și când $a = \infty$, cu singura modificare că în acest caz înlocuim $(x - a)$ prin $\frac{1}{x}$.

Astfel, dacă $x = \infty$ este un punct ordinar, avem, precum am văzut, în domeniul acestui punct

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dacă punctul ∞ este un pol de ordinul m , expresiunea (2) (160) se va înlocui prin cea următoare

$$f(x) = x^m P\left(\frac{1}{x}\right), \quad \left\{ P\left(\frac{1}{x}\right) \right\}_{x=\infty} \neq 0.$$

a căruia formă dezvoltată este

$$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m + A_{m+1}\frac{1}{x} + \dots, \\ A \neq 0.$$

Putem face să dispară polul ∞ , multiplicând $f(x)$ prin x^{-m} , sau scăzând din $f(x)$ partea sa principală relativă la acest pol, care aci este polinomul

$$Ax^m + \dots + A_{m-1}x.$$

În fine, punctul ∞ va fi punct singular esențial dacă nu există număr întreg pozitiv m , astfel ca $x^{-m} f(x)$ să se poată pune sub forma

$$x^{-m} f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right).$$

169. *Teoremă (Liouville).* O funcțiune analitică uniformă are cel puțin un punct singular situat la distanță finită sau la infinit.

Să presupunem că funcțiunea nu are nici un punct singular la distanță finită, adică este o funcțiune întreagă. În acest caz, ea se reprezintă printr'o serie întreagă

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

egalitatea fiind valabilă în cercul $|x| = R$, R având o valoare arbitrar de mare. Să presupunem că $|f(x)|$ ar admite pe toată sfera (tot planul x inclusiv punctul ∞), o limită superioară finită

M. Dealungul cercului $|x| = R$ vom avea aşadar $|f(x)| \leq M$ şi prin urmare coeficienţii a_n ai egalităţii (1) vor satisface inegalităţile

$$(2) \quad |a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Coeficienţii a_n fiind cantităţi constante, iar membrul al doilea tinzând către zero, când R tinde către infinit, rezultă că coeficienţii seriei, afară de coeficientul a_0 , sunt toţi nuli. Funcţiunea $f(x)$ se reduce la o constantă.

Corolar. O funcţiune olomorvă pe toată sfera este o constantă.

170. *Teoremă. Permanenţa relaţiunilor analitice. Fie*

$$(1) \quad y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \dots, y_n = f_n(x),$$

n funcţiuni analitice uniforme, având o regiune comună de existenţă. Dacă între elementele lor corespunzătoare unui punct ordinar x_0

$$(2) \quad P_1(x-x_0), P_2(x-x_0), \dots, P_n(x-x_0),$$

convergente în acelaş cerc C , există o relaţiune raţională şi întreagă

$$(3) \quad F[P_1(x-x_0), \dots, P_n(x-x_0)] = 0,$$

pentru toate valorile lui x interioare acestui cerc, relaţiunea va subsista între funcţiunile date în toată regiunea comună de existenţă.

Este de ajuns a proba că relaţiunea subsistă pentru prelungirile elementelor (2). Pentru aceasta, să observăm că înlocuind elementele (2) prin expresiunile lor dezvoltate, membrul întâiu al egalităţii (3) se reduce la o serie $\mathcal{P}(x-x_0)$, convergentă în cercul C , identic nulă în interiorul acestui cerc. Fie x_1 un punct interior cercului C şi

$$P_1(x-x_0, x_1), \dots, P_n(x-x_0, x_1),$$

elementele prelungite corespunzătoare. Să presupunem că ele sunt convergente într'un cerc C_1 , care taie cercul C . Să substituim fiecărui element dat, elementul prelungit; membrul întâiu din (3) se transformă în o serie $\mathcal{P}_1(x-x_1)$, convergentă în C_1 . Insa, în regiunea comună celor două cercuri, elementele

$$P_i(x-x_0), P_i(x-x_0, x_1), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

fiind egale, seria $\mathcal{P}_1(x-x_1)$ va fi egală cu seria $\mathcal{P}(x-x_0)$, adică nulă; prin urmare ea va fi nulă în tot cercul C_1 . q. e. d.

În virtutea acestei teoreme, relaţiunea (3) se poate înlocui prin relaţiunea

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

valabilă în toată regiunea de existenţă a funcţiunilor y .

171. *Teoremă.* În domeniul unui punct ordinar modulul unei funcțiuni analitice uniforme nu admite maximum.

Fie x_0 un punct situat în acel domeniu și să presupunem că $|f(x_0)|$ este maximum, adică $|f(x_0)| > |f(x)|$ în domeniul considerat. În cercul $|x - x_0| = r$ cuprins în acest domeniu, avem

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 = f(x_0).$$

Reprezentând prin M maximumul lui $|f(x)|$ pe cerc, avem inegalitățile

$$|a_n| < \frac{M^1}{r^n};$$

de unde în special

$$|a_0| = |f(x_0)| < M,$$

inegalitate care exclude ipoteza că $|f(x_0)|$ este maximum.

Cea mai mare valoare a modului funcțiunii $f(x)$ nu poate dar avea loc decât pe cerc.

De unde rezultă că dacă dăm lui r valori crescândă fără ca cercul să întâlnească un punct singular al funcțiunii, cea mai mare valoare a modului $|f(x)|$ crește împreună cu r .

1) Coeficienții seriei sunt dați de egalitățile

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(x_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Pentru ca să avem egalitatea

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |e^{-ni\theta} f(x_0 + re^{i\theta})| d\theta,$$

este necesar ca argumentul funcțiunii sub semnul $\int$ să fie constant în intervalul $(0, 2\pi)$, căci modulul unei sume nu poate fi egal cu suma modulelor, decât dacă toți termenii au același argument; prin urmare, este necesar să avem

$$\arg f(x_0 + re^{i\theta}) = n\theta + \omega, \quad (\omega = \text{const}).$$

De unde expresiunea

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = |f(x_0 + re^{i\theta})| e^{i(n\theta + \omega)}$$

Fie M maximumul lui $|f(x)|$ pe cercul (r) ; pentru ca egalitatea $|a_n| = \frac{M}{r^n}$ să fie posibilă, este necesar să avem

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = M e^{i(n\theta + \omega)}$$

și prin urmare pentru ca egalitatea

$$|a_0| = M$$

să fie posibilă este necesar să avem

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = M e^{i\omega},$$

adică funcțiunea $f(x)$ este constantă dealungul cercului și prin urmare ea se reduce la o constantă, după cum știm (1^a, § 149)

Corolar. Dacă $f(x_0) \neq 0$, $|f(x)|$ nu admite minimum în domeniul lui x_0 și cea mai mică valoare ce poate primi modulul $|f(x)|$ într'un cerc cu centrul în x_0 , situat în domeniul acestui punct, are loc pe cerc. Este deajuns, pentru a justifica această propoziție, să considerăm funcțiunea $\frac{1}{f(x)}$, pentru care punctul x_0 este un punct ordinar.

172. Fie $x = \xi + i\eta$, $f(x) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta)$, P și Q funcțiuni reale de variabilele reale ξ și η . Teorema precedentă subsistă pentru funcțiunile P și Q în domeniul considerat. În adevăr, reprezentând prin A maximum lui $|P|$ și prin B maximum lui $|Q|$ pe cercul $|x - x_0| = r$, avem (114) inegalitățile

$$|a_n| < \frac{A}{r^n}, \quad |a_n| < \frac{B}{r^n}^1$$

și, în special,

$$|a_0| = |f(x_0)| = |P(\xi_0, \eta_0) + iQ(\xi_0, \eta_0)| < \begin{cases} A, \\ B, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{aligned} |P(\xi_0, \eta_0)| &< A, \\ |Q(\xi_0, \eta_0)| &< B. \end{aligned}$$

173. *Derivata.* Fie seria

$$P(x - x_0) = \sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

și derivata sa

$$P'(x - x_0) = \sum_0^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Se știe că aceste două serii au același cerc de convergență C ; punctele singulare ale seriei derivate sunt deci situate pe acest cerc. Voim să demonstrăm că *punctele singulare ale celor două serii coincid*.

În adevăr, dacă α este un punct ordinar al seriei $P(x - x_0)$, situat pe cercul C , există un punct x_1 interior acestui cerc astfel că cercul de convergență C_1 al seriei prelungite $P(x - x_0, x_1)$, prin urmare și al seriei derivate $P'(x - x_0, x_1)$, să conțină punctul α .

Deci punctul α este un punct ordinar al derivatei $P'(x - x_0)$, a cărei prelungire analitică, prin intermediul punctului x_1 , coincide cu derivata seriei prelungite.

Reciproc. Un punct ordinar al derivatei $P'(x - x_0)$, situat pe cercul de convergență C , este punct ordinar al seriei propuse $P(x - x_0)$

¹⁾ Egalitățile nu pot avea loc decât în aceleași condițiuni ca mai sus (nota).

Raționamentul este același. De unde rezultă propozițiunea enunțată.

174. Din cele ce preced rezultă că derivata $P'(x-a)$ definește o funcțiune analitică monogenă având *aceeași regiune de existență* ca funcțiunea născută din elementul primitiv $P(x-a)$. Reprezintănd această funcțiune prin $f(x)$ și cea născută din $P'(x-a)$ prin $f'(x)$, vom zice că $f'(x)$ este *derivata* lui $f(x)$ și $f(x)$ funcțiunea *primitivă* sau *integrala* lui $f'(x)$.

Funcțiunea $f(x)$ și derivata sa $f'(x)$ au, în virtutea propozițiunii din paragraful precedent, aceleași puncte singulare situate la distanță finită. Punctul $x = \infty$, nefiind în interiorul nici unuia din cercurile de convergență nici pe vreunul din aceste cercuri (punctul inițial fiind presupus la distanță finită), cere a fi examinat deosebit.

Să presupunem că funcțiunea $f(x)$ este olomorfă în domeniul punctului $x = \infty$, adică

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots;$$

vom avea

$$f'(x) = -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \dots$$

Prin urmare derivata este o funcțiune olomorfă în domeniul acestui punct.

Reciproca nu este adevărată. Fie, de exemplu, funcțiunea

$$f(x) = x + P\left(\frac{1}{x}\right),$$

pentru care punctul $x = \infty$ este un pól, pe când derivata

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right)$$

este olomorfă în domeniul acestui punct.

175. Fie $f(x)$ o funcțiune olomorfă în domeniul unui punct x_0 , adică

$$(1) \quad f(x) = P(x-x_0);$$

vom avea, în virtutea definițiunii derivatei,

$$(2) \quad f'(x) = P'(x-x_0),$$

în domeniul aceluiași punct. De aci rezultă egalitatea

$$(3) \quad f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

oricare ar fi drumul după care x se apropie de x_0 , x fiind presupus situat în domeniul lui x_0 . De unde conchidem că regulile după cari

se obține derivata unei funcțiuni analitice sunt cele date de calculul diferențial; căci acele reguli rezultă din formula (3) ce satisface derivata funcțiunii într'un punct ordinar oarecare x_0 .

180. *Interpretare geometrică. Transformare conformă.* Existența unei limite finite a expresiunii

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

când x se apropie de x_0 după orice direcțiune voim, se traduce printr'o proprietate geometrică interesantă.

Să considerăm variabilele x și y raportate la două sisteme de axe rectangulare (ξ, η) , (u, v) , situate în două plane diferite. Relațiunea $y = f(x)$ stabilește o corespondență între punctele x și y ale celor două plane, sau cum se mai zice, o reprezentare a planului x pe planul y . Dacă punctul x descrie o curbă $\varphi(\xi, \eta) = 0$, punctul y va descrie o curbă $\psi(u, v) = 0$. Iată proprietatea geometrică ce caracterizează o funcțiune analitică în regiunea ei de existență.

Dacă $y = f(x)$ este o funcțiune analitică, unghiul sub care se taie două curbe (x) într'un punct x_0 , în care derivata $f'(x_0)$ este finită și diferită de zero, este egal cu unghiul sub care se taie curbele corespunzătoare (y) .

În adevăr, fie x_1^* și x_2 , două puncte vecine cu x_0 și nu în linie dreaptă cu el; y_0, y_1, y_2 valorile lui y corespunzătoare valorilor x_0, x_1, x_2 . Vom avea

$$(1) \quad \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_2 \rightarrow x_0} \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = f'(x_0),$$

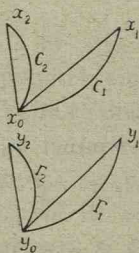


Fig. 8

Să punem

$$x_1 - x_0 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad x_2 - x_0 = r_2 e^{i\theta_2},$$

$$y_1 - y_0 = \varrho_1 e^{i\omega_1}, \quad y_2 - y_0 = \varrho_2 e^{i\omega_2}$$

Egalitatea (1) devine

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \frac{\varrho_1}{r_1} e^{i(\omega_1 - \theta_1)} = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \frac{\varrho_2}{r_2} e^{i(\omega_2 - \theta_2)};$$

de unde egalitățile

$$(2) \quad \lim \frac{\varrho_1}{r_1} = \lim \frac{\varrho_2}{r_2}, \quad \lim (\omega_1 - \theta_1) = \lim (\omega_2 - \theta_2).$$

Ultima egalitate scrisă sub forma

$$(3) \quad \lim (\omega_2 - \omega_1) = \lim (\theta_2 - \theta_1)$$

demonstrează proprietatea enunțată mai sus; căci limita către

care tinde diferența $\theta_2 - \theta_1$, când x_1 și x_2 se apropie de x_0 după două curbe oarecare C_1, C_2 trecând prin acest punct, este tocmai unghiul sub care cele două curbe se taie; aceeași semnificare o are $\lim (\omega_2 - \omega_1)$ relativ la curbele corespunzătoare Γ_1, Γ_2 descrise de y_1 și y_2 .

Neglijând cantități infinit mici, avem egalitățile

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \omega_2 - \omega_1 = \theta_2 - \theta_1,$$

cari arată că triunghiurile infinitezimale (x_0, x_1, x_2) și (y_0, y_1, y_2) sunt asemenea.

O reprezentare care conservă unghiurile, în virtutea căreia, precum vedem, elementele infinitezimale sunt asemenea, se numește o reprezentare conformă. Prin urmare o reprezentare dată de o funcțiune analitică este conformă.

Să observăm că egalitatea (3) exprimă nu numai că unghiurile considerate se conservă, dar și că sensul în care se mișcă razele vectoare, cari coincid cu tangentele în x_0 și y_0 la curbele C_1, Γ_1 până să coincidă cu tangentele la C_2 și Γ_2 , este același.

Se obicinuește a se zice că *sensul rotațiunei unghiurilor se conservă*.

Propozițiunea conservării unghiurilor presupune că derivata $f'(x_0)$ este diferită de zero. În cazul când această derivată este nulă, avem

$$\lim \frac{\varrho_1}{r_1} = \lim \frac{\varrho_2}{r_2} = 0;$$

o comparare de triunghiuri asemenea devine imposibilă. Propozițiunea în acest caz nu mai este adevărată.

Fie, de exemplu, funcțiunea

$$y = x^m, \quad m \text{ întreg} > 1.$$

Dacă variațiunea argumentului lui x este θ , variațiunea argumentului lui y este $m\theta$; de unde rezultă că dacă două curbe (x) se taie în origină sub un unghi ω , unghiul format de curbele corespunzătoare (y) este $m\omega$.

181. Fie

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

un șir nelimitat de funcțiuni olomorfe într'o regiune dată A. Dacă seria

$$\sum_1^{\infty} f_n(x)$$

este uniform convergentă în A , ea reprezintă (§ 157) o funcțiune olomorfa în această regiune.

Punând

$$F(x) = \sum f_n(x),$$

vom avea

$$F'(x) = \sum f'_n(x).$$

Această proprietate rezultă din proprietatea corespunzătoare a seriilor de puteri (143).

182. Derivatele de *ordin superior* ale funcțiunii $f'(x)$ se introduc în același mod ca derivata de ordinul întâi $f'(x)$. Astfel derivata lui $f'(x)$, reprezentată prin $f''(x)$, se zice derivata de ordinul al doilea a funcțiunii $f(x)$; etc.

Derivata $f''(x)$ având aceiași regiune de existență ca $f'(x)$, prin urmare ca $f(x)$, conchidem că toate derivatele unei funcțiuni analitice $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ sunt funcțiuni analitice având aceiași regiune de existență, prin urmare aceleași puncte singulare, situate la distanță finită ca funcțiunea primitivă dată.

Fie $y = f(x)$ o funcțiune analitică și y' , y'' , y''' , ... $y^{(n)}$ derivatele sale până la un ordin dat n . Dacă între elementele funcțiunei și ale acestor derivate există o relațiune rațională și întregă $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ în domeniul unui punct ordinar oarecare, relațiunea va subzista, în virtutea *permanenței relațiunilor analitice*, între funcțiunea dată și derivatele sale în toată regiunea de existență a funcțiunei (170).

183. Fie în domeniul unui punct x_0

$$(1) \quad f(x) = P(x - x_0) = \sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n ;$$

vom avea

$$(2) \quad f^{(n)}(x) = n! a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

de unde rezultă pentru $f(x)$ expresiunea

$$(3) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

valabilă ca și egalitatea (1) în cercul al cărui centru este x_0 și a cărui rază este distanța dela acest punct până la punctul singular cel mai apropiat.

Membrul al doilea din egalitatea (3) fiind un element al funcțiunii analitice $f(x)$, rezultă că o asemenea funcțiune este complet determinată dacă cunoaștem valoarea sa și valorile derivatelor sale de orice ordin într'un punct ordinar x_0 dat. Dacă derivatele

de toate ordinele sunt nule în x_0 , funcțiunea $f(x)$ se reduce la o constantă. Această propozițiune este echivalentă cu propozițiunea 1^o. (§ 149).

De unde rezultă că dacă două funcțiuni analitice sunt egale, precum și derivatele lor de orice ordin, într'un punct ordinar x_0 , ele coincid în toată regiunea lor de existență.

184. Să presupunem

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0;$$

expresiunea (3) va deveni

$$f(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-m}.$$

Punctul x_0 se zice un zero al funcțiunii de ordinul m . În domeniul unui zero de ordinul m , funcțiunea este așa dar de forma

$$f(x) = (x - x_0)^m P(x - x_0), \quad \left[P(x - x_0) \right]_{x=x_0} \neq 0.$$

185. Fie

$$P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

un element de funcțiune analitică $f(x)$, olomoră în domeniul punctului x_0 ; integrala corespunzătoare este

$$\mathcal{P}(x - x_0) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1},$$

C fiind o constantă arbitrară. Valoarea acestui element în punctul x_0 este egală cu C și prin urmare poate fi dată după voie. Presupunând valoarea constantei determinată, elementul $\mathcal{P}(x - x_0)$ va da naștere unei funcțiuni analitice monogenă, care, după cele zise în paragrafele precedente, are aceiași regiune de existență că funcțiunea propusă $f(x)$: punctele sale singulare la distanță finită sunt aceleași ca ale lui $f(x)$. Punctul $x = \infty$ poate fi pentru funcțiunea integrală un punct singular, fără a fi punct singular al funcțiunii date.

186. Derivata unei funcțiuni analitice uniforme este o funcțiune analitică *uniformă*, precum rezultă din expresiunea

$$f(x) = P(x - x_0) + P_1\left(\frac{1}{x - x_0}\right),$$

a cărei derivată este

$$f'(x) = P'(x - x_0) - \frac{1}{(x - x_0)^2} P'_1\left(\frac{1}{x - x_0}\right).$$

Integrala unei funcțiuni uniforme însă poate să nu fie o funcțiune uniformă. Exemplul cel mai simplu ni-l dă funcțiunea

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

a cărei integrală o vom vedea mai departe.

II. — FUNCȚIUNI RAȚIONALE.

Printre funcțiunile analitice uniforme, cele mai simple sunt funcțiunile raționale, întregi și fracționare.

187. *O funcțiune rațională întreagă*, sau un polinom de x , este o expresiune de forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m,$$

numărul termenilor din membrul al doilea fiind mărginit. Această expresiune poate fi privită ca un element al cărui cerc de convergență are o rază infinit de mare; ea definește dar o funcțiune analitică uniformă în tot planul neavând alt punct singular decât punctul dela infinit. Acest punct este un *pol de un ordin egal cu gradul polinomului*; ceeace rezultă din forma

$$f(x) = x^m P\left(\frac{1}{x}\right) = x^m \left(a_m + a_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^m} \right), a_0 \neq 0.$$

188. *O funcțiune analitică rațională fracționară*

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n},$$

adică câtul a două polinoame de x , este o funcțiune analitică monogenă uniformă în tot planul.

În adevăr, x_0 fiind o valoare oarecare a lui x diferită de un zero al numitorului, avem, în domeniul acestui punct, expresiunea

$$(2) \quad f(x) = P(x - x_0).$$

Așadar $f(x)$ este o funcțiune analitică olomorfă în orice porțiune a planului, care nu conține un zero al numitorului.

Dacă x_0 este un zero al numitorului de ordinul k , avem, în domeniul acestui punct,

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{(x - x_0)^k} P(x - x_0), \left[P(x - x_0) \right]_{x=x_0} \neq 0.$$

Un zero al numitorului de ordinul k este așa dar un *pol de acelaș ordin* al funcțiunei.

Funcțiunea $f(x)$ n'are așa dar la distanță finită alte singularități decât poluri în număr limitat.

Să observăm că egalitățile (2) și (3) sunt valabile în cercul cu centrul în punctul x_0 și trecând prin polul cel mai apropiat de acest punct.

Pentru a examina cum se comportă $f(x)$ în domeniul punctului dela infinit să facem substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$; obținem

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x'}\right) = x'^{n-m} \frac{a_m + a_{m-1}x' + \dots + a_0x'^m}{b_n + b_{n-1}x' + \dots + b_0x'^n}.$$

Coeficienții a_m, b_n fiind diferiți de zero, rezultă că fracțiunea din membrul al doilea se poate pune sub forma unei serii întregi $P(x')$, care nu se anulează în punctul $x' = 0$. Avem așadar în domeniul punctului ∞ , expresiunea

$$(4) \quad f(x) = x^{m-n} P\left(\frac{1}{x}\right), \quad \left[P\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{x=\infty} \neq 0.$$

Punctul $x = \infty$ este deci un punct ordinar sau un pol, după cum avem $m \leq n$ sau $m > n$. În cazul $m < n$, punctul $x = \infty$ este un zero al funcțiunii de ordinul $n - m$ și în cazul $m > n$, acest punct este un pol de ordinul $m - n$.

O funcțiune rațională n'are așadar în tot planul, inclusiv punctul infinit, alte singularități decât poluri în număr limitat. Ea este monogenă (în sensul lui Weierstrass), căci orice element $P(x - x_0)$, care reprezintă funcțiunea în cercul său de convergență, poate fi prelungit analiticeste în afară din cerc, astfel că totalitatea elementelor prin cari funcțiunea $f(x)$ este reprezentată în tot planul, se poate deduce dintr'unul din ele.

În fine, funcțiunea rațională este evident uniformă.

În rezumat: O funcțiune rațională este o funcțiune analitică uniformă pe toată sfera, neavând alte singularități decât un număr limitat de poluri; în special, dacă funcțiunea este întreagă, unicul ei pol este punctul dela infinit.

Aceste proprietăți sunt caracteristice, precum rezultă din cele ce urmează.

189. *Teoremă. — O funcțiune analitică $f(x)$ uniformă în tot planul, pentru care punctul infinit este unicul punct singular și anume un pol de ordinul m , este o funcțiune rațională întreagă de gradul m .*

În adevăr, $f(x)$ fiind o funcțiune olomoră în tot planul, se poate reprezenta în toată întinderea planului printr'o serie întreagă

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + \dots$$

Însă punctul infinit fiind un pol de ordinul m , rezultă că în domeniul acestui punct $f(x)$ trebuie să fie de forma

$$f(x) = x^m P\left(\frac{1}{x}\right), \quad P\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0 \text{ la } x=\infty.$$

De unde rezultă $a_m \neq 0$ și toți coeficienții următori $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = 0$. Avem așadar

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m.$$

190. Teorema precedentă se poate înlocui prin cea următoare:
Fie

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o funcțiune întreagă. Dacă există un număr întreg pozitiv m și un număr $A > 0$, astfel încât să avem

$$(2) \quad |x^{-m} f(x)| \leq A,$$

pentru toate valorile $|x| > R$, R fiind un număr pozitiv arbitrar de mare, funcțiunea $f(x)$ este un polinom de un grad $\leq m$; gradul este m , dacă

$$|x^{-m} f(x)| \neq 0 \text{ la } x=\infty.$$

Pentru a stabili această propozițiune, să scriem egalitatea (1) sub forma

$$x^{-m} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k-m} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k-m}$$

Prima sumă din membrul al doilea tinde către zero când $|x|$ tinde către infinit, prin urmare, în virtutea inegalității (2), modulul sumei a doua rămâne finit pe toată sfera. Această sumă este așadar o constantă a cărei valoare este nulă sau diferită de zero după cum $|x^{-m} f(x)|_{x=\infty}$ este nul, sau diferit de zero.

191. Teoremă. — O funcțiune analitică uniformă, care, pe toată sfera, n'are alte singularități decât un număr limitat de poluri, este o funcțiune rațională.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_m$ polurile funcțiunii $f(x)$ situate la distanță finită, de ordine respectiv egale cu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Punând

$$F(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_m)^{\alpha_m},$$

produsul $F_1(x) = f(x) F(x)$ este o funcțiune întreagă, având punctul infinit ca pol sau ca punct ordinar și prin urmare este un polinom sau o cantitate constantă. De unde rezultă că

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}$$

este o funcțiune rațională.

192. Teorema precedentă se mai poate stabili în modul următor: Fie a unul din polurile funcțiunii $f(x)$ la distanță finită și m ordinul său; avem în domeniul acestui punct

$$f(x) = \frac{A_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + P(x-a).$$

Să punem

$$\varphi(x) = \Sigma \left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} \right],$$

simbolul Σ referindu-se la toate polurile situate la distanță finită. Diferența $f(x) - \varphi(x)$ este o funcțiune întreagă $F(x)$ pentru care punctul infinit este, prin ipoteză, un pol sau un punct ordinar. $F(x)$ este așa dar un polinom de x , sau o constantă.

Funcțiunea

$$f(x) = F(x) + \Sigma \left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} \right]$$

este așa dar o funcțiune rațională.

193. *Teorema fundamentală a Algebrei: O funcțiune rațională întreagă $f(x)$ are cel puțin un zero.*

În adevăr, dacă $f(x)$ nu s'ar anula în nici un punct în plan, inversa sa $\frac{1}{f(x)}$ ar fi olomorfă în tot planul; însă punctul infinit fiind pol al lui $f(x)$ este punct ordinar pentru $\frac{1}{f(x)}$ și prin urmare $\frac{1}{f(x)}$ ar fi olomorfă pe toată sfera; ceea ce nu se poate.

III. — Două teoreme generale asupra funcțiunilor întregi.

194. Prin definițiune, o funcțiune întreagă este o funcțiune analitică definită de o serie întreagă $P(x)$ al cărei cerc de convergență are o rază arbitrar de mare. Punctul $x = \infty$ este unicul punct, singular, pol sau punct singular esențial, după cum funcțiunea este rațională sau transcendentă, adică după cum numărul termenilor seriei este limitat sau nelimitat.

Teorema I. Fie R și M două numere pozitive date; există valori x satisfăcând inegalitatea $|x| > R$ pentru cari avem $|f(x)| > M$, oricât de mare ar fi numărul M (Liouville).

Căci modulul unei funcțiuni analitice uniforme nu poate avea pe toată sfera o limita superioară finită, fără a se reduce la o constantă (169).

Această teoremă exprimă o proprietate comună funcțiunilor întregi raționale și transcendente. Teorema următoare se referă numai la funcțiunile transcendente.

Teorema II. Fie ε un număr pozitiv arbitrar de mic și R un număr pozitiv oricât de mare voim; există valori x satisfăcând inegalitatea $|x| > R$, pentru cari avem $|f(x)| < \varepsilon$.

Dacă în domeniul punctului $x = \infty$, $f(x)$ are o infinitate de zeruri, teorema este evidentă. Să presupunem că nu este așa, atunci putem să ne închipuim R destul de mare, astfel ca pentru $|x| > R$, $f(x)$ să nu aibă nici un zero, exceptând poate punctul $x = \infty$. Zerurile lui $f(x)$ situate în interiorul cercului $|x| = R$ fiind puncte izolate, numărul lor este limitat.

Să considerăm funcțiunea inversă $\frac{1}{f(x)}$ ale cărei poluri sunt zerurile lui $f(x)$. Fie a unul din aceste zeruri; vom avea, în domeniul acestui punct, o expresiune de forma

$$(1) \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + P(x-a).$$

Să punem

$$(2) \quad \varphi(x) = \Sigma \left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} \right],$$

suma din membrul al doilea cuprinzând părțile principale relative la toate polurile lui $\frac{1}{f(x)}$, situate în cercul $|x| = R$; $\varphi(x)$ este o funcțiune rațională.

Diferența

$$(3) \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)} - \varphi(x)$$

este așadar o funcțiune analitică uniformă neavând nici un punct singular în cercul considerat. Însă R fiind arbitrar de mare, rezultă că $f_1(x)$ este o funcțiune întreagă. Această funcțiune nu se poate reduce la o constantă, căci altfel, din expresiunea (3) ar rezultă că $f(x)$ este o funcțiune rațională. Prin urmare, în virtutea teoremei I, există puncte x exterioare cercului $|x| = R$, în care avem $|f_1(x)| > M$, oricât de mare ar fi M . De altă parte, în asemenea puncte, modulul lui $\varphi(x)$ poate deveni mai mic decât o cantitate oricât de mică, dacă luăm R destul de mare. Prin urmare în aceste puncte avem

$$|f(x)| < \varepsilon. \qquad \text{q. e. d.}$$

195. *Corolar.* Fie A o constantă dată oarecare; în virtutea teoremei precedente există, în domeniul punctului ∞ , puncte x în cari avem

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

adică, în domeniul punctului infinit, o funcțiune întreagă transcendentă se poate apropia de orice cantitate dată, oricât de mult voim.

196. Această teoremă ne arată deosebirea fundamentală ce există, în domeniul punctului infinit, între o funcțiune rațională întreagă și o funcțiune întreagă transcendentă. Pecând cea dintâi nu poate primi, pentru valori x al căror modul este mai mare decât un număr pozitiv R , destul de mare, decât *valori al căror modul este mai mare decât* M , M fiind cu atât mai mare cu cât R este mai mare și prin urmare tinde către infinit în acelaș timp cu x , după orice direcțiune voim, funcțiunea întreagă transcendentă poate, pentru aceleași valori ale lui $|x|$, să se apropie de orice cantitate voim și prin urmare este cu totul *nedeterminată*, când x tinde către infinit.

CAPITOLUL IX.

FUNCȚIUNI ANALITICE AVÂND O INFINITATE DE PUNCTE SINGULARE.

197. Fie

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

un șir nelimitat de funcțiuni raționale. Dacă seria $\Sigma f_n(x)$ este uniform convergentă într-o regiune *conexă* (A), ea reprezintă în acea regiune o funcțiune analitică monogenă $F(x)$. Căci precum s'a văzut (§ 123), în domeniul unui punct oarecare x_0 , situat în regiunea dată, avem

$$(2) \quad \Sigma f_n(x) = P(x - x_0).$$

De altă parte, aria fiind conexă, orice punct interior, $x = \xi$, poate fi unit cu x_0 printr-o linie situată în interiorul ei; prin urmare seria corespunzătoare $\mathcal{P}(x - \xi)$, pentru care avem

$$\Sigma f_n(x) = \mathcal{P}(x - \xi),$$

este o prelungire a elementului $P(x - x_0)$. Ceeace justifică monogeneitatea funcțiunii în aria considerată.

Egalitatea (2) este valabilă într'un cerc cu centrul în x_0 și cu o rază cel puțin egală cu distanța dela centru până la cel mai apropiat din polurile funcțiunilor $f_n(x)$; căci, într'un asemenea cerc toți termenii seriei sunt de forma $P_n(x - x_0)$ și suma $\Sigma P_n(x - x_0)$, este, în virtutea ipotezei, uniform convergentă în interiorul acestui cerc.

198. Să presupunem diferite între ele ¹⁾ polurile funcțiilor $f_n(x)$ și fie R distanța dela x_0 până la cel mai apropiat dintre ele; raza cercului de convergență al seriei $P(x-x_0)$ este R . În adevăr, să presupunem mai întâi că polurile cari se află la distanța R de x_0 , sunt în număr limitat și fie $f_1(x), \dots, f_\lambda(x)$ funcțiunile având asemenea poluri. Să punem

$$F_1(x) = f_1(x) + \dots + f_\lambda(x)$$

și să reprezentăm prin $F_2(x)$ suma $\sum' f_n(x)$, în care n primește toate valorile întregi de la 1 la ∞ , exceptând valorile $1, \dots, \lambda$; vom avea

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

și putem serie

$$F_1(x) = P_1(x-x_0), \quad F_2(x) = P_2(x-x_0).$$

Însă polurile termenilor $\sum'$ fiind toate exterioare cercului C descris din x_0 ca centru cu raza R , pecând $F_1(x)$ este o funcțiune rațională ale cărei poluri sunt toate pe acest cerc, raza cercului de convergență al seriei $P_1(x-x_0)$ nu poate fi diferită de R . De unde rezultă că raza cercului de convergență al seriei

$$P(x-x_0) = P_1 + P_2$$

este R .

Să presupunem acum că polurile funcțiilor $f_n(x)$, cari se află la distanța cea mai mică R de x_0 , sunt în număr nelimitat. Fie C cercul descris din x_0 ca centru cu raza R . Voim să arătăm că și în acest caz cercul de convergență al seriei $P(x-x_0)$ este C . În adevăr, să presupunem că seria $P(x-x_0)$ este convergentă într'un cerc C' , cu centrul în x_0 și cu o rază $R' > R$. Fie a unul din polurile cari se află pe cercul C și x_1 un punct interior pe raza care trece prin a , la o distanță de acest punct mai mică ca R . Punctul a va fi așa dar unicul pol a cărui distanță de x_1 este cea mai mică și prin urmare cercul de convergența al seriei

$$F(x) = \mathcal{A}(x-x_1),$$

cu centrul în x_1 este tangent în a la cercul C . Însă seria $\mathcal{A}(x-x_1)$ fiind identică cu seria $P(x-x_0, x_1)$ dedusă din $P(x-x_0)$, cercul său de convergență trebuie să fie cel puțin tangent interior cercului C' . De unde rezultă că cercul C' coincide cu C . q. e. d.

¹⁾ Adică un pol al unei funcțiuni $f_n(x)$ nu aparține nici uneia din celelalte funcțiuni $f_m(x)$, $m \neq n$. Dacă mai multe funcțiuni ar avea un pol comun, acest pol ar putea dispărea în sumă

Exemplu:

$$f_1(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad f_2(x) = \frac{-1}{x-1}; \quad f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Polul $x = 1$ a dispărut

199. *Aplicațiune.* Fie

$$f_n(x) = \frac{c_n}{x - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ fiind puncte în număr nelimitat situate în plan într'un mod oarecare și $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ cantități constante, în număr deasemenea nelimitat, supuse la unica condițiune ca seria $\sum |c_n|$ să fie convergentă. *Seria*

$$F(x) = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{x - a_n}$$

este absolut și uniform convergentă în orice regiune a planului care nu conține punctele a_n . În adevăr, să scriem termenul general sub forma

$$\frac{c_n}{x - a_n} = -\frac{c_n}{a_n - x_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{a_n - x_0}},$$

x_0 fiind un punct oarecare diferit de punctele a_n și fie a_k unul din punctele a_n a cărui distanță de x_0 este cea mai mică. Fie $|a_k - x_0| = R$; vom avea $|a_n - x_0| \geq R$ pentru $n \neq k$. Să considerăm cercul C descris din x_0 ca centru cu raza R și fie x un punct oarecare în interiorul cercului; de unde $|x - x_0| < R$. Fie r un număr pozitiv cuprins între $|x - x_0|$ și R ; vom avea

$$\left| \frac{c_n}{x - a_n} \right| < \frac{|c_n|}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}}.$$

De unde

$$\sum \left| \frac{c_n}{x - a_n} \right| < \frac{1}{R - r} \sum |c_n|.$$

Așadar seria propusă este absolut și uniform convergentă în interiorul cercului C ; prin urmare în toată întinderea planului, exceptând punctele a_n .

Din cele ce preced rezultă că în domeniul unui punct oarecare x_0 diferit de punctele a_n , avem

$$F(x) = P(x - x_0),$$

cercul de convergență al seriei $P(x - x_0)$ trecând prin punctul a^k care este cel mai apropiat de x_0 . Prin urmare seria

$$F(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x)$$

reprezintă o funcțiune analitică *monogenă* în tot planul pentru care punctele a_n sunt puncte singulare.

200. *Linii singulare. Spațieri lacunare.* Fie L o linie închisă sau nu; să presupunem că pe această linie se află o infinitate de puncte formând o grămadă numărabilă (a_n) , densă pe toată linia. Seria

$$F(x) = \sum \frac{c_n}{x - a_n},$$

considerată în paragraful precedent, reprezintă o funcțiune analitică în tot planul pentru care linia L este o linie de puncte singulare; vom zice că linia L este o *linie singulară* a funcțiunii. Dacă această linie este închisă, separând planul în două regiuni, $F(x)$ va defini două funcțiuni analitice în cele două regiuni separate de L ; nici una din aceste funcțiuni nu poate fi prelungită în afară din regiunea corespunzătoare. Linia L se numește *limită naturală* pentru fiecare din ele.

Regiunea interioară liniei L se zice *spațiu lacunar* pentru funcțiunea a cărei regiune de existență este *exterioară* acestei linii; și vice versa.

201. *Exemple de funcțiuni având linii singulare.* Fie α, β afixele a două puncte date; punctele reprezentate prin expresiunea

$$a_{m,n} = \frac{m\alpha + n\beta}{m + n},$$

în care m și n primesc toate valorile întregi pozitive, exceptând valorile simultane $m = n = 0$, sunt situate pe segmentul de dreaptă $\alpha\beta$ și formează o grămadă densă pe toată această dreaptă ¹⁾. Fie în același timp seria $\sum c_{m,n}$ absolut convergentă. Seria

$$\sum \frac{c_{m,n}}{x - a_{m,n}}$$

cu doi indici (m, n) care poate fi ordonată într-o serie cu un singur

¹⁾ 1°. Punctul $a_{m,n}$ este pe dreapta $\alpha\beta$ în virtutea ecuațiunii

$$\frac{a_{m,n} - \beta}{\alpha - a_{m,n}} = \frac{m}{n}.$$

2°. Grămada este densă. Orice punct $a_{m,n}$ este limită unui număr infinit de puncte ale dreptei. În adevăr, fie

$$x_0 = \frac{m_0\alpha + n_0\beta}{m_0 + n_0}, \quad x = \frac{m\alpha + n\beta}{m + n} \quad (x_0 \neq \alpha, \beta);$$

avem

$$x - x_0 = \frac{mn_0 - nm_0}{(m + n)(m_0 + n_0)} (\alpha - \beta).$$

Să punem

$$m = km_0 \pm 1, \quad n = kn_0;$$

indice, reprezintă, în virtutea celor văzute în paragraful precedent, o funcțiune analitică având dreapta $\alpha\beta$ ca linie singulară.

Fie, de exemplu, $c_{m,n} = e^{-m-n}$ și să considerăm seria

$$(1) \quad \sum_{m,n=0}^{+\infty} e^{-m-n} \left(\frac{1}{mx-n} + \frac{1}{mx+n} \right),$$

exceptând $m = n = 0$.

Această serie este absolut și uniform convergentă în ambele semiplane (x) separate de axa reală. În fiecare semiplan, seria reprezintă așa dar o funcțiune analitică monogenă, fără ca aceste funcțiuni să fie una prelungirea analitică a celeilalte. Axa reală este o *linie singulară* a acestor două funcțiuni.

Să facem schimbarea de variabilă

$$(2) \quad x = i \frac{y+1}{y-1},$$

prin care axa reală din planul (x) se transformă în cercul $|y| = 1$, din planul (y) . Corespondența între aceste două plane este astfel că punctelor x , situate în semiplanul inferior, corespund punctele y interioare cercului $|y| = 1$, iar punctelor x situate în semiplanul superior corespund punctele y exterioare cercului. Făcând substituțiunea, obținem seria

$$(3) \quad 2i(1-y^2) \sum \frac{me^{-m-n}}{m^2(y+1)^2 + n^2(y-1)^2}.$$

Această serie definește dar două funcțiuni analitice monogene, una în interiorul cercului $|y| = 1$, și cealaltă în afară din acest cerc, având cercul ca linie singulară. Fiecare din ele nu poate fi așa dar prelungirea analitică a celeilalte.

202. Se pune întrebarea dacă funcțiunile analitice definite astfel de una și aceeași serie de funcțiuni raționale, uniform conver-

avem

$$x - x_0 = \frac{+n_0(\alpha - \beta)}{[+1 + k(m_0 + n_0)](m_0 + n_0)}.$$

Dând lui k valori întregi pozitive din ce în ce mai mari, rezultă $|x - x_0| < \epsilon_k$, ϵ_k tinzând către zero când k tinde către infinit.

Dacă $x_0 = \alpha$, sau $= \beta$, avem respectiv

$$x - \alpha = \frac{n(\beta - \alpha)}{m + n},$$

$$x - \beta = \frac{m(\alpha - \beta)}{m + n}.$$

În primul caz facem să crească m , în cazul al doilea să crească n . Ajungem la aceeași concluziune.

q. e. d.

gente în diferite regiuni ale planului, au vreo legătură între ele, adică, dacă din proprietățile uneia se pot deduce proprietățile celeilalte.

Să reprezentăm prin $f(x)$ funcțiunea definită de seria (1) când x este deasupra axei reale și prin $f_1(x)$ funcțiunea definită de aceiaș serie, când x este dedesubtul acestei axe.

Avem egalitatea

$$(4) \quad f_1(x) = f(-x) = -f(x).$$

Deasemenea, reprezentând prin $\varphi(y)$ și $\varphi_1(y)$ funcțiunile definite de seria (3), corespunzătoare punctelor y interioare sau exterioare cercului $|y| = 1$, rezultă

$$(5) \quad \varphi_1(y) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = -\varphi(y).$$

Funcțiunile definite de seria (1), precum și cele definite de seria (3) nu sunt așa dar independente între ele ¹⁾. *Nu este însă totdeauna astfel.*

Weierstrass a arătat, în adevăr, că funcțiunile definite de o serie de funcțiuni raționale, uniform convergente în diferite regiuni ale planului, pot să nu aibă nici o relațiune între ele; căci se pot forma asemenea serii cari să coincidă în regiunile de convergență corespunzătoare cu funcțiuni analitice date după voie.

Pentru aceasta, să considerăm mai întâiu seria dată de *Jules Tannery*, cu ajutorul căreia se pot construi lesne serii având proprietățile menționate ²⁾.

203. *Seria Tannery.* Această serie este

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(x) &= \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1-x^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{1-x} + \sum_1^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n} - 1}. \end{aligned}$$

Reprezentând prin $\varphi_n(x)$ suma celor dintâiu n termeni ai seriei (1), avem

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^{2^n}};$$

¹⁾ Legătura dintre funcțiunile φ_1 și φ este evident o consecință a legăturii dintre funcțiunile f și f_1 .

²⁾ Seria auxiliară de care s'a servit Weierstrass la început are o formă mai complicată. (*Weierstrass, Zur Funktionenlehre*, p. 81).

prin urmare

$$\lim \varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |x| < 1, \\ 0 & \text{» } |x| > 1. \end{cases}$$

Seria $\varphi(x)$ este așa dar convergentă în interiorul cercului descris din origină ca centru cu o rază egală cu 1, precum și în toată întinderea planului exterioară acestui cerc. În ambele regiuni ea este uniform convergentă. În adevăr, fie $R_n(x)$ restul seriei corespunzător unui rang n ; avem

$$(2) \quad R_n(x) = 1 - \frac{1}{1 - x^{2^n}} = -\frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^n}},$$

sau

$$(3) \quad R_n(x) = \frac{1}{x^{2^n} - 1},$$

după cum $|x| < 1$. În cazul întâiu, fie r un număr pozitiv mai mic ca 1, oricât de aproape vom de 1 și fie $0 < \varrho < r$. Pentru $|x| = \varrho$, avem

$$(4) \quad \left| R_n(x) \right| < \frac{\varrho^{2^n}}{1 - \varrho^{2^n}} < \frac{r^{2^n}}{1 - r^{2^n}}.$$

În cazul al doilea, fie $r > 1$, oricât de aproape de 1 și $\varrho > r$; avem, pentru $|x| = \varrho$,

$$(5) \quad \left| R_n(x) \right| < \frac{1}{\varrho^{2^n} - 1} < \frac{1}{r^{2^n} - 1}.$$

Expresiunile (4) și (5) justifică propozițiunea, căci în ambele cazuri avem, pentru n destul de mare

$$\left| R_n(x) \right| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε .

Așa dar, seria $\varphi(x)$ se poate pune sub forma $P(x)$ sau $P\left(\frac{1}{x}\right)$, după cum $|x| < 1$; și, în virtutea celor ce preced, valorile acestor două serii sunt respectiv egale cu 1 și 0. Ceeace se poate verifica direct, dezvoltând termenii expresiunii

$$(6) \quad \varphi(x) = \frac{1}{1-x} + \sum_1^{\infty} \frac{x^{2^n-1}}{x^{2^n}-1}$$

în serii de puteri de x .

Pe cercul $|x| = 1$, $\varphi(x)$ n'are sens.

Fie acum $f_1(x)$, $f_2(x)$ două funcțiuni analitice uniforme în tot planul, având un număr limitat sau nelimitat de singularități izolate.

Expresiunea

$$(7) \quad F(x) = f_2(x) + \varphi(x) [f_1(x) - f_2(x)],$$

care, precum se va vedea (teorema lui Mittag-Leffler), se poate pune sub forma unei sume de fracțiuni raționale, coincide cu funcțiunea $f_1(x)$ în interiorul cercului $|x| = 1$ și cu funcțiunea $f_2(x)$ în tot planul exterior acestui cerc. Ea reprezintă deci în fiecare din aceste două regiuni câte o porțiune din funcțiunile analitice, $f_1(x)$, $f_2(x)$ date după voie.

Din expresiunea (7) rezultă că dacă x_0 este un punct al cercului $|x| = 1$, avem

$$\lim_{x=x_0} F(x) = \begin{cases} f_1(x_0), \\ f_2(x_0), \end{cases}$$

după cum x , apropiindu-se de x_0 , dealungul unei raze ce trece prin acest punct, vine din interiorul cercului sau din exteriorul lui. În punctul x_0 , $F(x)$ n'are sens.

Să observăm că funcțiunile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ fiind presupuse monogene, fiecare din ele se prelungește în afară din regiunile considerate; însă prelungirea lui $f_1(x)$ nu coincide cu $f_2(x)$ și viceversa.

204. Fie de exemplu $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$; vom avea, înlocuind în (7) $\varphi(x)$ prin dezvoltarea sa din membrul al doilea al egalității (1)

$$(8) \quad F(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x^4-1} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1} + \dots,$$

expresiune respectiv egală cu $\frac{x}{x-1}$ sau cu $\frac{1}{x-1}$ după cum $|x| < 1$.

Acest rezultat se verifică direct, observând că avem

$$(9) \quad \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1} = \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}-1} - \frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-1}, \text{ etc.}$$

Din faptul că expresiunea (8) coincide cu două funcțiuni analitice diferite, după cum x este în interiorul cercului $|x| = 1$ sau în afară din acest cerc, rezultă că prelungirea analitică a lui $F(x)$ nu se poate face dintr'una din aceste regiuni în cealaltă. Căci dacă $F(x)$ s'ar putea, de exemplu, prelungi din interiorul cercului în afară, prelungirea sa ar coincide cu aceea a lui $\frac{x}{x-1}$, pe când în afară din cerc avem $F(x) = \frac{1}{x-1}$.

205. Fie

$$x = \frac{a x' + b}{c x' + d}$$

o substituțiune lineară care transformă cercul $|x| = 1$ într'o linie dreaptă dată în planul (x') . Seria Tannery

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{a x' + b}{c x' + d}\right)$$

devine o serie de funcțiuni raționale de x' , absolut și uniform convergentă în fiecare din semiplanele separate de dreapta considerată. Valoarea acestei serii este egală cu 1 în semiplanul corespunzător interiorului cercului $|x| = 1$ și egală cu zero în celalt semiplan. Pe dreapta însăși seria n'are sens.

Să considerăm, de exemplu, substituțiunea

$$x = \frac{1 - x'}{1 + x'},$$

care transformă cercul $|x| = 1$ în axa imaginară (x') , astfel ca interiorul cercului să corespundă semiplanului în care partea reală a lui x' este pozitivă $\Re(x') > 0$. Obținem, suprimând accentul, seria

$$\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1+x}{2x} + \Sigma \frac{(1-x^2)^{2^{n-1}}}{(1-x^2)^{2^n} - (1+x)^{2^n}} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

după cum partea reală a lui x este pozitivă sau negativă.

Expresiunea

$$f_2(x) + \varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \left[f_1(x) - f_2(x) \right]$$

va coincide dar cu $f_1(x)$ în semiplanul situat la dreapta axei imaginare și cu $f_2(x)$ în semiplanul situat la stânga acestei axe.

206. Fie într'un mod general $C_1, C_2, \dots, C_n$, n cercuri exterioare între dânsese; ele descompun planul în $n+1$ regiuni. Se știe că se poate determina, o substituțiune liniară

$$y = \frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k},$$

care să transforme cercul C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) într'un cerc dat oarecare, astfel ca ariile interioare cercurilor să se corespundă.

Fie $|y| = 1$ cercul în care transformăm cercul C_k ; vom avea, $\varphi(x)$ fiind seria Tannery,

$$\varphi\left(\frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k}\right) = 1 \text{ sau } 0$$

după cum punctul x se găsește în interiorul cercului C_k , sau în afară din acest cerc.

Fie acum $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, $n+1$ funcțiuni analitice uniforme în toată întinderea planului; expresiunea

$$F(x) = f_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^n \varphi \left(\frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k} \right) [f_k(x) - f_{n+1}(x)]$$

coincide respectiv cu fiecare din funcțiunile considerate, după cum punctul x se găsește în interiorul cercurilor $C_1, C_2, \dots, C_n$, sau undeva în afară din toate aceste cercuri.

Astfel dar, propozițiunea lui Weierstrass este complet justificată.

207. Prin exemple de natura celor precedente se pune în evidență, după Weierstrass, distincțiunea dintre noțiunile de *expresiune analitică* și de *funcțiune analitică monogenă*.

O *expresiune analitică* constă din orice expresiune a cărei valoare, fiind dată valoarea variabilei, se poate calcula cu ajutorul operațiunilor aritmetice, în număr limitat sau nelimitat (exemplu serii și produse nelimitate), precum și din tot felul de operațiuni analitice cunoscute: treceri la limită, integrațiuni definite sau nedefinite, etc. ¹⁾ O *expresiune analitică*, poate reprezintă, precum am văzut mai sus, diferite funcțiuni analitice în diferite regiuni ale planului.

208. *Exemplu de funcțiune lacunară*. Fie α, β, γ afixele a trei puncte nu în linie dreaptă; să considerăm triunghiul având aceste puncte ca vârfuri. Punctele date de expresiunea

$$(1) \quad x_{m,n,p} = \frac{m\alpha + n\beta + p\gamma}{m + n + p},$$

în care m, n, p primesc toate valorile întregi pozitive, exceptând combinațiunea $m = n = p = 0$, formează o grămadă densă în acest triunghi ²⁾.

¹⁾ E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions.

²⁾ Putem scrie

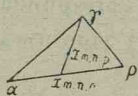


Fig. 9

$$x_{m,n,p} = \frac{(m+n) x_{m,n,0} + p\gamma}{(m+n) + p}.$$

Însă punctul $x_{m,n,0}$ este pe latura $\alpha\beta$; prin urmare punctul $x_{m,n,p}$ este pe dreapta care unește acest punct cu punctul γ , cuprins între ele. De unde rezultă densitatea grămezii acestor puncte (201, nota).

Seria

$$(2) \quad \sum_{m, n, p=0}^{\infty} \frac{e^{-m-n-p}}{x - x_{m, n, p}}, \text{ (exceptând } m = n = p = 0 \text{)}$$

este absolut și uniform convergentă în tot planul exterior triunghiului și nu are sens în interiorul triunghiului. Această serie definește dar o funcțiune analitică monogenă în tot planul exterior triunghiului, având interiorul triunghiului ca *spațiu lacunar*.

CAPITOLUL X.

STUDIUL CĂTORVA FUNCȚIUNI ANALITICE ELEMENTARE.

I.

I. — FUNCȚIUNEA EXPONENȚIALĂ e^x FUNCȚIUNILE $\sin x$, $\cos x$.

209. Să considerăm seria

$$(1) \quad P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

al cărei cerc de convergență are o rază infinită. Această serie definește o funcțiune întreagă transcendentă $f(x)$.

Derivând ambele membre ale egalității (1), obținem

$$P'(x) = P(x);$$

prin urmare derivatele de orice ordin coincid cu funcțiunea. Aplicând seria Taylor, avem

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0 + x - x_0) = P(x_0) \left[1 + \frac{x - x_0}{1} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots \right] \\ &= P(x_0) P(x - x_0), \end{aligned}$$

sau

$$(2) \quad f(x) = f(x_0) f(x - x_0),$$

x_0 fiind o valoare oarecare a lui x . Această egalitate exprimă că $f(x)$ nu se poate anula pentru nici o valoare finită x_0 , căci altfel $f(x)$ s'ar anula pentru orice valoare a lui x ; ceea ce este absurd

Punând $x = x_0 + x_1$, egalitatea (2) devine

$$(3) \quad f(x_0) f(x_1) = f(x_0 + x_1).$$

Această egalitate funcțională se poate obține din egalitatea (1), dacă înlocuim x succesiv prin x_0 și x_1 și facem produsul seriilor

corespunzătoare. Obținem în virtutea regulii multiplicării

$$P(x_0) P(x_1) = \sum_0^{\infty} \frac{(x_0 + x_1)^n}{n!} = P(x_0 + x_1).$$

Funcțiunea așa definită poartă numele de *funcțiune exponențială* și se reprezintă prin simbolul e^x , în care e este un număr real și pozitiv definit de seria

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

ale cărei proprietăți sunt studiate în Algebră.

Avem în rezumat

$$(4) \quad e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$(5) \quad \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

$$(6) \quad e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

210. *Definițiune.* Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă într'o regiune dată și x_1, x_2 două puncte oarecari în acea regiune. Dacă între valorile

$$u = f(x_1), \quad v = f(x_2), \quad w = f(x_1 + x_2),$$

există o ecuațiune de forma

$$F(u, v, w) = 0,$$

F fiind o funcțiune rațională întreagă de u, v, w cu coeficienți independenți de x_1 și x_2 , se zice că funcțiunea $f(x)$ admite o *teoremă de adițiune algebrică*.

Funcțiunea exponențială admite o teoremă de adițiune algebrică rațională, căci în virtutea proprietății (4), avem

$$uv = w.$$

Se recunoaște lesne că o funcțiune rațională oarecare $f(x)$, precum și o funcțiune rațională $f(e^{ax})$ de exponențiala e^{ax} , a fiind o constantă arbitrară, admite o teoremă de adițiune algebrică căci putem elimina x_1, x_2 între ecuațiunile

$$u = f(x_1), \quad v = f(x_2), \quad w = f(x_1 + x_2)$$

deasemenea e^{ax_1}, e^{ax_2} între ecuațiunile

$$u = f(e^{ax_1}), \quad v = f(e^{ax_2}), \quad w = f(e^{a(x_1 + x_2)}),$$

și obținem, în ambele cazuri, o ecuațiune algebrică $F(u, v, w) = 0$ cu coeficienți constanți.

211. Este interesant de notat că între o funcțiune rațională $u = f(x)$ și derivata sa $\frac{du}{dx} = f'(x)$ există o ecuațiune algebrică

$$F\left(u \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

cu coeficienți constanți, care se obține eliminând x între ecuațiunile $u = f(x)$ și $\frac{du}{dx} = f'(x)$.

La un rezultat analog ajungem dacă $u = f(e^{ax})$ este o funcțiune rațională de e^{ax} .

212. Făcând în (4) $x = 0$ și în (6) $x_2 = -x_1 = x$ obținem

$$e^0 = 1, \quad e^x \cdot e^{-x} = 1;$$

de unde

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

În virtutea ecuațiunii (6) avem

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \dots e^{x_n} = e^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

și făcând $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$,

$$(7) \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

Această egalitate subsistă și pentru n întreg negativ, căci prin definițiune, avem

$$(e^x)^{-n} = \frac{1}{(e^x)^n};$$

prin urmare

$$(e^x)^{-n} = \frac{1}{(e^x)^n} = \frac{1}{e^{nx}} = e^{-nx}.$$

213. Din seria

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

rezultă că dacă x este real și crește dela zero la infinit, e^x crește neconținut dela 1 la infinit. Pentru x real și negativ, considerând ecuațiunea $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, conchidem că dacă x variază dela 0 la $-\infty$, e^x descrește neconținut dela 1 la 0. De unde rezultă că pentru x real, avem

$$|e^x| = e^x,$$

și dacă a este un număr pozitiv, ecuațiunea

$$e^x - a = 0$$

admite o soluțiune reală, unică.

214. *Funcțiunile* $\sin x$, $\cos x$. Să considerăm seriile

$$(8) \quad \begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots, \end{aligned}$$

convergente în tot planul, cari definesc două funcțiuni întregi transcendente. Aceste funcțiuni se reprezintă respectiv prin simbolurile $\sin x$, $\cos x$. Se recunoaște că avem

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x, \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x, & \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x, \end{aligned}$$

$$(10) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

i fiind unitatea imaginară. Ultimele două egalități poartă numele de relațiunile lui *Euler*. Din ele deducem expresiunile

$$(11) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

care ridicate la pătrat și adunate dau relațiunea

$$(12) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

215. Punând $x = \xi + i\eta$, avem

$$(13) \quad e^x = e^\xi \cdot e^{i\eta} = e^\xi (\cos \eta + i \sin \eta).$$

Presupunând ξ și η variabile reale, e^ξ și η sunt respectiv *modulul* și *argumentul* lui e^x . Făcând $\xi = 0$ și dând lui η respectiv valorile $\pm 2\pi$, $\pm \pi$, $\pm \frac{\pi}{2}$, obținem valorile

$$(14) \quad e^{\pm 2i\pi} = 1, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{\pm \frac{i\pi}{2}} = \pm i.$$

De unde rezultă egalitățile

$$(15) \quad e^{x \pm 2i\pi} = e^x, \quad e^{x \pm i\pi} = -e^x, \quad e^{x \pm \frac{i\pi}{2}} = \pm ie^x.$$

216. Funcțiunile $\sin x$ și $\cos x$, fiind funcțiuni raționale de e^{ix} , admit (§ 210) o teoremă de adăuțiune algebrică.

Din ecuațiunile (10) deducem

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y), \\ e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i (\sin x \cos y + \sin y \cos x); \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i \sin(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &+ i(\sin x \cos y + \sin y \cos x).\end{aligned}$$

Schimbând i în $-i$, avem

$$\begin{aligned}\cos(x+y) - i \sin(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &- i(\sin x \cos y + \sin y \cos x).\end{aligned}$$

Din aceste două egalități deducem, prin adunare și scădere,

$$(16) \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x. \end{cases}$$

Aceste formule de adițiune arată că $\cos(x+y)$ este o funcțiune rațională de $\cos x$, $\cos y$ și de derivatele lor; deasemenea $\sin(x+y)$ este o funcțiune rațională de $\sin x$, $\sin y$ și de derivatele lor. Pentru a obține ecuațiunea algebrică între $\cos(x+y)$, $\cos x$, $\cos y$ putem elimina $\sin x$, $\sin y$ între prima ecuațiune (16) și identitățile $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

Intr'un mod analog obținem o ecuațiune algebrică între $\sin(x+y)$, $\sin x$, $\sin y$.

217. *Periodicitatea funcțiunii e^x .* O funcțiune uniformă $f(x)$ se zice *periodică*, dacă există o constantă a , astfel că, oricare ar fi x , avem

$$f(x+a) = f(x);$$

a se numește *perioada* funcțiunii. Este evident că egalitatea precedentă trage după sine pe cea următoare

$$f(x+na) = f(x),$$

n fiind un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ; prin urmare a fiind o perioadă, orice multiplu na va fi o perioadă. Dacă a este o perioadă fără a fi multiplu al unei alte perioade, a se zice *perioadă primitivă*. Dacă funcțiunea admite o singură perioadă primitivă, se zice că este *simplu periodică*.

Funcțiunea e^x este periodică, având perioada $2i\pi$; căci avem

$$e^{x+2i\pi} = e^x.$$

Vom vedeà mai departe că e^x este simplu periodică și că $2i\pi$ este o perioadă primitivă.

218. Expresiunile (11) ale funcțiunilor $\sin x$, $\cos x$ arată că aceste funcțiuni sunt periodice, având perioada 2π .

Aceleași expresiuni dau, ținând seamă de egalitățile (15),

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

219. *Reprezentarea geometrică a periodicității funcțiunii e^x .*

Să punem

$$y = e^x, \quad x = \xi + i\eta.$$

În virtutea periodicității, funcțiunea y primește aceeași valoare în toate punctele date de expresiunea

$$x_0 + 2ni\pi,$$

n fiind un număr întreg arbitrar. Vom zice despre aceste puncte că sunt *congruente* cu punctul x_0 .

Să ducem pe axa $O\eta$, dela origină, de o parte și de alta, distanțe egale cu 2π și prin punctele de diviziune să ducem paralele cu axa $O\xi$. Împărțim astfel planul (x) într'un număr nelimitat de fâșii paralele. Punctele congruente unui punct x_0 , interior unei fâșii, se găsesc în fâșii diferite, câte unul în fiecare, pe când punctele situate pe liniile paralele, cari limitează fiecare fâșie sunt două câte două

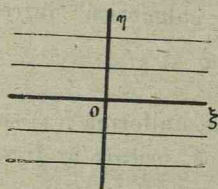


Fig. 10

congruente. Convenim, pentru uniformitatea enunțurilor, a privi una din aceste paralele ca aparținând unei fâșii, iar cealaltă fâșiei vecine.

Este de ajuns a studia variațiunea funcțiunii $y = e^x$ într'o fâșie; fie fâșia întâia deasupra axei $O\xi$.

Lăsând η constant și făcând ξ să varieze dela $-\infty$ la $+\infty$, x descrie o paralelă la $O\xi$ și

$$y = e^{\xi} \cdot e^{i\eta}$$

descrie o rază vectoare $0, \infty$ în direcțiunea al cărei argument este η .

Lăsând ξ constant și făcând să varieze η dela 0 la 2π , ceea ce revine a face ca x să descrie o porțiune de paralelă cu $O\eta$, limitată de laturile fâșiei, y descrie în sensul pozitiv, cercul $|y| = e^{\xi}$.

De aci rezultă nu numai că unui punct x corespunde un singur punct y ci și viceversa, unui punct y corespunde un singur punct x , situat în fâșie. Trebuie să exceptăm punctul $y = 0$, căruia nu corespunde nici o valoare finită a lui x . Exceptând acest punct, fâșia

considerată (x) și planul (y) se corespund așa dar *punct cu punct*. Reprezintarea acestei fâșii pe planul y este o reprezentare conformă, căci derivata $\frac{dy}{dx} = e^x$ nu se anulează în nici un punct al fâșiei. Oricare altă fâșie se transformă pe planul y în acelaș mod ca cea dintâiu.

Funcțiunea e^x neprimind aceeaș valoare într'o fâșie decât o singură dată, rezultă că ea nu admite nici o perioadă distinctă de $2i\pi$ sau care să fie un submultiplu al lui $2i\pi$. Așadar e^x este o funcțiune simplu periodică și $2i\pi$ este o perioadă primitivă.

220. *Definițiune.* Numim, după Felix Klein, domeniu fundamental al unei funcțiuni analitice uniforme, o regiune conexă, limitată sau nelimitată, în care funcțiunea primește toate valorile sale, o singură dată fiecare. Fâșia considerată, precum și oricare altă fâșie congruentă, constituie dar un domeniu fundamental al funcțiunii e^x . Forma acestui domeniu poate fi diferită. Astfel, fâșia cuprinsă între două drepte paralele duse prin punctele x_0 , $x_0 + 2i\pi$, x_0 fiind un punct oarecare, constituie un domeniu fundamental.

Corolar. Funcțiunea

$$e^{\frac{2i\pi x}{\omega}},$$

ω fiind o constantă dată, este simplu periodică având perioada primitivă ω . O fâșie limitată de două drepte paralele duse prin punctele x_0 , $x_0 + \omega$ într'o direcțiune diferită de ω , formează un domeniu fundamental al funcțiunii.

221. Să vedem cum se comportă funcțiunea e^x în domeniul punctului ∞ , care este un punct singular esențial. Pentru aceasta să facem substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$ și să studiem funcțiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ în domeniul punctului $x' = 0$.

Fie a o cantitate oarecare diferită de zero și $a + i\beta$ unul din punctele planului (x') pentru care avem

$$a = e^{a+i\beta}.$$

Să considerăm ecuațiunea

$$e^{\frac{1}{x'}} = a,$$

sau, punând $x' = \xi' + i\eta'$,

$$e^{\frac{1}{\xi' + i\eta'}} = e^{a+i\beta};$$



de unde rezultă ecuațiunea

$$\frac{1}{\xi' + i\eta'} = a + i(\beta + 2n\pi),$$

care se descompune în

$$\xi' = \frac{a}{a^2 + (\beta + 2n\pi)^2}, \eta' = -\frac{\beta + 2n\pi}{a^2 + (\beta + 2n\pi)^2}.$$

Dând lui n valori întregi din ce în ce mai mari, obținem puncte în număr infinit de mare a căror limită este punctul $x' = 0$ și în care avem $e^{\frac{1}{x'}} = a$, adică, în domeniul punctului $x' = 0$, funcțiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ primește de o înfinitate de ori aceeași valoare $a \neq 0$.

222. Propozițiunea precedentă se mai poate stabili prin reprezentarea geometrică următoare: Punând

$$x = \xi + i\eta, \quad x' = \xi' + i\eta'$$

substituțiunea

$$(17) \quad x' = \frac{1}{x}$$

face să corespundă unei paralele $\eta = b$ la axa reală din planul (x) , un cerc în planul (x') tangent în origina O' la axa $\eta' = 0$ (v. fig. 0); căci ecuațiunea (17) dă

$$(18) \quad \xi' = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta' = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2};$$

de unde

$$(19) \quad b(\xi'^2 + \eta'^2) + \eta' = 0.$$

Când x descrie dreapta $\eta = b$ dela $\xi = -\infty$ la $\xi = +\infty$,

x' descrie cercul (19) întreg, precum arată formulele (18). Dând lui b respectiv valorile $2k\pi$, $2(k+1)\pi$, k fiind un număr întreg, fâșia din planul (x) astfel determinată se va transforma în mod *biunivoc* în spațiul cuprins între cele două cercuri corespunzătoare descrise de variabila x' . Prin urmare planul variabilei

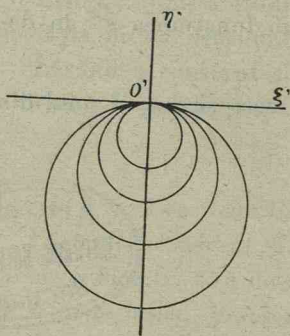


Fig. 11

$$y = e^x = e^{\frac{1}{x'}}$$

și spațiul cuprins între cele două cercuri se transformă unul într'altul, punct cu punct, dacă exceptăm punctul $y = 0$. Însă dând lui k valori întregi din ce în ce mai

mari, obținem o infinitate de cercuri (19) ale căror raze tind către zero. De unde conchidem că în domeniul punctului $x' = 0$, funcțiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ primește o infinitate de ori o valoare arbitrară diferită de zero.

Figura alăturată corespunde lui $k > 0$. Dacă $k < 0$, cercurile sunt situate deasupra axei $0\xi'$.

223. *Observare.* Fie $u = P(x)$ o serie întreagă convergentă într'un cerc $|x| = R$; funcțiunea exponențială

$$y = e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

se va exprima printr'o serie întreagă $P(x)$, convergentă în cercul (R), în care ea nu se anulează deoarece e^u nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui u .

Dacă u este o funcțiune întreagă, $u = G(x)$, funcțiunea

$$e^{G(x)}$$

va fi o funcțiune întreagă $G_1(x)$, neavând nici un zero în toată întinderea planului. Fie a o constantă arbitrară; funcțiunea

$$G_1(x) + a$$

este o funcțiune întreagă, care nu poate deveni egală ca a pentru nici o valoare finită a lui x .

D-l E. Picard a demonstrat că nu există două cantități a, b , $a \neq b$, pe cari o funcțiune întreagă să nu le poată primi fără a se reduce la o constantă (Picard, Analyse, tome II).

224. Fie $G(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ o funcțiune întreagă. Să punem

$$x = \xi + i\eta, \quad a_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

ξ, η, α, β fiind cantități reale, ($n = 0, 1, \dots$); vom avea

$$G(x) = P(\xi, \eta) + iP_1(\xi, \eta),$$

P și P_1 fiind serii reale de forma

$$\sum \gamma_{m,n} \xi^m \eta^n,$$

absolut convergente pentru orice sistem de valori finite (ξ, η) . Aceste serii definesc două funcțiuni $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ reale, finite și univoce în tot planul variabilei x .

Dacă una din funcțiunile φ sau ψ păstrează un semn invariabil în tot planul, $G(x)$ se reduce la o constantă. Să presupunem, de exemplu,

$$\varphi(\xi, \eta) > 0,$$

în tot planul. Considerăm expresiunea

$$e^{-G(x)} = e^{-\varphi(\xi, \eta)} e^{-i\psi(\xi, \eta)},$$

care reprezintă o funcțiune întreagă al cărei modul $e^{-\varphi} < 1$ în tot planul; de unde rezultă că această funcțiune se reduce la o constantă și prin urmare $G(x)$ este o constantă.

Dacă $\psi(\xi, \eta)$ este de un semn invariabil, considerăm expresiunea

$$e^{\pm iG(x)},$$

după cum $\psi \geq 0$.

La aceleași concluziuni ajungem dacă una din funcțiunile φ sau ψ este identic nulă: ceeace înseamnă că o funcțiune întreagă nu poate fi în tot planul numai reală sau numai pur imaginară.

225. *Reprezentarea geometrică a periodicității funcțiunilor $\sin x$, $\cos x$.*

Să ducem pe axa reală în amândouă sensurile, începând dela origină, lungimi egale cu 2π ; prin punctele de diviziune să ducem paralele la axa $O\eta$; împărțim astfel planul într'o infinitate de fâșii. În toate punctele congruente

$$x_0 + 2n\pi,$$

n fiind un număr întreg arbitrar, funcțiunile $\sin x$, $\cos x$ au respectiv aceeași valoare ca în punctul x_0 . Este dar de ajuns a studia variațiunea acestor funcțiuni într'o singură fâșie.

Să considerăm, de ex., funcțiunea

$$y = \sin x$$

și să vedem de câte ori această funcțiune primește, într'o fâșie, o valoare arbitrară a .

Pentru aceasta, punem

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = a;$$

de unde ecuațiunea

$$(20) \quad e^{2ix} - 2aie^{ix} - 1 = 0,$$

care dă pentru e^{ix} două valori finite și diferite de zero. Înă fâșiile considerate figurează și periodicitatea funcțiunii e^{ix} , care, după cum am văzut, primește în fiecare din ele, o singură dată o valoare diferită de zero. De unde rezultă că într'o fâșie, funcțiunea $\sin x$

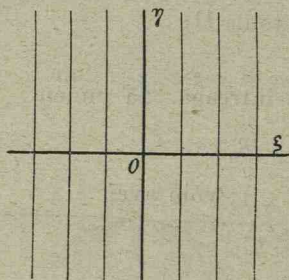


Fig. 12

trece de două ori prin orice valoare finită ¹⁾ voim. Fie x' și x'' cele două valori ale lui x , cărora corespunde aceeași valoare a pentru $\sin x$; vom avea

$$e^{ix'} \cdot e^{ix''} = -1,$$

sau

$$e^{i(x'+x'')} = -1;$$

de unde

$$(21) \quad x' + x'' = (2k + 1)\pi,$$

k fiind un număr întreg. Se vede că punctele x' , x'' sunt simetrice în raport cu punctul $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, căci ecuațiunea (21) este satisfăcută pentru valorile

$$x' = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + x_0, \quad x'' = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - x_0,$$

x_0 fiind un punct oarecare. În fâșia $(0, 2\pi)$ de exemplu, punctele $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ sunt centre de simetrie ale funcțiunii $y = \sin x$. De unde

rezultă că, dacă prin punctele $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ducem paralele la axa

$O\eta$, fâșiile $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ vor da aceleași valori; deasemenea vor da

aceleași valori fâșiile $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Ultima fiind congruentă

cu fâșia $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ conchidem că în fâșia determinată de paralelele

$\xi = \pm \frac{\pi}{2}$, inclusiv aceste paralele, funcțiunea $y = \sin x$, primește

orice valoare finită voim: anume, o singură dată fiecare din acelea cari

corespund punctelor interioare fâșiei și de două ori fiecare valoare

corespunzătoare punctelor situate pe cele două paralele. Căci punctele $x = \frac{\pi}{2} \pm i\beta$ dau aceeași valoare reală

$$y = \cos i\beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} > 1;$$

deasemenea punctele $x = -\frac{\pi}{2} \pm i\beta$ dau aceeași valoare reală

$$y = -\cos i\beta < -1.$$

Acestor semidrepte corespund respectiv axa reală η dela 1 la $+\infty$

¹⁾ a nu poate fi infinit, căci altfel ecuațiunea (20) ar da lui e^{ix} o valoare nulă și alta infinită, ambele inadmisibile pentru valori finite ale lui x .

și dela -1 la $-\infty$. Fâșia considerată, din care suprimăm, de exemplu, semidreptele $\pm \frac{\pi}{2} - i\beta$, β variind dela 0 la $+\infty$, constituie un domeniu fundamental al funcțiunii $y = \sin x$. Acest domeniu, din care excludem punctele $x = \pm \frac{\pi}{2}$ și planul $\eta = \sin x$ se corespund într'un mod conform, căci, în toată întinderea domeniului, derivata funcțiunii $\sin x$ este finită și diferită de zero.

226. Un studiu analog, aplicat funcțiunii $\cos x$, ne conduce la concluziunile următoare:

În fâșia $(0, 2\pi)$ $\cos x$ primește de două ori o valoare arbitrară oarecare; valorile x' , x'' , nu congruente, cărora corespunde aceeași valoare a funcțiunii, satisfac relațiunea

$$x' + x'' = 2k\pi.$$

În fine, în fâșia mărginită de drepte $\xi = 0$, $\xi = \pi$, inclusiv aceste drepte, $\cos x$ poate primi orice valoare finită voim: o singură dată fiecare din acelea cari corespund punctelor interioare, de două ori fiecare valoare corespunzătoare punctelor situate pe cele două drepte extreme.

227. Din cele ce proced se conchide că funcțiunile $\sin x$, $\cos x$ sunt simplu periodice și că perioada lor primitivă este 2π . Căci de o parte, în virtutea relațiunii $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, rezultă că $\sin x$ și $\cos x$ au aceleași perioade; iar, de altă parte, două puncte situate în fâșia $(0, 2\pi)$, în care $\sin x$ are aceeași valoare, dau lui $\cos x$ valori egale și de semne contrarii ¹⁾.

228. Zerurile funcțiunilor $\sin x$, $\cos x$. Ecuațiunile

$$e^{ix} - e^{-ix} = 0, \quad e^{ix} + e^{-ix} = 0,$$

sau

$$e^{2ix} - 1 = 0, \quad e^{2ix} + 1 = 0,$$

dau respectiv drept zeruri pentru $\sin x$, $\cos x$ punctele

$$x = k\pi, \quad x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

k fiind un întreg oarecare.

229. Să menționăm funcțiunile

$$\sinh x, \cosh x,$$

¹⁾ Altfel: O cantitate a perioadă a funcțiunilor $\sin x$, $\cos x$, este perioadă a funcțiunii e^{ia} ; de unde rezultă $e^{ia} = 1$, deci $a = 2k\pi$, a cărei valoare absolută minimă corespunde lui $k = 1$.

definite de relațiunile

$$(22) \quad \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cari se citesc siniperbolic x , cosiperbolic x . Cea dintâiu este o funcțiune impară, cea de a doua o funcțiune pară; ele satisfac identitatea

$$(23) \quad \cos^2 hx - \sin^2 hx = 1.$$

Derivând formulele (22), obținem

$$(24) \quad \frac{d}{dx} \sin hx = \cos hx, \quad \frac{d}{dx} \cos hx = -\sin hx.$$

Funcțiunile $\sin hx$, $\cos hx$ sunt reale pentru valori reale ale lui x ; ele cresc neconținut, cea dintâiu dela 0 la ∞ , cea de a doua dela 1 la ∞ , când x crește dela 0 la ∞ .

Formulele lui Euler, în cari punem $x = iy$, dau

$$(25) \quad \sin iy = i \sinh y, \quad \cos iy = \cosh y.$$

De unde rezultă formulele

$$(26) \quad \begin{cases} \sin(\xi + i\eta) = \sin \xi \cosh \eta + i \cos \xi \sinh \eta, \\ \cos(\xi + i\eta) = \cos \xi \cosh \eta - i \sin \xi \sinh \eta. \end{cases}$$

Aceste formule dau mijlocul de a calcula funcțiunile $\sin x$, $\cos x$ pentru valori complexe $x = \xi + i\eta$.

Făcând η să tindă către $\pm \infty$ obținem

$$(27) \quad \begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} |\sin(\xi + i\eta)| = \infty, \\ \lim_{\eta \rightarrow -\infty} |\cos(\xi + i\eta)| = \infty. \end{cases}$$

230. Reprezentarea conformă a funcțiunii $y = \sin x$ pe domeniul fundamental limitat de dreptele $\xi = \mp \frac{\pi}{2}$.

Pentru a ne da seamă de corespondența între punctele domeniului fundamental limitat de dreptele $\xi = \mp \frac{\pi}{2}$ din planul (x) și

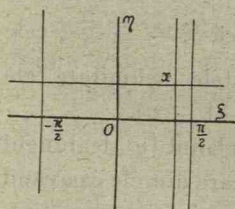


Fig. 13

punctele planului (y), să examinăm ce fel de linii (y) corespund liniilor (x), paralele respectiv cu axele 0ξ , 0η (fig. 12).

Să punem

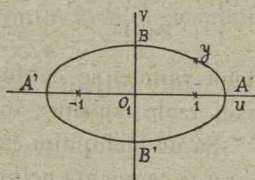


Fig. 14

$$x = \xi + i\eta, \quad y = u + iv, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2};$$

obținem

$$u + iv = \sin \xi \cos h\eta + i \cos \xi \sin h\eta.$$

De unde

$$(1) \quad \begin{cases} u = \sin \xi \cos h\eta, \\ v = \cos \xi \sin h\eta. \end{cases}$$

Privind η constant și eliminând ξ , obținem elipsa

$$(2) \quad \frac{u^2}{\cos^2 h\eta} + \frac{v^2}{\sin^2 h\eta} = 1,$$

ale cărei focare sunt punctele ($u = \pm 1, v = 0$).

Dacă facem să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, punctul y descrie, în virtutea ecuațiunilor (1), neconținut în acelaș sens, semielipsa $A'BA$ sau simetrica ei $A'B'A$ (fig. 13), în raport cu axa reală, după cum $\eta \geq 0$. Dacă $\eta = 0$, y descrie neconținut în acelaș sens segmentul $(-1 + 1)$ cuprins între cele două focare.

Dând lui η toate valorile posibile dela $-\infty$ la $+\infty$, obținem o succesiune de semielipse, situate în semiplanul negativ și în semiplanul pozitiv corespunzătoare valorilor $\eta < 0$, cari acopăr tot planul (y).

Să presupunem acum ξ constant și să eliminăm η între ecuațiunile (1); obținem iperbola

$$(3) \quad \frac{u^2}{\sin^2 \xi} - \frac{v^2}{\cos^2 \xi} = 1,$$

omofocală cu familia de elipse (2). Dacă η crește dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y descrie, neconținut în acelaș sens, ramura infinită M_1AM , sau ramura simetrică (fig. 14) $M'_1A'M'$, în raport cu axa imaginară, după cum $\xi < 0$. Dacă $\xi = 0$, cele două ramuri se confundă cu axa imaginară și y descrie această axă neconținut în acelaș sens dela $-\infty$ la $+\infty$. Dacă $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$, cele

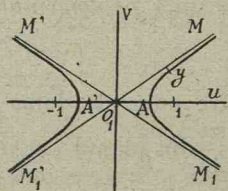


Fig. 15

două ramuri se confundă respectiv cu segmentele nelimitate ale axei reale cuprinse între punctele $(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$.

Să ne închipuim că facem câte o tăietură în planul (y) dealungul acestor segmente nelimitate și să considerăm fiecare din ele ca având două țărmuri: țărmul superior (pozitiv) și țărmul inferior (negativ), după cum țărmul este de partea ordonatelor pozitive sau negative.

Dreptele $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ corespund punct cu punct respectiv tăieturilor

$(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ și anume, țărmurilor superioare sau inferioare după cum $\eta < 0$.

Derivata $\frac{dy}{dx}$ fiind diferită de zero în domeniul fundamental considerat, din care excludem punctele $x = \pm \frac{\pi}{2}$, rezultă că acest domeniu și planul (y) limitat de cele două tăieturi, se corespund într'un mod conform.

231. Reprezintarea funcțiunii $y = \sin x$ se aplică, vorbă cu vorbă, funcțiunii $y = \cos x$, dacă înlocuim domeniul fundamental considerat prin domeniul mărginit de dreptele $\xi = 0$, $\xi = \pi$, în virtutea relațiunii

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

232. *Funcțiunea* $\operatorname{tg} x$. Această funcțiune este definită de relațiunea

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

care exprimă că $\operatorname{tg} x$ este o funcțiune analitică uniformă, simplă periodică, având perioada π . Zerurile funcțiunilor $\sin x$, $\cos x$ sunt respectiv zeruri și poluri de ordinul întâiu ale funcțiunii $\operatorname{tg} x$. Această funcțiune nu admite la distanță finită alte singularități decât polurile menționate.

Punctul $x = \infty$ este un punct singular esențial în domeniul căruia $\operatorname{tg} x$ are o infinitate de zeruri și de poluri. Acest fapt se pune în evidență dacă facem substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$ și observăm că zerurile funcțiunilor $\sin \frac{1}{x'}$ și $\cos \frac{1}{x'}$ sunt date de expresiunile

$$x' = \frac{1}{n\pi}, \quad x' = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}.$$

Aceste puncte formează o grămadă infinită având ca punct limită punctul $x' = 0$.

Aplicând regula derivării unui cât de două funcțiuni analitice, obținem

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Periodicitatea funcțiunii $\operatorname{tg} x$ se poate figura prin fâșii limitate de axa imaginară și de paralele la această axă, duse prin punctele $x = n\pi$, n fiind un număr întreg care primește toate valorile dela

$-\infty$ la $+\infty$. În fâșia $(0, \pi)$, precum și în oricare alta congruentă cu aceasta, funcțiunea $\operatorname{tg} x$ poate primi o singură dată orice valoare voim, diferită de $\pm i$. În adevăr, punând

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{2ix} - 1}{i(e^{2ix} + 1)} = a,$$

avem

$$e^{2ix} = \frac{1 + ia}{1 - ia}.$$

Însă fâșia considerată este un domeniu fundamental al funcțiunii e^{2ix} ; prin urmare, în această fâșie, egalitatea precedentă este posibilă într'un singur punct x , oricare ar fi valoarea lui a diferită de $\pm i$, pentru care membrul al doilea devine respectiv nul sau infinit.

Valorile $\pm i$ sunt valori limite către cari tinde $\operatorname{tg} x$ când x tinde către infinit fără a ieși din fâșie. Căci avem egalitatea

$$\operatorname{tg} (\xi + i\eta) = i \frac{1 - e^{-2\eta} e^{2i\xi}}{1 + e^{-2\eta} e^{2i\xi}};$$

de unde rezultă

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} (\xi + i\eta) = \pm i.$$

233. *Reprezentarea conformă a funcțiunii $y = \operatorname{tg} x$ pe domeniul fundamental limitat de dreptele $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$* ¹⁾.

Să examinăm mai întâiu reprezentările particulare următoare:

1^o. $x = \xi$. Făcând să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, y crește neconținut dela $-\infty$ la $+\infty$.

2^o. $x = i\eta$; avem

$$y = i \frac{\sin h\eta}{\cosh \eta}.$$

Făcând η să crească dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y se mișcă pe axa imaginară, neconținut în acelaș sens, dela punctul $-i$ la punctul $+i$.

3^o. $x = \frac{\pi}{2} + i\eta$; avem

$$y = i \frac{\cos h\eta}{\sinh \eta}$$

¹⁾ În virtutea periodicității funcțiunii $\operatorname{tg} x$, fâșia limitată de dreptele $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ este un domeniu fundamental ca și fâșia limitată de dreptele $\xi = 0$, $\xi = \pi$.

și tabloul de variațiune

$$\begin{array}{c|cccc} \eta & -\infty & - & 0 & + & + & + & \infty \\ \frac{y}{i} & -1 & \text{descr} & +\infty & \text{descr} & + & 1, \end{array}$$

adică, pe când x descrie semidreptele

$$\left[\xi = \frac{\pi}{2}, \eta \begin{pmatrix} -\infty & \dots & 0 \\ +\infty & \dots & 0 \end{pmatrix} \right],$$

y se mișcă pe axa imaginară respectiv dela $-i$ la $-i\infty$, sau dela i la $+i\infty$.

Să examinăm acum cazul când x descrie o paralelă oarecare la una din axe de coordonate $0\xi, 0\eta$, $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$.

Egalitatea

$$y = u + iv = i \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}}$$

dă

$$u = \frac{2\lambda \sin 2\xi}{1 + 2\lambda \cos 2\xi + \lambda^2}, \quad v = \frac{1 - \lambda^2}{1 + 2\lambda \cos 2\xi + \lambda^2} \quad (\lambda = e^{-2\eta}).$$

1°. Presupunând η constant și făcând să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, punctul y descrie neconținut în același sens un cerc complet, a cărui ecuațiune este

$$(1 - \lambda^2)(u^2 + v^2 + 1) - 2(1 + \lambda^2)v^2 = 0.$$

Acest cerc este situat deasupra sau dedesubtul axei reale după cum $\lambda \geq 1$, adică după cum $\eta \geq 0$. La valori η egale și de semne contrarii, corespund două cercuri simetrice în raport cu axa reală, având raza

$$r = \frac{2\lambda}{|1 - \lambda^2|}.$$

Aceste cercuri conțin în interiorul lor respectiv punctele $+i$, $-i$ și sunt descrise,

ξ crescând dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, cel de deasupra în sensul pozitiv, cel dedesubt în sensul negativ (v. fig.).

2°. Să presupunem ξ constant și să facem să crească η dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y va descrie un arc de cerc¹⁾ dela punctul $-i$

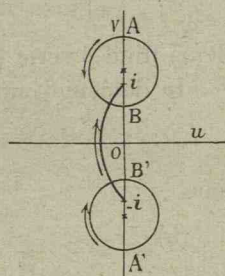


Fig. 16

¹⁾ Ecuațiunea acestui cerc este

$$u^2 + v^2 + 2u \cot 2\xi = 1.$$

la punctul $+i$, situat la stânga sau la dreapta axei imaginare, după cum avem $-\frac{\pi}{2} < \xi < 0$ sau $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. La valori ξ egale și de semne contrarii corespund arce simetrice în raport cu axa imaginară, având drept rază

$$r = \frac{1}{|\sin 2\xi|}.$$

234. Funcțiunile $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, sunt definite de expresiunile

$$(1) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Să considerăm în special funcțiunea $\cot x$, care are aceeași perioadă ca $\operatorname{tg} x$ și a cărei reprezentare conformă rezultă imediat din relațiunea

$$(2) \quad \cot x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Polurile funcțiunii $\cot x$ sunt zerurile lui $\sin x$. În domeniul $x = 0$, avem

$$(3) \quad \cot x = \frac{1}{x} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \dots,$$

adică o dezvoltare de forma

$$(4) \quad \cot x = \frac{1}{x} + P(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă, convergentă în cercul $|x| = \pi$.

În domeniul unui pol $x = n\pi$, avem, punând $x = n\pi + x'$,

$$\cot x = \cot x' = \frac{1}{x'} + P(x')$$

sau

$$(5) \quad \cot x = \frac{1}{x - n\pi} + P(x - n\pi).$$

Fie a o constantă oarecare, funcțiunea $\cot(x - a)$ admite punctul a ca pol de ordinul întâiu, în domeniul căruia avem dezvoltarea

$$(6) \quad \cot(x - a) = \frac{1}{x - a} + P(x - a).$$

Punând $x = \xi + i\eta$, avem

$$(7) \quad \lim_{\eta = \pm\infty} \cot(\xi + i\eta) = \frac{1}{\lim_{\eta = \pm\infty} \operatorname{tg}(\xi + i\eta)} = \mp i.$$

235. *Aplicațiune.* Să considerăm o funcțiune rațională de $\sin x$, $\cos x$

$$(1) \quad f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(\sin x, \cos x)}{F(\sin x, \cos x)},$$

F și F_1 fiind polinoame de $\sin x$, $\cos x$. Dacă gradul numărătorului în raport cu $(\sin x, \cos x)$ întrece gradul numitorului, putem aduce funcțiunea dată la forma

$$(2) \quad f(\sin x, \cos x) = P(\sin x, \cos x) + \frac{\varphi(\sin x, \cos x)}{\psi(\sin x, \cos x)},$$

în care P , φ și ψ sunt polinoame de $(\sin x, \cos x)$, gradul numărătorului φ fiind cel mult egal cu al numitorului ψ . În adevăr, ordonând polinoamele F_1 și F după puterile lui $\cos x$, de exemplu, și înlocuind $\cos^2 x$ prin $1 - \sin^2 x$, vom putea scrie

$$(3) \quad f(\sin x, \cos x) = \frac{\varphi_1(\sin x) + \cos x \varphi_2(\sin x)}{\psi_1(\sin x) + \cos x \psi_2(\sin x)},$$

φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 fiind polinoame de $\sin x$.

Multiplicând ambii termeni ai fracțiunii cu

$$\psi_1(\sin x) - \cos x \psi_2(\sin x)$$

și înlocuind $\cos^2 x$ prin $1 - \sin^2 x$, funcțiunea dată va lua forma

$$(4) \quad f(\sin x, \cos x) = \frac{\Phi_1(\sin x) + \cos x \Phi_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)},$$

Φ , Φ_1 , Φ_2 fiind polinoame de $\sin x$. Efectuând diviziunile $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, $\frac{\Phi_2}{\Phi}$, obținem expresiuni de forma

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1(\sin x)}{\Phi(\sin x)} &= P_1(\sin x) + \frac{R_1(\sin x)}{\Phi(\sin x)}, \\ \frac{\Phi_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)} &= P_2(\sin x) + \frac{R_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)}; \end{aligned}$$

prin urmare

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) &= P_1(\sin x) + \cos x P_2(\sin x) \\ &+ \frac{R_1(\sin x) + \cos x R_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)}, \end{aligned}$$

P_1 , P_2 , R_1 , R_2 fiind polinoame de $\sin x$ și gradele celor două din urmă fiind mai mici decât gradul numitorului Φ . Ceeace justifică aserțiunea (2).

Vom presupune, în cel ce urmează, că gradul numărătorului $F_1(\sin x, \cos x)$ este cel mult egal cu gradul numitorului $F(\sin x, \cos x)$.

În acest caz, punând $x = \xi + i\eta$ și ținând seamă de egalitatea

$$\lim_{\eta=\pm\infty} \left| \frac{\sin(\xi + i\eta)}{\cos(\xi + i\eta)} \right| = 1,$$

vedem că funcțiunea $f(\sin x, \cos x)$ tinde către o valoare finită când η tinde către $\pm\infty$, oricare ar fi valoarea lui ξ . Această funcțiune n'are dar, într'una oarecare din fâșiile mărginite de dreptele paralele $\xi = 2k\pi$, $\xi = 2(k+1)\pi$, alte singularități decât poluri în număr limitat.

Să considerăm fâșia $(0, 2\pi)$ și fie a unul din polurile funcțiunii și $a+1$ ordinul său de multiplicitate. Vom avea, în domeniul acestui pol, o expresiune de forma

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{A}{x-a} + A_1 D \frac{1}{x-a} + \dots$$

$$\dots + A_a D^{(a)} \frac{1}{x-a} + P(x-a),$$

$D^{(k)}$ fiind simbolul derivatei de ordinul k și $P(x-a)$ o serie întreagă.

De altă parte, avem [(6) § 234],

$$\cot \frac{x-a}{2} = \frac{2}{x-a} + P_1(x-a);$$

de unde, prin derivări succesive,

$$D \cot \frac{x-a}{2} = 2D \frac{1}{x-a} + P'_1(x-a),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$D^{(a)} \cot \frac{x-a}{2} = 2D^{(a)} \frac{1}{x-a} + P_1^{(a)}(x-a).$$

Din aceste dezvoltări rezultă că diferența

$$f(\sin x, \cos x) - \frac{1}{2} \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D \cot \frac{x-a}{2} \right.$$

$$\left. + \dots + A_a D^{(a)} \cot \frac{x-a}{2} \right]$$

este o funcțiune olomorfă de x în domeniul punctului $x = a$.

Considerațiuni analoage se aplică celorlalte poluri.

Prin urmare diferența

$$f(\sin x, \cos x) - \frac{1}{2} \Sigma \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D \cot \frac{x-a}{2} \right.$$

$$\left. + \dots + A_a D^{(a)} \cot \frac{x-a}{2} \right],$$

în care simbolul Σ se referă la toate polurile situate în fâșia con-

siderată, este olomoră în această fâșie, rămânând finită când x tinde către infinit fără a ieși din fâșie. Inșă toți termenii acestei expresiuni se reproduc când înlocuim x prin $x + 2\pi$; prin urmare, această expresiune este olomoră în toate fâșiile, adică ea este olomoră în tot planul inclusiv punctul $x = \infty$. Expresiunea se reduce deci la o constantă, de unde rezultă expresiunea

$$f(\sin x, \cos x) = C + \frac{1}{2} \Sigma \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D \cot \frac{x-a}{2} + \dots + A_a D^{(a)} \cot \frac{x-a}{2} \right].$$

Această formulă este datorită lui *Hermite*.

Determinarea constantei C. Reprezintănd prin C_1 și C_2 valorile către care tinde funcțiunea $f(\sin x, \cos x)$ când punând $x = \xi + i\eta$, facem respectiv $\eta = \pm \infty$ și ținând seamă de formula (7) (234) și de faptul că derivatele $D^{(k)} \cot \frac{x-a}{2}$ tind către zero în acelaș timp, obținem

$$C_1 = C - \frac{i}{2} \Sigma A, \quad C_2 = C + \frac{i}{2} \Sigma A,$$

de unde

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Observare. Calculul coeficienților $A_1, A_2, \dots$ se poate face în modul următor: punem $x-a=t$ și dezvoltăm funcțiunile $\sin(a+t)$, $\cos(a+t)$ după puterile lui t ; funcțiunea $\frac{F_1(\sin x, \cos x)}{F(\sin x, \cos x)}$ ia forma

$$\frac{1}{t^{a+1}} \frac{a_0 + a_1 t + \dots}{b_0 + b_1 t + \dots}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0,$$

Divizând seria dela numărător prin seria dela numitor, ne oprim la termenul t^a . Fie

$$C_0 + C_1 t + \dots + C_a t^a$$

câtul astfel obținut; vom avea

$$A = C_a,$$

$$A_1 = -C_{a-1},$$

$$A_2 = \frac{C_{a-2}}{2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_a = \frac{(-1)^a}{a!} C_0.$$

CAPITOLUL XI.

FUNȚIUNI ALGEBRICE DEFINITE DE ECUAȚIUNI
BINOAME. SUPRAFETELE LUI RIEMANN.

I. — FUNȚIUNI ALGEBRICE DEFINITE DE ECUAȚIUNI BINOAME.

236. Să considerăm egalitatea

$$(1) \quad y^p = x,$$

în care p este un număr întreg și pozitiv. La orice valoare $x \neq 0$, corespund lui y p valori distincte. În adevăr, punând

$$x = re^{i\theta}, \quad y = \varrho e^{i\varphi},$$

egalitatea (1) se poate scrie

$$\varrho^p e^{ip\varphi} = re^{i(\theta + 2k\pi)},$$

k fiind un număr întreg arbitrar. Această egalitate ne dă

$$\varrho^p = r, \quad p\varphi = \theta + 2k\pi;$$

de unde

$$\varrho = r^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{p},$$

$\frac{1}{p}$ având semnificarea aritmetică. Pentru a obține toate valorile de cari y este susceptibil, este de ajuns a da lui k p valori întregi consecutive, de exemplu, $0, 1, 2, \dots, p-1$. Expresiunea generală a rădăcinilor ecuațiunii va fi așa dar

$$(2) \quad y_k = r^{\frac{1}{p}} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{p}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1),$$

Le vom reprezintă în totalitatea lor prin $\sqrt[p]{x}$ sau $x^{\frac{1}{p}}$; ele se anulează împreună cu x .

Făcând să varieze x , fiecare rădăcină (2) variază evident într'un mod continuu. Voim să arătăm că fiecare din ele este o funcțiune analitică de x , olomorvă în orice regiune care nu conține punctul $x = 0$.

Fie x_0 o valoare oarecare a lui x , diferită de zero și y_k una din cele p rădăcini corespunzătoare. Se recunoaște imediat că egalitatea (1) poate fi satisfăcută printr'o serie întreagă de $x - x_0$:

$$(3) \quad y = y_k + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots;$$

căci scriind-o sub forma

$$y^p = x_0 + x - x_0$$

și substituind în locul lui y seria precedentă obținem, prin identificarea ambelor membre, valori finite și bine determinate pentru coeficienții a_n . Rămâne să probăm că seria așa determinată este convergentă în domeniul lui x_0 .

Să derivăm ecuațiunea (1); obținem

$$py^{p-1} \frac{dy}{dx} = 1,$$

sau, în virtutea aceleiaș ecuațiuni,

$$(4) \quad px \frac{dy}{dx} = 1.$$

Să înlocuim y prin seria (3) și să identificăm ambele membre; obținem relațiunea

$$npx_0a_n = (1 + p - np)a_{n-1}.$$

De unde deducem, punând pentru prescurtare $\frac{1}{p} = m$,

$$a_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \cdot \frac{y_k}{x_0^n}.$$

Prin urmare seria (3) ia forma

$$(5) \quad y - y_k = y_k \sum_1^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n,$$

serie evident convergentă în domeniul lui x_0 , având $|x_0|$ ca rază a cercului său de convergență.

237. Fiecare element (5) ($k = 0, 1, \dots, p$) dă naștere unei funcțiuni analitice olomorfe în orice regiune care nu conține punctul $x = 0$ și care, în virtutea teoremei asupra permanenței relațiilor analitice, satisface ecuațiunea (2) în toată regiunea sa de existență. Această regiune consistă, precum se va vedea mai jos, în toată întinderea planului. Aceste funcțiuni însă nu sunt fără legătură între dânsese. În adevăr, expresiunea (2) arată că dacă mărim argumentul θ cu 2π , adică dacă x se învârtă odată în sensul pozitiv în jurul punctului $x = 0$, rădăcina y_0 se schimbă în y_1 , aceasta se schimbă în $y_2 \dots$ și cea din urmă y_{p-1} se schimbă în y_0 . Cele p rădăcini formează așa dar un *sistem circular*. Deaci rezultă că cele p elemente cuprinse în ecuațiunea (5) dau naștere unei aceleași funcțiuni analitice *monogène, multiforme* cu p ramuri. Pentru toate aceste ramuri, punctul $x = 0$ este un punct singular. În adevăr,

în domeniul acestui punct, nici o ramură nu se poate reprezenta printr-o serie întreagă $P(x)$, căci altminterlea ea s'ar reproduce când x ar descrie o curbă închisă în jurul lui $x = 0$. Acest punct este unicul punct singular al funcțiunii y , situat la distanță finită; căci punctul x_0 considerat mai sus, nu a fost supus la altă condițiune decât de a fi diferit de zero. De unde rezultă că regiunea de existență a funcțiunii y este tot planul variabilei x .

Punctul singular $x = 0$ caracterizat prin aceea că ramurile funcțiunii se permută în jurul lui, a primit numele de *punct de ramificațiune* sau *punct critic*.

Punctul ∞ . În punctul $x = \infty$, cele p ramuri devin infinite și se permută în jurul acestui punct; ceea ce se recunoaște imediat, făcând substituțiunile $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$.

Funcțiunea y definită de ecuațiunea (1) se numește funcțiune *algebrică* de x ; ea este cea mai simplă din clasă acestor funcțiuni¹⁾.

238. Ecuațiunea

$$y^p = x^q,$$

în care p și q sunt numere întregi pozitive, prime între ele, conduc la rezultate identice cu cele de mai sus. Să notăm expresiunea rădăcinilor corespunzătoare unei valori $x = re^{i\theta}$, diferită de zero

$$y = r^{\frac{q}{p}} e^{i \frac{q}{p} (\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1).$$

Punând $\frac{q}{p} = m$, elementele celor p ramuri corespunzătoare unui punct x_0 diferit de 0, vor fi cuprinse în formula (5).

239. Să considerăm ecuațiunea

$$y^p = (1 + x)^q,$$

p și q fiind, ca mai sus, numere întregi, pozitive și prime între ele. Punctul de ramificațiune a celor p ramuri este $x = -1$ și elementele corespunzătoare lui $x = 0$ sunt date de

$$y - y_k = y_k \sum_1^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n, \quad m = \frac{q}{p}.$$

Ecuațiunea $y^p = A(x+a)^q$ se reduce la tipul precedent, scriind-o sub forma

$$y^p = Aa^q \left(1 + \frac{x}{a}\right)^q.$$

¹⁾ Este vorba de funcțiunile algebrice neraționale.

240. *Observare.* Fie

$$u = re^{i\theta}, \quad v = \varrho e^{i\varphi},$$

două cantități variabile oarecari și

$$u^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{m}}, \quad v^{\frac{1}{m}} = \varrho^{\frac{1}{m}} e^{i \frac{\varphi + 2k'\pi}{m}}$$

două determinațiuni, luate după voie, ale rădăcinilor $\sqrt[m]{u}$, $\sqrt[m]{v}$; de unde

$$u^{\frac{1}{m}} \cdot v^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} \varrho^{\frac{1}{m}} e^{i \frac{\theta + \varphi + 2(k+k')\pi}{m}}.$$

De asemenea o determinațiune oarecare a radicalului $\sqrt[m]{uv}$ este dată de expresiunea

$$(uv)^{\frac{1}{m}} = (r\varrho)^{\frac{1}{m}} e^{i \frac{\theta + \varphi + 2k''\pi}{m}};$$

prin urmare, luând $k'' = k + k'$, adică alegând această determinațiune într'un mod convenabil, putem scrie

$$\sqrt[m]{u \cdot v} = \sqrt[m]{u} \cdot \sqrt[m]{v}.$$

De asemenea, fiind date determinațiunile $\sqrt[m]{u}$, $\sqrt[m]{v}$, există o determinațiune $\sqrt[m]{\frac{u}{v}}$, astfel încât să avem egalitatea

$$\sqrt[m]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[m]{u}}{\sqrt[m]{v}}.$$

241. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \quad y^m = R(x),$$

în care m este un număr întreg pozitiv și $R(x)$ o funcțiune rațională. Presupunem ecuațiunea ireductibilă, adică $R(x)$ nu este un produs de factori raționali.

Fie x_0 un punct diferit de un zero și de un pol al lui $R(x)$. În domeniul acestui punct, putem scrie

$$(2) \quad y^m = R(x_0) [1 + (x - x_0) P(x - x_0)].$$

Să punem

$$(3) \quad u = (x - x_0) P(x - x_0);$$

ecuațiunea transformată

$$y^m = R(x_0) (1 + u)$$

va da, în domeniul lui $u = 0$, m soluțiuni cuprinse în expresiunea

$$\frac{y}{\sqrt[m]{R(x_0)}} = (1 + u)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}u + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.2}u^2 + \dots,$$

în care se dă radicalului $\sqrt[m]{R(x_0)}$ cele m valori ale sale. Înlocuind u prin valoarea sa (3), membrul al doilea devine o serie întreagă de $(x - x_0)$, $P(x - x_0)$. În domeniul punctului $x = x_0$, avem așa dar

$$(4) \quad y = P(x - x_0) \sqrt[m]{R(x_0)}, \quad [P(x - x_0)]_{x=x_0} = 1.$$

Cele m valori y cari satisfac ecuațiunea (1) sunt așa dar funcțiuni olomorfe de x în domeniul oricărui punct diferit de un zero sau pol al lui $R(x)$.

Să examinăm cum se comportă aceste valori în domeniul unui zero sau unui pol al lui $R(x)$.

Fie $x = a$ un zero de ordinul n al funcțiunii $R(x)$. În domeniul acestui punct avem

$$(5) \quad y^m = (x - a)^n P(x - a), \quad [P(x - a)]_{x=a} \neq 0.$$

Fie p c. m. m. c. d. al exponenților m și n :

$$(6) \quad m = p\mu, \quad n = p\nu.$$

Să punem

$$(7) \quad y^\mu = z;$$

ecuațiunea (5) devine

$$(8) \quad z^p = (x - a)^{p\nu} P(x - a).$$

Valorile radicalului $\sqrt[p]{P(x - a)}$ sunt olomorfe în domeniul lui $x = a$; reprezentând prin $P_1(x - a)$ una din ele, ecuațiunea precedentă definește, în acelaș domeniu, p ramuri olomorfe z pe cari le putem reprezintă prin ecuațiunea

$$(9) \quad z_k = (x - a)^\nu P_1(x - a) e^{\frac{2ki\pi}{p}} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Fiecăreia din aceste ramuri corespund, în virtutea ecuațiunii (7), μ ramuri y , cuprinse în expresiunea

$$(10) \quad y_k = (x - a)^{\frac{\nu}{\mu}} P_2(x - a) e^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1),$$

$P_2(x - a)$ fiind una din valorile radicalului $\sqrt[\mu]{P_1(x - a)}$ și $(x - a)^{\frac{\nu}{\mu}}$ primind cele μ valori diferite ale sale pentru $x \neq a$.

Aceste ramuri formează așadar un sistem circular relativ la punctul $x = a$, adică, dacă x se învârteste în sensul pozitiv în jurul punctului a , ramurile y_k dispuse în ordinea argumentelor lor crescând — cari formează o progresiune aritmetică cu rațiunea $\frac{2v\pi}{\mu}$ — se permută între ele în aceeași ordine, cea din urmă schimbându-se în cea dintâi. După μ învârtituri în același sens, fiecare ramură se reproduce.

Cele m ramuri y definite de ecuațiunea (1) se grupează dar, în domeniul punctului $x = a$, în p sisteme circulare, compuse fiecare din μ ramuri. Se zice că punctul $x = a$ este un punct critic sau de ramificațiune de ordinul $\mu - 1$ pentru fiecare sistem circular. Dacă $\mu = 1$, punctul a încetează de a fi punct critic, toate ramurile fiind olomorfe în domeniul acestui punct.

Dacă $x = a$ este un pol de ordinul n al funcțiunii $R(x)$, avem, în domeniul acestui punct,

$$(11) \quad y^m = (x-a)^{-n} P(x-a) [P(x-a)]_{x=a} \neq 0.$$

Presupunând că numerele m și n satisfac ecuațiunile (6) și punând

$$(12) \quad y^\mu = \frac{1}{z},$$

obținem, raționând ca mai sus, pentru cele m ramuri y , expresiunile

$$(13) \quad y_k = (x-a)^{-\frac{v}{\mu}} P_2(x-a) e^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Toate ramurile devin infinite în punctul $x = a$ și se grupează în domeniul acestui punct, în p sisteme circulare, compuse fiecare din μ ramuri. Dacă $\mu = 1$, toate ramurile y sunt funcțiuni uniforme în domeniul punctului a .

Punctul ∞ . Făcând $x = \frac{1}{x'}$, $R(x)$ se schimbă într-o funcțiune rațională $R_1(x')$ și ecuațiunea (1) devine

$$(14) \quad y^m = R_1(x').$$

Problema revine la studiul ramurilor y în domeniul punctului $x' = 0$. Vom zice că punctul $x = \infty$ este sau nu punct critic al ramurilor y definite de ecuațiunea (1), după cum punctul $x' = 0$ este sau nu punct critic al ramurilor y satisfăcând ecuațiunea (14). Dacă ramurile y ale ecuațiunii (14) se grupează, în domeniul punctului $x' = 0$, în sisteme circulare de un ordin oarecare, vom zice că ramurile corespunzătoare (1) se grupează în domeniul punctului ∞ , în sisteme circulare de același ordin.

242. *Drumuri echivalente; contururi elementare.* Fie x_0 un punct ordinar oarecare; dela acest punct privit ca origină să descriem o curbă închisă fără puncte duble, care să nu treacă prin nici un punct critic și care să conțină în interior k puncte critice (pe figură $k = 2$). Dela aceeași origină să descriem k curbe analoage, interioare celei dintâiu, cari să n'aibă cu aceasta și nici între ele alt punct comun

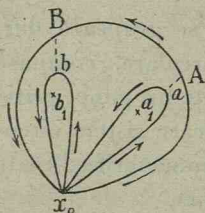


Fig. 17

decât origina și astfel ca fiecare din ele să conțină în interior un singur punct critic. Voim să arătăm ca drumul exterior x_0ABx_0 , de scris în sensul pozitiv și drumurile interioare $x_0a \dots x_0$, $x_0b \dots x_0$ descrise succesiv în acelaș sens, sunt *echivalente*, adică plecând cu aceeaș rădăcină y ca valoare inițială, obținem în ambele cazuri aceeaș valoare finală. Pentru aceasta, să unim câte un punct al fiecărei curbe interioare cu câte un punct al curbei exterioare prin linii cari să nu se taie între ele. Fie liniile aA , bB , astfel introduse. Reprezentând prin (AB) variațiunea funcțiunii considerate, când variabila x descrie drumul care duce dela punctul A la punctul B, vom avea egalitățile

$$(x_0A) = (x_0a) + (aA),$$

$$(AB) = (Aa) + (ax_0) + (x_0b) + (bB),$$

$$(Bx_0) = (Bb) + (bx_0).$$

Adunând aceste egalități și observând că liniile auxiliare aA , bB sunt descrise fiecare succesiv, în două sensuri opuse, prin urmare variațiunea totală după fiecare din ele este nulă, obținem egalitatea

$$(x_0AB \dots x_0) = (x_0ax_0) + (x_0bx_0) + \dots$$

q. e. d.

Curba închisă (x_0ax_0) relativ la un punct critic interior se înlocuiește de obicei printr'un drum format dintr'un cerc foarte mic descris în jurul acestui punct ca centru și din o linie dreaptă care unește punctul x_0 cu un punct a al acestui cerc. Un asemenea drum se numește *contur elementar*. Linia x_0a (dreaptă sau curbă) se consideră ca având două țarmuri, provenite din două linii cari s'au apropiat infinit de mult una de alta.

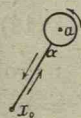


Fig. 18

243. *Tăieturi (coupures).* — Printr'un artificiu simplu se poate face ca ramurile unei funcțiuni algebrice să fie funcțiuni uniforme în tot planul variabilei, *limitat într'un mod convenabil*.

Exemple. — 1^o. Fie ecuațiunea

$$y^m = x.$$

Să ne închipuim o secțiune făcută în plan dealungul unei semidrepte dusă într'o direcțiune oarecare dela $x = 0$ la $x = \infty$ și să privim această secțiune ca o limită a planului pe care variabila să nu o străbată. În planul așa limitat, variabila x nu descrie nici odată o curbă închisă în jurul punctului critic $x = 0$; prin urmare în acest plan ramurile funcțiunii sunt olomorfe. Însă, în două puncte x' , x'' infinit vecine situate de o parte și de alta a secțiunii, valorile unei ramuri nu sunt infinit vecine, așa că prin artificii introdus se rupe continuitatea ramurilor.

În adevăr, pentru a trece dela punctul x' la punctul x'' , trebuie să înconjurăm punctul $x = 0$; dacă presupunem punctele x' , x'' infinit apropiate, valoarea unei ramuri în punctul x'' va fi egală cu valoarea ei în punctul x' multipli-

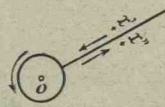


Fig. 19

cată cu $e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

2^o. Fie $y^p = (x - a_1) \dots (x - a_n).$

Realizăm uniformitatea ramurilor, dacă dela fiecare punct de ramificațiune ducem semidrepte cari să nu se întâlnească și facem secțiuni în plan dealungul acestor drepte.

244. Modul precedent de a limita planul, cu scopul de a face ramurile uniforme, nu este unic. Fie, pentru a fixa ideile, ecuațiunea

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Dacă n este un număr par, $n = 2m$, unind punctele de ramificațiune două câte două, de exemplu a_1 cu a_2 , a_3 cu a_4 , ..., a_{2m-1} cu a_{2m} , prin linii cari să nu se taie între ele și făcând secțiuni dealungul acestor linii, obținem un plan limitat care satisface condițiunile cerute. Căci variabila în mișcare sa în plan nu poate înconjură un punct critic, fără a înconjură un număr par de asemenea puncte; ceea ce face ca fiecare ramură să reia aceeași valoare în acelaș punct.

Dacă $n = 2m + 1$, operăm ca mai sus și introducem o nouă secțiune dela punctul a_{2m+1} la infinit. Secțiunile nu sunt supuse la altă condițiune decât de a nu se întâlni, forma lor putând fi oricum.

245. Să studiem variațiunea funcțiunii

$$(1) \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

pentru valori reale ale lui x .

Avem punctele critice $x = \pm 1$, în jurul cărora cele două ramuri ale funcțiunii se permută. Să facem două tăieturi dealungul axei reale respectiv dela $+1$ la $+\infty$ și dela -1 la $-\infty$. În planul limitat de aceste tăieturi y este funcțiune uniformă. Să considerăm ramura care se reduce la $+1$ pentru $x = 0$. Când x variază dela 0 la 1 , y este real pozitiv și variază dela 1 la 0 . Putem scrie

$$y = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x},$$

adoptând pentru ambele radicale valoarea $+1$ pentru $x = 0$. Să evităm punctul $\bar{x} = +1$ (fig. 1) printr'un semicerc

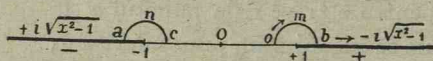


Fig. 20

omb, descris din acest punct ca centru cu o rază ρ foarte mică și situat deasupra axei reale. Pentru aceasta, punem

$$(2) \quad x-1 = \rho e^{it},$$

făcând t să varieze dela π la 0 . De unde, dealungul acestui semicerc,

$$(3) \quad \sqrt{1-x} = -i\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{t}{2}}.$$

Semnul $-$ din membrul al doilea rezultă din faptul că în punctul $a(t = \pi)$, $\sqrt{1-x}$ este real și pozitiv. În punctul $b(t = 0)$, avem $x-1 = \rho$ și (3) devine

$$(4) \quad \sqrt{1-x} = -i\rho^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x-1}^{\frac{1}{2}};$$

prin urmare, în acest punct, avem

$$(5) \quad \sqrt{1-x^2} = -i \sqrt{x^2-1},$$

radicalul din membrul al doilea fiind real și pozitiv pentru x real și mai mare ca 1 .

Dând lui x valori reale negative, ramura considerată este reală și pozitivă în intervalul $(0, -1)$. Pentru a evita punctul

¹⁾ Iată cum se mai poate obține acest rezultat. Punând $z = 1 - x$, cercul $|x-1| = \rho$, se transformă în cercul $|z| = \rho$. Construind punctele z care corespund punctelor x ale semicercului *omb*, vedem că acest semicerc se transformă într'un semicerc (z) mărginit de axa reală și situat dedesubtul acestei axe, adică argumentul z variază dela 0 la $-\pi$, prin urmare $\arg \sqrt{1-x}$ variază dela 0 la $-\frac{\pi}{2}$. Așa dar pentru x real și > 1 avem

$$\sqrt{1-x} = |\sqrt{1-x}| e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i \sqrt{x-1}.$$

$x = -1$ printr'un semicerc *and*, descris din acest punct ca centru cu raza ϱ și situat deasupra axei reale, punem

$$(6) \quad x + 1 = \varrho e^{it},$$

t variind dela 0 la π . De unde

$$(7) \quad \sqrt{1+x} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{it}{2}};$$

căci în punctul $c(t=0)$, $\sqrt{1+x}$ este real și pozitiv. În punctul $d(t=\pi)$, egalitatea (6) dă $x+1 = -\varrho$ și egalitatea (7) devine

$$(8) \quad \sqrt{1+x} = i\varrho^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-(x+1)};$$

prin urmare, în acest punct, avem

$$\sqrt{1-x^2} = i\sqrt{x^2-1},$$

radicalul din urmă fiind real și pozitiv pentru x real și mai mic ca -1 .

Observare. Dacă am fi evitat punctele critice prin semicercuri situate dedesubtul axei reale, radicalele din membrul al doilea ale formulelor precedente ar fi avut semne contrarii.

246. Să mai considerăm funcțiunea

$$(10) \quad y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

pentru valori reale ale lui x , k fiind real și cuprins între 0 și 1.

Avem patru puncte critice: $x = \pm 1$, $x = \pm \frac{1}{k}$. Funcțiunea y devine o funcțiune uniformă dacă limităm planul prin două tăieturi făcute respectiv între punctele $+1$, $+\frac{1}{k}$ și -1 , $-\frac{1}{k}$.

Să considerăm ramura egală cu $+1$ pentru $x=0$; această ramură este reală și pozitivă în intervalul $(-1, +1)$. Putem scrie

$$y = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2},$$

ambele radicale fiind egale cu 1 la origină.

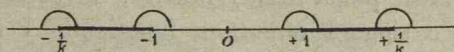


Fig. 21

Evitând punctele critice prin semicercuri foarte mici, având aceste puncte ca centre și situate deasupra axei reale, obținem, în virtutea celor văzute în exemplul precedent, rezultatele următoare:

I. Dealungul segmentelor $\left(+1, +\frac{1}{k}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{k}\right)$ avem respectiv

$$(11) \quad y = -i \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 - k^2 x^2} = -i \sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)},$$

$$(12) \quad y = i \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 - k^2 x^2} = i \sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}.$$

II. Pentru $x > \frac{1}{k}$ sau pentru $x < -\frac{1}{k}$, radicalul $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ devine respectiv $-i \sqrt{k^2 x^2 - 1}$, $+i \sqrt{k^2 x^2 - 1}$; prin urmare pe axa reală cuprinsă între $+\frac{1}{k}$ și $+\infty$ și între $-\frac{1}{k}$ și $-\infty$ avem

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} = -\sqrt{(x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1)},$$

radicalele din membrul al doilea în toate aceste formule fiind pozitive.

II. — SUPRAFETELE LUI RIEMANN

247. În sistemul de reprezentare a variabilei independente x pe un plan (sau pe o sferă), corespondența între pozițiunea punctului x și a valorii funcțiunii y nu este *biunivocă*. Riemann realizează o asemenea corespondență înlocuind planul (sau sfera) prin suprafețe formate din mai multe foi suprapuse și infinit apropiate între ele. Vom considera câteva exemple.

248. *Suprafața lui Riemann pentru funcțiunea y definită de ecuațiunea*

$$(1) \quad y^2 = x.$$

Fiecărei valori a lui x , diferită de zero, corespund două ramuri egale și de semne contrarii pe cari le repetintăm prin y_1 și $y_2 = -y_1$; aceste ramuri se permută între ele în jurul lui $x = 0$. Să efectuăm dealungul axei reale, în direcțiunea pozitivă, o tăietură în plan pe care variabila x să nu o străbată. Cu modul acesta variabila nu va descrie nici o dată o curbă închisă în jurul lui $x = 0$, așa că plecând dela un punct arbitrar $x_0 \neq 0$ cu una din ramurile funcțiunii, vom regăsi în acest punct aceiaș ramură. În acest mod însă nu obținem decât o singură ramură a funcțiunii. Pentru a obține ambele ramuri, să introducem un al doilea plan suprapus peste cel dintâu și să facem o tăietură în ambele plane dealungul direcțiunii pozitive a axei reale. Să numim P_1 primul plan și P_2 planul suprapus. Fiecărei valori a lui x să facem să corespundă două puncte, unul în P_1 și celalt în P_2 situate pe aceeaș perpendiculară la aceste

două plane și să reprezintăm prin y_1 și y_2 ramurile corespunzătoare. Ramura y_1 este uniformă în planul P_1 și ramura y_2 în planul P_2 . Aceste două plane le privim ca neavând alte puncte comune decât punctele de ramificațiune $x = 0$, $x = \infty$, în cari ramurile coincid. Mai convenim a privi fiecare tăietură ca având două țărături: țărătul stâng sau pozitiv situat de aceeaș parte cu semiaxa imaginară pozitivă și țărătul drept sau negativ, țărătul opus celui dintăiu.

Rămâne să stabilim o trecere dela o ramură la alta fără a rupe continuitatea funcțiunii definită de ecuațiunea (1).

Pentru aceasta, să examinăm relațiunea dintre valorile celor două ramuri în două puncte situate față în față pe cele două țărături din P_1 și în punctele corespunzătoare din P_2 . Argumentele a două puncte x situate față în față pe cele două țărături ale tăieturii din acelaș plan, diferind între ele prin $\pm 2\pi$, rezultă că în aceste puncte avem în planul P_1 valorile y_1 și $-\eta_1$ iar în planul P_2 valorile y_2 și $-y_2$. Însă $y_2 = -y_1$; prin urmare într'un punct situat pe țărătul stâng al tăieturii în P_2 funcțiunea y are aceeaș valoare ca în punctul corespunzător situat pe țărătul drept al tăieturii în P_1 ; viceversa, în două puncte corespunzătoare, unul pe țărătul drept al tăieturii în P_2 și celalt pe țărătul stâng în P_1 , funcțiunea are aceeaș valoare.

Să ne închipuim că facem să devieze puțin din forma lor, în vecinătatea liniei $(0 \dots + \infty)$, planele P_1 și P_2 străbătându-se dealungul acestei linii, în așa mod ca țărătul drept din P_1 să se unească cu țărătul stâng din P_2 și ca țărătul drept din P_2 să se unească cu țărătul stâng din P_1 . Linia $(0 \dots + \infty)$ devine astfel o *linie de trecere* dela un plan la celalt. Un punct mobil x care în mișcarea sa într'unul din planele P_1 , P_2 atinge linia de trecere, va putea trece în celalt plan, adică o ramură se va continua prin cealaltă ramură, fără ca continuitatea funcțiunii y să fie ruptă. Suprafața formată de cele două plane, sau *foi*, în modul descris mai sus, constituie *suprafața lui Riemann*, pentru funcțiunea y definită de ecuațiunea (1).

Pe această suprafață funcțiunea y este uniformă. Dacă figurăm valorile funcțiunii y pe un plan — planul y —, acest plan și suprafața considerată a lui Riemann se corespund punct cu punct: planului P_1 corespunde semiplanul y pozitiv și planului P_2 semiplanul y negativ. O îndoială, în ce privește corespondența a două puncte x și y , nu poate fi decât pe linia de trecere; această îndoială însă dispăre dacă se indică planul și țărătul liniei pe care punctul x este considerat ca situat. De unde rezultă consecințele următoare:

10. Dacă un punct mobil x plecând dela un punct al liniei de trecere, situat într'unul din cele două plane pe un țărm dat, se mișcă în jurul originii până ce atinge țărmul opus celui dat, drumul urmat *nu se privește că este închis*. Pentru ca un drum descris neconținut în acelaș sens, în jurul originii, când punctul inițial

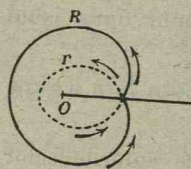


Fig. 22

este un punct al liniei de trecere, să fie închis, este necesar ca punctul final să fie situat în acelaș plan și pe acelaș țărm ca punctul inițial; prin urmare este necesar ca origina să fie înconjurată de două ori, sau în genere un număr par de ori.

Figura alăturată reprezintă un drum care înconjoară origina de două ori, linia plină fiind situată într'un plan și linia punctată în celalt plan.

20. Două curbe, cari trec prin acelaș punct al liniei de trecere, se vor privi ca întâlnindu-se sau nu, după cum punctele acestor curbe din vecinătatea liniei de trecere și de aceeaș parte a ei se vor afla pe acelaș plan sau nu.

Să observăm că alegerea ce am făcut, ca linia de trecere dela un plan la celalt să fie semiaxa reală pozitivă, nu este un fapt esențial. Putem lua drept linie de trecere raza infinită îndreptată într'o direcțiune oarecare, sau chiar o linie curbă care merge dela $x=0$ la $x=\infty$ și care nu se taie pe sine însăș. Ceeace rămâne neschimbat sunt punctele de ramificațiune $x=0$, $x=\infty$.

În fine, precum în altă parte, am înlocuit planul variabilei complexe printr'o sferă, putem, efectuând în acelaș mod o proiecțiune stereografică, să înlocuim suprafața lui Riemann considerată printr'o suprafață formată din două sfere concentrice suprapuse, având comuni numai cei doi poli, corespunzători punctelor $x=0$, $x=\infty$. Liniei de trecere din suprafața plană, va corespunde pe sferă un semimeridian, sau orice altă linie sferică dusă între cei doi poli și care nu se taie pe sine însăș, după cum prima linie de trecere este o linie dreaptă sau o linie curbă.

Observare. Două puncte suprapuse ale suprafeții lui Riemann rămân suprapuse, prin urmare în două foi diferite, oricare ar fi linia de trecere, pe când două puncte cari nu sunt suprapuse, din două foi diferite pot, după o schimbare a liniei de trecere, ajunge a aparține aceleiaș foi. Expresiunea că două valori ale funcțiunii aparțin la aceiaș ramură sau la două ramuri diferite are dar un sens precis numai relativ la tăietura efectuată în suprafața considerată.

249. *Suprafața lui Riemann pentru funcțiunea y definită de ecuațiunea*

$$(2) \quad y^2 = (x-a)(x-b), \quad a \neq b.$$

Fiecărei valori x diferită de a și de b corespund pentru y două valori egale și de semne contrarii $y_1, y_2 = -y_1$. Când x descrie o curbă închisă în jurul unuia din punctele a sau b , fără a trece prin nici unul din ele, cele două ramuri se permută între dăsele; iar dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte a și b , valoarea finală a lui y coincide cu valoarea sa inițială. Punctele a și b sunt puncte de ramificațiune ale funcțiunii. Pentru a obține suprafața lui Riemann corespunzătoare funcțiunii y este dar de ajuns a suprapune un plan peste planul primitiv al variabilei x , a privi cele două plane ca neavând alte puncte comune decât punctele de ramificațiune, a efectua în ele o tăietură după dreapta care unește aceste puncte și a face să coincidă, două câte două, cele patru țărături ale tăieturilor suprapuse în acelaș mod ca în exemplul precedent, adică țărțul drept din primul plan cu țărțul stâng din al doilea plan și țărțul drept din al doilea plan cu țărțul stâng din primul plan. Linia de trecere ($a \dots b$) poate avea o formă oarecare, cu condițiunea de a nu se tăia pe sine însăș.

În fine, suprafața plană a lui Riemann poate fi înlocuită printr'o suprafață sferică cu două foi, proiecțiune stereografică convenabilă a suprafețelor plane.

Un punct mobil care descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte de ramificațiune, rămâne neconținut pe aceiaș foaie; din contra, dacă se învârtește în jurul unuia din punctele a sau b , punctul mobil nu poate reveni la poziția inițială fără a trece dela o foaie la alta și a înconjură acest punct de două ori.

Punctul $x = \infty$ este distinct pe fiecare foaie și dă respectiv ramurile

$$y_1 = x - \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{8} \cdot \frac{1}{x} + \dots,$$

$$y_2 = -x + \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{8} \cdot \frac{1}{x} - \dots,$$

egale și de semne contrarii.

250. *Funcțiunea y definită de ecuațiunea*

$$(3) \quad y^2 = \frac{x-a}{x-b}$$

admite aceiaș suprafață a lui Riemann ca funcțiunea din exemplul precedent. Este interesant de observat că între aceste două func-

țiuni există o relațiune biliniară, coeficienții relațiunii fiind funcțiuni raționale de x . Căci din ecuațiunile

$$y^2 = \frac{x-a}{x-b}, \quad z^2 = (x-a)(x-b),$$

deducem relațiunea

$$z = (x-b)y,$$

care pune în evidență faptul că funcțiunile y și z sunt ramificate în acelaș mod, adică au aceleași puncte de ramificațiune. Se mai zice că aceste funcțiuni *aparțin aceleăș clase*.

Intr'un mod general se zice că două funcțiuni algebrice *aparțin aceleăș clase*, dacă admit aceiaș suprafață a lui Riemann.

251. Să considerăm ecuațiunea

$$(4) \quad y^2 = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_m).$$

Când x descrie o curbă închisă în jurul unui număr par de puncte $a_1, a_2, \dots$, fără a trece prin nici unul din ele, fiecare din cele două ramuri ale funcțiunii y se reproduce; iar dacă curba închisă cuprinde în interiorul său un număr impar din aceste puncte, cele două ramuri se permută între ele. De unde rezultă construcțiunea suprafeței lui Riemann corespunzătoare funcțiunii y . Distingem două cazuri: $m = 2n$, $m = 2n-1$.

În cazul $m = 2n$, singurele puncte de ramificațiune sunt punctele $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$; în cazul $m = 2n-1$, punctele de ramificațiune sunt $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, \infty$. Construirea suprafețelor lui Riemann corespunzătoare celor două cazuri, rezultă din cele ce preced și se poate efectua în modul următor: Considerăm un plan suprapus peste planul variabilei x , convenind ca ele să n'aibă alte puncte comune decât punctele de ramificațiune. Stabilim, în modul obișnuit, între aceste plane, liniile de trecere $(a_1-a_2), (a_3-a_4) \dots, (a_{2n-1}-a_{2n})$ în primul caz; în cazul al doilea linia $(a_{2n-1}-a_{2n})$ este înlocuită prin linia $(a_{2n-1}-\infty)$. Liniile de trecere pot avea forme oarecari fără a se tăia între ele.

Dacă x descrie o curbă închisă în jurul a două puncte critice, această curbă este situată pe aceiaș foaie sau străbate două linii de trecere, după cum cele două puncte sunt extremitățile unei linii de trecere, sau nu.

252. Să considerăm ecuațiunea

$$(5) \quad y^m = x \quad (m \text{ întreg} > 2).$$

Punctele $x = 0$, $x = \infty$ sunt punctele de ramificațiune, în jurul cărora se permută cele m ramuri ale funcțiunii y . Pentru a

construi suprafața lui Riemann a acestei funcțiuni, adică o suprafață care să se bucure de proprietatea ca unui punct al ei să corespundă o singură valoare a funcțiunii, putem procede în modul următor: Peste planul pe care figurăm valorile variabilei x , plan reprezentat prin P_1 , să suprapunem $m - 1$ plane $P_2, \dots, P_m$ și să privim toate aceste plane ca neavând alte puncte comune decât punctele $x = 0$, $x = \infty$. Dealungul direcțiunii pozitive a axei reale să facem în toate aceste plane o tăietură peste care punctul mobil să nu treacă. Fiecărei valori a lui x , diferită de 0 și ∞ , să facem să corespundă m puncte suprapuse, câte unul în fiecare plan și să reprezentăm prin

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

valorile ramurilor lui y corespunzătoare aceleași valori x , figurată prin punctele situate respectiv în planele $P_1, P_2, \dots, P_m$. Fiecare ramură este o funcțiune uniformă în planul respectiv. Aceste ramuri sunt legate între ele prin egalitățile

$$y_1 \omega = y_2, y_2 \omega = y_3, \dots, y_{m-1} \omega = y_m \quad \left(\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}} \right).$$

Ceeace ne conduce, pentru a realiza trecerea dela ramura y_k la ramura y_{k+1} , fără a rupe continuitatea, să stabilim legăturile următoare între cele m plane sau foi: facem să coincidă țărmlul drept d_1 al tăieturii din P_1 cu țărmlul stâng s_2 din P_2 ; țărmlul drept d_2 al tăieturii din P_2 cu țărmlul stâng s_3 din P_3 , etc., țărmlul drept d_m al tăieturii din P_m cu țărmlul stâng s_1 al tăieturii din P_1 ¹⁾. Tăieturile făcute în cele m plane devin *linii de trecere* între două din aceste plane, legate între ele în modul convenit mai sus. De exemplu, un punct mobil din planul P_1 nu poate trece decât în planul P_2 sau P_m , după cum acest punct atinge în mișcarea sa țărmlul drept sau cel stâng al tăieturii.

Este esențial de notat că planul P_m , care străbate toate planele situate dedesubtul său, este considerat ca neavând legături decât cu planul P_{m-1} și cu planul P_1 , astfel precum s'a precizat mai sus.



Fig. 23

Suprafața astfel construită este suprafața lui Riemann pentru funcțiunea y , definită de ecuațiunea (5). Pe această suprafață, funcțiunea y este uniformă.

Să ne închipuim că în planul variabilei y , ducem m raze vectorii, dela $y = 0$ la $y = \infty$, având argumentele $\frac{2k\pi}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$).

¹⁾ (In fig. $m = 4$).

Descompunem astfel acest plan în m sectoare nelimitate cu unghiurile dela vârf egale. Fiecare din aceste sectoare corespunde unuiu din planele suprafeții lui Riemann. Astfel sectorul ale cărui raze extreme au argumentele $\frac{2k\pi}{m}$, $\frac{2(k+1)\pi}{m}$ și planul P_{k+1} se corespund punct cu punct: cea dintâi din aceste raze corespunde țărmului stâng și cea de a doua țărmului drept al tăieturii planului. In rezumat, planul variabilei y și suprafața corespunzătoare a lui Riemann se corespund punct cu punct; orice porțiune a suprafeții lui Riemann, care nu conține punctul $x = 0$, se transformă într'un mod conform în partea corespunzătoare a planului y .

Să menționăm observarea dejă făcută în exemplele precedente, că tăietura $(0-\infty)$ poate avea o direcțiune și o formă oarecare, cu condițiunea de a nu se tăia pe sine însăși. Este evident că modificând tăietura, se modifică și forma regiunilor y corespunzătoare foilor suprapuse.

In fine, putem înlocui suprafața plană a lui Riemann printr'o suprafață sferică cu m foi suprapuse.

CAPITOLUL XII.

INVERSIUNEA FUNCȚIUNILOR e^x , $\operatorname{tg} x$, $\sin x$:

$\log x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsin} x$.

I. — FUNCȚIUNEA $\log x$

253. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \quad 1 + x = e^y;$$

de unde

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

Funcțiunea $\frac{1}{1+x}$ fiind rațională având polul unic $x = -1$, rezultă că integrala acestei funcțiuni definește o înfinitate de funcțiuni analitice, cari difer între ele prin câte o constantă și cari la distanță finită n'au alt punct singular decât punctul $x = -1$.

Vom vedea mai departe că plecând dela una din aceste funcțiuni obținem prin continuitate pe toate celelalte, astfel că y este o funcțiune analitică monogenă cu o înfinitate de ramuri. Funcțiunea astfel definită se reprezintă prin simbolul $\log(1+x)$.

Să considerăm ramura care se anulează împreună cu x ; ea este reprezentată în domeniul punctului $x = 0$ prin seria

$$(3) \quad y = \log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

care rezultă din integrarea seriei (2) și al cărei cerc de convergență trece prin punctul $x = -1$.

Inlocuind x prin $(x-1)$ ecuațiunile (1) și (3) devin respectiv

$$(4) \quad x = e^y,$$

$$(5) \quad y = \log x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots$$

Seria din membrul al doilea al ultimei ecuațiuni reprezintă elementul funcțiunii $\log x$ corespunzător punctului $x = 1$ care se anulează în acest punct și al cărui cerc de convergență trece prin origină. Acest punct este unicul punct singular, situat la distanță finită, al funcțiunii $\log x$.

Proprietățile funcțiunii $\log x$ rezultă din acelea ale funcțiunii exponențiale. Astfel, din periodicitatea funcțiunii e^y , exprimată prin egalitatea

$$x = e^{y+2k\pi i},$$

rezultă că funcțiunea $\log x$ este *multiformă*, având în orice punct $x_0 \neq 0$ o infinitate de valori, cuprinse în expresiunea $y_0 + 2k\pi i$, k fiind un număr întreg arbitrar și y_0 una din valorile funcțiunii corespunzătoare lui x_0 . Deasemenea, din studiul variațiunii lui e^y rezultă că dacă x este real și pozitiv, există, printre ramurile în număr nelimitat ale funcțiunii $\log x$, una care este reală și care crește neconținut dela $-\infty$ la $+\infty$ când x crește dela 0 la $+\infty$. Acest logaritm îl vom numi *logaritm aritmetic*; el are o valoare unică pentru fiecare valoare pozitivă a variabilei.

Rezultatele precedente se mai pot stabili în modul următor: Punând

$$x = re^{i\theta}, \quad y = u + iv,$$

ecuațiunea (4) devine

$$re^{i\theta} = e^u e^{iv};$$

de unde

$$r = e^u, \quad v = \theta + 2k\pi,$$

$$y = \log r + i(\theta + 2k\pi),$$

$\log r$ fiind logaritmul aritmetic. Dacă x este real și pozitiv, putem lua $\theta = 0$ și formula precedentă dă

$$\log x = \log r + 2k\pi i.$$

Ramura $\log x$ corespunzătoare lui $k = 0$ este reală și coincide

cu logaritmul aritmetic al lui $|x|$. Dacă x este real și negativ, luând $\theta = \pi$, avem expresiunea

$$\log x = \log r + (2k + 1) i\pi,$$

care arată că logaritmul unui număr negativ nu admite nici o ramură reală.

254. Fie $x_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ un punct dat oarecare, diferit de $x = 0$ și fie

$$(6) \quad y = \log r + i\theta,$$

ramura care se reduce la $y_0 = \log x_0 + i\theta_0$ pentru $x = x_0$. Dacă x , plecând dela x_0 , descrie o curbă închisă care nu conține punctul $x = 0$, argumentul θ plecând dela θ_0 se reproduce și prin urmare y își revine valoarea inițială y_0 . Acest fapt ne era cunoscut, căci $x = 0$ fiind unicul punct singular la distanță finită, funcțiunea $\log x$ se comportă ca o funcțiune olomoră în orice regiune a planului în care nu se cuprinde acest punct.

Să presupunem că curba închisă descrisă de x conține punctul $x = 0$, argumentul θ se va mări cu $\pm 2\pi$ și y va deveni

$$y = y_0 \pm 2i\pi.$$

Descriind de k ori în acelaș sens un drum închis în jurul lui $x = 0$, vom avea

$$y = y_0 + 2ki\pi,$$

k fiind un număr întreg, pozitiv sau negativ. Punctul singular $x = 0$ se numește relativ la funcțiunea $\log x$, *punct singular logaritm*.

255. Așa dar, ramurile în număr nelimitat ale funcțiunii $\log x$ sunt legate între ele astfel că putem trece dela una la alta, făcând ca variabila x să descrie drumuri convenabile. Pentru acest motiv, funcțiunea $\log x$, deși se compune dintr'o infinitate de ramuri, este o funcțiune monogenă. Oricare ar fi ramura considerată, ecuațiunea (1) ne dă derivata

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x},$$

olomoră și diferită de zero pentru orice valoare finită a lui $x \neq 0$.

De unde rezultă că funcțiunea $y = \log x$ transformă, în mod conform, orice regiune a planului (x), care nu conține punctul $x = 0$, în regiunea corespunzătoare a planului (y).

256. Vom numi *valoare principală* sau *ramură principală* a

funcțiunii $\log x$, ramura acestei funcțiuni pentru care coeficientul θ al lui i din expresiunea (6) satisface condițiunea

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Dând, de exemplu, lui x valorile $1, -1, i, -i$, vom avea valorile principale corespunzătoare ale funcțiunii $\log x$: $0, i\pi, i\frac{\pi}{2}, -i\frac{\pi}{2}$. Ramura principală a funcțiunii $\log(1+x)$ e reprezentată, în domeniul lui $x=0$, prin seria (3), căci trebuie să se anuleze împreună cu x .

257. Proprietatea funcțiunii exponențiale exprimată prin egalitatea

$$e^{y_1} \cdot e^{y_2} = e^{y_1+y_2},$$

trage după sine relațiunea:

$$\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2,$$

abstracțiune făcând de un multiplu de $2i\pi$.

De asemenea avem, abstracțiune făcând de un multiplu de $2i\pi$,

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2,$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x.$$

Ultima relațiune arată că punctul $x = \infty$ este un punct singular de aceeași speță ca punctul $x = 0$.

258. *Observare.* Dacă ne mărginim la valorile principale ale funcțiunii $\log x$, egalitățile considerate mai sus pot să nu fie adevărate; căci membrele de al doilea determină una din ramurile logaritmului, și se poate întâmpla ca ramura așa determinată să nu fie o ramură principală. De exemplu, scriind

$$\log (-1)^2 = 2 \log (-1)$$

și luând valorile principale ale lui $\log 1$ și $\log (-1)$, membrul întâiu va fi nul și al doilea egal cu $2i\pi$.

259. *Aplicațiune.* Fie x un punct situat în interiorul cercului $|x| = 1$ sau pe acest cerc, însă diferit de ± 1 ; argumentul său fiind presupus cuprins între $-\pi$ și $+\pi$, argumentele expresiunilor

$$1+x, \quad 1-x, \quad \frac{1+x}{1-x},$$

sunt în valoare absolută mai mici sau cel mult egale cu $\frac{\pi}{2}$. Aceasta

se constată pe figurile alăturate, în cari A și B sunt punctele de intersecțiune ale fiecărui cerc cu axa reală ¹⁾.

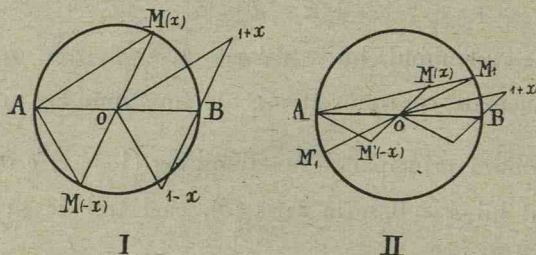


Fig. 24

De aci rezultă că între ramurile principale ale logaritmilor acestor expresiuni, avem egalitatea

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Însă ramurile principale ale logaritmilor din membrul al doilea sunt date, în domeniul punctului $x=0$, de seriile

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots;$$

prin urmare

$$(7) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

x fiind în interiorul cercului $|x|=1$ sau pe acest cerc, însă diferit de ± 1 .

Punând $x = e^{i\theta}$, cu condițiunea

$$(8) \quad 0 < \theta < \pi \text{ sau } 0 > \theta > -\pi,$$

formula (7) devine

$$(9) \quad \log \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \log \left(i \cotg \frac{\theta}{2} \right) = 2 \left(e^{i\theta} + \frac{1}{3} e^{3i\theta} + \dots \right).$$

¹⁾ În figura I punctul x este pe cerc și avem

$$\arg(1+x) = \widehat{OAM}, \arg(1-x) = -\widehat{OAM'},$$

$$\arg \frac{1+x}{1-x} = \widehat{MAM'} = \frac{\pi}{2}.$$

În figura II punctul x este interior. Prelungind dreapta AM până în M_1 , unde întâlnește cercul, avem

$$\arg(1+x) = \widehat{OAM_1}, \arg(1-x) = -\widehat{OAM'},$$

$$\arg \frac{1+x}{1-x} = \widehat{MAM'} < \widehat{M_1AM'} = \frac{\pi}{2} \quad (\widehat{OAM'} < \widehat{OAM'_1}).$$

Însă, în valoare principală, avem

$$\log \left(i \cotg \frac{\theta}{2} \right) = \begin{cases} \log \cotg \frac{\theta}{2} + i \frac{\pi}{2} \\ \log \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right) - i \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

după cum θ satisface cea dintâi sau cea de a doua din condițiunile (8).

De unde rezultă egalitățile

$$\begin{aligned} \log \cotg \left(\pm \frac{\theta}{2} \right) &= 2 \left[\cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta + \dots \right], \\ \pm \frac{\pi}{4} &= \sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta + \dots, \end{aligned}$$

în cari luăm semnul $+$ dacă avem $0 < \theta < \pi$ și semnul $-$ dacă avem $0 > \theta > -\pi$.

260. *Reprezentarea geometrică a ramurilor funcțiunii $y = \log x$.*

Reprezentarea planului (x) pe planul (y) se deduce imediat din egalitatea

$$y = \log r + i\theta \quad (x = re^{i\theta}).$$

Raportând y la două axe rectangulare $0u, 0v$ ($y = u + iv$), avem

$$\log r = u, \quad \theta = v.$$

Dacă dăm lui θ o valoare constantă θ_0 și facem ca r să varieze dela 0 la $+\infty$, y descrie dela $-\infty$ la $+\infty$, neconținut în același sens, dreapta $v = \theta_0$, paralelă la axa reală; iar dacă r este constant având o valoare pozitivă r_0 și θ variază dela $-\infty$ la $+\infty$, y descrie neconținut în același sens, dela $-\infty$ la $+\infty$, dreapta $u = \log r_0$, paralelă la axa imaginară.

Să ne închipuim că descompunem planul y în fâșii prin drepte paralele cu axa reală, având ordonatele $v = (2k + 1)\pi$, k primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, și privim o linie care desparte două fâșii ca aparținând fâșiei inferioare. Conchidem din variațiunile de mai sus:

1^o. Unui punct x diferit de zero corespunde un singur punct y în fiecare fâșie și că la două puncte diferite x corespund în aceeași fâșie două puncte diferite y . Cu alte cuvinte, fiecare fâșie y și planul (x) limitat de semi-axa reală negativă se corespund punct cu punct.

2^o. Când x străbate axa reală negativă, punctul corespunzător y trece dintr-o fâșie în fâșia vecină și anume în cea superioară sau în cea inferioară, după cum x trece dela semiplanul pozitiv la cel negativ, sau viceversa.

De unde rezultă că fiecare fâșie reprezintă o ramură diferită a funcțiunii. Să reprezentăm prin y ramura corespunzătoare valorilor θ satisfăcând inegalitățile

$$(2k-1)\pi < \theta \leq (2k+1)\pi.$$

Din această reprezentare rezultă că dacă x străbate axa reală negativă, ramura y_k se prelungește prin ramura y_{k+1} ¹⁾ sau viceversa, ramura y_{k+1} se prelungește prin ramura y_k , după cum x trece dela semiplanul pozitiv la cel negativ sau dela cel negativ la cel pozitiv.

261. Suprafața lui Riemann pentru funcțiunea $\log x$.

Considerațiunile precedente ne conduc la construcțiunea suprafeții lui Riemann pentru funcțiunea $\log x$.

Să ne închipuim o infinitate de plane P_k , ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), puse deasupra și dedesubtul planului P_0 al variabilei x ; aceleiaș valori x vor corespunde o infinitate de puncte suprapuse, câte unul în fiecare plan.

Să privim aceste plane ca neavând între ele alt punct comun decât punctul $x = 0$, și să efectuăm dealungul axei reale negative o tăietură, căreia să dăm în fiecare plan P_k două țărături: țărutul pozitiv caracterizat prin argumentul $\theta = (2k+1)\pi$ și țărutul negativ prin argumentul $\theta = (2k-1)\pi$. Din această construcțiune rezultă că fâșia din planul (y), determinată de inegalitățile

$$(2k-1)\pi < \theta < (2k+1)\pi,$$

corespunde punct cu punct cu planul P_k , limitat de tăietura considerată; căci, de o parte unui punct x din planul P_0 corespunde câte un punct în fiecare plan și, de altă parte, precum am văzut mai sus, toate fâșiile din planul (y) și planul P_0 , limitat de tăietura sa, se corespund punct cu punct. Am văzut deasemenea că ramura y_k se prelungește prin ramura y_{k+1} când x străbate axa reală negativă trecând dela semiplanul pozitiv la cel negativ. Dacă dar ne închipuim că facem să coincidă țărutul pozitiv al tăieturii din planul P_k cu țărutul negativ al tăieturii din planul P_{k+1} , se va realiza o trecere, fără rupere de continuitate, dela primul plan la cel de al doilea și viceversa, astfel ca ramurile y_k și y_{k+1} să se prelungească una prin cealaltă în acelaș timp când x trece dela unul la celalt din planele respective P_k , P_{k+1} .

Planele sau foile P_k astfel legate între ele formează o suprafață conexă între punctele căreia și acelea ale planului $y = \log x$ există

¹⁾ Adică trece într'un mod continuu dela cea dintâiu la cea de a doua.

o corespondență biunivocă. Suprafața astfel construită este suprafața lui Riemann pentru funcțiunea $y = \log x$. Fiecărui punct al acestei suprafețe, diferit de punctele $x = 0$, $x = \infty$ corespunde o valoare determinată pentru $\log x$.

262. Funcțiunea $\log (x - a)$, a fiind o constantă oarecare, admite punctul $x = a$ ca punct singular logarithmic, precum se recunoaște făcând $x - a = x'$. Ea este olomorfă în orice regiune a planului care nu conține punctul $x = a$ și se mărește cu $\pm 2i\pi$ când x înconjoară odată acest punct, în sensul pozitiv sau negativ.

Fie x_0 un punct oarecare diferit de a ; putem scrie

$$\begin{aligned}\log (x - a) &= \log (x_0 - a + x - x_0) \\ &= \log (x_0 - a) + \log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - a} \right).\end{aligned}$$

Luând pentru $\log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - a} \right)$ ramura care se anulează pentru $x = x_0$, vom avea dezvoltarea

$$\log (x - a) = \log (x_0 - a) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0 - a} \right)^n,$$

valabilă într'un cerc cu centrul în x_0 și trecând prin punctul a .

263. Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă într'o regiune dată și x_0 un punct ordinar; avem

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots$$

Presupunând $f(x_0) \neq 0$, putem scrie

$$f(x) = f(x_0) \cdot [1 + (x - x_0) P(x - x_0)]$$

$$\log f(x) = \log f(x_0) + \log [1 + (x - x_0) P(x - x_0)].$$

Punând

$$u = (x - x_0) P(x - x_0),$$

avem, pentru toate valorile u cari satisfac inegalitatea $|u| < 1$,

$$\log (1 + u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \dots$$

și revenind la variabila x , obținem logarithmul din urmă exprimat, în domeniul lui x_0 , printr'o serie întreagă de $x - x_0$ și prin urmare, în domeniul acestui punct avem

$$\log f(x) = P(x - x_0).$$

Așa dar într'o regiune a planului în care $f(x)$ este olomorfă, fără a se anulă, orice ramură a funcțiunii $\log f(x)$ este o funcțiune olomorfă.

Dacă x_0 este un zero de ordinul m al funcțiunii $f(x)$, putem scrie

$$f(x) = (x - x_0)^m P(x - x_0) \quad [P(x - x_0)]_{x=x_0} \neq 0;$$

de unde

$$\log f(x) = m \log (x - x_0) + \log P(x - x_0).$$

Prim urmare, în virtutea celor ce preced, avem, în domeniul lui x_0 ,

$$\log f(x) = m \log (x - x_0) + P(x - x_0),$$

expresiune care arată că dacă x înconjoară odată punctul x_0 în sensul pozitiv sau negativ, $\log f(x)$ se reproduce mărit cu $\pm 2m\pi$.

Dacă x_0 este un pol de ordinul m adică dacă avem

$$f(x) = (x - x_0)^{-m} P(x - x_0) \quad [P(x - x_0)]_{x=x_0} \neq 0,$$

rezultă

$$\log f(x) = -m \log (x - x_0) + P(x - x_0).$$

În rezumat, ramurile funcțiunii $\log f(x)$, $f(x)$ fiind o funcțiune analitică uniformă, sunt funcțiuni analitice olomorfe în orice regiune în care $f(x)$ este olomorfă, fără o avea nici un zero; zerurile și polurile lui $f(x)$ sunt puncte singulare logaritmice ale tuturor ramurilor.

264. *Observare.* Din teorema generală (139) s'a conchis că seria $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ al cărei cerc de convergență este cercul $|x| = 1$, are punctul $x = 1$ ca punct singular. Acest fapt se verifică cu ajutorul egalității

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\log (1 - x),$$

care ne arată în acelaș timp că punctul $x = 1$, este unicul punct singular al seriei pe cercul său de convergență.

Iată un al doilea exemplu de serie întregă convergentă pe tot cercul său de convergență, ($|x| = 1$), și care în virtutea teoremei menționate are punctul $x = 1$ ca punct singular:

$$P(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots$$

Inlocuind $\frac{1}{n(n-1)}$ prin $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, seria precedentă se poate scrie

$$\begin{aligned} P(x) &= x \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n} \\ &= -x \log (1-x) + x + \log (1-x) \\ &= x + (1-x) \log (1-x), \end{aligned}$$

expresiune, care pune în evidență că punctul $x = 1$ este un punct singular al seriei, deși seria este absolut convergentă în acest punct.

265. Funcțiunea a^x , a fiind o constantă oarecare diferită de zero. Prin definițiune, luăm

$$(1) \quad a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{2} + \dots;$$

de unde

$$(2) \quad \frac{d a^x}{d x} = a^x \log a.$$

Seria din membrul al doilea din (1) va fi determinată, prin urmare și funcțiunea a^x , îndată ce fixăm valoarea lui $\log a$ și este evident că în formulele (1) și (2) acest logaritm este unul și același.

266. Funcțiunea x^m , m fiind o constantă oarecare. Presupunând $x \neq 0$, vom lua, ca definițiune,

$$(1) \quad x^m = e^{m \log x}.$$

Această funcțiune nu poate avea alt punct singular la distanță finită decât punctul $x = 0$. Fie (x^m) una din valorile ei, de exemplu, aceea care corespunde la valoarea principală a funcțiunii $\log x$; vom avea

$$x^m = (x^m) e^{2kmi\pi},$$

k fiind un număr întreg oarecare. Toate aceste valori se pot obține, precum arată formula (1), plecând dela una din ele și făcând ca variabila x să se învâртеască în jurul originii de un număr oarecare de ori.

1^o. Dacă m este un număr întreg diferit de zero, $e^{2kmi\pi} = 1$ funcțiunea este uniformă în tot planul.

2^o. Fie $m = \frac{q}{p}$, p și q fiind două numere întregi prime între ele. Dând lui k valorile $0, 1, 2, \dots, p-1$, obținem p valori diferite formând un sistem circular, la cari se reduc toate valorile lui x^m . Regăsim astfel rezultate cunoscute.

3^o. Dacă m este un număr incomensurabil sau complex, x^m admite o infinitate de valori în fiecare punct x : la valori diferite ale lui k corespund valori diferite pentru x^m ; căci altfel ar urmă să avem

$$e^{2(k-k')mi\pi} = 1,$$

egalitate imposibilă pentru $k \neq k'$.

Din formula (1) rezultă egalitatea

$$x^m \cdot x'^m = e^{m(\log x + \log x')}$$

și dacă luăm determinațiunile logaritmulor astfel ca $\log x + \log x' = \log x, x'$, avem

$$x^m \cdot x'^m = (xx')^m.$$

267. *Desvoltarea în serii.* Fiecărei ramuri a funcțiunii $\log x$ corespunde funcțiunii x^m , în domeniul unui punct $x_0 \neq 0$, o serie întreagă de $(x - x_0)$. Să considerăm mai întâiu funcțiunea

$$(1 + x)^m = e^{m \log (1+x)}$$

și să căutăm desvoltarea ei în domeniul lui $x = 0$. Pentru

$$u = m \log (1 + x),$$

vom avea

$$(1) \quad (1 + x)^m = e^u = \sum_0^{\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

De altă parte, luând pentru $\log (1 + x)$ ramura care se anulează împreună cu x , avem seria

$$(2) \quad u = m \log (1 + x) = m \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} x^{\mu},$$

care substituită în (1) ne dă o desvoltare de forma

$$(3) \quad (1 + x)^m = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Seria (1) fiind convergentă în tot planul variabilei u , pe când seria (2) este convergentă în cercul $|x| = 1$, rezultă că seria (3) este convergentă în același cerc.

Coeficienții fiind dați de expresiunile

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} (1 + x)^m \right]_{x=0} = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!},$$

ramura considerată a funcțiunii $(1 + x)^m$, care se reduce la 1 pentru $x = 0$, va fi reprezentată în cercul $|x| = 1$ prin seria

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

Inlocuind în egalitatea precedentă pe x prin $x - 1$, obținem seria

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} (x-1)^n,$$

care reprezintă, în cercul $|x| = 1$, ramura funcțiunii x^m care se reduce la 1 pentru $x = 1$. De asemenea putem scrie

$$\begin{aligned} x^m &= (x_0 + x - x_0)^m = x_0^m \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^m \\ &= x_0^m \sum_0^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n, \end{aligned}$$

egalitate valabilă în cercul $|x - x_0| = |x_0|$.

Din cele ce preced rezultă că x^m este o funcțiune analitică monogenă în toată întinderea planului, având o infinitate de ramuri cari, precum am văzut, se pot deduce dintr'una din ele.

Oricare ar fi ramura considerată, formula [(1) § 266] dă

$$\frac{d}{dx} x^m = \frac{m}{x} e^{m \log x} = m x^{m-1},$$

cu condițiunea, evident justificată, ca $\log x$ care intră în definițiunea funcțiunilor x^m și x^{m-1} să fie același.

268. Să considerăm expresiunea

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

și să căutăm către ce limită tinde ramura principală (aceea care se reduce la 1 pentru $x=0$), când m tinde către infinit, într'un mod oarecare. Avem

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^{m \log \left(1 + \frac{x}{m}\right)} = e^{x+x} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{m}\right)^n.$$

Fie R un număr pozitiv oricât de mare voim și x un punct al planului situat în interiorul cercului descris din origină ca centru cu raza R . Privind m ca variabil, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{m}\right)^n$$

întreagă în raport cu $\frac{1}{m}$ este absolut și uniform convergentă pentru toate valorile lui m cari satisfac inegalitatea $|m| > R$ și se anulează împreună cu $\frac{1}{m}$. Prin urmare, oricare ar fi valoarea finită a lui x , avem pentru ramura considerată

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

II. — FUNCȚIUNEA ARCTGX

269. Rezolvind în raport cu y ecuațiunea

$$(1) \quad x = \operatorname{tg} y = i \frac{1 - e^{2iy}}{1 + e^{2iy}},$$

obținem expresiunea

$$(2) \quad y = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2i} [\log(1+ix) - \log(1-ix) + 2k\pi i]$$

care se mai poate scrie

$$(3) \quad y = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} [\log(x-i) - \log(x+i) + 2k\pi i],$$

k fiind un număr întreg arbitrar. Funcțiunea y pe care o reprezentăm prin simbolul

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

este așa dar o funcțiune analitică monogenă cu o infinitate de ramuri neavând alte singularități decât punctele singulare logaritmice $x = \pm i$. Formula (3) arată că dacă punctul x se mișcă odată, în sensul pozitiv, în jurul unuia din punctele singulare, fiecare ramură se reproduce mărită respectiv cu $\pm\pi$, după cum x se mișcă în jurul punctului $x = i$ sau în jurul punctului $x = -i$; prin urmare fiecare ramură se reproduce dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor acestor puncte. Reprezintănd prin (y) valoarea unei ramuri într'un punct ordinar oarecare x , valoarea oricărei alte ramuri corespunzătoare aceluiaș punct va fi cuprinsă în expresiunea

$$y = (y) + k\pi.$$

Toate ramurile au aceeași derivată

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

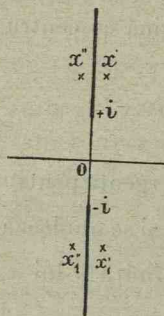


Fig. 25

Să ne închipuim două secțiuni făcute în planul (x) , dealungul axei imaginare, respectiv dela $+i$ la $+i\infty$ și dela $-i$ la $-i\infty$. Se recunoaște lesne că în două puncte infinit apropiate situate de o parte și de alta a uneia din ele, valorile unei ramuri oarecari, vor diferi între dânsese prin $\pm\pi$. Astfel, după figură, avem

$$\lim_{x' \rightarrow x''} [\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''] = \pi,$$

$$\lim_{x'_1 \rightarrow x''_1} [\operatorname{arctg} x'_1 - \operatorname{arctg} x''_1] = \pi.$$

Din reprezentarea planului (y) pe planul (x) , variabilele x, y fiind legate între ele prin relațiunea $x = \operatorname{tg} y$, rezultă că planul (x) limitat de cele două secțiuni considerate, se transformă punct cu punct în fâșia din planul (y) limitată de dreptele $y = \pm \frac{\pi}{2}$ dintre cari una trebuie exclusă.

270. Să numim ramură *principală* a funcțiunii $\operatorname{arctg} x$ aceea care corespunde ramurii principale a funcțiunii $\log \frac{1+ix}{1-ix}$, și fie

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \varrho e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi;$$

de unde

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \varrho + \frac{\varphi}{2},$$

Prin urmare, dacă separând partea reală de cea imaginară, scriem

$$\operatorname{arctg} x = u + iv$$

vom avea, pentru ramura principală,

$$-\frac{\pi}{2} < u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Obținem elementul acestei ramuri în domeniul lui $x = 0$, aplicând formula (7) (§ 259), care ne dă:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots,$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac condițiunea $|x| \leq 1$, exceptând valorile $x = \pm i$.

Punctul $x = \infty$ este un punct ordinar pentru toate ramurile funcțiunii. Considerând, de exemplu, ramura principală, avem în domeniul punctului ∞ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \frac{1}{2i} \left[\log(-1) + \log \frac{1 - \frac{i}{x}}{1 + \frac{i}{x}} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots \end{aligned}$$

III. — FUNCȚIUNEA ARCSINX

271. Ecuațiunea

$$(1) \quad x = \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ne dă

$$e^{2iy} - 2ixe^{iy} - 1 = 0,$$

de unde

$$(2) \quad y = \frac{1}{i} \log \left(ix \pm \sqrt{1 - x^2} \right).$$

Funcțiunea y , pe care o reprezentăm prin $\arcsin x$, este așa dar o funcțiune analitică în tot planul, având o dublă serie infinită de ramuri, ramurile aceleș serii diferind între ele prin multiple de 2π , corespunzătoare valorilor în număr infinit ale logaritmului.

Fie

$$y_1 = \frac{1}{i} \log \left(ix + \sqrt{1-x^2} \right),$$

$$y_2 = \frac{1}{i} \log \left(ix - \sqrt{1-x^2} \right),$$

câte o ramură din fiecare serie; vom avea, făcând suma lor,

$$(3) \quad y_1 + y_2 = \frac{1}{i} \log(-1) = (2k+1)\pi, \quad k \text{ întreg.}$$

Prin urmare, reprezentând prin (y) una din ramurile funcțiunii arc $\sin x$, cele două serii de ramuri corespunzătoare aceleiași valori a lui x , vor fi cuprinse în expresiunile

$$y = \begin{cases} (y) + 2k\pi, \\ \pi - (y) + 2k\pi, \end{cases}$$

k fiind un număr întreg oarecare.

Vom arăta că toate ramurile se pot deduce dintr'una din ele, făcând ca x să descrie drumuri convenabile. Să observăm mai întâi că funcțiunea de sub semnul logaritm nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui x ; căci ecuațiunea

$$ix \pm \sqrt{1-x^2} = 0,$$

făcută rațională, dă $1 = 0$. De unde rezultă că funcțiunea arc $\sin x$ nu poate avea puncte singulare diferite de punctele de ramificațiune $x = \pm 1$ ale radicalului $\sqrt{1-x^2}$ și de punctul $x = \infty$.

272. Să examinăm efectul produs asupra unei ramuri când x se învârtește în jurul unuia din punctele de ramificațiune. Să considerăm, pentru a fixa ideile, cele două ramuri cari se reduc respectiv la 0 și la π pentru $x = 0$. Aceste două ramuri sunt legate între ele prin ecuațiunea (3), în care facem $k = 0$; în punctul $x = 1$ ele sunt egale cu $\frac{\pi}{2}$. Dacă x descrie odată o curbă închisă în jurul punctului $x = 1$, pe când punctul $x = -1$ este exterior curbei, radicalul $\sqrt{1-x^2}$ își schimbă semnul; cele două ramuri considerate se permută între ele ¹⁾.

Deasemenea se permută între ele, în jurul punctului $x = -1$, două ramuri cari pentru $x = 0$ sunt egale respectiv cu $2k\pi$ și $(2k+1)\pi$, k fiind un număr întreg oarecare.

Concluziuni analoage se aplică punctului $x = -1$. În acest

¹⁾ Permutarea nu se poate face decât între cele două ramuri cari devin egale în punctul de ramificațiune, căci fiind continue ele trebuie să difere infinit de puțin în vecinătatea punctului de ramificațiune.

punct coincid ramurile cari pentru $x = 0$ se reduc respectiv la $2k\pi$ și la $(2k - 1)\pi$; aceste ramuri se permută între ele, când x se învârtește în jurul punctului $x = -1$.

Din cele ce preced rezultă că dacă x descrie succesiv contururile elementare relative la cele două puncte critice $(0, 1)$, $(0, -1)$, ramura inițială se mărește cu $\pm 2\pi$. Cu alte cuvinte, dacă x descrie o curbă închisă în interiorul căreia se găsesc ambele puncte critice, funcțiunea $\arcsin x$ se mărește cu $\pm 2\pi$. Acest rezultat se mai poate obține făcând ca x să descrie un cerc cu centrul în origină cu o rază mai mare ca 1. Când x descrie un asemenea cerc, radicalul se reproduce, nu însă și funcțiunea $\arcsin x$. În adevăr, pentru $|x| > 1$ avem expresiunile

$$\begin{aligned} ix \pm \sqrt{1 - x^2} &= ix \left[1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= ix \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2.4} x^4 - \dots \right) \right], \end{aligned}$$

a căror formă, punând $x = \frac{1}{x'}$, este respectiv

$$\frac{1}{x'} P(x'), \quad x' P_1(x'),$$

P și P_1 fiind serii întregi convergente în interiorul cercului $|x'| = 1$ și cari nu se anulează în acest cerc.

De altă parte, cercului descris de x în sensul pozitiv, în jurul originii ca centru cu o rază mai mare ca 1, corespunde un cerc descris de x' în sensul negativ, în jurul lui $x' = 0$ cu o rază mai mică ca 1.

Însă când x' descrie un astfel de cerc, funcțiunile

$$\log x'^{-1} P(x'), \quad \log x' P_1(x')$$

se reproduc mărite respectiv cu $\pm 2i\pi$; prin urmare ramurile corespunzătoare ale funcțiunii $\arcsin x$ se vor reproduce mărite cu $\pm 2\pi$.

Din cele ce preced rezultă că toate ramurile funcțiunii $\arcsin x$ se pot deduce, plecând dela una din ele și făcând ca x să descrie drumuri convenabile. Funcțiunea considerată este așa dar o funcțiune monogenă în tot planul.

273. Derivând ambele membre ale ecuațiunii $x = \sin y$, obținem

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

radicalul fiind determinat de $\cos y$. Referindu-ne la cele două

serii de ramuri cuprinse în egalitatea (2), vedem că toate ramurile aceleiaș serii au aceeași derivată.

Avem, în interiorul cercului $|x| = 1$,

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots,$$

de unde integrând, obținem, pentru ramura care se anulează împreună cu x ,

$$y = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

În fine, observăm că punctul $x = \infty$, este punct singular logaritmnic pentru toate ramurile funcțiunii; căci în domeniul acestui punct avem, pentru cele două serii de ramuri, respectiv

$$i \operatorname{arc} \sin x = \begin{cases} \log \left[x P \left(\frac{1}{x} \right) \right] \text{ sau} \\ \log \left[\frac{1}{x} P_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right]. \end{cases}$$

Acest rezultat se mai poate pune în evidență dezvoltând radicalul

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{i}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

după puterile lui $\frac{1}{x}$ și integrând. De unde

$$y = C \pm i \left[\log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \dots \right].$$

CAPITOLUL XIII.

TEORIA FUNCȚIUNILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ DUPĂ CAUCHY.

I. — FUNCȚIUNI ANALITICE.

274. *Definițiune.* Fie x, y două variabile reale independente și $P(x, y), Q(x, y)$ două funcțiuni reale, continue, având derivate parțiale de primul ordin $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Expresiunea

$$(1) \quad u = P + iQ$$

este o funcțiune de variabilele x și y .

Să examinăm în ce caz *Cauchy* zice că u este o funcțiune de variabilă complexă $z = x + iy$.¹⁾

Fie Δx , Δy două creșteri date variabilelor x , y și ΔP creșterea corespunzătoare a lui $P(x, y)$; putem scrie

$$\begin{aligned}\Delta P &= [P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [P(x, y + \Delta y) - P(x, y)] \\ &= \Delta x P'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y) + \Delta y P'_y(x, y + \theta_1 \Delta y),\end{aligned}$$

θ și θ_1 fiind două cantități pozitive mai mici decât 1. Să presupunem că derivatele parțiale considerate mai sus sunt *continue* într-o regiune dată (R), și prin urmare uniform continue; urmează că la un număr pozitiv ε dat corespunde un număr pozitiv η astfel că, oricare ar fi punctul (x, y) în regiunea (R), avem

$$|P'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y) - P'_x(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| P'_y(x, y + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

cu condițiunea $|\Delta x| < \eta$, $|\Delta y| < \eta$. Prin urmare putem scrie

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$|\varepsilon_1| < \frac{\varepsilon}{4}, |\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De asemenea avem

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Delta y + \varepsilon'_1 \Delta x + \varepsilon'_2 \Delta y,$$

$$|\varepsilon'_1| < \frac{\varepsilon}{4}, |\varepsilon'_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Așa dar

$$\Delta u = \Delta P + i \Delta Q = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \Delta y + \delta u,$$

punând

$$\begin{aligned}\delta u &= (\varepsilon_1 + i \varepsilon'_1) \Delta x + (\varepsilon_2 + i \varepsilon'_2) \Delta y \\ &= \left[(\varepsilon_1 + i \varepsilon'_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i \varepsilon'_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \Delta z.\end{aligned}$$

Însă

$$|\varepsilon_1 + i \varepsilon'_1| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon'_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varepsilon_2 + i \varepsilon'_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

¹⁾ Pentru claritatea noțiunilor ce se introduc, se presupune că funcțiunile P și Q sunt univoce și prin urmare că u primește o valoare determinată în fiecare din punctele considerate.

și din $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ rezultă

$$|\Delta x| \leq |\Delta z|, \quad |\Delta y| \leq |\Delta z|.$$

Prin urmare scriind

$$(2) \quad \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \varrho,$$

avem, în toată regiunea (R), $|\varrho| < \varepsilon$, dacă $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ sunt mai mici ca η . Făcând ca Δx , și Δy să tindă către zero, avem $\lim \varrho = 0$, pe când fracțiunea din membrul al doilea tinde către o valoare care, în genere, depinde de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, adică de drumul ce urmează punctul $z + \Delta z$ când se apropie de z . Pentru ca valoarea acestei fracțiuni să fie independentă de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ și prin urmare pentru ca $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ să tindă către o limită determinată, în orice mod Δz ar tinde către zero, este necesar și suficient să avem ecuațiunea

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

care trage după sine ecuațiunile

$$(4) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dacă aceste ecuațiuni sunt satisfăcute, oricare ar fi punctul $z = x + iy$ într'o regiune dată, *Cauchy* zice că

$$u = P(x, y) + iQ(x, y)$$

este în acea regiune o *funcțiune monogenă* de z ; $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z}$, care în virtutea acestor ecuațiuni, are o valoare unică, este *derivata* funcțiunii u în punctul z .

Să observăm că funcțiunea monogenă $u = P + iQ$ conține variabilele x, y numai în combinațiunea $z = x + iy$; căci determinantul funcțional

$$\frac{D(u, z)}{D(x, y)} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

este nul în virtutea ecuațiunii (3). Putem dar scrie $u = f(z)$.

Riemann suprimă epitetul monogenă și zice în aceleași condițiuni (4) că u este o funcțiune de variabilă complexă z .

Astăzi se întrebuițează cuvântul de *funcțiune analitică*. Vom vedea mai departe că funcțiunea analitică astfel definită coincide cu funcțiunea analitică după *Weierstrass* (145).

275. S'a presupus că funcțiunile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ au în regiunea considerată o valoare unică în fiecare punct (x, y) și prin urmare funcțiunea $f(z) = P + iQ$ are o valoare unică în fiecare punct z . Se păstrează numele de funcțiune analitică și în cazul când $f(z)$ este susceptibil de mai multe valori, dacă fiecare din aceste valori, variând într'un mod continuu cu z , admite o derivată corespunzătoare. În cazul când funcțiunea admite o valoare unică în fiecare punct, se zice că este *uniformă* în regiunea considerată; în cazul contrar, funcțiunea se zice *multiformă*.

O funcțiune analitică se zice *olomorvă* într'o regiune dată, dacă este *uniformă* și *continuă* în acea regiune.

276. Pentru a stabili condițiunile (4) ale lui Cauchy, s'a presupus că derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ sunt funcțiuni continue de variabilele x, y . De unde rezultă că derivata funcțiunii $u = f(z)$, care, în virtutea acelor condițiuni, este dată de expresiunile

$$(5) \quad f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y},$$

este în acelaș timp o funcțiune continuă de z .

Viceversa, dacă derivata $f'(z)$ este o funcțiune continuă de z într'o regiune dată, derivatele parțiale considerate sunt funcțiuni continue de x, y în aceiaș regiune. În adevăr, fie $z_0 = x_0 + iy_0$ și $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0$ valorile acestor derivate în punctul (x_0, y_0) ; avem

$$\begin{aligned} f'(z) - f'(z_0) &= \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 + i \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 \right] \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y} - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 - i \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 \right], \end{aligned}$$

de unde inegalitățile

$$|f'(z) - f'(z_0)| \geq \begin{cases} \left| \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 \right|, & \left| \frac{\partial Q}{\partial y} - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 \right|, \\ \left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 \right|, & \left| \frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 \right|. \end{cases}$$

cari justifică aserțiunea noastră; căci membrul întâi fiind prin ipoteză $< \varepsilon$, rezultă că fiecare din expresiunile din membrul al doilea este $< \varepsilon$.

277. Se va vedea mai târziu (Integrala lui Cauchy) că derivata unei funcțiuni analitice $f(z)$ într'o regiune dată este o funcțiune

analitică în aceeași regiune; de unde rezultă că $f'(z)$ admite o derivată continuă $f''(z)$ și prin urmare că funcțiunile P și Q admit derivate parțiale continue de ordinul al doilea, între cari există relațiuni ce se pot deduce derivând succesiv ecuațiunile (4). De asemenea $f''(z)$ admite o derivată $f'''(z)$, etc.

278. Să facem abstracțiune de teorema lui Cauchy, la care am făcut aluziune mai sus, să presupunem numai că funcțiunile P și Q admit derivate parțiale de ordinul al doilea, continue. Derivând ecuațiunile (4) în raport cu x și y obținem expresiunile

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Să punem

$$(7) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = P_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_1;$$

vom avea

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P_1}{\partial x}, & \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P_1}{\partial y}, & \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}; \end{cases}$$

de unde, în virtutea egalităților (6),

$$(9) \quad \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Aceste ecuațiuni exprimă că derivata

$$f'(z) = P_1(x, y) + i Q_1(x, y)$$

este o funcțiune analitică de z .

279. Din ecuațiunile (6) deducem

$$(10) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

De unde rezultă că pentru ca $u = P + iQ$ să fie funcțiune analitică, nici una din funcțiunile P și Q nu poate fi luată într'un mod arbitrar; ambele trebuie să fie soluțiuni ale ecuațiunii

$$(11) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

numită ecuațiunea lui *Laplace*. O soluțiune a acestei ecuațiuni se numește *funcțiune armonică*. Prin urmare funcțiunile P și Q ,

cari constituie funcțiunea analitică $u = P + iQ$, trebuie să fie funcțiuni armonice. Nu este însă de ajuns a lua două funcțiuni armonice oarecare pentru a forma o funcțiune analitică ¹⁾; ci luând una din ele oarecare, cealaltă este, în virtutea ecuațiilor (4), determinată, abstracțiune făcând de o constantă arbitrară.

În adevăr, să presupunem dată funcțiunea P ; pentru a determina funcțiunea Q , considerăm diferențiala

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

care, în virtutea ecuațiilor (4), devine

$$dQ = -\frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy;$$

de unde, observând că membrul al doilea este o diferențială exactă (10), deducem

$$(12) \quad Q = \int \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy \right) + C.$$

279. *Observări.* 1^o. O funcțiune analitică nu poate fi numai reală sau numai pur imaginară în tot planul variabilei independente; într'un mod mai general, o funcțiune analitică nu poate avea partea sa reală sau partea sa imaginară constantă în tot planul fără a se reduce la o constantă. Căci, presupunând, de exemplu, P constant, avem și pentru Q o valoare constantă precum rezultă din egalitatea (12).

Deasemenea $|f(z)| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ nu poate fi constant în tot planul. În adevăr, fie $P^2 + Q^2 = C$. Derivând în raport cu x și y și ținând seamă de ecuațiunile (4), avem

$$P \frac{\partial P}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad Q \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

De unde rezultă ecuațiunea

$$P^2 + Q^2 = 0;$$

sau, dacă determinantul este diferit de zero, avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

prin urmare și

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

În toate cazurile rezultă că P și Q sunt constante; prin urmare funcțiunea $f(z)$ se reduce la o constantă.

¹⁾ Exemplu: funcțiunile $P(x, y) = x^2 - y^2$, $Q(x, y) = xy$ sunt funcțiuni armonice, însă $x^2 - y^2 - ixy$ nu este funcțiune analitică.

20. Propozițiunea precedentă este cuprinsă în cea următoare, care este mai generală: *Dacă punctul $z(x, y)$ se mișcă într'un mod arbitrar în plan, este imposibil ca punctul $u = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ să descrie o curbă (în înțelesul obișnuit al cuvântului).*

În adevăr, fie

$$(13) \quad X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y)$$

și să presupunem că ar putea să existe între X și Y o ecuațiune

$$(14) \quad \varphi(X, Y) = 0.$$

Ar rezultă ca, eliminând X și Y între ecuațiunile (13) și (14), să avem între x și y o ecuațiune

$$\psi(x, y) = 0;$$

ceea ce este contrar ipotezii, după care z se mișcă într'un mod arbitrar în plan.

280. Studiul funcțiunilor analitice se poate face studiind proprietățile funcțiunilor de două variabile cari satisfac ecuațiunea lui Laplace. Această metodă a fost introdusă de *Riemann*¹⁾ și poartă numele lui.

Noi vom urmă în aceste lecțiuni metoda lui *Cauchy*, pe care o vom alătura la aceea a lui *Weierstrass*.

II. — INTEGRALE DEFINITE.

281. Fie $f(z)$ o funcțiune continuă de variabila complexă z , dealungul unui arc de curbă L și z_0, Z punctele extreme ale acestui arc. Pe linia L să fixăm n puncte intermediare: $z_1, z_2, \dots, z_n$ și să considerăm suma

$$(1) \quad S = \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k),$$

în care ζ_k este un punct oarecare al arcului cuprins între z_k și z_{k+1} , iar $z_{n+1} = Z$. Voim să arătăm că această sumă tinde către o limită finită când n tinde către infinit, astfel ca în același timp diferențele $(z_{k+1} - z_k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), să tindă către zero. Această limită este independentă de alegerea punctelor z_k .

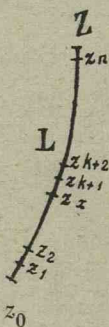


Fig. 26

Funcțiunea $f(z)$ fiind continuă, prin urmare uniform continuă, putem face ca la un număr ε pozitiv, arbitrar de

¹⁾ Inaugural Dissertation.

mic să corespundă un număr δ , astfel ca să avem

$$(2) \quad \begin{aligned} & |f(z) - f(\zeta_k)| < \varepsilon \\ & \text{pentru } |z_{k+1} - z_k| < \delta \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Să subdividem fiecare din intervalele ¹⁾ obținute prin operațiunea precedentă (ce vom numi *prima* operațiune) în intervale mai mici, intercalând între două puncte extreme un număr oarecare de puncte (z') și să formăm suma S' analoagă cu suma S , corespunzătoare tuturor punctelor de diviziune ale liniei L .

Pentru a calcula suma S' , să efectuăm mai întâiu sumele parțiale s_k , corespunzătoare punctelor intercalate în fiecare din intervalele (z_k, z_{k+1}) și apoi să adunăm toate aceste rezultate. Dacă însemnăm prin $z'_1, z'_2, \dots, z'_h$ punctele intercalate între z_k și z_{k+1} , suma parțială din S' , corespunzătoare punctelor $z_k, z'_1, z'_2, \dots, z'_h, z'_{h+1}$ este

$$s_k = \sum_{k'=0}^{k'=h} (z'_{k'+1} - z'_{k'}) f(\zeta'_{k'}),$$

unde $z'_0 = z_k, z'_{h+1} = z_{k+1}$ și $\zeta'_{k'}$ este un punct oarecare al arcului cuprins între z'_k și $z'_{k'+1}$.

Seriind

$$f(\zeta'_{k'}) = f(\zeta_k) + \varepsilon_{k'}, \quad (k' = 0, 1, \dots, h),$$

avem, în virtutea inegalității (2), $|\varepsilon_{k'}| < \varepsilon$, de oarece punctele $\zeta'_{k'}$ sunt cuprinse în intervalul (z_k, z_{k+1}) .

Expresiunea s_k devine astfel

$$(3) \quad s_k = (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k) + R_k,$$

punând

$$R_k = \sum_{k'=0}^{k'=h} \varepsilon_{k'} (z'_{k'+1} - z'_{k'}).$$

Însă

$$|R_k| < \sum_{k'=0}^h |\varepsilon_{k'}| |z'_{k'+1} - z'_{k'}| < \varepsilon \sum_{k'=0}^h |z'_{k'+1} - z'_{k'}|$$

și observând că $|z'_{k'+1} - z'_{k'}|$ reprezintă lungimea drepte care unește punctele $z'_{k'}, z'_{k'+1}$, rezultă că avem

$$(4) \quad |R_k| < \varepsilon p_k,$$

p_k fiind egal cu perimetrul liniei poligonale ale cărei vârfuri sunt punctele $z'_{k'}, (k' = 0, 1, \dots, h)$.

¹⁾ Un interval (z_k, z_{k+1}) consistă în totalitatea punctelor situate pe L și cuprinse între punctele extreme, inclusiv aceste puncte.

Procedând în același mod pentru fiecare sumă parțială și adunând aceste sume, obținem

$$(5) \quad S' = \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k) + \sum_{k=0}^n R_k ;$$

de unde

$$(6) \quad S' - S = \sum R_k, \quad |S' - S| \leq \sum |R_k|,$$

Însă, în virtutea inegalității (4), care este adevărată oricare ar fi intervalul (z_k, z_{k+1}) , avem

$$(7) \quad \sum |R_k| < \varepsilon \sum p_k < \varepsilon l,$$

l fiind lungimea arcului L . De unde rezultă inegalitatea fundamentală

$$(8) \quad |S' - S| < \varepsilon l.$$

Această inegalitate este, precum arată raționamentul nostru, independentă de numărul punctelor intercalate (z') și de modul cum aceste puncte sunt alese. Dacă dar subdividem intervalele (z'_k, z'_{k+1}) din a doua operațiune, intercalând în fiecare din ele un număr oarecare de puncte (z'') și efectuăm suma relativă la totalitatea punctelor (z, z', z''), obținem o sumă S'' pe care o putem substitui sumei S' din (8), așa încât să avem

$$(9) \quad |S'' - S| < \varepsilon l.$$

Subdivizând succesiv intervalele obținute astfel și formând sumele corespunzătoare, analoage cu suma (1), obținem un șir de sume

$$(9) \quad S', S'', \dots S^{(n)}, \dots$$

satisfăcând inegalitatea

$$(10) \quad |S^{(n)} - S| < \varepsilon l \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Fie acum ε' un număr pozitiv mai mic ca ε ; putem presupune punctele (z') alese în a doua intercalare suficient de apropiate pentru ca z' și ζ' fiind două puncte în unul oarecare din intervalele corespunzătoare, să avem

$$(11) \quad |f(z') - f(\zeta')| < \varepsilon'.$$

Însă S'' este față de S' ceea ce S'' este față de S , rezultă că putem scrie

$$|S'' - S'| < \varepsilon' l$$

și prin urmare, raționând ca mai sus,

$$|S^{(n)} - S'| < \varepsilon' l.$$

Reprezintă prin ε'' un număr pozitiv mai mic ca ε , vom avea, printr'un raționament analog cu cel precedent,

$$|S^{(n)} - S''| < \varepsilon' l.$$

În rezumat, fiind dat un șir de numere pozitive

$$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots,$$

neconținut descrescând și având ca limită zero, există un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geq N$, $p \geq N$ să avem inegalitatea

$$|S^{(n)} - S^{(p)}| < \varepsilon^{(p)} l,$$

$S^{(n)}$ și $S^{(p)}$ făcând parte din șirul (9). Ceeace este tocmai condițiunea necesară și suficientă ca șirul

$$S, S', \dots, S^{(n)}, \dots$$

să aibă o limită finită.

Rămâne acum să arătăm că limita obținută este independentă de sistemul de subdiviziuni ale arcului L . Să intercalăm, pentru aceasta, pe curbă, între punctele z_0, Z un număr n' destul de mare de puncte

$$z'_1, z'_2, \dots, z'_{n'}, \dots,$$

situate oricum, însă supuse la singura condițiune ca

$$|z'_{k+1} - z'_k| < \delta, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n'),$$

$\delta > 0$ arbitrar de mic, și fie S_1 suma analoagă cu S . Să considerăm toate punctele (z) , (z') din ambele sisteme de intercalare, cari dau respectiv sumele S , S_1 , și să formăm suma analoagă S_2 , corespunzătoare acestor puncte.

Să comparăm suma S_2 cu fiecare din sumele S , S_1 . După modul cum a fost formată, suma S_2 poate fi luată drept suma S' considerată mai sus, căci ea se poate deduce din S subdivizând intervalele relative la prima subdiviziune.

Prin urmare avem

$$|S - S_2| < \varepsilon l.$$

Însă S_2 se poate, pentru același motiv, deduce din S_1 , așa că avem

$$|S_1 - S_2| < \varepsilon l.$$

De unde, ținând seamă de inegalitatea

$$|S - S_1| \leq |S - S_2| + |S_2 - S_1|,$$

rezultă că avem

$$|S - S_1| < 2\varepsilon l,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De unde conchidem că

sumele S și S_1 au aceeași limită, când numărul punctelor de diviziune din ambele sisteme tinde către infinit, astfel ca în același timp amplitudinea tuturor intervalelor să tindă către zero.

Această limită se numește *integrala definită* a funcțiunii $f(z)$, luată dela punctul z_0 la punctul Z , dealungul liniei L și se reprezintă prin simbolul

$$\int_{z_0 L Z} f(z) dz,$$

sau, mai pe scurt, prin

$$\int_L f(z) dz,$$

dacă nu este ambiguitate în privința sensului în care variabila de integrațiune z descrie linia L .

282. Din definițiunea integralei definite rezultă consecințele următoare:

1^o. Dacă linia L se compune din liniile $L_1, L_2, \dots, L_n$, avem

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz + \dots + \int_{L_n} f(z) dz,$$

sensul în care z descrie diferitele linii fiind același în ambele membre.

2^o. Dacă variabila z descrie linia L în sensuri opuse, obținem rezultate egale și de semne contrarii

$$\int_{z_0 L Z} f(z) dz = - \int_{Z L z_0} f(z) dz,$$

căci toți termenii celor două sume sunt doi câte doi egali și de semne contrarii.

3^o. Dacă linia L este o curbă închisă și dacă $f(z)$ are o valoare unică în fiecare punct al curbei, integrala $\int_L f(z) dz$ este independentă de punctul de plecare, însă își schimbă semnul când z descrie curba în sens invers.

283. Cunoscând maximul modului funcțiunii $f(z)$ dealungul liniei L , putem găsi o limită superioară a modului integralei corespunzătoare. În adevăr, avem

$$|\Sigma (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k)| \leq \Sigma |z_{k+1} - z_k| |f(\zeta_k)| < M \Sigma |z_{k+1} - z_k|,$$

reprezentând prin M maximul lui $|f(z)|$ dealungul liniei L . De unde rezultă inegalitatea căutată

$$(1) \quad \left| \int_{z_0 L Z} f(z) dz \right| \leq Ml.$$

284. Definițiunea integralei de o variabilă complexă se reduce la aceea a integralei curbilinii de variabile reale.

Fie

$$z = x + iy, z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$$

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

variabilele x, y și ξ, η fiind reale și ξ_k, η_k fiind cuprinse respectiv în intervalele $(x_k, x_{k+1}), (y_k, y_{k+1})$.

Vom avea

$$\begin{aligned} & \Sigma(z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k) \\ &= \Sigma(x_{k+1} - x_k) P(\xi_k, \eta_k) - \Sigma(y_{k+1} - y_k) Q(\xi_k, \eta_k) \\ &+ i [\Sigma(x_{k+1} - x_k) Q(\xi_k, \eta_k) + \Sigma(y_{k+1} - y_k) P(\xi_k, \eta_k)]. \end{aligned}$$

Funcțiunile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ fiind continue, se stabilește, precum se știe, că sumele din membrul al doilea au limite finite când diferențele $(x_{k+1} - x_k), (y_{k+1} - y_k)$ tind către zero. Aceste limite, numite integrale curbilinii, se reprezintă prin simbolurile

$$\int_L P(x, y) dx, \int_L Q(x, y) dy,$$

adăugându-se sensul în care punctul (x, y) descrie linia L .

Avem așa dar

$$\int_L f(z) dz = \int_L P dx - Q dy + i \int_L Q dx + P dy$$

linia de integrațiune fiind descrisă în același sens în ambele membre.

285. Să presupunem curba de integrațiune L reprezentată prin ecuațiunile

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ și $\psi(t)$ fiind funcțiuni continue de variabila reală t , având derivate continue de ordinul întâi. Fie t_0 și T valorile lui t cărora le corespund punctele z_0, Z extremitățile arcului L . Precum se știe din teoria schimbării de variabile în integrale definite, avem

$$\int_L P dx - Q dy = \int_{t_0}^T [P\varphi'(t) - Q\psi'(t)] dt;$$

prin urmare

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_0}^T [P\varphi'(t) - Q\psi'(t)] dt + i \int_{t_0}^T [Q\varphi'(t) + P\psi'(t)] dt.$$

286. *Valoarea medie a integralei.* Se știe că dacă $f(x)$ este o

funcțiune continuă de variabilă reală x , într'un interval (a, b) , avem

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi),$$

ξ fiind o valoare convenabilă a lui x , cuprinsă în intervalul (a, b) . Există o formulă analoagă și în cazul variabilei complexe.

Să considerăm integrala

$$\int_{z_0 L Z} f(z) dz,$$

și fie

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

ecuațiunile liniei de integrațiune L , variabila independentă fiind lungimea arcului s al acestei linii, cuprins între punctul fix z_0 și un punct variabil z . Avem

$$(2) \quad \left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| |dz|.$$

Însă $f(z)$ fiind o funcțiune continuă, modulul său

$$|f(z)| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

este o funcțiune continuă de (x, y) și prin urmare de variabila s , în acelaș timp cu funcțiunile $\varphi(s)$ și $\psi(s)$. Reprezintănd această funcțiune prin $F(s)$ și prin l lungimea arcului L , inegalitatea (2) va da

$$(3) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_0^l F(s) ds.$$

Să aplicăm integralei din membrul al doilea formula mediei; vom avea, reprezentând prin σ o valoare convenabilă a lui s , cuprinsă între 0 și l ,

$$\int_0^l F(s) ds = l F(\sigma).$$

Fie ζ valoarea lui z corespunzătoare lui $s = \sigma$ și θ un număr pozitiv mai mic ca 1; rezultă din cele ce preced că putem scrie

$$\left| \int_L f(z) dz \right| = \theta l |f(\zeta)|.$$

Fie R valoarea comună a ambelor membre, α argumentul integralei $\int_L f(z) dz$, β argumentul lui $f(\zeta)$; vom avea

$$\int_L f(z) dz = R e^{i\alpha}, \quad \theta l f(\zeta) = R e^{i\beta}.$$

De unde, punând $|\lambda| = \theta e^{i(\alpha-\beta)}$, avem

$$(4) \quad \int_L f(z) dz = \lambda l f(\zeta).$$

În această egalitate, în care λ este o cantitate complexă al cărei modul este < 1 , consistă formula ce am voit să obținem. Ea a fost dată de *G. Darboux*.

287. *Schimbarea variabilei independente.* Fie

$$z = \varphi(z')$$

o funcțiune de z' olomorvă într'o arie dată și L' un arc de curbă de o lungime finită l' , situat în această arie. Să reprezentăm prin L arcul de curbă corespunzătoare descrisă de z . Voim să arătăm că L are o lungime finită.

Fie z'_k, z'_{k+1} , două puncte vecine pe arcul L' și z_k, z_{k+1} punctele corespunzătoare pe arcul L ; putem scrie

$$z_{k+1} - z_k = (z'_{k+1} - z'_k) [\varphi'(z'_k) + \varepsilon_k],$$

ε_k tinzând către zero în acelaș timp cu diferența $z'_{k+1} - z'_k$ în tot lungul arcului L' , de oarece avem

$$\lim_{z'_{k+1} - z'_k = 0} \frac{z_{k+1} - z_k}{z'_{k+1} - z'_k} = \varphi'(z'_k)$$

La un ε pozitiv arbitrar de mic, corespunde deci un număr pozitiv δ , astfel încât, pentru $|z'_{k+1} - z'_k| < \delta$, să avem $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. De unde rezultă

$$\Sigma |z_{k+1} - z_k| < \Sigma |z'_{k+1} - z'_k| |\varphi'(z'_k)| + \varepsilon \Sigma |z'_{k+1} - z'_k|$$

și prin urmare, reprezentând prin l lungimea arcului L , avem

$$l < \int_0^{l'} |\varphi'(z')| ds + \varepsilon l'.$$

q. e. d.

Fie acum $f(z)$ o funcțiune olomorvă într'o arie dată A a planului (z) și $z = \varphi(z')$ o funcțiune olomorvă într'o arie dată (A') a planului (z'). Fie L' un arc de curbă situată în (A'); dacă arcul L corespunzător lui L' este cuprins în (A), vom avea

$$(1) \quad \int_L f(z) dz = \int_{L'} f[\varphi(z')] \varphi'(z') dz'.$$

În adevăr, păstrând notațiunile de mai sus, avem

$$(z_{k+1} - z_k) f(z_k) = (z'_{k+1} - z'_k) [\varphi'(z'_k) + \varepsilon_k] f[\varphi(z'_k)], \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon.$$

$$\Sigma (z_{k+1} - z_k) f(z_k) = \Sigma (z'_{k+1} - z'_k) f[\varphi(z'_k)] + \Sigma \varepsilon_k (z'_{k+1} - z'_k) f[\varphi(z'_k)];$$

de unde, punând

$$S = \sum (z_{k+1} - z_k) f(z_k), \quad S' = \sum (z'_{k+1} - z'_k) f[\varphi(z'_k)] \varphi'(z'_k),$$

rezultă

$$|S - S'| < \varepsilon \left| \int_{L'} f[\varphi(z')] dz' \right| < \varepsilon M',$$

M fiind limita superioară a lui $|f[\varphi(z')]|$ dealungul lui L' , sau, ceea ce este tot una, a lui $|f(z)|$ dealungul lui L . Membrul întâi fiind constant, rezultă egalitatea $S - S' = 0$. De unde conchidem egalitatea (1) scrisă mai sus.

CAPITOLUL XIV.

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE LUI CAUCHY.

288. *Teorema I. Dacă $f(z)$ este o funcțiune olomoră într-o regiune dată și C este o curbă închisă situată în acea regiune, integrala*

$$\int_C f(z) dz,$$

luată dealungul curbei este nulă.

În adevăr, fie

$$(1) \quad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

$P(x, y)$ și $Q(x, y)$ fiind funcțiuni continue, univoce, având derivate parțiale continue în interiorul curbei C și pe curbă. Vom avea

$$(2) \quad \int_C f(z) dz = \int_C P dx - Q dy + i \int_C Q dx + P dy.$$

Însă, dacă $U(x, y)$ și $V(x, y)$ sunt două funcțiuni continue, univoce, având derivate parțiale continue într-o regiune dată și C este o curbă închisă situată în acea regiune, avem după formula lui Green ¹⁾

$$(3) \quad \int_C U dx + V dy = - \iint_A \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy,$$

integrala dublă referindu-se la aria A interioară curbei C și integrala simplă la conturul C descris în sensul pozitiv. În virtutea acestei formule, egalitatea (2) se poate scrie

$$(4) \quad \int_C f(z) dz = - \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

¹⁾ Vezi, de ex. *Goursat, Cours d'Analyse*, t. I.

Însă între derivatele parțiale ale funcțiilor P și Q există relațiunile:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y};$$

prin urmare funcțiunile ce figurează sub integralele duble (4) sunt nule în toată întinderea ariei considerate; de unde rezultă egalitatea fundamentală

$$(5) \quad \int_C f(z) dz = 0.$$

q. e. d.

289. Teorema lui Cauchy, așa de simplă în enunțul ei, este o sorginte a celor mai frumoase și importante propozițiuni din teoria funcțiunilor și a numeroase aplicațiuni analitice.

Demonstrația precedentă a acestei teoreme a fost dată de Riemann. D-l *Goursat* a dat o demonstrațiune a teoremei lui Cauchy (*Cours d'Analyse*, t. II), fără a pune $f(z)$ sub forma (1) și fără a presupune continuitatea derivatei $f'(z)$, pe când demonstrațiunea lui Riemann, fiind bazată pe formula lui Green, presupune continuitatea derivatei parțiale ale funcțiilor P și Q și prin urmare a derivatei $f'(z)$.

290. *Demonstrațiunea teoremei lui Cauchy de către D-l Goursat.*

Fie $f(z)$ o funcțiune de z , despre care se presupune că este continuă într-o regiune dată și că admite o derivată în fiecare punct al acestei regiuni. Ceeace însemnează că fiind dat un punct oarecare ζ situat în acea regiune și un ε pozitiv, arbitrar de mic, există un ϱ pozitiv astfel că în domeniul $|z - \zeta| \leq \varrho$, avem inegalitatea

$$(1) \quad \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon.$$

Fie C o curbă închisă, rectificabilă, situată în acea regiune considerată și A aria interioară acestei curbe. Voim să arătăm că este posibil a descompune A prin linii transversale în compartimente σ_i astfel că fiind dat ε , există în fiecare σ_i un punct z_i , interior sau pe contur, pentru care avem

$$(2) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} - f'(z_i) \right| < \varepsilon,$$

când z descrie conturul lui σ_i .

Pentru mai multă claritate să presupunem că transversalele sunt linii drepte paralele cu axele de coordonate și egal depărtate între ele. Obținem astfel două feluri de compartimente: pătrate

și compartimente cuprinse în pătrate, având conturul lor format din segmente de laturi ale unui pătrat și din câte un arc al curbei C . Dacă în fiecare compartiment σ_i există un punct z_i pentru care inegalitatea (2) este satisfăcută, z fiind un punct oarecare al conturului respectiv, teorema este demonstrată. Dacă sunt

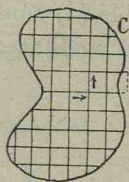


Fig. 27

compartimente cari nu împlinesc această condițiune, le subdividem în compartimente mai mici unind mijloacele laturilor opuse, pe când compartimentele cari împlinesc condițiunea rămân neatinse. Dacă compartimentele subdivizate împlinesc condițiunea (2), ne oprim aci; în cazul contrar, subdividem pe cele ce nu împlinesc condițiunea. Continuăm din acelaș mod, ajungem, după un număr limitat de operațiuni, ca toate compartimentele să îplinească condițiunea (2).

În adevăr, să presupunem că nu este așa și fie σ unul din compartimentele inițiale ce nu împlinesc condițiunea (2); s_1 unul din compartimentele lui subdivizate, care deasemenea nu împlinește acea condițiune. Fie s_2 un compartiment subdivizat al lui s_1 , care de asemenea nu împlinește condițiunea cerută, etc. Prin aceste subdiviziuni obținem un șir de compartimente

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots,$$

fiecare cuprins în cel precedent fără să atingem unul care să îplinească condițiunea (2). Aceste compartimente ale căror dimensiuni tind către zero, determină un punct limita ζ , interior tuturor acestor compartimente sau pe periferia lor, în domeniul căruia, prin urmare, este imposibilă inegalitatea (2), în care $z_i = \zeta$. Ceeace este în contradicțiune cu inegalitatea (1). Teorema este așașadar demonstrată.

Descompunerea ariei A fiind astfel realizată, să considerăm integrala $\int f(z) dz$ dealungul conturului fiecărui compartiment, în sensul pozitiv. Suma tuturor integralelor astfel obținute este egală cu integrala $\int f(z) dz$ luată în acelaș sens dealungul conturului C . Căci latura unui compartiment, care nu aparține conturului C , fiind comună la două compartimente vecine, este descrisă de două ori în sensuri inverse și prin urmare integralele corespunzătoare se distrug. Nu rămân dar decât acele integrale cari sunt luate dealungul ariilor aparținând conturului și a căror sumă constituie conturul C .

Reprezentând prin c_i conturul compartimentului σ_i , avem

$$(3) \quad \int_C f(z) dz = \sum \int_{c_i} f(z) dz.$$

Chestiunea revine a evalua suma din membrul al doilea. Pentru

aceasta, să ne referim la inegalitatea (2) care se poate scrie

$$(4) \quad f(z) = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] + z_i f'(z_i) + \varepsilon_i (z - z_i), \quad |\varepsilon_i| < \varepsilon;$$

de unde

$$(5) \quad \int_{c_i} f(z) dz = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{c_i} dz + f'(z_i) \int_{c_i} z dz + \int_{c_i} \varepsilon_i (z - z_i) dz.$$

Însă integralele

$$\int dz, \quad \int z dz,$$

luate după o curbă închisă c oarecare sunt nule. În adevăr, fie $z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$, ($z_{n+1} = z_0$), $n+1$ puncte ale curbei, n fiind un număr întreg destul de mare și punctele destul de apropiate între ele, pentru ca $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, δ fiind un număr pozitiv dat, a cărui limită este zero pentru $n = \infty$. Avem, în virtutea definițiunii,

$$\int_c dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) = z_0 - z_0 = 0.$$

De asemenea avem

$$\int_c z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \zeta_i (z_{i+1} - z_i),$$

ζ_i fiind un punct al curbei cuprins între z_i și z_{i+1} , inclusiv aceste puncte. Dând lui ζ succesiv valorile z_i, z_{i+1} , avem

$$\int_c z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i (z_{i+1} - z_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_{i+1} (z_{i+1} - z_i),$$

sau, făcând suma membrilor din urmă,

$$\begin{aligned} \int_c z dz &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (z_{i+1} + z_i) (z_{i+1} - z_i) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (z_{i+1}^2 - z_i^2) = \frac{1}{2} (z_0^2 - z_0^2) = 0. \end{aligned}$$

Egalitatea (5) se reduce dar la cea următoare:

$$(6) \quad \int_{c_i} f(z) dz = \int_{c_i} \varepsilon_i (z - z_i) dz.$$

Reprezentând prin l_i lungimea conturului c_i și prin λ_i maximul lui $|z - z_i|$ când z descrie acest contur, avem, în virtutea inegalității (2) și a inegalității (1) (§ 283),

$$(7) \quad \left| \int_{c_i} f(z) dz \right| < \varepsilon l_i \lambda_i.$$

Dacă σ_i este un pătrat cu latura δ_i , avem $l_i = 4\delta_i$, $\lambda_i = \delta_i \sqrt{2}$ și inegalitatea (7) devine

$$(8) \quad \left| \int_{c_i} f(z) dz \right| < 4\varepsilon \sqrt{2} \delta_i^2 = 4 \sqrt{2} \varepsilon \omega_i, (\omega_i = \delta_i^2).$$

Fie σ_k un compartiment limitat de conturul c_k , având pe periferia sa un arc de lungime γ_k al conturului C și cuprins într'un pătrat cu latura δ'_k ; avem, reprezentând prin l'_k și λ'_k cantitățile analoage cu l_i și λ_i ,

$$l'_k < 4\delta'_k + \gamma_k, \quad \lambda'_k \leq \delta'_k \sqrt{2}$$

și prin urmare

$$(9) \quad \left| \int_{c_k} f(z) dz \right| < \varepsilon \sqrt{2} (4\omega'_k + \gamma_k \delta'_k),$$

ω'_k fiind suprafața pătratului care cuprinde compartimentul σ'_k .

Reprezentând prin δ cel mai mare dintre laturile δ_i , δ_k și prin l lungimea curbei C , avem, *a fortiori*, pentru integrala totală:

$$(10) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| < \varepsilon \sqrt{2} [4(\Sigma \omega_i + \Sigma \omega_k) + \delta l].$$

Reprezentând prin A aria unui poligon care conține în interiorul lui toate pătratele (δ_i) , (δ'_k) , putem scrie

$$(11) \quad \int_C f(z) dz < \varepsilon \sqrt{2} (4A + \delta l).$$

Membrul întâiu al acestei inegalități având o valoare constantă și membrul al doilea fiind produsul cantității $4A + \delta l$, a cărei valoare este finită, printr'un factor care poate deveni mai mic ca orice cantitate dată, când facem ca laturile pătratelor să tindă către zero, rezultă că membrul întâi este nul. De unde egalitatea:

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

291. *Observare.* Teorema lui Cauchy nu încetează de a fi adevărată dacă nu impunem funcțiunii $f(z)$ condițiunea de a fi olomorfă și pe contur, ci numai de a fi olomorfă în interiorul ariei și continuă pe conturul care limitează aria.

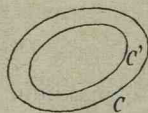


Fig. 28

În adevăr, să presupunem că o rază vectorie dusă dintr'un punct interior al ariei, întâlnește conturul C într'un singur punct. Luând punctul interior ca origină, să facem substituțiunea

$$z' = (1 - \varrho)z,$$

ϱ fiind un număr pozitiv mai mic decât 1. Curbei închise C descrisă

de z va corespunde astfel o curbă închisă C' interioară lui C . Să considerăm diferența

$$\begin{aligned}\int_C \Delta &= \int_C f(z)dz - \int_{C'} f(z)dz = \int_C \left[f(z) - (1-\varrho)f[(1-\varrho)z] \right] dz \\ &= \int_C \left[f(z) - f[(1-\varrho)z] \right] dz + \varrho \int_C f[(1-\varrho)z] dz.\end{aligned}$$

Însă, în virtutea continuității uniforme a funcțiunii $f(z)$ în interiorul ariei și pe contur, rezultă că la un ε pozitiv arbitrar de mic corespunde o valoare pozitivă pentru ϱ , care tinde către zero în același timp cu z , astfel că

$$|f(z) - f[(1-\varrho)z]| < \varepsilon,$$

oricare ar fi punctul z pe curba C . Avem așa dar

$$|\Delta| < \varepsilon l + \varrho l M,$$

M fiind maximul lui $|f(z)|$ pe curba C și l lungimea acestei curbe. Membrul întâi al acestei inegalități fiind constant și membrul al doilea putând fi oricât de mic voim, rezultă că Δ este nul. De altă parte, integrala

$$\int_{C'} f(z)dz$$

fiind nulă, în virtutea teoremei lui Cauchy, conchidem că și integrala propusă este nulă, adică

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Dacă raza vectoră întâlnește conturul în mai multe puncte, descompunem prin transversale convenabile aria dată în arii parțiale astfel ca conturul fiecăreia să împlinească condițiunea precedentă. Transversalele fiind descrise în sensuri opuse, integralele luate dealungul lor se distrug două câte două, astfel că integrala luată după conturul primitiv este nulă.

292. Teorema lui Cauchy subsistă și în cazul unei arii cu contur multiplu. Trebuie înțeles în acest caz că variabila z descrie toate curbele, cari formează conturul în *acelaș sens în raport cu aria ce ele limitează*.

Să considerăm, de exemplu, aria limitată de un contur dublu, format de curbele C și C' , cea de a doua fiind interioară celei dintâiu. Unind printr'o linie ab un punct a al curbei C cu un punct b al

curbei C' , luate amândouă după voie, transformăm aria dată într'o arie al cărui contur simplu este $aCabC'ba$ (fig. 29). Teorema lui Cauchy aplicându-se acestui contur, putem scrie

$$(aCa) + (ab) + (bC'b) + (ba) = 0,$$

parentezele reprezentând valorile integralei $\int f(z)dz$ luate după drumurile respective și în sensul indicat de ordinea literilor.

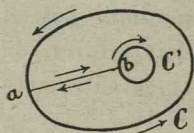


Fig. 29

Însă $f(z)$ fiind o funcțiune olomorfă în interiorul ariei mărginită de curbele C și C' , valorile ce primește această funcțiune dealungul liniei ab sunt aceleași, înainte și după ce z descrie curba interioară C' ; deci

$$(ab) + (ba) = 0,$$

și prin urmare

$$(aCa) + (bC'b) = 0,$$

sau

$$(6) \quad \int_C f(z)dz + \int_{C'} f(z)dz = 0.$$

Teorema lui Cauchy se justifică în acelaș mod, oricare ar fi ordinul de multiplicitate al conturului; căci putem transformă aria dată într'o arie cu contur simplu, introducând linii auxiliare ca în exemplul de mai sus.

Aceste linii fiind descrise de două ori în sens invers, integralele dealungul lor se distrug și rămân numai integralele luate după curbele închise cari formează conturul primitiv dat.

Reprezentând, de aci înainte, prin $\int_{C'}$, integrala luate în sensul pozitiv în raport cu aria ce curba C' cuprinde în interiorul său, egalitatea (6) se va scrie

$$(7) \quad \int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz.$$

În cazul unui contur multiplu format de n curbe închise $C_1, C_2, \dots, C_n$, exterioare între ele și de o curbă închisă C care le conține pe toate în interiorul său, avem egalitatea

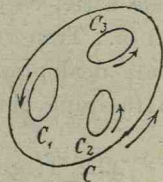


Fig. 30

$$(8) \quad \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz,$$

curbele de integrațiune fiind descrise toate în acelaș sens în raport cu aria ce fiecare cuprinde în interiorul său (fig. 30).

Rezultatul exprimat prin egalitatea (8) se enunță în modul următor:

Dacă $f(z)$ este o funcțiune olomorfă într'o arie cu conexiune multiplă, continuă pe conturul care limitează aria și care este format de un număr dat de curbe închise, una din ele conținând pe toate celelalte, cari sunt exterioare între dănsese, integrala luată după curba exterioară este egală ca suma integralelor după curbele interioare, luate în acelaș sens în raport cu aria ce fiecare cuprinde în interiorul său.

293. *Consecință.* Din teorema lui Cauchy, rezultă următoarea consecință de o importanță fundamentală:

Fie $f(z)$ o funcțiune olomorfă într'o arie dată (A) cu conexiune simplă, z_0 și Z două puncte oarecari situate în această arie; integrala

$$\int_{z_0}^Z f(z)dz,$$

luată dela punctul z_0 la punctul Z, este independentă de drumul care unește aceste două puncte, pe cât timp acest drum este cuprins în interiorul lui (A).

În adevăr, fie L și L' două linii situate în aria (A) și unind între ele punctele z_0 și Z. Presupunând că aceste linii nu se taie, avem

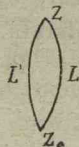


Fig. 31

$$\int_{z_0 LZ} f(z)dz + \int_{ZL'z_0} f(z)dz = 0;$$

de unde

$$(9) \quad \int_L f(z)dz = \int_{L'} f(z)dz,$$

integralele fiind luate în ambele membre dela z_0 la Z.

Egalitatea (9) subsistă și în cazul când liniile L și L' se taie într'un număr oarecare de puncte. Să presupunem că ele se taie într'un punct z_1 ; avem (fig. 32).

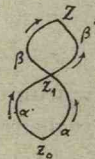


Fig. 32

$$(z_0 \alpha z_1) = (z_0 \alpha' z_1),$$

$$(z_1 \beta Z) = (z_1 \beta' Z);$$

de unde, făcând suma acestor egalități,

$$(z_0 \alpha z_1 \beta Z) = (z_0 \alpha' z_1 \beta' Z).$$

Propozițiunea exprimată de egalitatea (9) se poate enunța în modul următor: integrala $\int_L f(z)dz$ rămâne neschimbată dacă

linia L , ale cărei extremități rămân fixe, se deformează într'un mod oarecare fără a întâlni un punct în care $f(z)$ încetează de a fi olomorvă.

294. Teoremă. Dacă $f(z)$ este o funcțiune olomorvă într'o regiune dată, integrala

$$(10) \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

în care limita superioară este variabilă și drumul de integrațiune nu iese din regiunea considerată, este o funcțiune continuă având ca derivată $f(z)$.

În adevăr, $Z + h$ fiind un punct situat în regiunea dată, avem

$$(11) \quad F(Z + h) - F(Z) = \int_Z^{Z+h} f(z) dz.$$

Fie M modulul maximum al lui $f(z)$ dealungul arcului de integrațiune, care unește punctele Z și $Z + h$, și l lungimea acestui arc; vom avea inegalitatea

$$(12) \quad |F(Z + h) - F(Z)| < Ml,$$

care exprimă că funcțiunea $F(Z)$ este continuă în regiunea considerată.

Pentru a arăta că avem

$$F'(Z) = f(Z),$$

să scriem, conform definițiunii integralei definite,

$$\int_Z^{Z+h} f(z) dz = \lim \sum (z_{k+1} - z_k) f(\xi_k).$$

Însă, presupunând $|h|$ destul de mic, putem scrie

$$f(\xi_k) = f(Z) + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. Așa dar

$$\int_Z^{Z+h} f(z) dz = f(Z) \lim \sum (z_{k+1} - z_k) + \lim \sum \varepsilon_k (z_{k+1} - z_k).$$

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că drumul de integrațiune este o linie dreaptă, căci în aria considerată, valoarea integralei este independentă de forma acestui drum. Egalitatea precedentă se va scrie

$$\int_Z^{Z+h} f(z) dz = hf(Z) + R,$$

unde

$$|R| = \lim |\sum \varepsilon_k (z_{k+1} - z_k)| < \varepsilon |h|.$$

Reprezentând prin λ o cantitate complexă convenabilă, având un modul mai mic ca unitatea, putem scrie

$$R = \lambda \varepsilon h.$$

Așa dar avem

$$F(Z + h) - F(Z) = h[f(Z) + \lambda \varepsilon];$$

de unde

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(Z + h) - F(Z)}{h} = f(Z).$$

q. e. d.

Funcțiunea $F(z)$ se zice funcțiunea *primitivă* a funcțiunii $f(z)$. Expresiunea sa generală este

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C,$$

C fiind o constantă arbitrară. De unde $C = F(z_0)$ și

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0).$$

Corolar. Dacă aria în care se mișcă punctul z este cu *conexiune simplă*, $F(z)$ este o funcțiune olomorvă în acea regiune. Este de ajuns a arăta că $F(z)$ are o valoare unică în fiecare punct, adică este o funcțiune uniformă. Această proprietate rezultă imediat din faptul că toate drumurile, cari unesc un punct fix arbitrar cu un punct variabil Z , dau aceiași valoare pentru integrala

$$\int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Nu este însă tot așa dacă aria este cu *conexiune multiplă*. Căci, într-o asemenea regiune, două linii L și L' , cari unesc aceleași puncte z_0, Z , pot cuprinde între ele o arie în care funcțiunea $f(z)$ nu este olomorvă, așa încât integrala să primească diferite valori după cele două drumuri.

295. Integrala

$$\int_C f(z) dz,$$

luată după o curbă închisă C , poate fi nulă și în cazul când $f(z)$ ar deveni discontinuă într'unul sau mai multe puncte situate în interiorul acestei curbe. Este de ajuns ca funcțiunea primitivă $F(z)$ să fie uniformă în aria limitată de curba C ; căci, în acest caz,

valoarea finală a integralei este egală cu valoarea sa inițială. Astfel avem

$$\int_C \frac{d f(z)}{dz} dz = 0,$$

$f(z)$ fiind o funcțiune uniformă în interiorul curbei C și continuă dealungul acestei curbe.

Aplicațiune. Integrala

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n},$$

luată după curba închisă C , în interiorul căreia se află punctul a este nulă, dacă n este un număr întreg mai mare ca 1.

Nu este tot așa dacă $n = 1$. În acest caz, din punctul a ca centru să descriem un cerc (r) cu o rază r destul de mică, pentru ca el să fie cuprins în interiorul curbei C . Vom avea

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{(r)} \frac{dz}{z-a}.$$

Pentru evaluarea integralei din membrul al doilea, să facem schimbarea de variabilă

$$z-a = re^{it}.$$

Făcând t să varieze de la 0 la 2π , z descrie cercul (r) în sensul pozitiv. Așadar

$$\int_{(r)} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi;$$

prin urmare

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2i\pi.$$

296. *Integrala lui Cauchy.* — *Teoremă.* Fie $f(z)$ o funcțiune olomoră în interiorul unei curbe închise C și continuă pe această curbă. Dacă x este un punct oarecare în interiorul curbei C , avem

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

În adevăr, din punctul x ca centru să descriem un cerc (r) interior curbei C . Funcțiunea

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

fiind olomoră în aria mărginită de curba C și de cercul (r) , avem egalitatea

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

care se poate scrie

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(r)} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} dz + f(x) \int_{(r)} \frac{dz}{z-x}.$$

Însă putem presupune r destul de mic pentru ca, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic, să avem

$$|f(z) - f(x)| < \varepsilon;$$

prin urmare

$$\left| \int_{(r)} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} dz \right| < \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Membrul întâi fiind independent de r^1) și prin urmare independent de ε , rezultă că este riguros nul.

Avem așadar

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x} dz = f(x) \int_{(r)} \frac{dz}{z-x} = 2i\pi f(x);$$

de unde, *formula fundamentală a lui Cauchy*:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

q. e. d.

298. Integrala

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x} dz$$

poartă numele de *integrala lui Cauchy*. Egalitatea (1) ne arată că valoarea funcțiunii olomorfe $f(x)$ este determinată în orice punct x interior curbei C , dacă cunoaștem valorile sale dealungul curbei. Dacă $f(z)$ păstrează o valoare constantă A pe contur, avem în interiorul ariei $f(x) = A$, adică funcțiunea se reduce la o constantă, având aceiași valoare ca pe contur.

¹⁾ Cercul (r) fiind interior curbei C , integrala nu variază împreună cu r , căci avem

$$\int_r = \int_C$$

Consecință. Fie $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, x, y variabile reale și u, v funcțiuni reale de aceste variabile. Ipoteza de mai sus asupra lui $f(z)$ fiind aceeași, urmează că valoarea acestei funcțiuni în orice punct interior curbei C este determinată, dacă cunoaștem valorile funcțiunilor u și v dealungul acestei curbe. Înșă, dacă una din aceste două funcțiuni este dată, cealaltă este determinată, abstracțiune făcând de o constantă. Prin urmare, este de ajuns a cunoaște una din aceste două funcțiuni dealungul conturului și valoarea celeilalte într'un punct al acestui contur, pentru ca funcțiunea $f(z)$ să fie determinată în orice punct interior.

299. *O funcțiune olomorvă într'o regiune dată admite derivate de orice ordin în acă regiune.*

Prin definițiune, funcțiunea admite o derivată de ordinul întâi. Să calculăm această derivată, considerând funcțiunea $f(x)$ exprimată cu ajutorul integralei lui Cauchy,

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

x fiind în interiorul curbei C . Înlocuind x prin $x+h$, $|h|$ fiind destul de mic, avem

$$(2) \quad f(x+h) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x-h} dz.$$

Scăzând aceste două egalități una din alta, și divizând cu h , obținem

$$(3) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)(z-x-h)} dz.$$

Înșă, avem identitatea

$$\frac{1}{(z-x)(z-x-h)} = \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(z-x)^2(z-x-h)};$$

prin urmare egalitatea (3) se poate scrie

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(x)}{(z-x)^2} dz + \frac{h}{2i\pi} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-x)^2(z-x-h)}.$$

Integralele din membrul al doilea sunt evident finite pe cât timp punctele $x, x+h$ sunt în interiorul curbei de integrațiune, a cărei lungime este, prin ipoteză, finită. De unde rezultă, făcând $h=0$,

$$(4) \quad f'(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^2} dz.$$

Derivata se obține, după cum se vede, derivând în raport cu x funcțiunea de sub semnul $\int$.

Aplicând egalitățile precedente operațiuni analoage cu cele ce am aplicat egalității (1), recunoaștem că $f'(x)$ admite, în interiorul curbei C , o derivată ce se obține după aceeași regulă, anume

$$(5) \quad f''(x) = \frac{1.2}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^3} dz.$$

De unde, rezultă că derivata $f'(x)$ este, în interiorul curbei C , o funcțiune continuă de x . Dacă ținem seamă că teorema fundamentală a lui Cauchy a fost stabilită pe baza că funcțiunea de variabilă complexă $f(z)$ admite o derivată, fără a presupune continuitatea acestei derivate, vedem, plecând dela integrala lui Cauchy, care este o consecință a acelei teoreme, că existența derivatei funcțiunii $f(z)$ implică și continuitatea ei. Acest rezultat micșorează numărul condițiunilor necesare ca o funcțiune de variabilă complexă, în sensul general, să fie o funcțiune monogenă, după Cauchy. Este de ajuns, pentru aceasta, ca funcțiunea să fie continuă, în regiunea considerată, și să admită o derivată.

Integrala din membrul al doilea (4) având o valoare unică în fiecare punct x interior curbei C , rezultă că derivata $f'(x)$ este olomorvă în interiorul acestei curbe.

Se demonstrează în același mod existența derivatelor de orice ordin ale funcțiunii $f(z)$ cari se obțin derivând sub semnul $\int$. Avem formula generală

$$(6) \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

n fiind un număr întreg pozitiv oarecare. Așa dar, o funcțiune olomorvă într-o regiune dată admite derivate de orice ordin, funcțiuni olomorfe în aceiași regiune.

300. *Consecință.* Din formula (6) rezultă că avem

$$(7) \quad \left| f^{(n)}(x) \right| = \frac{n!}{2i\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \right|.$$

Dacă curba de integrațiune C este un cerc cu raza r având centrul în x și M este maximul lui $|f(z)|$ dealungul acestui cerc, rezultă inegalitatea

$$(8) \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

301. *Teoremă (Riemann).* Fie $f(z)$ o funcțiune olomoră într-o arie A , limitată de un contur C , pusă sub forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (z = x + iy),$$

u și v fiind funcțiuni reale de variabilele reale x, y ; avem inegalitatea

$$\int_C u dv > 0,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

În adevăr, aplicând formula lui Green, avem

$$\int_C u dv = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy,$$

egalitate, care în virtutea ecuațiilor lui Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

devine

$$\int_C u dv = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

De unde rezultă că integrala din membrul întâiu nu poate fi negativă. Ea n'ar putea fi nulă decât dacă am avea

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

și prin urmare, în virtutea ecuațiilor de mai sus ale lui Cauchy, ar rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

adică funcțiunile u și v ar fi constante în toată aria A . Integrala considerată este așa dar pozitivă. q. e. d.

302. Să dăm aci o teoremă datorită matematicianului italian Morera, care poate fi privită ca reciproca primei teoreme a lui Cauchy.

Teoremă. Fie $f(z)$ o funcțiune de variabila complexă z , continuă într-o arie dată (A) și C o curbă închisă arbitrară, de lungime finită, situată în această arie; dacă avem

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

funcțiunea $f(z)$ este olomoră în (A).

Fie x_0 un punct fix și x un punct variabil în (A). În virtutea ipotezei, integrala

$$(1) \quad \int_{x_0 L x} f(z) dz,$$

luată dela x_0 la x după un drum oarecare L situat în (A), este independentă de acest drum; căci oricare alt drum, care unește acele puncte, formează cu cel dintâi o curbă închisă dealungul căreia integrala $\int f(z) dz$ este nulă. Integrala (1) este așa dar o funcțiune determinată de x ; s'o reprezentăm prin $F(x)$:

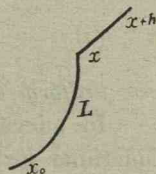


Fig. 33

$$(2) \quad F(x) = \int_{x_0 L x} f(z) dz.$$

Fie acum $x + h$ un punct vecin cu x , cuprins în (A) și să considerăm diferența

$$(3) \quad \Delta F(x) = F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(z) dz,$$

în care putem presupune că drumul de integrațiune ($x, \dots, x + h$) este în linie dreaptă. Să punem

$$f(z) = f(x) + \varrho.$$

În virtutea continuității lui $f(z)$, la un ε pozitiv, arbitrar de mic, corespunde un număr δ pozitiv, astfel ca să avem

$$|\varrho| < \varepsilon \text{ pentru } |h| < \delta.$$

Egalitatea (3) devine

$$\Delta F(x) = hf(x) + \int_x^{x+h} \varrho dz;$$

prin urmare

$$|\Delta F(x) - hf(x)| < \varepsilon |h|.$$

De unde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = f(x),$$

adică funcțiunea $F(x)$ admite o derivată determinată în fiecare punct al ariei și anume

$$(4) \quad F'(x) = f(x).$$

Funcțiunea $F(x)$ este așa dar olomorfă în aria (A) și prin urmare derivata sa, adică $f(x)$, este olomorfă în aceeași arie. q. e. d.

303. *Aplicațiune. Altă demonstrațiune a teoremei lui Weierstrass (§ 157).* Fie

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

un șir nălimitat de funcțiuni olomorfe într'o arie cu conexiune simplă (A); *dacă seria*

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

este uniform convergentă, ea reprezintă o funcțiune olomoră în (A).

În adevăr, seria (5), fiind uniform convergentă, definește o funcțiune $f(x)$ continuă în (A) (93). Să considerăm seria

$$(6) \quad \int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz,$$

C fiind o curbă închisă oarecare, situată în (A). Integralele din membrul al doilea fiind toate nule, avem

$$\int_C f(x) dz = 0.$$

De unde conchidem, în virtutea teoremei precedente, că $f(x)$ este o funcțiune olomoră în (A).

304. *Teoremă asupra seriei Taylor (Cauchy).* Dacă $f(x)$ este o funcțiune olomoră într'o regiune (A) și x_0 un punct oarecare interior acestei regiuni, funcțiunea $f(x)$ se dezvoltă într'o serie întregă de $(x-x_0)$, convergentă în cel mai mare cerc cu centrul în x_0 , situat în interiorul lui (A).

În adevăr, fie (R) un cerc cu centrul în x_0 , situat în regiunea considerată și x un punct oarecare interior acestui cerc; vom avea expresiunea lui $f(x)$ dată de integrala lui Cauchy

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Punctul z fiind pe cerc, rezultă inegalitatea

$$(2) \quad \frac{x-x_0}{z-x_0} < 1$$

și putem scrie

$$(3) \quad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_0-(x-x_0)} = \frac{1}{z-x_0} + \frac{x-x_0}{(z-x_0)^2} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{(z-x_0)^{n+1}} + \dots$$

Multiplicând ambele membre cu $\frac{1}{2i\pi} f(z) dz$ și integrând dealungul

cercului (R) în sensul pozitiv ¹⁾, obținem. în virtutea egalității (1), seria

$$(4) \quad f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots,$$

ai cărei coeficienți sunt dați de integralele finite și determinate

$$(5) \quad a_n = \frac{1}{2iR} \int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-x_0)^{n+1}} dz,$$

sau încă de expresiunile

$$a_n = \frac{f_n(x_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Teorema lui Cauchy este deci demonstrată.

Această teoremă se mai poate enunța sub forma următoare:

O funcțiune $f(x)$ olomorfă în domeniul unui punct x_0 se desvoltă într'o serie întreagă de $(x-x_0)$, convergentă în cercul cu centrul în x_0 și trecând prin cel mai apropiat punct în care funcțiunea $f(x)$ încetează de a fi olomorfă.

Un punct în care o funcțiune analitică $f(x)$ încetează de a fi olomorfă se numește punct *singular* al funcțiunii.

305. Dacă $x_0 = 0$, seria (4) devine

$$(7) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

și valorile coeficienților sunt date de expresiunile

$$(8) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)^0}{z^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Egalitatea (7) este valabilă în interiorul cercului cu centrul în punctul $x_0 = 0$ și trecând prin cel mai apropiat punct în care $f(x)$ încetează de a fi olomorfă. În ce privește cercul de integrațiune (R), dealungul căruia se determină integralele (8), el este concentric și interior celui precedent.

306. *Identitatea celor două definițiuni ale funcțiunii analitice, după Cauchy și Weierstrass.*

O funcțiune analitică $f(x)$ în sensul lui Weierstrass este, în domeniul oricărui punct ordinar, o funcțiune continuă de x și admite o derivată $f'(x)$ continuă în acelaș domeniu; ea împlinește deci condițiunile unei funcțiuni monogene, după Cauchy.

Viceversa. Funcțiunea monogenă definită de Cauchy se poate reprezintă, precum am văzut mai sus, printr'o serie $P(x-x_0)$

¹⁾ Integrațiunea unei serii uniform convergente se obține integrând termenii seriei. Aceaș demonstrațiune ca în cazul variabilei reale.

în domeniul oricărui punct x_0 , diferit de un punct singular, convergentă într'un cerc având acest punct ca centru și o rază diferită de zero, prin urmare, ea intră în clasa funcțiilor analitice, după Weierstrass.

Așa dar, deși punctele de plecare în definițiunea funcțiunii analitice, după Cauchy și Weierstrass, sunt cu totul diferite, funcțiunea analitică este aceeași în ambele cazuri. Putem dar zice că *cele două definițiuni sunt identice*.

307. Să revenim la formula

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

care dă expresiunea funcțiunii $f(x)$, olomorfă în interiorul curbei C și continuă pe contur, cu ajutorul unei integrale (integrala lui Cauchy). Din această formulă rezultă, precum am mai văzut, că valoarea funcțiunii $f(x)$ într'un punct interior x oarecare este determinată, dacă valorile sale sunt date pe contur. Să observăm însă că valorile funcțiunii dealungul conturului nu pot fi date în mod arbitrar. În adevăr, funcțiunea $f(x)$ fiind continuă în interiorul curbei și pe curbă, rezultă că dacă un punct interior x tinde către un punct z_0 al lui C , dealungul unui drum care nu întâlnește curba decât în punctul z_0 , avem egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow z_0} f(x) = f(z_0),$$

adică valoarea funcțiunii $f(z)$ în punctul z_0 este cantitatea determinată (nu arbitrară) către care tinde $f(x)$ când x descrie drumul considerat. Ceeace justifică aserțiunea noastră.

308. Să presupunem definită funcțiunea $f(z)$ dealungul curbei C , continuă pe această curbă. Ce se poate spune despre integrala

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

luată în sensul pozitiv, x fiind un punct oarecare în planul lui z ?

Această integrală are în fiecare punct x , care nu se află pe C , o valoare evident bine determinată. Să punem

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz;$$

avem derivata

$$F'(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^2} dz,$$

deasemenea bine determinată. Funcțiunea $F(x)$ este deci o funcțiune olomorfă în interiorul curbei C , diferită însă, în genere, de $f(x)$, precum vom vedea mai târziu, dacă $f(z)$ nu este olomorfă în interiorul acestei curbe ¹⁾. În tot planul exterior curbei C , $F(x)$ reprezintă deasemenea o funcțiune olomorfă, care nu coincide cu cea corespunzătoare ariei interioare curbei ²⁾.

Pe curbă integrala n'are sens. Avem astfel o expresiune analitică care, în două domenii diferite, reprezintă două funcțiuni olomorfe diferite.

Dacă funcțiunea $f(z)$ este olomorfă în interiorul curbei C , avem $F(x) = f(x)$, pentru x interior și $F(x) = 0$ pentru x exterior curbei.

309. Să considerăm, după *Hermite*, un exemplu mai general.

Fie $C_1, C_2, \dots, C_n$ n curbe închise exterioare între ele și $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ n funcțiuni olomorfe respectiv în interiorul acestor curbe și continue pe contururile corespunzătoare. Expresiunea

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f_1(z)}{z-x} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{f_2(z)}{z-x} dz + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f_n(z)}{z-x} dz$$

coincide respectiv cu funcțiunile considerate după cum x este în interiorul curbelor $C_1, C_2, \dots, C_n$ și este egală cu zero dacă x este exterior tuturor acestor curbe.

Avem astfel un exemplu de *expresiune analitică*, care în diferite regiuni ale planului reprezintă diferite funcțiuni olomorfe independente între ele. Integralele lui Cauchy joacă aci rolul pe care seriile de funcțiuni raționale îl joacă, în chestiuni analoage, în teoria lui Weierstrass.

CAPITOLUL XV.

FUNCȚIUNI ARMONICE.

Câteva proprietăți ale funcțiunilor armonice deduse din proprietățile funcțiunilor de variabilă complexă.

310. Fie $f(z)$ o funcțiune olomorfă într-o regiune (A) , pusă sub forma

$$(1) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy),$$

u și v fiind funcțiuni reale de variabilele reale x, y . Prin definițiune,

¹⁾, ²⁾ Teorema reziduurilor.

funcțiunile $u(x, y)$, $v(x, y)$ sunt continue în (A) și au derivate parțiale de ordinul întâi, finite satisfăcând ecuațiunile diferențiale ale lui Cauchy.

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aceste proprietăți ale funcțiunilor u și v sunt suficiente pentru ca din ele să decurgă: 1^o. continuitatea derivatelor de ordinul întâiu și 2^o existența în (A) a derivatelor de orice ordin.

În adevăr, continuitatea derivatelor de ordinul întâi rezultă din continuitatea derivatei $f'(z)$ a cărei expresiune este

$$(3) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Pentru a arăta că funcțiunile u și v admit derivate parțiale de ordinul al doilea, să punem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_2;$$

prin urmare

$$f'(z) = u_1 + iv_1 = \frac{1}{i} (u_2 + iv_2).$$

Însă $f'(z)$ fiind o funcțiune olomorfă în (A) , rezultă că funcțiunile asociate u_1 și v_1 , u_2 și v_2 au derivate parțiale de ordinul întâi continue satisfăcând ecuațiunile diferențiale ale lui Cauchy. Prin urmare, funcțiunile u și v admit derivate parțiale de ordinul al doilea continue și ecuațiunea lui Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$$

este satisfăcută de aceste funcțiuni.

Intr'un mod analog, din faptul că $f''(z)$ este olomorfă în (A) , se conchide că funcțiunile u și v au derivate parțiale de ordinul al treilea, continue, etc.

311. Fie acum $u(x, y)$ o funcțiune armonică oarecare, continuă într'o arie (A) , adică o funcțiune de două variabile reale, univocă, având derivate parțiale de ordinul întâi și de ordinul al doilea și satisfăcând ecuațiunea lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Să asociăm lui u funcțiunea $v(x, y)$ dată de formula

$$v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

în care drumul de integrațiune este oarecare situat în (A). Funcțiunile u și v satisfac dar ecuațiunile diferențiale ale lui Cauchy și prin urmare expresiunea $u + iv$ definește o funcțiune analitică de $z = x + iy$, olomorfă în A. De unde rezultă, în virtutea celor văzute în paragraful precedent, că funcțiunea u , adică o funcțiune armonică oarecare, continuă într'o regiune dată, admite în acea regiune derivate parțiale de orice ordin.

312. *Teoremă. O funcțiune armonică u , continuă într'o arie dată și egală cu o cantitate constantă A dealungul conturului ce limitează aria, este egală cu A în toată aria.*

Fie v o funcțiune asociată a lui u , expresiunea $u + iv = f(z)$ este o funcțiune analitică de $z = x + iy$, olomorfă în aria considerată. Inșă funcțiunea v fiind constantă, în acelaș timp cu u , fie $v = B$; de unde

$$f(z) = A + iB$$

dealungul conturului. Prin urmare, avem în toată aria (§ 298)

$$f(z) = A + iB, \quad u = A, \quad v = B.$$

Corolar. Două funcțiuni armonice u și v , continue într'o arie dată precum și pe contur, egale între ele în toate punctele conturului, sunt egale între ele în toată aria. Căci diferența $u - v$ este o funcțiune armonică în aceiaș arie, nulă dealungul conturului.

313. *Teoremă. Fie u o funcțiune armonică continuă într'o arie (A) și $z_0 = x_0 + iy_0$ un punct interior ariei. Valoarea funcțiunii în punctul z_0 este egală cu media valorilor sale dealungul unui cerc $|z - z_0| = r$, situat în interiorul ariei (A).*

Pentru a demonstra această teoremă să asociăm lui u o funcțiune v astfel ca $u + iv = f(z)$ să fie o funcțiune de $z = x + iy$. Această funcțiune, în virtutea ipotezei, este olomorfă în (A). Aplicând formula lui Cauchy, drumul de integrațiune fiind cercul $|z - z_0| = r$, obținem, punând $z - z_0 = re^{it}$,

$$u_0 + iv_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u + iv) dt \quad (u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0));$$

de unde

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{(r)} u ds, \quad (ds = r dt). \quad \text{q. e. d.}$$

314. *Teoremă.* O funcțiune armonică u , continuă într'o arie (A) și pe conturul ce limitează această arie nu poate atinge valoarea sa maximă sau minimă în nici un punct interior lui (A).

Să presupunem că u atinge valoarea sa maximă M într'un punct interior z_0 . Din acest punct ca centru să descriem un cerc situat în interiorul lui (A). Vom avea dealungul acestui cerc $u \leq M$. Înșă valorile $u < M$ sunt incompatibile cu teorema precedentă, căci am avea în acest caz $u_0 < M$; contrar ipotezei. Avem așa dar dealungul cercului $u = M$. De unde rezultă că această egalitate subsistă în toată aria cercului. Fie acum z'_0 un punct interior acestui cerc și destul de aproape de periferie pentru ca un cerc având acest punct ca centru să taie cercul precedent și să fie interior ariei (A); vom avea $u = M$ și în interiorul acestui de al doilea cerc. Continuând în același mod, conchidem că egalitatea subsistă în toată aria (A).

Funcțiunea u ar fi așa dar o constantă. Ceeace demonstrează teorema.

Aceiaș demonstrațiune, înlocuind maximul M prin minimul m , probează că funcțiunea u nu poate atinge valoarea m în nici un punct interior lui (A), dacă ea nu este constantă și egală cu m .

Se știe însă, că o funcțiune $u(x, y)$ continuă într'o regiune dată atinge cel puțin odată valoarea sa maximă și valoarea sa minimă, în câte un punct din acea regiune. Conchidem că acele puncte nu pot fi situate decât pe conturul ce limitează regiunea.

315. *Corolar.* Fie $f(z)$ o funcțiune analitică olomorfa într'o arie (A) în care ea nu se anulează. Funcțiunea $\log |f(z)|$, partea reală o funcțiunii $\log f(z)$, fiind armonică și continuă, maximul precum și minimul ei în (A) nu este atins decât pe conturul lui (A). Aceiaș concluziune se aplică funcțiunii $|f(z)|$.

¹⁾ Să presupunem un cerc cu raza r împărțit în n părți egale și fie $u_1, u_2, \dots, u_n$ valorile ce funcțiunea $u(x, y)$ primește în aceste puncte; media acestor valori este

$$\frac{\sum_1^n u_i}{n} = \frac{\sum_1^n u_i dt}{ndt},$$

care pentru $n = \infty$ devine $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u dt$. Dacă $r \neq 1$, punând $rdt = ds$, această medie

se poate scrie

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{(r)} u ds.$$

Propozițiunea subsistă, în ce privește *maximul* lui $|f(z)|$, și în cazul când $f(z)$ se anulează în (A). Căci dacă excludem zerurile funcțiunii prin cercuri foarte mici, maximul cel mai mare, (maximum maximorum) al lui $|f(z)|$, în aria rămasă, este atins pe conturul multiplu astfel format. Însă pe cercurile introduse, $f(z)$ tinde prin ipoteză către zero împreună cu razele acestor cercuri; rezultă că $|f(z)|$ atinge maximul său pe conturul lui (A).

316. *Consecință importantă. Teorema fundamentală a Algebrei.* O funcțiune rațională întreagă $f(x)$ admite cel puțin un zero.

În adevăr, dacă $f(x)$ nu s'ar anula în nici un punct la distanță finită, ar rezultă, în virtutea corolarului precedent, ca în cercul $|x| = R$, R fiind oricât de mare voim, cea mai mică valoare ce poate primi $|f(z)|$ să corespundă unui punct situat pe cerc; ceea ce este absurd, căci $|f(x)|$ tinde către infinit împreună cu R .

317. *Integrala lui Poisson.* Fie

$$(1) \quad f(r) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă convergentă în cercul $|x| = R$. Să punem

$$x = re^{i\theta}, \quad f(x) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad (r < R),$$

u și v fiind funcțiuni reale de r, θ . Fie $\varrho < R$ un număr pozitiv oricât de aproape voim de R , $r < \varrho < R$; vom avea (5) (§ 114) pentru coeficienții a_n , expresiunea

$$a_n = \frac{1}{\pi \varrho^n} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) e^{-ni\varphi} d\varphi, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sau, punând $z = \varrho e^{i\varphi}$,

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\varrho, \varphi)}{z^n} d\varphi.$$

Coeficientul a_0 nu intră în această formulă; avem însă (8) (§ 305):

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varrho} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\varrho, \varphi) + iv(\varrho, \varphi)] d\varphi^1).$$

Punctul x fiind în interiorul cercului $|x| = \varrho$, seria (1) se va putea scrie

$$\begin{aligned} u(r, \theta) + iv(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u + vi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \sum_1^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^n d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\varrho, \varphi) + iv(\varrho, \varphi)] d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{z - x} u(\varrho, \varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

¹⁾ Expresiune care rezultă și din formulele (6) și (8) (§ 114).

sau

$$(4) \quad u(r, \theta) + iv(r, \theta) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\varrho, \varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z+x}{z-x} u(\varrho, \varphi) d\varphi.$$

De unde rezultă că funcțiunea $u(r, \theta)$ este egală cu partea reală a integralei

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z+x}{z-x} u(\varrho, \varphi) d\varphi,$$

în care trebuie să înlocuim x și z respectiv cu $re^{i\theta}$, $\varrho e^{i\varphi}$.

Făcând această înlocuire, avem

$$\frac{z+x}{z-x} = \frac{\varrho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\varrho e^{i\varphi} - re^{i\theta}},$$

sau, multiplicând ambii termeni ai membrului al doilea cu conjugata numitorului, $\varrho e^{-i\varphi} - re^{-i\theta}$, obținem

$$\frac{z+x}{z-x} = \frac{\varrho^2 - 2ir\varrho \sin(\varphi - \theta) - r^2}{\varrho^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

Prin urmare

$$(5) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\varrho^2 - r^2)u(\varrho, \varphi)}{\varrho^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi.$$

Integrala din membrul al doilea poartă numele de integrala lui *Poisson*.

Formula precedentă ne dă valoarea funcțiunii armonice $u(r, \theta)$ într'un punct (r, θ) , interior cercului $|x| = \varrho$, dacă cunoaștem valorile ce această funcțiune primește dealungul cercului.

CAPITOLUL XVI.

TEOREME ȘI DESVOLTĂRI ÎN SERII, CONSECINȚE ALE INTEGRALEI LUI CAUCHY.

318. *Teorema lui Laurent.* O funcțiune $f(x)$ olomorvă într'o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrul în origină, se poate pune, în această regiune, sub forma

$$P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

P și P_1 fiind serii întregi respectiv de x și $\frac{1}{x}$.

Putem presupune funcțiunea continuă pe cele două cercuri; în cazul contrar le înlocuim prin două cercuri concentrice cu cele dintâi și infinit de apropiate de ele: unul interior celui mai mare și celalt cuprinzând pe cel mai mic. Fie așa dar R și R' razele celor două cercuri (R) , (R') , $R' < R$ și x un punct oarecare în interiorul coroanei. În jurul punctului x ca centru să descriem un cerc (r) cu o rază r destul de mică pentru ca el să fie cu totul cuprins în interiorul coroanei. Vom avea egalitatea

$$(1) \quad \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x} dz + \int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

integralele fiind luate în sensul pozitiv în raport cu ariile interioare celor trei cercuri. Însă funcțiunea $f(z)$ fiind olomorfa în interiorul cercului (r) , avem

$$\int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x} dz = 2i\pi f(x);$$

prin urmare, egalitatea (1) ne dă

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Să calculăm integralele din membrul al doilea. În prima integrală avem

$$\left| \frac{x}{z} \right| < 1,$$

prin urmare putem scrie

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \dots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \dots,$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z} dz + \dots + \frac{x^n}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz + \dots$$

Să punem

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

vom avea

$$(4) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = P(x).$$

În a doua integrală avem inegalitatea

$$\left| \frac{z}{x} \right| < 1,$$

care permite a scrie

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-z} = -\left[\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{x^n} + \dots \right],$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x} dz = \frac{x^{-1}}{2i\pi} \int_{(R')} f(z) dz + \dots + \frac{x^{n-1}}{2i\pi} \int_{(R')} z^{n-1} f(z) dz + \dots$$

Punând

$$(5) \quad b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R')} z^{n-1} f(z) dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

avem

$$(6) \quad -\frac{1}{2i\pi} \int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} = P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Înlocuind în (2) integralele prin valorile lor date de egalitățile (4) și (6), obținem rezultatul enunțat

$$(7) \quad f(x) = P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

q. e. d.

319. *Observare.* Funcțiunea $f(z)$ fiind olomorfă în interiorul coroanei, integralele (3) și (5) cari determină coeficienții a_n și b_n ai seriilor P și P_1 se pot înlocui respectiv prin

$$\int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad \int_{(R)} z^{n-1} f(z) dz,$$

luate în acelaș sens, după acelaș cerc (R) concentric cu cercurile primitive și având o rază R cuprinsă între R și R'. Însă aceste integrale se deduc una din alta, dacă înlocuim n prin $-n$; prin urmare reprezentând pe b_n prin a_{-n} , avem, pentru coeficienții seriilor P și P_1 , expresiunea unică

$$(8) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

și egalitatea (7) se poate înlocui prin cea următoare

$$(9) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n.$$

320. Dacă centrul celor două cercuri, cari formează coroana în care funcțiunea $f(x)$ este olomorfă, se găsește într'un punct oarecare x_0 , avem în interiorul coroanei

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

valorile coeficienților fiind date de integralele

$$(11) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{(z - x_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \dots).$$

321. Metoda care ne-a servit mai sus pentru a stabili teorema lui *Laurent*, conduce la un rezultat mai general. Fie $f(x)$ o funcțiune olomorfă într-o regiune limitată de un cerc având centrul într'un punct $x = a$ și de mai multe cercuri $C_1, C_2, \dots, C_n$ interioare celui dintâi și exterioare între ele, având respectiv centrele în punctele $a_1, a_2, \dots, a_n$. Fie x un punct în regiunea considerată și (r) un cerc cu centrul în x , interior cercului C și exterior celorlalte cercuri. Exprimând că integrala

$$\int \frac{f(z)}{z - x} dz,$$

luată după cercul exterior C , este egală cu suma valorilor sale după cercurile interioare, obținem egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_C \frac{f(z)}{z - x} dz - \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - x} dz - \dots - \int_{C_n} \frac{f(z)}{z - x} dz \right].$$

Observând că în prima integrală din membrul al doilea avem

$$\left| \frac{x - a}{z - a} \right| < 1,$$

iar în celelalte

$$\left| \frac{z - a_k}{x - a_k} \right| < 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

deducem desvoltările

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - x} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z) dz}{z - a - (x - a)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \left[\frac{1}{z - a} + \frac{x - a}{(z - a)^2} + \dots \right] dz; \\ - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - x} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} \frac{f(z) dz}{z - a_k - (x - a_k)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} \left[\frac{1}{x - a_k} + \frac{z - a_k}{(x - a_k)^2} + \dots \right] dz; \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - x} dz &= P(x - a), \\ - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - x} dz &= P_k \left(\frac{1}{x - a_k} \right). \end{aligned}$$

Prin urmare avem în regiunea considerată

$$f(x) = P(x-a) + P_1 \left(\frac{1}{x-a_1} \right) + \dots + P_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right).$$

322. Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă și $x = a$ un punct singular izolat al ei; din acest punct ca centru să descriem un cerc cu o rază R , în interiorul căruia $f(x)$ să nu aibă altă singularitate decât punctul $x = a$. Fie $r < R$ raza unui al doilea cerc concentric cu cel dintâi; în coroana mărginită de aceste două cercuri, vom avea

$$f(x) = P(x-a) + P_1 \left(\frac{1}{x-a} \right).$$

Însă în cazul nostru, r putând fi oricât de mic voim, seria P_1 va fi convergentă în tot planul exceptând punctul a ; reprezentând-o prin $G \left(\frac{1}{x-a} \right)$, funcțiunea se va putea pune, în vecinătatea punctului a , sub forma

$$f(x) = P(x-a) + G \left(\frac{1}{x-a} \right).$$

Seria G caracterizează singularitatea a ; acest punct este un *pol* sau un punct singular *esențial*, după cum numărul termenilor seriei este limitat sau nelimitat.

323. *În domeniul unui punct singular esențial izolat o funcțiune analitică se poate apropia de o valoare arbitrară, oricât de mult voim.*

Să considerăm mai întâiu funcțiunea $G \left(\frac{1}{x-a} \right)$ întreagă de $\frac{1}{x-a}$. Făcând substituțiunea

$$x-a = \frac{1}{y},$$

prin ajutorul căreia valorilor lui x , vecine cu a , corespund pentru y valori înfinit de mari, obținem funcțiunea întreagă $G(y)$. Însă în domeniul punctului $y = \infty$, există valori y pentru cari avem $|G(y)| > M$, M fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, precum și valori pentru cari $G(y)$ se poate apropia înfinit de mult de o cantitate arbitrară dată. Aceleași concluziuni rezultă pentru funcțiunea propusă în domeniul punctului $x = a$.

Fie acum $f(x)$ o funcțiune uniformă având punctul $x = a$ ca punct singular esențial, în vecinătatea căruia nu se găsește un alt punct singular (pol sau punct singular esențial). Vom avea, în domeniul acestui punct

$$f(x) = G \left(\frac{1}{x-a} \right) + P(x-a).$$

Însă, precum am văzut, există puncte în vecinătatea lui a în cari $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ poate diferi de o cantitate arbitrară oricât de puțin voim, pe când seria $P(x-a)$ diferă în aceste puncte infinit puțin de valoarea ce are în punctul a ; de unde rezultă că în aceleași puncte $f(x)$ poate diferi de o cantitate arbitrară oricât de puțin voim.

Demonstrațiunea precedentă nu se aplică dacă punctul a este un punct limită al unui număr nelimitat de poluri. Se poate proceda în modul următor, aplicabil și cazului considerat mai sus ¹⁾. Fie A o constantă arbitrară și să considerăm diferența

$$f(x) - A.$$

Se poate întâmpla ca această diferență să aibă în domeniul (a) un număr nelimitat de zeruri. În aceste puncte vom avea exact $f(x) = A$. Să presupunem că nu este așa; prin urmare există un număr pozitiv r destul de mic, astfel că în interiorul cercului $|x-a| = r$, diferența considerată n'are nici un zero. În acest caz, raportul

$$\frac{1}{f(x) - A},$$

pentru care punctul $x = a$ este deasemenea punct singular esențial, nu are în interiorul cercului $|x-a| = r$ alt punct singular decât $x = a$. Prin urmare, în interiorul acestui cerc putem scrie

$$\frac{1}{f(x) - A} = G\left(\frac{1}{x-a}\right) + P(x-a).$$

Însă în vecinătatea lui a există puncte în cari $\left|G\left(\frac{1}{x-a}\right)\right|$ poate fi mai mare ca orice cantitate dată, pe când seria $P(x-a)$ are valori finite; de unde rezultă că în aceste puncte avem

$$\frac{1}{|f(x) - A|} > \frac{1}{\varepsilon},$$

adică

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi ε . Așa dar, în domeniul unui punct singular esențial izolat ²⁾, o funcțiune analitică uniformă se poate apropia oricât voim de orice cantitate dată finită sau infinită. Acest rezultat este datorit lui Weierstrass.

D-l E. Picard ³⁾ a demonstrat că în vecinătatea unui punct

¹⁾ E. Picard.

²⁾ Izolat relativ la puncte singulare esențiale.

³⁾ Traité d'Analyse, t. III, 2-e édition, pag. 355.

singular esențial izolat, ecuațiunea $f(x) = A$ admite o infinitate de soluțiuni, exceptând cel mult două valori ale lui A , printre cari se poate cuprinde valoarea $A = \infty$.

Astfel funcțiunea $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pentru care $x = 0$ este un punct singular esențial, poate primi în vecinătatea acestui punct, orice valoare de o infinitate de ori, exceptând valorile 0 și ∞ . Funcțiunea $\sin \frac{1}{x}$ poate primi în vecinătatea lui $x = 0$, orice valoare de o infinitate de ori, exceptând valoarea ∞ . Funcțiunea $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ poate primi, în domeniul $x = 0$, orice valoare o infinitate de ori, exceptând valorile $\pm i$.

324. *Seria Fourier.* Plecând dela seria Laurent putem, printr'o schimbare de variabilă convenabilă, să obținem seria lui *Fourier*. Din studiul funcțiunii exponențiale rezultă că, prin substituțiunea

$$(1) \quad x = e^{it},$$

un dreptunghi (t) , ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate, latura paralelă cu axa reală fiind egală cu 2π , se transformă punct cu punct într'o coroană (x) cuprinsă între două cercuri concenrice, cu centrul în origină.

Dreptunghiul considerat (t) putem să-l înlocuim printr'un altul, a cărui lature ce voim a face să corespundă laturii egale cu 2π , să aibă o lungime și o direcțiune dată. Fie l lungimea și α unghiul ce această lature face cu axa reală. Să punem

$$(2) \quad \omega = le^{i\alpha};$$

substituțiunea

$$(3) \quad t = \frac{2\pi z}{\omega}$$

realizează transformarea dorită. În adevăr, din această substituțiune deducem

$$(4) \quad t - t_0 = 2\pi \frac{z - z_0}{\omega},$$

t_0 și z_0 fiind două puncte cari se corespund în virtutea substituțiunii. De unde rezultă egalitatea

$$(5) \quad \arg(t - t_0) = \arg \frac{z - z_0}{\omega},$$

care arată că unei drepte descrisă de variabila t și trecând prin punctul t_0 , paralelă cu axa reală, corespunde pentru z o dreaptă trecând prin punctul z_0 , paralelă cu direcțiunea lui ω și că unei drepte perpendiculare pe axa reală în planul (t) corespunde o dreaptă

perpendiculară pe direcțiunea lui ω în planul (z). Infine, valoarea

$$|t - t_0| = 2\pi,$$

corespunde valoarea

$$|z - z_0| = |\omega| = l.$$

q. e. d.

Fie acum $f(x)$ o funcțiune olomorfă în coroana limitată de două cercuri concentrice cu centrele în origină. Această funcțiune se poate reprezenta printr'o serie Laurent

$$(6) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

în care avem

$$(7) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(x)}{x^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul unui cerc cu centrul în origină și a cărui rază R este cuprinsă între razele celor două cercuri cari limitează coroana. De altă parte, substituțiunea

$$(8) \quad x = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}},$$

care rezultă din substituțiunile (1) și (3), transformă coroana într'un dreptunghi Δ a cărui una din laturi este paralelă cu direcțiunea lui ω și egală cu $|\omega|$. Să punem

$$(9) \quad f(x) = f\left(e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}\right) = F(z).$$

$F(z)$ este în dreptunghiul Δ o funcțiune olomorfă de z și în virtutea egalității (6), avem, în interiorul acestui dreptunghi,

$$(10) \quad F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}.$$

Această egalitate este valabilă nu numai în interiorul dreptunghiului considerat, ci în fâșia nelimitată cuprinsă între cele două laturi paralele cu ω și prelungite la infinit de o parte și de alta. În adevăr, de o parte, funcțiunea $f(x)$ reluându-și valoarea când argumentul lui x se mărește cu 2π , funcțiunea transformată $F(z)$ se reproduce când înlocuim z prin $z + \omega$; iar de altă parte, toți termenii din membrul al doilea (10) se reproduc în același timp.

325. *Viceversa.* O funcțiune $F(z)$, olomorfă în interiorul unei fâșii, formată de două drepte paralele, periodică, având ca perioadă

o cantitate ω al cărui argument este egal cu acela al paralelelor fâșiei (unghiul paralelelor cu axa reală) se dezvoltă în această fâșie într-o serie de forma (10).

În adevăr, prin substituțiunea (8), fâșia din planul (z) se transformă într-o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrele în origină. Să punem

$$F(z) = f(x).$$

Funcțiunea $f(x)$ este olomorfa în coroana considerată și prin urmare îi se aplică dezvoltarea (6); de unde rezultă expresiunea (10). În această dezvoltare consistă seria *Fourier*.

Dacă funcțiunea $F(z)$ este întreagă expresiunea (10) este valabilă în tot planul.

Observare. Derivata unei serii Fourier se obține derivând fiecare termen în parte. Aceasta rezultă din aceeași proprietate a seriei Laurent.

326. *Expresiunea coeficienților seriei cu ajutorul variabilei z .*

Fie z_0 un punct oarecare în interiorul fâșiei; expresiunea (7) a coeficienților devine

$$(11) \quad a_n = \frac{1}{\omega} \int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z) e^{-\frac{2n\pi z}{\omega}} dz,$$

integrala fiind rectilinie. Dacă origina $z = 0$ se găsește în interiorul fâșiei, putem lua

$$(12) \quad a_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega F(z) e^{-\frac{2n\pi z}{\omega}} dz.$$

În cazul contrar, făcând substituțiunea $z = z_0 + t$, fâșia dată se transformă în alta paralelă, în interiorul căreia se află origina $t = 0$. De unde expresiunea

$$(13) \quad F(z_0 + t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi t}{\omega}},$$

în care

$$(14) \quad a_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega F(z+t) e^{-\frac{2n\pi t}{\omega}} dt.$$

327. *Desvoltarea unei funcțiuni analitice continue de alungul axei reale (H. Poincaré).* Fie $f(x)$ o funcțiune analitică continuă dealungul axei reale. Să presupunem că există o fâșie limitată de două drepte paralele cu axa reală, situată de o parte și de alta

a ei, la o distanță egală cu un număr pozitiv dat a , în care funcțiunea este olomorfă și să facem substituțiunea

$$z = \frac{1 - e^{\frac{\pi x}{2a}}}{1 + e^{\frac{\pi x}{2a}}}.$$

Fâșia considerată se transformă punct cu punct într'un cerc cu centrul în $z = 0$ și cu raza 1. Aceasta se poate recunoaște, de exemplu, introducând substituțiunea auxiliară

$$t = e^{\frac{\pi x}{2a}},$$

care transformă fâșia (x) în semiplanul (t) situat la dreapta axei imaginare; obținem substituțiunea

$$z = \frac{1 - t}{1 + t},$$

care transformă acel semiplan într'un cerc cu centrul în $z = 0$ și cu raza 1. Funcțiunea $f(x)$ se va transforma astfel într'o funcțiune $F(z)$, olomorfă în cercul considerat; prin urmare avem, în interiorul acestui cerc,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Revenind la variabila x , obținem

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1 - e^{\frac{\pi x}{2a}}}{1 + e^{\frac{\pi x}{2a}}} \right)^n,$$

valabilă dealungul axei reale, dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$.

328. *Serii de funcțiuni raționale convergente în arii limitate de arce de cercuri (Appell) ¹⁾*.

Să considerăm trei cercuri având centrele lor în trei puncte $x = a, b, c$ și tăindu-se între ele două câte două, astfel încât să formeze un triunghi circular ABC cu convexitatea spre interiorul triunghiului (fig. 35). Fie $f(x)$ o funcțiune olomorfă în aria (A) interioară triunghiului și continuă pe laturile lui. Vom avea, x fiind un punct în interiorul triunghiului ABC,

$$2i\pi f(x) = \int_{(ABC)} \frac{f(z)}{z - x} dz = \int_{(BC)} + \int_{(CA)} + \int_{(AB)}.$$

¹⁾ Acta mathematica, t. I, pag. 145. Hermite, Cours lith., pag. 107.

Însă, când z descrie cercul (BC), avem

$$\left| \frac{z-a}{x-a} \right| < 1,$$

și putem în acest caz înlocui $\frac{1}{z-x}$ prin seria absolut convergentă

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = - \left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} + \dots \right];$$

de unde

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(BC)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad A_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(BC)} (z-a)^{n-1} f(z) dz.$$

De asemenea, obținem egalitățile

$$(2) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(CA)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(x-b)^n}, \quad B_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(CA)} (z-b)^{n-1} f(z) dz,$$

$$(3) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(AB)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(x-c)^n}, \quad C_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(AB)} (z-c)^{n-1} f(z) dz.$$

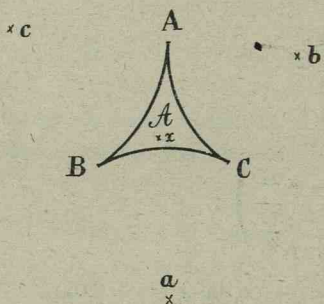


Fig. 35

Adunând aceste trei egalități și grupând împreună termenii cari corespund la aceeași valoare a lui n avem

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right] = f(x).$$

Să presupunem acum punctul x situat în aria nelimitată A' exterioară triunghiului ABC și în același timp exterioară tuturor cercurilor; egalitățile (1), (2) și (3) subsistă, dar integrala $\int_{(ABCA)} \frac{f(z)}{z-x} dz$ fiind nulă, avem

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right] = 0.$$

Prin urmare

$$(6) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right] = \begin{cases} f(x), \\ 0, \end{cases}$$

adică aceeași serie, convergentă în tot planul exterior celor trei cercuri date, reprezintă două funcțiuni analitice cari coincid respec-

tiv cu $f(x)$ sau cu zero, după cum x este situat în interiorul triunghiului ABC sau în afară din acest triunghi (adică în aria (A) sau în aria (A')). În punctele interioare cercurilor precum și pe fiecare cerc, seria $F(x)$ este divergentă.

329. *Aplicațiune.* Fie $f(x) = 1$, și a, β, γ afixele punctelor A, B, C; vom avea

$$2i\pi A_n = - \int_{\beta\gamma} (z-a)^{n-1} dz = \frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{n},$$

$$2i\pi B_n = \frac{(\gamma-b)^n - (a-b)^n}{n}, \quad 2i\pi C_n = \frac{(a-c)^n - (\beta-c)^n}{n}.$$

Prin urmare, în virtutea egalității (6), avem

$$(7) \quad \frac{1}{2i\pi} \sum_1 \frac{1}{n} \left[\frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{(x-a)^n} + \frac{(\gamma-b)^n - (a-b)^n}{(x-b)^n} + \frac{(a-c)^n - (\beta-c)^n}{(x-c)^n} \right] = \begin{cases} 1, \\ \text{sau} \\ 0 \end{cases}$$

după cum x este în aria (A) sau în aria (A').

Acest rezultat se poate verifica direct făcând suma seriei cu ajutorul formulei

$$(8) \quad -\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^n}{n} + \dots,$$

în care punem succesiv

$$u = \frac{\beta-a}{x-a}, \quad \frac{\gamma-a}{x-a}, \quad \frac{\gamma-b}{x-b}, \quad \frac{a-b}{x-b}, \quad \frac{a-c}{x-c}, \quad \frac{\beta-c}{x-c}.$$

Avem

$$-\log\left(1 - \frac{\beta-a}{x-a}\right) = \sum_1 \frac{1}{n} \left(\frac{\beta-a}{x-a}\right)^n,$$

$$-\log\left(1 - \frac{\gamma-a}{x-a}\right) = \sum_1 \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma-a}{x-a}\right)^n;$$

de unde

$$(9) \quad \sum_1 \frac{1}{n} \frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{(x-a)^n} = \log \frac{x-\gamma}{x-\beta},$$

determinațiunea logaritmului fiind aceea care se anulează pentru $x = \infty$, căci determinațiunea logaritmului din (8) se anulează împreună cu u . Deasemenea, avem

$$(10) \quad \sum_1 \frac{1}{n} \frac{(\gamma-b)^n - (a-b)^n}{(x-b)^n} = \log \frac{x-a}{x-\gamma},$$

$$(11) \quad \sum_1 \frac{1}{n} \frac{(a-c)^n - (\beta-c)^n}{(x-c)^n} = \log \frac{x-\beta}{x-a}.$$

Adunând aceste trei relațiuni din urmă și reprezentând membrul întâiu prin $2i\pi F(x)$, obținem

$$(12) \quad F(x) = \frac{1}{2i\pi} \log 1,$$

adică, în toate regiunea de convergență, funcțiunea $F(x)$ este constantă. Inșă, regiunea de convergență fiind compusă din două arii cari n'au nici un punct comun între ele, constanta poate să nu aibă aceiaș valoare în amândouă; ceea ce este ușor de constatat. Logaritmi cari figurează în egalitățile precedente fiind nuli pentru $x = \infty$, rezultă că în aria (A') care cuprinde punctul $x = \infty$, trebuie să luăm $\log 1 = 0$.

Pentru a evalua seria în aria (A), să punem

$$\frac{x - \gamma}{x - \beta} = \varrho e^{i\theta},$$

de unde

$$(13) \quad \log \frac{x - \gamma}{x - \beta} = \log \varrho + i\theta.$$

Membrul întâi fiind olomorf în tot planul exterior cercului al cărui centru este punctul a și anulându-se pentru $x = \infty$, rezultă că argumentul θ este egal cu unghiul $\widehat{\beta x \gamma}$ (fig. 36); căci orice alt argument care diferă de acesta printr'un multiplu de 2π , nu poate tinde într'un mod continuu către zero, când x tinde către infinit. În acelaș timp, ϱ tinde către 1. Deasemenea se recunoaște că punând

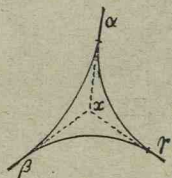


Fig. 36

$$(14) \quad \begin{cases} \log \frac{x - a}{x - \gamma} = \log \varrho' + i\theta', \\ \log \frac{x - \beta}{x - a} = \log \varrho'' + i\theta'', \end{cases}$$

argumentele θ' , θ'' sunt respectiv egale cu unghiurile $\widehat{\gamma x a}$ și $\widehat{a x \beta}$. De unde rezultă că dacă x este interior triunghiului curbiliniu $a\beta\gamma$, avem

$$\theta + \theta' + \theta'' = 2\pi$$

și prin urmăre, suma celor trei logaritmi este egală cu $2i\pi$; adică, în cazul considerat, $\log 1 = 2i\pi$. Ceea ce verifică rezultatul obținut mai sus.

330. Să considerăm un triunghi circular ABC (fig. 37) a cărui una din laturi, BC, are concavitatea sa spre interiorul triunghiului. Fie x un punct în interiorul triunghiului și a centrul cercului corespunzător. Procedând ca pentru dezvoltarea unei funcțiuni olomorfe în seria Taylor (304), vom obține

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(BC)} \frac{f(z)}{z-x} dz = P(x-a).$$

Dacă b și c sunt centrele cercurilor cu convexitatea spre interiorul triunghiului, seriile corespunzătoare sunt, ((2), (3), § 328), de forma

$$P_1\left(\frac{1}{x-b}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{x-c}\right).$$

În interiorul triunghiului ABC avem așa dar

$$P(x-a) + P_1\left(\frac{1}{x-b}\right) + P_2\left(\frac{1}{x-c}\right) = f(x).$$

Dacă cele trei cercuri se taie astfel încât să formeze un al doilea triunghi $A'B'C'$, în raport cu care arcele acelorași cercuri să aibă aceeași dispozițiune ca în cel dintâi, aria interioară acestui triunghi va fi o regiune de convergență a celor trei serii; însă în această regiune suma lor este nulă, căci integrala $\int \frac{z-x}{f(z)} dz$ este luată după conturul ABCA și punctul x este exterior acestui contur.

331. Să considerăm în mod mai general un poligon format din arce de cercuri într'un număr finit oarecare, având convexitatea lor spre interiorul poligonului. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ centrele acestor cercuri. Un raționament analog cu cel făcut în cazul triunghiului ne conduce la concluziunea următoare: *Funcțiunea $f(x)$ olomorfă în interiorul poligonului și continuă pe contur se poate exprima printr'o serie de fracțiuni raționale de forma*

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-a_1)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x-a_2)^n} + \dots + \frac{A_n^{(m)}}{(x-a_m)^n} \right],$$

absolut și uniform convergentă în interiorul poligonului, coeficienții $A_n^{(k)}$ fiind determinați de egalitățile

$$A_n^{(k)} = - \int_{C_k} (z-a_k)^{n-1} f(z) dz,$$

C_k fiind arcul cercului cu centrul în a_k . În tot planul exterior cercurilor date, seria din membrul al doilea este nulă.

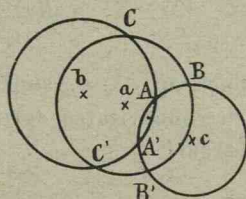


Fig. 37

Dacă una sau mai multe din laturile poligonului au concavitatea spre interiorul poligonului, integralele luate după aceste laturi dau naștere la serii întregi de forma $P_k(x - a_k)$. Expresiunea funcției $f(x)$ în interiorul poligonului este, în acest caz, de forma

$$(2) \quad f(x) = \sum_1^{\mu} P_k(x - a_k) + \sum_{\mu+1}^m P_k\left(\frac{1}{x - a_k}\right),$$

dacă $a_1, \dots, a_{\mu}$ sunt centrele cercurilor din care fac parte laturile cu concavitatea spre interior și $a_{\mu+1}, \dots, a_m$ centrele celorlalte cercuri.

332. Desvoltarea unei funcțiuni olomorfe în serii de polinoame.

Din desvoltările precedente, D-l Appell a dedus desvoltarea unei funcțiuni olomorfe într'o serie de polinoame ¹⁾.

Pentru a stabili această propozițiune, să considerăm una din seriile cari figurează în membrul al doilea al egalității (1) (§ 331)

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

și să arătăm că se poate determina — într'o infinitate de moduri — un polinom $\mathcal{P}(x)$ astfel ca diferența dintre acest polinom și seria să fie în valoare absolută oricât de mică vom.

Fie a un punct, ales după voie, în interiorul poligonului; centrul a fiind exterior acestui poligon, avem

$$(1) \quad \left| \frac{x-a}{a-a} \right| < 1,$$

x fiind un punct oarecare în interiorul aceluiaș poligon. De-unde rezultă că putem scrie

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{[a-a-(x-a)]^n} = P(x-a),$$

$$(2) \quad P(x-a) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_v(x-a)^v + \dots$$

Să reprezentăm prin $p_v(x)$ suma celor dintâi $v+1$ termeni ai membrului al doilea; există un număr întreg pozitiv N astfel ca pentru $v \geq N$ să avem inegalitatea

$$(3) \quad \left| P(x-a) - p_v(x) \right| < \frac{\varepsilon_v}{m},$$

ε_v fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

¹⁾ Math. Annalen, Bd. XXI, 1883, pag. 118.

Să aplicăm acest rezultat fiecăreia din seriile membrului al doilea din (1) (331). Reprezentând prin $P_k(x-a)$, $p_{v,k}(x)$ respectiv seria și polinomul corespunzătoare seriei $P(x-a)$ și polinomului $p_v(x)$, când înlocuim a prin a_k , avem

$$(4) \quad \left| P_k(x-a) - p_{v,k}(x) \right| < \frac{\varepsilon_v}{m}, \quad v \geq N^1)$$

De unde rezultă inegalitatea

$$(5) \quad \left| \sum_{k=1}^m \left(P_k(x-a) - p_{v,k}(x) \right) \right| < \varepsilon_v;$$

sau, punând

$$(6) \quad Q_v(x) = \sum_{k=1}^m p_{v,k}(x),$$

avem inegalitatea fundamentală

$$(7) \quad |f(x) - Q_v(x)| < \varepsilon_v.$$

Această inegalitate exprimă că funcțiunea $f(x)$ este o limită către care tinde polinomul $Q_v(x)$ când v tinde către infinit.

Punctul a fiind supus la unica condițiune de a fi în interiorul poligonului, rezultă că există o infinitate de polinoame $Q_v(x)$ satisfăcând inegalitatea (7).

Pentru a obține seria de polinoame prin care se exprimă funcțiunea $f(x)$, să punem

$$(8) \quad \mathcal{P}_1(x) = Q_1(x), \mathcal{P}_2(x) = Q_2(x) - Q_1(x), \dots, \\ \mathcal{P}_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x) \dots$$

Scriind

$$\mathcal{P}_n(x) = Q_n(x) - f(x) + f(x) - Q_{n-1}(x),$$

rezultă, în virtutea inegalității (7), că avem inegalitatea

$$(9) \quad |\mathcal{P}_n(x)| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

Numerele pozitive ε_n fiind arbitrare, să le alegem astfel ca seria $\sum \varepsilon_n$ să fie convergentă; ceea ce determină convergența absolută și uniformă a seriei

$$\mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x) + \dots + \mathcal{P}_n(x) + \dots$$

¹⁾ Numărul ε_v fiind luat același pentru toate cele m serii, putem fixa numărul N ca să fie același; este de ajuns a lua pe cel mai mare dintre numerele N corespunzătoare celor m serii.



Suma primilor n termeni fiind, în virtutea egalităților (8), egală cu $Q_n(x)$, rezultă, ținând seama de inegalitatea (7), că avem egalitatea

$$f(x) = \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x) + \dots + \mathcal{P}_n(x) + \dots,$$

care este expresiunea căutată ¹⁾.

CAPITOLUL XVII.

REZIDUURI (CAUCHY). APLICAȚIUNI.

I. — DEFINIȚIUNI ȘI CALCULUL REZIDUURILOR.

333. Funcțiunea $f(x)$ fiind analitică și uniformă într'o regiune dată și a un punct singular izolat al funcțiunii, avem, în domeniul acestui punct (teorema Laurent)

$$(1) \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x-a}\right) + P_1(x-a),$$

seria $P\left(\frac{1}{x-a}\right)$ fiind de forma

$$P\left(\frac{1}{x-a}\right) = A_1(x-a)^{-1} + A_2(x-a)^{-2} + \dots$$

Coeficientul A_1 al termenului $(x-a)^{-1}$ se numește *reziduul* funcțiunii $f(x)$ relativ la discontinuitatea a (Cauchy).

Importanța acestui coeficient provine din faptul că avem

$$(2) \quad \int_{(a)} f(x) dx = 2i\pi A_1,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv după o curbă închisă în interiorul căreia nu se găsește altă discontinuitate a funcțiunii decât punctul a . Egalitatea precedentă se justifică observând că avem

$$\int_{(a)} P_1(x-a) dz = 0,$$

precum și

$$\int_{(a)} \frac{dx}{(x-a)^m} = 0 \quad \text{pentru } m > 1.$$

Să presupunem că funcțiunea uniformă $f(x)$, continuă dealungul unei curbe închise C , are în interiorul acestei curbe un număr limitat

¹⁾ P. Montel, Leçons sur les séries de polinomes à une variable complexe

de puncte singulare $a_1, a_2, \dots, a_n$. Descriind în jurul acestor puncte, ca centre, cercuri foarte mici, cari să nu se taie între ele și cari să fie situate în interiorul curbei C , obținem o arie cu contur multiplu în interiorul căreia funcțiunea $f(x)$ este olomorfă. Aplicând teorema lui Cauchy și numind $A_1, \dots, A_n$, reziduurile funcțiunii în raport cu punctele $a_1, a_2, \dots, a_n$, vom avea

$$(3) \quad \int_{(C)} f(x) dx = 2i\pi(A_1 + A_2 + \dots + A_n),$$

adică: *integrala $\int f(x) dx$ luată dealungul curbei C în sensul pozitiv este egală cu $2i\pi$ înmulțit cu suma reziduurilor relative la discontinuitățile funcțiunii $f(x)$, cuprinse în interiorul acestei curbe.*

334. *Definițiunea reziduului relativ la punctul ∞ .* Să presupunem funcțiunea $f(x)$ uniformă în domeniul punctului înfinit și acest punct să-l presupunem a fi punct ordinar sau punct singular izolat. Vom putea descrie din origină ca centru un cerc cu o rază R destul de mare, astfel ca, în afară din cerc, $f(x)$ să n'aibă nici un punct singular, exceptând punctul ∞ . Vom numi, prin analogie, *reziduu* al lui $f(x)$, relativ la punctul ∞ , valoarea integralei

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} f(x) dx,$$

luată în sensul pozitiv în raport cu punctul ∞ , ceeace revine la sensul negativ în raport cu centrul cercului. Să presupunem că avem, în domeniul punctului ∞ ,

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + P_1(x),$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \dots$$

Reziduu corespunzător va fi $-A_1$, adică coeficientul lui x^{-1} din dezvoltarea funcțiunei $f(x)$, cu semnul schimbat.

Precum vedem, reziduu relativ la punctul ∞ poate fi diferit de zero, chiar când punctul ∞ este un punct ordinar; ceeace nu are loc pentru un punct ordinar la distanță finită.

Să presupunem $f(x)$ o funcțiune rațională

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F(x)$ și $F_1(x)$ fiind două polinoame de x , astfel ca gradul număratorului să fie mai mic ca gradul numitorului cu cel puțin două

unități. Reziduul lui $f(x)$ în raport cu punctul ∞ va fi nul; căci dezvoltarea fracțiunii date după puterile crescânde ale lui x , fiind de forma

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A}{x^2} + \frac{A_1}{x^3} + \dots$$

termenul în $\frac{1}{x}$ lipsește.

335. *Teoremă. Suma reziduurilor unei funcțiuni raționale este nulă.*

Fie (R) un cerc descris din origină ca centru cu o rază destul de mare încât să conțină în interiorul său toate polurile funcțiunii raționale $f(x)$, situate la distanța finită. Integrala

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} f(x) dx,$$

luată în sensul pozitiv reprezintă suma reziduurilor lui $f(x)$ relative la toate polurile situate în interiorul cercului; aceiaș integrală, luată în sensul negativ, este egală cu reziduul relativ la punctul ∞ . De unde rezultă propozițiunea enunțată.

Teorema subsistă evident pentru o funcțiune uniformă pe toată sfera, având un număr limitat de singularități.

336. *Calculul reziduurilor relative la poluri.* Să presupunem funcțiunea $f(x)$ pusă sub forma

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F_1(x)$ și $F(x)$ fiind funcțiuni olomorfe în domeniul unui punct a , care este un zero de ordinul n al numitorului, fără a anulă numărătorul. Acest punct este un pol de ordinul n al funcțiunii $f(x)$. În domeniul punctului a , dezvoltarea după seria Taylor dă

$$F_1(x) = F_1(a) + (x-a) F'_1(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} F_1^{(n-1)}(a) + \dots$$

$$F(x) = (x-a)^n \left[\frac{F^n(a)}{n!} + (x-a) \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \dots \right];$$

de unde pentru $f(x)$ o expresiune de forma

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \left[n! \frac{F_1(a)}{F^{(n)}(a)} + A_1(x-a) + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots \right].$$

Reziduul căutat este coeficientul A_{n-1} .

Din dezvoltarea precedentă rezultă imediat că avem

$$A_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x-a)^n f(x) \right]_{x=a}$$

Să presupunem $f(x)$ pus sub forma

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

$\varphi(x)$ și $\psi(x)$ fiind două funcțiuni uniforme și să presupunem că $x = a$ este un pol de ordinul n al funcțiunii $\varphi(x)$ și punct ordinar pentru funcțiunea $\psi(x)$. În domeniul punctului a , vom avea

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + P(x-a),$$

$$\psi(x) = \psi(a) + (x-a) \psi'(a) + \dots + (x-a)^{n-1} \frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \dots$$

De unde conchidem reziduul lui $f(x)$, relativ la polul a ,

$$\mathcal{R}_{x=a} f(x) = A_1 \psi(a) + A_2 \psi'(a) + \dots + A_n \frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

337. *Exemple:*

$$1^0. \quad \mathcal{R}_{x=0} \cot x = \mathcal{R}_{x=0} \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

$$\mathcal{R}_{x=n\pi} \cot x = [(x - n\pi) \cot x]_{x=n\pi} = 1.$$

2⁰. Avem în domeniul lui $x = 0$

$$\cot x = \frac{1}{x} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 \dots \right);$$

de unde rezultă că reziduurile funcțiilor

$$\frac{\cot x}{x}, \frac{\cot x}{x^2}, \frac{\cot x}{x^3}, \frac{\cot x}{x^4}, \dots$$

relativ la $x = 0$ sunt respectiv

$$0, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{45}, \dots$$

Se recunoaște că reziduul relativ la $x = 0$ al funcțiunii $\frac{\cot x}{x^{2n+1}}$, n fiind un număr întreg pozitiv este nul; căci această funcțiune fiind pară, dezvoltarea sa în domeniul lui $x = 0$ conține numai puteri pare ale lui x .

Pentru a calculă reziduul funcțiunii $\frac{\cot x}{x^k}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$),

relativ la polul simplu $x = n\pi$, $n \neq 0$, observăm că avem

$$\mathcal{R}_{x=n\pi} \frac{\cot x}{x^k} = \mathcal{R}_{x=0} \frac{\cot(x+n\pi)}{(x+n\pi)^k} = \mathcal{R}_{x=0} \frac{\cot x}{(x+n\pi)^k}.$$

Însă, în domeniul lui $x = 0$, avem

$$\frac{1}{(x+n\pi)^k} = \frac{1}{(n\pi)^k} - \frac{kx}{(n\pi)^{k+1}} + \dots,$$

de unde rezultă

$$\mathcal{R}_{x=n\pi} \frac{\cot x}{x^k} = \frac{1}{(n\pi)^k}.$$

$$3^0. \quad \mathcal{R}_{x=n} \frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

4⁰. Fie

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{(x+i)^n} \cdot \frac{1}{(x-i)^n}.$$

Pentru a calcula reziduul acestei funcțiuni în raport cu polul $x = i$, să punem $x = i + h$ și să dezvoltăm expresiunea

$$f(i+h) = \frac{1}{(2hi)^n} \left(1 - \frac{hi}{2}\right)^{-n}$$

după puterile lui h . Reziduul căutat va fi coeficientul lui $\frac{1}{h}$, adică

$$-\frac{i}{2^{2n-1}} \frac{n(n+1) \dots (2n-2)}{(n-1)!}.$$

Reziduul funcțiunei considerate, relativ la polul $x = -i$, este acelaș cu semnul schimbat; căci suma celor două reziduuri trebuie să fie nulă.

5⁰. Fie $F(x)$, $F_1(x)$ două funcțiuni raționale întregi; să considerăm expresiunea

$$\frac{F_1(x)}{(z-x)F(x)},$$

în care z reprezintă un punct oarecare în plan. Polurile acestei funcțiuni raționale situate la distanță finită sunt zerurile lui $F(x)$

și punctul $x = z$. Relativ la acest din urmă punct avem

$$\mathcal{R}_{x=z} \frac{F_1(x)}{(z-x)F(x)} = - \frac{F_1(z)}{F(z)}.$$

Fie $x = a$ un zero de ordinul α al lui $F(x)$; vom avea, în domeniul acestui punct, o expresiune de forma

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + P(x-a), \quad A_1 \neq 0.$$

De altă parte, putem scrie, în același domeniu,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \dots;$$

prin urmare

$$\mathcal{R}_{x=a} \frac{F_1(x)}{(z-x)F(x)} = \frac{A_1}{(z-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_\alpha}{z-a}.$$

În fine, să calculăm reziduul relativ la punctul $x = \infty$. Dacă gradul lui $F_1(x)$ este mai mic decât acela al lui $F(x)$, reziduul funcțiunii considerate va fi nul; căci, în acest caz, gradul numărătorului fracțiunii este mai mic decât acela al numitorului cu cel puțin două unități. Să considerăm cazul general și fie, în domeniul punctului ∞ ,

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = Bx^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m + B_{m+1} \frac{1}{x} + \dots$$

În același domeniu avem

$$-\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \dots + \frac{z^m}{x^{m+1}} + \dots$$

Prin urmare

$$\mathcal{R}_{x=\infty} \frac{1}{z-x} \frac{F_1(x)}{F(x)} = Bz^m + B_1z^{m-1} + \dots + B_m.$$

Exprimând că suma tuturor reziduurilor este nulă, obținem (înlocuind litera z prin litera x) egalitatea

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = Bx^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m + \Sigma \left(\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \right),$$

în care simbolul Σ se referă la toate zerurile numitorului $F(x)$. Această formulă reprezintă expresiunea unei fracțiuni raționale printr-o sumă de fracțiuni simple.

II. — APLICAȚIUNI

338. Numeroase sunt aplicațiunile teoremei asupra reziduurilor, exprimată prin egalitatea fundamentală

$$\int_C f(z)dz = 2i\pi \Sigma \text{ reziduurilor lui } f(x),$$

în care funcțiunea $f(x)$ este presupusă uniformă în aria limitată de curba C și continuă de alungul acestei curbe și simbolul Σ se referă la toate singularitățile, presupuse izolate, situate în interiorul curbei. Să mai observăm că conturul C poate fi format din linii de forme oarecare.

339. *Determinarea câtorva integrale definite de variabilă reală. Propozițiuni preliminare.*

Propozițiunile următoare sunt adesea ori utile în evaluarea integralelor definite:

1°. Dacă o funcțiune analitică $f(x)$ devine înfinită într'un punct a , astfel încât produsul $|(x-a)f(x)|$ să tindă către zero împreună cu $|x-a|$, integrala

$$\int_{(q)} f(x)dx,$$

luată după un cerc descris din a ca centru, cu o rază q , tinde către zero împreună cu q .

În adevăr, în virtutea ipotezei, la un număr pozitiv dat ε oricât de mic voim, corespunde un număr pozitiv q , astfel că pentru toate punctele situate pe cercul $|x-a| = q$, avem

$$|(x-a)f(x)| < \varepsilon;$$

de unde

$$\left| \int_{(q)} f(x)dx \right| \leq \int_{(q)} \left| f(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{q} \int_{(q)} dx = 2\pi\varepsilon.$$

Prin urmare avem

$$\lim_{q=0} \int_{(q)} f(x)dx = 0,$$

căci ε tinde către zero împreună cu q .

Concluziunea precedentă subsistă evident dacă în loc de a lua integrala dealungul cercului întreg (q) se ia dealungul unui arc al aceluia cerc.

Observare. Funcțiunea $f(x)$ considerată mai sus nu poate fi uniformă în domeniul punctului a . În adevăr, dacă $f(x)$ ar fi uni-

formă, punctul a în care această funcțiune devine infinită ar fi un pol sau un punct singular esențial. În cazul întâiu, produsul $(x-a)f(x)$ tinde către infinit sau către o valoare finită și diferită de zero, după cum ordinul polului este mai mare sau egal cu 1. În cazul al doilea, produsul considerat este absolut nedeterminat.

Exemple: [a]. $f(x) = (x-a)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

[b]. Funcțiunea $f(x) = \log x$ se bucură de aceeași proprietate în domeniul punctului $x = 0$. În adevăr, punând $x = rei\theta$, de unde $\log x = \log r + i\theta$, rezultă

$$|x \log x| = r |\log r + i\theta| \leq r |\log r| + r |\theta|;$$

prin urmare

$$\lim_{x=0} |x \log x| = 0,$$

căci, precum se știe,

$$\lim_{r=0} r \log r = 0.$$

2°. Fie $f(x)$ o funcțiune analitică uniformă sau multiformă și să presupunem că *produsul $xf(x)$ tinde către zero când x tinde către infinit, în orice direcțiune ar fi; integrala*

$$\int_{(R)} f(x) dx,$$

luată după un cerc (R) cu centrul în origină și cu raza R , tinde către zero când R tinde către infinit. Căci pentru R destul de mare avem

$$|xf(x)| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv care tinde către zero împreună cu $\frac{1}{R}$. De unde

$$\left| \int_{(R)} f(x) dz \right| < \varepsilon \int \left| \frac{dx}{x} \right| = 2\pi\varepsilon;$$

prin urmare

$$\lim_{R=\infty} \int_{(R)} f(x) dx = 0.$$

3°. Dacă $xf(x)$ tinde către zero când x tinde către infinit în interiorul unui unghi AOB (fig. 38), integrala

$$\int_{(AB)} f(x) dx,$$

luată după arcul (AB) tinde către zero, când punctele A și B tinde către infinit pe laturile unghiului (OA, OB) . Acelaș raționament ca mai sus.

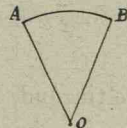


Fig. 38

Exemple : [a]. — $f(x) = e^{ix}$, $x = rei\theta$, $0 < \theta < \pi$.

[b]. — $f(x) = e^{ix^2}$, $x = rei\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

4^o. Dacă $f(x)$ este o funcțiune pară, integrala

$$\int_{(R)} f(x) dx,$$

luată dealungul cercului $|x| = R$, este nulă. Cercul poate fi înlocuit printr'o curbă (C) având origina ca centru. În adevăr, fie C_1 și C_2 arcele cari împreună formează curba C, simetrice în raport cu origina. Avem

$$\int_C f(x) dx = \int_{C_1} f(x) dx + \int_{C_2} f(x) dx.$$

Însă, în virtutea ipotezei, avem

$$\int_{C_2} f(x) dx = \int_{C_1} f(-x) d(-x) = - \int_{C_1} f(x) dx;$$

căci $f(-x) = f(x)$ și pe când x descrie arcul C_2 în sensul pozitiv, — x descrie în acelaș sens arcul C_1 . De unde rezultă

$$\int_C f(x) dx = 0.$$

5^o. Dacă $f(z)$ este o funcțiune impară, astfel că $\frac{f(z)}{z}$ tinde uniform către zero, când z tinde către infinit, avem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = 0,$$

x fiind un punct oarecare la distanță finită. În adevăr, putem scrie

$$\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(R)} \frac{f(z)}{z} dz + x \int_{(R)} \frac{f(z)}{z(z-x)} dz.$$

Prima integrală din membrul al doilea este nulă (4^o); iar pentru cea de a doua, avem inegalitatea

$$\left| \int_{(R)} \frac{f(z)}{z(z-x)} dz \right| < \varepsilon \int_{(R)} \frac{dz}{z-x} = 2\pi\varepsilon,$$

ε tinzând, în virtutea ipotezei, către zero când R tinde către infinit.

340. Să procedăm acum la determinarea câtorva integrale definite.

1^o. Fie

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

o funcțiune rațională care nu devine infinită pentru nici o valoare reală a lui x și al cărei numărător este de un grad mai mic ca numitorul cu cel puțin două unități. În aceste condițiuni, integrala

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

luată după axa reală are o valoare finită. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ zerurile lui $F(x)$, situate deasupra axei reale și $R_1, R_2, \dots, R_n$ reziduurile corespunzătoare ale lui $f(x)$; vom avea

$$I = 2i\pi \sum_{k=1}^n R_k.$$

În adevăr, din origină ca centru să descriem un semicerc (ACB) (fig. 39), situat deasupra axei reale, cu o rază destul de mare, pentru ca să conțină în interiorul său toate zerurile $a_1, a_2, \dots, a_n$. Luând drept contur de integrațiune semicercul (ACB) și diametrul $\overline{BA}$, vom avea

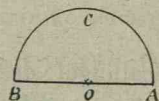


Fig. 39

$$(ACB) + (BA) = 2i\pi \sum_{k=1}^n R_k.$$

Însă, în virtutea ipotezei, produsul $xf(x)$ tinde către zero când x tinde către infinit, în orice direcțiune voim; prin urmare integrala dealungul semicercului tinde către zero, când raza cercului tinde către infinit și astfel obținem rezultatul enunțat.

Exemple. Aplicând formula de mai sus, avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{n(n+1) \dots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

2^o. Fie $f(\sin x, \cos x)$ o funcțiune rațională de $\sin x, \cos x$ care nu devine infinită pentru nici o valoare reală a lui x . Integrala

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\sin x, \cos x) dx,$$

în care x_0 este real și care este luată după axa reală, are o valoare finită, independentă de x_0 . Această integrală se poate calcula în

felul următor: Înlocuim $\sin x$, $\cos x$ prin expresiunile lor în funcțiune de exponențială și punem $e^{ix} = t$; avem

$$\sin x = i \frac{1 - t^2}{2t}, \quad \cos x = \frac{1 + t^2}{2t}, \quad dx = -i \frac{dt}{t}.$$

De altă parte, când x crește dela x_0 până la $x_0 + 2\pi$, sau, ceea ce este tot una, dela 0 la 2π , t descrie în sensul pozitiv un cerc cu centrul în origină și a cărui rază este 1. Integrala propusă se reduce așa dar la integrala unei funcțiuni raționale de t , $F(t)$, luată în sensul pozitiv, dealungul acestui cerc. Reprezintănd prin S suma reziduurilor funcțiunii $F(t)$ relativ la polurile sale situate în interiorul acestui cerc, vom avea

$$J = 2i\pi S.$$

3°. Să considerăm funcțiunea e^{-z^2} olomoră în tot planul $z = x + iy$ și să luăm integrala

$$\int e^{-z^2} dz$$

dealungul dreptunghiului OACB (fig. 40), ale cărui două laturi $OA = a$, $OB = b$ sunt situate respectiv pe axele de coordonate Ox , Oy . Integrala dealungul conturului fiind nulă, avem egalitatea

$$(1) \quad (OA) + (AC) + (CB) + (BO) = 0,$$

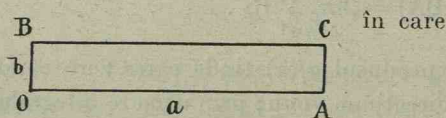


Fig. 40

$$(OA) = \int_0^a e^{-x^2} dx,$$

$$(AC) = i \int_0^b e^{-(a+iy)^2} dy = ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2 - 2ia y} dy,$$

$$(CB) = - \int_0^a e^{-(x+ib)^2} dx = -e^{-b^2} \int_0^a e^{-x^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx) dx,$$

$$(BO) = -i \int_0^b e^{y^2} dy.$$

Să ducem aceste valori în egalitatea (1) și să facem $a = \infty$; integrala (AC) se anulează și ținând seamă de valoarea cunoscută

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

obținem integrala

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

40. Funcțiunea $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$ admite $x = 0$ ca pol de ordinul întâi și reziduul corespunzător este 1. Din acest punct ca centru cu două raze diferite $OA = r$, $OB = R$ (fig. 41) să descriem două semicercuri situate, cel dintâiu sub axa reală, cel de al doilea deasupra acestei axe. Valoarea integralei

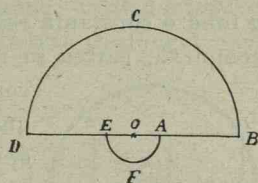


Fig. 41

$$\int \frac{e^{ix}}{x} dx,$$

luată după conturul ABCDEFA, va fi egală cu $2i\pi$:

$$(1) \quad (AB) + (BCD) + (DE) + (EFA) = 2i\pi.$$

Integrala (BCD) tinde către zero când R tinde către infinit. În adevăr, punând $x = Re^{it}$, produsul $|xf(x)|$ tinde către zero împreună cu $\frac{1}{R}$ pentru $\alpha \leq t \leq \pi - \alpha$, α fiind un număr pozitiv oricât de mic vom; prin urmare integrala transformată luată între limitele $t = \alpha$, $t = \pi - \alpha$ tinde către zero în același timp. De altă parte, integralele

$$\int_0^\alpha e^{iR(\cos t + i \sin t)} dt, \quad \int_{\pi-\alpha}^\pi e^{iR(\cos t + i \sin t)} dt$$

au module mai mici ca α . De unde rezultă justificarea propozițiunii. Pentru a evalua integrala (EFA) să punem $x = re^{it}$; vom avea

$$(EFA) = i \int_{-\pi}^0 e^{ir(\cos t + i \sin t)} dt.$$

Făcând ca r să tindă către zero, această integrală tinde către $i\pi$. Prin urmare făcând să tindă în același timp R către infinit și r către zero, egalitatea (1) devine

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

Schimbând în integrala a doua x în $-x$, egalitatea precedentă devine

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{x} dx = i\pi,$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5°. Fie

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{1+e^x}.$$

a fiind o constantă reală, pozitivă și mai mică ca 1; sau, dacă este complexă, partea sa reală se presupune cuprinsă între 0 și 1. Să considerăm un dreptunghi $ABCD$, având una din laturi AB situată pe axa reală, latura opusă CD la o distanță de cea dintâi egală cu 2π și celelalte două laturi simetrice în raport cu axa imaginară (fig. 42). În interiorul acestui dreptunghi, $f(x)$ are un singur pol $x = i\pi$ și reziduul corespunzător este $-eia\pi$. Fie $AB = 2a$; vom avea

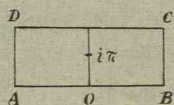


Fig. 42

$$(AB) + (CD) = (1 - e^{2ia\pi}) \int_{-a}^{+a} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

$$(BC) = i \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(a+ix)}}{1+e^{a+ix}} dx, \quad (DA) = -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-a+ix)}}{1+e^{-a+ix}} dx,$$

Făcând a să tindă către infinit, ultimile două integrale tind către zero, în virtutea ipotezei făcute asupra lui a . Aplicând teorema reziduurilor, obținem

$$(1 - e^{2ia\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2i\pi e^{ia\pi};$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -\frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}},$$

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Făcând substituțiunea $e^x = t$, egalitatea precedentă devine

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

partea reală a lui a fiind cuprinsă între 0 și 1.

6°. Să calculăm direct integrala

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

Funcțiunea $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ nu este uniformă în domeniul lui $z = 0$. Pentru a aplica teorema lui Cauchy este necesar ca funcțiunea să fie uniformă în aria limitată de conturul de integrațiune. Pentru a obține o asemenea arie, să facem în planul (z) o tăietură dealungul axei reale pozitive și să descriem cercurile concenrice $|z| = r$, $|z| = R$; r fiind oricât de mic și R oricât de mare voim. În aria limitată de aceste cercuri și de tăietura considerată, funcțiunea dată este uniformă, având polul $z = -1$.

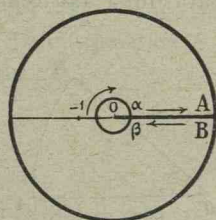


Fig. 43

Fie a , β două puncte ale cercului (r), cel dintâi pe țărmul pozitiv și cel de al doilea pe țărmul negativ al tăieturii (fig. 43); de asemenea fie A , B două puncte ale cercului (R) situate în mod analog. Să considerăm integrala

$$\int_{aA(R)B\beta(r)} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = (aA) + (R) + (B\beta) + (r),$$

luată dealungul conturului în sensul pozitiv.

Dealungul lui aA să luăm $\arg z = 0$, prin urmare, dealungul țărmului $(+)$ al tăieturii, z^{a-1} este egal cu valoarea sa aritmetică și scriem

$$z^{a-1} = x^{a-1}.$$

Pe țărmul $(-)$, $\arg z = 2\pi$; de unde rezultă, pe acest țărm, expresiunea

$$z^{a-1} = x^{a-1} \cdot e^{2i\pi(a-1)} = x^{a-1} \cdot e^{2i\pi a}.$$

Pentru a calcula reziduul relativ la polul $x = -1$, observăm că pe axa reală negativă avem $\arg z = \pi$; prin urmare, pe această axă

$$z^{a-1} = x^{a-1} \cdot e^{i\pi(a-1)} = -x^{a-1} e^{i\pi a}.$$

Reziduul căutat se obține înlocuind în expresiunea precedentă x prin -1 :

$$\mathcal{R}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = -e^{i\pi a}.$$

Să facem R să tindă către infinit și r către zero; integralele dealungul acestor cercuri tinzând către zero, rezultă egalitatea

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = -2i\pi e^{i\pi a};$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

70. *Integrala lui Fresnel.* Să considerăm integrala

$$\int e^{-z^2} dz,$$

luată după sectorul circular OABO a cărei una din raze este îndreptată după axa reală în sensul pozitiv și a doua face cu cea dintâi un unghi de 45° . Avem

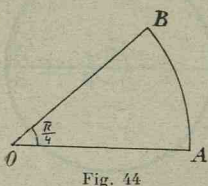


Fig. 44

$$(1) \quad (OA) + (AB) + (BO) = 0, \quad (OA) = \int_0^R e^{-x^2} dx.$$

Integrala

$$(BO) = - \int_0^{Re^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-z^2} dz$$

se poate transforma astfel ca variabila de integrație să fie reală. Este deajuns a face substituțiunea

$$(2) \quad z = xe^{\frac{i\pi}{4}},$$

în care x este real și variază dela 0 la R . Ultima integrală se poate dar scrie

$$(3) \quad (BO) = -e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R e^{-ix^2} dx = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos x^2 - i \sin x^2) dx.$$

Făcând R să tindă către infinit, integrala (AB) tinde către zero ¹⁾ și egalitatea (1) devine

$$(4) \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

de unde rezultă

$$(5) \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1) Punând $z = Re^{i\frac{t}{2}}$, avem

$$|(AB)| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos t} R dt = \int_0^a + \int_a^{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}.$$

Prima integrală din membrul al doilea tinde evident către zero când R tinde către infinit; în privința celei din urmă avem

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos t} R dt < \frac{1}{R \sin a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos t} R^2 \sin t = \frac{1}{R \sin a} (1 - e^{-R^2}).$$

Limita acestei integrale, pentru $R = \infty$, este dar egală cu zero.

8°. Să considerăm funcțiunea

$$f(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}},$$

care admite punctele ± 1 , ca puncte de ramificațiune. Să limităm planul variabilei printr'o tăietură făcută dealungul axei reale și cuprinsă între cele două puncte de ramificațiune; funcțiunea dată va fi uniformă în tot planul așa limitat. Integrala

$$\int \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

luată după o curbă închisă oarecare în interiorul căreia se găsește tăietura are aceiaș valoare, căci în aria cuprinsă între două asemenea curbe, funcțiunea de sub semnul f este olomorfă. Să luăm drept una din aceste curbe drumul $abcb'a'c'a$ format din două semicercuri $a'c'a$, $bc'b'$ având centrele lor în punctele de ramificațiune și o rază ρ foarte mică și din cele două țărmuri ab , $a'b'$ ale tăieturii; drept a doua curbă să luăm un cerc cu centrul în origină și cu o rază R foarte mare (fig. 45). Vom avea

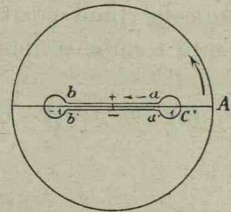


Fig. 45

$$(1) \quad (ab) + (bc'b') + (b'a') + (a'c'a) = \int_{(R)} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Să facem ρ să tindă către zero; integralele după cele două cercuri vor tinde către zero. De altă parte, pe cele două țărmuri ale tăieturii, $f(x)$ având valori egale și de semne contrarii, rezultă

$$(b'a') = - (ba) = (ab);$$

prin urmare la limită, pentru $\rho = 0$, egalitatea (1) devine

$$(2) \quad 2 \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} = - \int_{(R)} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrala din membrul întâiu este luată dealungul axei reale pe țărmul (+) al tăieturii și integrala din membrul al doilea dealungul cercului (R) în sensul pozitiv în raport cu origina.

Să luăm, pentru a fixa ideile, ramura $\sqrt{1-x^2}$ care se reduce la $+1$, în punctul $x=0$, privit ca situat pe țărmul (+) al tăie-

turii. În acest caz, radicalul din membrul întâi al egalității precedente este real și pozitiv. Să căutăm valoarea integralei din membrul al doilea. Pentru $|x| > 1$, avem

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{i}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ = \pm \frac{i}{x} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{1}{x^{2n}} + \dots\right).$$

Pentru a vedea ce semn corespunde ramurei noastre, să ne referim la studiul radicalului $\sqrt{1-x^2}$. S'a văzut (245) că această ramură este, pentru x real și mai mare ca 1, reprezentată prin

$$-i\sqrt{x^2-1},$$

radicalul fiind pozitiv. De unde rezultă că în dezvoltarea precedentă trebuie să luăm semnul — în membrul al doilea. Avem deci

$$(3) \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{i}{x} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{x^{2n}} + \dots\right].$$

Această expresiune este valabilă în toată întinderea planului exterioară cercului descris din origină ca centru cu raza 1, căci în această regiune fiecare ramură este olomorfă. De unde rezultă că reziduul funcțiunii $f(x)$ corespunzător punctului infinit este

$$+i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n};$$

prin urmare egalitatea (2) devine

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \pi.$$

De unde

$$(5) \quad \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

În cazul $n=0$, formula (2) dă

$$(6) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi;$$

de unde

$$(7) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

9^o. Să considerăm integrala

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}},$$

a fiind (pentru ca integrala să aibă un sens) o cantitate oarecare, necuprinsă între -1 și $+1$. Funcțiunea de sub semnul $\int$ este uniformă în tot planul limitat de tăietura $(-1, +1)$, având punctul $x = a$ ca pol, reziduul corespunzător fiind $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Să luăm drept contur de integrațiune pe cel considerat în exemplul precedent și să presupunem R destul de mare pentru ca punctul a să fie în interiorul cercului (R) ; vom avea

$$\int_{(R)} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -2I + \frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

Făcând (R) să tindă către infinit, integrala dealungul cercului (R) tinde către zero; de unde

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

radicalul din membrul al doilea având valoarea ce primește în punctul a ramura $\sqrt{1-x^2}$ care figurează sub semnul $\int$.

Pentru a preciza această valoare, să punem

$$x = a + i\beta, \quad \sqrt{1-x^2} = A + iB$$

Este evident că A nu poate fi nul decât pentru x real și în valoare absolută mai mare decât 1. De unde rezultă că A , care variază într'un mod continuu împreună cu x , păstrează un semn invariabil în fiecare din cele două semiplane separate prin axa reală. Inșă, ramura considerată fiind egală cu 1, în punctul $x = 0$ situat pe țărmul $(+)$ al tăieturii $(-1, +1)$, rezultă că în vecinătatea originii, A este respectiv pozitiv sau negativ, după cum x este deasupra sau dedesubtul axei reale; de unde rezultă că A este de același semn cu β .

Printr'un raționament analog deducem semnul lui B . În adevăr B nu se anulează decât pentru valori ale lui x de forma $x = i\beta$. Facem abstracțiune de valorile reale ale lui x cuprinse între -1 și $+1$, căci x nu străbate acest segment. Așa dar B nu-și schimbă semnul decât atunci când x străbate axa imaginară. Inșă, precum am văzut în studiul radicalului $\sqrt{1-x^2}$, pentru x real și în valoare absolută mai mare ca 1 , $B \leq 0$ după cum x este pozitiv sau negativ. De unde conchidem că B este de semn contrar cu a . Acest rezultat se poate verifica cu ajutorul egalității $\sqrt{1-(a+i\beta)^2} = A + iB$, care dă $AB = -a\beta$.

Să presupunem a real și mai mare ca 1 și să înlocuim în (1) $\sqrt{1-a^2}$ prin $-i\sqrt{a^2-1}$; vom avea

$$(2) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

radicalul din membrul al doilea fiind pozitiv.

10°. Să căutăm, ca ultim exemplu, valoarea integralei

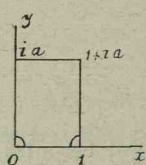


Fig. 46

$$I = \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx.$$

Să considerăm, pentru aceasta, integrala

$$\int \log \sin \pi z \, dz,$$

dealungul dreptunghiului având ca bază segmentul $(0 \dots 1)$ al axe reale și o înălțime ce reprezintă prin a . Din acest dreptunghi, să excludem vârfurile $z = 0$ și $z = 1$ prin câte un cadran având centrele în aceste puncte și o rază foarte mică. Integralele dealungul acestor cadrane tinzând către zero împreună cu raza, rezultă egalitatea

$$(1) \quad \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = i \int_0^a \left[\log \sin \pi iy - \log \sin \pi(1 + iy) \right] dy \\ + \int_0^1 \log \sin \pi(x + ia) \, dx.$$

Pentru a calculă valoarea expresiunii

$$\log \sin \pi iy - \log \sin \pi(1 + iy),$$

să căutăm variațiunea funcțiunii

$$\log \sin \pi(x + iy),$$

când x variază dela 0 la 1 . Valoarea absolută a lui $\sin \pi(x + iy)$

fiind aceeași pentru $x = 0$ și $x = 1$, este deajuns a cunoaște variațiunea unghiului $\theta(x) = \arg \sin \pi(x + iy)$. Avem

$$\sin \pi(x + iy) = \sin \pi x \cos h\pi y + i \cos \pi x \sin h\pi y,$$

prin urmare

$$\theta(x) = \operatorname{arctg} \left(\cot \pi x \frac{\sin h\pi y}{\cos h\pi y} \right), \quad y > 0.$$

Funcțiunea $\theta(x)$ variază într'un mod continuu când x variază dela 0 la 1; dacă dar luăm $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem $\theta(1) = -\frac{\pi}{2}$. De unde rezultă

$$\log \sin \pi i y - \log \sin \pi(1 + iy) = i\pi.$$

Ducând această valoare în egalitatea (1), avem

$$(2) \quad I = -\pi a + \int_0^1 \log \sin \pi(x + ia) dx.$$

De altă parte avem

$$\sin \pi(x + ia) = \frac{1}{2} i e^{\pi a - i\pi x} (1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x});$$

de unde

$$\log \sin \pi(x + ia) = -\log 2 + \frac{i\pi}{2} + \pi a - i\pi x + \log (1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}),$$

$$\int_0^1 \log \sin \pi(x + ia) dx = -\log 2 + \pi a + \int_0^1 \log (1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}) dx.$$

Ducând această valoare în egalitatea (2), obținem

$$(3) \quad I = -\log 2 + \int_0^1 \log (1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}) dx.$$

Însă $\log (1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x})$ tinde către zero când a tinde către $+\infty$, pe când membrul întâiu este independent de a ; rezultă

$$(4) \quad \int_0^1 \log \sin \pi x dx = -\log 2.$$

Observare. Integrala din membrul al doilea (3) este nulă pentru orice valoare a lui $a > 0$. În adevăr, punând $e^{-2\pi a} = a$, avem $a < 1$, prin urmare

$$\log (1 - ae^{2i\pi x}) = -\sum_1^{\infty} a^n \frac{e^{2in\pi x}}{n},$$

$$\int_0^1 \log (1 - ae^{2i\pi x}) dx = \frac{i}{2\pi} \sum_1^{\infty} \frac{a^n}{n^2} \left(e^{2ni\pi x} \right)_0^1 = 0.$$

III. — ALTE APLICAȚIUNI.

341. *Desvoltarea unei funcțiuni meromorfe într'o serie de fracțiuni raționale.* Fie $f(x)$ o funcțiune meromorfă în tot planul, adică o funcțiune uniformă, care în toată întinderea planului n'are alte singularități decât poluri. Ne mărginim la un caz particular, anume, presupunem că există contururi $C_1, C_2, \dots, C_n$ din ce în ce mai depărtate de origină, întinzându-se spre infinit în toate sensurile, pe cari modulul funcțiunii $f(x)$ rămâne inferior unui număr fix M . Reprezintănd prin C_n conturul ale cărui puncte se depărtează la infinit când n tinde către infinit, presupunem că avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz = 2i\pi A,$$

A fiind o constantă determinată¹⁾.

Să aplicăm teorema lui Cauchy, integralei

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

x fiind un punct în interiorul conturului C_n , diferit de un pol al funcțiunii $f(z)$.

Reziduul funcțiunii $\frac{f(z)}{z-x}$ relativ la polul x este $f(x)$.

Fie a un pol de ordinul m al funcțiunii $f(z)$, în interiorul aceluiaș contur; avem, în domeniul punctului a ,

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + P(z-a)$$

și

$$\frac{1}{z-x} = \frac{-1}{x-a-(z-a)} = - \left[\frac{1}{x-a} + \dots + \frac{(z-a)^{m-1}}{(x-a)^m} + \dots \right];$$

de unde conchidem

$$\mathcal{R}_{z=a} \frac{f(z)}{z-x} = - \left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} \right].$$

Avem așa dar egalitatea

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz = f(x) - \Sigma \left[\frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} \right],$$

¹⁾ Pentru un caz mai general a se vedea. *E. Picard*, *Traité d'Analyse*, t. II, pag. 172. Deuxième édition.

Cazul cel mai general de descompunere al unei funcțiuni analitice într'o serie de fracțiuni raționale, se va trata mai departe prin teorema lui *Mittag-Leffler*.

sau

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz + \Sigma \left[\frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_m}{x-a^m} \right];$$

suma din urmă se referă la toate polurile funcțiunii $f(x)$ cuprinse în interiorul curbei C_n .

Să căutăm limita integralei când n tinde către infinit. Putem scrie

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz + x \int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-x)} dz.$$

Vom să arătăm că ultima integrală tinde către zero. În adevăr, în virtutea ipotezei, $|f(z)| < M$; prin urmare

$$\left| \int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-x)} dz \right| < M \left| \int_{C_n} \frac{dz}{z(z-x)} \right|.$$

Reprezentând prin r_n distanța cea mai mică dela origină la conturul C_n , putem presupune conturul (cerc, dreptunghi, poligon, ...) astfel ca raportul $\frac{C_n}{r_n}$ să rămână inferior unui număr fix k ; prin urmare

$$\left| \int_{C_n} \frac{dz}{z(z-x)} \right| < \frac{C_n}{r_n} \frac{1}{r_n - |x|} < \frac{k}{r_n - |x|}.$$

Membrul din urmă tinzând către zero când n tinde către infinit, propozițiunea este justificată. Avem așa dar

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz = \lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz = 2i\pi A.$$

Prin urmare făcând $n = \infty$, obținem desvoltarea căutată

$$(2) \quad f(x) = A + \lim_{n=\infty} \Sigma_{C_n} \left[\frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} \right].$$

Observare. Termenii seriei trebuie considerați prin grupuri, un grup fiind suma termenilor relativi la acelaș pol; apoi, ordinea termenilor este determinată de ordinea conturilor $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, adică termenii seriei sunt dispuși în ordinea modulelor crescânde ale polurilor funcțiunii.

342. Să aplicăm cele ce preced funcțiunii

$$f(x) = \cot \pi x.$$

Această funcțiune are polurile simple $x = n$, n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. reziduurile corespunzătoare sunt toate egale cu $\frac{1}{\pi}$. Să luăm drept contur C_n un dreptunghi ABCD (fig. 47), ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordo-

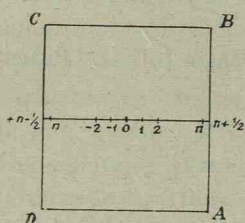


Fig. 47

nate și simetrice în raport cu aceste axe, latura AB, perpendiculară pe axa reală, trecând prin punctul $x = n + \frac{1}{2}$. Reprezentând prin z un punct oarecare al conturului, să punem

$$\pi z = \alpha + i\beta.$$

Avem

$$\cot \pi z = \frac{\cos \alpha \cos h\beta - i \sin \alpha \sin h\beta}{\sin \alpha \cos h\beta + i \cos \alpha \sin h\beta};$$

de unde

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 h\beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 h\beta}.$$

Dealungul laturilor AB, CD membrul al doilea se reduce la

$$\frac{\sin^2 h\beta}{1 + \sin^2 h\beta} < 1;$$

iar dealungul laturilor BC, DA făcând β să tindă către $\pm \infty$, el tinde către 1.

Așa dar prima condițiune, anume ca modulul funcțiunii $f(z)$ dealungul conturilor considerate, să nu treacă peste un număr fix este împlinită.

În ce privește a doua condițiune, avem, dealungul tuturor acestor dreptunghiuri,

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi z}{z} dz = 0,$$

funcțiunea $\frac{\cot \pi z}{z}$ fiind pară (40, § 339).

Din cele ce preced rezultă pentru funcțiunea $\cot \pi x$, în virtutea formulei (2), dezvoltarea următoare

$$(3) \quad \pi \cot \pi x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^{+m} \frac{1}{x-n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right).$$

343. Funcțiunea

$$f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$$

are aceleași poluri ca funcțiunea $\cot \pi x$, reziduul relativ la polul $x = n$ fiind egal cu $\frac{(-1)^n}{\pi}$. Considerațiuni analoge cu cele de mai

sus conduc la concluziunile următoare: Dealungul contururilor considerate avem

$$\left| \frac{1}{\sin \pi z} \right| \leq 1$$

și integrala

$$\int_{C_n} \frac{dz}{z \sin \pi z} = 0.$$

De unde rezultă dezvoltarea

$$\begin{aligned} (4) \quad \pi \sin \pi x &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^{+m} (-1)^n \frac{1}{x - n\pi} = \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - n} + \frac{1}{x + n} \right). \end{aligned}$$

344. *Expresiunea sumei*

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

în care n primește toate valorile întregi dela 1 la ∞ și k este un număr întreg pozitiv oarecare.

Pentru a obține această expresiune să considerăm integrala

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}} dx,$$

dealungul dreptunghiurilor considerate în exemplele precedente. Funcțiunea

$$\frac{\cot \pi x}{x^{2k}}$$

are polul $x=0$ multiplu de ordinul $2k+1$ și polurile simple $x=n \neq 0$ cu reziduurile corespunzătoare $\frac{1}{\pi n^{2k}}$. Avem așa dar egalitatea

$$(1) \quad \int_{C_n} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}} dx = 2i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} + 2i\pi \mathcal{R}_{x=0} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}},$$

în care simbolul Σ' exprimă că valoarea $n=0$ este exclusă. Se recunoaște ușor că integrala din membrul întâiu tinde către zero când n tinde către infinit. De unde rezultă expresiunea

$$(2) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} \mathcal{R}_{x=0} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}}.$$

Făcând succesiv $k=1, 2, 3, \dots$, obținem sumele

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

344 bis. Integrarea ecuațiunilor diferențiale lineare omogene cu coeficienți constanți. Fie

$$(1) \quad F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = 0$$

o asemenea ecuațiune și

$$(2) \quad f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

polinomul caracteristic corespunzător. Fie $z = r$ un zero al polinomului $f(z)$ și $P(z)$ o funcțiune olomorfa oarecare în interiorul unui cerc cu centrul în punctul r . Expresiunea

$$(3) \quad y = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz = \mathcal{R}_{z=r} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)}$$

este o integrală particulară a ecuațiunii (1). Căci, derivând integrala în raport cu x , avem

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z^2 e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz, \dots, \\ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z^n e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz$$

și ducând aceste expresiuni în ecuațiunea (1), rezultă egalitatea

$$(5) \quad F(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} e^{zx} P(z) dx = 0;$$

adică funcțiunea reprezentată prin integrala (3) satisface ecuațiunea propusă.

Exemplu. Fie $f(z) = (z - r)^\alpha f_1(z)$, $f_1(r) \neq 0$. Avem, în domeniul punctului $z = r$, dezvoltări de forma

$$\frac{P(z)}{f_1(z)} = A_0 + A_1(z - r) + A_2(z - r)^2 + \dots + A_{\alpha-1}(z - r)^{\alpha-1} + \dots,$$

$$e^{zx} = e^{x(r+z-r)}$$

$$= e^{rx} \left[1 + \frac{x}{1} (z-r) + \dots + \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} (z-r)^{\alpha-1} + \dots \right];$$

de unde integrala

$$y = \mathcal{R}_{z=r} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} \\ = e^{rx} \left[A_0 \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + A_1 \frac{x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \dots + A_{\alpha-1} \right],$$

în care coeficienții $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$ sunt arbitrari.

Soluțiunea generală a ecuațiunii (1) va fi dată de suma integralelor

particulare relative la toate zerurile polinomului $f(z)$, sau de integrala

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz,$$

luată după o curbă închisă C , care conține acele zeruri și în care funcțiunea $P(z)$ este olomorfa.

345. *Calculul sumei (Gauss)*

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2}$$

k primind valori întregi și n fiind un număr întreg pozitiv.

Considerăm integrala

$$\int_C \frac{e^{\frac{2i\pi}{n} z^2}}{e^{2i\pi z} - 1} dz,$$

luată după conturul alăturat pe care îl reprezentăm prin C (fig. 48):

$$C = Aa + aa' + a'A' + A'B' + B'b' + b'b + bB + BA,$$

$$\overline{Aa} = \overline{a'A'} = \overline{B'b'} = \overline{bB}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = \frac{n}{2};$$

arcele aa' și bb' sunt semicercuri cu centrele în

punctele $z = 0$, $z = \frac{n}{2}$ având o rază foarte mică r . Laturile AA' , BB' sunt perpendiculare pe axa reală, cea dintâi trecând prin punctul $z = 0$, cea de a doua prin punctul $z = \frac{n}{2}$. În interiorul acestui contur funcțiunea

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2i\pi}{n} z^2}}{e^{2i\pi z} - 1}$$

n'are alte singularități decât polurile simple $z = k$ cu reziduurile

$$\frac{1}{2i\pi} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2}, \quad k = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, & (n \text{ impar}), \\ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, & (n \text{ par}). \end{cases}$$

Aceste valori corespund egalitățile

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2} \quad (n \text{ impar}),$$

$$(2) \quad \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2} \quad (n \text{ par}).$$

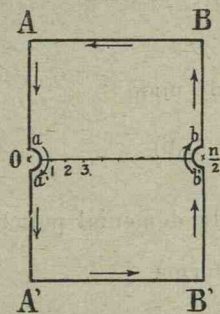


Fig. 48

Ele se pot înlocui, în virtutea egalității

$$(3) \quad \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}k^2}}{e^{\frac{2i\pi}{n}(n-k)^2}} = e^{\frac{2i\pi}{n}(n-k)^2},$$

prin cele următoare

$$(4) \quad \int_C f(z) dz = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} \quad (n \text{ impar}),$$

$$(5) \quad \int_C f(z) dz = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} - \frac{1}{2} e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2} \quad (n \text{ par}).$$

Să calculăm integrala din membrul întâi. În domeniul punctului $z = 0$, avem

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{1}{z} + P(z);$$

de unde

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{aa'} f(z) dz = -\frac{1}{2}.$$

În domeniul punctului $z = \frac{n}{2}$, funcțiunea este olomorfă, sau de forma

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2}}{z - \frac{n}{2}} + P\left(z - \frac{n}{2}\right),$$

după cum n este impar sau par. Avem dar respectiv

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{bb'} f(z) dz = \begin{cases} 0 & (n \text{ impar}), \\ -\frac{1}{2} e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2} & (n \text{ par}). \end{cases}$$

Dealungul laturei care trece prin origină avem $z = iy$. Punând $\overline{OA} = \overline{OA'} = p$, obținem

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} (Aa + a'A') &= i \int_p^{-p} \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y} - 1} dy + i \int_{-r}^{-p} \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y} - 1} dy \\ &= -i \int_r^p \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y} - 1} \left(\frac{1}{e^{-2\pi y} - 1} + \frac{1}{e^{2\pi y} - 1} \right) dy \\ &= i \int_r^p \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y} - 1} dy. \end{aligned} \right.$$

Dealungul laturei care trece prin punctul $z = \frac{n}{2}$, punem $z = \frac{n}{2} + iy$; prin urmare avem

$$(9) \left\{ \begin{aligned} (B'b' + bB) &= i \int_r^p \left[\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}(\frac{n}{2} + iy)^2}}{e^{ni\pi - 2\pi y} - 1} + \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}(\frac{n}{2} - iy)^2}}{e^{ni\pi + 2\pi y} - 1} \right] dy \\ &= i^{1-n} \int_r^p \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{ni\pi - 2\pi y} - 1} dy. \end{aligned} \right.$$

Integralele dealungul laturilor paralele cu axa reală tind către zero, când aceste laturi se depărtează la infinit. În adevăr, dealungul laturii AB, avem $z = x + ip$; prin urmare modulul integralei (AB) satisface inegalitatea

$$|(AB)| < \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{4\pi}{n}px}}{1 - e^{-2\pi p}} dx.$$

Să descompunem intervalul $(0, \frac{n}{2})$ în două intervale $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \frac{n}{2})$, ε fiind pozitiv și oricât de mic voim. În intervalul $(\varepsilon, \frac{n}{2})$ funcțiunea de sub semnul $\int$ tinde către zero când p tinde către $+\infty$, prin urmare și integrala tinde către zero. Relativ la primul interval, avem inegalitatea

$$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-\frac{4\pi}{n}px}}{1 - e^{-2\pi p}} dx < \frac{\varepsilon}{1 - e^{-2\pi p}},$$

în care membrul al doilea tinde către zero împreună cu ε . Așa dar integrala (AB) tinde către zero când p tinde către $+\infty$. Să considerăm integrala (A'B'). Dealungul acestei laturi punem $z = x - ip$; de unde

$$(A'B') < \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{4\pi}{n}px}}{e^{2\pi p} - 1} dx.$$

Să facem substituțiunea

$$x = \frac{n}{2} - x';$$

obținem, suprimând accentul,

$$\int_0^n \frac{e^{\frac{4\pi}{n} px}}{e^{2\pi p} - 1} dx = \int_0^n \frac{e^{-\frac{4\pi}{n} px}}{1 - e^{-2\pi p}} dx.$$

Integrala din membrul al doilea coincide cu cea relativ la latura AB; prin urmare tinde în același timp către zero.

Așa dar, făcând suma integralelor dealungul conturului considerat, în care facem r să tindă către zero și p către infinit, găsim, în virtutea egalităților (6), (7), (8), (9),

$$(10) \quad (i + i^{1-n}) \int_0^\infty e^{-\frac{2i\pi}{n} x^2} dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2},$$

n fiind un număr întreg pozitiv par sau impar. Integrala din membrul întâi se calculează făcând în egalitatea cunoscută

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

substituținea

$$\sqrt{\frac{2i\pi}{n}} x = t$$

obținem

$$(11) \quad \int_0^\infty e^{-\frac{2i\pi}{n} x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{n} e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{4} (1-i) \sqrt{n}.$$

Substituind această valoare în egalitatea (10), obținem, pentru suma lui Gauss, expresiunea

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2} = \frac{i + i^{1-n}}{1 + i} \sqrt{n} = \frac{1}{2} (1 + i) (1 + i^{-n}) \sqrt{n}.$$

Această expresiune se simplifică dacă punem în evidență valorile resturilor diviziunii lui n prin 4. Astfel, reprezentând suma din membrul întâiu prin S_n , avem formulele

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + i) \sqrt{n}, & \text{pentru } n &= 4m, \\ S_n &= \sqrt{n} & \text{» } n &= 4m + 1, \\ S_n &= 0 & \text{» } n &= 4m + 2, \\ S_n &= i\sqrt{n} & \text{» } n &= 4m + 3. \end{aligned}$$

Suma lui Gauss se prezintă în problema diviziunii cercului în părți egale.

346. Numărul zerurilor și al polurilor cuprinse într'o regiune dată.

Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă fără puncte singulare esențiale într'o regiune dată și să considerăm derivata sa logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Un punct ordinar $x = a$ al funcțiunii $f(x)$, în care această funcțiune nu se anulează, este un punct ordinar al derivatei sale logaritmice. Să presupunem că a este un zero sau un pol al lui $f(x)$ de un ordin m . Vom avea, respectiv, în domeniul acestui punct, expresiuni de forma

$$f(x) = (x-a)^m P(x-a), \quad f(x) = (x-a)^{-m} P(x-a),$$

seriile $P(x-a)$ fiind diferite de zero în punctul a . De unde rezultă respectiv

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \mathcal{P}(x-a),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-m}{x-a} + \mathcal{P}(x-a).$$

Așa dar în ambele cazuri, punctul a este un pol de ordinul întâi, al derivatei logaritmice și reziduul corespunzător este m sau $-m$, după cum acest punct este pentru $f(x)$ un zero sau un pol de ordinul m . De aci rezultă că dacă reprezentăm prin μ și ν respectiv numărul zerurilor și al polurilor funcțiunii $f(x)$ cuprinse în interiorul unei curbe închise C , situată în regiunea considerată, fiecare zero sau pol fiind socotit de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate, vom avea, aplicând teorema reziduurilor, pentru diferența dintre numărul zerurilor și al polurilor, expresiunea

$$(1) \quad \mu - \nu = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

Egalitatea precedentă se mai poate scrie

$$(2) \quad \mu - \nu = \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log f(x).$$

Punând $f(x) = \varrho e^{i\theta}$, ea devine

$$(3) \quad \mu - \nu = \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log \varrho + \frac{1}{2\pi} \int_C d\theta.$$

Prima integrală din membrul al doilea este nulă, căci $\log \varrho$ își reia valoarea inițială când x descrie o curbă închisă. Numind θ_0 și θ_1 valorile inițială și finală a argumentului θ , vom avea

$$(4) \quad \mu - \nu = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 - \theta_0),$$

$$(5) \quad \theta_1 - \theta_0 = 2\pi(\mu - \nu),$$

adică variațiunea argumentului unei funcțiuni uniforme, când variabila descrie o curbă închisă în sens direct, este egală cu 2π înmulțit cu diferența dintre numărul zerurilor și al polurilor funcțiunii, cuprinse în interiorul curbei.

Dacă funcțiunea $f(x)$ este olomorfă în interiorul curbei C , avem $r = 0$ și numărul zerurilor sale cuprinse în interiorul acestei curbe este dat de integrala

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log f(x) dx,$$

sau de expresiunea

$$(7) \quad \mu = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 - \theta_0).$$

θ_1 și θ_0 având semnificațiile de mai sus.

347. Dacă $f(x)$ este o funcțiune rațională, derivata sa logaritmă este de asemenea o funcțiune rațională. Exprimând că suma reziduurilor funcțiunii $\frac{f'(x)}{f(x)}$, pe toată sfera, este nulă, rezultă că o funcțiune rațională are atâtea zeruri câte poluri. De aci rezultă imediat teorema fundamentală a algebrei: o funcțiune rațională întregă de gradul m , are m zeruri. Căci o asemenea funcțiune admite punctul ∞ ca pol unic de ordinul m .

348. Teoremă. Fie $f(x)$ și $\varphi(x)$ două funcțiuni olomorfe într-o regiune dată și C o curbă închisă situată în acea regiune. Dacă de-a lungul lui C avem

$$|\varphi(x)| < |f(x)|,$$

funcțiunile $f(x)$ și $f(x) + \varphi(x)$ vor avea acelaș număr de zeruri în interiorul acestei curbe.

Să reprezentăm prin m și n numărul zerurilor fiecăreia din aceste funcțiuni cuprinse în interiorul curbei C ; vom avea, în virtutea formulei (6),

$$n - m = \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log [f(x) + \varphi(x)] - \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log f(x),$$

sau

$$n - m = \frac{1}{2i\pi} \int_C d \log \left[1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right].$$

Pentru evaluarea acestei integrale să punem

$$z = \frac{\varphi(x)}{f(x)};$$

z este o funcțiune uniformă de x în regiunea considerată: curbei C îi va corespunde așa dar pentru z o curbă închisă Γ și vom avea

$$\int_C d \log \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] = \int_{\Gamma} d \log (1 + z).$$

Însă, în virtutea ipotezei, dealungul curbei Γ avem $|z| < 1$; punctul $z = -1$ este așa dar exterior acestei curbe. Prin urmare, în interiorul lui Γ precum și pe Γ , $\log (1 + z)$ este o funcțiune olo-morfă. De unde rezultă egalitatea

$$\int_{\Gamma} d \log (1 + z) = 0;$$

prin urmare $n = m$.

Este evident că teorema subsistă, dacă $\varphi(x)$ se reduce la o constantă A , a cărei valoare absolută este mai mică decât cea mai mică valoare ce primește $|f(x)|$ dealungul curbei C .

349. *Expresiunea unui zero sau al unui pol cu ajutorul unei integrale.* Fie $f(x)$ o funcțiune meromorfă într'o regiune dată și a un zero de ordinul m ; reziduul funcțiunii

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}$$

în raport cu punctul a , care este un pol al acestei funcțiuni, este ma . Prin urmare avem

$$(1) \quad a = \frac{1}{2mi\pi} \int_{(a)} \frac{xf'(x)}{f(x)} dx,$$

integrala fiind luată dealungul unei curbe închise în interiorul căreia $f(x)$ n'are nici un pol și nici alt zero decât a . Dacă punctul a este un pol de ordinul m , este de ajuns a înlocui în formula precedentă m prin $-m$.

350. Fie C o curbă închisă care nu trece prin nici un pol sau niciun zero al funcțiunii $f(x)$. Să reprezentăm prin Σa , Σb suma zerurilor și a polurilor funcțiunii $f(x)$, cuprinse în interiorul curbei C , fiecare zero sau pol fiind repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate; vom avea, în virtutea celor precedente,

$$\Sigma a - \Sigma b = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{xf'(x)}{f(x)} dx.$$

Intr'un mod mai general, fie $F(x)$ o funcțiune olomorfă; vom avea egalitatea

$$\Sigma F(a) - \Sigma F(b) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(x)f'(x)}{f(x)} dx,$$

în care $\Sigma F(a)$, $\Sigma F(b)$ reprezintă suma valorilor ce primește $F(x)$ în toate zerurile a și în toate polurile b ale funcțiunii $f(x)$. Intr'un zero sau pol multiplu, termenul $F(a)$, respectiv $F(b)$ este repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul de multiplicitate al acelui zero sau al acelui pol. Această egalitate se justifică, observând că $F(a)$ este reziduul funcțiunii $\frac{F(x)f'(x)}{f(x)}$ relativ la un zero simplu al lui $f(x)$, etc.

Să presupunem funcțiunea $f(x)$ olomorfă în interiorul lui C și fie $F(x) = x^k$, k fiind un număr întreg pozitiv; vom avea

$$\Sigma a^k = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{x^k f'(x)}{f(x)} dx.$$

CAPITOLUL XVIII.

INVERSIUNEA SERIILOR INTREGI. TRANSFORMAREA CONFORMĂ. PRELUNGIREA ANALITICĂ.

351. Fie

$$(1) \quad y = P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots, \quad a_n \neq 0,$$

o serie întreagă convergentă într'un cerc (R) având punctul $x = 0$ ca zero de ordinul n . Există un număr pozitiv $r < R$ astfel ca, în interiorul cercului $|x| = r$, $P(x)$ să nu aibă alt zero decât punctul $x = 0$ și să nu se anuleze dealungul acestui cerc. Fie m valoarea minimă ce primește $|P(x)|$ când x descrie cercul (r); m este mai mare ca zero. Din punctul $y = 0$ ca centru să descriem un cerc cu o rază $\varrho \leq m$ și fie y_1 un punct situat în interiorul acestui cerc. Ecuatiunea

$$P(x) - y_1 = 0$$

va avea în interiorul cercului $|x| = r$ acelaș număr de zeruri ca ecuațiunea $P(x) = 0$, adică n zeruri (348).

352. Să considerăm întâi cazul $n = 1$. Fie

$$y = P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0.$$

În acest caz, unui punct y_1 situat în interiorul cercului $|y| = \varrho$,

corespunde un singur punct x_1 , în interiorul cercului $|x| = r$, astfel ca ecuațiunea

$$P(x_1) = y_1$$

să fie satisfăcută. Voin să arătăm că x_1 se poate reprezintă printr'o serie întreagă de y_1 , convergentă în interiorul cercului (ϱ) . Suprimând indicii, scriind x, y în loc de x_1, y_1 și reprezentând prin z variabila de integrațiune, soluțiunea considerată x se poate exprima prin integrala

$$(2) \quad x = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{z P'(z)}{P(z) - y} dz,$$

luată în sensul pozitiv. În virtutea ipotezei, avem $|y| < |P(z)|$ pentru toate valorile lui z cari satisfac condițiunea $|z| = r$; prin urmare putem scrie

$$(3) \quad \frac{1}{P(z) - y} = \frac{1}{P(z)} + \frac{y}{P^2(z)} + \dots + \frac{y^n}{P^{n+1}(z)} + \dots$$

Să punem

$$(4) \quad b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{z P'(z)}{P^{n+1}(z)} dz,$$

sau, integrând prin părți,

$$b_n = \frac{1}{2n\pi i} \int_{(r)} \frac{dz}{P^n(z)}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Observând că $b_0 = 0$, integrala (3) ne dă, pentru x , seria

$$(6) \quad x = b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b^n y^n + \dots,$$

valabilă în interiorul cercului $|y| = \varrho$.

Operațiunea de a deduce seria (6) din seria (1) constituie ceea ce se numește *inversiunea* seriei (1).

Determinarea coeficienților b_n se poate face înlocuind în ecuațiunea $P(x) = y$, x prin dezvoltarea sa (6) și identificând ambele membre. Obținem astfel un sistem de ecuațiuni liniare

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 b_1, \\ 0 &= a_1 b_1 + a_2 b_1^2, \\ &\dots \dots \dots, \end{aligned}$$

care determină într'un mod unic necunoscutele $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

Coeficienții b_n se mai pot obține, observând că avem

$$b_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n x}{dy^n} \right)_0$$

și că derivatele $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, ..., se pot calcula cu ajutorul derivatelor $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., date de ecuațiunea (1).

353. Să considerăm seria

$$(7) \quad y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

convergentă într'un cerc cu centrul în punctul x_0 . În virtutea celor ce preced, putem enunța teorema următoare :

Există un număr pozitiv ϱ , astfel că pentru toate valorile lui y , cari satisfac condițiunea $|y - y_0| < \varrho$, ecuațiunea (7) se poate reduce la identitate luând pentru x o serie de forma

$$(8) \quad x - x_0 = b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \dots$$

354. Fie acum

$$(1) \quad y = f(x)$$

o funcțiune olomorfă într'o arie dată (A) și x_0 un punct al acestei arii, în care derivata $f'(x)$ este diferită de zero. Reprezentând prin y_0 valoarea lui $f(x)$ în punctul x_0 , rezultă din teorema precedentă că există o serie de forma

$$(2) \quad x = x_0 + b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \dots,$$

convergentă în domeniul punctului y_0 , care reduce la identitate ecuațiunea (2).

Această serie dă naștere unei funcțiuni analitice $x = \varphi(y)$, numită *funcțiune inversă* a funcțiunii considerate. În virtutea teoremei asupra permanenței analitice, elementele deduse, prin prelungire analitică din elementul primitiv (2), substituie în locul lui x , vor reduce ecuațiunea dată (1) la identitate.

Din teoria precedentă rezultă că punctele singulare ale funcțiunii $\varphi(y)$ nu se pot cuprinde decât printre acele puncte y corespunzătoare punctelor x , în cari derivata $f'(x)$ se anulează sau în care funcțiunea $f(x)$ încetează de a fi olomorfă.

355. Să considerăm acum cazul $n > 1$. Fie

$$(1) \quad y = P(x) = ax^n + a_1x^{n+1} + \dots, \quad a \neq 0$$

și $x_1, x_2, \dots, x_n$ cele n valori ale lui x , vecine cu $x = 0$, corespunzătoare punctului y vecin cu $y = 0$, pentru cari funcțiunea $P(x) - y$ se anulează. Aceste valori ale lui x se pot obține explicit în modul următor :

Extrăgând rădăcina n^{a} a ambelor membre ale ecuațiunii (1) și punând

$$(2) \quad u = \frac{a_1}{a}x + \frac{a_2}{a}x^2 + \dots,$$

avem

$$y^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} x(1+u)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} x \left(1 + \frac{1}{n}u + \dots \right).$$

Înlocuind în membrul din urmă u prin dezvoltarea sa (2), obținem un rezultat de forma

$$\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{n}} = x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \dots$$

De unde, prin inversiune,

$$(3) \quad x = a^{-\frac{1}{n}} \left(y^{\frac{1}{n}} + c_1 y^{\frac{2}{n}} + \dots \right),$$

serie care reprezintă cele n valori $x_1, x_2, \dots, x_n$, dacă înlocuim $y^{\frac{1}{n}}$ succesiv prin cele n valori de cari este susceptibil. Soluțiunile $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt așa dar n ramuri ale unui funcțiuni analitice multiforme, având punctul $y = 0$ ca punct de ramificațiune, în jurul căruia ele se permută între dânsle.

356. *Teoremă. O funcțiune rațională întreagă și simetrică de cele n ramuri considerate $x_1, x_2, \dots, x_n$, este o funcțiune olomorvă de y în domeniul lui $y = 0$.*

Este de ajuns a demonstra teorema pentru sume de forma

$$\sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k=1, 2, \dots$$

Fie k un număr întreg, pozitiv; avem

$$(4) \quad x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{x^k P'(x)}{P(x) - y} dx,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul cercului (r) considerat mai sus. Însă, precum am văzut, membrul al doilea se dezvoltă într'o serie întreagă, convergentă în domeniul lui $y = 0$, așa că putem scrie

$$(5) \quad x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \sum_{m=1}^{\infty} b_m y^m,$$

coeficienții b_m fiind dați de integralele

$$(6) \quad b_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{x^k P'(x)}{[P(x)]^{m+1}} dx, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Observare. Funcțiunea de sub semnul sumă din (6) fiind de forma

$$\frac{1}{x^{m+1-k}} P(x), \quad P(0) \neq 0,$$

rezultă că coeficienții b_m sunt nuli pentru toate valorile lui m cari satisfac inegalitatea

$$mn + 1 - k \leq 0.$$

357. *Aplicațiune. Seria Lagrange.* Fie $f(x)$ o funcțiune olomorvă într-o regiune dată și a un punct situat în această regiune. Funcțiunea

$$(1) \quad F(x) = x - a - af(x)$$

în care a este un parametru variabil se anulează în punctul a pentru $a = 0$. De unde rezultă că dacă a satisface inegalitatea

$$(2) \quad |af(x)| < |x - a|,$$

dealungul unui cerc $|x - a| = r$, situat în regiunea dată, funcțiunea $F(x)$ va avea în interiorul acestui cerc un singur zero care coincide cu a pentru $a = 0$ (348). Variabila x privită ca funcțiune de a , definită de ecuațiunea

$$(3) \quad x - a - af(x) = 0,$$

este funcțiune olomorvă de a în domeniul $a = 0$. În adevăr, scriind această ecuațiune sub forma

$$(4) \quad a = \frac{x-a}{f(x)} = \varphi(x)$$

și observând că $f(a) \neq 0$, căci altminterlea ecuațiunea (3) ar conține $x - a$ ca factor, găsim

$$\varphi'(a) = \frac{1}{f(a)} \neq 0.$$

Așa dar avem (354) pentru x o dezvoltare de forma

$$(5) \quad x = a + a_1 a + a_2 a^2 + \dots + a_n a^n + \dots$$

Pentru a obține această dezvoltare, să ne servim de expresiunea (2) (§ 352) care dă

$$(6) \quad x = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{zF'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} \frac{z[1 - af'(z)]}{z - a - af(z)} dz.$$

Să evaluăm integrala din membrul al doilea.

Desvoltând după puterile lui a , avem

$$\frac{1 - af'(z)}{z - a - af(z)} = \frac{1}{z - a} + \sum_1^{\infty} a^n \left[\frac{f^n(z)}{(z-a)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z)f'(z)}{(z-a)^n} \right];$$

de unde, pentru coeficientul a_n , expresiunea

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{(r)} \frac{zf^n(z)}{(z-a)^{n+1}} dz - \int_{(r)} \frac{zf^{n-1}(z)f'(z)}{(z-a)^n} dz \right] \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} (af^n(a)) - \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} (af^{n-1}(a)f'(a)) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[\frac{d}{da} (af^n(a)) - naf^{n-1}(a)f'(a) \right]; \end{aligned}$$

adică

$$(7) \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} f^n(a)}{da^{n-1}}.$$

Avem așa dar dezvoltarea

$$(8) \quad x = a + \sum_1^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^{n-1} f^n(a)}{da^{n-1}},$$

care constituie seria lui *Lagrange*.

Determinarea razei de convergență a seriei. Pentru a determina raza cercului de convergență al seriei (8), alegem mai întâi un număr pozitiv r astfel ca în cercul $|x-a| = r$, precum și pe cerc, funcțiunea $f(x)$ să fie olomorvă. Reprezintănd prin $M(r)$ cea mai mare valoare a modulului lui $f(x)$ dealungul acestui cerc, trebuie, în virtutea inegalității (2), să avem

$$(9) \quad |a| < \frac{r}{M(r)}.$$

Fie ϱ cea mai mare valoare a membrului al doilea, seria (8) va fi convergentă pentru toate valorile lui a satisfăcând inegalitatea $|a| < \varrho$.

Să considerăm, ca aplicațiune, *ecuațiunea lui Kepler*

$$(10) \quad x = a + a \sin x^1)$$

în care a este un număr real.

Formula (8) ne dă, pentru rădăcina x , care devine egală cu a când a se anulează, dezvoltarea

$$(11) \quad x = a + \sum \frac{a^n}{n!} \frac{d^{n-1} \sin^n a}{da^{n-1}}.$$

Să căutăm, conform celor zise mai sus, maximul modulului funcțiunii $\sin x$, când x descrie cercul $|x-a| = r$. Punem

$$x = a + re^{i\theta} = a + r \cos \theta + ir \sin \theta;$$

de unde

$$\begin{aligned} & |\sin(a + r \cos \theta + ir \sin \theta)|^2 = \\ & |\sin(a + r \cos \theta + ir \sin \theta)| |\sin(a + r \cos \theta - ir \sin \theta)| \\ & = \cos^2(ir \sin \theta) - \cos^2(a + r \cos \theta) \\ & = \left(\frac{e^{r \sin \theta} + e^{-r \sin \theta}}{2} \right)^2 - \cos^2(a + r \cos \theta) \\ & \leq \left(\frac{e^{r \sin \theta} + e^{-r \sin \theta}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

¹⁾ a = anomalia medie, x = anomalia excentrică, a = excentricitatea elipsei.

Maximul membrului al doilea corespunde lui $\theta = \frac{\pi}{2}$. Avem așa dar

$$M(r) = \max. |\sin| = \frac{e^r + e^{-r}}{2},$$

când x descrie cercul $|x - a| = r$. Rămâne să căutăm maximul raportului

$$\frac{r}{M(r)} = 2 \frac{r}{e^r + e^{-r}}.$$

Anulând derivata membrului al doilea, obținem ecuațiunea

$$e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r}) = 0,$$

sau

$$e^{2r}(r-1) - (r+1) = 0.$$

Se recunoaște lesne că această ecuațiune admite o rădăcină cuprinsă între 1 și 2; anume

$$r = 1,49967 \dots$$

Prin urmare, pentru raza cercului de convergență al seriei (11), avem

$$\rho = \frac{2r}{e^r + e^{-r}} = 0,6627 \dots$$

II. — TRANSFORMARE CONFORMĂ.

358. Inversiunea funcțiilor olomorfe ne permite a completa noțiunea de transformare conformă.

Fie $y = f(x)$ o funcțiune olomorfă într'o regiune dată a planului (x) , (C) o curbă închisă fără puncte multiple, situată în acea regiune.

Să reprezentăm prin $x = \varphi(y)$ funcțiunea inversă și prin (I) transformata curbei (C) în planul (y) . Când x descrie curba (C) și revine la punctul de plecare, y descrie deasemenea curba (I) și revine la punctul de plecare corespunzător.

Dacă dealungul lui (C) funcțiunea $y = f(x)$ nu trece de două ori prin aceeași valoare, funcțiunea $x = \varphi(y)$ nu va trece nici ea de două ori prin aceeași valoare; căci altfel ar rezulta că pe curba (C) să existe cel puțin un punct x căruia să corespundă pe (I) două sau mai multe puncte y , ceea ce este imposibil, $f(x)$ fiind o funcțiune olomorfă în regiunea considerată ¹⁾.

¹⁾ Analogie cu cazul unei funcțiuni de variabilă reală, care variază necontenit în acelaș sens, când variabila, cuprinsă într'un interval dat, crește dela o extremitate la alta a acelu interval.

În ipoteza dar că dealungul curbei (C) funcțiunea $f(x)$ nu trece decât o singură dată prin fiecare valoare, curbele (C) și (I) se corespund punct cu punct și curba (I) limitează o porțiune de arie în planul (y), precum curba (C) limitează una în planul (x).

Voim să probăm că ariile interioare acestor curbe se corespund punct cu punct și că fiecare din ele este transformată conformă a celeilalte.

Fie y_0 un punct în interiorul lui (I). Dacă y descrie odată curba (I) în sensul pozitiv, argumentul lui $(y - y_0)$ se mărește cu 2π și prin urmare argumentul funcțiunii de x , $f(x) - y_0$, se mărește cu aceeași cantitate când punctul corespunzător x descrie curba (C). Sensul în care acest punct descrie curba (C) este neapărat pozitiv, căci altfel ar urmă ca funcțiunea $f(x) - y_0$, adică $f(x)$, să aibă un pol în interiorul curbei (C); cecace este contrar ipotezei.

De unde rezultă că funcțiunea $f(x) - y_0$ admite un zero simplu x_0 în interiorul curbei (C), astfel avem egalitatea

$$f(x_0) = y_0$$

și inegalitatea

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Așa dar unui punct y_0 , interior curbei (I), corespunde un singur punct x_0 , interior curbei C și deoarece $f'(x_0) \neq 0$, rezultă că în domeniul lui y_0 , avem

$$x - x_0 = P(y - y_0).$$

Funcțiunea inversă $x = \varphi(y)$ este așa dar olomorfă în domeniul oricărui punct interior ariei limitată de conturul simplu (I), prin urmare olomorfă în interiorul lui (I), precum $y = f(x)$ este olomorfă în interiorul lui (C). Cele două arii considerate se corespund punct cu punct și transformarea lor una într'alta este o transformare conformă, în virtutea inegalității $f'(x) \neq 0$ pentru toate punctele interioare curbei (C).

III. — PRELUNGIRE ANALITICĂ.

359. S'a definit în altă parte, după Weierstrass, noțiunea de *prelungire analitică*. Problema prelungirii analitice se mai poate prezintă sub forma următoare: Fie $f(x)$ o funcțiune analitică olomorfă într'o arie A , limitată de un contur (C). Se zice că $f(x)$ se prelungește în afară din A dincolo de un arc σ al conturului, dacă există o funcțiune analitică $F(x)$ definită de o parte și de alta a lui σ , coincidând cu $f(x)$ într'o porțiune a lui A din a cărei frontieră face parte arecul σ și olomorfă dealungul acestui arc. Nu poate exista decât o funcțiune unică egală cu $f(x)$ într'o porțiune a lui A și olomorfă dealungul

lui σ , căci două funcțiuni olomorfe egale într-o infinitate de puncte coincid în regiunea lor comună de existență (149, 2^o).

O condițiune necesară, dar nu suficientă, pentru ca prelungirea dincolo de σ să fie posibilă este ca $f(x)$ să tindă către o valoare finită când punctul x interior ariei A tinde către un punct ξ al lui σ .

360. *Teorema I.* Dacă $f(x)$ tinde către o valoare finită $f(\xi)$ când punctul x interior ariei A tinde către un punct ξ al lui σ , după un drum oarecare, $f(\xi)$ este o funcțiune continuă dealungul lui σ .

În adevăr, prin ipoteză, la un $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, corespunde un $r > 0$, astfel că x fiind în interiorul lui A , avem inegalitățile

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x) - f(\xi')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ξ și ξ' fiind două puncte oarecari ale lui σ , satisfacând inegalitățile

$$|x - \xi| < r, \quad |x - \xi'| < r;$$

de unde rezultă inegalitatea

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \varepsilon.$$

q. e. d.

361. *Teorema II.* O funcțiune $f(x)$ olomoră în două arii A , A' separate între ele printr-o linie fără puncte multiple AB , dealungul căreia ea este continuă, este olomoră și dealungul lui AB .

În adevăr, fie x un punct interior ariei A , avem (fig. 49).

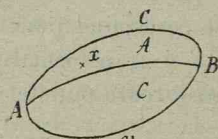


Fig. 49

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{ABCA} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{BAC'B} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Adunând aceste două egalități și ținând seamă că linia AB este descrisă odată într'un sens și odată în sens invers, obținem egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{BCAC'B} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

care exprimă că funcțiunea $f(x)$ este olomoră în toată aria $(A + A')$, limitată de conturul exterior $BCAC'B$, care cuprinde în interiorul său linia AB .

Corolar. Fie A și A_1 (fig. 50), două arii exterioare între ele, având o porțiune de frontieră comună σ , fără puncte multiple, și $f(x)$, $f_1(x_1)$ două funcțiuni respectiv olomorfe în A și A_1 , tinzând către o valoare comună $f(\xi) = f_1(\xi)$, când x și x_1 tind către un punct ξ al lui σ . Funcțiunea $F(x)$ egală cu $f(x)$ în A și cu $f_1(x_1)$ în A_1 , având dealungul lui σ valorile comune acestor două funcțiuni, este olomorfă în toată aria $(A + A_1)$, formată de cele două arii A și A_1 . Căci funcțiunea $F(x)$ astfel definită este olomorfă în A și A_1 și continuă dealungul lui σ , care separă aceste două arii (§ 360). Se zice că funcțiunea $f_1(x_1)$ prelungește funcțiunea $f(x)$ dincolo de linia σ și viceversa.

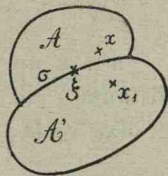


Fig. 50

362. Din cele ce preced rezultă că pentru ca o funcțiune olomorfă $f(x)$ definită de o parte a unei linii L , dealungul căreia ea este continuă, să se poată prelungi dincolo de această linie, este necesar și suficient să existe o funcțiune olomorfă $f_1(x)$, definită de cealaltă parte a lui L , care să primească aceleași valori ca $f(x)$ în fiecare punct al acestei linii.

363. *Teorema III.* O funcțiune $f(x)$ olomorfă într-o arie A din al cărei contur face parte un segment l al axei reale, dealungul căruia ea primește valori reale, se prelungește dincolo de acest segment și funcțiunea care o prelungește este definită de egalitatea

$$f_1(\bar{x}) = \bar{f}(x),$$

în care $\bar{x}$ și $\bar{f}(x)$ reprezintă respectiv valorile imaginare conjugate cu x și $f(x)$.

1°. Să observăm mai întâi că ξ fiind un punct al segmentului l , $f(\xi)$ este o funcțiune continuă de ξ dealungul acestui segment. În adevăr, fie x un punct interior lui A și r distanța sa de axa reală (fig. 51); avem, în interiorul cercului $|z - x| = r$, expresiunea

$$f(z) = P(z - x).$$

Fig. 51

Făcând ca z să tindă către punctul de contact ξ al cercului cu axa reală, dealungul razei care trece prin acest punct, avem, în virtutea teoremei lui Abel (105), egalitatea

$$\lim_{z=\xi} P(z - x) = P(\xi - x) = f(\xi),$$

sau

$$\lim_{x=\xi} f(x) = f(\xi).$$

Prin urmare, pentru r destul de mic și x pe raza care trece prin ξ , putem scrie

$$(1) \quad |f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie x' un punct interior cercului $|x - \xi| = r$, situat la aceeași distanță r de axa reală și ξ' piciorul perpendicularei dusă din x' pe axa reală; avem, pentru același motiv ca mai sus,

$$(2) \quad |f(x') - f(\xi')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În fine, presupunând r destul de mic, putem deasemenea scrie

$$(3) \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Din aceste trei inegalități rezultă următoarea inegalitate

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \varepsilon, \quad |\xi - \xi'| < r,$$

care justifică continuitatea funcțiunii $f(\xi)$.

20. Fie

$$x = u + iv, \quad \bar{x} = u - iv;$$

punctele x și $\bar{x}$ sunt simetrice două câte două în raport cu axa reală; prin urmare ariei $A(x)$, situată de o parte a axei reale, corespunde o arie $A_1(x)$ simetrică în raport cu această axă. Punând

$$f(x) = P(u, v) + iQ(u, v),$$

și

$$f_1(\bar{x}) = \bar{f}(x),$$

avem

$$f_1(\bar{x}) = P(u, v) - iQ(u, v).$$

Funcțiunea $f(\bar{x})$ este așa dar olomorfă în aria A_1 . Această funcțiune fiind imaginară conjugată cu funcțiunea $f(x)$, care este reală dealungul segmentului l , rezultă că ambele aceste funcțiuni sunt egale între ele dealungul acestui segment. De unde rezultă, în virtutea paragrafului precedent, că $f_1(\bar{x})$ este prelungirea lui $f(x)$, de cealaltă parte a segmentului l . q. e. d.

Observare. — Teorema precedentă subsistă dacă înlocuim axa reală printr'o linie dreaptă oarecare și, într'un mod mai general, dacă unui segment de linie dreaptă D , descris de variabila x , corespunde un segment de linie dreaptă Δ pentru funcțiunea $y = f(x)$; adică punctelor x simetrice în raport cu D corespund puncte y simetrice în raport cu Δ .

În adevăr, fie x_0 punctul în care D întâlnește axa reală (x) și y_0 punctul în care Δ întâlnește axa reală (y). Fie α și β unghiurile ce aceste drepte fac cu direcțiunile pozitive ale axelor reale corespunzătoare. Ecuațiunile

$$x = x_0 + te^{i\alpha}, \quad y = y_0 + ue^{i\beta},$$

în cari t și u sunt variabile reale, reprezintă cele două drepte date. Făcând substituțiunile, funcțiunea olomorfă $y = f(x)$ se transformă într-o funcțiune

$$u = \varphi(t),$$

olomorfă dealungul segmentului axei reale (t), corespunzător segmentului considerat pe dreapta D , și reală, în virtutea ipotezei, dealungul acestui segment. Teorema precedentă se aplică acestei funcțiuni, adică, valorilor imaginare conjugate t corespund valori imaginare conjugate u ; însă acestor valori corespund respectiv puncte simetrice x și y în raport cu dreptele D și Δ .

q. e. d.

364. *Teoremă (H. A. Schwarz).*

Teorema precedentă se poate generaliza înlocuind linia dreaptă printr-o curbă analitică.

Se numește *curbă analitică* o curbă ale cărei coordonate x , y se pot exprima prin funcțiuni analitice de un parametru t . Fie

$$(1) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

ecuațiunile curbei, $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ fiind funcțiuni analitice, reale pentru valori reale ale variabilei t . Prin definițiune, (x_0, y_0) fiind un punct al curbei, corespunzător valorii reale t_0 a parametrului t , avem în domeniul lui t_0 , expresiuni de forma

$$x - x_0 = P(t - t_0), \quad y - y_0 = P_1(t - t_0),$$

coeficienții seriilor P și P_1 fiind reali.

Să considerăm un arc L al acestei curbe (fig. 52) și fie $t=a$, $t=b$ valorile reale ale lui t , cărora corespund extremitățile lui L . Să presupunem că în intervalul (a, b) derivatele $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nu se anulează



Fig. 52

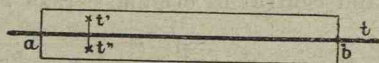


Fig. 53

în acelaș timp, ceea ce are drept consecință că dealungul lui L curba are o tangentă unică în fiecare punct ¹⁾.

În virtutea proprietăților funcțiunilor $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ dealungul segmentului (a, b) al axei reale t , rezultă că există o fâșie formată

¹⁾ O curbă analitică se zice că este *regulată*, dacă are o tangentă unică în orice punct al său.

de două paralele cu acest segment (fig. 53), situate de o parte și de alta a lui, destul de apropiate între ele, astfel că în interiorul acestei fâșii, funcțiunea

$$(2) \quad z = \varphi(t) + i\psi(t) = \chi(t)$$

este olomorfă și derivata $\chi'(t)$ nu se anulează în nici un punct al ei. Acestei fâșii corespunde dar, într'un mod *conform*, o porțiune mărginită S a planului (z) , care se întinde de o parte și de alta a arcului L (fig. 52). La două valori imaginare conjugate ale lui t din această fâșie corespund două puncte z situate de o parte și de alta a lui L , interioare lui S .

Două puncte z', z'' , situate de o parte și de alta a liniei L , corespunzătoare la două valori imaginare conjugate t', t'' , se zic *simetrice* în raport cu această linie ¹⁾.

Fie acum $f(z)$ o funcțiune olomorfă într'o arie S din conturul căreia face parte arcul L considerat mai sus și care primește *valori reale* dealungul acestui arc. De unde rezultă, în virtutea substituțiunii (2), că funcțiunea de t

$$f(z) = f(\chi(t)) = F(t)$$

este olomorfă în aria transformată a ariei S , adică într'o arie A din al cărei contur face parte un segment l al axei reale t , dealungul căruia *ea este reală* (fig. 54). Funcțiunea $F(t)$ se prelungește dar dincolo de segmentul l (§ 363) în aria A , simetrică cu A în raport cu axa reală, cu ajutorul funcțiunii

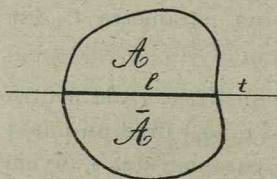


Fig. 54

$$F_1(\bar{t}) = \bar{F}(t).$$

Prin urmare, funcțiunea $f(z)$ se prelungește dincolo de L , astfel că în puncte simetrice ²⁾ în raport cu L , ea primește *valori imaginare conjugate*.

q. e. d.

365. Să considerăm, în particular, cazul unui arc de cerc. Presupunând centrul în origină și raza r , ecuațiunile cercului sunt

$$x = r \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = 2r \frac{t}{1+t^2};$$

de unde

$$z = x + iy = r \frac{1+it}{1-it}.$$

¹⁾ Unei linii perpendiculare pe axa reală t , corespunde în planul (z) o linie ortogonală la arcul L , care în vecinătatea acestui arc se confundă cu normala în punctul de intersecțiune.

²⁾ Cuvântul simetric are sensul definit mai sus.

În punctele $t_1 = a + i\beta$, $t_2 = a - i\beta$, avem respectiv

$$z_1 = r \frac{1 + it_1}{1 - it_1} = r \frac{1 - \beta + ia}{1 + \beta - ia},$$

$$\bar{z}_2 = r \frac{1 + \beta + ia}{1 - \beta - ia}, \quad \bar{z}_2 = r \frac{1 + \beta - ia}{1 - \beta + ia};$$

de unde egalitatea

$$z_1 \bar{z}_2 = r^2,$$

care arată că punctele z_1 și z_2 sunt imaginile reciproce în raport cu cercul, adică unul este transformatul celuilalt prin raze vectorii reciproce ¹⁾.

366. Teorema lui Schwarz, foarte importantă în probleme de transformare conformă, se mai enunță astfel: O funcțiune olomorvă într'o arie din al cărei contur face parte o linie analitică regulată, dacă este *reală dealungul liniei*, primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu acea linie. Acest rezultat se poate obține direct, plecând dela faptul stabilit mai sus, că, în condițiunile date, funcțiunea este olomorvă dealungul liniei. Este de ajuns a ne mărgini la cazul când linia este un segment al axei reale, dela care decurge, precum s'a văzut, cazul general al unei linii analitice regulate oarecari.

Fie dar x_0 un punct al segmentului considerat în domeniul căruia funcțiunea $f(x)$ este olomorvă și fie

$$(1) \quad f(x) = P(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots$$

În virtutea ipotezei, $f(x_0) = a_0$ este real, prin urmare expresiunea

$$\frac{f(x) - a_0}{x - x_0}$$

este reală pentru x real și cuprins în intervalul considerat; de unde rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} = a_1,$$

este o cantitate reală. De asemenea cantitatea

$$\left[\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \right]_{x=x_0} = a_2,$$

este reală; etc. Într'un cuvânt, toți coeficienții seriei (1) sunt reali. De unde concluziunea următoare: *dacă o funcțiune olomorvă este reală dealungul unui segment al axei reale, derivatele sale de orice ordin sunt reale în acelaș timp.*

¹⁾ Fie $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$; avem $\bar{z}_2 = \rho_2 e^{-i\theta_2}$. Egalitatea $z_1 \bar{z}_2 = r^2$ devine $\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = r^2$, de unde $\theta_2 = \theta_1$ și $\rho_1 \rho_2 = r^2$. Prin urmare $z_2 = \frac{r^2}{\rho_1} e^{i\theta_1}$.

Fie acum

$$x = x_0 + i\eta$$

un punct situat în interiorul cercului de convergență al seriei (1), x_0 și η fiind reali. Vom avea

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x_0 + i\eta) &= a_0 - a_2\eta^2 + a_4\eta^4 - \dots \\ &\quad + i\eta(a_1 - a_3\eta^2 + \dots), \end{aligned}$$

coeficienții a_n fiind toți reali. De unde rezultă că expresiunile

$$f(x_0 + i\eta), \quad f(x_0 - i\eta)$$

au valori imaginare conjugate. Derivând ambele membre ale egalității (2), conchidem că derivatele

$$f^{(n)}(x_0 + i\eta), \quad f^{(n)}(x_0 - i\eta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

se bucură de aceeași proprietate.

Ne mai rămâne să probăm că această proprietate subsistă și în afară din cercul de convergență considerat. Pentru aceasta să arătăm mai întâi că dacă elementul $P(x - x_0)$ se prelungește deasupra axei reale, el se va prelungi și dedesubt într-o regiune simetrică în raport cu această axă.

În adevăr, fie x_1 și x'_1 două puncte simetrice în raport cu axa reală, situate în interiorul cercului de convergență al elementului primitiv; vom avea pentru prelungirile acestui element, seriile

$$(3) \quad \begin{cases} P(x - x_0, x_1) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1} (x - x_1) + \dots, \\ P(x - x_0, x'_1) = f(x'_1) + \frac{f'(x'_1)}{1} (x - x'_1) + \dots \end{cases}$$

Coeficienții acestor serii fiind imaginari conjugăți au module egale și prin urmare (teorema Cauchy-Hadamard) (108) razele cercurilor lor de convergență sunt egale. Ceeace justifică aserțiunea de mai sus.

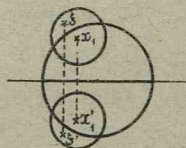


Fig. 55

Fie acum $x = \xi$ un punct oarecare situat în interiorul cercului de convergență cu centrul în x_1 și ξ' simetricul său în raport cu axa reală (fig. 55). Valorile ce primesc cele două elemente prelungite în punctele ξ , ξ'

$$P(\xi - x_0, x_1), \quad P(\xi' - x_0, x'_1),$$

având, în virtutea dezvoltărilor (3), termenii lor respectiv conjugăți, doi câte doi, sunt cantități imaginare conjugate.

q. e. d.

367. Viceversa. Dacă o funcțiune $f(x)$ olomorfă într'o regiune care cuprinde un segment al axei reale, primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$, situate în această regiune, ea este reală pe segmentul considerat. În adevăr, prin ipoteză, putem scrie

$$\begin{aligned} f(\xi + i\eta) &= \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta), \\ f(\xi - i\eta) &= \varphi(\xi, \eta) - i\psi(\xi, \eta), \end{aligned}$$

φ și ψ fiind funcțiuni reale și continue de variabilele reale ξ , η . Înșă, în virtutea continuității, avem

$$\lim_{\eta=0} f(\xi + i\eta) = \lim_{\eta=0} f(\xi - i\eta);$$

de unde rezultă că funcțiunea $\psi(\xi, \eta)$ este nulă dealungul segmentului considerat, ceea ce justifică propozițiunea enunțată.

368. *Observare.* Extremitățile segmentului axei reale, dealungul căruia funcțiunea $f(x)$ este reală și în cari ea încetează de a fi reală, sunt puncte singulare ale acestei funcțiuni.

În adevăr, fie a una din cele două extremități și x_0 un punct al segmentului, oricât de aproape voim de a ; avem, în domeniul punctului x_0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

coeficienții a_n fiind reali. Dacă punctul a ar fi un punct ordinar al funcțiunii $f(x)$, cercul de convergență al seriei precedente ar conține acest punct în interiorul său și $f(x)$ ar fi real pentru x real dincolo de punctul a ; ceea ce este contrar ipotezei.

Dacă dar o funcțiune analitică olomorfă este reală dealungul unui segment al axei reale, ea va fi reală dealungul axei până la cel dintâi punct singular situat pe axă.

CAPITOLUL XIX.

FUNCȚIUNI ANALITICE REPREZINTATE PRIN INTEGRALE DEFINITE.

I. — INTEGRALE DEFINITE CONSIDERATE CA FUNCȚIUNI DE UNA DIN CELE DOUĂ LIMITE.

369. Fie $f(x)$ o funcțiune analitică olomorfă într'o arie cu contur simplu și x_0 un punct situat în această arie. Am văzut (294) că integrala

$$\int_{x_0}^x f(x) dx,$$

luată după o linie oarecare cuprinsă în interiorul regiunii date, este o funcțiune analitică olomorfă în aceeași regiune.

370. Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcțiune analitică uniformă având într-o regiune dată puncte singulare izolate, poluri sau puncte singulare esențiale. Fie x_0 un punct arbitrar fix, diferit de un punct singular și L_0, L două linii cari unesc acest punct cu un punct variabil x situat în regiunea dată. Vom presupune totdeauna că liniile de integrațiune nu trec prin puncte singulare. Să reprezentăm prin u_0 și u valorile integralei corespunzătoare acestor drumuri (dela x_0 la x) și să vedem ce relațiune există între

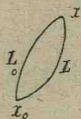


Fig. 56

$$u_0 = \int_{L_0} f(x)dx \text{ și } u = \int_L f(x)dx.$$

Să observăm că liniile L_0 și L formează împreună o curbă închisă pe care o reprezentăm prin C și că integrala $\int_L f(x)dx$ se poate evident înlocui prin integrala $\int_C f(x)dx$ urmată de integrala $\int_{L_0} f(x)dx$. De unde rezultă relațiunea

$$(1) \quad u = u_0 + \int_C f(x)dx,$$

integrala fiind luată după curba C în sensul determinat de succesiunea L, L_0 . Însă curba C poate avea o formă astfel ea un punct mobil, descriind această curbă să se în vâртеască în jurul unui punct singular de un număr oarecare de ori într'un sens sau în altul. Prin urmare, reprezentând prin $A_1, A_2, \dots, A_n$ reziduurile funcțiunii $f(x)$, corespunzătoare punctelor singulare situate în interiorul curbei C , relațiunea (1) va lua forma

$$(2) \quad u = u_0 + 2i\pi(m_1A_1 + \dots + m_nA_n),$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$ fiind numere întregi oarecari pozitive sau negative. Cantitățile

$$2i\pi A_1, 2i\pi A_2, \dots, 2i\pi A_n$$

poartă numele de *module de periodicitate*, sau de *perioade* ale integralei. Fiecărui punct singular corespunde câte o perioadă a integralei, care este nulă dacă reziduul corespunzător este nul.

371. Din cele ce preced rezultă că dacă $f(x)$ este o funcțiune uniformă în tot planul, neavând decât singularități izolate, integrala

$$(3) \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

reprezintă o funcțiune analitică în tot planul, multiformă cu o infinitate de ramuri. Toate ramurile se pot deduce din una din ele, dacă variabila descrie drumuri convenabile; prin urmare funcțiunea astfel definită este monogenă în sensul lui Weierstrass.

În domeniul unui punct ordinar $x = a$, o ramură oarecare este o funcțiune olomorfă de x . În adevăr, fie x_1 un punct pe drumul de integrațiune situat în domeniul punctului a ; putem scrie

$$(4) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^x f(x) dx.$$

Prima integrală din membrul al doilea fiind o constantă în acelaș timp cu x_1 , este de ajuns a proba că ultima integrală este o funcțiune olomorfă de x , în domeniul lui a . Însă în acest domeniu avem $f(x) = P(x - a)$ și integrala seriei este o serie de aceeaș formă. De unde rezultă proprietatea enunțată.

Fie acum a un punct singular; avem în domeniul acestui punct

$$f(x) = P(x - a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - a)^{-n};$$

de unde, pentru ultima integrală (4), expresiunea

$$\int_{x_1}^x f(x) dx = \int_{x_1}^x P(x - a) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^x a_n (x - a)^{-n} dx.$$

Prin urmare forma analitică a integralei propuse, în domeniul punctului $x = a$, este

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \mathcal{P}(x - a) + a_1 \log(x - a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} (x - a)^{-n+1}.$$

În cazul când reziduul a_1 este nul, integrala este uniformă în domeniul punctului a , pe care îl admite ca pol sau ca punct singular esențial, după cum acest punct este pol sau punct singular esențial al funcțiunii $f(x)$.

Pentru ca integrala $\int_{x_0}^x f(x) dx$ să fie o funcțiune uniformă în

tot planul, presupunând că $f(x)$ este o asemenea funcțiune, este evident necesar și suficient ca toate reziduurile funcțiunii $f(x)$ să fie nule.

De exemplu, funcțiunile

$$u = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x}, \quad u = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sin x}$$

admit în fiecare punct o infinitate de valori, cuprinse în expresiunea

$$u = u_0 + 2ki\pi,$$

k fiind un număr întreg pozitiv sau negativ; pe când funcțiunile

$$u = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2}, \quad u = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sin^2 x}$$

sunt uniforme în tot planul. Aceste două funcțiuni din urmă admit, cea dintâi un pol unic $x = 0$, cea de a doua o infinitate de poluri $x = k\pi$.

Rezultatele precedente se verifică imediat prin integrațiune directă.

372. *Tăieturi (coupures)*. Printr'un artificiu de care ne-am mai servit, putem face ca fiecare ramură a funcțiunii (3) să fie uniformă în tot planul variabilei x , limitat de tăieturi cari nu se întâlnesc între ele.

În genere, tăieturile sunt făcute în plan după linii drepte plecând de la fiecare punct singular spre infinit. În două puncte infinit vecine x' , x'' situate de o parte și de alta a unei tăieturi, valorile integralei $F(x)$ nu sunt în genere infinit apropiate între ele; însă limita către care tinde diferența acestor valori este constantă în tot lungul tăieturii. În adevăr, fie x' și x'' (fig. 57) două puncte

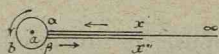


Fig. 57

situate față în față, de o parte și de alta a tăieturii ($a \dots \infty$), a și β două puncte în acelaș mod situate în vecinătatea punctului a , cel dintâi în aceeași parte a tăieturii ca punctul x' , cel de al doilea în partea în care se găsește x'' . Pentru a trece de la punctul x' la punctul x'' , putem urmări drumul $x'a$, $\beta x''$ și cercul $a\gamma\beta$ având centrul în a . De unde rezultă egalitatea

$$F(x'') = F(x') + \int_{x'}^a f(x)dx + \int_{a\gamma\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{x''} f(x)dx.$$

Însă funcțiunea $f(x)$ fiind uniformă, integralele

$$\int_x^a f(x)dx, \quad \int_{\beta}^{x''} f(x)dx$$

sunt egale și de semne contrarii; prin urmare avem egalitatea ¹⁾

$$\lim_{x' \rightarrow x''} [F(x'') - F(x')] = 2i\pi A,$$

A fiind reziduul funcțiunii $f(x)$ relativ la punctul a .

¹⁾ Cele două țărmuri ale tăieturii se consideră confundate cu tăietura însăși.

Din cele ce preced rezultă că tăieturile pot fi privite ca linii de discontinuitate ale integralei. Permițând variabilei să străbată tăietura relativă la punctul a , trebuie să adăugăm integralei $\pm 2i\pi A$, după sensul în care se face trecerea.

Dacă $A = 0$, tăietura poate fi suprimată.

373. Să considerăm, ca aplicațiune, integrala

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

de unde putem deduce proprietățile funcțiunii $\log x$, deja studiate.

Fie dar integrala

$$(1) \quad u = f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

luată după un drum oarecare, ce nu trece prin punctul $x = 0$. Funcțiunea $\frac{1}{x}$ având un pol unic $x = 0$ cu reziduul $+1$, $f(x)$ este o funcțiune analitică multiformă având o infinitate de ramuri cuprinse în expresiunea

$$(2) \quad f(x) = [f(x)] + 2ki\pi,$$

$[f(x)]$ reprezentând una din ele. Să considerăm una din ramurile funcțiunii, anume aceea care se anulează pentru $x = 1$. Când x variază dela 1 la ∞ prin valori reale, integrala este reală, crește neconținut dela 0 la ∞ , căci derivata $\frac{du}{dx}$, în acest interval, este reală și pozitivă. Făcând substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$, avem

$$(3) \quad f(x') = -f(x);$$

prin urmare, când x descrește dela 1 la 0, integrala descreștene conținut dela 0 la $-\infty$. Așa dar semiaxa reală și pozitivă (x) se transformă punct cu punct în toată axa reală (u).

Să facem acum ca x să descrie un arc de cerc cu centrul în origină, cu raza r (fig. 58). Punând $x = re^{i\theta}$, putem scrie

$$(4) \quad \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_r^x \frac{dx}{x},$$

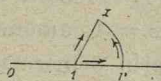


Fig. 58

prima integrală din membrul al doilea fiind rectilie și cea de a doua fiind luată după arcu de cerc considerat; de unde egalitatea

$$(5) \quad u = f(r) + i\theta,$$

care arată că arcului $\widehat{rx}$, corespunzător unghiului θ , descris de x , corespunde pentru u un segment de dreaptă perpendiculară pe axa reală în punctul $u = f(r)$, având lungimea θ .

Să considerăm conturul format de două cercuri concentrice cu centrul în origină, având razele $r, \frac{1}{r}$, inverse una alteia și de porțiunea pozitivă a axei reale care va fi privită ca o tăietură (fig. 59). În aria astfel limitată, fiecare ramură a funcțiunii $u(x)$ este olomorfă.

Din formulele (3) și (4) rezultă că drumul *abcada*, descris de punctul x în sensul săgeților, se transformă în drumul format de perimetrul dreptunghiului ABCDA (fig. 60); latura AB este

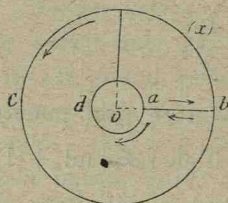


Fig. 59

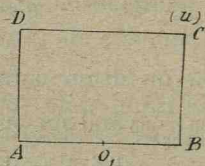


Fig. 60

situată pe axa reală și împărțită în două părți egale de origina $u = 0$ și latura paralelă CD la o distanță egală cu 2π . Laturile AB și CD corespund respectiv țărmului superior și inferior al tăieturii *ab*.

De altă parte, dealungul conturului considerat (x) , u nu trece de două ori prin aceiași valoare, prin urmare ariile limitate de contururile respective se corespund punct cu punct și fiecare din ele este transformată conformă a celeilalte. Făcând r să tindă către zero, obținem, de o parte, tot planul (x) , limitat de tăietura $(0, +\infty)$, și, de altă parte, o fâșie nemărginită în planul (u) , cuprinsă între axa reală și o paralelă la aceasta, situată la o distanță egală cu 2π . Țărmul stâng al tăieturii ($\theta = 0$) se transformă în axa reală și țărmul drept ($\theta = 2\pi$) în paralela sa.

Identitatea funcțiunii considerate $u = \int_1^x \frac{dx}{x}$ cu funcțiunea $\log x$, rezultă din aceea că derivatele lor sunt identice și că în punctul $x = 1$, amândouă funcțiunile au câte o ramură care se anulează; prin urmare elementele acestor ramuri coincid în domeniul punctului $x = 1$.

374. *Formula de adăuine a logaritmulor.* Fie x_1 și x_2 două puncte oarecari situate în planul variabilei x și L_1, L_2 două drumuri luate după voie între aceste puncte și punctul $x = 1$, fără însă a trece

prin origină. Să reprezentăm prin x și x' două puncte mobile situate respectiv pe liniile L_1 și L_2 și fie

$$(6) \quad y = x \cdot x'.$$

Când x și x' descriu liniile L_1 , L_2 punctul y pe care îl figurăm pe acelaș plan sau pe alt plan, descrie un drum determinat L , cuprins între punctul $y = 1$ și punctul $y_1 = x_1 x_2$. Diferențiând egalitatea (6), obținem

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'};$$

de unde

$$(7) \quad \int_1^{y_1} \frac{dy}{y} = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_1^{x_2} \frac{dx'}{x'},$$

integralele fiind luate respectiv după liniile L , L_1 , L_2 . Aceste egalități echivalează cu cea următoare

$$(8) \quad \log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2,$$

determinațiunile logaritmilor din ambele membre fiind date de integralele corespunzătoare.

375. Integrala

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x-a}, \quad x_0 \neq a,$$

se reduce la cea considerată mai sus; căci punând $x - a = x'$, avem

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{dx'}{x'} = \int_1^{x-a} \frac{dx'}{x'} - \int_1^{x_0-a} \frac{dx'}{x'},$$

sau

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) - \log(x_0-a).$$

Corolar. Integrala unei funcțiuni raționale de x este de forma

$$R(x) + \sum A_n \log(x - a_n),$$

$R(x)$ fiind o funcțiune rațională de x ; ceea ce se recunoaște, descompunând funcțiunea rațională în fracțiuni simple.

376. Să considerăm, ca a doua aplicațiune, integrala

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Funcțiunea $\frac{1}{1+x^2}$ neavând alte singularități decât polurile simple $x = \pm i$, cu reziduurile corespunzătoare $\mp \frac{i}{2}$, rezultă că u este o funcțiune analitică având o infinitate de ramuri cuprinse în expresiunea

$$u = (u) + k\pi,$$

(u) fiind una din ele și k un număr întreg arbitrar.

Să introducem tăieturile după axa imaginară dela $+i$ la $+i\infty$ și dela $-i$ la $-i\infty$. În planul așa limitat, fiecare ramură este o funcțiune olomorfă. Diferența valorilor unei ramuri în două puncte infinit apropiate între ele, situate de o parte și de alta a uneia din aceste tăieturi, este egală cu $\pm\pi$.

Să examinăm cum se transformă planul (x) în planul (u), mărginindu-ne la ramura care se anulează împreună cu x . Pentru aceasta, să considerăm conturul OABCD (fig. 61), format de axa reală îndreptată în sensul pozitiv, de un cadran de cerc descris din origină ca centru cu o rază R foarte mare, de axa imaginară cuprinsă între cerc și un punct C a cărui distanță r de punctul i

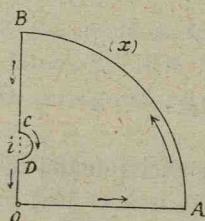


Fig. 61

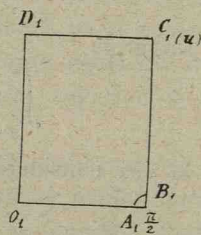


Fig. 62

este foarte mică, de un semicerc CD cu centrul în i și de segmentul DO al axei imaginare. Să facem ca x să descrie acest contur în sensul pozitiv, plecând dela punctul 0. Se obține rezultatul următor: Pentru x real, u este real; raza OA se transformă punct cu punct într'un segment de axă reală, O_1A_1 (fig. 62), a cărui extremitate diferă foarte puțin de punctul $u = \frac{\pi}{2}$. Când x descrie cadranul AB, u descrie un drum A_1B_1 care diferă foarte puțin de un cadran de cerc cu centrul în punctul $u = \frac{\pi}{2}$ și a cărui rază e foarte mică ¹⁾.

¹⁾ Dealungul lui AB, integralele

$$\int_A^x \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_A^x \frac{dx}{x^2}$$

difer foarte puțin între ele și diferența lor tinde către zero când R tinde către infinit.

Abscisa punctului B_1 este $\frac{\pi}{2}$. Aceasta rezultă din cele ce urmează: Când x se mișcă pe axa imaginară dela B la C , punând $x = it$ (t variând dela R la $1 + r$), vedem că u se mișcă dela B_1 la C_1 , depărtându-se la infinit când r tinde către zero. Pozițiunea acestei drepte este evident independentă de mărimea lui R ; însă pentru $R = \infty$, dreapta trece prin punctul $u = \frac{\pi}{2}$, prin urmare ea trece prin acest punct oricare ar fi valoarea lui R și deci B_1 are abscisa $\frac{\pi}{2}$. Ceea ce justifică aserțiunea de mai sus. Când x descrie semicercul CD , u descrie un drum C_1D_1 care diferă de dreapta paralelă cu axa reală descrisă în același timp de integrala $\frac{1}{2i} \int \frac{dx}{x-i}$ cu atât mai puțin cu cât r este mai mic.

În fine, când x descrie segmentul DO , u descrie neconținut în același sens dreapta D_1O_1 situată pe axa imaginară (u). Cele două contururi descrise de punctele x și u , se corespund dar punct cu punct. De unde rezultă că aria limitată de conturul (u) este transformată conformă a ariei limitată de conturul (x).

La puncte simetrice în raport cu axa imaginară (x) corespund puncte simetrice în raport cu axa imaginară (u). În adevăr, dealungul axei imaginare (x) din care excludem punctul i , u este de forma $u = iv$, v real; prin urmare, în puncte simetrice în raport cu axa imaginară (x), v primește valori imaginare conjugate $\alpha \pm i\beta$; de unde pentru u , în aceleași puncte, valori de forma $i\alpha \mp \beta$.

Făcând $R = \infty$ și $r = 0$, conchidem că semiplanul (x) situat deasupra axei reale și limitat de tăietura ($i, i\infty$) se transformă, în mod conform, într-o fâșie a planului (u), cuprinsă între axa reală și două semidrepte perpendiculare pe această axă, situate deasupra ei și duse prin punctele $\pm \frac{\pi}{2}$.

Semiplanul (x) situat dedesubtul axei reale se transformă în același mod în fâșia simetrică cu cea dintâiu în raport cu axa reală (u), căci pentru x real, u este real.

Intr'un cuvânt, tot planul (x) limitat de cele două tăieturi considerate, se transformă în mod conform în fâșia (u) cuprinsă între paralelele la axa imaginară duse prin punctele $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = +\frac{\pi}{2}$.

Din dezvoltarea

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

valabilă în domeniul punctului $x = 0$, rezultă că ramura funcțiunii $u(x)$, care se anulează în acest punct, este reprezentată, în acest domeniu, prin seria

$$u = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

care coincide cu ramura principală a funcțiunii $\operatorname{arctg} x$ (§ 270). De unde rezultă identitatea celor două funcțiuni.

II. — INTEGRALE DE FUNCȚIUNI ALGEBRICE.

377. Să considerăm cazul particular când funcțiunea $f(x)$ este definită de o ecuațiune de forma

$$f(x) = \sqrt{R(x)},$$

$R(x)$ fiind o funcțiune rațională de x , și fie a un punct de ramificațiune al funcțiunii. Integrala

$$\int_C f(x) dx,$$

luată după o curbă închisă C , care nu conține în interiorul său alt punct critic decât a , depinde de punctul inițial al curbei. În adevăr, fie A și B două puncte ale curbei (fig. 59); putem scrie

$$(ABMA) = (AB) + (BMAB) + (BA).$$

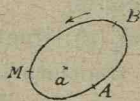


Fig. 63

Însă integralele extreme din membrul al doilea nu se distrug, căci după ce x descrie odată curba C , ramura $f(x)$ se schimbă în $-f(x)$, astfel că $(AB) = (BA)$. Avem prin urmare

$$(ABMA) = 2(AB) + (BMAB).$$

Fie, de exemplu, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și $x_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ punctul inițial; avem

$$\int_C \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})_C = -4r_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_0}{2}}.$$

Integrala $\int_C f(x) dx$ considerată mai sus nu depinde de sensul în care x descrie curba C . În adevăr, să reprezentăm prin I și I' valorile integralei luate, cea dintâi în sensul pozitiv, cea de a doua în sensul negativ, punctul inițial x_0 și valoarea corespunzătoare $f(x_0)$ a lui $f(x)$ fiind aceleași. Să presupunem că x descrie curba C succesiv de două ori, mai întâi în sensul pozitiv și apoi în sensul

negativ; suma celor două integrale astfel obținute este evident nulă. Însă, după prima descriere a curbei C , valoarea finală a lui $f(x)$ este $-f(x_0)$; prin urmare a doua integrală, fiind descrisă în sensul negativ cu valoarea inițială $-f(x_0)$ a funcțiunii, va fi egală cu $-I'$. De unde rezultă $I - I' = 0$.

Dacă punctul critic a nu este pol, integrala luată după curba C descrisă de două ori în același sens, sau, ceea ce este tot una, după o curbă care înconjoară punctul a de două ori ¹⁾ este evident nulă.

378. Fie x_0 un punct ordinar și a un punct de ramificațiune al lui $f(x)$. Să considerăm conturul elementar (x_0, a) și fie C o curbă închisă care trece prin x_0 și care nu conține în interiorul său alt punct singular decât punctul a (fig. 65). Integrala

$$\int_C f(x) dx,$$

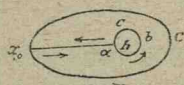


Fig. 65

luată dela punctul x_0 după C sau după (x_0, a) are aceeași valoare, determinațiunea inițială a lui $f(x)$ fiind aceeași; căci în aria cuprinsă între aceste două drumuri, funcțiunea $f(x)$ este olomorfă. Avem așa dar

$$\int_C f(x) dx = \int_{x_0 a} f(x) dx + \int_{abca} f(x) dx + \int_{ax_0} f(x) dx,$$

integralele fiind luate în sensul săgeților. Însă, după ce x descrie cercul (a) , $f(x)$ își schimbă semnul și integrala din urmă a membrului al doilea este egală cu cea dintâi; prin urmare

$$\int_C f(x) dx = 2 \int_{x_0 a} f(x) dx + (abca).$$

Dacă integrala $(abca)$ tinde către zero când raza cercului (a) se anulează, obținem egalitatea

$$\int_C f(x) dx = 2 \int_{x_0 a} f(x) dx.$$

379. Fie integrala

$$u = \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

¹⁾ O asemenea curbă C' se taie neapărat pe sine însăși (fig. 64).



Fig. 64

luată după un drum L oarecare. Oricare ar fi forma liniei L , ea se poate înlocui, în ce privește valoarea integralei, printr'un drum determinat L_0 — căruia să-i zicem drum *direct* — care unește punctul x_0 cu x , precedat de un număr convenabil de contururi elementare. De unde rezultă că, în genere, integrala u este o funcțiune analitică având o infinitate de ramuri.

380. Se poate întâmpla ca integrala să aibă un număr limitat de ramuri. De exemplu, integrala

$$u = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se recunoaște că avem

$$\int_0^{-x} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

integralele fiind luate după două drumuri simetrice în raport cu origina. Să reprezentăm prin ω valoarea integralei după contururile

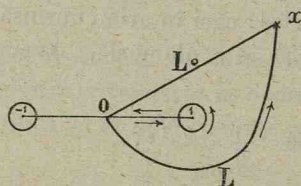


Fig. 66

elementare $(0, 1)$ și $(0, -1)$ (fig. 66), determinațiunea radicalului fiind aceeași. Integrala luată după amândouă aceste contururi descrise succesiv este nulă; căci, după primul contur, radicalul schimbându-și semnul, valoarea integralei după conturul al doilea este $-\omega$. De unde rezultă că integrala

propusă nu este susceptibilă decât de două ramuri, date de expresiunea

$$u = \begin{cases} (u), \\ \omega - (u), \end{cases}$$

(u) fiind ramura obținută după drumul direct $0x$.

Rezultatul precedent se verifică prin integrațiune directă; avem, luând $+1$ drept valoare inițială a radicalului,

$$u = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \sqrt{1-x^2};$$

de unde $\omega = 2$ și

$$u = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2}, \\ 1 + \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Integrala considerată este așa dar o funcțiune algebrică, având aceleași puncte de ramificațiune ca și radicalul de sub semnul f ; ea satisface ecuațiunea

$$u^2 - 2u + x^2 = 0.$$

381. Să studiem integrala

$$(1) \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Avem $u(-x) = -u(x)$, integralele fiind luate după două drumuri simetrice în raport cu origina $x = 0$, determinațiunea inițială a radicalului fiind aceeași. Luând această valoare egală cu $+1$, valorile integralei după contururile elementare $(0, 1)$, $(0, -1)$ sunt respectiv π , $-\pi$.

Fie u_0 valoarea integralei luată după drumul direct L_0 și u valoarea ei după un drum L . Dacă între cele două drumuri nu se află nici unul din punctele critice ± 1 , integralele au aceeași valoare.

Să presupunem că între L_0 și L se găsește unul sau amândouă punctele critice. Pentru a obține valoarea integralei după drumul L , observăm că acest drum este echivalent cu drumul format de unul din contururile elementare sau de amândouă, descrise într-o ordine convenabilă, de un număr convenabil de ori, urmat de drumul L_0 . Valoarea integralei, luată după drumul L , va fi dar dată de contururile elementare corespunzătoare, la care se adaugă valoarea ei după drumul L_0 , descris cu valoarea inițială ± 1 a radicalului, după cum contururile elementare, cari au precedat, sunt în număr par sau impar. Din cele ce preced se deduce relațiunea dintre valorile integralei după cele două drumuri.

Să presupunem mai întâi că L_0 este precedat de unul din cele două contururi elementare $(0, 1)$ sau $(0, -1)$ (fig. 66); valorile corespunzătoare ale lui u vor fi respectiv

$$(2) \quad u = \pi - u_0, \quad u = -\pi - u_0.$$

Să presupunem acum L_0 precedat de ambele contururi elementare, descrise succesiv, o singură dată (fig. 67); valoarea finală a integralei va fi

$$(3) \quad u = \pm 2\pi + u_0,$$

după cum conturul $(0, 1)$ precede conturul $(0, -1)$, sau viceversa.

Dacă L_0 este precedat de contururile $(0, 1)$, $(0, -1)$ descrise succesiv de n ori, avem

$$(4) \quad u = 2n\pi + u_0.$$

Din cele ce preced rezultă că integrala (1) admite, pentru

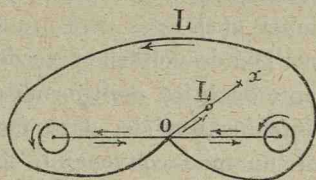


Fig. 67.

aceiaș valoare a limitei superioare x , o infinitate de valori cuprinse în egalitățile

$$(5) \quad u = \begin{cases} 2n\pi + u_0, \\ (2n+1)\pi - u_0, \end{cases}$$

u_0 fiind una din valorile integralei și n un număr întreg oarecare, pozitiv, negativ sau nul.

Forma analitică a funcțiunii $u(x)$ reprezentată prin integrala (1) într'un punct oarecare al planului, se obține dezvoltând funcțiunea $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie în domeniul aceluși punct și integrând. Fie a diferit de ± 1 ; avem pentru una sau alta din cele două ramuri, cari nu diferă decât prin semn,

$$(6) \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

Fie $u(a)$ una din valorile integralei în punctul $x=a$; vom avea, în domeniul acestui punct,

$$(7) \quad u(x) - u(a) = a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Dacă $a=1$, avem, în domeniul acestui punct,

$$(8) \quad \begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots). \end{aligned}$$

Luând valoarea integralei, în punctul $x=1$, egală cu $\frac{\pi}{2}$, avem dezvoltarea

$$(9) \quad u - \frac{\pi}{2} = i\sqrt{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}P(x-1).$$

Punctele $x = \pm 1$ sunt așa dar puncte de ramificațiune ale funcțiunei $u(x)$.

Din dezvoltările precedente rezultă că integrala $u(x)$ este o funcțiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele, dacă facem să varieze drumul de integrațiune într'un mod convenabil, conform celor văzute mai sus.

Punctul $x = \infty$ este un punct singular logaritmice pentru toate ramurile, precum se recunoaște, dacă ținem seama de dezvoltarea

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{i}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{i}{x} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{1}{x^{2n}} + \dots\right), \end{aligned}$$

valabilă în tot planul exterior cercului $|x|=1$.

382. *Transformarea planului* (x) *în planul* (u) . Să limităm planul (x) prin două tăieturi făcute dealungul axei reale dela punctul $+1$ la $+\infty$ și dela punctul -1 la $-\infty$ și, fie u ramura care se anulează împreună cu x . Din origină ca centru să descriem un semicerc cu o rază R foarte mare și din punctele $+1$ și -1 ca centre, două semicercuri cu o rază r foarte mică, toate situate deasupra axei reale (fig. 68). Să considerăm conturul $OambAMBb'm'a'O$ format din axa reală și din cele trei semicercuri. Se recunoaște lesne, raportându-ne la variaținea radicalului $\sqrt{1-x^2}$, că liniile

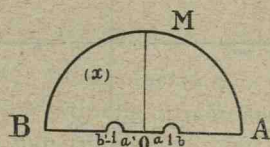


Fig. 68

$Oa, amb, bA, AMB, Bb', b'm'a', a'O$

din planul (x) se transformă respectiv în liniile

$O_1a_1, a_1b_1, b_1A_1, A_1B_1, B_1b'_1, b'_1a'_1, a'_1O_1$

din planul (u) (fig. 69) în care: O_1a_1 este un segment de axă reală a cărui lungime este $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tinzând către zero împreună cu r ; arcul a_1b_1 diferă de un cadran de cerc cu centrul în punctul $u = \frac{\pi}{2}$, cu atât mai puțin cu cât r este mai mic; b_1A_1 este un segment de linie dreaptă perpendiculară pe axa reală, având abscisa $\frac{\pi}{2} - 1$; linia A_1B_1 , ale cărei extremități au abscisele $\pm \frac{\pi}{2}$, diferă de un seg-

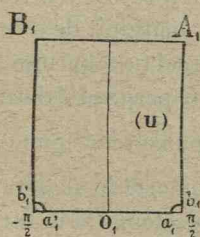


Fig. 69

ment de dreaptă paralelă cu axa reală, cu atât mai puțin, cu cât R este mai mare și se depărtează la infinit când R tinde către infinit; în fine, celelalte linii sunt simetrice cu cele dintâi în raport cu axa imaginară. Integrala u fiind funcțiune olomorvă de x în aria limitată de conturul considerat al lui x și contururile celor două variabile corespunzându-se punct cu punct, u descriind conturul său în acelaș sens cu x , rezultă că

transformarea celor două arii este o transformare conformă (§ 358).

Un contur (x) simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală, dă pentru u , în raport cu axa sa reală, un contur simetric cu cel obținut mai sus. Țărmurile pozitive ale celor două tăieturi (x) corespund celor două semidrepte pozitive ale fâșiei (u) și țărmurile negative corespund semidreptelor simetrice în raport cu axa reală. Făcând $r = 0$, $R = \infty$, rezultă că planul (x) , mărginit de cele două tăieturi

1) Căci, când x descrie dreapta bA , punctul u se mișcă pe o perpendiculară pe axa sa reală, a cărei pozițiune este independentă de mărimea lui r și pentru $r = 0$, avem $u = \frac{\pi}{2}$.

$(-1, -\infty)$, $(+1, +\infty)$ (fig. 70), se transformă într'un mod conform, în fâșia nelimitată din planul (u) , cuprinsă între două drepte paralele cu

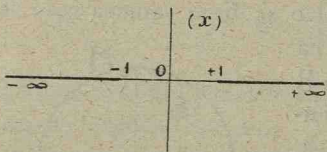


Fig. 70

axa imaginară și trecând prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$ (fig. 71). Axele imaginare se corespund; de unde rezultă că punctelor simetrice în raport cu axa imaginară (x) corespund puncte

simetrice în raport cu axa imaginară (u) (Observare, § 363).

Din dezvoltarea

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \dots,$$

valabilă în cercul $|x| = 1$, rezultă seria

$$u = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots,$$

convergentă în acelaș cerc și care se anulează în punctul $x=0$. Ramura $u(x)$ care se anulează în punctul $x=0$ coincidând cu elementul funcțiunii $\arcsin x$, care se anulează în acelaș timp, conchidem că funcțiunea $u(x)$ este identică cu funcțiunea $\arcsin x$.

383. *Inversiunea integralei*

(1)

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Să privim limita superioară x a integralei ca funcțiune de u și fie $x=f(u)$. Din reprezentarea conformă a planului (x) mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ pe fâșia din planul (u) cuprinsă, precum s'a văzut mai sus, între cele două linii drepte perpendiculare pe axa reală, trecând prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$, corespunzătoare punctelor $x = \pm 1$, rezultă că $x=f(u)$ este o funcțiune olomoră în această fâșie (§ 358). Voim să arătăm că $f(u)$ este o funcțiune olomoră în tot planul. Pentru aceasta, să observăm că funcțiunea $f(u)$, olomoră în interiorul fâșiei considerate, fiind reală dealungul celor două linii cari o mărginesc se prelungește în afară din această fâșie și primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu aceste linii (§ 363).

Reprezentând prin (D, D') fâșia inițială, limitată de drepte D, D' , cari trec prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$ și sunt perpendiculare pe axa reală, să

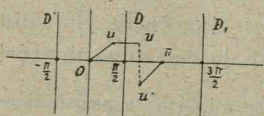


Fig. 72

considerăm fâșia paralelă (D, D_1) având cu dânsa latura comună D și a cărei a doua latură D_1 trece prin punctul $u = \frac{3\pi}{2}$ (fig. 72). În această fâșie funcțiunea $f(u)$ este așa dar olomoră ca și în cea dintâiu (§ 363. Observare).

În privința valorilor ce $f(u)$ primește în această fâșie, observăm că dacă u este un punct în fâșia (D', D) , $\pi - u$ este un punct situat în fâșia (D, D_1) astfel că avem egalitatea

$$(2) \quad f(\pi - u) = f(u),$$

precum rezultă din a doua egalitate (5) (§ 381), în care facem $n = 0$. Această egalitate se mai deduce din considerațiunile următoare:

Fie $u = \alpha + i\beta$ un punct din prima fâșie, punctul $u' = \pi - \alpha + i\beta$ este simetric cu u în raport cu dreapta D și cu punctul $u'' = \pi - u$ în raport cu axa reală. Valoarea funcțiunii $f(u)$ în punctul u' este așa dar imaginară conjugată cu valorile $f(u)$, $f(u'')$. De unde rezultă egalitatea (2).

Prin considerațiuni de simetrie analoage cu cele precedente se recunoaște că funcțiunea $f(u)$ este olomoră în tot planul (u) . Referindu-ne la formula (5) (§ 381), care dă expresiunea tuturor valorilor integralei u corespunzătoare la aceeași valoare a lui x , conchidem că funcțiunea $f(u)$ satisface egalitățile

$$(3) \quad \begin{cases} f(u + 2k\pi) = f(u), \\ f[(2k + 1)\pi - u] = f(u), \end{cases}$$

k fiind un număr întreg arbitrar.

Funcțiunea $x = f(u)$ este așa dar o funcțiune întreagă, simplu periodică, având perioada 2π . Din reprezentarea conformă a planului (x) și a fâșiei $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ din planul (u) , precum și din relațiunea $f(\pi - u) = f(u)$, rezultă că funcțiunea $f(u)$ nu admite perioadă în valoare absolută mai mică decât 2π .

Din relațiunea $u(-x) = -u(x)$, rezultă, viceversa, relațiunea

$$(4) \quad f(-u) = -f(u);$$

căci $f(u)$ primește o valoare unică pentru fiecare valoare a lui u . De unde rezultă

$$(5) \quad f(0) = 0$$

și prin urmare, în virtutea egalităților (3),

$$(6) \quad f(k\pi) = 0.$$

Zerurile funcțiunii $f(u)$ sunt așa dar date de expresiunea $u = k\pi$, k fiind un număr întreg arbitrar.

384. Se poate, fără ajutorul prelungirii analitice și a transformării conforme, proba foarte lesne că funcțiunea inversă $f(u)$ a integralei (1) este o funcțiune întreagă, efectuând inversiunea seriei (2) (§ 381), prin care se recunoaște identitatea ei cu funcțiunea

sin u . Pentru aceasta să calculăm coeficienții seriei inverse. Derivând ecuațiunea

$$\frac{dx}{du} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

avem

$$\frac{d^2x}{du^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{du} = -x;$$

de unde rezultă, într'un mod general, egalitățile

$$\frac{d^{2n}x}{du^{2n}} = (-1)^n x,$$

$$\frac{d^{2n+1}x}{du^{2n+1}} = (-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Făcând $u = 0$, valoare căreia corespunde $x = 0$, avem

$$\left(\frac{d^{2n}x}{du^{2n}} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{2n+1}x}{du^{2n+1}} \right)_0 = (-1)^n;$$

de unde seria

$$x = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots = \sin u.$$

III. — INTEGRALA ELIPTICĂ DE SPEȚA I.

385. Să considerăm integrala eliptică de speța I

$$(1) \quad u(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

$f(x)$ fiind un polinom de gradul 3 sau 4¹⁾.

¹⁾ Printr'o substituțiune liniară se poate trece dela un caz la celalt. Astfel dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 4 și a un zero simplu al acestui polinom, punând

$$(1) \quad x - a = \frac{1}{t},$$

obținem egalitatea

$$(2) \quad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = - \frac{dt}{\sqrt{f_1(t)}},$$

în care $f_1(t)$ este un polinom de gradul 3.

Viceversa. Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 3 și a un număr diferit de zerurile sale, aplicând substituțiunea (1) obținem egalitatea (2), în care avem

$$f_1(t) = t \left[f(a)t^3 + f'(a)t^2 + \frac{f''(a)}{2!}t + \frac{f'''(a)}{3!} \right], \quad f(a) \neq 0.$$

Prin substituțiunea (1), fiecărui zero al lui $f(x)$ diferit de a corespunde câte un zero al lui $f_1(t)$, iar punctului $x = a$ corespunde punctul $t = \infty$. Unul din punctele critice ale radicațului $\sqrt{f_1(t)}$ este așa dar punctul ∞ .

Să presupunem $f(x)$ de gradul 4 și fie

$$(2) \quad f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4),$$

a_1, a_2, a_3, a_4 fiind patru puncte distincte. Să presupunem punctul x_0 , origina integralei, diferit de aceste puncte. În punctul x_0 radicalul are două valori distincte, egale și de semne contrarii. Adoptând una din ele ca valoare inițială, pe care o reprezentăm prin $\sqrt{f(x_0)}$, radicalul va fi bine determinat dealungul unei curbe oarecari, ce nu trece prin puncte critice.

Să presupunem punctele a_1, a_2, a_3, a_4 , numerotate în ordinea în care ele sunt întâlnite de o rază vectoare, care se învârtă în jurul lui x_0 în sensul pozitiv și să introducem contururile elementare (x_0, a_1) , (x_0, a_2) , (x_0, a_3) , (x_0, a_4) (fig. 73).

Fie

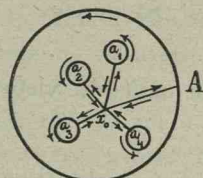


Fig. 73

$$2A_1, 2A_2, 2A_3, 2A_4,$$

valorile integralei (1) luate după aceste contururi, valoarea inițială a radicalului fiind $\sqrt{f(x_0)}$. Integrala după cercurile descrise în jurul punctelor de ramificațiune tinde către zero împreună cu raza acestor cercuri, căci produsul

$$\left| (x - a_k) \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right| \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

tinde către zero când $|x - a_k|$ tinde către zero. De unde rezultă că avem

$$A_1 = \int_{x_0}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, A_2 = \int_{x_0}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, A_3 = \int_{x_0}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, A_4 = \int_{x_0}^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Aceste patru integrale nu sunt independente între ele. În adevăr, din x_0 ca centru cu o rază R destul de mare să descriem un cerc (R) care să cuprindă toate punctele critice. Să considerăm, de o parte, drumul format de cele patru contururi elementare descrise în ordinea indicilor și, de altă parte, drumul format de raza $x_0 A$, de cercul (R) urmat de raza Ax_0 . Integralele luate după cele două drumuri, în sensul pozitiv, sunt egale, căci în aria cuprinsă între aceste două drumuri funcțiunea de sub semnul $\sqrt{f}$ este olomoră. Însă integralele $(x_0 A)$ și (Ax_0) se distrug, radicalul $\sqrt{f(x)}$ trecând prin aceleași valori în ambele sensuri și integrala după cerc tinde către zero, când raza cercului tinde către infinit, căci produsul $\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ tinde către zero în același timp. Valoarea integralei după

cercul (R) fiind independentă de mărimea razei R^1), rezultă că această integrală este nulă. De unde rezultă, suprimând factorul 2, relațiunea căutată

$$(3) \quad A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0.$$

Semnele alternative cari figurează în această egalitate provin din faptul că după ce se descrie un contur elementar, radicalul își schimbă semnul, astfel că conturul următor este descris cu o valoare inițială egală și de semn contrar.

Să punem

$$A_2 - A_1 = \omega, \quad A_3 - A_2 = \omega';$$

de unde, în virtutea relațiunii precedente,

$$A_3 - A_4 = \omega.$$

Aceste egalități ne dau valorile constantelor $A_1, \dots, A_4$, în funcțiune de una din ele, de exemplu A_1 și de ω și ω' ; avem

$$(4) \quad A_2 = A_1 + \omega, \quad A_3 = A_1 + \omega + \omega', \quad A_4 = A_1 + \omega'.$$

Să observăm că ω și ω' sunt independente de punctul x_0 , ales ca origină a conturilor elementare. Astfel cantitatea

$$2\omega = 2(A_2 - A_1)$$

este egală cu valoarea integralei (1) luată după o curbă închisă, descrisă în sensul negativ, care trece prin x_0 și nu conține în interiorul

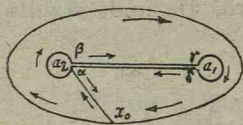


Fig. 74

său alte puncte critice decât punctele a_1 și a_2 . Această curbă însă se poate înlocui, precum se recunoaște lesne, prin conturul $a(a_2)\beta\gamma(a_1)\delta a$ (fig. 74). Făcând să tindă către zero razele celor două cercuri, ale căror centre sunt punctele a_1 și a_2 , și ținând seamă că la limită integrala după $\beta\gamma$ este

egală și de același semn cu integrala după δa , rezultă egalitatea

$$(5) \quad \omega = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

integrala fiind luată după dreapta care unește a_1 cu a_2 pe țărmul care se află de aceeași parte a dreptei ca punctul x_0 . În același mod obținem

$$(6) \quad \omega' = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

¹⁾ Ea este egală cu valoarea integralei după conturile elementare.

Cantitățile 2ω , $2\omega'$ se numesc *perioadele* integralei eliptice date. Vom vedea mai departe că raportul lor este imaginar.

Cu ajutorul formulelor (4) se recunoaște că integrala eliptică luată după o curbă închisă, care conține în interiorul său două puncte critice oarecari, este egală cu o perioadă sau cu o sumă de perioade; căci expresiunea unei asemenea integrale este de forma

$$2(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta), \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \quad \alpha \neq \beta.$$

De unde rezultă că asociând punctele critice două câte două, în diferite moduri, pentru a forma un sistem de două perioade, orice sistem de perioade se exprimă printr'o sumă de multiple a celor dintâi.

Din cele ce preced conchidem că integrala eliptică de speța I este finită în tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$, având în fiecare punct o infinitate de valori. Să reprezentăm prin u_0 valoarea integralei (1) luată după un drum determinat (drumul direct), care duce dela x_0 la x . Orice alt drum, care unește aceleași puncte, poate fi înlocuit prin drumul direct, precedat de contururi elementare descrise într'o ordine convenabilă. Două cazuri se pot prezintă, după cum numărul acestor contururi elementare este par sau impar. În cazul întâi, valoarea radicalului, după ce x descrie toate contururile, este egală cu valoarea inițială $\sqrt{f(x_0)}$; prin urmare

$$u = u_0 + 2m\omega + 2n\omega',$$

m și n fiind numere întregi. În cazul al doilea, valoarea integralei, după descrierea conturilor elementare, este $2m\omega + 2n\omega' + 2A_1$ și în același timp radicalul devine $-\sqrt{f(x_0)}$. Cu acest radical, ca valoare inițială, obținem, dealungul drumului direct, pentru integrală, valoarea $-u_0$; prin urmare valoarea integralei u după drumul total este

$$u = 2A_1 - u_0 + 2m\omega + 2n\omega'.$$

În rezumat, totalitatea valorilor de cari integrala (1) este susceptibilă într'un punct x , este dată de expresiunile

$$(7) \quad u = \begin{cases} u_0 + 2m\omega + 2n\omega', \\ 2A_1 - u_0 + 2m\omega + 2n\omega'. \end{cases}$$

Dacă origina x_0 coincide cu punctul critic a_1 , avem $A_1 = 0$ și formulele de mai sus se înlocuiesc prin următoarele

$$u = \pm u_0 + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Forma analitică a integralei în domeniul unui punct oarecare, situat la distanță finită sau la infinit, se obține, dezvoltând func-

țiunea de sub semnul f , în domeniul considerat și integrând, precum am văzut (§ 381). Din aceste dezvoltări se conchide, ținând seamă de egalitățile (7), că integrala $u(x)$ este o funcțiune analitică multi-formă având o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele, modificând drumul de integrațiune într'un mod convenabil.

386. Să presupunem polinomul de gradul al treilea și fie

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Reprezentând prin 2ω , $2\omega'$ perioadele relative la punctele critice (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , avem

$$\omega = \int_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}, \quad \omega' = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}.$$

Toate perioadele ce se pot obține luând integrala între două puncte critice oarecari, inclusiv punctul $x = \infty$, se reduc la cele dintâi două. Astfel avem

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} \\ &+ \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} = \omega + \omega'. \end{aligned}$$

Să evaluăm și integrala luată între punctul ∞ și unul din celelalte puncte critice, de exemplu a_1 , după o linie care să nu taie dreapta $(a_2 a_3)$. Pentru aceasta să descriem un cerc (R) din origină ca centru cu o rază R foarte mare, care să cuprindă în interiorul său punctele a_1, a_2, a_3 și să considerăm conturul

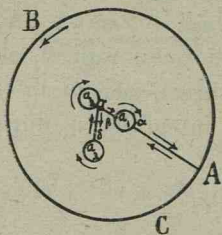


Fig. 75

$$Aa\beta\gamma\delta(a_3)\delta\gamma(a_2)\gamma\beta\epsilon aABCA,$$

A, B, C fiind pe cercul (R) (fig. 70). Integrala luată după acest contur este nulă. Însă în punctul A, după ce x descrie cercul (R), radicalul își schimbă semnul, pe când pe linia $\beta\gamma$ radicalul trece prin aceleași valori la ducere și la întoarcere. De unde rezultă

$$(\beta\gamma) + (\gamma\beta) = 0, \quad (Aa) + (aA) = 2(Aa).$$

Trecând la limită ($R = \infty$), obținem

$$2 \int_{a_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2 \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\omega'.$$

În mod analog, se obțin egalitățile

$$\int_{a_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{a_1}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \int_{a_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

387. Raportul perioadelor $\frac{\omega'}{\omega}$ este imaginar.

Observare preliminară. Suma a două cantități complexe OA, OB, fiind reprezentată prin diagonala paralelogramului construit pe laturile OA, OB, punctul care figurează suma este situat în interiorul unghiului AOB. De unde rezultă că fiind dat un număr oarecare de cantități complexe, dacă punctele cari figurează aceste cantități sunt situate în interiorul unghiului al cărui vârf este punctul O, suma lor va fi reprezentată printr'un punct situat în interiorul aceluiaș unghi și prin urmare argumentul său va fi cuprins între cel mai mic și cel mai mare din argumentele termenilor. Rezultatul se aplică evident unui număr nelimitat de termeni formând o serie convergentă și prin urmare unei integrale definite.

Să venim acum la teorema enunțată mai sus și să presupunem, ceea ce este totdeauna posibil, integrala adusă la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3}},$$

în care polinomul de sub radical este de gradul al treilea. Fie a_1, a_2 două din rădăcinile acestui polinom; substituțiunea

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)t$$

transformă integrala propusă într-o integrală care, abstracțiune făcând de un factor constant și înlocuind t prin x , este de forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}},$$

a fiind o constantă diferită de 0 și 1.

Vom considera dar integrala sub forma precedentă și fie

$$(1) \quad \omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}, \quad \omega' = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}},$$

jumătățile a două din perioadele sale, integralele fiind rectilinii. Pentru ca aceste integrale să fie bine determinate este necesar a fixa valoarea inițială a fiecăreia din cele două radicale și ca pe drumurile de integrațiune să nu se găsească nici un punct critic. Ultima condițiune va fi împlinită dacă a este diferit

de un număr real mai mic ca 1. Să facem o tăietură dealungul axei reale, cuprinsă între punctele $x = 1$ și $x = -\infty$, tăietură prin care a privit ca punct variabil să nu treacă. Adoptând pentru argumentul lui a valoarea zero când a este real și pozitiv, acest argument va fi cuprins între $-\pi$ și $+\pi$.

Vom determina radicalul în prima integrală luând argumentele lui x și $(1-x)$ egale cu 0 și valoarea inițială a argumentului lui $(a-x)$ egală cu $\arg a$. Pentru ca să trecem dela ω la ω' vom evita punctul $x = 1$, printr'un arc de cerc infinit mic având centrul în acest punct și descris în sensul negativ în raport cu aria interioară acestui cerc. Cu modul acesta, valoarea inițială a argumentului în a doua integrală va fi complet determinată.

Dacă a este real și mai mare ca 1, teorema ce voim să demonstrăm este evidentă; căci avem expresiuni de forma

$$(2) \quad \omega = A, \quad \omega' = iB,$$

A și B fiind cantități reale și pozitive.

I. Să presupunem punctul a situat deasupra axei reale și fie α argumentul lui. Să considerăm triunghiul $(01a)$ ale cărui vârfuluri sunt 0, 1 și a și fie β și γ unghiurile

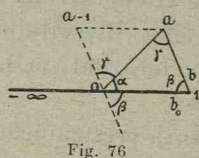


Fig. 76

le $\widehat{01a}$, $\widehat{1a0}$ (fig. 76).

Valoarea argumentului diferențialei

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}$$

la începutul laturei $(0, 1)$ este egală cu valoarea inițială a argumentului factorului $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$, adică $-\frac{\alpha}{2}$. Când x descrie segmentul $(0, 1)$ argumentele lui x , $(1-x)$ și dx rămând constante și egale cu zero, pe când argumentul lui $(a-x)$ crește cu unghiul γ ¹⁾; prin urmare avem

$$\arg \left[\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \right]_{x=1} = -\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

De unde rezultă (Observarea preliminară) că argumentul lui ω este cuprins între $-\frac{\alpha}{2}$ și $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Putem dar scrie

$$(3) \quad \arg \omega = -\frac{\alpha}{2} - \theta \frac{\gamma}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

¹⁾ Punctul $(a-x)$ descrie segmentul $(a, a-1)$ egal paralel și de sens invers cu segmentul $(0, 1)$.

Să calculăm argumentul lui ω' . Când x descrie arcul b_0b , punctul $x' = 1 - x$ descrie, în sensul negativ, un arc egal, având centrul în 0; prin urmare, în punctul b , $\arg(1 - x) = -\beta$; de unde, în același punct,

$$\arg \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\beta}{2}.$$

Dealungul arcului considerat argumentele lui x și $(a - x)$ variază infinit de puțin și la limită variațiunea lor este nulă. De altă parte, dealungul laturii $(1, a)$ argumentul lui dx fiind constant și egal cu $\arg(a - 1) = \pi - \beta$, rezultă că la începutul laturei $(1, a)$ avem

$$\begin{aligned} \arg \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}(a-x)} &= -\frac{a+\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \pi - \beta \\ &= \pi - \frac{a+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dealungul laturii $(1, a)$ $\arg x$ variază dela 0 la a ; prin urmare $\arg \frac{1}{\sqrt{x}}$ crește cu $-\frac{a}{2}$. Celelalte argumente rămânând constante dealungul acestei laturi, avem în punctul a

$$\arg \left[\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}(a-x)} \right]_{x=a} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

Prin urmare $\arg \omega'$ este cuprins între $\frac{\pi-a}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ și putem scrie

$$(4) \quad \arg \omega' = \frac{\pi-a}{2} + \theta_1 \frac{a}{2}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Scăzând una din alta egalitățile (3) și (4) obținem

$$(5) \quad \arg \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\theta_1 a + \theta_2 \gamma).$$

Însă $0 < a + \gamma < \pi$, prin urmare

$$(6) \quad \frac{\pi}{2} < \arg \frac{\omega'}{\omega} < \pi.$$

II. Să presupunem punctul a dedesubtul axei reale (fig. 77); avem

$$\arg a = -a, \quad \arg \left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}(a-x)} \right) = \frac{a}{2}.$$

Dealungul segmentului $(0, 1)$ argumentul lui $(a - x)$ variază dela

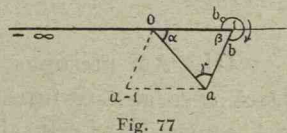


Fig. 77

— a până la $\arg(a-1) = -(\pi - \beta)$; prin urmare, x variând dela 0 la 1, avem

$$\arg \left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \right)_{x=1} = \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{a + \gamma}{2}.$$

De unde rezultă

$$(7) \quad \arg \omega = \frac{a}{2} + \theta \frac{\gamma}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Pentru determinarea perioadei ω' , evităm punctul $x = 1$, conform convențiunii de mai sus, printr'un arc b_0b exterior unghiului $\widehat{01a} = \beta$; argumentul lui $1 - x$ în punctul b este așa dar $-(2\pi - \beta)$. Prin urmare în acest punct avem

$$\arg \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \pi - \frac{\beta}{2}.$$

Pe latura $(1, a)$ argumentul diferențialei dx este constant

$$= \arg(a-1) = -(\pi - \beta);$$

prin urmare în punctul $x = 1$, considerat pe această latură, avem

$$\arg \left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \right)_1 = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Când x descrie latura considerată, argumentul său variază dela zero la $-a$; avem dar, în punctul $x = a$,

$$\arg \left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \right)_a = \frac{\pi + a}{2}.$$

De unde conchidem egalitatea

$$(8) \quad \arg \omega' = \frac{\pi}{2} + \theta_1 \frac{a}{2}.$$

Din egalitățile (7) și (8) rezultă dubla inegalitate

$$(9) \quad 0 < \arg \frac{\omega'}{\omega} < \frac{\pi}{2}.$$

III. Am presupus punctul a în afară de tăietura $(1, -\infty)$. Dacă a se găsește într'un punct oarecare al tăieturii diferit de 0 și 1, convenim a-l privi situat pe țărmul pozitiv sau negativ. Valorile corespunzătoare ale lui ω și ω' sunt limitele către cari tind integralele (1), când a fiind deasupra axei reale tinde către țărmul pozitiv, sau fiind dedesubtul acestei axe tinde către țărmul negativ; $\arg \frac{\omega'}{\omega}$ rămâne respectiv cuprins între limitele (6) și (9).

388. Rezultatul din urmă se poate obține direct; este de ajuns să evităm într'un mod convenabil punctele critice care se află pe drumul de integrațiune ale integralelor (1). Este interesant să facem acest calcul.

1^o. Să presupunem mai întâi $0 < a < 1$. Vom evita, în calculul lui ω , punctul a printr'un semicerc cu o rază a cărei limită este zero, situat dedesubtul axei reale sau deasupra axei, după cum privim acest punct ca fiind pe țărmul pozitiv sau negativ al segmentului $(0, 1)$. De unde rezultă că dacă argumentul lui $(a - x)$ este nul în intervalul $(0, a)$, el va fi respectiv egal cu $\pm \pi$ în intervalul $(a, 1)$ (fig. 78, fig. 79); prin urmare, în acest interval, vom avea respectiv $\sqrt{a - x} = \pm i \sqrt{x - a}$, după cum a este pe țărmul pozitiv sau negativ.

Să considerăm argumentul lui $(1 - x)$. Acest argument este luat, ca și argumentul lui x , egal cu zero în expresiunea lui ω ; el

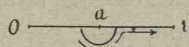


Fig. 78

va fi dar, în expresiunea lui ω' , egal cu zero sau cu -2π , după cum punctul a este pe țărmul pozitiv sau negativ (fig. 2);

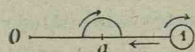


Fig. 79

căci, conform convențiunei pentru determinarea lui ω' , în cazul întâi x descrie segmentul $(1, a)$ fără a înconjură punctul 1 (fig. 78), iar în cazul al doilea x descrie acest segment după ce a înconjurat punctul 1 în sensul negativ (fig. 79): rezultat ce concordă cu formulele din cazurile I și II în cari facem $\beta = 0$.

Din cele ce preced rezultă tabloul următor:

1^o. a pe țărmul $+$ și $a < x < 1$ (fig. 78)

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \omega &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \\ &\quad - i \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = A - iB, \\ \omega' &= \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\ &= i \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = iB; \end{aligned} \right.$$

2^o. a pe țărmul $-$ și $a < x < 1$ (fig. 79); $\arg \sqrt{1-x} = -\pi$

în expresiunea lui ω' ,

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \omega &= \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} + i \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = A + iB, \\ \omega' &= i \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = iB. \end{aligned} \right.$$

Radicalele din membrele din urmă fiind toate reale și pozitive, rezultă că A și B sunt cantități reale și pozitive. Coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ este, în ambele sisteme, egal cu cantitatea pozitivă

$$\frac{AB}{A^2 + B^2}.$$

Să presupunem $a < 0$. În acest caz, argumentul lui $(a - x)$ rămâne invariabil și egal cu argumentul lui a , adică egal, ca și în cazul precedent, cu $\pm \pi$, după cum a este pe țărmul pozitiv sau negativ. Argumentul lui x fiind pentru $x > 0$ egal cu zero, va fi, în intervalul $(0, a)$ egal cu argumentul lui a ; căci punctul critic $x = 0$ este ocolit printr'un semicerc situat deasupra sau dedesubtul axei reale, după cum punctul a este deasupra sau dedesubtul acestei axe

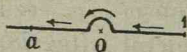


Fig. 80

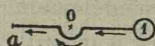


Fig. 81

(fig. 80, fig. 81). Dealungul segmentului $(0, a)$ vom avea dar respectiv

$$\sqrt{x} = \pm i \sqrt{-x},$$

radicalul din membrul al doilea fiind real și pozitiv.

În fine, $\arg(1-x)$ este nul în expresiunea lui ω ; iar în expresiunea lui ω' , acest argument este nul sau egal cu -2π , după cum $\arg a = \pm \pi$, pentru același motiv ca mai sus.

De unde rezultă tabloul următor:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} 3^\circ. \arg a = \pi, \\ \omega &= \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = -iA, \\ \omega' &= \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\ &\quad - \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\ &\quad + \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = iA + B. \end{aligned} \right.$$

4^o. $\arg a = -\pi$,

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \omega &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = iA, \\ \omega' &= \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\ &\quad - \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = iA - B. \end{aligned} \right.$$

Cantitățile A și B fiind reale și pozitive, coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ este cantitatea pozitivă

$$\frac{B}{A}.$$

389. În rezumat, din toate cele ce preced, rezultă că oricare ar fi valoarea lui x , diferită de zero, 1 sau infinit, coeficientul lui i în raportul lui $\frac{\omega'}{\omega}$ este diferit de zero. Ceva mai mult, dacă perioadele sunt determinate în modul cum s'a zis mai sus, coeficientul considerat este totdeauna pozitiv.

390. Să studiem, în mod special, integrala eliptică sub forma normală a lui Legendre

$$(1) \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

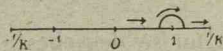


Fig. 82

în cazul când *modulul* k este real și mai mic ca 1. Putem să-l presupunem pozitiv, căci figurează sub radical numai prin pătratul său. Punctele critice sunt toate situate pe axa reală. Să le dispunem în ordinea

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{k}, \quad a_4 = -\frac{1}{k}.$$

Să luăm valoarea inițială a radicalului, în punctul $x = 0$, egală cu $+1$ și să notăm cu $2K$, iK' semiperioadele reprezentate mai sus prin ω și ω' . Vom avea

$$(2) \quad \omega = 2K = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$(3) \quad \omega' = iK' = \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}};$$

radicalul din urmă este pozitiv ca și cel inițial, căci presupunem punctul critic $x = 1$ evitat printr'un semicerc situat deasupra axei reale. Constantele

$$(4) \quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

și

$$(5) \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

sunt așa dar reale și pozitive și raportul $\frac{\omega'}{\omega} = i \frac{K'}{K}$ este pur imaginar, având coeficientul lui i pozitiv.

Să introducem modulul *complementar* k' , definit de egalitatea

$$(6) \quad k^2 + k'^2 = 1$$

și să facem în integrala din urmă o schimbare de variabilă, punând

$$(7) \quad k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1.$$

Efectuând calculele, obținem expresiunea

$$(8) \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

care nu se deosebește de expresiunea (4) a lui K decât prin aceea că modulul k este înlocuit prin complementarul său k' .

Cu notațiunile precedente, valorile integralei u într'un punct x vor fi date (formulele (7), § 385) de expresiunile

$$(9) \quad u = \begin{cases} u_0 + 4mK + 2niK', \\ 2K - u_0 + 4mK + 2niK', \end{cases}$$

u_0 fiind una din valorile integralei în acel punct

Este interesant de observat analogia ce există între expresiunile precedente, relative la perioada $4K$ și acelea relative la perioada 2π cari dau valorile lui $\arcsin x$. De altminterlea, pentru $k = 0$, avem $K = \frac{\pi}{2}$ și integrala eliptică considerată coincide cu funcțiunea $\arcsin x$.

391. *Transformarea planului (x) în planul (u).* Să limităm planul variabilei (x) prin două tăieturi făcute dealungul axei reale, una dela $+1$ la $+\infty$, cealaltă dela -1 la $-\infty$. În acest plan fiecare

ramură a integralei

$$(1) \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \left(\begin{array}{l} k \text{ real} \\ 0 < k < 1 \end{array} \right)$$

este o funcțiune olomorfă. Vom considera ramura care se anulează pentru $x = 0$. Avem pentru această ramură, egalitatea

$$(2) \quad u(-x) = -u(x).$$

Din origină ca centru cu o rază foarte mare R , precum și din punctele critice ca centre cu o rază foarte mică r , să descriem semicercuri, toate situate deasupra axei reale (fig. 82). Să considerăm conturul format din aceste semicercuri și din segmentele axei reale cuprinse între ele. Avem

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -K.$$

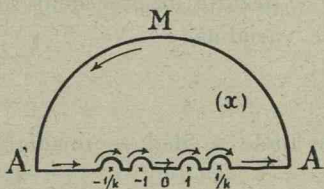


Fig. 83

Dealungul segmentelor $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{k}\right)$ avem respectiv expresiunile

$$(3) \quad \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \mp i \sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)},$$

iar dacă x se găsește pe unul din segmentele $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$ sau $\left(-\frac{1}{k}, -\infty\right)$ avem în ambele cazuri

$$(4) \quad \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = -\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)},$$

radicalele din membrul al doilea fiind reale și pozitive.

De unde rezultă

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_1^{+\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = iK',$$

$$\int_{-\frac{1}{k}}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = - \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

radicalele fiind determinate conform egalităților (3) și (4).

Integrala propusă, luată în sensul pozitiv dealungul conturului complet, se reduce așa dar, pentru $r = 0$ și $R = \infty$, la

$$2K - 2 \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}.$$

Însă în aria limitată de acest contur funcțiunea de integrat fiind olomorfă, integrala totală este nulă; de unde rezultă egalitatea

$$(x) \quad \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = K.$$

Rezultatul precedent se mai poate obține făcând schimbarea de variabilă

$$kx = \frac{1}{z};$$

de unde se deduce imediat egalitatea

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Să notăm valoarea integralei u luată dealungul axei reale dela $x = 0$ până la $x = +\infty$, evitând punctele critice prin semicercurile infinit mici cari fac parte din conturul considerat. Cele trei segmente rectilinii $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{k})$, $(\frac{1}{k}, \infty)$ dând respectiv valorile K , iK' , $-K$, avem

$$(6) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = iK'.$$

Este de observat că putem înlocui drumul de integrațiune precedent prin o rază nelimitată oarecare dusă din origină și situată în semiplanul superior, fără a schimba valoarea integralei. Căci în sectorul format de o asemenea rază și de drumul primitiv, radicalul este olomorf și integrala, dealungul unui arc al cercului (R), tinde către zero când R tinde către infinit.

Cu ajutorul rezultatelor precedente obținem conturul ce descrie u când x descrie conturul considerat. Dealungul segmentelor $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{k})$, $(\frac{1}{k}, +\infty)$ integrala u este respectiv de forma

$$t, K + it, K + iK' - t,$$

t fiind o variabilă reală, care variază neconținut în același sens, în primul interval dela 0 la K , în al doilea de la 0 la K' și în al treilea dela 0 la $-K$.

Axei reale negative (x) corespund pentru u valori simetrice cu cele precedente în raport cu axa sa imaginară. De unde rezultă că făcând $R = \infty$, axa reală (x) din care se exclud punctele critice prin semicercuri infinit mici, situate deasupra acestei axe, se transformă punct cu punct într'un dreptunghi ale cărui vârfuri sunt punctele $u = \pm K$, $u = \pm K + iK'$.

Nu este inutil a ne da seamă în ce se transformă semicercurile relative la punctele critice, înainte de a se reduce la zero, precum și în ce se transformă semicercul (R) înainte ca R să devie infinit.

Fie a unul din cele patru puncte critice; avem, în domeniul acestui punct

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = (x-a)^{-\frac{1}{2}} [A_0 + A_1(x-a) + \dots], \quad A_0 \neq 0.$$

Prin urmare, reprezentând prin u_0 valoarea lui u în punctul $x = a$, drumul descris de u va diferi infinit puțin de drumul dat de expresiunea

$$(8) \quad u - u_0 = 2A_0(x-a)^{\frac{1}{2}},$$

care reprezintă, când x descrie semicercul relativ la punctul $x = a$, un cadran cu centrul în u_0 descris în același sens și situat în interiorul dreptunghiului obținut mai sus. Raza acestui cerc tinde către zero, împreună cu $|x-a|$.

În domeniul punctului $x = \infty$, ramura considerată este reprezentată prin dezvoltarea

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{1}{k} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^4} + \dots \right];$$

de unde rezultă că drumul descris de u , când x descrie semicercul (R), diferă infinit puțin de drumul dat de expresiunea

$$(10) \quad u - iK' = \frac{1}{kx},$$

adică de un semicerc descris în sens invers, având centrul în punctul $u = iK'$ și situat în interiorul dreptunghiului. Acest semicerc se reduce la centrul său, când R tinde către infinit. (Fig. 84).

Figura reprezintă conturul integralei u în care se transformă con-

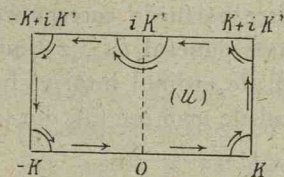


Fig. 84

turul considerat al lui x . În aria limitată de conturul (x) , u fiind funcțiune olomoră de x ¹⁾ și conturile acestor variabile corespunzându-se punct cu punct, rezultă că ariile ce ele limitează sunt transformate într'un mod conform una în cealaltă. Făcând $r = 0$, $R = \infty$, conchidem că semiplanul situat deasupra axei reale (x) se transformă într'un mod conform în dreptunghiul (u) .

Axa reală a variabilei (x) , din care excludem punctele critice prin semicercuri infinit mici situate dedesubtul ei, se transformă punct cu punct în perimetrul unui dreptunghi simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală (u) . Conchidem că semiplanul (x) , situat dedesubtul axei reale (x) , se transformă în mod conform într'un dreptunghi simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală a variabilei u .

Intr'un cuvânt, tot planul (x) limitat de cele două tăieturi $(-1, -\infty)$ și $(+1, +\infty)$ se transformă într'un mod conform în dreptunghiul (fig. 84) ale cărui vârfuri sunt

$$u = -K \pm iK', \quad u = K \pm iK'.$$

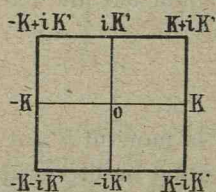


Fig. 85

Dimensiunile acestui dreptunghi sunt $2K, 2K'$.

392. Inversiunea integralei

$$(1) \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Să considerăm în planul (u) dreptunghiul (fig. 84) având vârfurile $\pm K, \pm K + iK'$, din care excludem aceste vârfuri precum și punctul $u = iK'$. Din reprezentarea conformă a ariei astfel limitată și a ariei (x) corespunzătoare, (fig. 83) în interiorul căreia u este o funcțiune olomoră, rezultă, viceversa (§ 358), că $x = \varphi(u)$ este o funcțiune olomoră în interiorul dreptunghiului (u) . Această funcțiune tinde către $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ când u tinde într'un mod oarecare către vârfurile corespunzătoare ale dreptunghiului. Când u tinde către punctul iK' , x tinde către infinit. Punctul $u = iK'$ este un pol de ordinul întâi al funcțiunii $x = \varphi(u)$. În adevăr, integrând ambele membre (9), din paragraful precedent, obținem, în domeniul

¹⁾ $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ fiind funcțiune olomoră în interiorul conturului simplu, rezultă că integrala este funcțiune olomoră în acest contur (§ 294).

lui $x = \infty$, dezvoltarea

$$(2) \quad u - iK' = \frac{1}{kx} \left[1 + \frac{A}{3x^2} + \dots \right];$$

de unde, prin inversiune,

$$(3) \quad \frac{1}{kx} = u - iK' + a_1(u - iK')^3 + a_2(u - iK')^5 + \dots^{1)}.$$

Prin urmare, în domeniul punctului $u = iK'$, avem seria

$$(4) \quad x = \frac{1}{k(u - iK')} + P(u - iK'),$$

care arată că punctul $u = iK'$ este un pol de ordinul întâi și reziduul corespunzător $\frac{1}{k}$.

Funcțiunea $\varphi(u)$, olomorfă în interiorul dreptunghiului considerat (u) din al cărui contur se exclude polul $u = iK'$, fiind reală dealungul laturilor dreptunghiului, se prelungește în afară, primind valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu fiecare din aceste laturi. De unde rezultă că funcțiunea $x = \varphi(u)$ este uniformă în dreptunghiurile egale cu cel dintâi, având cu el o latură comună; în fiecare din aceste dreptunghiuri $\varphi(u)$ n'are alt punct singular decât un pol corespunzător polului iK' și, prin urmare, această funcțiune este uniformă în dublul dreptunghi format din cel dintâi și unul oarecare din celelalte patru.

Să considerăm, de exemplu, dreptunghiul din fig. 85. În acest dreptunghi funcțiunea este uniformă și primește orice valoare o singură dată, exceptând punctele situate pe laturile paralele cu axa reală: pe aceste laturi, în punctele simetrice în raport cu axa reală, ea primește valori egale; căci pe latura superioară valorile sale sunt reale și pe latura inferioară ele sunt respectiv imaginare conjugate cu cele dintâi.

Pentru motive identice de simetrie, dreptunghiul cu vârfurile

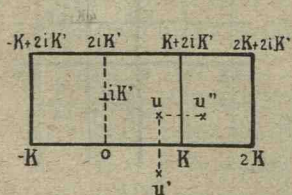


Fig. 86

($\pm K_1 \pm K + 2iK'$) (fig. 86) satisface aceleași condițiuni. Să numim Δ acest dreptunghi. Fie

$$u = \alpha + i\beta$$

un punct situat în acest dreptunghi; punctele simetrice cu u respectiv cu axa reală și cu latura

($K, K + 2iK'$) sunt respectiv

$$u' = \alpha - i\beta, \quad u'' = 2K - \alpha + i\beta = 2K - u'.$$

În aceste două puncte funcțiunea $\varphi(u)$ având valori imaginare conjugate cu valorile sale în punctul u , rezultă $\varphi(u'') = \varphi(u')$, adică egalitatea

$$(5) \quad \varphi(2K - u) = \varphi(u).$$

În virtutea acestei egalități, semidreptunghiul din Δ situat la stânga axei imaginare și dreptunghiul egal

$$(K, 2K, K + 2iK', 2K + 2iK') \text{ (fig. 85)}$$

sunt *echivalente*, adică unui punct u al unuia corespunde un punct v al celuilalt, legate între ele prin relațiunea

$$(6) \quad u + v = 2K,$$

astfel că avem egalitatea

$$(7) \quad \varphi(u) = \varphi(v).$$

De unde rezultă că dreptunghiul D , ale cărui laturi sunt segmentul $(0, 2K)$ al axei reale și segmentul $(0, 2iK')$ al axei imaginare (fig. 87), constituie ca și Δ un domeniu fundamental al funcțiunei $x = \varphi(u)$.

Un al doilea dreptunghi D' , având cu el latura comună $(2K, 2K + 2iK')$, constituie de asemenea, în virtutea simetriei și a prelungirii analitice, un domeniu fundamental al

funcțiunei $\varphi(u)$.

Să considerăm dreptunghiul $D = D + D'$, format din ambele dreptunghiuri D, D' . În acest dreptunghi (fig. 87) ale cărui vârfuri sunt punctele $0, 4K, 2iK', 4K + 2iK'$, funcțiunea $x = \varphi(u)$ este uniformă și trece de două ori prin aceeași valoare. Punctele u, v ale acestui dreptunghi, în care funcțiunea are aceeași valoare, sunt legate între ele prin relațiunea (6).

Pe laturile opuse ale dreptunghiului, în puncte situate pe aceeași paralelă la celelalte laturi, funcțiunea are valori egale.

Să ne închipuim că ducem paralele la laturile dreptunghiului D prin punctele $u = 4mK + 2niK'$, m și n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Vom acoperi astfel, într'un mod complet, planul (u) printr'o rețea de dreptunghiuri egale în cari funcțiunea $x = \varphi(u)$ se comportă ca în cel dintâiu (fig. 88).

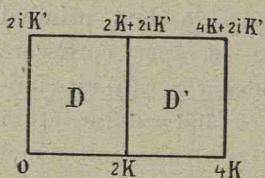


Fig. 87

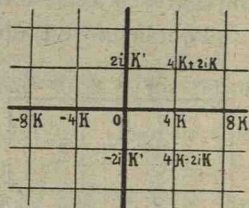


Fig. 88

Funcțiunea $x = \varphi(u)$ este așa dar o funcțiune uniformă în tot planul (u), satisfăcând ecuațiunile

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(u + 4mK + 2niK') = \varphi(u), \\ \varphi(-u + (4m + 2)K + 2niK') = \varphi(u). \end{cases}$$

Aceste ecuațiuni corespund formulelor (9) (§ 390), cari dau toate valorile u corespunzătoare aceleiași valori x .

Funcțiunea $\varphi(u)$ este, precum rezultă din ecuațiunea (2) (§ 391), o funcțiune impară

$$(9) \quad \varphi(-u) = -\varphi(u).$$

Această funcțiune fiind nulă pentru $u = 0$, rezultă din ecuațiunile (8) că zerurile acestei funcțiuni sunt date de egalitatea

$$(10) \quad u = 2mK + 2niK'.$$

De asemenea punctul $u = iK'$ fiind un pol al funcțiunei, rezultă din aceleași ecuațiuni că toate polurile sunt cuprinse în formula

$$(11) \quad u = 2mK + (2n + 1)iK'.$$

Funcțiunea $\varphi(u)$ este așa dar o funcțiune analitică uniformă neavând în tot planul alte singularități decât un număr infinit de poluri. Ea este dublu periodică, având perioadele $4K, 2iK'$.

Vom întâlni această funcțiune, pe altă cale, în partea a doua a cursului.

CAPITOLUL XX.

FUNCȚIUNI ANALITICE REPREZINTATE PRIN INTEGRALE DEFINITE ALE CĂROR LIMITE SUNT CONSTANTE.

393. Să reprezentăm prin x și z două variabile complexe independente între ele, figurate în acelaș plan sau în plane diferite și fie $f(x, z)$ o funcțiune analitică de x , olomorfă într'o regiune (A), pe când z descrie o linie dată L, continuă în raport cu z , oricare ar fi pozițiunea lui x în (A). Integrala

$$\int_L f(x, z) dx,$$

a cărei valoare variază în genere cu x , definește o funcțiune $F(x)$, olomoră în aria (A).

În adevăr, fie x_0 un punct oarecare situat în interiorul lui (A) și z un punct oarecare pe linia L. Există, prin ipoteză, un număr $r > 0$ astfel încât în interiorul cercului $|x - x_0| = r$ să avem

$$(1) \quad f(x, z) = f(x_0, z_0) + (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_0 + \dots$$

De unde, integrând ambele membre dealungul liniei L, obținem egalitatea

$$(2) \quad \int_L f(x, z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

coeficienții a_n având valorile

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{n!} \int_L \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{x_0} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dacă cercul $|x - x_0| = r$ nu acoperă toată aria (A), seria din membrul al doilea se va prelungi neapărat în afară din acest cerc; căci neprelungirea acestei serii ar trage după sine imposibilitatea prelungirii seriei (1), ceea ce este contra ipotezei. Această serie dă așa dar naștere unei funcțiuni analitice monogene $F(x)$ în interiorul lui (A). Funcțiunea $F(x)$ este olomoră în (A); căci pe cât timp x nu iese din această arie, coeficienții a_n ai seriei (2) au, în virtutea egalităților (3), în fiecare punct x_0 , valori determinate, independente de drumul ce urmează x când se apropie de x_0 . Teorema este așa dar demonstrată.

394. Integrala considerată

$$\int_L f(x, z) dz$$

constituie o expresiune analitică, care, în diferite regiuni (A), (A'), ... ale planului (x), poate coincide cu diferite funcțiuni analitice. Integrala lui Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x} dz,$$

luată după o curbă închisă C, ne oferă, precum am văzut, un asemenea exemplu.

395. *Derivata integralei.* Din egalitatea (2) rezultă

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_{x_0} = a_1 = \int_L \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{x_0} dz,$$

sau, înlocuind x_0 prin x ,

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \int_L \frac{\delta f}{\delta x} dz;$$

adică derivata integralei se obține derivând funcțiunea de sub semnul f în raport cu x .

396. Să presupunem acum că x în mișcarea lui în planul neli-
mitat, întâlnește un punct x_0 în care funcțiunea $f(x, z)$ încetează
de a fi olomorvă, z fiind un punct oarecare pe linia de integrațiune L .
Integrala corespunzătoare

$$\int_L f(x_0, z) dz$$

ar putea să nu mai aibă sens, sau să devie nedeterminată. De aci
însă nu se poate conchide că punctul $x = x_0$ este un punct singular
al funcțiunii $F(x)$, precum din faptul că o serie întreagă $P(x)$ este
divergentă într'un punct al cercului de convergență nu rezultă că
acest punct este un punct singular al funcțiunii analitice cores-
punzătoare. Nu se poate afirma nimic, într'un mod general.

397. Să considerăm ca exemplu integrala

$$(1) \quad F(x) = \int_a^b \frac{dz}{z-x},$$

$z = a$, $z = b$ fiind două puncte date și integrala fiind rectilinie.
Integrala încetează de a avea sens când x se află pe segmentul ab .
Să considerăm două puncte x' , x'' in-
finit apropiate între ele și situate de
o parte și de alta a acestui segment:
 x' la stânga și x'' la dreapta (fig. 88),
sensul mișcării fiind ab . Să luăm pe
segment două puncte α , β , foarte a-
propiate de punctele x' , x'' și să le unim printr'un arc $\alpha m \beta$, astfel
ca punctul x'' să fie interior ariei formată de segment și de acest

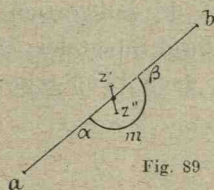


Fig. 89

arc, pe când punctul x' să fie exterior acestei arii. De unde rezultă egalitățile

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'} = \int_{(aam\beta b)} \frac{dz}{z-x'},$$

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x''} = \int_{(aam\beta b)} \frac{dz}{z-x''} - 2i\pi,$$

căci diferența între valorile integralei

$$\int \frac{dz}{z-x},$$

luată respectiv după segmentul ab și după drumul $aam\beta b$ este egală cu valoarea acestei integrale luată după curba închisă $a\beta ma$, descrisă în ordinea literilor ¹⁾.

Scăzând aceste egalități una din alta avem

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''} = 2i\pi + \int_{(aam\beta b)} \left(\frac{1}{z-x'} - \frac{1}{z-x''} \right) dz.$$

Făcând x' și x'' să se apropie infinit de mult între ele, integrala din membrul al doilea nu încetează de a avea sens și limita sa este nulă. De unde rezultă

$$(2) \quad \lim_{x'=x''} \left[\int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''} \right] = 2i\pi.$$

Toate punctele segmentului ab sunt așa dar puncte de discontinuitate ale integralei. Nu este tot așa în ce privește funcțiunea $F(x)$ definită de această integrală. În adevăr, dacă x se apropie de un punct x_0 al segmentului, diferit de punctele extreme a și b , putem deforma drumul de integrațiune astfel ca el să nu treacă prin x_0 . Prin această deformare a drumului valoarea integralei nu se schimbă; de unde se vede că funcțiunea $F(x)$ este continuă în domeniul punctului x_0 .

Modificarea ce se introduce în funcțiunea $F(x)$ când x străbate drumul de integrațiune, atinge numai expresiunea sa analitică cu ajutorul integralei; căci aceasta din urmă își rupe continuitatea. Astfel, dacă $F(x')$ reprezintă valoarea integralei

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'},$$

¹⁾ Funcțiunea de sub semnul $\int$ fiind uniformă, avem

$(aam\beta b) = (aa) + (am\beta a) + (ab) = (ab) + (am\beta a).$

când x' se află, de exemplu, pe țărmul stâng al segmentului, valoarea aceleiaș integrale într'un punct x'' infinit vecin, situat pe țărmul drept, este

$$(3) \quad \int_a^b \frac{dz}{z-x''} = F(x'') - 2i\pi.$$

De unde rezultă că prelungirea funcțiunii $F(x)$, când x străbate drumul de integrațiune dela țărmul stâng la cel drept, se reprezintă prin expresiunea

$$F(x) = \int_a^b \frac{dz}{z-x} + 2i\pi.$$

Ca verificare a acestui rezultat, să observăm că din egalitatea

$$F(x') - F(x'') = \int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''} - 2i\pi,$$

rezultă, în virtutea egalității (2),

$$\lim_{x'=x''} [F(x') - F(x'')] = 0$$

398. Raționamentul de mai sus nu se aplică dacă x_0 coincide cu unul din punctele extreme, a sau b . Să examinăm ce devine funcțiunea $F(x)$, când x plecând dela un punct x' revine la acelaș punct, după ce înconjoară unul din punctele a sau b , de exemplu, punctul a . Putem presupune, fără ca funcțiunea să fie schimbată, că drumul de integrațiune primitiv este înlocuit printr'un drum L având aceleași puncte extreme a, b și trecând infinit aproape de punctul x' , astfel ca acest punct să fie exterior ariei formată de cele două drumuri. (Fig. 89).

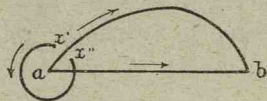


Fig. 90

Să ne închipuim că facem o tăietură în plan, dealungul drumului de integrațiune L , prin care variabila să nu treacă. În tot planul așa limitat, integrala dată este o funcțiune olomorfă și reprezintă aceeaș funcțiune $F(x)$. De unde rezultă că dacă x'' este un punct infinit vecin cu x' , situat pe țărmul opus al tăieturii, vom avea, în virtutea formulei (2),

$$F(x'') = F(x') - 2i\pi,$$

x' fiind presupus situat pe țărmul stâng al tăieturii. Punctul x'

fiind un punct oarecare, putem zice că dacă x descrie o curbă închisă în jurul unuia din punctele a sau b , în sensul pozitiv în raport cu a sau în sensul negativ în raport cu b , funcțiunea $F(x)$ se mărește cu $-2i\pi$. O rotațiune în sens invers mărește funcțiunea cu $+2i\pi$. De unde rezultă că dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte a și b , funcțiunea $F(x)$ se reproduce; ceea ce trebuie să aibă loc, căci $F(x)$ este olomoră în planul limitat de o linie oarecare ce unește punctele a și b .

Toate aceste rezultate sunt confirmate, dacă observăm că $F(x)$ coincide cu o ramură a funcțiunii

$$\log (b-x) - \log (a-x).$$

399. Să considerăm integrala mai generală

$$F(x) = \int_a^b \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

$f(x)$ fiind o funcțiune olomoră în tot planul (x). Procedând ca în exemplul de mai sus, recunoaștem că în două puncte infinit vecine situate de o parte și de alta a drumului de integrațiune, figurate prin acelaș punct geometric x , valorile integralei diferă între ele prin $\pm 2i\pi f(x)$. Punctele extreme a și b sunt singurele puncte singulare ale funcțiunii $F(x)$, definită de integrală. Când x plecând dela un punct x_0 revine la acelaș punct, după ce înconjoară unul din punctele a sau b , $F(x)$ se reproduce mărit cu $\pm 2i\pi f(x_0)$.

400. Să considerăm, ca exemplu de un caracter mai general, integrala

$$(1) \quad F(x) = \int_a^b \frac{G_1(x,z)}{G(x,z)} dz,$$

în care G , G_1 sunt două funcțiuni olomorfe de variabilele independente x și z , integrala fiind luată după segmentul de dreaptă ce unește punctele a și b (*Hermite*, Cours..., *Goursat*, Cours, t. II). Integrala încetează de a avea sens în punctele x cari satisfac ecuațiunea

$$(2) \quad G(x, z) = 0,$$

z fiind un punct oarecare al segmentului ab . Să presupunem că pe când z descrie segmentul ab (fig. 90), una din rădăcinile x ale ecuațiunii precedente descrie o linie L (fig. 91) astfel ca ab și L să se corespundă punct cu punct; ceea ce revine a presupune, precum

vom vedea mai târziu ¹⁾, că unui punct z oarecare al segmentului ab corespunde pe L o rădăcină simplă a ecuațiunii și viceversa, într'un punct oarecare x pe L , ecuațiunea are pe segmentul ab o rădăcină simplă z . Fie $z = \zeta$ un punct al segmentului ab și $x = \xi$ punctul corespunzător pe L . Se va vedea de asemenea că, în ipoteza noastră, rădăcina x care se reduce la ξ pentru $z = \zeta$, este o funcțiune olomorfa de z în domeniul lui ζ și viceversa. De unde rezultă că la două puncte x' și x'' infinit vecine cu ξ , situate de o parte și de alta a liniei L , ecuațiunea (2) face să corespundă două puncte z' și z'' infinit vecine cu ζ , situate de o parte și de alta a segmentului ab . Această propozițiune fiind admisă, să căutăm limita către care tinde diferența

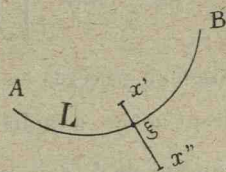


Fig. 91

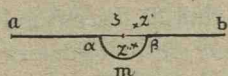


Fig. 92

$$\int_a^b \frac{G_1(x', z)}{G(x', z)} dz - \int_a^b \frac{G_1(x'', z)}{G(x'', z)} dz,$$

când x' și x'' tind către ξ .

Din punctul ζ ca centru să descriem un semicerc $am\beta$ (fig. 92) mărginit de segmentul ab și conținând în interiorul său punctul z'' . Acest punct fiind infinit apropiat de ζ , putem presupune raza cercului destul de mică pentru ca funcțiunea $G(x'', z)$ să nu aibă în interiorul semicercului alt zero decât punctul z'' , care, în virtutea ipotezei, este un zero simplu ²⁾. Să introducem drumul de integrațiune $aam\beta b$. Acest drum echivalează, funcțiunea de sub semnul $\int$ fiind uniformă, cu drumul format de segmentul ab și de curba închisă $am\beta a$ descrisă în sensul pozitiv în raport cu z'' . De aici rezultă că avem egalitățile

$$(3) \quad \int_a^b \frac{G_1(x', z)}{G(x', z)} dz = \int_{aam\beta b} \frac{G_1(x', z)}{G(x', z)} dz,$$

$$(4) \quad \int_a^b \frac{G_1(x'', z)}{G(x'', z)} dz = \int_{aam\beta b} \frac{G_1(x'', z)}{G(x'', z)} dz - 2\pi \mathcal{R}ez_{z'=z''} \frac{G_1(x'', z)}{G(x'', z)}.$$

¹⁾ Funcțiuni implicite.

²⁾ În virtutea ipotezei, $G'_\xi(\xi, \xi) \neq 0$; de unde rezultă că dacă z'' este destul de aproape de ζ , ξ fiind privit constant, $G'_{z''}(\xi, z'') \neq 0$. Privind, în funcțiunea din urmă, z'' const., x'' este cu atât mai aproape de ξ cu cât z'' este mai aproape de ζ ; de unde rezultă $G'_{z''}(x'', z'') \neq 0$.

Scăzând aceste egalități una din alta și trecând la limită: $x' = x'' = \xi$, $z' = z'' = \zeta$, obținem rezultatul căutat

$$(5) \quad \lim_{x' = x'' = \xi} \left[\int_a^b \frac{G_1(x', z)}{G(x', z)} dz - \int_a^b \frac{G_1(x'', z)}{G(x'', z)} dz \right] = 2i\pi \frac{G_1(\xi, \zeta)}{G'_\zeta(\xi, \zeta)}.$$

Așa dar trecerea variabilei x dintr-o parte în cealaltă a liniei L are drept efect a mări integrala propusă cu $\pm 2i\pi \frac{G_1(\xi, \zeta)}{G'_\zeta(\xi, \zeta)}$, ξ fiind punctul pe L prin care trece x și ζ fiind punctul corespunzător pe segmentul ab . Semnul depinde de sensul în care se face trecerea. Din demonstrațiune rezultă că trebuie să luăm semnul $+$ dacă trecerea se face dela x' la x'' , punctul x' fiind situat în acea parte a liniei L ca punctul z' , care îi corespunde, să se găsească pe țărmul stâng al segmentului ab . Toate punctele liniei L sunt prin urmare puncte de discontinuitate ale integralei propuse. O asemenea integrală admite un număr limitat sau nelimitat de linii de discontinuitate, după cum funcțiunea $G(x, z)$ este în raport cu x o funcțiune rațională sau transcendentă.

Să observăm, precum am mai văzut în primul exemplu, că punctele de discontinuitate ale integralei nu sunt neapărat puncte singulare ale funcțiunii $F(x)$, definită de această integrală. În adevăr, dacă x se apropie de un punct ξ al liniei L , diferit de punctele extreme, putem deformă, în mod convenabil drumul de integrațiune și funcțiunea $F(x)$ va fi reprezentată, în domeniul acestui punct, prin integrala luată după drumul cel nou, a cărei valoare este egală cu aceea a integralei primitive. Astfel, dacă x se apropie de ξ , venind din partea lui x' , putem, în virtutea egalității (3), reprezenta funcțiunea $F(x)$ prin integrala

$$\int_{(aam\beta b)} \frac{G_1(x, z)}{G(x, z)} dz.$$

Mai putem încă, în acelaș caz, considera ca *element de prelungire* a lui $F(x)$, când x străbate linia L , expresiunea

$$\int_a^b \frac{G_1(x, z)}{G(x, z)} dz \pm 2i\pi \frac{G_1(\xi, \zeta)}{G'_\zeta(\xi, \zeta)},$$

în care semnul trebuie ales, conform celor zise mai sus.

402. *Funcțiunea $F(x)$.* — Funcțiunea definită de integrala

$$(1) \quad F(x) = \int_0^x z^{x-1} e^{-z} dz,$$

luată dealungul semiaxeî reale și pozitive, are o valoare finită dacă x este real și pozitiv. Această proprietate subsistă și dacă $x = \xi + i\eta$ este o cantitate complexă, cu condițiunea $\xi > 0$; căci din egalitatea

$$|z^{x-1} e^{-z}| = z^{\xi-1} e^{-z},$$

rezultă inegalitatea

$$\left| \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz \right| \leq \int_0^\infty z^{\xi-1} e^{-z} dz.$$

Proprietatea enunțată fiind adevărată pentru integrala din membrul al doilea, este adevărată și pentru membrul întâi.

Variabila z fiind presupusă reală și pozitivă, funcțiunea

$$z^{x-1} e^{-z} = e^{(x-1) \log z - z}$$

este olomorfă în raport cu x în tot planul acestei variabile și continuă în raport cu z ; prin urmare integrala (1) este o funcțiune olomorfă de x în regiunea în care ea este finită, adică în semiplanul $\xi > 0$.

Efectuând integrațiunea prin părți, obținem relațiunea

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Inlocuind x prin $x+1$, rezultă

$$\Gamma(x+2) = (x+1) \Gamma(x+1) = x(x+1) \Gamma(x);$$

de unde, în general, relațiunea

$$(2) \quad \Gamma(x+n) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) \Gamma(x).$$

Membrul întâi al acestei egalități este, în virtutea celor zise mai sus, o funcțiune olomorfă de x în toată regiunea în care $\xi > -n$; prin urmare, în această regiune, funcțiunea $\Gamma(x)$ este uniformă neavând alte singularități decât polurile $n = 0, -1, -2, \dots, -n$.

Vom să arătăm că funcțiunea $\Gamma(x)$, definită de integrala (1) în semiplanul $\xi > 0$, este uniformă în tot planul (x), neavând alte singularități decât polurile de ordinul întâi $x = -1, -2, \dots, -\infty$. Această proprietate se pune în evidență, plecând dela expresiunea lui $\Gamma(x)$ sub forma dată de Euler și Gauss și care se poate stabili în modul următor.

Să considerăm egalitatea

$$\int_0^1 z^{x-1} dz = \frac{1}{x},$$

în care să schimbăm x în $x+1$ și să scădem cele două egalități

una din alta; obținem egalitatea

$$\int_0^1 z^{x-1}(1-z)dz = \frac{1}{x(x+1)}.$$

În această egalitate să înlocuim x prin $x+1$ și să scădem cele două egalități una din alta; rezultă

$$\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^2dz = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

Continuând în același mod, obținem expresiunea generală

$$(3) \quad \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^n dz = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Să înlocuim z prin $\frac{z}{n}$; egalitatea precedentă devine

$$\begin{aligned} \int_0^n z^{x-1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n dz &= \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n)} \\ &= \frac{n^x}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Făcând n să tindă către infinit, rezultă

$$(4) \quad \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz = \Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x}{\left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)},$$

expresiunea lui $\Gamma(x)$ sub forma căutată.

Pentru a ne servi de această expresiune, este necesar să arătăm că membrul al doilea are o limită finită pentru orice valoare a lui x diferită de un număr întreg negativ. Pentru aceasta, să considerăm inversul produsului din membrul al doilea, care se poate scrie

$$\begin{aligned} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) n^{-x} &= \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x \log n} \\ (5) \quad &= \prod_1^\infty \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} e^{x \left(\frac{1}{n} - \log n\right)} \right] \\ &= e^{x \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \log n\right)} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = e^{Cx} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}, \end{aligned}$$

C fiind constanta lui Euler¹⁾. Rămâne să probăm convergența produsului din urmă. Avem

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots\right) = 1 + u_n,$$

punând

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{1}{1.3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 - \frac{1}{2.4}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \frac{1}{3.5}\left(\frac{x}{n}\right)^5 - \dots;$$

de unde

$$\left|u_n\right| < \left|\frac{x}{n}\right|^2 \left[1 + \left|\frac{x}{n}\right| + \left|\frac{x}{n}\right|^2 + \left|\frac{x}{n}\right|^3 + \dots\right].$$

Fie m un număr întreg pozitiv și $|x| < m$; vom avea, pentru $n > m$, inegalitatea

$$\left|u_n\right| < \left|\frac{x}{n}\right|^2 \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{n}\right|} = \left|\frac{x}{n}\right|^2 (1 + \varepsilon_n),$$

în care ε_n tinde către zero când n tinde către infinit. Seria $\sum u_n$ este așa dar absolut convergentă pentru toate valorile $|x| < m$, prin urmare și produsul (5). Însă m poate fi presupus oricât de mare vom; conchidem că produsul considerat este absolut și uniform convergent pentru orice valoare finită a lui x .

Egalitatea (4) se poate așa dar scrie sub forma

$$(6) \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

care arată că funcțiunea

$$\frac{1}{\Gamma(x)}$$

este o funcțiune întreagă, având ca zeruri numerele întregi $x = -n$, ($x = -1, -2, \dots, -\infty$). De unde rezultă că $\Gamma(x)$ este o funcțiune uniformă în tot planul (x), neavând alte singularități decât polurile $x = -n$. q. e. d.

Observare. Funcțiunea $\Gamma(x)$ nu se anulează în nici un punct al planului, căci punctele în cari această funcțiune s'ar anula, ar fi poluri ale funcțiunei inverse $\frac{1}{\Gamma(x)}$; ceea ce este absurd.

¹⁾ C = 0,5772...

CAPITOLUL XXI.

FUNCTIUNI INTREGI.

I. — EXPRESIUNEA FUNCTIUNILOR INTREGI SUB FORMĂ DE PRODUSE DE FACTORI.

403. *Teoremă. Fie*

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

un şir nelimitat de serii întregi convergente într'un cerc comun $|x| = R$; dacă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

este absolut şi uniform convergentă în cercul (R) , produsul

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + P_n(x)]$$

se poate pune sub forma unei serii întregi, convergentă în acest cerc.

În adevăr, există un număr întreg m astfel că pentru $n \geq m$, avem $|P_n(x)| < 1$ în interiorul cercului (R) şi pentru aceste valori ale lui n , putem scrie

$$1 + P_n(x) = e^{\log(1+P_n)} = e^{P_n - \frac{1}{2} P_n^2 + \frac{1}{3} P_n^3 - \dots};$$

prin urmare

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + P_n) = e^{\sum_{n=m+1}^{\infty} (P_n - \frac{1}{2} P_n^2 + \frac{1}{3} P_n^3 - \dots)}$$

Însă seria dela exponent se poate exprima printr'o serie întreagă $P(x)$ convergentă în cercul (R) (§ 120, IV); prin urmare produsul

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + P_n) = e^{P(x)}$$

se exprimă printr'o serie analoagă convergentă în acelaş cerc. De altă parte, produsul

$$\prod_1^m (1 + P_n),$$

a unui număr limitat de factori, se exprimă evident printr'o serie întreagă convergentă în (R) ; de unde rezultă teorema de demonstrat.

Corolar. Produsul $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + P_n(x)]$ definește o funcțiune analitică.

404. *Construcțiunea unei funcțiuni întregi având zeruri date.* Există funcțiuni întregi care nu se anulează pentru nici o valoare a variabilei, de exemplu funcțiunea e^x și, într'un mod mai general, funcțiunile de forma $e^{g(x)}$, $g(x)$ fiind o funcțiune întregă.

Viceversa, orice funcțiune întregă $f(x)$, care n'are nici un zero în tot planul, se poate pune sub forma

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

În adevăr, dacă $f(x)$ este o funcțiune întregă care nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui x , funcțiunea

$$\log f(x)$$

este olomorfă în tot planul (x), adică este o funcțiune întregă $g(x)$:

$$\log f(x) = g(x);$$

de unde

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Consecință. Raportul a două funcțiuni întregi $f(x)$, $F(x)$ cari admit aceleași zeruri, fiecare de acelaș ordin de multiplicitate, satisfac egalitatea

$$\frac{f(x)}{F(x)} = e^{g(x)};$$

căci acest raport este o funcțiune întregă neavând nici un zero în tot planul.

405. Să construim acum o funcțiune întregă având un număr nelimitat de zeruri date

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Pentru ca aceste puncte să poată fi zerurile unei funcțiuni întregi, este necesar ca ele să fie izolate, neavând alt punct limită decât punctul infinit. Așa dar, presupunând zerurile (1) dispuse în ordinea modulelor crescânde

$$(2) \quad |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots,$$

vom avea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

Dacă printre aceste zeruri sunt mai multe de acelaș mod, ordinea lor va fi oarecare.

Să considerăm cazul cel mai simplu, când seria

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n}, \quad (a_1 \neq 0)$$

formată cu inversele cantităților (1) este absolut convergentă. În acest caz produsul

$$(4) \quad \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

este absolut și uniform convergent în toată întinderea planului și reprezintă o funcțiune analitică întreagă. Inșă un produs absolut și uniform convergent nu se anulează decât împreună cu unul din factorii săi; prin urmare produsul (4) reprezintă o funcțiune întreagă care admite zerurile date și numai aceste zeruri. Expresiunea cea mai generală a unei funcțiuni întregi care pe lângă zerurile (1) admite origina ca zero de ordinul m , este

$$e^{g(x)} x^m \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

$g(x)$ fiind o funcțiune întreagă oarecare.

Exemplu: O funcțiune întreagă ale carei zeruri de ordinul întâi sunt punctele $x = 0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots$ este reprezentată prin produsul

$$e^{g(x)} x \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right).$$

406. *Teorema lui Weierstrass.* Weierstrass a dat soluțiunea problemei care ne ocupă în cazul general, când $\sum \frac{1}{|a_n|}$ este divergentă.

Să stabilim mai întâiu următoarea leamnă:

Lemă. Fiind dat șirul nelimitat (1) dispus în ordinea (2), cu condițiunile $|a_1| > 0$, și $\lim |a_n| = \infty$, se poate totdeauna găsi un șir de numere întregi pozitive nu descrescând

$$(5) \quad \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \dots$$

astfel ca seria

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{a_n} \right|^{\varrho_n+1}$$

să fie convergentă pentru orice valoare finită a lui x .

Este de ajuns, fără a fi necesar, a lua, cum face Weierstrass

$$\varrho_n = n - 1,$$

căci reprezentând prin u_n termenul general al seriei (6), avem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \left| \frac{x}{a_n} \right| = 0,$$

oricare ar fi valoarea finită a lui x . Să stabilim acum teorema lui Weierstrass.

Numerele q_n fiind astfel determinate, să considerăm expresiunea

$$\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{q_n} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n}},$$

care se anulează în singurul punct a_n și nu are alt punct singular decât punctul ∞ . O asemenea expresiune se numește *factor prim*.

Punând, pentru prescurtare,

$$(7) \quad g_n(x) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{q_n} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n},$$

să considerăm produsul

$$(8) \quad H(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}.$$

Vom să demonstrăm că acest produs este o funcțiune întreagă de x .

Fie R un număr pozitiv oricât de mare vom și a_{m+1} cea dintâi cantitate din șirul (1) pentru care.

$$|a_{m+1}| > R.$$

Să presupunem punctul x situat în interiorul cercului $|x| = R$; vom avea, pentru $n \geq m+1$, $\left|\frac{x}{a_n}\right| < 1$ și prin urmare, pentru astfel de valori ale lui n , putem scrie

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)} &= e^{\log \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) + g_n(x)} \\ &= e^{-\left[\frac{1}{q_n+1} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n+1} + \frac{1}{q_n+2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n+2} + \dots\right]} \end{aligned}$$

$$\prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)} = e^{\sum_{m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{q_n+1} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n+1} + \frac{1}{q_n+2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n+2} + \dots\right]}$$

Prin ipoteză, seria $\sum \left(\frac{x}{a_n}\right)^{q_n+1}$ este absolut și uniform convergentă în cercul (R), prin urmare seria dela exponent din membrul al doilea se reduce la o serie întreagă $P_m(x)$ convergentă în acest cerc. Avem așa dar, în interiorul cercului (R), expresiunea

$$(9) \quad H(x) = e^{P_m(x)} \prod_1^m \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}.$$

Fiecare factor prim putând fi înlocuit printr'o serie întreagă convergentă în tot planul, produsul celor dintâi m factori primi poate fi reprezentat printr'o serie întreagă convergentă în tot planul și $H(x)$ printr'o serie întreagă convergentă în interiorul cercului (R) . Această serie se anulează în interiorul cercului în punctele $a_1, a_2, \dots, a_m$ și numai în aceste puncte. Însă R poate fi presupus oricât de mare vom; dacă dar facem R să crească peste orice limită, ceea ce revine a face m să tindă către infinit și observăm că $|P_m(x)|$ tinde în același timp către zero ¹⁾, conchidem că produsul nelimitat

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}$$

poate fi reprezentat printr'o serie întreagă convergentă în tot planul; prin urmare acest produs reprezintă o funcțiune întreagă, care se anulează în punctele date de șirul (1) și numai în aceste puncte.

Dacă printre zerurile date sunt mai multe egale între dânsese, de exemplu, dacă μ zeruri sunt egale cu a_ν , factorii primi corespunzători sunt egali și produsul lor va fi

$$\left[\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{g_\nu(x)} \right]^\mu.$$

S'a presupus că origina nu se află printre punctele șirului (1). Dacă $x = 0$ este un zero de ordinul m de multiplicitate, vom introduce factorul x^m și produsul

$$x^m \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)},$$

în care fiecare factor prim este repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate, satisface condițiunile cerute.

În fine, expresiunea cea mai generală a unei funcțiuni întregi

¹⁾ Punând $\left| \frac{x}{a_n} \right| = U_n < 1$, avem

$$|P_m(x)| < \Sigma \left(U_n^{\varrho_n+1} + U_n^{\varrho_n+2} + \dots \right) < \Sigma \frac{U_n^{\varrho_n+1}}{1 - U_n},$$

Fie λ o limită superioară a fracțiunilor $\frac{1}{1 - U_n}$, $n > m$; vom avea

$$|P_m(x)| < \lambda \sum_{n=m+1}^{\infty} U_n^{\varrho_n+1}.$$

Seria $\sum U_n^{\varrho_n+1}$ fiind convergentă, rezultă că pentru m , destul de mare, avem $|P_m(x)| < \varepsilon$, oricât de mic ar fi ε .

$f(x)$ care admite aceleași zeruri este

$$(10) \quad f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)},$$

$g(x)$ fiind o funcțiune întreagă arbitrară.

Astfel dar, fiind dat șirul nelimitat de puncte (1), cari nu sunt supuse la altă condițiune decât a fi izolate, (adică nu există punct la distanță finită în domeniul căruia să se găsească o infinitate de puncte ale șirului), *este totdeauna posibil a construi o funcțiune întreagă care să admită ca zeruri aceste puncte și care să fie reprezentată prin expresiunea (10).* În acest rezultat consistă teorema lui Weierstrass.

407. *Observare.* Funcțiunile exponențiale cari figurează în factorii primi ai produsului nu sunt determinate într'un mod unic. Aceasta rezultă din faptul că gradele polinoamelor

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{q_n} \frac{x^k}{ka_n^k}$$

nu sunt supuse la altă condițiune decât ca seria

$$\sum \left| \frac{x}{a_n} \right|^{q_n}$$

să fie convergentă. Presupunând că am determinat un șir de numere q_n cari să împlinească condițiunea precedentă, le putem mări cu numere întregi arbitrare, fără ca produsul nelimitat să înceteze de a fi absolut convergent. Pentru ca valoarea funcțiunii $f(x)$ să nu se schimbe, este evident necesar ca termenii adăugați polinoamelor $g_n(x)$ să-i scădem din exponentul $g(x)$ al factorului exponențial $e^{g(x)}$.

Astfel, reprezentând prin q'_n un număr întreg mai mare ca q_n și prin $g'_n(x)$ funcțiunea corespunzătoare (7), avem

$$g_n(x) = g'_n(x) - \sum_{k=q_n+1}^{q'_n} \frac{x^k}{ka_n^k};$$

prin urmare

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\sum_{k=q_n+1}^{q'_n} \frac{x^k}{ka_n^k}} \\ &= e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=q_n+1}^{q'_n} \frac{x^k}{ka_n^k}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)}. \end{aligned}$$

Formula (10) devine așa dar

$$(10 \text{ bis}) \quad f(x) = x^m e^{g(x)} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=q_n+1}^{q'_n} \frac{x^k}{ka_n^k} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)}.$$

408. Se poate întâmpla ca să existe un număr întreg p astfel ca seria

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

să fie convergentă. În acest caz seria

$$\sum \left| \frac{x}{a_n} \right|^{p+1}$$

este convergentă și prin urmare este de ajuns a lua toți exponenții q_n egali cu p ; vom avea atunci

$$(12) \quad g_n(x) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a_n} \right)^p.$$

Dacă p este cel mai mic număr întreg pentru care seria (11) este convergentă, se zice că produsul

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)}$$

este de rangul p .

În cazul când seria (11) nu este convergentă pentru nici o valoare finită a lui p ¹⁾ și când prin urmare gradele q_n ale polinoamelor g_n cresc peste orice limită, se zice că produsul corespunzător este de un rang infinit.

Dacă produsul

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)}$$

este de un rang limitat, există un număr q satisfăcând dubla inegalitate

$$p \leq q \leq p + 1,$$

pentru care seria $\sum \frac{1}{|a_n|^{q-\varepsilon}}$ este divergentă, pe când seria $\sum \frac{1}{|a_n|^{q+\varepsilon}}$ este convergentă, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε . În privința seriei $\sum \frac{1}{a_n^q}$ nu se poate afirma nimic, într'un mod general, seria poate fi convergentă sau divergentă²⁾. Dacă $q = p$, seria este divergentă, dacă $q = p + 1$, seria este convergentă. Numărul q astfel

¹⁾ De exemplu: seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^m}$ este divergentă oricât de mare ar fi exponentul m . În adevăr, comparând această serie cu seria armonică $\sum \frac{1}{n}$, raportul a doi termeni corespunzători este $\frac{(\log n)^m}{n} = \left(\frac{\log n}{n} \right)^m$, a cărui limită, pentru $n = \infty$, este zero. Prin urmare termenii seriei considerate sunt, începând dela un rang destul de depărtat, infinit de mari în raport cu cei corespunzători al seriei armonice.

²⁾ Analogie cu cercul de convergență al unei serii întregi.

definit se numește *exponentul de convergență* ¹⁾, al șirului (a_n) sau și al funcțiunii corespunzătoare $\Pi(x)$.

409. Fie $F(x)$ o funcțiune întreagă dată și

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

zerurile ei, dispuse în ordinea modulelor crescânde, fiecare fiind repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate. Teorema lui Weierstrass ne învață să construim un produs de factori primi, $\Pi(x)$, având aceste puncte ca zeruri. Expresiunea lui $F(x)$ este

$$(13) \quad F(x) = e^{g(x)} \Pi(x),$$

$g(x)$ fiind o funcțiune întreagă care trebuie determinată pentru fiecare funcțiune dată $F(x)$.

Ne vom mărgini la acele funcțiuni $F(x)$ al căror rang (rangul produsului $\Pi(x)$) este un număr limitat și funcțiunea $g(x)$ un polinom de x . Funcțiunile obișnuite ce se consideră în analiză intră în această categorie.

Fie p rangul funcțiunii și q gradul polinomului $g(x)$; cel mai mare dintre aceste două numere se numește *genul* funcțiunii $F(x)$ ²⁾. În cazul când exponentul $g(x)$ se reduce la o constantă, funcțiunea se zice *simplică* (*canonique, primitive*).

410. Să considerăm produsul

$$(14) \quad \Pi(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a_n} \right)^p},$$

de rangul p . Luând derivata logaritmică ³⁾, avem

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{p-1}}{a_n^p} \right],$$

¹⁾ *Ordre réel* (Borel). *Grenzexponent*.

²⁾ *Genre*, după Laguerre.

³⁾ Această derivată se obține după aceeași regulă ca și cum numărul factorilor ar fi limitat. În adevăr, fie ν un număr întreg astfel încât, pentru $n \geq \nu$, să avem $\left| \frac{x}{a_n} \right| < 1$; vom putea scrie

$$\Pi(x) = \prod_1^{\nu-1} \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)} e^{\sum_{\nu}^{\infty} P_n(x)},$$

unde $P_n(x) = \log \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) + g_n(x)$ este o serie întreagă de x , convergentă în interiorul cercului $|x| = |a_\nu|$ și $\sum_{\nu}^{\infty} P_n(x)$ absolut și uniform convergentă în același cerc. De unde derivata logaritmică:

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \sum_1^{\nu-1} \frac{d}{dx} \log \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)} + \sum_{\nu}^{\infty} P'_n(x) = \sum_1^{\infty} \frac{d}{dx} \log \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)}.$$

sau

$$(15) \quad \frac{H'(x)}{H(x)} = x^p \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n^p(x-a_n)}.$$

Seria din membrul al doilea este absolut și uniform convergentă în toată întinderea planului, exceptând punctele a_n . În adevăr, fie x un punct oarecare diferit de punctele a_n și n destul de mare pentru ca $|x| < |a_n|$; putem scrie

$$\frac{1}{|a_n^p(x-a_n)|} = \frac{1}{|a_n^{p+1}|} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{x}{a_n}\right|} < \frac{1}{|a_n^{p+1}|} \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{a_n}\right|}.$$

Propozițiunea este justificată în virtutea convergenței seriei

$$\sum \frac{1}{|a_n^{p+1}|}.$$

411. Din propozițiunea precedentă rezultă că funcțiunea

$$\frac{H'(x)}{H(x)}$$

este continuă și rămâne finită dealungul unui cerc (r) descris din origină ca centru și care nu trece prin nici unul din punctele a_n . Există o infinitate de valori r oricât de mari voim, cari împlinesc această condițiune. În adevăr, punctele a_n fiind puncte izolate, numerele $r_n = |a_n|$, mai mici ca un număr pozitiv arbitrar R , sunt în număr limitat. Figurând pe axa reală aceste numere, obținem un șir de puncte izolate, al căror punct limită unic este punctul ∞ . Orice număr pozitiv r , care nu aparține acestui șir și care, prin urmare, poate fi mai mare ca orice număr dat, satisface condițiunea cerută. În coroana limitată de două cercuri concentrice, având centrele în origină și trecând prin două din aceste puncte consecutive, $\frac{H'(x)}{H(x)}$ este funcțiune olomorfă.

Fie acum $f(x)$ o funcțiune întreagă pusă sub forma

$$f(x) = e^{g(x)} x^m H(x),$$

avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \frac{H'(x)}{H(x)}.$$

De unde rezultă că funcțiunea $\frac{f'(x)}{f(x)}$ este olomorfă în aceeași coroană ca funcțiunea $\frac{H'(x)}{H(x)}$.

412. Teoremă. Dacă seria

$$(1) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}, \quad \lambda > 0$$

este convergentă, suma

$$(2) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)}$$

tinde către zero când x tinde către infinit fără a trece prin punctele a_n .

În adevăr, în virtutea ipotezei, seria (2) este absolut și uniform convergentă în tot planul (x) din care excludem punctele a_n . Să descompunem această serie în două părți

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} = \sum_1^m \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)}$$

și să presupunem numărul întreg pozitiv m destul de mare pentru ca

$$\sum \left| \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\varepsilon > 0$ arbitrar de mic. De altă parte, există un număr pozitiv R astfel ca pentru $|x| > R$, punctele a_n fiind excluse, să avem

$$\sum_1^m \left| \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De unde rezultă că pentru $|x| > R$ și R destul de mare, avem

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} \right| < \varepsilon.$$

Corolar. Fie $\Pi(x)$ un produs de factori primi de rangul p , adică p este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care seria

$\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ este convergentă; avem (§ 410)

$$\frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n^p (x-a_n)}.$$

Aplicând teorema precedentă pentru $\lambda = p + 1$, conchidem că există un număr pozitiv R destul de mare, astfel că pentru $|x| > R$, avem

$$\left| \frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)} \right| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$.

413. *Teoremă. Dacă*

$$(1) \quad f(x) = e^{g(x)} x^m \Pi(x)$$

este o funcțiune întreagă de genul p , expresiunea

$$(2) \quad \frac{f'(x)}{x^p f(x)}$$

tinde către zero când x tinde către ∞ , fără a trece prin zerurile funcțiunii $f(x)$.

În adevăr, din (1) deducem

$$(3) \quad \frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)}.$$

Funcțiunea $f(x)$ fiind de genul p , rangul său și gradul polinomului $g(x)$ nu trec peste numărul p , însă unul cel puțin din aceste două numere este egal cu p . Din expresiunea (3) rezultă, ținând seamă de corolarul teoremei precedente, că toți termenii membrului al doilea tind către zero când x tinde către infinit, fără a trece prin punctele a_n . De unde conchidem teorema enunțată.

414. Teoremă. Dacă seria

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

este convergentă și expresiunea (2) tinde către zero când x tinde către infinit, fără a trece prin zerurile funcțiunii $f(x)$, și dacă p este cel mai mic număr întreg ≥ 0 pentru care cele două condițiuni sunt împlinite, funcțiunea $f(x)$ este de genul p .

În adevăr, în virtutea acestor condițiuni, membrul întâi precum și cei doi din urmă termeni din membrul al doilea al egalității (3) tind către zero când x tinde către ∞ ; prin urmare termenul

$$\left| \frac{g'(x)}{x^p} \right|$$

tinde în același timp către zero. De unde rezultă că numărătorul $g'(x)$ este un polinom de un grad $\leq p - 1$ și prin urmare $g(x)$ este un polinom al cărui grad este cel mult egal cu p . Ceeace demonstrează teorema.

415. Fiind dată o funcțiune întreagă $f(x)$, dacă cunoaștem zerurile sale precum și rangul său, formăm, precum am văzut, produsul $\Pi(x)$ al factorilor săi primi. Pentru a obține expresiunea completă a funcțiunii sub formă de produs, avem nevoie de a cunoaște factorul exponential $e^{g(x)}$, adică funcțiunea $g(x)$. Dacă această funcțiune este un polinom este ușor să-l determinăm. Pentru aceasta, fie p cel mai mic număr întreg ≥ 0 , mai mare sau cel puțin egal cu rangul funcțiunii, pentru care avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^p f(x)} = 0;$$

acest număr este în virtutea teoremei precedente, genul func-

țiunii $f(x)$ și prin urmare gradul polinomului $g(x)$ este cel mult egal cu p .

Punem

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_px^p$$

și aplicând egalitatea

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)},$$

desvoltăm ambele membre în domeniul punctului $x = 0$; de unde prin identificare, deducem valorile coeficienților $b_1, b_2, \dots, b_p$. Făcând apoi $x = 0$ în egalitatea

$$\frac{f(x)}{x^m} = e^{g(x)} \Pi(x),$$

obținem valoarea coeficientului e^{b_0} .

416. *Aplicațiuni.* Fie funcțiunea

$$f(x) = \sin \pi x,$$

ale cărei zeruri sunt numerele $x = n$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Seria $\sum \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă, produsul factorilor primi corespunzători este de rangul întâi și avem

$$\Pi(x) = x \Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}},$$

Π' reprezintă produsul factorilor corespunzători la toate valorile întregi pozitive și negative ale lui n , exceptând $n = 0$. Prin urmare avem

$$(1) \quad \sin \pi x = e^{g(x)} x \Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre, avem

$$(2) \quad \pi \cot \pi x = g'(x) + \frac{1}{x} + \Sigma' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Se recunoaște lesne că $\frac{\cot \pi x}{x}$ tinde către zero când x tinde către infinit, fără a deveni egal cu un număr întreg. Așa dar $g(x)$ este un polinom al cărui grad nu trece peste 1. Fie

$$g(x) = ax + b.$$

Substituind în (2) această valoare și identificând ambele membre,

găsim $a = 0$.¹⁾ De altă parte făcând $x = 0$ în egalitatea (1) după ce am împărțit ambele membre cu x , obținem $e^b = \pi$. De unde expresiunea lui $\sin \pi x$, descompus în factori primi,

$$(3) \quad \sin \pi x = \pi x \prod' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Să notăm expresiunea

$$(4) \quad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right),$$

care rezultă din egalitatea (2).

417. *Observare asupra produsului* $\prod' \left(1 - \frac{x}{n}\right)$. Acest produs este semi convergent și valoarea sa depinde de legea după care se succed factorii. În adevăr, să grupăm factorii în modul următor: fiecare grup să fie format din k factori consecutivi corespunzători la valori pozitive și h factori consecutivi corespunzători la valori negative ale lui n . Așă, de exemplu, grupul de rangul m va fi

$$\left[1 - \frac{x}{(m-1)k+1}\right] \cdots \left[1 - \frac{x}{mk}\right] \left[1 + \frac{x}{(m-1)h+1}\right] \cdots \left[1 + \frac{x}{mh}\right].$$

Să reprezentăm prin Π_m produsul celor dintâi m grupuri de factori ai produsului $\prod' \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ și fie

$$P = \prod' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Luând în acest din urmă produs factorii cari corespund la aceleași valori ale lui n , cari determină Π_m , obținem un produs egal cu

$$e^{x(S_{mk} - S_{mh})} \Pi_m,$$

în care scriem

$$S_i = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i}.$$

¹⁾ Această valoare se poate obține imediat, observând că grupând doi câte doi factorii cari corespund la valori ale lui n egale și de semne contrarii, avem

$$\prod' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Expresiunea $\frac{\sin \pi x}{x}$ și produsul considerat rămânând neschimbate când înlocuim x prin $-x$, rezultă că funcțiunea e^{ax+b} nu se schimbă în același timp: de unde $a = 0$.

Produsul P fiind absolut convergent, putem scrie, pentru m destul de mare,

$$(5) \quad e^{x(S_{mk} - S_{mh})} \Pi_m = P + \varepsilon_m, \quad \lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Însă

$$\lim_{m=\infty} (S_{mk} - S_{mh}) = \lim_{m=\infty} \log \frac{mk}{mh} = \log \frac{k}{h};$$

prin urmare, făcând m să tindă către infinit, egalitatea (5) devine

$$\lim_{m=\infty} \Pi_m = P \left(\frac{h}{k} \right)^x.$$

Așa dar $\lim_{m=\infty} \Pi_m$ depinde de raportul $\frac{h}{k}$; valoarea sa nu este egală cu P decât dacă $h = k$. În acest caz putem scrie

$$(6) \quad \sin \pi x = \pi x \lim_{m=\infty} \prod_{-m}^{+m} \left(1 - \frac{x}{n} \right), \quad n \neq 0.$$

448. *Aplicațiuni.* I. Expresiunea precedentă pune în evidență periodicitatea funcțiunii $\sin x$. În adevăr, dacă în polinomul

$$\varphi_m(x) = \pi x \prod_{-m}^{+m} \left(1 - \frac{x}{n} \right), \quad n \neq 0,$$

care se poate pune sub forma

$$\varphi_m(x) = Ax(1-x)(2-x) \dots (m-x) \times (1+x)(2+x) \dots (m+x),$$

înlocuim x prin $x+1$, avem

$$\varphi_m(x+1) = -\varphi_m(x) \frac{m+1+x}{m-x}.$$

De unde, făcând $m = \infty$,

$$\sin \pi(x+1) = -\sin \pi x,$$

sau, punând $\pi x = z$,

$$\sin(z+\pi) = -\sin z;$$

prin urmare

$$\sin(z+2\pi) = \sin z.$$

II. Făcând în (6) $x = \frac{1}{2}$, obținem

$$(7) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{m=\infty} \prod_{-m}^{+m} \frac{2n}{2n-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m-1} \dots,$$

formula cunoscută a lui Wallis.

449. Să înlocuim în egalitatea (3) x prin $\frac{x-a}{\omega}$, a și ω fiind

două constante arbitrare, și a diferit de un multiple al lui ω ; vom avea

$$(8) \quad \sin \frac{\pi(x-a)}{\omega} = \frac{\pi(x-a)}{\omega} \Pi' \left(1 - \frac{x-a}{\omega} \right) e^{\frac{x-a}{n\omega}}.$$

De altă parte, aplicând direct teorema lui Weierstrass funcțiunii $\sin \frac{\pi(x-a)}{\omega}$, ale cărei zeruri sunt date de expresiunea

$$a + n\omega,$$

în care n primește toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$ și ținând seamă că această funcțiune este de rangul întâi și de genul întâi, avem

$$(9) \quad \sin \frac{\pi(x-a)}{\omega} = e^{ax+\beta} \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{a+n\omega} \right) e^{\frac{x}{a+n\omega}}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre și făcând $x = 0$, obținem

$$a = -\frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi a}{\omega}.$$

Făcând în (9) $x = 0$, rezultă

$$e^{\beta} = -\sin \frac{\pi a}{\omega}.$$

Prin urmare

$$(10) \quad \sin \frac{\pi(x-a)}{\omega} = -\sin \frac{\pi a}{\omega} e^{\frac{\pi x}{\omega} \cot \frac{\pi a}{\omega}} \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{a+n\omega} \right) e^{\frac{x}{a+n\omega}}.$$

Formulele (8) și (10) diferite între ele se pot reduce una la alta. Plecând dela formula (8), avem

$$1 - \frac{x-a}{n\omega} = \left(1 + \frac{a}{n\omega} \right) \left(1 - \frac{x}{a+n\omega} \right),$$

$$\left(1 - \frac{x-a}{n\omega} \right) e^{\frac{x-a}{n\omega}} = \left(1 + \frac{a}{n\omega} \right) e^{\frac{a}{n\omega}} \left(1 - \frac{x}{a+n\omega} \right) e^{\frac{x}{n\omega}};$$

de unde

$$\Pi' \left(1 - \frac{x-a}{n\omega} \right) e^{\frac{x-a}{n\omega}} = \Pi' \left(1 + \frac{a}{n\omega} \right) e^{\frac{a}{n\omega}} \cdot \Pi' \left(1 - \frac{x}{a+n\omega} \right) e^{\frac{x}{n\omega}},$$

descompunere legitimă, căci produsele din membrul al doilea sunt absolut convergente. Însă primul produs din membrul al doilea

este egal cu

$$\frac{\omega}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{\omega};$$

prin urmare

$$\sin \frac{\pi(x-a)}{\omega} = -\sin \frac{\pi a}{\omega} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \Pi' \left(1 - \frac{x}{a+n\omega}\right) e^{\frac{x}{n\omega}},$$

sau, ținând seamă de identitatea

$$\frac{x}{n\omega} = \frac{x}{a+n\omega} + \frac{ax}{n\omega(a+n\omega)},$$

și făcând să intre factorul $\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ sub simbolul Π , avem

$$(11) \quad \sin \frac{\pi(x-a)}{\omega} = -\sin \frac{\pi a}{\omega} \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a+n\omega}\right) e^{\frac{x}{a+n\omega}} \right] e^{-\frac{x}{a}} \Pi' e^{\frac{ax}{n\omega(a+n\omega)}}$$

Însă

$$e^{-\frac{x}{a}} \Pi' e^{\frac{ax}{n\omega(a+n\omega)}} = e^x \left[-\frac{1}{a} + \Sigma' \left(\frac{1}{n\omega} - \frac{1}{a+n\omega} \right) \right],$$

iar parenteza de la exponent este egală cu $-\frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi a}{\omega}$, precum se recunoaște făcând în formula (4) $x = -\frac{a}{\omega}$. De unde rezultă formula (10).

420. Făcând în (10) $\omega = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, obținem

$$(12) \quad \cos \pi x = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n-\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{x}{n-\frac{1}{2}}}.$$

Acest rezultat se mai poate deduce din formula

$$\cos \pi x = \frac{\sin 2\pi x}{2 \sin \pi x}.$$

În adevăr, avem

$$\sin 2\pi x = 2\pi x \Pi' \left(1 - \frac{2x}{n}\right) e^{\frac{2x}{n}};$$

sau, reunind de o parte factorii în cari n este par și de alta pe accia în cari n este impar, putem scrie

$$\begin{aligned} \sin 2\pi x &= 2\pi x \Pi' \left(1 - \frac{2x}{2n}\right) e^{\frac{2x}{2n}} \Pi \left(1 - \frac{2x}{2n-1}\right) e^{\frac{2x}{2n-1}} \\ &= 2 \sin \pi x \Pi \left(1 - \frac{x}{n-\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{x}{n-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

De unde conchidem formula (12).

Luând derivata logaritmică a ambelor membre din (12), obținem

$$(13) \quad -\pi \operatorname{tg} \pi x = \sum_{n=x}^{+\infty} \left[\frac{1}{x - (n - \frac{1}{2})} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right].$$

421. *Relațiune între funcțiunea $\Gamma(x)$ și $\sin \pi x$.* Am găsit, pentru funcțiunea întreagă $\frac{1}{\Gamma(x)}$, expresiunea ((5), § 402)

$$(1) \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{-Cx} x \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zerurile acestei funcțiuni sunt zeruri ale funcțiunei $\sin \pi x$, care se mai anulează pentru aceleași numere cu semnele schimbate. Aceste din urmă zeruri anulează funcțiunea $\frac{1}{\Gamma(1-x)}$. Să formăm produsul corespunzător acestei funcțiuni, înlocuind în egalitatea (1) x prin $1-x$; obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-x)} &= e^{C(1-x)} (1-x) \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1-x}{n} \right) e^{-\frac{1-x}{n}} \\ (2) \quad &= e^{C(1-x)} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} (1-x) \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n+1} \right) e^{\frac{x}{n}} \\ &= e^{C(1-x)} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}}. \end{aligned}$$

Însă, făcând în egalitatea (1) $x = 1$, avem

$$e^C \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1;$$

prin urmare, egalitatea (2) devine

$$(3) \quad \frac{1}{\Gamma(x-1)} = e^{-Cx} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Din egalitățile (1) și (3) rezultă relațiunea căutăată

$$(4) \quad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}} = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

sau

$$(5) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Făcând în această egalitate $x = \frac{1}{2}$, obținem $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$; de unde

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

valoarea radicalului fiind pozitivă.

422. *Funcțiunea σx .* Această funcțiune întreagă introdusă de Weierstrass joacă un rol important în teoria funcțiilor eliptice. Fie ω și ω' două cantități al căror raport este imaginar. Weierstrass reprezintă prin σx funcțiunea întreagă simplă ¹⁾ care se anulează în punctele

$$x = 2m\omega + 2n\omega',$$

m și n fiind numere cari primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, independente între ele.

Să căutăm cea mai mică valoare întreagă p pentru care seria

$$\sum' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^{p+1}}$$

este convergentă. Punând $\omega = a + ib$, $\omega' = a' + ib'$, avem

$$\begin{aligned} |m\omega + n\omega'|^2 &= (am + a'n)^2 + (bm + b'n)^2 \\ &= (a^2 + b^2)m^2 + 2(aa' + bb')mn + (a'^2 + b'^2)n^2. \end{aligned}$$

Membrul al doilea este o formă quadratică definită (pozitivă), căci avem expresiunea

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2 = (ab' - ba')^2 > 0,$$

$ab' - ba' \neq 0$, în virtutea ipotezei că raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ este imaginar.

Așă dar seria

$$\sum' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^{p+1}} = \sum' \frac{1}{[(am + a'n)^2 + (bm + b'n)^2]^{\frac{p+1}{2}}}$$

va fi convergentă pentru $\frac{p+1}{2} > 1$ și deoarece p este un număr întreg, valoarea cea mai mică pentru care seria propusă este convergentă este $p = 2$. Funcțiunea ce voim să construim este de rangul 2.

Conform teoremei lui Weierstrass, un factor prim general fiind

$$\left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{w^2}},$$

în care s'a pus pentru prescurtare

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

expresiunea funcțiunii σx sub formă de produs este

$$\sigma x = x H' \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{w^2}},$$

m și n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, exceptând sistemul de valori $m = n = 0$.

¹⁾ În care factorul exponențiat $e^{G(x)} = 1$.

II. — CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIUNILOR ÎNTREGI TRANSCENDENTE.

423. Funcțiunile întregi transcendente se bucură de unele proprietăți comune polinoamelor. Astfel:

Dacă o funcțiune întreagă

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

are toți coeficienții săi reali, zerurile sale complexe sunt conjugate două câte două.

În adevăr, fie $x = a + i\beta$ un zero al funcțiunii. Înlocuind x prin această expresiune și separând termenii reali de cei imaginari, avem

$$0 = \sum a_n (a + i\beta)^n = P(a, \beta) + iP_1(a, \beta),$$

P și P_1 fiind două serii întregi de a și β cu coeficienți reali, convergente pentru orice sistem de valori finite ale acestor cantități. De unde rezultă egalitățile

$$P = 0, P_1 = 0.$$

Înlocuind x prin $a - i\beta$, rezultatul substituțiunii va fi

$$P(a, \beta) - iP_1(a, \beta) = 0;$$

prin urmare

$$f(a - i\beta) = 0.$$

424. Viceversa. Dacă o funcțiune întreagă simplă (adică fără multiplicatorul $e^{g(x)}$ de un rang limitat are zerurile sale reale, sau imaginare conjugate, coeficienții săi sunt reali ¹⁾. Căci grupând doi câte doi factorii primi cari corespund zerurilor imaginare conjugate, obținem produse cu coeficienți reali.

Teorema subsistă și în cazul unei funcțiuni simple de un rang nelimitat, dacă presupunem că gradele q_n ale polinoamelor $g_n(x)$, corespunzătoare zerurilor conjugate, sunt egale: cecace se poate totdeauna presupune, căci aceste grade depind numai de modulele zerurilor.

425. Teorema lui Rolle se aplică funcțiunilor întregi transcendente ai căror coeficienți sunt reali: între două zeruri reale consecutive ale funcțiunii se cuprinde un număr impar de zeruri reale ale derivatei.

În adevăr, fie a, b două zeruri consecutive ($a < b$) ale funcțiunii $f(x)$, cel dintâiu multiplu de ordinul α , cel de al doilea de ordinul β . Putem scrie

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x), \quad \varphi(a) \neq 0,$$

$$f(x) = (x-b)^\beta \psi(x), \quad \psi(b) \neq 0,$$

¹⁾ Prin coeficienții funcțiunii înțelegem coeficienții seriei întregi $\sum a_n x^n$ prin care funcțiunea poate fi reprezentată.

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ fiind funcțiuni întregi cu coeficienți reali. De unde, prin derivare,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x-a} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{x-b} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Din aceste egalități rezultă că raporturile

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)}, \quad \frac{f'(b-\varepsilon)}{f(b-\varepsilon)},$$

în cari ε este un număr pozitiv arbitrar de mic, sunt de semne contrarii, cel dintâi pozitiv, iar cel de al doilea negativ. Însă în intervalul $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ funcțiunea $f(x)$ păstrând un semn invariabil, rezultă că între $a+\varepsilon$ și $b-\varepsilon$, prin urmare între a și b , derivata $f'(x)$ se anulează de un număr impar de ori.

426. Deși teorema lui Rolle se aplică ecuațiunilor transcendente ca și ecuațiunilor algebrice, nu este însă tot așa cu consecințele acestei teoreme. Astfel, propozițiunile următoare nu sunt în genere aplicabile funcțiunilor transcendente, anume:

1^o. Dacă rădăcinile unei ecuațiuni algebrice sunt *toate* reale, rădăcinile derivatei sunt *toate* reale.

2^o. Dacă rădăcinile unei ecuațiuni algebrice sunt *toate* reale, între două rădăcini consecutive ale ecuațiunii se găsește o singură rădăcină a derivatei.

Pentru a justifica aserțiunea noastră în ce privește propozițiunea 1^o, este de ajuns să considerăm un exemplu. Fie funcțiunea întreagă

$$f(x) = e^{x^2} (x^2 + 2x - 1),$$

ale cărei rădăcini sunt toate reale, pe când derivata sa

$$f'(x) = 2e^{x^2} (x^3 + 2x^2 + 1)$$

are două rădăcini imaginare.

În ce privește propozițiunea 2^o, fie $f(x)$ o funcțiune întreagă de un rang $p > 1$, fără multiplicator exponențial și care nu se anulează pentru $x = 0$. Forma sa este

$$f(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a_n}\right)^p}.$$

Luând derivata logaritmică, avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{x-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x}{a_n^p} \right]$$

$$= x^p \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{a_n^{p+1}} + \frac{x}{a_n^{p+2}} + \dots \right);$$

de unde rezultă că derivata $f'(x)$ se poate scrie

$$f'(x) = x^p \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ fiind o funcțiune întreagă.

Presupunând că toate zerurile lui $f(x)$ sunt reale, vedem că între cea mai mică rădăcină negativă în valoare absolută, și cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuațiunii $f(x) = 0$, ecuațiunea $f'(x)$ admite $x = 0$ ca rădăcină multiplă de ordinul $p > 1$.

427. Consecințele teoremei lui Rolle, menționate în paragraful precedent, subsistă dacă funcțiunea este de genul zero, precum și în cazul când fiind de genul întâi și având un multiplicator exponențial e^{ax+b} , coeficientul a este real.

Să considerăm cazul din urmă și făcând abstracțiune de multiplicatorul e^b , să presupunem că avem

$$(1) \quad f(x) = e^{ax} x^m \Pi \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{\frac{x}{a_n}};$$

de unde

$$(2) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = a + \frac{m}{x} + \Sigma \left(\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Să presupunem că $f'(x) = 0$ ar admite o rădăcină imaginară $\alpha + i\beta$; va rezultă egalitatea

$$\alpha + \frac{m}{\alpha + i\beta} + \Sigma \left(\frac{1}{\alpha + i\beta - a_n} + \frac{1}{a_n} \right) = 0,$$

sau

$$\alpha + \frac{m(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \Sigma \left[\frac{\alpha - a_n - i\beta}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} + \frac{1}{a_n} \right] = 0.$$

Coeficientul lui i în această expresiune este

$$-\beta \left[\frac{m}{\alpha^2 + \beta^2} + \Sigma \frac{1}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} \right],$$

care nu se anulează decât pentru $\beta = 0$. De unde rezultă că ecuațiunea $f'(x)$ nu admite rădăcini imaginare.

Rămâne să arătăm că între două rădăcini consecutive ale ecuațiunii $f(x) = 0$, ecuațiunea $f'(x) = 0$ are o singură rădăcină. Pentru aceasta, să derivăm ambele membre ale ecuațiunii (2),

$$\frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{f(x)} = - \left[\frac{m}{x^2} + \Sigma \frac{1}{(x - a_n)^2} \right].$$

Membrul al doilea fiind, pentru x real, esențialmente negativ, funcțiunea $f'(x)$ descrește necontenit între două zeruri consecutive oarecari ale funcțiunii $f(x)$, prin urmare nu se poate anula decât o singură dată în fiecare interval (a_n, a_{n+1}) . q. e. d.

CAPITOLUL XXII.

FUNCTIUNI ANALITICE UNIFORME NU INTREGI.

Ne propunem să găsim expresiuni analitice cari să reprezinte funcțiuni analitice uniforme având singularități date.

428. Să considerăm mai întâi cazul particular când funcțiunea ce voim să construim n'are alte singularități decât un număr nelimitat de poluri cu un singur punct limită, care este neapărat un punct singular esențial. Să presupunem că acest punct coincide cu punctul $x = \infty$ și fie

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

polurile date dispuse în ordinea modulelor crescânde; prin urmare

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

În virtutea teoremei lui Weierstrass, putem totdeauna să construim o funcțiune întreagă $G(x)$, care să aibă punctele (1) ca zeruri și numai aceste puncte.

Să reprezentăm prin $G_1(x)$ o funcțiune întreagă arbitrară, care să nu aibă nici un zero comun cu $G(x)$. Funcțiunea

$$(2) \quad \frac{G_1(x)}{G(x)}$$

împlinește condițiunea cerută, căci ea reprezintă o funcțiune uniformă în tot planul, neavând alte singularități decât punctele (1) cari sunt poluri.

Cazul când punctul limită este un punct a situat la distanță finită se reduce printr'o schimbare de variabilă la cel precedent. Să ne închipuim, în acest caz, polurile (1) dispuse astfel ca $\lim_{n=\infty} |a - a_n| = 0$ și să facem substituțiunea

$$(3) \quad x' = \frac{1}{x-a}.$$

Punctele

$$(4) \quad a'_n = \frac{1}{a_n - a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

vor fi dispuse în ordinea modulelor crescânde și

$$\lim_{n=\infty} |a'_n| = \infty.$$

Expresiunea $\frac{G_1(x')}{G(x')}$, în care funcțiunile G și G_1 au relativ la punctele (4) semnificații analoage cu cele considerate în cazul întâi, nu are alte singularități decât aceste puncte ca poluri.

Prin urmare expresiunea

$$\frac{G_1 \left(\frac{1}{x-a} \right)}{G \left(\frac{1}{x-a} \right)}$$

împlinește condițiunea cerută.

429. Să trecem acum la cazul general când singularitățile sunt, fără distincțiune, poluri sau puncte singulare esențiale. Soluțiunea acestei probleme se datorește matematicianului suedez *Mittag-Leffler* și este cuprinsă în teorema următoare:

Teorema lui Mittag-Leffler.

Fie

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

un șir nelimitat de puncte izolate și

$$(2) \quad G_1 \left(\frac{1}{x-a_1} \right), G_2 \left(\frac{1}{x-a_2} \right), \dots, G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right), \dots$$

un șir de funcțiuni analitice uniforme, asociate respectiv punctelor șirului (1), fiecare din ele având ca punct singular unic punctul la care este asociată și anulându-se pentru $x = \infty$. Una oarecare din aceste funcțiuni este de forma

$$(3) \quad G_i \left(\frac{1}{x-a_i} \right) = \frac{A_1^{(i)}}{x-a_i} + \frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^2} + \dots,$$

coeficienții fiind cantități constante date și numărul termenilor limitat sau nelimitat.

Teorema lui Mittag-Leffler constă în aceasta: *Este totdeauna posibil a construi o funcțiune analitică uniformă $F(x)$ care să nu aibă alte singularități decât punctele date (1) și astfel ca diferența*

$$F(x) - G_i \left(\frac{1}{x-a_i} \right) \quad (i=1, 2, \dots)$$

să fie olomorvă în domeniul punctului a_i .

Funcțiunile $G_i \left(\frac{1}{x-a_i} \right)$ caracterizează așa dar singularitățile funcțiunii ce voim să construim.

Șirul (1) fiind dispus în ordinea modulelor crescânde, să presupunem $|a_1| > 0$. Să facem să corespundă punctelor (1) un șir de numere pozitive

$$(4) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots,$$

supuse la singura condițiune ca seria $\Sigma \varepsilon_n$ să fie convergentă. Fie R un număr pozitiv dat oricât de mare voim și n cel mai mic număr pozitiv pentru care

$$|a_n| > R.$$

Din origină ca centru cu raza R să descriem un cerc și fie x un punct interior acestui cerc. Punctul a_n fiind exterior cercului, funcțiunea $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, care n'are altă singularitate decât acest punct, este olomorfă în interiorul cercului precum și pe cerc; prin urmare ea se poate reprezintă printr'o serie întreagă de x ,

$$(5) \quad G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} B_v^{(n)} x^v.$$

convergentă în acest cerc și pe cerc.

La aceeași concluziune ajungem, dacă dezvoltăm în serii întregi termenii membrului al doilea din (3), pentru $i = n$, și facem suma acestor serii, conform teoremei lui Weierstrass, asupra sumei de serii.

Seria din membrul al doilea din egalitatea (5) fiind convergentă pentru $|x| = R$, rezultă că există un număr întreg m_n astfel ca inegalitatea

$$\sum_{v=m_n}^{\infty} \left| B_v^{(n)} \right| R^v < \varepsilon_n$$

să fie satisfăcută. Cu atât mai mult vom avea în interiorul cercului (R)

$$(6) \quad \left| \sum_{v=m_n}^{\infty} B_v^{(n)} x^v \right| < \varepsilon_n^1).$$

¹⁾ Iată cum se poate calcula o valoare a lui m_n pentru valori ale lui x al căror modul este mai mic ca R . Fie M_n o limită superioară a lui $\left| G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) \right|$ dealungul cercului (R); vom avea

$$\left| B_v^{(n)} \right| < \frac{M_n}{R^v};$$

de unde, pentru valori x al căror modul $r < R$,

$$\left| \sum_{v=m_n}^{\infty} B_v^{(n)} x^v \right| < M_n \sum_{m_n}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^v = M_n \frac{\left(\frac{r}{R} \right)^{m_n}}{1 - \frac{r}{R}}.$$

Este de ajuns a pune

$$M_n \frac{\left(\frac{r}{R} \right)^{m_n}}{1 - \frac{r}{R}} < \varepsilon_n,$$

sau

$$\left(\frac{r}{R} \right)^{m_n} < \frac{\varepsilon_n (R-r)}{M_n R}$$

și a lua cea mai mică valoare întreagă m_n care satisface această inegalitate.

Să punem

$$(7) \quad F_n(x) = \sum_{\nu=m_n}^{\infty} B_{\nu}^{(n)} x^{\nu}$$

și

$$(8) \quad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} B_{\nu}^{(n)} x^{\nu};$$

vom avea

$$(9) \quad F_n(x) = G_n \left(\frac{1}{x - a_n} \right) - P_n(x).$$

Funcțiunea $F_n(x)$ are singularitatea a_n a funcțiunii caracteristice corespunzătoare G_n și punctul $x = \infty$ ca pol din cauza polinomului $P_n(x)$. În virtutea inegalității (6) avem

$$(10) \quad |F_n(x)| < \varepsilon_n.$$

În același mod construim funcțiunile

$$\bullet F_{n+1}(x), F_{n+2}(x), \dots,$$

supuse la condițiunile

$$|F_{n+1}(x)| < \varepsilon_{n+1}, |F_{n+2}(x)| < \varepsilon_{n+2}, \dots,$$

pentru $|x| < R$. De unde urmează că în interiorul cercului (R), seria

$$(11) \quad \sum_{i=n}^{\infty} F_i(x)$$

este absolut și uniform convergentă.

Să aplicăm aceleași transformări funcțiunilor

$$G_1 \left(\frac{1}{x - a_1} \right), \dots, G_{n-1} \left(\frac{1}{x - a_{n-1}} \right),$$

pentru valori ale lui x , ale căror module sunt respectiv mai mici decât $|a_1|, \dots, |a_n|$. Vom obține funcțiunile

$$F_i(x) = G_i \left(\frac{1}{x - a_i} \right) - P_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

uniforme, neavând fiecare altă singularitate decât punctul respectiv a_i , care este un punct singular caracterizat de funcțiunea corespunzătoare G_i și mai având fiecare ca pol punctul $x = \infty$. Suma

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x),$$

având o valoare finită pentru toate valorile lui x diferite de $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, rezultă că adunând-o cu seria (11), obținem seria

$$(12) \quad \sum_1^{\infty} F_i(x) = \sum_1^{\infty} \left[G_i \left(\frac{1}{x - a_i} \right) - P_i(x) \right],$$

absolut și uniform convergentă în interiorul cercului (R), exceptând punctele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$. Însă, luând n destul de mare, putem presupune R oricât de mare voim; de unde urmează că seria (12) este absolut și uniform convergentă în toată întinderea planului, din care excludem punctele

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Funcțiunea

$$(13) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right]$$

împlinește condițiunile cerute. În adevăr, în orice regiune în care nu se găsește nici unul din punctele (1), ea este olomorvă ¹⁾. De altă parte, aceste puncte fiind izolate, putem considera un număr pozitiv ϱ destul de mic, astfel ca în cercul descris dintr'un punct a_i ca centru cu raza ϱ , să nu se găsească alt punct al șirului (1) decât punctul a_i . În interiorul acestui cerc diferența

$$F(x) - G_i \left(\frac{1}{x-a_i} \right) = F(x) - F_i(x) - P_i(x).$$

este evident olomorvă.

q. e. d.

S'a presupus $|a_1| > 0$. Dacă $x = 0$ este un punct singular al funcțiunii ce voim să construim și dacă reprezentăm prin

$$(14) \quad G_0 \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{A_1^{(0)}}{x} + \frac{A_2^{(0)}}{x^2} + \dots,$$

funcțiunea caracteristică corespunzătoare, va fi de ajuns să scriem

$$(15) \quad F(x) = G_0 \left(\frac{1}{x} \right) + \sum_1^{\infty} \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right],$$

pentru ca $F(x)$ să împlinească condițiunile cerute. Putem face să intre $G_0 \left(\frac{1}{x} \right)$ în suma generală, privind $P_0(x) = 0$ și să scriem

$$(16) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right].$$

¹⁾ Fie $x_0 \neq a_n$. Intr'un cerc (r) descris din x_0 ca centru cu o rază r destul de mică, astfel ca în (r) să nu fie nici unul din punctele a_n , putem scrie

$$G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) = p_n(x-x_0),$$

$p_n(x-x_0)$ fiind serie întreagă de $x-x_0$, convergentă în (r). Însă

$$\sum_1^{\infty} p_n(x-x_0)$$

este uniform convergentă în (r), prin urmare această serie se poate înlocui prin o serie întreagă $p(x-x_0)$, convergentă în (r).

Expresiunea cea mai generală a unei funcțiuni uniforme care satisface aceleași condițiuni se va obține adăugând rezultatului precedent o funcțiune întreagă $G(x)$:

$$(17) \quad F(x) = \Sigma \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right] + G(x).$$

430. Să observăm că trebuie să privim ca termen al seriei din membrul al doilea expresiunea

$$G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x)$$

și că nu este permis a separa polinomul $P_n(x)$ de funcțiunea $G_n(x)$. Prezența acestor polinoame în compunerea termenilor seriei face ca această serie să fie absolut convergentă, precum rezultă din demonstrațiunea teoremei.

431. Se poate întâmpla — și aceasta se prezintă în genere în aplicațiuni — ca să existe o valoare constantă a gradului polinoamelor $P_n(x)$ astfel ca seria din membrul al doilea (17) să fie absolut convergentă. În acest caz, luăm drept grad comun al acestor polinoame cel mai mic număr întreg care împlinește condițiunea precedentă.

432. *Viceversa. Fiind dată o funcțiune analitică $f(x)$ având un număr oarecare de singularități izolate, polare sau esențiale, o putem pune sub forma (17).*

Pentru aceasta trebuie să începem prin a calcula funcțiunile $G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right)$, caracteristice singularităților funcțiunii $f(x)$.

Caracterul acestor funcțiuni, s'o reamintim, consistă în aceea că în domeniul unui punct singular a_n , diferența

$$f(x) - G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right)$$

trebuie să fie olomorvă. Aceste funcțiuni odată determinate, deducem din ele polinoamele $P_n(x)$, conform teoremei lui Mittag-Leffler. Fie

$$F(x) = \Sigma \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right].$$

Diferența

$$f(x) - F(x)$$

este o funcțiune analitică uniformă neavând în tot planul nici un

punct singular, prin urmare se reduce la o funcțiune întreagă și avem expresiunea

$$f(x) = F(x) + G(x),$$

în care rămâne a determina funcțiunea $G(x)$.

433. *Aplicațiuni.* 1^o. Fie

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}.$$

Această funcțiune n'are alte singularități la distanță finită decât poluri de ordinul întâi date de

$$a_n = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

prin urmare funcțiunile $G_n \left(\frac{1}{x - a_n} \right)$ se reduc la câte un singur termen de forma

$$\frac{A}{x - a_n}.$$

Determinarea funcțiunilor G_n . În domeniul punctului $x = 0$, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \pi x} &= \frac{1}{\pi x} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \dots} \\ &= \frac{1}{\pi x} + \frac{\pi x}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Așa dar

$$(2) \quad G_n \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\pi x}.$$

Fie n un număr întreg oarecare; punând $x = n + x'$, avem

$$\sin \pi x = (-1)^n \sin \pi x'.$$

Prin urmare, în domeniul punctului $x = n$,

$$\frac{1}{\sin \pi x} = (-1)^n \left[\frac{1}{\pi(x-n)} + \frac{\pi}{3!} (x-n) + \dots \right];$$

de unde se conchide

$$(3) \quad G_n \left(\frac{1}{x-n} \right) = \frac{(-1)^n}{\pi(x-n)}.$$

Determinarea polinoamelor $P_n(x)$. Conform teoriei generale, polinomul $P_n(x)$ se obține dacă, presupunând $|x| < |a_n|$, se des-

voltă $G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right)$ în serie întreagă de x , din care se ia, începând dela cel dintâi, un număr de termeni suficient pentru ca seria

$$\sum \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right]$$

să fie absolut convergentă.

Avem

$$\frac{(-1)^n}{\pi(x-n)} = -\frac{(-1)^n}{\pi(n-x)} = -\frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{x}{n^2} + \dots \right).$$

Este de ajuns a lua

$$P_n(x) = -\frac{(-1)^n}{n\pi},$$

căci seria al cărei termen general este

$$(-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n(x-n)},$$

este absolut convergentă în tot planul din care excludem punctele $x = n$.

Vom avea așa dar

$$(4) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum' (-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right) + G(x),$$

suma $\sum'$ referindu-se la toate valorile întregi ale lui n , pozitive și negative, exceptând $n=0$. Rămâne a determina funcțiunea $G(x)$.

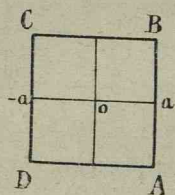


Fig. 93

Pentru aceasta să considerăm pătratul ABCD ale cărui laturi sunt respectiv paralele și simetrice cu axa reală și axa imaginară (fig. 93), despărțate de aceste axe cu cantitatea $a = m + \frac{1}{2}$, m fiind un număr întreg pozitiv. Dealungul laturei AB, avem $x = a + it$, t variând dela $-a$ la $+a$; prin urmare

$$\sin \pi x = \sin \pi \left(m + \frac{1}{2} + it \right) = (-1)^m \cos h\pi t.$$

Când t variază dela 0 la $\pm a$, $\cos h\pi t$ crește neconținut dela 1 la ∞ . Dealungul laturei AB, ca și dealungul laturei paralele CD, avem $|\sin \pi x| \geq 1$. Dealungul laturei BC, avem $x = t + ia$, $t(-a \dots +a)$; prin urmare

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \sin \pi(t + ia) = \sin \pi t \cos h\pi a + i \cos \pi t \sin h\pi a, \\ |\sin \pi x|^2 &= \sin^2 \pi t \cos^2 h\pi a + \cos^2 \pi t \sin^2 h\pi a \\ &= \sin^2 \pi t + \sin^2 h\pi a. \end{aligned}$$

Dealungul laturilor BC, AD, modulul funcțiunei $\sin \pi x$ crește dar împreună cu a , adică cu numărul întreg m și tinde către infinit când m tinde către ∞ .

Din cele ce preced rezultă că dealungul pătratului considerat, modulul funcțiunii $\frac{1}{\sin \pi x}$ este mai mic, sau cel mult egal cu 1. De altă parte, dealungul aceluiaș pătrat, seria Σ' nu trece peste o cantitate fixă, căci ea este absolut convergentă în tot planul din care exceptăm punctele $x = \text{număr întreg}$. Așă dar modulul funcțiunei $G(x)$, care figurează în ecuațiunea (4), rămâne mai mic decât o cantitate finită, dealungul pătratului, oricât de mare ar fi latura lui. De unde rezultă că $G(x)$ este o constantă. Făcând în (4) $x = 0$, Găsim $G(x) = 0$. Așă dar avem

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \Sigma' (-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right).$$

434. Grupând doi câte doi termenii cari corespund la $\pm n$, formula precedentă se poate scrie

$$(5) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \lim_{m=\infty} \Sigma_{n=-m}^{+m} \frac{(-1)^n}{x-n}.$$

Pe această formulă se citește imediat periodicitatea funcțiunii $\sin x$; căci înlocuind x prin $x + 1$, seria din membrul al doilea se reproduce cu semnul schimbat, etc.

435. In expresiunea (3) să înlocuim succesiv x prin a și prin $x + a$ și să scădem rezultatele; obținem

$$(6) \quad \frac{\pi}{\sin \pi(x+a)} - \frac{\pi}{\sin \pi a} = \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x+a-n} - \frac{1}{a-n} \right].$$

Făcând $a = \frac{1}{2}$, formula devine

$$(7) \quad \frac{\pi}{\cos \pi x} = \pi + \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x-(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right].$$

436. 2°. Fie

$$(9) \quad f(x) = \cot \pi x.$$

Această funcțiune n'are în tot planul alte singularități decât poluri cari sunt aceleași ca ale funcțiunii $\frac{1}{\sin \pi x}$. In domeniul $x = 0$,

avem

$$\begin{aligned}\cot \pi x &= \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} \frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots} \\ &= \frac{1}{\pi x} - \frac{\pi x}{3} + \dots\end{aligned}$$

și în domeniul punctului $x = n$,

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi(x-n)} - \frac{\pi}{3}(x-n) + \dots$$

Așa dar oricare ar fi numărul întreg n , avem

$$(10) \quad G_n \left(\frac{1}{x-n} \right) = \frac{1}{\pi(x-n)}.$$

Prin considerațiuni analoage cu cele din exemplul 1^o, conchidem

$$(11) \quad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Înlocuind x prin a și prin $x + a$ și scăzând rezultatele, obținem

$$(12) \quad \pi [\cot \pi(x+a) - \cot \pi x] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x+a-n} - \frac{1}{a-n} \right].$$

Făcând $a = \frac{1}{2}$, formula devine

$$(13) \quad \pi \operatorname{tg} \pi x = - \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right].$$

437. 3^o. Expresiunea unei funcțiuni întregi sub formă de produs de factori se poate deduce din teorema lui Mittag-Leffler. Fie $f(x)$ o funcțiune întreagă având un număr nelimitat de zeruri simple

$$(14) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (|a_1| > 0),$$

dispușe în ordinea modulelor crescânde. Derivata logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$ nu va avea alte singularități decât punctele (14), cari sunt poluri de ordinul întâi și partea principală relativă la polul a_n este $\frac{1}{x-a_n}$; prin urmare funcțiunea caracteristică corespunzătoare este

$$(15) \quad G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) = \frac{1}{x-a_n}.$$

Desvoltând membrul al doilea după puterile crescânde ale lui x (luăm $|x| < |a_n|$), avem

$$\frac{1}{x-a_n} = - \left[\frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{q_n-1}}{a_n^{q_n}} + \dots \right].$$

Punând

$$(16) \quad P_n(x) = \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{q_n-1}}{a_n^{q_n}}$$

și aplicând funcțiunii $\frac{f'(x)}{f(x)}$ teorema lui Mittag-Leffler, obținem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \sum_1 \left[\frac{1}{x - a_n} + P_n(x) \right],$$

reprezentând prin $g'(x)$ derivata unei funcțiuni întregi $g(x)$.

Integrând ambele membre între 0 și x după un drum care nu trece prin nici unul din punctele a_n și punând

$$g_n(x) = \int_0^x P_n(x) dx = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{q_n} \left(\frac{x}{a_n} \right)^{q_n},$$

avem

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} = g(x) - g(0) + \sum \left[\log \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) + g_n(x) \right].$$

De unde, trecând dela logaritmi la numere, scriind $g(x)$ în loc de $g(x) - g(0) + \log f(0)$, obținem expresiunea

$$f(x) = e^{g(x)} \prod \left(1 - \frac{x}{a_n} \right) e^{g_n(x)},$$

sub forma dată de Weierstrass. Dacă $f(x)$ are zeruri multiple, repetăm în expresiunea precedentă factorii primi corespunzători de atâtea ori câte unități sunt în ordinele lor de multiplicitate. Aplicând considerațiunile de mai sus funcțiunii

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum' \left(\frac{1}{x - n} + \frac{1}{n} \right),$$

obținem, integrând ambele membre,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = H' \left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}}.$$

438. 4°. *Funcțiunea $\Gamma(x)$.* Această funcțiune n'are în tot planul alte singularități decât polurile $x = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$). Reziduurile corespunzătoare se deduc imediat din formula (5) (§ 421). Astfel, reziduul relativ la polul $x = -n$ este dat de expresiunea

$$\lim_{x \rightarrow -n} [(x+n) \Gamma(x)] = \pi \left(\frac{x+n}{\sin \pi x} \right) \frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Funcțiunea caracteristică corespunzătoare este așa dar

$$G_n \left(\frac{1}{x+n} \right) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}.$$

Seria $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ fiind absolut convergentă în tot planul, din care excludem polurile, rezultă, pentru $\Gamma(x)$, expresiunea

$$\Gamma(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{x+n} + G(x),$$

$G(x)$ fiind o funcțiune întregă.

Seria din membrul al doilea coincide, precum se recunoaște imediat, cu integrala

$$\int_0^1 z^{x-1} e^{-z} dz = \int_0^1 z^{x-1} \left(1 - z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n!} + \dots \right) dz.$$

Dacă dar ne referim la definițiunea funcțiunei $\Gamma(x)$ cu ajutorul integralei

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz = \int_0^1 z^{x-1} e^{-z} dz + \int_1^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz,$$

conchidem, pentru funcțiunea $G(x)$, expresiunea sub formă de integrală

$$G(x) = \int_1^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz.$$

Observare. Se recunoaște, independent de dezvoltarea de mai sus, că integrala

$$\int_1^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$$

este o funcțiune olomorvă în tot planul (x), căci funcțiunea $z^{x-1} e^{-z}$ este, pentru $z > 0$, olomorvă în tot planul (x) și integrala este finită oricare ar fi punctul x .

CAPITOLUL XXIII.

SUBSTITUȚIUNI LINEARE

439. Fie x, y două variabile complexe, raportate la acelaș plan sau la plane diferite, legate între ele prin relațiunea

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

a, b, c, d fiind coeficienți reali sau imaginari, supuși la singura condițiune ca determinantul

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

să fie diferit de zero. Relațiunea (1) stabilește o corespondență biunivocă între punctele x figurate pe planul (x) și punctele y figurate pe planul (y) ; ea constituie dar o *transformare biunivocă* a celor două plane unul într'altul.

Operațiunea reprezentată prin relațiunea (1) se numește *substituțiune lineară* și determinantul (2) se numește *determinantul* substituțiunii.

Rezolvind ecuațiunea (1) în raport cu x , obținem relațiunea

$$(3) \quad x = \frac{-dy + b}{cy - a},$$

care transformă planul (y) în planul (x) . Substituțiunea (3) se numește substituțiunea *inversă* a substituțiunii (1).

Se obișnuiește a se notă substituțiunea (1) prin

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

și substituțiunea inversă prin

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Determinantul substituțiunilor S și S^{-1} este acelaș.

440. *Grupul linear.* Fie

$$S) \quad x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$$S') \quad x'' = \frac{ax' + b}{cx' + d},$$

două substituțiuni lineare, cea dintâiu transformând planul (x) în planul (x') și cea de a doua transformând planul (x') într'un plan (x'') , acelaș sau diferit. Înlocuind în $S')$ x' prin valoarea sa din S), obținem substituțiunea lineară

$$x'' = \frac{(aa' + cb')x + (ba' + dc')}{(ac' + cd')x + (bc + dd')},$$

care transformă planul (x) în planul (x'') și al cărei determinant

$$\begin{vmatrix} aa' + cb' & ba' + dc' \\ ac' + cd' & bc + dd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

este produsul determinanților celor două substituțiuni. Această substituțiune se notează SS' și se numește *produsul substituțiunilor* S, S' .

Se recunoaște imediat că dacă substituțiunea S' este egală cu S^{-1} , variabila x'' coincide cu x ; produsul SS^{-1} nu efectuează nici o transformare. Această substituțiune se zice că este identică cu unitatea.

Din cele ce preced rezultă că produsul a două substituțiuni lineare oarecari este o substituțiune lineară, printre cari se cuprinde și substituțiunea identică cu unitatea. Substituțiunile lineare formează dar un grup: *grupul linear*.

441. *Transformare conformă*. Derivata funcțiunei (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

fiind finită și diferită de zero în orice porțiune a planului care nu conține polul $x_0 = -\frac{d}{c}$, rezultă că orice arie (x), în interiorul căreia nu se află acest punct, se transformă într'un mod conform în aria corespunzătoare (y) și când una din variabilele x, y descrie, într'un sens dat, conturul care limitează aria sa, cealaltă variabilă descrie conturul său în acelaș sens.

Fie C o curbă închisă descrisă de x și I' curba închisă corespunzătoare descrisă de y . Dacă în interiorul curbei C se găsește polul funcțiunii y , aria interioară acestei curbe și toată întinderea planului (y) exterioară curbei I' se corespund într'un mod conform; viceversa, între aria interioară curbei I' și toată întinderea planului (x) exterioară curbei C , există corespondență conformă. Când x descrie curba C într'un sens dat, în raport cu aria interioară, y descrie curba I' în acelaș sens în raport cu aria exterioară, prin urmare în sens invers în raport cu aria interioară.

442. *Nu există altă substituțiune decât cea lineară care să transforme într'un mod conform planele (x), (y) între ele.*

Fie $y = f(x)$ o funcțiune care transformă într'un mod conform cele două plane între ele; $f(x)$ este neapărat o funcțiune uniformă care primește orice valoare numai o singură dată. Funcțiunea inversă $x = \varphi(y)$ se bucură de aceleași proprietăți. Funcțiunea $f(x)$ devine neapărat infinită într'un singur punct, situat la distanță finită sau la infinit. Acest punct nu poate fi punct singular esențial. În adevăr, fie $x = \xi$ punctul în care x devine infinit; dacă ξ ar fi punct singular esențial, ar urmă ca, în vecinătatea lui,

$f(x)$ să primească valori oricât de apropiate vom de o cantitate dată oarecare (§ 323). Fie x_0 un punct diferit de ξ și $y_0 = f(x_0)$ valoarea corespunzătoare a lui y . Fie, de altă parte, ξ_1 un punct destul de apropiat de ξ , în care y primește o valoare y_1 oricât de apropiată vom de y_0 ; însă lui y_1 trebuie să corespundă o valoare x_1 vecină cu x_0 . Funcțiunea $f(x)$ ar primi dar aceeași valoare y_1 în două puncte diferite, x_1 și ξ_1 ; ceea ce este în contradicție cu proprietatea funcțiunii de a primi orice valoare numai o singură dată.

Punctul $x = \xi$ este așadar un pol, al cărui ordin nu poate fi mai mare ca 1. Căci, dacă m este ordinul acestui pol, avem, în domeniul lui, dezvoltarea

$$y = (x - \xi)^{-m} [a_0 + a_1(x - \xi) \dots];$$

de unde, prin inversiune,

$$x - \xi = a_0^{\frac{1}{m}} y^{-\frac{1}{m}} + b_1 y^{-\frac{2}{m}} + \dots$$

Dacă dar $m > 1$, funcțiunea inversă $x = \varphi(y)$ n'ar fi uniformă în domeniul lui $y = \infty$.

Din cele ce preced rezultă că $f(x)$ este o funcțiune rațională de gradul întâiu. Această funcțiune este fracționară sau întreagă, după cum polul este la distanță finită sau la infinit.

443. *Teoremă fundamentală. O substituțiune lineară transformă un cerc într'un cerc, dacă privim linia dreaptă ca un cerc al cărui centru este la infinit.*

Pentru a demonstra această teoremă, vom considera succesiv substituțiuni particulare cuprinse în formula

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

I. $c = 0$. Expresiunea (1) se reduce la o funcțiune lineară întreagă, care cuprinde formele particulare:

$$(2) \quad y = x + b, \quad y = ax, \quad y = ax + b.$$

1°. Substituțiunea $y = x + b$ exprimă că punctul y se obține aplicând punctului x o translațiune egală, paralelă cu segmentul b și în direcțiunea dată de argumentul acestui segment; prin urmare orice figură (y) rezultă din aceeași translațiune a figurei corespunzătoare (x).

2°. Să considerăm forma $y = ax$ și fie

$$a = re^{i\omega}, \quad x = \varrho e^{i\theta}, \quad y = \varrho_1 e^{i\theta_1};$$

avem

$$\varrho_1 = a\varrho, \quad \theta_1 = \theta + \omega.$$

Orice figură compusă din puncte x și figura transformată (y) sunt așa dar figuri asemenea. Să presupunem variabilele x, y figurate pe același plan. Transformarea considerată lasă fixe punctele $x = 0$ și $x = \infty$. Unei raze vectorii (x) corespunde o rază vectoară (y) făcând cu cea dintâiu unghiul ω . Dacă $\omega = 0$, figura transformată este omotetică cu cea dintâiu.

Fie x_0 și y_0 două puncte corespunzătoare; cercului $|x - x_0| = R$ corespunde cercul $|y - y_0| = rR$, centrele acestor cercuri fiind punctele x_0, y_0 cari se corespund. Dacă $x_0 = 0$, cercurile sunt concentrice. Dacă a este real și pozitiv, orice rază vectoară se reproduce: substituțiunea se numește *iperbolică*.

Dacă $|a| = r = 1$ și $0 < \omega < 2\pi$, cercul cu centrul în origină se reproduce: substituțiunea se numește *eliptică*.

În cazul $|a| \neq 1$ și $0 < \omega < 2\pi$, punctul y corespunzător unui punct x nu se găsește nici pe aceeași rază vectoară, nici pe același cerc cu centrul în origină. Există însă o infinitate de spirale logaritmice, dependente de r și de ω , cari se reproduc prin substituțiunea considerată. În adevăr, fie

$$\varrho = Ae^{k\theta}$$

o spirală logaritmă, A fiind un parametru pozitiv arbitrar. Expunând că x descrie această spirală, avem ecuațiunile

$$x = Ae^{k\theta} \cdot e^{i\theta}, \quad y = Ae^{k\theta} \cdot e^{i(\theta+\omega)} = Ae^{\log r + k\theta} \cdot e^{i(\theta+\omega)}.$$

Pentru ca expresiunea lui y să fie cuprinsă în expresiunea lui x , în care înlocuim θ prin $\theta + \omega$, este de ajuns să luăm pentru k valoarea $k = \frac{\log r}{\omega}$; avem astfel

$$x = Ae^{\frac{\log r}{\omega} \omega} \cdot e^{i\theta}, \quad y = Ae^{\frac{\log r}{\omega} \omega} \cdot e^{i\theta'}, \quad \theta' = \theta + \omega.$$

Substituțiunea în acest caz se numește *loxodromică*¹⁾.

30. Substituțiunea lineară întreagă generală $y = ax + b$ produce același efect ca substituțiunea $x' = ax$, urmată de substituțiunea $y = x' + b$. De unde rezultă similitudinea figurii transformate cu cea primitivă. Substituțiunea lineară întreagă transformă

¹⁾ Dacă din punctul O' al sferei (§ 80) proiectăm pe sferă planul tangent în O , razele vectorii se proiectează după meridianele, iar unghiul a două curbe din plan se conservă pe sferă. De unde rezultă că spirala logaritmă cu polul O , situată în planul tangent, se proiectează după o curbă care face cu meridianele un unghi constant, căci unghiul spiralei cu razele sale vectorii este constant. O asemenea linie se numește *loxodromie*.

dar, *fără excepțiune*, un cerc într'un cerc și o linie dreaptă într'o linie dreaptă. Punctul.

$$x_0 = \frac{b}{1-a}, \quad a \neq 1,$$

se reproduce pe sine însuși.

Raportată la acest punct fix ca origină, substituțiunea considerată se scrie

$$(3) \quad y - y_0 = a(x - x_0);$$

ea este, relativ la punctul fix, de forma considerată mai sus (2⁰): *iperbolică, eliptică, sau loxodromică*, în aceleași condițiuni.

În virtutea similitudinii figurilor (x) , (y) rezultă, precum se recunoaște lesne, că două puncte simetrice în raport cu o dreaptă (x) se transformă în puncte simetrice în raport cu dreapta (y) . Deasemenea, două puncte armonice conjugate în raport cu un cerc (x) se transformă în raport cu cercul (y) în puncte de același fel.

II. $c \neq 0$. — 1⁰. Să considerăm mai întâiu cazul

$$(4) \quad y = \frac{1}{x}.$$

Să punem $x = \xi + i\eta$, $y = u + iv$; prin urmare

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad v = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

și, viceversa,

$$\xi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \eta = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Să presupunem că x descrie cercul

$$(5) \quad a(\xi^2 + \eta^2) + b\xi + c\eta + d = 0;$$

vom avea, pentru y , ecuațiunea

$$(6) \quad d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0.$$

Unui cerc oarecare (x) corespunde dar un cerc (y) . Dacă cercul (x) trece prin origină ($d = 0$), ecuațiunea (6) se reduce la linia dreaptă

$$(7) \quad bu - cv + a = 0.$$

Viceversa, unei drepte $a\xi + b\eta + c = 0$, care nu trece prin origină ($c \neq 0$), corespunde cercul

$$(8) \quad c(u^2 + v^2) + au - bv = 0,$$

care trece prin origină. De unde rezultă că un triunghi format din arce de cercuri, cari trec prin origină, se transformă într'un triunghi rectiliniu. Viceversa, un triunghi rectiliniu se transformă, în virtutea substituțiunii (4), într'un triunghi format din arce de cercuri cari trec prin origină.

Unei familii de drepte paralele corespund cercuri trecând prin origină având în acest punct aceeași tangentă

$$au - bv = 0.$$

Viceversa, cercurile trecând prin origină, cu aceeași tangentă în acest punct, se transformă în linii drepte paralele și aria cuprinsă între două cercuri se transformă în fâșia înfinită limitată de paralelele corespunzătoare.

2°. Substituțiunea

$$y = \frac{a}{x}$$

se poate înlocui prin substituțiunea $x' = \frac{1}{x}$, urmată de substituțiunea $y = ax'$. De unde rezultă că ea transformă cercurile în cercuri.

3°. În fine, substituțiunea generală (1) se poate reduce la o succesiune de substituțiuni de speța celor considerate mai sus. Este de ajuns, pentru aceasta, a efectua diviziunea membrului al doilea și a serie.

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}.$$

Introducând substituțiunile $x' = cx + d$, $x'' = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{x'}$, avem

$$y = \frac{a}{c} + x''.$$

Substituțiunea generală (1) se obține așa dar substituind x' lui x , x'' lui x' și, în fine, y lui x'' . Toate aceste substituțiuni fiind de speța celor considerate mai sus, rezultă că *substituțiunea (1) transformă cercuri în cercuri, liniile drepte fiind considerate ca cercuri cu centrul la înfinit.*

q. e. d.

Observare. Pentru ca substituțiunea generală (1) să transforme un cerc într-o linie dreaptă este necesar și suficient ca să existe pe cerc un punct căruia să corespundă $y = \infty$; prin urmare trebuie luat un punct oarecare x_0 al cercului ca pol $x_0 = -\frac{d}{c}$ al funcțiunii y .

454. Transformarea

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

depinde de trei parametre, raporturile a trei coeficienți către al

patrulea, de cari putem dispune astfel ca trei puncte date x_1, x_2, x_3 , să se transforme în trei puncte y_1, y_2, y_3 date după voie.

Din (1) rezultă egalitatea.

$$(2) \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2},$$

care arată că transformarea este unică și determinată dacă punctele x_1, x_2, x_3 precum și punctele y_1, y_2, y_3 sunt distincte. Este evident că coeficienții substituției se schimbă împreună cu punctele corespunzătoare date, așa că un cerc dat poate fi transformat într'alt cerc dat printr'o infinitate de substituțiuni lineare.

Putem determina substituțiunea astfel ca ariile interioare cercurilor $(x), (y)$ să se corespundă. Este deajuns, pentru aceasta, ca punctelor x_1, x_2, x_3 dispuse în sensul pozitiv să corespundă punctelor y_1, y_2, y_3 dispuse în acelaș sens. În această dispozițiune rezultă, în virtutea corespondenței biunivoce, că y descrie cercul său în sensul pozitiv în acelaș timp cu x ; căci y nu poate trece de două ori prin acelaș punct. De aici rezultă că ariile interioare se corespund. Fie, în adevăr, y_0 un punct interior cercului (y) și fie x_0 punctul corespunzător în planul (x) ; avem

$$(3) \quad y - y_0 = \frac{ad - bc}{cx_0 + d} \cdot \frac{x - x_0}{cx + d}.$$

Dacă y descrie cercul său în sensul pozitiv, argumentul membrului întâi se mărește cu 2π . Pentru ca și argumentul membrului al doilea să se mărească cu 2π , este necesar ca punctul x_0 să fie în interiorul cercului (x) și ca numitorul să nu se anuleze decât în exteriorul cercului. Ceeace justifică corespondența interioară celor două cercuri și prin urmare, în acelaș timp, corespondența exterioară.

455. Pentru a determina o substituțiune lineară care să transforme un cerc dat (x) într'o linie dreaptă (y) , este suficient a face ca la trei puncte ale cercului să corespundă trei puncte ale liniei drepte. Prin dispozițiunea punctelor y corespunzătoare punctelor x , determinăm direcțiunea în care y descrie dreapta dată, când x descrie cercul dat. Considerând ca pozitivă direcțiunea dreptei care corespunde direcțiunii pozitive a cercului, conchidem că interiorul cercului se transformă în semiplanul situat la stânga acestei drepte când ea este descrisă în sensul pozitiv.

456. *Aplicațiuni.* — 1^o. Să se transforme cercul $|x| = 1$ în axa imaginară (y) astfel ca punctelor $x = 1, i, -1$ să corespundă punctele $y = 0, -i, \infty$.

Corespondența punctelor extreme ne dă imediat ecuațiunea

$$y = a \frac{x-1}{x+1}.$$

Corespondența celorlalte două puncte dă valoarea $a = -1$. Substituțiunea căutată este așa dar

$$y = \frac{1-x}{1+x}.$$

Interiorul cercului este transformat, într'un mod conform, în semiplanul (y) situat la dreapta axei imaginare. Ca verificare, constatăm că centrului $x = 0$ corespunde punctul $y = +1$.

Dacă permutăm între ele punctele $x = \pm 1$, păstrând ordinea punctelor y , obținem substituțiunea

$$y = \frac{x+1}{x-1},$$

care transformă interiorul cercului $|x| = 1$ în semiplanul situat la stânga axei imaginare.

2°. Să se transforme cercul $|x| = 1$ în axa reală, făcând să se corespundă punctele $x = 1, i, -1$ cu punctele $y = 0, 1, \infty$.

Substituțiunea căutată este

$$y = i \frac{1-x}{1+x};$$

ea transformă interiorul cercului în semiplanul situat deasupra axei reale.

Dacă cercul este $|x| = R$ și corespondența punctelor $x = R, iR, -R, y = 0, R, \infty$, substituțiunea devine

$$y = iR \frac{R-x}{R+x},$$

Observare. O substituțiune lineară cu coeficienții reali nu poate stabili corespondență într'un cerc și axa reală; căci, într'o asemenea substituțiune, unei valori reale a uneia din variabile corespunde o valoare reală a celeilalte variabile: corespondență imposibilă între punctele cercului și axa reală.

457. Dacă o substituțiune lineară S transformă un cerc într'o linie dreaptă D , două puncte armonic conjugate în raport cu cercul se transformă în puncte simetrice în raport cu D .

Substituțiunea S poate fi înlocuită printr'un produs de două substituțiuni S', S'' astfel ca S' să transforme cercul în axa reală

și S'' — lineară întreagă — să transforme axa reală în dreapta D . Substituțiunea S'' transformând două puncte simetrice în raport cu axa reală în două puncte simetrice în raport cu dreapta D , este de ajuns a demonstra teorema pentru substituțiunea S' .

Să luăm centrul cercului ca origină, avem ecuațiunile

$$|x| = R, \quad S') \quad y = iR \frac{R - x}{R + x}.$$

Fie $\alpha = re^{i\varphi}$, $\beta = \frac{R^2}{r} e^{i\beta}$, două puncte armonice conjugate în raport cu cercul. Ducând aceste valori în expresiunea S' , avem pentru y valorile corespunzătoare

$$y_\alpha = iR \frac{R - \alpha e^{i\varphi}}{R + \alpha e^{i\varphi}}, \quad y_\beta = -iR \frac{R - \alpha e^{-i\varphi}}{R + \alpha e^{-i\varphi}},$$

cari nu diferă între ele decât prin semnul lui i .

Reciproca teoremei este evidentă.

Corolar. Două puncte armonice conjugate în raport cu un cerc se transformă în puncte armonice conjugate în raport cu cercul transformat.

Fie S substituțiunea care transformă un cerc (C) într'un cerc (C') . Putem înlocui S printr'un produs $S = S' S''$, astfel ca S' să transforme cercul (C) într'o dreaptă (D) și S'' să transforme dreapta (D) în cercul (C') . Aplicarea acestor două substituțiuni justifică propozițiunea enunțată.

458. *Puncte duble (fixe).* Presupunând variabilele x, y figurate pe acelaș plan și raportate la aceeaș origină, există cel mult două puncte pe cari substituțiunea lineară

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

le lasă neschimbate. Acest puncte se obțin făcând în (1) $y = x$; de unde ecuațiunea

$$(2) \quad cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Dacă $c = 0$ și $d \neq a$, un punct fix este la distanță finită și cel de al doilea este punctul $x = \infty$.

Dacă $c = 0$ și $d = a$, substituțiunea este de forma

$$y = x + \frac{b}{a};$$

unicul punct care se reproduce este punctul $x = \infty$.

Punctele ce se reproduc, adică punctele *fixe*, se numesc *puncte duble ale transformării*.

Presupunând $c \neq 0$, rădăcinile ecuațiunei (2) pot fi inegale, sau egale.

1^o. Să presupunem rădăcinile inegale și fie α, β aceste rădăcini. Avem

$$\alpha = \frac{a\alpha + \beta}{c\alpha + d}, \quad \beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

$$y - \alpha = \frac{(ad - bc)(x - \alpha)}{(c\alpha + d)(cx + d)}, \quad y - \beta = \frac{(ad - bc)(x - \beta)}{(c\beta + d)(cx + d)};$$

de unde, pentru substituțiunea considerată, expresiunea

$$(3) \quad \frac{y - \beta}{y - \alpha} = k \frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care

$$(4) \quad k = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}.$$

Dacă introducem substituțiunile

$$(5) \quad X = \frac{x - \beta}{x - \alpha}, \quad Y = \frac{y - \beta}{y - \alpha},$$

egalitatea (3) devine substituțiunea

$$(6) \quad Y = kX,$$

care transformă între ele, într'un mod conform, punctele X, Y , corespunzătoare punctelor x, y . Conservând calificativele substituțiunilor de forma (6) (§ 443), vom zice că substituțiunea (1) este *iperbolică, eliptică, loxodromică*, după cum coeficientul k este real și pozitiv, sau de forma $k = e^{i\omega}$, sau de forma $|k|e^{i\omega}$, $|k| \neq 1$, $0 < \omega < 2\pi$.

2^o. Ecuațiunea (2) are o rădăcină dublă $\alpha = \frac{a - d}{2c}$. Punând în egalitatea (3) $\beta = \alpha + h$, avem

$$1 - \frac{h}{y - \alpha} = \left(1 - \frac{h}{x - \alpha}\right) \left(1 - \frac{ch}{c\alpha + d + h}\right);$$

făcând $h = 0$, obținem, pentru substituțiunea (1), expresiunea

$$(7) \quad \frac{1}{y - \alpha} = \frac{1}{x - \alpha} + \gamma, \quad \gamma = \frac{2c}{a + d}.$$

În acest caz, substituțiunea (1) se numește *parabolică*.

459. *Interpretare geometrică.* Ecuațiunile (3) și (7) dau loc la interpretări geometrice simple. Să considerăm mai întâiu ecuațiunea (3) și să punem

$$(8) \quad \frac{x-\beta}{x-\alpha} = \varrho e^{i\theta}, \quad \frac{y-\beta}{y-\alpha} = \varrho' e^{i\theta'}, \quad k = \varrho e^{i\omega};$$

obținem ecuațiunile

$$(9) \quad \varrho' = r\varrho, \quad \theta' = \theta + \omega$$

1^o. Ecuațiunea $\varrho = \text{const.}$ și θ variabil exprimă că punctul x descrie un cerc al cărui centru O se află pe dreapta care unește punctele α, β și care determină pe această dreaptă două puncte A, B armonic conjugate cu punctele α, β

$$\frac{\overline{A\beta}}{\overline{A\alpha}} = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}} = \varrho.$$

Raza R a cercului este dată de egalitatea

$$R^2 = \overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta}.$$

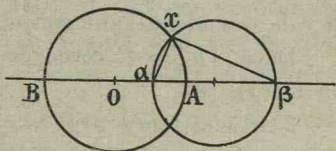


Fig. 94

Cercul conține în interiorul său punctul α (fig. 94), sau punctul β (fig. 95), după cum $\varrho \geq 1$. Dacă $\varrho = 1$, cercul degerează într-o linie dreaptă perpendiculară pe dreapta $\alpha\beta$, la egală distanță de aceste puncte.

Cercului $\varrho = \text{const.}$ al lui x corespunde cercul $\varrho' = \text{const.}$ al lui y , al cărui centru se află pe aceeași dreaptă $\alpha\beta$. Dacă substituțiunea este eliptică ($\varrho' = \varrho$), cele două cercuri coincid.

2^o. Ecuațiunea $\theta = \text{const.}$ și ϱ variabil exprimă că x descrie un cerc care trece prin punctele α, β ; acestui cerc corespunde pentru y cercul determinat de $\theta' = \theta + \omega$, care trece prin aceleași puncte. Dacă substituțiunea este iperbolică ($\theta' = \theta$), cele două cercuri coincid.

Cercurile din familia $\varrho = \text{const.}$ taie sub un unghi drept cercurile din familia $\theta = \text{const.}$, precum rezultă din egalitatea

$$(\overline{Ox})^2 = \overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta},$$

care exprimă că raza cercului $\varrho = \text{const.}$, în punctul de intersecțiune cu cercul $\theta = \text{const.}$, este tangentă la acest cerc.

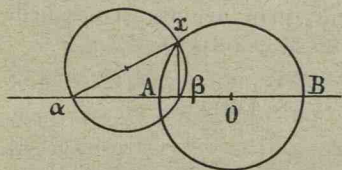


Fig. 95

460. Proprietățile geometrice considerate mai sus se pot recunoaște lesne, dacă înlocuim ecuațiunea (3) cu ecuațiunea transformată (6) și raportăm punctele X , Y la același plan (X).

1^o. Ecuațiunea $|X| = \varrho$ (const.) exprimă că punctul X descrie un cerc cu centrul în punctul $X = o$ cu raza ϱ ; acestui cerc corespunde cercul concentric $|Y| = |k| \varrho$. Extremitățile diametrelor acestor cercuri sunt puncte armonic conjugate cu centrul $X = o$ și cu punctul ∞ .

În virtutea substituțiunilor (5), cercurile (X), (Y) se transformă în cercuri (x), (y) și toate diametrele lor se transformă în dreapta care trece prin punctele fixe α , β corespunzătoare punctelor $X = o$, $X = \infty$. Extremitățile acestor diametre se transformă dar în punctele de intersecțiune ale cercurilor (x), (y) cu dreapta $\overline{\alpha\beta}$: cele dintâi fiind conjugate cu punctele $X = o$, $X = \infty$, rezultă că cele din urmă sunt conjugate cu punctele α , β (§ 457, corolar).

Dacă $|k| = 1$, cercurile (X), (Y) coincid, prin urmare și cercurile (x), (y).

2^o. Ecuațiunea $\arg X = \theta$ (constant) exprimă că punctul X descrie o rază vectoară făcând unghiul θ cu axa reală; de unde rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că cercurile $\varrho = \text{const.}$ și $\theta = \text{const.}$ sunt ortogonale; deasemenea și cercurile transformate, corespunzătoare cercurilor $\varrho' = |k| \varrho$, $\theta' = \theta + \omega$. Dacă $\omega = o$, razele vectoare (X), (Y) coincid, prin urmare și cercurile (x), (y).

461. Să considerăm ecuațiunea (7) (§ 458)

$$(10) \quad \frac{1}{y-a} = \frac{1}{x-a} + \gamma,$$

care este, precum am văzut, limita către care tinde ecuațiunea (3), când β tinde către α după o direcțiune oarecare. Cercurile

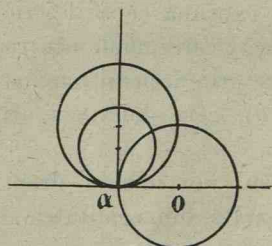


Fig. 96

$\theta = \text{const.}$, $\theta' = \text{const.}$ cari trec prin punctele α , β devin cercuri tangente în punctul α la direcțiunea $\lim. \overline{\alpha\beta}$. Cercurile $\varrho = \text{const.}$ precum și cercurile $\varrho' = \text{const.}$, având centrele lor pe această dreaptă ($\overline{\alpha\beta}$) pe care o taie în două puncte armonic conjugate cu punctele α , β , vor trece, la limită, prin punctul α . Aceste cercuri au dar, la limită, centrele lor pe tangenta comună în α la cercurile $\theta = \text{const.}$; de unde rezultă că ambele

familii $\varrho = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ sunt ortogonale în acest punct.

462. Proprietățile precedente se mai pot recunoaște în modul următor:

Să punem $x - a = X$, $y - a = Y$; ecuațiunea considerată devine

$$(11) \quad \frac{1}{Y} = \frac{1}{X} + \gamma.$$

Dacă punctul X descrie cercuri având aceeași tangentă în punctul $X = 0$, punctul $\frac{1}{X}$ descrie linii drepte paralele (§ 443, II). Punctul $\frac{1}{Y}$ descrie, în virtutea ecuațiunii (11), drepte paralele cu cele precedente; prin urmare Y descrie cercuri având la origină aceeași tangentă ca cercurile (X). De unde rezultă că cercurile (x) tangente la aceeași dreaptă în punctul a , se transformă, în virtutea ecuațiunii (10), în cercuri cari se bucură de aceeași proprietate.

Pentru ca un cerc (x) din cele considerate mai sus să coincidă cu cercul transformat (y), este evident necesar și suficient ca dreptele corespunzătoare $\left(\frac{1}{X}\right)$, $\left(\frac{1}{Y}\right)$ să coincidă. Pentru aceasta este necesar, precum arată ecuațiunea (11), ca dreptele $\left(\frac{1}{X}\right)$ să fie paralele cu direcțiunea γ . În acest caz, fiecare cerc (x) al sistemului considerat se reproduce prin ecuațiunea (10).

463. *Aplicațiune. Două cercuri excentrice C , C' fiind date, se poate determina o substituțiune lineară care să le transforme în două cercuri concentrice. Fie A , B ; A' , B' punctele de intersecțiune ale acestor cercuri cu linia care trece prin centrele lor. Fie α , β două puncte, situate pe această dreaptă, armonic conjugate în raport cu ambele cercuri ¹⁾. Substituțiunea*

$$y = k \frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care k este o constantă oarecare, realizează transformarea cerută. În adevăr, ea transformă toate cercurile cari trec prin punctele α , β într'un fascicul de drepte trecând prin punctul $y = 0$ și cercurile C , C' (ortogonale la toate cercurile cari trec prin α , β) în cercuri C_1 , C'_1 ortogonale la acest fascicul de drepte, prin urmare concentrice, având centrul $y = 0$.

Exemplu. — Scriind substituțiunea considerată sub forma

$$(1) \quad Z = k \frac{z - \beta}{z - \alpha}, \quad z = x + iy, \quad Z = X + iY,$$

¹⁾ Există un asemenea sistem de două puncte și numai unul.

k fiind o constantă reală, să considerăm cercurile

$$(2) \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Condițiunea ca punctele $\underline{a}$, $\underline{\beta}$ să fie armonic conjugate în raport cu primul cerc este

$$(3) \quad a\beta = r^2$$

și, în raport cu cel de al doilea, această condițiune este

$$(a - a) (\beta - a) = r_1^2,$$

sau, în virtutea condițiunii (3),

$$(4) \quad a(a + \beta) = r^2 - r_1^2 + a^2.$$

Din substituțiunea (1) scoatem expresiunile

$$(5) \quad x = \frac{a[(X - k)^2 + Y^2] + k(a - \beta)(X - k)}{(X - k)^2 + Y^2},$$

$$y = k \frac{(\beta - a)Y}{(X - k)^2 + Y^2}.$$

Ducând aceste valori în prima ecuațiune (2) și ținând seamă de condițiunea (3), obținem ecuațiunea

$$(6) \quad (r^2 - a^2)(X^2 + Y^2) = k^2(\beta^2 - r^2).$$

Aceleași valori (5) duse în ecuațiunea cercului de al doilea și ținând seamă de condițiunea (3) și înlocuind r_1 prin valoarea sa din (4), obținem ecuațiunea

$$(7) \quad [r^2 + a(a - \beta) - a^2](X^2 + Y^2) = k^2[a(a - \beta) + \beta^2 - r^2]$$

Cercurile (6) și (7) sunt cercurile transformate ale cercurilor date. Dând lui k diferite valori reale, obținem atâtea sisteme de cercuri concentrice.

464. *Teorema fundamentală a transformării, prin substituțiuni lineare, a cercurilor în cercuri se mai poate demonstra în modul următor:*

Un cerc raportat la două axe rectunghiulare $(0\xi, 0\eta)$ poate fi reprezentat prin ecuațiunea

$$(1) \quad A\overline{x}x + Bx + \overline{B}x + C = 0,$$

în care $x = \xi + i\eta$, $\overline{x} = \xi - i\eta$, A și C sunt două constante reale, B și $\overline{B}$ două constante imaginare conjugate ¹⁾. Ceeace se verifică imediat.

¹⁾ Se obișnuiește a se notă $\overline{u}$ cantitatea imaginară conjugată cu cantitatea u .

Dacă $A = a$, ecuațiunea reprezintă o linie dreaptă.

Fie, pentru a demonstra teorema,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

o substituțiune lineară oarecare. Înlocuind în această egalitate i prin $-i$, avem

$$\bar{y} = \frac{\overline{ax + b}}{\overline{cx + d}}.$$

Inversele acestor două substituțiuni sunt respectiv

$$x = \frac{-dy + b}{cy - a}, \quad \bar{x} = \frac{-\bar{d}\bar{y} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{y} - \bar{a}}.$$

Substituind aceste valori în ecuațiunea (1) și efectuând calculele, obținem o ecuațiune de forma

$$A_1 \bar{y}y + B_1 y + \bar{B}_1 \bar{y} + C_1 = 0,$$

în care A_1 și C_1 sunt cantități reale, B_1 și $\bar{B}_1$ cantități imaginare conjugate. Ecuațiunea transformată reprezintă dar un cerc sau o linie dreaptă, după cum avem $A_1 \neq 0$, sau $A_1 = 0$.

q. e. d.

465. *Transformarea prin raze vectorii reciproce.* Operațiunea numită transformarea prin raze vectorii reciproce este o modificare a operațiunii reprezentată prin substituțiunea lineară $y = \frac{a}{x}$, în care a este un număr real și pozitiv, dacă înlocuim variabila $x = \xi + i\eta$ prin conjugata ei $\bar{x} = \xi - i\eta$.

1°. Fie mai întâiu $a = 1$ și să considerăm substituțiunile

$$y = \frac{1}{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{\bar{x}}, \quad x = re^{i\theta};$$

avem

$$y = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \quad \bar{y} = \frac{1}{r} e^{i\theta}.$$

Punctul x și punctul transformat $\bar{y}$ sunt pe aceeași rază vectorială, la distanțe de origină inversă una alteia, iar punctele y și $\bar{y}$ sunt simetrice în raport cu axa reală. Punctul $\bar{y}$ se zice *transformatul lui x prin raze vectorii reciproce*, sau *inversul lui x în raport cu cercul $|x| = 1$* . Operațiunea considerată se mai zice *inversiunea în raport cu origina*.

Transformarea este *involutivă*, căci relațiunea $x\bar{y} = e^{2i\theta}$ nu se schimbă dacă permutăm x cu $\bar{y}$.

Proprietățile inversiunii rezultă din proprietățile substituției
 $y = \frac{1}{x}$ și din simetria punctelor y și $\bar{y}$ în raport cu axa reală.

Se conchide că, prin inversiune, cercurile se transformă în cercuri și unghiurile se conservă. Dacă cercul trece prin origină (polul transformării), el se transformă într-o linie dreaptă; viceversa, unei linii drepte corespunde un cerc trecând prin origină. O rază vectoroară se transformă în ea însăși.

20. Fie acum $a = R^2$, $R \neq 1$. Punctul $x = re^{i\theta}$ și punctul $\bar{y} = \frac{R^2}{x} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}$ sunt inverse unul altuia în raport cu cercul $|x| = R$.

Aceste puncte sunt pe aceeași rază vectoroară și distanțele lor r , r_1 de origină satisfac egalitatea $rr_1 = R^2$. De unde rezultă că două puncte inverse în raport cu un cerc sunt armonic conjugate în raport cu acest cerc ¹⁾. Viceversa, două puncte armonic conjugate în raport cu un cerc sunt inverse în raport cu cercul. De altă parte, sistemul format dintr'un cerc și două puncte armonic conjugate în raport cu cercul se transformă, în virtutea substituției $y = \frac{R^2}{x}$, într'un sistem analog; conchidem că sistemul $(\bar{y})$ invers sistem (x) se bucură de aceeași proprietate și, prin urmare, inversiunea transformă un cerc și două puncte inverse, în raport cu cercul, într'un sistem de același fel.

O rază vectoroară reproducându-se prin inversiune, rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că centrele a două cercuri inverse sunt pe aceeași rază vectoroară; centrele lor însă nu se corespund.

Fie, de ex., C și C' centrele a două cercuri inverse în raport cu origina O ; aceste trei puncte se află dar pe aceeași linie dreaptă.

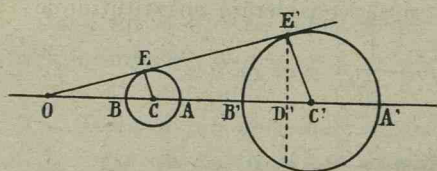


Fig. 97

centrului C (fig. 97); avem egalitățile

$$OC \cdot OD = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = a.$$

De unde

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{a}, \quad \frac{1}{OB'} = \frac{OB}{a}; \quad \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{OA + OB}{a} = \frac{2 OC}{a} = \frac{2}{OD}.$$

¹⁾ Adică în raport cu extremitățile diametrului care trece prin cele două puncte.

Fie A, B extremitățile diametrului cercului (C) situate pe linia centrelor; punctele A', B' respectiv inverse punctelor A și B vor fi extremitățile diametrului cercului (C') . Fie D punctul invers

Punctul D, inversul lui C, este așa dar punctul armonic conjugat cu origina în raport cu extremitățile A', B' ale diametrului cercului (C'); prin urmare diferit de centrul C'.

465. Transformarea în el însuși a semiplanului situat de o parte sau de alta a axei reale.

Pentru ca un semiplan să se reproducă, sau să se schimbe unul într'altul, este necesar ca axa reală să se reproducă, prin urmare, la valori reale x să corespundă valori reale y . De unde rezultă că coeficienții substituției

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

trebuie să fie reali. Punând $x = \xi + i\eta$, $y = u + iv$, găsim, pentru φ , expresiunea

$$\varphi = \frac{(ad - bc)\eta}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2},$$

care arată că punctele x și y se găsesc în același semiplan, sau în semiplane diferite, după cum determinantul substituției este pozitiv sau negativ,

Să presupunem determinantul pozitiv; putem să-l facem a fi egal cu 1, multiplicând toți coeficienții cu un factor convenabil. Vom presupune dar

$$(2) \quad ad - bc = 1.$$

Punctele fixe ale substituției (1) fiind rădăcinile ecuației

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0$$

sunt reale sau imaginare conjugate. Fie α și β aceste rădăcini, avem egalitatea (v. 458)

$$\frac{y - \beta}{y - \alpha} = k \frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care

$$k = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}},$$

sau, în virtutea ecuației (2),

$$(3) \quad k = \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}.$$

Dacă $|a + d| > 2$, ambii termeni ai fracțiunii sunt reali și de același semn; k este dar real și pozitiv: substituția este *iperbolică*.

Dacă $|a + d| < 2$, ambii termeni sunt imaginari conjugăți prin urmare k este de forma $k = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$: substituția

este *eliptică*. Dacă $|a + d| = 2$, rădăcinile sunt egale: substituțiunea este *parabolică*.

Substituțiunea *loxodromică* nu se prezintă în cazul coeficienților reali.

467. Transformarea unui cerc în el însuș.

Să considerăm cercul $|x| = 1$ cu centrul în origină și cu raza 1¹⁾. O substituțiunea lineară care transformă acest cerc în el însuș se poate obține formând produsul a două substituțiuni S_1, S_2 : cea dintâi care să transforme cercul în axa reală și cea de a doua transformând axa reală în acest cerc, corespondența între punctele celor două linii fiind diferită în cele două substituțiuni, căci altminterlea produsul s'ar reduce la substituțiunea identică.

1^o. Să luăm drept S_1 , substituțiunea

$$(1) \quad y = i \frac{1-x}{1+x},$$

care transformă cercul $|x| = 1$ în axa reală, astfel că semiplanul $y > 0$ corespunde interiorului acestui cerc.

2^o. Fie, pentru S_2 , substituțiunea

$$z = \frac{ay + b}{cy + d},$$

pe care o determinăm astfel ca axa reală y să se transforme în cercul $|z| = 1$, adică astfel ca pentru toate valorile reale y să avem

$$\left| \frac{ay + b}{cy + d} \right| = 1.$$

Pentru aceasta este necesar ca ambii termeni ai fracțiunii să fie imaginari conjugați; de unde rezultă condițiunile

$$c = \overline{a}, \quad d = \overline{b}.$$

Substituțiunea

$$(3) \quad z = \frac{ay + b}{\overline{a}y + \overline{b}}$$

transformă dar axa reală y în cercul $|z| = 1$. Înlocuind în această expresiune y prin valoarea sa (1), obținem substituțiunea

$$(4) \quad z = \frac{(b - ia)x + (b + ia)}{(\overline{b} - i\overline{a})x + (\overline{b} + i\overline{a})},$$

care transformă cercul $|x| = 1$ în el însuș. Verificarea este imediată,

1) Orice alt caz se poate aduce la acesta.

căci punând $x = e^{i\theta}$, ambii termeni ai membrului al doilea sunt imaginari conjugați.

Punând $b - ia = a$, $b + ia = \beta$, avem $\bar{b} - i\bar{a} = \bar{\beta}$, $\bar{b} + i\bar{a} = \bar{a}$; prin urmare, scriind a , b în loc de α , β și y în loc de z , substituțiunea (4) se va scrie

$$(5) \quad y = \frac{ax + b}{\bar{b}x + \bar{a}}.$$

Această substituțiune transformă cercul $|x| = 1$ în el însuși. Punctul y_0 corespunzător centrului $x = o$ este dat de egalitatea

$$(6) \quad y_0 = \frac{b}{a}.$$

Pentru ca acest punct să fie interior cercului, prin urmare pentru ca punctele interioare cercului $|x| = 1$ să se corespundă, trebuie să avem inegalitatea $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$; de unde, în virtutea egalității

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right|, \text{ rezultă condițiunea}$$

$$(7) \quad \bar{a}\bar{a} - \bar{b}\bar{b} > 0.$$

Punctele fixe x_1 , x_2 ale substituțiunii (5) satisfăcând egalitatea $x_1 x_2 = -\frac{b}{\bar{a}}$, avem între ele relațiunea

$$(8) \quad |x_1 x_2| = 1.$$

Printr-o transformare convenabilă putem face ca centrul $x = o$ să fie unul din punctele fixe ale substituțiunii, atunci celalt punct fix va fi la infinit și substituțiunea va avea forma $y = e^{i\omega}x$, $0 < \omega < 2\pi$.

Pentru a obține această substituțiune, să reprezentăm prin c extremitatea razei care trece prin punctul y_0 și să considerăm expresiunea

$$(9) \quad \frac{z - c}{z + c} = \frac{c + y_0}{c - y_0} \cdot \frac{y - c}{y + c},$$

care transformă punctul y_0 în punctul $z = o$. Între y_0 și c avem relațiunea

$$(10) \quad y_0 = cr_0, \quad r_0 = |y_0|.$$

Înlocuind în (9) y prin valoarea sa (5), avem

$$(11) \quad \frac{z - c}{z + c} = \frac{1 + r_0}{1 - r_0} \cdot \frac{ax + b - c(\bar{b}x + \bar{a})}{ax + b + c(\bar{b}x + \bar{a})}.$$

Dacă punem $a = re^{ia}$, avem $\bar{a} = re^{-ia}$. Relațiunea (6) ne dă

$b = y_0 a = c v_0 e^{-ia}$; de unde $\bar{b} = \frac{1}{c} v_0 e^{ia}$. Ducând acest valori în egalitatea (11), obținem

$$\frac{z - c}{z + c} = \frac{e^{2ia} x - c}{e^{2ia} x + c}.$$

De unde substituțiunea căutată

$$(12) \quad z = e^{2ia} x.$$

Observare. Dacă a este real ($a = 0$, sau π), substituțiunea (12) se reduce la identitate. Acest rezultat se justifică direct, dacă arătăm că substituțiunea dintre x și z , care are punctele fixe $0, \infty$ are, în cazul considerat, și punctele fixe $\pm c$; având astfel mai mult decât două puncte fixe, ea se reduce la identitate.

Punctele $\pm c$ fiind fixe pentru substituțiunea (9) dintre y și z , este deajuns a proba că ele sunt fixe pentru substituțiunea (5) dintre x și y .

Coefficientul a fiind real, avem $\bar{a} = a$ și substituțiunea (5) devine

$$(5') \quad y = \frac{ax + b}{bx + a}.$$

Punctele fixe ale acestei substituțiuni sunt date de ecuațiunea $\bar{b}x^2 = b$. Punând $b = |b| e^{i\beta}$, rezultă, pentru aceste puncte, valorile $x_1, x_2 = \pm e^{i\beta}$.

Presupunând $a > 0$ ¹⁾, avem, în virtutea egalității (6), $\arg y_0 = \beta$. De altă parte, relațiunea (10) ne dă $\arg y_0 = \arg c$; prin urmare $c = e^{i\beta}$. Punctele x_1, x_2 coincid dar cu punctele $\pm c$.

468. Nu există altă substituțiune decât cea lineară, care să transforme, într'un mod conform, un cerc în el însuș.

Această propozițiune se poate demonstra cu ajutorul teoremei următoare a lui H. Schwarz²⁾.

I. — Teoremă. Dacă $f(x)$ este o funcțiune de forma

$$(1) \quad f(x) = xP(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|x| = 1$ și satisface, în acest cerc, inegalitatea

$$(2) \quad |f(x)| \leq 1,$$

avem pentru toate punctele $0 < |x| < 1$, inegalitatea

$$|f(x)| \leq |x|.$$

¹⁾ Dacă $a < 0$, schimbăm semnele ambilor termeni ai fracțiunii.

²⁾ Das Schwarzsche Lemma. Bieberbach. Einführung in die konforme Abbildung.

Semnul = corespunde numai cazului $f(x) = e^{ia}x$.

1^o. Fie q un număr pozitiv < 1 ; modulul $|P(x)|$ nu poate atinge maximul său în cercul $|x| = q$ decât pe periferie. Înșă pe această periferie avem

$$|P(x)| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{q};$$

prin urmare, în virtutea inegalității (2), avem

$$|P(x)| \leq \frac{1}{q}.$$

Membrul întâi este independent de r și q , care poate primi orice valoare pozitivă având limita superioară egală cu 1. Pentru $q = 1$ și $|x| < 1$, avem așa dar

$$(3) \quad |P(x)| \leq 1.$$

De unde rezultă inegalitatea

$$(4) \quad |f(x)| \leq |x|.$$

2^o. Dacă $P(x)$ nu este o constantă, nu există nici un punct în interiorul cercului $|x| = 1$, în care să avem $|P(x)| = 1$. În adevăr, fie x_0 un punct în interiorul cercului astfel ca $|P(x_0)| = 1$ și $|x - x_0| = r$ un cerc interior cercului $|x| = 1$. Pe periferia acestui cerc există cel puțin un punct x astfel ca $|P(x)| > |P(x_0)|$; prin urmare în acest punct avem $|P(x)| > 1$; ceea ce este contrar inegalității (3).

Dacă dar există în interiorul cercului un singur punct x astfel că $|P(x)| = 1$, sau $|f(x)| = |x|$, $P(x)$ este neapărat o constantă, având modulul 1 și prin urmare

$$f(x) = e^{ia}x.$$

Așa dar, în afară de acest caz, avem în interiorul cercului inegalitatea

$$(5) \quad |f(x)| < |x|.$$

II. — Să demonstrăm acum că nu există altă substituțiune decât

$$y = e^{ia}x,$$

care să transforme, într'un mod conform, cercul $|x| = 1$ în el însuși.

În adevăr, fie $y = f(x)$ o substituțiune care transformă, într'un mod conform, cercul $|x| = 1$ în el însuși. Centrul cercului transformat fiind același ($x = 0$) cu al cercului primitiv și punctul y trebuind, în virtutea ipotezei, să fie interior acestui cerc, rezultă inegalitatea.

$$(6) \quad |y| < 1,$$

pentru toate punctele x interioare cercului $|x| = 1$. De unde conchidem, în virtutea teoremei lui Schwarz, inegalitatea

$$(7) \quad |y| < |x|,$$

valabilă în acelaș cerc.

Procedând în sens invers, adică privind x ca funcțiune de y , conchidem deasemenea, în virtutea transformării conforme, inegalitatea

$$(8) \quad |x| < |y|.$$

Din contradicțiunea inegalităților (7) și (8) rezultă egalitatea

$$(9) \quad y = e^{ia}x. \quad \text{q. e. d.}$$

VERIFICAT
2007

VERIFICAT
1987

VERIFICAT
2017

ERRATA

Pag. 142. Nota; linia a doua:

Să se cetească: $m \neq n$ în loc de: $m + n$.

Pag. 244, (8):

Să se cetească: a_n în loc de: a^n .

Pag. 321, penultima linie:

Să se cetească: inversiunea seriei integralei u din pag. 320 în loc de: inversiunea seriei (2) (§ 381).

Pag. 51, rândul 17 de sus: a se citi nedeterminat în loc de neterminat.



TIPARUL CULTURĂ NAȚIONALĂ 1924