CURSUL FACULTĂȚII DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

LECȚIUNI

DE

GEOMETRIE ANALITICĂ

URMATE DE

ÎNTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN STUDIUL ANALITIC AL GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

ȘI

NOȚIUNI ELEMENTARE DE GEOMETRIE VECTORIALĂ

DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

CU O PREFAȚĂ DE

G. ȚIȚEICA
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI,
MEMBRU AL ACADEMIEI ROMÂNE.

CLUJ
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «ARDEALUL»
SRT. MEMORANDULUI 22.
1927.

1774

CURSUL FACULTĂȚII DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

LECȚIUNI

DE

GEOMETRIE ANALITICĂ

URMATE DE

ÎNTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN STUDIUL ANALITIC AL GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

ȘI

NOȚIUNI ELEMENTARE DE GEOMETRIE VECTORIALĂ

DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

CU O PREFAȚĂ DE

G. ȚIȚEICA
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI,
MEMBRU AL ACADEMIEI ROMÂNE.

CLUJ
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «ARDEALUL»
SRT. MEMORANDULUI 22.
1927.

S. 143.

58641
Dublet

Dedic acest prim curs de Geometrie Analitică tipărit în limba română, fostului meu profesor, Domnului

G. Țițeica

Profesor la Universitatea din București,
Membru al Academiei Române,

în semn de admirație și respectos omagiu.

Prefață.

Colegul meu de astăzi, fostul meu elev de altă dată, D-l N. Abramescu, *îmi cere să însoțesc textul D-sale de* Geometrie Analitică *cu câteva rânduri de întroducere. O fac desigur cu toată plăcerea, dar nu cu gândul să servesc drept chezășie cuprinsului: asta nu se cuvine s'o facă un profesor pentru un coleg al său.*

Singurul scop pe care-l au rândurile de față este să deslușească impresia care se desprinde din cuprinsul tratatului D-lui Abramescu: un nemărginit entuziasm pentru matematică. *E dorința de a cunoaște cât mai multe proprietăți, de a ști și de a înțelege acea lume abstractă, frumos ordonată, cu proprietăți admirabile. E un nepotolit neastâmpăr de a întinde orizontul dincolo de ceace a cuprins mintea omenească până astăzi. E nesfârșită dragoste de știință, care a mânat în trecut și va însufleți și în viitor atâți oameni de știință.*

Acest entuziasm, pe care D-l Abramescu l-a turnat în volumul D-sale de Geometrie Analitică, îl cunosc de mult. Am cunoscut entuziasmul elevului de liceu, corespondent la Gazeta Matematică, al studentului și al profesorului de liceu. Rar exemplu, mai ales la noi, de stăruință și de dragoste neclintită de știință. Ba e ceva mai mult. E un exemplu de voință titanică și mai rară, care merită să fie cunoscut, ca să servească de pildă. După ce a fost multă vreme profesor de liceu, cu o hotărîre eroică s'a îndreptat spre învățământul superior. Și-a pregătit teza de doctorat, a făcut lucrări și astăzi e profesor universitar.

Cu aceste deslușiri, natura cursului de Geometrie analitică făcut de D-l Abramescu se înțelege ușor. El se caracterizează prin bogăția materialului, prin amănuntele frumoase și interesante, care strălucesc ca niște pietre prețioase. Ordinea materiei se poate discută, critica severă poate găsi ceva de criticat; calitățile însă de care am vorbit sunt reale. Cu aceste calități, izvorîte din entuziasm, cartea D-lui Abramescu poate produce entuziasm tinerilor studenți și aceasta e esențial.

București, Iulie 1927.

G. Țițeica.

Precuvântare.

Scopul lecţiunilor de faţă nu este altul de cât a pune la îndemâna studenţilor noştri un manual didactic de GEOMETRIE ANALITICĂ *scris în româneşte.*

Acest curs este tipărit din fondul anual pe care Ministerul Instrucţiunii l'a dat Universităţii din Cluj pentru publicarea manualelor didactice universitare. Exprim aci mulţumiri recunoscătoare Senatului universitar din Cluj pentru onoarea ce mi-a făcut aprobând această publicare.

Aduc omagiile mele fostului meu profesor, D-l G. ŢIŢEICA, *ale cărui neîntrecute lecţiuni ce ne ţinea la Universitatea din Bucureşti, mi-au servit ca bază pentru alcătuirea acestei Geometrii Analitice.*

Colegului meu, D-l Profesor universitar A. ANGELESCU, *îi păstrez o vie recunoştinţă pentru judicioasele sfaturi ce mi-a dat cu ocazia redijărei lecţiunilor de Geometrie Analitică.*

Mulţumesc în acelaş timp şi Institutului de arte grafice „Ardealul", Cluj, pentru stăruinţa depusă ca lucrarea să iasă cât mai bine.

Cluj, August 1927.

N. Abramescu.

Introducere.

1. *Geometria Analitică* studiază proprietățile figurilor raportate la un sistem de referințe. Cantitățile care definesc poziția punctului din spațiu, în raport cu sistemul de referințe, se numesc *coordonate.*

Descartes este întemeetorul Geometriei Analitice, prin lucrarea sa *Application de l'Algèbre à la théorie des courbes* (1637). Sistemul de referințe de care se servește Descartes pentru studiul curbelor plane este format de două drepte concurente din planul figurei. Studiul figurilor din spațiu, raportate la un sistem de referințe analog, adică la trei axe concurente, nu se dezvoltă de cât mai târziu, în urma lucrărei *Traité des courbes à double courbure*, pe care o compuse *Clairaut* în 1731, la vârsta de 16 ani. In acest sistem de referințe, coordonatele unui punct se zic carteziene.

Acesta nu este singurul sistem de a raporta o figură, căci vom vedea că putem defini poziția unui punct din plan, prin *coordonate polare*, raportând figura la o axă și un punct de pe această axă ; prin *coordonate trilatere*, când raportăm figura la trei drepte fixe ; iar, pentru spațiu, avem sisteme de *coordonate cilindrice*, *sferice*, *tetraedrice*, etc.

In general, operațiile algebrice, obținute în Geometria Analitică, depind de axele de coordonate, pe când proprietățile figurilor și care sunt obținute înterpretând aceste rezultate ale operațiilor algebrice depind numai de figură, iar nu de axele de coordonate. Un sistem de Geometrie Algebrică este ideal, atunci când operațiile depind numai de figura considerată, cum este *Calculul Vectorial.*

Nu în toate cazurile, metoda Geometriei Analitice dă soluțiunile cele mai simple și potrivite problemelor ce se pun asupra figurilor și sunt proprietăți care se obțin cu mult mai simplu și mai elegant prin procedeu pur geometric, fără calcule, fără a raporta figura la vreun sistem de referințe. Așa, de ex., proprietăți ale conicelor (secțiunile plane ale unui con de rotație), pentru a căror demonstrare trebuesc multe calcule în Geometria Analitică, se deduc foarte simplu și imediat cu ajutorul *Geometriei Proective*, care studiază proprietățile figurilor conservate printr'o deplasare și o proecție conică sau perspectivă.

Geometria pe o dreaptă.

2. **Vector.** Un vector $\overline{AB}$ este o porţiune dintr'o dreaptă (Fig. 1), care are o origină A, o extremitate B, o lungime egală cu măsura segmentului AB, şi un sens de la A la B. Aşa fiind, avem

$$\overline{AB} = -\overline{BA},\ \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Distanţa dintre punctele A şi B este lungimea vectorului $\overline{AB}$.

3. **Axă orientată.** Se zice axă orientată, sau mai simplu, axă, o dreaptă nelimitată $x'x$ (Fig. 1), pe care se distinge un sens de parcurs. Astfel, pe axa $x'Ox$, sensul pozitiv este la dreapta lui O, iar cel negativ, la stânga.



Fig. 1.

4. **Poziţia unui punct pe o axă.** Poziţia unui punct A pe axa $x'Ox$ (Fig. 1) este cunoscută, dacă se ştie cantitatea $OA = a$. Cântimea a se zice *abscisa* punctului A, iar punctul O, origina absciselor. Punctul A va fi la dreapta sau la stânga lui O, după cum abscisa lui este un număr pozitiv sau negativ.

5. **Mărimea unei vector de pe o axă.** Să considerăm pe o dreaptă dată trei puncte A, B, C (Fig. 2). Se pot prezenta trei cazuri

In primul caz, avem

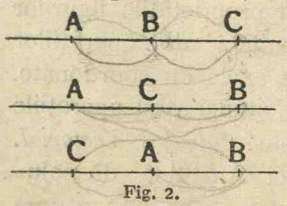


Fig. 2.

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},\ \overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}=0,$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

In cazul al doilea, avem

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB},\ \overline{AB}-\overline{CB}-\overline{AC}=0,$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

In cazul al treilea,

$$\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB},\ \overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CA} = 0,$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Deci, în toate cazurile, fiind date trei puncte A, B, C, pe o dreaptă, avem relaţia lui Chasles

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Aşa fiind, să considerăm un vector $\overline{AB}$ pe axa Ox (Fig. 1),

definit prin abscisa $\overline{OA}=a$ a originii sale A, şi abscisa $\overline{OB}=b$ a extremităţii B a vectorului. După relaţia lui Chasles, avem

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0,\ \overline{AB}=-\overline{BO}-\overline{OA},\ \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=b-a.$$

Deci, mărimea unui vector de pe o axă este egală cu diferenţa dintre abscisele extremităţii şi originii vectorului.

6. **Aplicaţii.** I. *Fiind date n puncte* $A_1, A_2, \cdots A_n$ *pe o dreaptă, avem*

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}=0.$$

In adevăr, luând pe acea dreaptă o origină O şi un sens, să însemnăm abscisele punctelor $A_1,\cdots A_n$ prin $a_1,\cdots a_n$. Avem

$$\overline{A_1A_2}=a_2-a_1,\ \overline{A_2A_3}=a_3-a_2,\cdots\overline{A_{n-1}A_n}=a_n-a_{n-1}.$$

Deci $\overline{A_1A_2}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}=a_n-a_1=\overline{A_1A_n}$,

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}=0.$$

II. *Fiind date punctele* A, B, C, D *pe o dreaptă, avem*

$$\overline{AC}\,\overline{BD}=\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC}.$$

Insemnând abscisele punctelor A, B, C, D cu a, b, c, d, avem

$$E\equiv\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC}=(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)=a(b-d)+c(d-b),$$

$$E\equiv(c-a)(d-b)=\overline{AC}.\overline{BD}.$$

III. *Punct care divide un segment într'un raport dat.* Fie M un punct care divide segmentul A_1A_2 în raportul $\overline{A_1M}:\overline{MA_2}=\lambda$ (Fig. 3). Insemnând cu a_1, x, a_2 abscisele punctelor A_1, M, A_2, avem

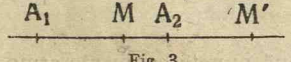


Fig. 3.

$$\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=\lambda,\ \frac{x-a_1}{a_2-x}=\lambda,\ x=\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}.$$

Când punctul M este mijlocul lui A_1A_2, avem $\lambda=1$, iar abscisa mijlocului segmentului A_1A_2 este

$$x=\frac{a_1+a_2}{2}.$$

IV. *Coordonatele punctului conjugat armonic al unui punct dat în raport cu un segment dat.* Fiind dat un segment A_1A_2 (Fig. 4), există un punct interior M şi altul exterior M', care împart segmentul A_1A_2 în acelaş raport, adică

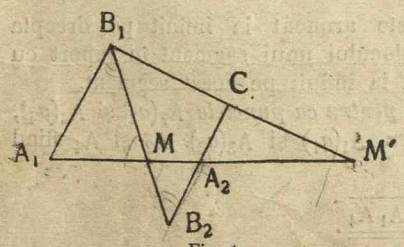


Fig 4.

$$(1)\qquad \frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=-\frac{\overline{A_1M'}}{\overline{M'A_2}}.$$

Am luat semnul -, căci raportul $\overline{A_1M}:\overline{MA_2}$ este pozitiv, iar raportul $\overline{A_1M'}:\overline{M'A_2}$ este negativ.

Construcția punctului M', când se cunoaște M, se face astfel. Se duce prin A_1 un segment A_1B_1, după voie (Fig. 4). Paralela din A_2 la A_1B_1 tae dreapta B_1M în B_2. Se ia pe prelungirea lui B_2A_2, de la A_2, punctul C, astfel ca $\overline{A_2C}=\overline{B_2A_2}$. Dreapta B_1C tae pe A_1A_2 în M'. Punctul M' împarte pe A_1A_2 în același raport ca și M. In adevăr, din triunghiurile asemenea A_1MB_1, A_2MB_2 și A_1B_1M', A_2CM', avem

$$\frac{A_1M}{MA_2}=\frac{A_1B_1}{B_2A_2},\quad \frac{A_1M'}{A_2M'}=\frac{A_1B_1}{A_2C}=\frac{A_1B_1}{B_2A_2},$$

de unde

$$\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=\frac{\overline{A_1M'}}{\overline{A_2M'}},\quad \frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=-\frac{\overline{A_1M'}}{\overline{M'A_2}}.$$

Punctele A_1, M, A_2, M' formează o *diviziune armonică*, sau, cum se mai zice, punctele M și M' sunt conjugate armonic în raport cu punctele A_1 și A_2, sau, conjugate armonic în raport cu segmentul A_1A_2.

Așa fiind, să presupunem că a_1 și a_2 sunt abscisele punctelor A_1 și A_2, și fie λ raportul $\overline{A_1M}:\overline{MA_2}$, în care punctul M împarte segmentul A_1A_2. Abscisa punctului M este

$$x=\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Raportul în care punctul M' împarte pe A_1A_2, este $\overline{A_1M'}:\overline{M'A_2}$ și ținând seamă de relația (1) care exprimă că punctele M și M' sunt conjugate armonic în raport cu A_1 și A_2, rezultă că

$$\frac{\overline{A_1M'}}{\overline{M'A_2}}=-\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=-\lambda.$$

Aplicând formula (2) care dă abscisa unui punct ce divide un segment într'un raport dat, urmează că abscisa punctului M' este

$$x'=\frac{a_1-\lambda a_2}{1-\lambda}. \tag{3}$$

Relațiunile (2) și (3) dau abscisele a două puncte conjugate armonic în raport cu punctele A_1 și A_2.

Observare. Când M este mijlocul lui A_1A_2, atunci $\lambda=1$, iar din (3) se vede că abscisa conjugatului armonic al mijlocului unui segment, în raport cu extremitățile segmentului, este

$$\frac{a_1-a_2}{0}\to\infty.$$

Se vede deci că acest punct este aruncat la infinit pe dreapta A_1A_2; deci conjugatul armonic al mijlocului unui segment în raport cu extremitățile segmentului, este aruncat la infinit pe acest segment.

V. *Să se afle condiția analitică pentru ca punctele* $A_2(a_2)$ și $A_4(a_4)$, *să fie conjugate armonic în raport cu* $A_1(a_1)$ și $A_3(a_3)$. A_2 și A_4 fiind conjugate armonic cu A_1 și A_3, avem

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}}=-\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_4A_3}}.$$

Abscisele punctelor date fiind a_1, a_2, a_3, a_4, rezultă

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}=-\frac{a_4-a_1}{a_3-a_4},$$

de unde efectuând calculele și aranjând,

$$(a_1+a_3)(a_2+a_4)=2\,(a_1a_3+a_2a_4),$$

care este condiția cerută.

Exerciții.

1) M și N fiind mijloacele segmentelor AB și CD, să se arate că avem

$$2\overline{MN}=\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$

R. Se notează cu a, b, c, d abscisele punctelor A, B, C, D ; se calculează acelea ale mijloacelor și apoi se înlocuiesc în relația dată.

2) M fiind mijlocul lui $\overline{AB}$, iar P un punct oarecare al dreptei AB, să se arate că avem $\overline{PA}.\overline{PB}=\overline{PM}^2-\overline{MA}^2$.

3) Fiind date punctele A, B, C, D pe o dreaptă, să se găsească pe acea dreaptă un punct M, astfel ca $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$. Discuție.

R. $(a-x)(b-x)=(c-x)(d-x)$; $x=\dfrac{ab-cd}{a+b-(c+d)}$. Când $a+b=c+d$, atunci $a-c=d-b\,(\overline{CA}=\overline{BD})$, $a-d=c-b\,(\overline{DA}=\overline{BC})$; punctele sunt aranjate în ordinea C, A, B, D, și $\overline{CA}=\overline{BD}$; în acest caz, punctul M este aruncat la infinit. Dacă $a+b=c+d$ și $ab=cd$, atunci $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}=k$, $a=ck$, $d=bk$ și înlocuind în $a+b=c+d$, urmează $(c-b)(k-1)=0$; deci $c=b$, $a=d$ (B se confundă cu C și A cu D), sau $k=1$, $a=c$, $b=d$ (A se confundă cu C, B cu D) ; în acest caz M este nedeterminat.

4) Să se afle distanța dintre două puncte M și N, cărora li se cunosc rapoartele λ și μ în care împart un segment dat AB. Aplicație pentru cazul când sunt conjugate armonic.

R. $\dfrac{(\mu-\lambda)(-a+b)}{(1+\lambda)(1+\mu)}$; $\lambda=-\mu$.

5) Fiind date punctele A_1, A_2, A_3 pe o dreaptă, să se afle un punct M pe această dreaptă, astfel ca suma distanțelor sale la cele trei puncte să fie nulă. Generalizare.

R. $\overline{MA_1}+\overline{MA_2}+\overline{MA_3}=0$, $x=\dfrac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$;

$$x=\frac{\Sigma a_i}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Geometria plană.

Determinarea unui punct în plan.

7. **Coordonate carteziene.** Să considerăm un punct M în planul format de două axe Ox și Oy (Fig. 5). Să însemnăm cu P intersecția axei Ox cu paralela din M la Oy și cu Q intersecția axei Oy cu paralela dusă din M la Ox.

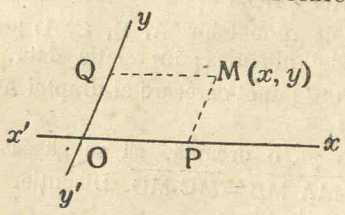


Fig. 5.

Poziția punctului M față de axele Ox și Oy este cunoscută, dacă se știu cantitățile OP și OQ, numite *abscisa* și *ordonata* punctului M, sau, cu un cuvânt, *coordonatele carteziene* ale punctului M.

Când axele Ox și Oy sunt perpendiculare, P și Q sunt proecțiile ortogonale ale punctului M pe aceste axe, iar abscisa OP și ordonata OQ sunt egale cu distanțele lui M la axele Oy și Ox. Coordonatele se zic, în acest caz, rectangulare sau perpendiculare.

Punctul O se zice origina axelor de coordonate și determină pe aceste axe două sensuri; cele de la O spre x (la dreapta) și spre y(în sus), se zic sensuri pozitive; spre x' și y', sensuri negative.

La fiecare punct M corespunde o valoare unică pentru abscisa $OP=x$ și o valoare unică pentru ordonata $OQ=y$. Coordonatele x și y se scriu lângă punctul M, despărțite cu o virgulă, $M(x,y)$, și se citește punctul M de coordonate x și y.

Invers, la un sistem de valori (x,y) corespunde un singur punct M, care se obține luând pe Ox o abscisă OP egală cu x, o ordonată OQ egală cu y și ducând prin P și Q paralele la axe, care se tae în punctul corespunzător $M(x,y)$; sau, luând $OP=x$ și pe paralela din P la Oy, o lungime $PM=y$.

Astfel, punctul M(-2, 3) (Fig. 6), se obține luând pe Ox, spre stânga, OP egal cu două unități de lungime și pe paralela din P la Oy, în sus, $PM=3$.

Observări. I. Fiind dat punctul A(a,b) (Fig. 6), urmează că punctul C$(-a,-b)$ este simetricul lui A în raport cu origina O a axelor de coordonate; iar, în cazul axelor perpendiculare, B$(-a,b)$ simetricul lui A în raport cu Oy și D$(a,-b)$, simetricul lui A față de Ox.

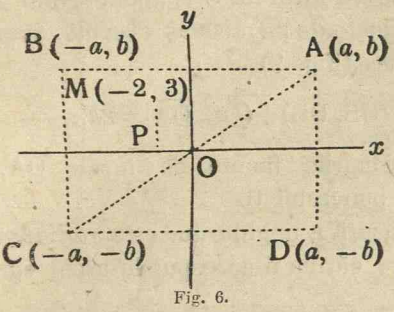


Fig. 6.

II. Punctele de pe Ox au ordonatele nule, iar cele de pe Oy abscisele nule; se zice atunci că $y=0$ reprezintă axa Ox și $x=0$ reprezintă axa Oy, sau, mai scurt, că $x=0$, $y=0$ sunt respectiv ecuațiile axelor Oy și Ox.

III. Punctele care au abscisa $x=a$, sunt așezate pe o paralelă cu Oy la distanța a; punctele cu ordonata egală cu b, adică $y=b$, sunt așezate pe o paralelă cu Ox, la distanța b. Se vede deci că $x=a$ reprezintă o dreaptă paralelă cu Oy și $y=b$, o paralelă cu Ox.

IV. Un punct A, așezat pe bisectoarea întâi a axelor (Fig. 7), are abscisa OP egală cu ordonata PA și de același semn, adică $x=y$; iar, un punct B (Fig. 7), așezat pe bisectoarea a doua, are abscisa OQ egală cu ordonata QB, însă de semn contrar, adică $x=-y$.

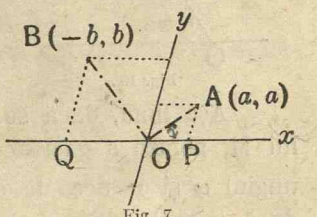


Fig. 7.

Se vede, deci, că $x=y$, sau $x-y=0$, reprezintă puncte de pe bisectoarea întâia a axelor, iar $x=-y$, sau $x+y=0$, reprezintă puncte de pe bisectoarea a doua a axelor de coordonate. Se mai zice că $x-y=0$ este ecuația bisectoarei întâi, iar $x+y=0$, ecuația bisectoarei a doua.

8. **Alt mod de a determina un punct în plan. Coordonate polare.** Unghiul $(\overline{OA}, \overline{OB})$ a două axe $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ este unghiul format de direcțiunile pozitive ale acestor axe (Fig. 8), măsurat în sensul direct (invers ca mersul acelor unui ceasornic). În cazul figurei 8, unghiul axelor $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ este unghiul cu care trebue să învârtim axa OA, în sensul direct, ca să se aștearnă peste axa $\overline{OB}$.

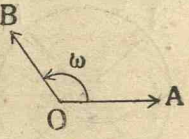


Fig. 8.

Insemnând cu ω acest unghi, determinarea generală a unghiului $(\overline{OA}, \overline{OB})$ este

$$\omega + 2k\pi,$$

adică OA se poate aşterne peste OB, sau direct, după rotaţia de unghiul ω, sau după ce facem k ocoluri în jurul lui O şi apoi unghiul ω.

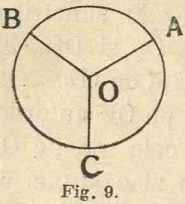


Fig. 9.

Ca şi pentru puncte de pe aceeaş dreaptă, avem formula lui Chasles (Fig. 9)

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OC}) + (\overline{OC}, \overline{OA}) = 2k\pi,$$

referitoare la unghiurile făcute de razele $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, în jurul punctului O.

Unitatea de măsură a unghiurilor este *radianul*, adică unghiul la centru într'un cerc căruia îi corespunde arcul egal cu raza cercului. Astfel,

lungimei $2\pi R$ îi corespunde 360^0

" R " $\frac{360}{2\pi} = \left(\frac{360}{2.\,3,\,14\,...}\right)^0$,

aproape 57^0. Deci, un radian, exprimat în grade, este aproximativ 57^0.

Acestea fiind stabilite, poziţia unui punct M în plan (Fig. 10) poate fi definită prin distanţa $OM = \rho$ a punctului M la punctul fix O şi prin unghiul xOM, egal cu ω, ce-l face axa fixă Ox din acel plan cu OM. Punctul O se zice pol, Ox axă polară, iar (ω, ρ) *coordonatele polare* ale punctului M.

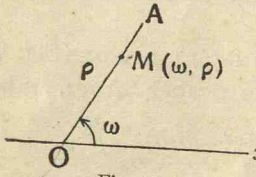


Fig. 10.

Aşa fiind, dacă se dau coordonatele polare (ω, ρ) ale punctului M, pentru a găsi acel punct, ducem o dreaptă ce face cu Ox ungiul ω şi pe această dreaptă luăm un vector $\overline{OM} = \rho$, şi anume, dacă $\omega > 0$, rotim axa Ox în sensul pozitiv, iar dacă $\omega < 0$, rotim axa Ox în sensul negativ. Insemnând cu A extremitatea axei polare în noua poziţie (Fig. 10) după rotaţie, dacă $\rho > 0$, luăm pe OA, de la O spre A, o lungime $OM = \rho$; dacă $\rho < 0$, luăm pe OA, în sens contrar lui A, un segment egal cu valoarea absolută a lui ρ.

De ex. (Fig. 11), coordonatelor $\omega = 45^0$, $\rho = OM = 1$, corespunde punctul M; coordonatelor $(\omega, -\rho)$, corespunde punctul P; $(-\omega, \rho)$, punctul Q; $(-\omega, -\rho)$, N;

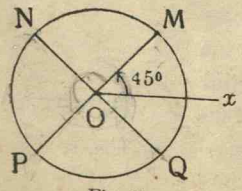


Fig. 11.

$(\omega + \frac{\pi}{2}, \rho)$, N; $(\omega + \frac{\pi}{2}, -\rho)$, Q; $(\omega + \pi, \rho)$, P; $(\omega + \pi, -\rho)$, M; coordonatelor $(\omega + 2\pi, \rho)$, punctul M; etc.

După cum se vede, *unui sistem de coordonate polare corespunde un singur punct; dar unui punct M corespund o infinitate de sisteme de coordonate polare.*

9. Trecerea de la coordonate carteziene perpendiculare la cele polare. Se poate trece de la coordonatele carteziene perpendiculare la cele polare, luând origina axelor perpendiculare ca pol și axa Ox ca axă polară.

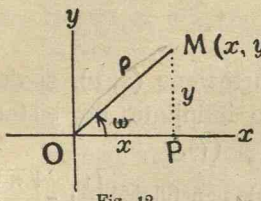


Fig. 12.

Insemnând cu (x,y), (ω,ρ) coordonatele carteziene și polare ale punctului M(Fig.12), rezultă din triunghiul dreptunghic OPM

$$OP=OM\cos\omega,\quad PM=OM\sin\omega,$$

(1)
$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega.$$

Fiind cunoscute ω și ρ, aceste formule ne permit să trecem la coordonatele carteziene ale punctului.

Invers, fiind cunoscute coordonatele carteziene (x, y), din formulele (1) deducem

$$x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\omega+\sin^2\omega),$$

(2)
$$x^2+y^2=\rho^2,\qquad \rho=\pm\sqrt{x^2+y^2},$$

(3)
$$\operatorname{tg}\omega=\frac{y}{x},$$

(4)
$$\cos\omega=\frac{x}{\rho}=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\omega=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Insemnând cu (ω_0, ρ_0) un sistem de valori care verifică ecuațiile (2) și (4), adică

$$\operatorname{tg}\omega_0=\frac{y}{x},\quad \rho_0\cos\omega_0=x,$$

ori ce alt sistem de valori (ω, ρ) ce verifică aceste ecuații,

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{y}{x},\quad \rho\cos\omega=x,$$

este astfel că

(5)
$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\omega_0,\quad \rho\cos\omega=\rho_0\cos\omega_0.$$

Din prima din aceste ecuații, se deduce

(6)
$$\omega=\omega_0+n\pi,$$

n fiind un întreg oarecare și deci

$$\cos\omega=\cos(\omega_0+n\pi)=(-1)^n\cos\omega_0;$$

din ultima din relațiile (5), obținem

$$\rho=\rho_0\frac{\cos\omega_0}{\cos\omega}=\rho_0\frac{\cos\omega_0}{(-1)^n\cos\omega_0},$$

(7)
$$\rho=(-1)^n\rho_0,$$

n fiind un întreg oarecare.

Formulele (6) și (7),

$$\omega=\omega_0+n\pi,\quad \rho=(-1)^n\rho_0,$$

ne arată că la un sistem de coordonate carteziene (x, y), și deci, unui singur punct M din plan, corespund o infinitate de sisteme de coordonate polare, date de relațiile (6) și (7).

Exemplu. Să se găsească cordonatele polare ale punctului $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Avem

$$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \rho_0=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,\ \cos\omega_0=\frac{x}{\rho_0}=\frac{1}{2},\ \sin\omega_0=\frac{y}{\rho_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

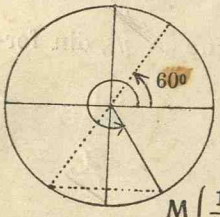


Fig. 13.

Dacă $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=60^0$, sau 120^0; dar, $\sin\omega_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\omega_0=60^0+180^0=240^0$, sau $360^0-60^0=300^0$. Insă, $\cos\omega_0=\frac{1}{2}>0$, deci extremitatea arcului ω_0 (Fig. 13) este în cadranul al patrulea, adică $\omega_0=300^0$. Deci, $\omega=\omega_0+n\pi=300^0+n\pi$, $\rho=(-1)^n\rho_0=(-1)^n$, n fiind un întreg oarecare.

10. Determinarea direcției unei drepte. Coeficient unghiular. Direcții paralele. Direcția unei drepte D este cunoscută, dacă se dă paralela Δ dusă la D prin originea O a axelor de coordonate (Fig. 14).

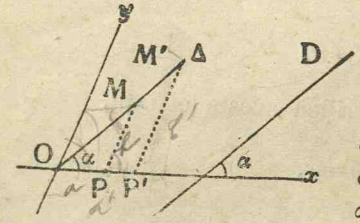


Fig. 14.

Dar, o dreaptă Δ, dusă prin originea axelor, este cunoscută, dacă se dau coordonatele (a,b) ale unui punct oarecare M al acestei drepte, sau unghiul α pe care dreapta Δ îl face cu axa Ox.

1°. Dacă ne interesează numai direcția dreptei OM și nu sensul, este destul a cunoaște coordonatele (a,b) ale unui punct M al acestei drepte. Să considerăm un alt punct M′ al dreptei OM și fie (a',b') coordonatele acestui punct. Fie P și P′ intersecțiile axei Ox cu paralelele duse prin M și M′ la Oy. Avem $OP=a$, $PM=b$, $OP'=a'$, $P'M'=b'$.

Din triunghiurile asemenea OMP, OM′P′, avem

$$\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'},\quad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}.$$

Această relație ne arată că, luând două puncte oarecare pe o dreaptă ce trece prin origina axelor, raportul dintre ordonata și

abscisa fiecărui punct considerat, este acelaş, sau că, pentru o dreaptă ce trece prin origina axelor, raportul dintre ordonata şi abscisa oricărui punct al dreptei este acelaş.

Acest raport se numeşte *coeficientul unghiular* al direcţii considerate. Coordonatele (a,b) ale unui punct oarecare al dreptei formează un sistem de *parametrii directori* ai direcţii date.

Pentru cunoaşterea numai a direcţii dreptei, este destul a cunoaşte numai coeficientul unghiular m, căci pentru a construi acea direcţie, vom lua pe axa Ox un punct P de abscisă $OP=1$ şi vom lua pe paralela din P la Oy un vector $PM=m$. Direcţia considerată este paralelă cu OM.

Se vede că dacă două direcţii D şi D′ sunt paralele, atunci paralelele duse prin origină la aceste direcţii sunt confundate şi deci, coeficienţii unghiulari m şi m' ai direcţiilor D şi D′ sunt egali, $m=m'$.

2° Dacă ne interesează şi sensul direcţii D, atunci trebue să cunoaştem unghiul α ce-l face direcţia D cu axa Ox.

Fie $M(a,b)$ un punct oarecare luat pe dreapta dusă prin origină paralelă cu direcţia D (Fig. 14). Fie P intersecţia axei Ox cu o paralelă la Oy dusă prin M. Însemnând cu θ unghiul axelor xOy, din triunghiul OPM (Fig. 14), avem

$$\frac{OP}{\sin OMP}=\frac{PM}{\sin\alpha},\quad \frac{a}{\sin(xPM-POM)}=\frac{b}{\sin\alpha},$$

$$\frac{a}{\sin(xOy-\alpha)}=\frac{b}{\sin\alpha},$$

$$\frac{a}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{b}{\sin\alpha},\quad \frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}. \tag{8}$$

Deci, când se dă unghiul α al direcţii cu axa Ox, coeficientul unghiular al direcţii este

$$m=\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

Dezvoltând, avem

$$m=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\theta-\cos\theta\operatorname{tg}\alpha},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}. \tag{9}$$

Relaţia (8) ne dă valori proporţionale pentru parametrii directori a şi b când se cunoaşte unghiul α ce-l face direcţia dată cu axa Ox şi anume

$$a=k\sin(\theta-\alpha),\quad b=k\sin\alpha,\quad k=\text{const.}$$

Când axele sunt perpendiculare, $\theta=90^0$,

$$\operatorname{tg}\alpha=m,\quad a=k\cos\alpha,\quad b=k\sin\alpha.$$

Deci, *în cazul axelor perpendiculare, coeficientul unghiular* al unei direcţii *este egal cu tangenta trigonometrică* a unghiului format de acea direcţie cu axa Ox.

Luând $k=1$, parametrii directori $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)$ se zic, în acest caz, *cosinusurile directoare* ale direcţii considerate.

11. **Unghiul a două direcţii. Direcţii perpendiculare.** Fie D şi D′ două direcţii ce fac unghiurile α şi α' cu Ox (Fig. 15). Însemnând cu $V=(D',D)$ unghiul lor, avem

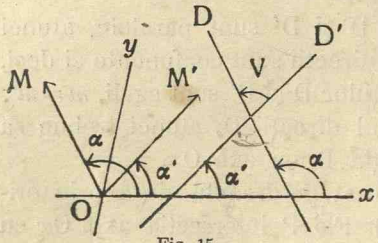


Fig. 15.

$$V=\alpha-\alpha',$$

$$\text{(10)}\qquad \operatorname{tg}V=\operatorname{tg}(\alpha-\alpha')=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}$$

care dă tangenta unghiului a două direcţii în funcţiune de unghiurile α şi α' ce le fac cu Ox.

Când direcţiile date sunt cunoscute prin coeficienţii lor unghiulari m şi m', unghiul acestor direcţii este dat de relaţia (10), unde se înlocuesc $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha'$ cu valorile lor date de (9),

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta},\quad \operatorname{tg}\alpha'=\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta}.$$

Dacă direcţiile sunt perpendiculare, $V=90$, $\operatorname{tg}V\to\infty$; deci, din (10) rezultă

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=0,$$

unde înlocuind pe $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha'$ cu valorile de mai sus, avem

$$1+\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}\,\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta}=0,$$

$$\text{(11)}\qquad 1+(m+m')\cos\theta+mm'=0.$$

Aceasta este condiţia care exprimă, în sistemul de axe oblice xOy ce fac unghiul θ, că direcţiile de coeficienţi unghiulari m şi m' sunt perpendiculare.

In cazul axelor perpendiculare, $\theta=90^0$, $\cos\theta=0$, $\operatorname{tg}\alpha=m$, $\operatorname{tg}\alpha'=m'$, (10) ce dă tangenta unghiului direcţiilor de coeficienţii unghiulari m şi m', este

$$\operatorname{tg} V = \frac{m-m'}{1+mm'}.$$

Dacă direcţiile sunt perpendiculare, $\operatorname{tg} V \to \infty$, rezultă

$$1+mm'=0,$$

care este *condiţia, axele fiind pependiculare, ca două direcţii de coeficienţi unghiulari m şi m' să fie perpendiculare.*

12. Determinarea poziţii unui vector. Distanţa dintre două puncte. Un vector este cunoscut dacă se dau, sau coordonatele originii şi extremităţii vectorului, sau coordonatele originii vectorului, unghiul ce acest vector îl face cu Ox şi lungimea vectorului.

Să considerăm vectorul $\overline{A_1A_2}$ definit prin punctele $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ (Fig. 16). Fie P_1,P_2 punctele unde axa Ox tae paralelele duse din A_1 şi A_2 la Oy. Insemnând cu Q punctul unde paralela din A_1 la Ox tae dreapta A_2P_2, avem

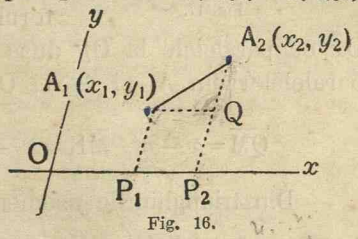


Fig. 16.

$$\overline{A_1Q}=\overline{P_1P_2}=x_2-x_1,\quad \overline{QA_2}=y_2-y_1.$$

Din triunghiul A_1QA_2, obţinem

$$\overline{A_1A_2}^2=\overline{A_1Q}^2+\overline{QA_2}^2-2\overline{A_1Q}.\overline{QA_2}\cos A_1QA_2,$$

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1)\,(y_2-y_1)\cos(180^0-xOy),$$

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(180^0-\theta),$$

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)\,(y_1-y_2)\cos\theta.$$

Aceasta este formula care ne dă pătratul distanţei dintre punctele $A_1(x_1,y_1)$ şi $A_2(x_2,y_2)$, unghiul axelor de coordonate fiind θ.

Dacă axele sunt perpendiculare, $\theta=90^0$; atunci distanţa dintre două puncte $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ este dată de relaţia

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

Aplicaţii. 1°. Distanţa de la punctul $M(x,y)$ la origina axelor perpendiculare este dată de

$$\overline{OM}^2=x^2+y^2.$$

2°. M fiind un punct oarecare al unui cerc cu centrul în origina axelor perpendiculare şi cu raza R, relaţia

$$x^2+y^2=R^2$$

exprimă că punctul variabil (x,y) este necontenit la distanţa R de punctul O, sau că $x^2+y^2=R^2$ este ecuaţia unui cerc cu centrul în origina axelor perpendiculare şi cu raza R.

3°. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ reprezintă în planul xOy al axelor perpendiculare un cerc cu centrul în punctul (a,b) şi cu raza R, unde (x,y) este un punct oricare varibil pe cerc.

13. **Determinarea poziţii unui punct pe o dreaptă dată.** 1°. Să considerăm cazul când dreapta este dată prin punctele $A_1(x_1,y_1)$ şi $A_2(x_2,y_2)$ (Fig. 17). Un punct oarecare $M(x,y)$ al acestei drepte este cunoscut, dacă se ştie raportul $\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}}=\lambda$, în care acest punct împarte vectorul $\overline{A_1A_2}$. Fie P_1,P,P_2, intersecţiile axei Ox cu paralelele la Oy duse prin A_1, M, A_2, şi Q şi R intersecţiile paralelelor din A_1 şi A_2 la Oy cu paralela din M la Ox. Avem

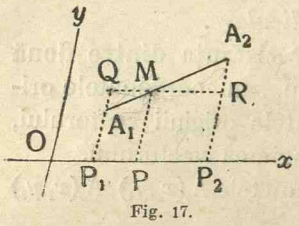


Fig. 17.

$$\overline{QM}=x-x_1,\quad \overline{MR}=x_2-x,\quad \overline{A_1Q}=y-y_1,\quad \overline{RA_2}=y_2-y.$$

Din triunghiurile asemenea A_1QM şi MRA_2, găsim

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{MR}}=\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}},\quad \frac{\overline{A_1Q}}{\overline{RA_2}}=\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}},$$

sau,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda,$$

de unde

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{12}$$

Acestea sunt coordonatele punctului $M(x,y)$, care divide vectorul $\overline{A_1A_2}$ în raportul $\overline{A_1M}:\overline{MA_2}=\lambda$.

Relaţiunile (12) se mai pot scrie

$$x=x_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2-x_1)=x_1+k(x_2-x_1),\quad y=y_1+k(y_2-y_1),$$

k fiind un parametru variabil.

Considerând formulele (12), se vede (Fig. 17) că, dacă λ variază de la $-\infty$ la -1, punctul M variază de la A_2 spre dreapta până la infinit; când λ variază de la -1 la 0, punctul M variază de la infinit, de la stânga lui A_1, până la A_1; când λ variază de la 0 la ∞, punctul M variază de la A_1 la A_2. Vedem deci, că există două puncte, unul interior şi altul exterior segmentului A_1A_2, care să-l împartă în acelaş raport, şi anume punctul interior segmen-

tului îl împarte într'un raport pozitiv, iar cel exterior segmentului într'un raport negativ. Am văzut (No. 6, IV) că aceste două puncte care împart pe A_1A_2 în acelaş raport, sunt conjugate armonic în raport cu extremităţile segmentului.

Când $\lambda=1$, M este mijlocul segmentului A_1A_2, iar coordonatele sale sunt

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2}.$$

2°. Să trecem acum la cazul când dreapta D, pe care se află punctul M, este definită prin punctul $A_0(x_0,y_0)$ şi direcţia ei. Aceasta înseamnează că se cunosc coordonatele (a,b) ale unui punct B al dreptei dusă prin origina axelor, paralelă cu dreapta D (Fig. 18). Dacă direcţia dreptei D ar fi dată prin coeficientul ei unghiular m, atunci $a=1$, $b=m$.

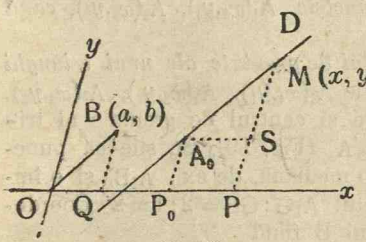


Fig. 18.

Un punct $M(x,y)$ al dreptei D este cunoscut dacă se ştie raportul $\overline{A_0M}:\overline{OB}=\rho$. Fie Q, P_0, P intersecţiile axei Ox cu paralelele din B, A_0, M la Oy; fie, de asemenea, S intersecţia dreptei MP cu paralela din A_0 la Ox. Din triunghiurile asemenea OBQ, A_0SM, avem

$$\frac{A_0S}{OQ}=\frac{SM}{QB}=\frac{A_0M}{OB}, \quad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\rho,$$

$$\frac{x-x_0}{a}=\rho, \quad \frac{y-y_0}{b}=\rho,$$

$$x=x_0+a\rho, \quad y=y_0+b\rho.$$

Deci, coordonatele unui punct variabil M pe dreapta D definită prin punctul $A_0(x_0,y_0)$ şi parametrii directori a şi b, sunt de forma

$$x=x_0+a\rho, \quad y=y_0+b\rho, \quad \rho=\frac{\overline{A_0M}}{\overline{OB}}, \quad B(a,b).$$

Când axele sunt perpendiculare, iar a şi b, cosinusurile directoare, $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, α fiind unghiul dreptei cu axa Ox, atunci $OB=1$, $\rho=\overline{A_0M}$, şi deci *coordonatele unui punct variabil pe dreapta* D *sunt*

$$x=x_0+\rho\cos\alpha, \quad y=y_0+\rho\sin\alpha.$$

14. **Aplicaţii.** 1. Fie $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ şi M punct ce împarte segmentul A_1A_2 în raportul $\overline{A_1M}:\overline{MA_2}=\lambda$. Să însemnăm cu N conjugatul armonic al punctului M în raport cu A_1 şi A_2. Avem

$$\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_2}} = -\frac{\overline{A_1N}}{\overline{NA_2}}, \quad \frac{\overline{A_1N}}{\overline{NA_2}} = -\lambda.$$

Raportul în care punctul N împarte segmentul A_1A_2 fiind $-\lambda$, coordonatele sale, care sunt de forma (12), se obțin cu aceste formule unde se înlocuește λ cu $-\lambda$, și sunt

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$

In general *punctele*

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad \frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu}, \quad \frac{y_1+\mu y_2}{1+\mu}$$

sunt conjugate armonic în raport cu punctele $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, *când* $\lambda+\mu=0$.

II. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale unui triunghi când se cunosc coordonatele vârfurilor.* Fie $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $G(x,y)$ vârfurile și centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$ (Fig. 19). Se știe că punctul G este pe o mediană, de ex., A_1B, și o împarte în raportul $A_1G:GB=2:1=2$. Coordonatele punctului B fiind

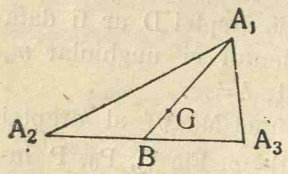


Fig. 19.

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2}, \quad y'=\frac{y_2+y_3}{2},$$

acelea ale lui G sunt

$$x=\frac{x_1+\lambda x'}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y'}{1+\lambda}, \quad \lambda=\frac{A_1G}{GB}=2,$$

$$x=\frac{x_1+2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

III. *Fiind date trei puncte A,B,C în linie dreaptă și un punct M în planul lor, să se demonstreze relația (lui Stewart)*

$$\overline{AM}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BM}^2\cdot\overline{CA}+\overline{CM}^2\cdot\overline{AB}+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}=0.$$

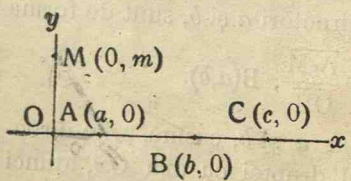


Fig. 20.

In chestiuni de Geometrie Analitică o parte importantă a problemei constă în alegerea axelor de coordonate.

In cazul de față, se indică să se ia dreapta ABC ca axă Ox, iar perpendiculara din M pe ea ca axă Oy (Fig. 20). Să însemnăm coordonatele acestor puncte date cu $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$, $M(0,m)$.

Avem $\overline{AM}^2=a^2+m^2$, $\overline{BM}^2=b^2+m^2$, $\overline{CM}^2=c^2+m^2$,

$$\overline{BC}=c-b, \quad \overline{CA}=a-c, \quad \overline{AB}=b-a.$$

N'avem de cât să înlocuim în relația ce trebue verificată și să facem calculele.

BUCUREȘTI

IV. *Să se demonstreze că mijlocul dreptei care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater $A_1 A_2 A_3 A_4$ are pentru coordonate mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor.* Fie $A_1(x_1, y_1)$,... $A_4(x_4, y_4)$ vârfurile patrulaterului (Fig. 21). Coordonatele mijloacelor E și F ale diagonalelor A_1A_3, A_2A_4 sunt

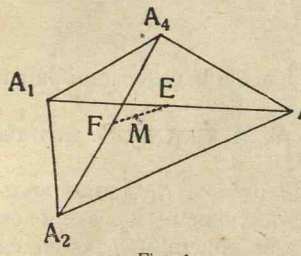


Fig. 21.

$$E\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right), F\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right).$$

Acelea ale mijlocului M al dreptei EF sunt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_2+x_4}{2}\right)=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

$$\frac{1}{4}\Sigma x_i, \frac{1}{4}\Sigma y_i.$$

Exerciții.

1) Să se afle lungimea laturilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele (2, 3), (4, -5), (-3, -6).

R. $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

2) Să se afle ecuația cercului cu centrul în punctul (2, 3) și cu raza 4.

R. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

3) Care este relația dintre coordonatele (x, y) ale unui punct M egal depărtat de punctele A (2, 3), B (4, 5).

R. $(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$, $x+y=7$.

Toate aceste puncte se află pe perpendiculara pe mijlocul lui AB.

4) Să se afle coordonatele punctului M, egal depărtat de punctele A (2, 3), B (4, 5), C (6, 1).

R. $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2=\overline{MC}^2$, $x+y=7$, $2x-y=6$, $x=\frac{13}{3}$, $y=\frac{8}{3}$.

5) Să se afle distanța dintre punctele

$$A(X, Y), \quad B\left(\frac{2X+2aY}{1+a^2}, \frac{2aX+2a^2Y}{1+a^2}\right).$$

R. $\frac{\sqrt{(X^2+Y^2)(a^4+2a^2+1)}}{1+a^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$.

6) Să se afle coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului, definit de punctele (2, 3), (4, -5), (-3, -6). Să se figureze în raport cu două axe.

R. $(3, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

143.

7) Se divide în trei părți egale segmentul definit de punctele A (2, 3), B(4, 5). Să se afle coordonatele punctului de diviziune, cel mai apropiat de A. Să se figureze.

R. $\overline{AM} : \overline{MB} = 1:2$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

8) Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor unui patrulater se tae în mijlocul lor.

R. M, N, P, Q mijloacele laturilor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Se va arăta că mijlocul lui MP se confundă cu acela al lui NQ.

9) Se dau punctele $A_1, A_2, \ldots A_n$. Se divide dreapta A_1A_2 prin punctul B_1 în două părți egale; se consideră pe B_1A_3 punctul B_2, astfel ca $B_1B_2 : B_2A_3 = 1:2$ pe dreapta B_2A_4 se consideră punctul B_3, astfel ca $B_2B_3 : B_3A_4 = 1:3$, etc. Să se arate că punctul G care împarte segmentul $B_{n-2}A_n$ în raportul $B_{n-2}G : GA_n = 1:(n-1)$, are coordonatele

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n}, \quad y = \frac{\Sigma y_i}{n}.$$

10) Fiind date punctele $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$, se ia pe A_1A_2 punctul C_1, astfel ca $A_1C_1 : C_1A_2 = m_2 : m_1$; pe C_1A_3 se ia punctul C_2, astfel ca $C_1C_2 : C_2A_3 = m_3 : (m_1 + m_2)$; pe C_2A_4 se ia punctul C_3, astfel ca $C_2C_3 : C_3A_4 = m_4 : (m_1 + m_2 + m_3)$ și așa mai departe. Să se arate că ultimul punct, astfel construit, are coordonatele

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}.$$

Acest punct este centrul de greutate al masselor $m_1, m_2, \ldots m_n$ aplicate în punctele A_i. Punctul G se zice și centrul distanțelor proporționale.

Reprezentarea analitică a curbelor.

15. **Reprezentarea curbelor prin ecuații.** O curbă poate fi considerată ca locul geometric al pozițiunilor unui punct variabil, care se mișcă după o anumită lege. Deci, coordonatele unui asemenea punct sunt funcțiuni date de un același parametru t,

(1) $$x = g(t), \quad y = h(t),$$

astfel că, la fiecare valoare a parametrului t, corespunde un punct pe curbă și deci, când t variază, ecuațiile (1) definesc o curbă în plan.

Aceasta este reprezentarea parametrică a curbei.

Rezolvând una din ecuațiile (1) în raport cu t și înlocuind în cealaltă, sau, cum se mai spune, eliminând pe t din ecuațiile (1), se obține o relație

$$F(x, y) = 0,$$

sau

$$y = f(x),$$

care este o legătură între coordonatele unui punct oarecare al curbei. Se zice că ecuația acestei curbe este $F(x, y) = 0$ sau $y = f(x)$.

Pentru a construi curba reprezentată de această ecuație, se dau diferite valori lui x și se calculează valorile lui y corespunzătoare din ecuația $y=f(x)$. Unind punctele $[x,f(x)]$, cu o trăsătură continuă, se obține curba reprezentată de ecuația $y=f(x)$.

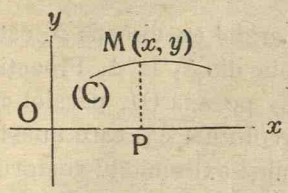


Fig. 22.

Invers, fiind dată curba (C)(Fig. 22), există o relație determinată între abscisa x și ordonata y a fiecărui punct al curbei, adică

$$y=f(x).$$

Natura funcțiunei $f(x)$ depinde de forma curbei (C).

Exemplu. O bară de lungime $AM=a$ are între A și M un punct fix B, astfel ca $BM=b(b<a)$. Bara se mișcă în plan, cu extremitatea A pe Oy și cu punctul B pe Ox. Să se găsească curba descrisă de extremitatea M a barei.

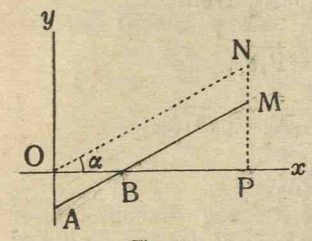


Fig. 23.

Să însemnăm cu P și N (Fig. 23) intersecțiile paralelei din M la Oy cu Ox și paralela din O la AB. Avem $ON=AM=a$. Insemnând cu α unghiul xON, coordonatele lui M sunt

$$x=OP=ON\cos\alpha=a\cos\alpha,$$
$$y=PM=BM\sin\alpha=b\sin\alpha,$$

astfel că reprezentarea parametrică a curbei este $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$, α fiind parametrul variabil.

Eliminând pe α, avem

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

care este ecuația curbei descrisă de punctul M în coordonate carteziene. Vom vedea că această curbă este o elipsă.

Schimbarea sistemului de referințe. Transformarea coordonatelor.

16. Să presupunem că se cunoaște ecuația unei curbe în raport cu un sistem de referințe, două axe Ox, Oy, și voim a găsi ecuația aceleaș curbe în raport cu un nou sistem de referințe, axele $O'x'$, $O'y'$, a căror poziție este cunoscută față de vechile axe.

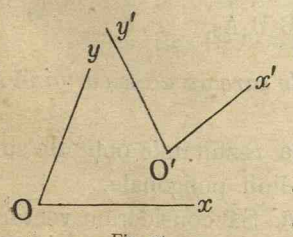


Fig. 24.

Dacă axele xOy sunt perpendiculare, ca și $O'x'$, $O'y'$, se poate aduce unghiul drept xOy peste $x'O'y'$ (Fig. 24), dând unghiului xOy o translație egală cu OO' și apoi o rotație până Ox ajunge peste $O'x'$.

17. **Proecţiuni.** Pentru a putea obţine formulele generale de transformare, avem nevoe de a cunoaşte proecţia unui contur poligonal pe o axă.

Proecţia unui punct A_1 pe o axă Ox, paralel cu direcţia Δ, este intersecţia P_1 a axei Ox (Fig. 25) cu paralela din A_1 la Δ. Proecţia unui vector $\overline{A_1A_2}$ pe axa Ox, paralel cu direcţia Δ, este vectorul $\overline{P_1P_2}$, care uneşte proecţiile originii şi extremităţii vectorului.

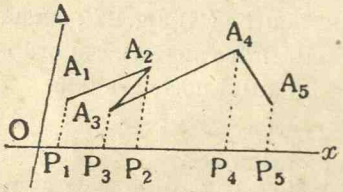


Fig. 25.

Să considerăm conturul poligonal deschis $A_1A_2A_3A_4A_5$ şi să-l proectăm pe axa Ox (Fig. 25), paralel cu direcţia Δ. Însemnând cu $P_1,\cdots P_5$ proecţiile vârfurilor $A_1,\cdots A_5$, avem

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_5}=\overline{P_1P_5},$$

adică

$$\mathrm{pr}\overline{A_1A_2}+\mathrm{pr}\,\overline{A_2A_3}+\mathrm{pr}\,\overline{A_3A_4}+\mathrm{pr}\,\overline{A_4A_5}=\mathrm{pr}\overline{A_1A_5},$$

$$\mathrm{pr}\,A_1A_2A_3A_4A_5=\mathrm{pr}\,\overline{A_1A_5}.$$

Prin urmare, *proecţia unui contur poligonal deschis pe o axă, este egală cu proecţia liniei care închide acel contur poligonal.*

Să considerăm conturul poligonal închis $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$. Avem

$$\mathrm{pr}\,A_1A_2A_3A_4A_5=\mathrm{pr}\,\overline{A_1A_5},$$

$$\mathrm{pr}\,A_1A_2A_3A_4A_5-\mathrm{pr}\,\overline{A_1A_5}=0,\quad \mathrm{pr}\,A_1A_2A_3A_4A_5+\mathrm{pr}\,\overline{A_5A_1}=0,$$

$$\mathrm{pr}\,A_1A_2A_3A_4A_5A_1=0,$$

adică, *proecţia unui contur poligonal închis pe o axă este nulă.*

Să considerăm acum contururile poligonale $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5$, $A_1B_2B_3B_4A_5$, care au aceeaş origină A_1 şi aceeaş extremitate A_5. Avem

$$\mathrm{pr}A_1A_2A_3A_4A_5=\mathrm{pr}\overline{A_1A_5},\quad \mathrm{pr}A_1B_2B_3B_4A_5=\mathrm{pr}\overline{A_1A_5},$$

deci

$$\mathrm{pr}A_1A_2A_3A_4A_5=\mathrm{pr}A_1B_2B_3B_4A_5,$$

adică, *proecţiile a două contururi poligonale care au aceeaş origină A_1 şi aceeaş extremitate A_5 sunt egale.*

Observare. Este uşor de constatat că rezultatele obţinute sunt adevărate oricare ar fi numărul laturilor liniei poligonale.

Măsura proecţii unui vector pe o axă. Să considerăm vectorul A_1A_2 (Fig. 26) şi să ducem printr'un punct O al axei un vector $\overline{OM}$

paralel cu A_1A_2. Fie P_1P_2, OR proecţiile acestor vectori pe axa Ox, paralel cu direcţia Δ. Fie Q intersecţia dreptei A_2P_2 cu paralela din A_1 la Ox. Din triunghiurile asemenea A_1A_2Q, OMR, avem

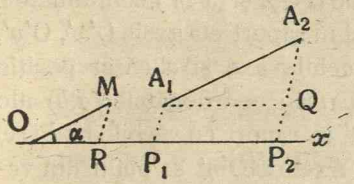


Fig. 26.

$$\frac{A_1Q}{OR}=\frac{A_1A_2}{OM},\quad \frac{P_1P_2}{OR}=\frac{A_1A_2}{OM},$$

$$\frac{\mathrm{pr}A_1A_2}{\mathrm{pr}OM}=\frac{A_1A_2}{OM},$$

adică, raportul proecţiilor a doi vectori paraleli este egal cu raportul celor doi vectori.

Luând $OM=1$, avem $\frac{A_1A_2}{OM}=\mathrm{măs}\,A_1A_2$. Relaţia (1) se poate scrie

$$\mathrm{pr}A_1A_2=\frac{A_1A_2}{OM}\mathrm{pr}OM,$$

$$\mathrm{pr}A_1A_2=\mathrm{măs}A_1A_2\cdot\mathrm{pr}OM,$$

adică, măsura proecţii unui vector este egală cu produsul măsurii acelui vector prin măsura proecţii vectorului unitate paralel cu vectorul dat. Proecţia vectorului unitate se zice parametru de proecţie.

In cazul proecţii ortogonale, triunghiul OMR din figura 26 este dreptunghic în R şi însemnând cu α unghiul xOM format de axa Ox cu vectorul OM, avem

$$OR=OM\cos\alpha=\cos\alpha,\quad \mathrm{pr}OM=\cos\alpha,$$

$$\mathrm{pr}A_1A_2=A_1A_2\cos\alpha,$$

adică, proecţia ortogonală a unui vector pe o axă este egal cu produsul acelui vector prin consinusul unghiului format de axa de proecţie cu acel vector. De oarece unghiurile $(OM,Ox)=360^0-(Ox,OM)$, avem $\cos(OM,Ox)=\cos(Ox,OM)$, şi deci, în expresia proecţii unui vector pe o axă, putem considera sau unghiul vectorului cu axa sau unghiul axei cu vectorul.

Observare. Insemnând cu $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ (Fig. 27) proecţia vectorului A_1A_2, făcută paralel cu Oy pe axa Ox, este

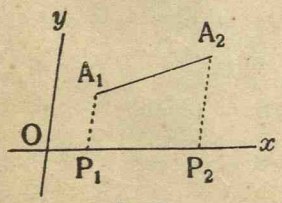


Fig. 27.

$$P_1P_2=x_2-x_1,$$

adică egală cu diferenţa dintre abscisele extremităţii şi originii vectorului. In mod analog, se vede că proecţia unui vector pe Oy,

paralel cu axa Ox, este y_2-y_1, diferența dintre ordonata extremității și originii vertorului.

18. **Translația axelor.** Fie (x,y) coordonatele unui punct M în raport cu axele xOy, și (x',y') coordonatele aceluiaș punct în raport cu axele $O'x'$, $O'y'$, paralele cu vechile axe și a căror poziție e determinată prin coordonatele (a,b) ale noii origini O' în raport cu vechile axe Ox, Oy (Fig. 28). Axele $x'O'y'$ se obțin din vechile axe, dând o translație axelor xOy egală cu OO'.

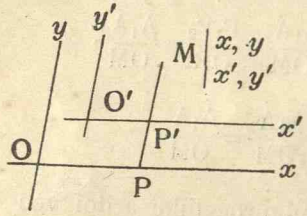


Fig. 28.

Fie P și P' intersecțiile axelor Ox, $O'x'$ cu paralela din M la Oy; avem

$$OP=x,\ PM=y,\ O'P'=x',\ P'M'=y',$$

$$prOM=prOO'+prO'P'+prP'M.$$

Proectând paralel cu Oy, pe axa Ox, avem

$$x=a+x',\ prP'M=0.$$

In mod analog, proectând același contur $OO'P'M$ pe Oy, paralel cu Ox, avem

$$y=b+y'.$$

Așa dar,

$$x=a+x',\ y=b+y'$$

sunt relațiunile dintre coordonatele (x,y) ale unui punct M în raport cu axele Oxy și coordonatele (x',y') ale aceluiaș punct în raport cu axele $O'x'y'$, obținute din cele vechi după o translație egală cu OO'.

19. **Rotația axelor perpendiculare.** Cunoscând coordonatele (x,y) ale unui punct M în raport cu axele perpendiculare xOy, să găsim coordonatele aceluiaș punct în raport cu axele perpendiculare XOY, obținute din cele vechi după o rotație de un unghi egal cu $\alpha=xOX$ (Fig.29).

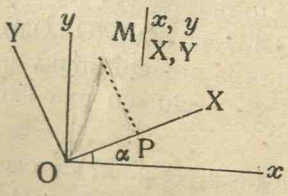


Fig. 29.

Fie P proecția ortogonală a lui M pe OX; avem

$$OP=X,\ PM=Y.$$

Proectând conturul OPM, avem

(2) $$prOM=prOP+prPM.$$

Proectând ortogonal pe axa Ox, obținem

$$\text{pr}OM = x,\ \text{pr}OP = OP\cos\alpha = X\cos\alpha,$$

$$\text{pr}PM = PM\cos(Ox, PM) = PM\cos(Ox, OY) = Y\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= Y\sin(-\alpha) = -Y\sin\alpha.$$

Inlocuind (2), avem

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

Proectând ortogonal pe Oy, avem

$$\text{pr}OM = y,\ \text{pr}OP = OP\cos(OP, Oy) = X\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = X\sin\alpha,$$

$$\text{pr}PM = PM\cos(PM, Oy) = Y\cos(OY, Oy) = Y\cos\alpha.$$

Inlocuind în (2), obţinem

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Deci relaţiile

(3) $$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

ne dau coordonatele (X,Y) în raport cu noile axe XOY, rotind pe cele vechi cu unghiul α.

Pentru a găsi pe X şi Y, să înmulţim în relaţiile (3), prima cu $\cos\alpha$, a doua cu $\sin\alpha$; adunând, avem

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = X(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = X.$$

Inmulţind întâia cu $-\sin\alpha$, a doua cu $\cos\alpha$, adunând, obţinem

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = Y.$$

Deci,

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

ne dau pe X şi Y când se cunosc coordonatele (x,y).

20. **Formulele de transformare generale în cazul axelor perpendiculare**. Cunoscând coordonatele (x,y) ale unui punct M în raport cu axele perpendiculare Ox, Oy, să găsim coordonatele (X,Y) ale aceluiaş punct în raport cu axele O'X, O'Y, coordonatele punctului O' în raport cu vechile axe fiind $(a\ b)$, iar Ox făcând cu O'X unghiul α (Fig. 30). Fie P' proecţia ortogonală a lui M pe O'X. Să proectăm conturul OO'P'M, ortogonal, pe axa Ox; avem

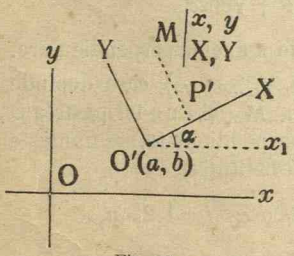


Fig. 30.

$$\text{pr}OM = \text{pr}OO' + \text{pr}O'P' + \text{pr}P'M,$$

(4) $$x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha;$$

proectând ortogonal pe Oy, obţinem

(5) $$y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Formulele (4) și (5) sunt formulele generale de trecere de la axele perpendiculare xOy la XO'Y, cunoscând coordonatele (a,b) ale noii originii O' și unghiul α făcut de axele Ox, O'X.

21. **Formulele de transformare generale în cazul axelor oblice.** Să considerăm un punct M ale cărui coordonate în raport cu axele xOy sunt $x=OP$, $y=PM$, iar în raport cu axele O'X, O'Y, $X=O'P'$, $Y=P'M$ (Fig. 31). Fie $a=OQ$, $b=QO'$, coordonatele punctului O' în raport cu axele Ox, Oy și α unghiul axelor Ox, O'X.

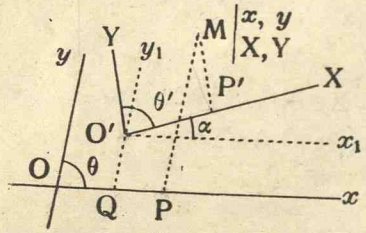


Fig. 31.

Conturucile OQO'P'M și OPM având aceeaș origină O și aceaș extremitate M, au proecții egale pe o axă. Insemnând cu θ și θ' unghiurile xOy, XO'Y, să proectăm ortogonal pe Ox; avem

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} &\text{prOP}+\text{prPM}=\text{prOQ}+\text{prQO'}+\text{prO'P'}+\text{prP'M},\\ &x+\text{PM}\cos(\text{PM},\,Ox)=a+\text{QO'}\cos(\text{QO'},\,Ox)+\text{O'P'}\cos(\text{O'X},\,Ox)+\\ &\qquad\qquad \text{P'M}\cos(\text{O'Y},\,Ox),\end{aligned}$$

$$\text{(7)}\qquad x+y\cos\theta=a+b\cos\theta+X\cos\alpha+Y\cos(\theta'+\alpha).$$

Ducând $O'x_1$ și $O'y_1$ paralele respectiv cu Ox și Oy, proectând ortogonal pe Oy, din formula (6), avem

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} x\cos\theta+y&=a\cos\theta+b+X\cos(\text{O'X},\,Oy)+Y\cos(\text{O'Y},\,Oy),\\ x\cos\theta+y&=a\cos\theta+b+X\cos(\theta-\alpha)+Y\cos(\text{O'Y},\text{O'}y_1),\\ x\cos\theta+y&=a\cos\theta+b+X\cos(\theta-\alpha)+Y\cos(\text{XO'Y}-\text{XO'}y_1),\\ x\cos\theta+y&=a\cos\theta+b+X\cos(\theta-\alpha)+Y\cos[\theta'-(\theta-\alpha)],\\ x\cos\theta+y&=a\cos\theta+b+X\cos(\theta-\alpha)+Y\cos(\theta'-\theta+\alpha).\end{aligned}$$

Formulele (7) și (8) ne dau coordonatele (X,Y) ale punctului M față de noile axe O'X, O'Y, când se cunosc coordonatele aceluiaș punct față de axele Ox, Oy și când se cunosc coordonatele (a, b) ale noii origini O' în raport cu vechile axe, precum și unghiul α al axelor O'X, Ox, axele xOy, XO'Y, făcând unghiurile $xOy=\theta$, $\text{XO'Y}=\theta'$.

Observare. Făcând în formulele (7) și (8) $\theta=90^\circ$, $\theta'=90^\circ$, avem

$$x=a+X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\quad y=b+X\sin\alpha+Y\cos\alpha,$$

formulele deja găsite în cazul schimbării generale a axelor perpendiculare.

22. **Expresiuni metrice.** O expresiune $F(x_1,y_1;\ldots x_n,y_n)$, care depinde de coordonatele $(x_1,y_1),\ldots(x_n,y_n)$ ale punctelor $M_1,\ldots M_n$, și care își păstrează forma după o translație și o rotație a axelor perpendiculare, se numește o expresiune metrică. Deci, făcând înlocuirea (substituția)

$$x_i=a+X_i\cos\alpha-Y_i\sin\alpha,\ y_i=b+X_i\sin\alpha+Y_i\cos\alpha,\quad i=1,2,\ldots n,$$

avem

$$F(x_1,y_1;\ldots x_n,y_n)\equiv F(X_1,Y_1;\ldots X_n,Y_n).$$

I. *Substituție ortogonală.* Să considerăm expresiunea x^2+y^2 și să rotim axele perpendiculare cu unghiul α. Inlocuind pe x și y cu

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\quad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha, \tag{9}$$

avem

$$x^2+y^2=(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2=(X^2+Y^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),$$

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.$$

Vedem, deci, că făcând asupra coordonatelor (x, y) substituția (9), forma expresiunii x^2+y^2 nu se schimbă, este un *invariant.*

In general, *substituția*

$$x=a_1X+b_1Y,\quad y=a_2X+b_2Y, \tag{10}$$

se zice *ortogonală*, dacă

$$x^2+y^2\equiv X^2+Y^2. \tag{11}$$

Avem

$$x^2+y^2=(a_1X+b_1Y)^2+(a_2X+b_2Y)^2=(a_1^2+a_2^2)X^2+$$

$$2(a_1b_1+a_2b_2)XY+(b_1^2+b_2^2)Y^2.$$

Observând relația (11), trebue să avem

$$X^2+Y^2\equiv(a_1^2+a_2^2)X^2+2(a_1b_1+a_2b_2)XY+(b_1^2+b_2^2)Y^2.$$

Egalând coeficienții lui X^2, XY, Y^2, din ambii membrii, avem

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2=1, \\ b_1^2+b_2^2=1, \\ a_1b_1+a_2b_2=0. \end{cases} \tag{12}$$

Aceste relații sunt condițiile necesare și suficiente ca substituția (10) să fie ortogonală. Ele exprimă că determinantul substituții,

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

este ortogonal. Calculând pătratul acestui determinant, avem

$$\delta^2=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1b_1+a_2b_2 \\ a_1b_1+a_2b_2 & b_1^2+b_2^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

deci

$$\delta=\pm1.$$

Inmulțind relațiile (10) respectiv cu a_1 și a_2 și adunând; apoi, înmulțind cu b_1 și b_2 și adunând, obținem

$$a_1x+a_2y=(a_1^2+a_2^2)X+(a_1b_1+a_2b_2)Y,$$

$$b_1x+b_2y=(a_1b_1+a_2b_2)X+(b_1^2+b_2^2)Y.$$

Observând relațiile (12), avem

(13) $$X=a_1x+a_2y, Y=b_1x+b_2y.$$

Aceasta se zice *substituția inversă* a substituții ortogonale (10). Din ultima din relațiile (12), deducem

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{-a_2}{b_1}$$

și aplicând o proprietate cunoscută a rapoartelor egale, avem

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{-a_2}{b_1}=\pm\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

Observând primele două relații (12), obținem

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{-a_2}{b_1}=\pm 1.$$

Semnul + corespunde cazului când luăm $\delta=1$, iar semnul -, cazului $\delta=-1$.

Luând numai semnul + (semnul - corespunde cazului când schimbăm sensul axei OX), avem

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{-a_2}{b_1}=1,\ a_1=b_2,\ a_2=-b_1.$$

Observând relațiile (12), rezultă

$$a_1^2+b_1^2=b_2^2+b_1^2=1,$$

$$a_2^2+b_2^2=(-b_1)^2+b_2^2=b_1^2+b_2^2=1,$$

$$a_1a_2+b_1b_2=a_1(-b_1)+(-a_2)b_2=-(a_1b_1+a_2b_2)=0,$$

care probează că *substituția inversă* (13) îndeplinește aceleași condiții analoage cu (12), adică *este* o substituție *ortogonală*.

Se observă că rotația axelor perpendiculare,

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha,$$

este o substituție ortogonală.

II. *Exemple de invarianți față de rotația axelor perpendiculare.*

1°. x^2+y^2. Am văzut că avem

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.$$

Interpretarea geometrică este următoarea. Expresiunile x^2+y^2, X^2+Y^2 trebue să fie egale, căci reprezintă respectiv pătratul distanței, $\overline{OM}^2$, de la origina comună a axelor perpendiculare xOy și XOY la punctul M.

2°. $x_1x_2+y_1y_2$. După rotația axelor de unghiul α, avem

$$E\equiv x_1x_2+y_1y_2=(X_1\cos\alpha-Y_1\sin\alpha)(X_2\cos\alpha-Y_2\sin\alpha)+$$

$$(X_1\sin\alpha+Y_1\cos\alpha)(X_2\sin\alpha+Y_2\cos\alpha),$$

$$E=(X_1X_2+Y_1Y_2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),$$

$$x_1x_2+y_1y_2=X_1X_2+Y_1Y_2.$$

Interpretarea geometrică este următoarea. Avem (Fig. 32)

$$E = x_1x_2 + y_1y_2 = OM_1 \cdot OM_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{OM_1 \cdot OM_2},$$

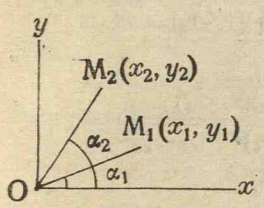


Fig. 32.

$$E = OM_1 \cdot OM_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

$$E = OM_1 \cdot OM_2 \frac{1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2}}.$$

Notând cu α_1, α_2 unghiurile lui Ox cu dreptele OM_1, OM_2, avem

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad \frac{y_2}{x_2} = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Deci
$$E = OM_1 \cdot OM_2 \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2}},$$

$$E = OM_1 \cdot OM_2 \frac{1 + \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}}\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_2}}} =$$

$$OM_1 \, OM_2 \frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1}\sqrt{\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2}},$$

$$E = OM_1 \, OM_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = OM_1 \cdot OM_2 \cos(OM_1, OM_2).$$

Deci, expresiunea considerată este un invariant față de rotația axelor, fiindcă nu depinde de poziția axelor, ci numai de punctele O, M_1, M_2. Expresiunea E se zice *produsul geometric al vectorilor* OM_1, OM_2.

III. *Exemple de expresiuni metrice.* 1°. $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. Această expresie nu-și schimbă forma față de o translație a axelor,

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

căci $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = [(a+x'_1)-(a+x'_2)]^2+[(b+y'_1)-(b+y'_2)]^2 =$

$$(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2.$$

Expresia dată se poate scrie

$$(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2).$$

Cum fiecare din paranteze este invariant față de o rotație a axelor, după cum am văzut mai sus, rezultă că întreaga expresie este invariant față de o rotație a axelor perpendiculare.

Expresia dată este deci metrică, căci își păstrează forma față de o translație și o rotație a axelor perpendiculare.

Interpretarea geometrică este simplă. Expresia dată este pătratul distanței dintre punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2), independentă de orice sistem de referințe.

2°. $E \equiv (x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)$. Considerând punctele $M_1(x_1,y_1)$, ...$M_4(x_4,y_4)$ (Fig. 33), avem

$$E = M_1M_2 \cdot M_3M_4 \frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{M_1M_2 \cdot M_3M_4},$$

$$E = M_1M_2 \cdot M_3M_4 \frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}},$$

$$E = M_1M_2 \cdot M_3M_4 \frac{1+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}\right)^2}}.$$

Insemnând cu α și β unghiurile lui Ox cu vectorii M_1M_2, M_3M_4 (Fig. 33), din triunghiurile dreptunghice M_1PM_2, M_3QM_4, avem

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{y_3-y_4}{x_3-x_4} = \operatorname{tg}\beta.$$

Deci

$$E = M_1M_2 \, M_3M_4 \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

$$E = M_1M_2 \cdot M_3M_4 \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}} =$$

$$M_1M_2 \cdot M_3M_4(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),$$

$$E = M_1M_2 \cdot M_3M_4\cos(\alpha-\beta)$$

$$= M_1M_2 \cdot M_3M_4\cos(M_1M_2, M_3M_4).$$

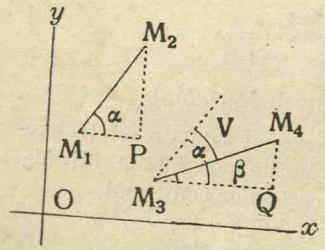


Fig. 33.

Expresia dată este independentă de orice sistem de referințe, depinde numai de cele patru puncte date și se zice produsul geometric al vectorilor $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_3M_4}$.

Exerciții.

1) Ce devine ecuația $x^2-y^2-2x-2y-1=0$, când curba reprezentativă este raportată la axele O'X, O'Y, ce se tae în punctul O'(1,-1), unghiul axelor O'X și Ox fiind 45°.

R. $XY+\frac{1}{2}=0$.

2) Ce devine ecuația $2x^2-3y^2-8x-6y+6=0$, când curba reprezentativă este raportată la axe paralele cu cele date și tăindu-se în punctul (2,-1).

R. $2X^2-3Y^2+1=0$.

3) Transportând axele paralel în punctul (1,1), să se determine unghiul

cu care trebue să învârtim noile axe în jurul acestui punct, pentru ca ecuaţia $x^2+2xy+y^2-4x-4y-4=0$ să se transforme în alta care să nu mai conţie termen cu XY.

R. $x=1+X\cos\alpha-Y\sin\alpha$, $y=1+X\sin\alpha+Y\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=0$, $\alpha=45^0$, $X^2-\sqrt{2}X-1=0$; curba reprezintă două drepte paralele cu O'Y.

4) Să se arate că expresia $(x_1y_2-x_2y_1)$ este un invariant faţă de rotaţia axelor.

R. Se aplică identitatea lui Lagrange $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2$. Fiecare din paranteze este un invariant.

Curbele de ordinul întâi.

Linia dreaptă.

23. $f(x.y)$ fiind un polinom în raport cu x şi y, gradul sau ordinul unei curbe $f(x,y)=0$, este gradul polinomului $f(x,y)=0$, în raport cu x şi y.

Curbele de ordinul întâi sunt reprezentate de ecuaţia

$$Ax+By+C=0,$$

A, B, C, fiind cantităţi date.

O curbă de ordinul al doilea este reprezentată de o ecuaţie de forma $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

24. **Curbele de ordinul întâi sunt linii drepte.** Să considerăm o dreaptă D definită de un punct $M_1(x_1,y_1)$ şi direcţia ei (Fig. 34).

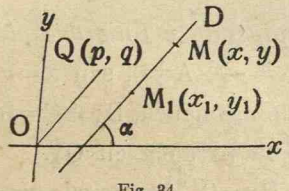


Fig. 34.

Aceasta însemnează că se cunosc coordonatele (p, q) ale unui punct Q al dreptei dusă prin origina O paralelă cu dreapta D. Am văzut că (x, y) fiind coordonatele unui punct oarecare M al acestei drepte, avem

$$x=x_1+p\rho,\ y=y_1+q\rho, \tag{1}$$

unde $\rho=\overline{M_1M}:\overline{OQ}$. Din aceste relaţii, deducem

$$\frac{x-x_1}{p}=\rho,\quad \frac{y-y_1}{q}=\rho.$$

De unde

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}, \tag{2}$$

care este o relaţie între coordonatele (x, y) ale unui punct oarecare M al linii drepte D.

Ecuaţia (2) este ecuaţia dreptei definită de punctul $M_1(x_1,y_1)$ şi parametrii săi directori (p, q). Această ecuaţie se mai poate scrie

$$y-y_1=\frac{q}{p}(x-x_1),$$

sau

(3) $$y-y_1=m(x-x_1),\ m=\frac{q}{p}.$$

Cantitatea $m=\frac{q}{p}$, care am văzut că se numește coeficientul unghiular al direcției dreptei D, se numește *coeficientul unghiular al dreptei* D.

Desvoltând ecuația (2), avem

$$qx-py-qx_1+py_1=0,$$

sau

(4) $$Ax+By+C=0,$$

unde

$$A=q,\ B=-p,\ C=py_1-qx_1,$$

$$m=\frac{q}{p}=-\frac{A}{B}.$$

Deci, o dreaptă D, definită de un punct și direcția ei (p, q) (sau coeficientul ei unghiular $\frac{q}{p}=m$), este reprezentată de ecuația (2), sau (3), sau (4); în rezumat, de ecuația

$$Ax+By+C=0,$$

de ordinul întâi. Așa dar, o dreaptă este reprezentată de o ecuație de forma (4).

Invers, *orice ecuație* $Ax+By+C=0$ *reprezintă o linie dreaptă*. In adevăr, forma simplă $Ax+C=0$, sau $x=-\frac{C}{A}$, $A\neq 0$, sau $x=a$, reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy. De asemenea, $By+C=0$, $y=-\frac{C}{B}$, $B\neq 0$, sau $y=b$, reprezintă o dreaptă paralelă cu Ox.

Să considerăm acum forma simplă $Ax+By=0$. Aceasta se poate scrie

$$y=-\frac{A}{B}x,\ y=mx,\ m=-\frac{A}{B}.$$

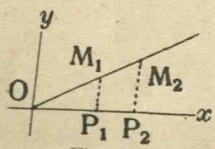


Fig. 35.

Considerând două puncte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ pe curba $y=mx$ (Fig. 35), avem

de unde $$y_1=mx_1,\ y_2=mx_2,$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2},\ \frac{P_1M_1}{P_2M_2}=\frac{OP_1}{OP_2}.$$

Această relație arată că triunghiurile OP_1M_1, OP_2M_2, care au unghiurile $OP_1M_1=OP_2M_2$, sunt asemenea. Deci, unghiurile $P_1OM_1=P_2OM_2$, adică dreptele OM_1, OM_2 sunt în prelungire, sau că dreapta M_1M_2 trece prin O.

Cum M_1 și M_2 au fost două puncte oarecare ale curbei $y=mx$, rezultă că această curbă este o dreaptă ce trece prin origina axelor de coordonate, de coeficient unghiular $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=m$.

Deci, ecuația

$$Ax+By=0,\ y=mx,\ m=-\frac{A}{B},$$

reprezintă o dreaptă ce trece prin origină, al cărei coeficient unghiular este $m=-\frac{A}{B}$.

Să considerăm cazul general

$$Ax+By+C=0.$$

Presupunând $B\neq 0$, căci altfel avem un caz deja studiat, avem

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

$$y=mx+n,\ m=-\frac{A}{B},\ n=-\frac{C}{B}.$$

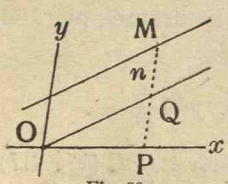


Fig. 36.

Dar, ecuația $y=mx$, reprezintă o dreaptă OQ, ce trece prin origină (Fig. 36). Dând lui x valoarea OP, punctul M al curbei $y=mx+n$ se obține din punctul Q al dreptei $y=mx$, luând pe paralela PQ la Oy, cantitatea constantă $QM=n$. Deci, curba $y=mx+n$ se obține dând dreptei $y=mx$ o translație egală cu n dealungul lui Oy. Prin urmare, *ecuația*

$$y=mx+n$$

reprezintă o dreaptă paralelă cu dreapta $y=mx$, adică *o linie dreaptă.*

Așa dar, ecuația

$$Ax+By+C=0,$$

sau

$$y=mx+n,\ m=-\frac{A}{B},\ n=-\frac{C}{B},$$

reprezintă o linie dreaptă.

Deci, ecuația generală a linii drepte este

$$Ax+By+C=0,$$

și reciproc, orice linie dreaptă este reprezentată de o ecuație de gradul întâi în raport cu x și y; cu alte cuvinte, curbele de ordinul întâi sunt linii drepte.

Coeficientul unghiular al dreptei

$$Ax+By+C=0$$

este egal cu $-\frac{A}{B}$, raportul schimbat de semn dintre coeficienții lui x și y. Dacă ecuația dreptei este de forma

$$y=mx+n,$$

coeficientul unghiular m al dreptei este egal cu coeficientul termenului cu x, trecut în membrul al doilea.

In cazul axelor perpendiculare, formule (1) devin

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\sin\alpha,$$

$\rho=M_1M$, $OM=1$, $p=\cos\alpha$, $q=\sin\alpha$, $m=\frac{q}{p}=\operatorname{tg}\alpha$; ecuația (3) este

$$y-y_1=m(x-x_1),\ m=\operatorname{tg}\alpha,$$

coeficientul unghiular m este egal cu tangenta trigonometrică a unghiului pe care dreapta dată îl face cu Ox.

25. **Construcția dreptei** $Ax+By+C=0$. Fiind dată ecuația unei drepte, pentru a o construi, să găsim punctele unde dreapta tae axele de coordonate. Aceste puncte se obțin făcând în ecuația dreptei, pe rând, $y=0$ și $x=0$ și avem

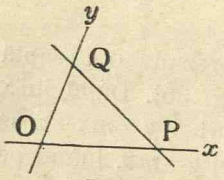


Fig. 37.

$$y=0,\ x=-\frac{C}{A};\quad x=0,\ y=-\frac{C}{B},$$

care sunt coordonatele punctelor P și Q (Fig. 37), unde dreapta tae axele Ox și Oy.

De ex., $2x-3y+6=0$. Punctul P unde tae axa Ox are coordonatele $y=0$, $x=-3$; iar punctul Q unde tae axa Oy, are coordonatele $x=0$, $y=\frac{6}{3}=2$. Dreapta cerută este PQ.

In cazul particular $y=mx$, dreapta se construește unind originea cu punctul de coordonate $(1,m)$. De ex., dreapta $y+2x=0$ se obține unind origina cu punctul $(1,-2)$.

26. **Reprezentarea parametrică a liniei drepte.** Am văzut că dreapta fiind definită prin punctele $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, coordonatele (x,y) ale unui punct oarecare al dreptei sunt

$$(5)\qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad \lambda=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}.$$

Expresiunile precedente, când λ variază, dau reprezentarea parametrică a liniei drepte definită prin punctele $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.

In caz când dreapta este dată prin punctul $M_1(x_1,y_1)$ și direcția ei, parametrii săi directori fiind p și q, reprezentarea parametrică a liniei drepte este dată de relațiile (1),

$$x=x_1+p\rho,\ y=y_1+q\rho,$$

ρ fiind un parametru variabil.

Aceste formule se deduc din (5), care se pot scrie

$$x=x_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2-x_1),\ x=x_1+\mu(x_2-x_1),\ \mu=\frac{\lambda}{1+\lambda},$$

adică

$$x=x_1+\mu(x_2-x_1),\ y=y_1+\mu(y_2-y_1),$$

sau $x=x_1+p\rho$, $y=y_1+q\rho$, punând ρ și p, q în loc de μ și x_2-x_1, y_2-y_1.

27. **Altă formă a ecuației liniei drepte.** Ecuația unei drepte fiind

$$Ax+By+C=0,\ C\neq 0,$$

să o scriem sub forma

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1.$$

Punctele unde tae axele Ox și Oy au coordonatele $\left(-\frac{C}{A},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$. Deci, ecuația unei drepte ce determină pe axele Ox și Oy segmentele $OA=a$, $OB=b$, este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

28. **Condițiile ca ecuațiile** $Ax+By+C=0$, $A_1x+B_1y+C_1=0$ **să reprezinte aceeaș dreaptă** se obțin scriind că sunt egale abscisele și ordonatele punctelor de intersecție cu axele Ox, Oy ale dreptelor reprezentate de ecuațiile considerate. Urmează deci

$$-\frac{C}{A}=-\frac{C'}{A'},\ -\frac{C}{B}=-\frac{C'}{B'},$$

de unde

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1},$$

adică să fie proporționali coeficienții corespunzători din cele două ecuații.

29. **Condiția ca două drepte să fie paralele.** Dreptele

$$Ax+By+C=0,\ A'x+B'y+C'=0$$

fiind paralele cu direcțiile ce au coeficienții unghiulari

$$m=-\frac{A}{B},\ m'=-\frac{A'}{B'},$$

aceste drepte sunt paralele când direcțiile lor sunt paralele, adică coeficienți unghiulari să fie egali, $m=m'$.

Scriind această condiție pentru dreptele date, urmează

$$-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'},\ \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'},$$

adică să fie proporţionali coeficienţii lui x şi y din ecuaţiile dreptelor.

Deci,

$$y=mx+\lambda,\ Ax+By+\lambda=0,$$

unde λ este un parametru variabil, reprezintă respectiv drepte paralele cu dreptele

$$y=mx+n,\ Ax+By+C=0.$$

30. **Unghiul a două drepte. Drepte perpendiculare.** Fie α şi α' unghiurile făcute de Ox cu dreptele

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\ (D')\equiv A'x+B'y+C'=0.$$

Am văzut că θ fiind unghiul axelor de coordonate (No. 10), avem

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta},\ \operatorname{tg}\alpha'=\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta},$$

$$m=-\frac{A}{B},\ m'=-\frac{A'}{B'}.$$

Unghiul $V=(D',D)$ al dreptelor este dat de relaţia

$$\operatorname{tg}V=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'},$$

unde vom înlocui pe $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha'$ cu valorile de mai sus.

Dreptele sunt perpendiculare când

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=0,$$

sau

$$1+\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}\cdot\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta}=0,$$

adică

$$1+(m+m')\cos\theta+mm'=0.$$

In cazul axelor perpendiculare, avem $\theta=90^0$, $\operatorname{tg}\alpha=m$, $\operatorname{tg}\alpha'=m'$,

$$\operatorname{tg}V=\frac{m-m'}{1+mm'},$$

iar *condiţia ca dreptele să fie perpendiculare este* ca între coeficienţii lor unghiulari să avem

$$1+mm'=0.$$

31. **Intersecţia a două drepte.** Punctul de intersecţie al dreptelor

$$Ax+By+C=0,\ A'x+B'y+C'=0$$

are pentru coordonate valorile lui x şi y care verifică ecuaţiile dreptelor.

Rezolvând aceste ecuații și presupunând $AB'-BA'\neq 0$, avem

$$x=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'},\quad y=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}.$$

Deci, când $AB'-BA'\neq 0$, sau $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$, valorile lui x și y sunt determinate, dreptele se tae într'un punct la distanță finită.

Dacă $AB'-BA'=0$, sau $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$, iar $BC'-CB'\neq 0$, x și y au valori foarte mari, punctul de intersecție este aruncat la infinit, dreptele sunt paralele. Am regăsit deci condiția ca dreptele să fie paralele.

Dacă $AB'-BA'=0$, $BC'-CB'=0$, avem

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},\quad CA'-AC'=0,$$

valorile lui x și y sunt de forma $\frac{0}{0}$, nederminate, dreptele au toate punctele comune, sunt confundate, ecuațiile se reduc la una singură.

32. **Fascicol linear de drepte.** Fiind date dreptele

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\quad (D')\equiv A'x+B'y+C'=0,$$

ecuația

$$\alpha(Ax+By+C)+\alpha'(A'x+B'y+C')=0 \tag{6}$$

reprezintă, oricare ar fi α și α', o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor (D) și (D'), căci punctul de intersecție al acestor două drepte verifică ecuațiile dreptelor (D) și (D') și deci și o transformare a lor, adică ecuația $\alpha D+\alpha' D'=0$.

Reciproc, se pot găsi valori pentru α și α' pentru ca ecuația (6) să reprezinte orice dreaptă dată ce trece prin intersecția dreptelor (D) și (D'). În adevăr, o asemenea dreaptă este definită prin punctul de intersecție al celor două drepte și încă un punct $M_0(x_0,y_0)$. Scriind că dreapta (6) trece prin acest punct, avem

$$\alpha(Ax_0+By_0+C)+\alpha'(A'x_0+B'y_0+C')=0.$$

Va fi deci destul să luăm

$$\alpha=A'x_0+B'y_0+C,\quad \alpha'=-(Ax_0+By_0+C),$$

pentru ca ecuația (6) să reprezinte dreapta definită de punctul $M_0(x_0,y_0)$ și intersecția dreptelor (D) și (D').

Dacă dreptele (D) și (D') sunt paralele, ecuația (6) reprezintă toate dreptele paralele cu direcția comună celor două drepte.

Dacă dreptele (D) și (D') sunt confundate, dreapta (6) se confundă ea însăși cu aceste drepte.

Afară de acest ultim caz, ecuația (6) reprezintă toate dreptele ce trec prin intersecția dreptelor (D) și (D') și se zice că ecuația

(6) reprezintă un *fascicol linear de drepte.* Această ecuație nu conține de cât un parametru $\frac{\alpha'}{\alpha}=\lambda$ și se poate scrie

$$A x+B y+C+\lambda(A' x+B' y+C')=0. \tag{7}$$

Totuși, pentru ca această ecuație să reprezinte toate dreptele ce trec prin intersecția dreptelor (D) și (D'), trebue să presupunem că dăm paramentrului λ și valoarea $\frac{\alpha'}{\alpha}$ infinit de mare, care are loc pentru $\alpha=0$, când ecuația (6) și deci și (7) reprezintă dreapta $A' x+B' y+C'=0$.

In rezumat, când ecuația unei drepte conține un parametru variabil, λ, la gradul întâi,

$$(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+C+\lambda C'=0,$$

dreptele reprezentate de această ecuație trec prin punctul fix, intersecția dreptelor

$$A x+B y+C=0,\ A' x+B' y+C'=0.$$

In caz când aceste două drepte sunt paralele, dreptele considerate au o direcție fixă,

33. **Ecuația dreptelor ce trec printr'un punct dat.** Ecuația unei drepte fiind $Ax+By+C=0$, vedem că conține trei parametrii, A,B,C. Nu pot fi toți nuli în acelaș timp, căci atunci ecuația dreptei n'ar mai exista și divizând cu acela care este diferit de zero, ecuația dreptei conține numai doi parametrii. Trebue, deci, două condițiuni pentru determinarea dreptei, de ex, două puncte, sau un punct și direcția.

Scriind că dreapta reprezentată de ecuația considerată trece prin punctul (x_1, y_1), avem

$$A x_1+B y_1+C=0.$$

Scăzând această ecuație din $Ax+By+C=0$, rezultă

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$

sau

$$y-y_1=m(x-x_1),\ m=-\frac{A}{B}.$$

Deci, ecuația generală a dreptelor care trec prin punctul (x_1, y_1) este

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

m fiind un parametru variabil (de fapt este coeficientul unghiular al dreptei).

Aplicații. 1° *Să scrie ecuația unei drepte ce trece prin punctul (1,0) și paralelă cu bisectoarea a doua a axelor.* Ecuația bisectoarei a doua fiind $y=-x$, ecuația dreptei cerute este

$$y-0=-(x-1),\ y=-x+1.$$

2° *Să se scrie ecuația unei drepte ce trece prin origină și este perpendiculară pe dreapta care determină pe axele de coordonate perpendiculare segmentele de lungime 2 și 3.* Ecuația unei drepte ce trece prin origină este $y=mx$. Ecuația dreptei date este

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,$$

și are coeficientul unghiular $m'=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$. Dreapta căutată fiind perpendiculară pe aceasta, urmează $mm'+1=0$, $m=-\frac{1}{m'}$, $m=\frac{2}{3}$. Ecuația dreptei cerute este

$$y=\frac{2}{3}x.$$

34. **Ecuația dreptei ce trece prin două puncte** (x_1,y_1), (x_2,y_2). Am văzut că ecuația dreptei ce trece prin punctul (x_1,y_1), este

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Această dreaptă trecând și prin punctul (x_2,y_2), coordonatele acestui punct verifică ecuația dreptei, deci

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1),\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Inlocuind pe m, ecuația dreptei ce trece prin punctele (x_1,y_1), (x_2,y_2), este

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

iar coificientul ei unghiular este $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, adică raportul dintre diferența ordonatelor și absciselor celor două puncte, luate în aceeaș ordine.

Aplicații. 1°. *Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctele* (0,2), (3,—1). Avem

$$y-2=\frac{-1-2}{3-0}(x-0),\quad y-2=-x,\quad x+y-2=0.$$

2°. *Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctele* M(a,b) și N$\left(\frac{a+\lambda c}{1+\lambda},\ \frac{b+\lambda d}{1+\lambda}\right)$. *Să explice rezultatul.* Avem

$$y-b=\frac{\frac{b+\lambda d}{1+\lambda}-b}{\frac{a+\lambda c}{1+\lambda}-a}(x-a),\quad y-b=\frac{d-b}{c-a}(x-a).$$

Ecuația dreptei cerute nu depinde de λ, ci reprezintă o dreaptă ce trece prin punctele (a,b), (c,d). Așa și trebuia, căci punctul N este un punct oarecare al dreptei definită de punctele (a,b), (c,d).

3°. *Să se afle ecuația dreptei ce trece prin intersecția dreptelor*

$y-2x-a=0$, $y-4x+a=0$ *și prin originea axelor de coordonate.* Ecuația dreptelor ce trec prin intersecția dreptelor date este

$$y-2x-a+\lambda(y-4x+a)=0.$$

Această dreaptă trecând și prin origină, ecuația ei este verificată când înlocuim pe x și y cu 0 și 0; deci

$$-a+\lambda a=0,\ \lambda=1.$$

Ecuația dreptei cerute este

$$y-2x-a+(y-4x+a)=0,\ y-3x=0.$$

4°. *Altă formă a ecuației dreptei ce trece prin două puncte* (x_1,y_1), (x_2,y_2). Fie

(8) $$Ax+By+C=0$$

ecuația dreptei ce conține punctele date, adică

(9) $$Ax_1+By_1+C=0,$$

$$Ax_2+By_2+C=0.$$

Ecuațiile (8) și (9) formează un sistem de ecuații lineare și omogene în raport cu A,B,C. Cum A,B,C nu pot fi toate nule în același timp, căci n'ar mai exista dreapta pe care sunt cele două puncte, urmează că sistemul are soluții diferite de zero, deci trebue ca determinantul coeficienților să fie nul, adică

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este altă formă a ecuației dreptei ce trece prin punctele (x_1,y_1), (x_2,y_2).

35. **Condiția ca trei puncte** (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) **să fie coliniare** se obține scriind că punctul (x_1,y_1) este pe dreapta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

definită de punctele (x_2,y_2), (x_3,y_3), și este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observare. Această condiție se mai putea obține și altfel, fără ajutorul determinaților, scriind că punctul (x_3,y_3) este pe dreapta

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

definită de punctele (x_1,y_1), (x_2,y_2), adică

$$y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1);$$

sau, în fine, scriind că dreptele definite respectiv de punctele (x_1,y_1), (x_2,y_2); (x_1,y_1), (x_3,y_3), sunt paralele, adică

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1},$$

36. **Condiţia ca trei drepte să fie concurente.** Dreptele

$$\begin{aligned}(D_1)&\equiv A_1x+B_1y+C_1=0,\\ (D_2)&\equiv A_2x+B_2y+C_2=0,\\ (D_3)&\equiv A_3x+B_3y+C_3=0\end{aligned}\tag{10}$$

sunt concurente, când există o valoare unică pentru x şi una pentru y, care se verifice de odată ecuaţiile celor trei drepte. Condiţia ca aceste ecuaţii să fie compatibile este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

Una din ecuaţiile (10) este o consecinţă a celorlalte două, iar coordonatele punctului comun celor trei drepte se obţin rezolvând în raport cu x şi y aceste două ecuaţii.

Observare. Se mai poate exprima şi altfel condiţia ca trei drepte să fie concurente. In adevăr sistemul (10) fiind compatibil, ultima ecuaţie, de ex., este o consecinţă a primelor două, adică

$$A_3x+B_3y+C_3\equiv\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2),$$

ceea ce înseamnă că se pot determina trei cantităţi $\alpha_1,\alpha_2\,\alpha_3$, astfel în cât să avem

$$\alpha_1(A_1x+B_1y+C_1)+\alpha_2(A_2x+B_2y+C_2)+\alpha_3(A_3x+B_3y+C_3)\equiv 0,$$

$$x(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3)+y(\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3)+\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_3C_3\equiv 0.$$

Identificând, adică egalând cu zero coeficienţii lui x, y şi termenul liber, avem

$$\begin{aligned}&\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3=0,\\ &\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3=0,\\ &\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_3C_3=0.\end{aligned}\tag{11}$$

Sistemul acesta de ecuaţii lineare şi omogene în raport cu α_1, α_2, α_3, trebuind să aibă soluţii nu toate nule, urmează că determinantul

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=0,$$

care este condiţia pe care am găsit-o ca dreptele să fie concurente.

Această condiție fiind îndeplinită, ecuația a treia din (11) este o consecință a primelor două, iar din primele două, rezolvând în raport cu $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, obținem

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=\frac{A_2B_3-A_3B_2}{A_1B_2-A_2B_1},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\frac{A_3B_1-A_1B_3}{A_1B_2-A_2B_1},$$

de unde

$$\frac{\alpha_1}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}}=\frac{\alpha_2}{\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}}=\frac{\alpha_3}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}},$$

așa că valorile lui $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt date de

$$\alpha_1=k\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix},\quad \alpha_2=k\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix},\quad \alpha_3=k\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix},$$

k fiind un număr oarecare.

Prin urmare, dacă dreptele D_1, D_2, D_3 sunt concurente, se pot găsi trei valori, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, astfel în cât să avem identic

$$\alpha_1D_1+\alpha_2D_2+\alpha_3D_3\equiv 0.$$

Această condiție este deci necesară. Ea este și suficientă. In adevăr, fie că avem identic

$$\alpha_1D_1+\alpha_2D_2+\alpha_3D_3\equiv 0.$$

De unde

$$-\alpha_3D_3\equiv\alpha_1D_1+\alpha_2D_2,$$

relație care probează că ecuația dreptei D_3 este de forma $\lambda_1D_1+\lambda_2D_2=0$, adică dreapta D_3 este o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor D_1 și D_2, sau că dreptele D_1, D_2, D_3 sunt concurente.

37. **Aplicații.** I. *Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complect sunt colineare.* Fie patrulaterul complect ABCDEF (Fig. 38), ale cărui diagonale sunt AC, BD, EF. Să luăm ca axe de coordonate, AD ca axă Ox și AB ca Oy. Să însemnăm coordonatele punctelor D, F, B, E cu



Fig. 38.

$$D(d, 0),\ F(f, 0),\ B(0, b),\ E(0, e).$$

Pentru a găsi coordonatele punctului C, rezolvăm ecuațiile

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{e}=1,\quad \frac{x}{f}+\frac{y}{b}=1,$$

ale dreptelor D E și BF ; avem

$$x=\frac{fd(b-e)}{bd-ef},\quad y=\frac{be(d-f)}{bd-ef}.$$

Coordonatele mijloacelor M, N, P ale diagonalelor AC, BD, EF sunt

$$M\left[\frac{fd(b-e)}{2(bd-ef)},\ \frac{be(d-f)}{2(bd-ef)}\right],\quad N\left(\frac{d}{2},\ \frac{b}{2}\right),\quad P\left(\frac{f}{2},\ \frac{e}{2}\right).$$

Să calculăm determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{fd(b-e)}{2(bd-ef)} & \frac{be(d-f)}{2(bd-ef)} & 1 \\ \frac{d}{2} & \frac{b}{2} & 1 \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & 1 \end{vmatrix},$$

care se mai scrie

$$\frac{1}{4(bd-ef)} \begin{vmatrix} fd(b-e) & be(d-f) & bd-ef \\ d & b & 1 \\ f & e & 1 \end{vmatrix}.$$

Se dezvoltă şi se arată că este nul, şi deci mijloacele diagonalelor sunt colineare.

II. *Să se arate că medianele unui triunghi sunt concurente.* Să luăm ca axe Ox şi Oy (Fig. 39) laturile AB şi AC ale triunghiului dat ABC. Fie B$(b, 0)$ C$(0, c)$ coordonatele punctelor B şi C. Acelea ale mijloacelor laturilor AC, AB, BC, sunt $B'\left(0, \frac{c}{2}\right)$, $C'\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $A'\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

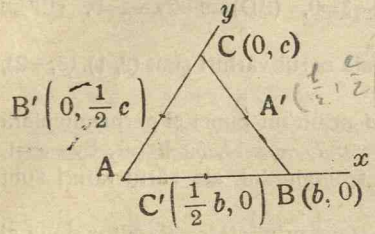


Fig. 39.

Ecuaţiile medianelor sunt

$$(AA') \equiv cx - by = 0,$$
$$(BB') \equiv cx + 2by - bc = 0,$$
$$(CC') \equiv 2cx + by - bc = 0.$$

Determinantul coeficienţilor este

$$\begin{vmatrix} c & -b & 0 \\ c & 2b & -bc \\ 2c & b & -bc \end{vmatrix} = 0,$$

relaţie care probează că aceste drepte sunt concurente.

Aceasta se mai poate vedea, observând că avem $(AA') + (BB') - (CC') \equiv 0$.

III. *Se dau două puncte fixe,* A *pe* Ox *şi* B *pe* Oy, *astfel ca* $OA = OB = a$, *axele fiind perpendiculare. Fie* P *şi* Q *proecţiile pe* Ox *şi* Oy *ale unui punct* M *variabil pe* AB. *Să se arate că perpendiculara din* M *pe* PQ *trece printr'un punct fix.* Ecuaţia dreptei AB fiind $x + y = a$, să însemnăm coordonatele punctului M variabil pe AB, cu (λ, μ); deci $\lambda + \mu = a$. Ecuaţia perpendicularei din M pe PQ este

$$y - \mu = \frac{\lambda}{\mu}(x - \lambda).$$

Inlocuind în această ecuaţie pe μ cu valoarea sa, $\mu = a - \lambda$. dedusă din relaţia $\lambda + \mu = a$, obtinem

$$a(y - a) + \lambda(2a - x - y) = 0,$$

de unde deducem că perpendiculara din M trece prin punctul (a, a) de intersecţie al dreptelor

$$y - a = 0, \quad x + y - 2a = 0.$$

Exerciții.

1). Să se afle ecuațiile laturilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt (2, 3), (4, −5), (−3, −6)

R. $x-7y=39$, $9x-5y=3$, $4x+y=11$.

2). Să se afle ecuațiile medianelor triunghiului ale cărui vârfuri sunt (5, 0), (1, 2), (−3, −2).

R. $y=0$; $x=1$; $x-2y-1=0$.

3). Să se arate că dreptele $2x+3y=13$, $5x-y=7$, $x-4y+10=0$, sunt concurente și să se afle punctul lor de intersecție.

R. Punctul (2, 3) e dat de primele două ecuații și coordonatele sale verifică pe a treia.

4). Să se afle diagonalele patrulaterului ale cărui laturi sunt $(CB)\equiv x-y-1=0$, $(AD)\equiv x-2y+4=0$, $(DC)\equiv 2x+y-2=0$, $(AB)\equiv x-2=0$.

R. Se găsesc punctele de intersecție A(2, 3), B(2, 1), C(1, 0), D(0, 2). Se caută coordonatele E(2, −2), F(5, 6) de intersecție al laturilor AB, CD; AD, BC. Ecuațiile diagonalelor sunt $(AC)\equiv 3x-y-3=0$, $(BD)\equiv x+2y-4=0$, $(EF)\equiv 8x-3y-22=0$.

5). Să se afle înălțimile triunghiului ale cărui vârfuri sunt (2, 1), (3, −2), (−4, −1).

R. Se aplică ecuația dreptei ce trece printr'un punct și perpendiculară pe alta ce trece prin două puncte. Se găsesc $7x-y=13$, $3x+y=7$, $3y-x=1$.

6). Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului ale cărui laturi sunt $x-2y=2$, $2x+y=2$, $x-y+1=0$.

R. Se aplică ecuația unei drepte ce trece prin intersecția altor două și perpendiculară pe alta. Se află pentru una din ele,

$$x-2y-2+\lambda(2x+y-2)=0,\quad -\frac{1+2\lambda}{-2+\lambda}=-1,\ \lambda=-3,\ 5x+5y-4=0.$$

Celelalte înălțimi sunt primele două drepte.

7). Să se afle ecuațiile perpendicularelor ridicate pe mijloacele laturilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt (1, 2), (−3, 1), (2, −1).

R. $10x-4y+5=0$, $x-2y=0$, $8x+2y+5=0$.

8). Se dă triunghiul ale cărui laturi sunt $x+2y=5$, $x-4y=5$, $x-y+1=0$ Să se afle ecuațiile paralelor duse prin vârfurile acestui triunghi la laturi.

R. $x-y=5$, $x-4y=-7$, $x+2y+7=0$.

9). Să se afle ecuațiile dreptelor ce unesc mijloacele a două laturi oarecare ale triunghiului $4x-3y+1=0$, $2x+y-7=0$, $x+3y+4=0$.

R. Vârfurile triunghiului sunt (2. 3), (−1, −1), (5, −3). Dreptele cerute sunt

$$2x+6y-7=0,\ 4x-3y-14=0,\ 2x+y-2=0.$$

10). α și β fiind coordonatele unui punct M din planul a două axe Ox și Oy, iar

$$(\alpha+2)x+(\alpha+3\beta+5)y+3=0,\ (\alpha+2)x-(2\alpha+\beta-2)y-2=0$$

ecuațiile a două drepte, să se afle locul pozițiilor ce trebue să ocupe M în plan, pentru ca dreptele date să fie, 1° paralele, 2° să coincidă.

R. 1°. $(\alpha+2)(3\alpha+4\beta+3)=0$; $\alpha+2=0$, $3\alpha+4\beta+3=0$; $M(\alpha, \beta)$ trebue să fie sau pe paralela $\alpha+2=0$ la Oy, sau pe dreapta $3\alpha+4\beta+3=0$.

2°. $\frac{\alpha+2}{\alpha+2}=\frac{-(\alpha+3\beta+5)}{2\alpha+\beta-2}=-\frac{3}{2}$. Egalitatea primelor două rapoarte dă $(\alpha+2)(3\alpha+4\beta+3)=0$, iar a ultimelor două, $4\alpha-3\beta-16=0$. Ecuaţiile sunt verificate pentru $\alpha=-2$, $\beta=-8$; $\alpha=\frac{11}{5}$, $\beta=-\frac{12}{5}$.

11). Să se arate că într'un trapez, dreapta care uneşte mijloacele M şi N ale bazelor şi cele două laturi neparalele sunt concurente.

R. Trapezul fiind OABC, se ia ca axe Ox si Oy laturile OA şi OC. Se notează coordonatele vârfurilor, A$(a,0)$, B(b,d), C$(0,d)$. $(AB)\equiv dx+(a-b)y-ad=0$, $(MN)\equiv 2dx+(a-b)y-ad=0$. Sau, se arată că MN şi AB tae pe OC în acelaş punct.

12). Să se demonstreze că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

R. A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) vârfurile. Ecuaţia înălţimei din A este

$$(D_1)\equiv(x_2-x_3)(x-x_1)+(y_2-y_3)(y-y_1)=0.$$

Ale celorlalte se deduc prin permutări circulare,

$$(D_2)\equiv(x_3-x_1)(x-x_2)+(y_3-y_1)(y-y_2)=0,\ (D_3)\equiv(x_1-x_2)(x-x_3)+$$
$$(y_1-y_2)(y-y_3)=0.$$

Se arată că $D_1+D_2+D_3\equiv 0$.

13). Să se arate că perpendicularele ridicate pe mijloacele laturilor unui triunghi sunt concurente.

R A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C$(x_3\ y_3)$. Ecuaţiile perpendicularelor sunt

$$(D_1)\equiv 2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)+x_3^2-x_2^2+y_3^2-y_2^2=0,\ (D_2)\equiv 2x(x_3-x_1)+2y(y_3-y_1)+$$
$$x_1^2-x_3^2+y_1^2-y_3^2=0,\ (D_3)\equiv 2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0;$$

$$D_1+D_2+D_3\equiv 0.$$

14). Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi două puncte A şi C pe Ox şi B pe Oy. Perpendiculara din C pe AB tae pe Oy în D. Să se arate că dreptele AD şi BC sunt perpendiculare.

R. A$(a,0)$, C$(c,0)$, B$(0,b)$. Se află coordonatele punctului $D\left(0,-\frac{ac}{b}\right)$. Se arată că între coeficienţii unghiulari m şi m' ai dreptelor AD şi BC, avem relaţia $1+mm'=0$. D este ortocentrul triunghiului ABC.

15). O dreaptă AB se deplasează astfel ca suma inverselor segmentelor OA şi OB ce determină pe două axe de coordonate este constantă şi egală cu $\frac{1}{k}$. Să se demonstreze că aceste drepte AB trec printr'un punct fix.

R. A$(\lambda,0)$, B$(0,\mu)$. Ecuaţia dreptei AB este $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}=1$, cu condiţia $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{k}$. Se înlocueşte $\frac{1}{\mu}$ în ecuaţia dreptei şi se obţine $k(x-y)+\lambda(y-k)=0$. Punctele fix este (k,k).

16). Să se arate că într'un triunghi dreptunghic OAB, dreapta care uneşte vârful O al unghiului drept cu centrul C al pătratului ADEB construit pe ipotenuză este bisectoarea unghiului drept.

R. Luăm ca axe Ox şi Oy laturile unghiului drept (Fig. 40); $OA=a$, $OB=b$. Fie m, m' coeficienţii unghiulari ai dreptelor AB şi AC, astfel că unghiul $BAC=45^0$. Avem

$\operatorname{tg} xAB = m = -\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} xAC = m'$, $m' = \operatorname{tg}(xAB - 45) = \frac{m-1}{1+m} = \frac{b+a}{b-a}$.

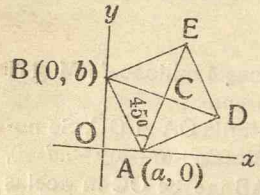


Fig. 40.

Ecuația dreptei AC este $y = \frac{b+a}{b-a}(x-a)$, iar a perpendicularei pe ea, a dreptei BC, este $y - b = \frac{a-b}{a+b}x$. Aceste drepte se tae în punctul $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, care este pe bisectoarea întâi a axelor. Deci, deplasând un pătrat, astfel ca două vârfuri consecutive să fie pe cele două laturi ale unui unghi drept, centrul pătratului se mișcă pe bisectoarea unghiului drept.

17). Se dau două axe oblice Ox și Oy și trei puncte A, B, C. Pe BC, CA, AB, respectiv, ca diagonale, se construiesc paralelograme cu laturi paralele cu axele de coordonate. Să se arate că celelalte diagonale (afară de BC, CA, AB) ale paralelogramelor astfel construite sunt concurente.

R. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Ecuațiile diagonalelor sunt $x(y_1 - y_2) + y(x_1 - x_2) + x_2y_2 - x_1y_1 = 0$, $x(y_2 - y_3) + y(x_2 - x_3) + x_3y_3 - x_2y_2 = 0$, $x(y_3 - y_1) + y(x_3 - x_1) + x_1y_1 - y_3y_3 = 0$.

18). Fiind cunoscute coordonatele unui punct $M(x_1, y_1)$ și ecuația unei drepte $D \equiv Ax + By + C = 0$, să se afle coordonatele punctului $M'(x_1', y_1')$ simetricul lui M față de dreapta D.

R. Se scrie că mijlocul lui MM' este pe D și că MM' este perpendiculară pe D. Se găsește

$$x_1' = \frac{(B^2 - A^2)x_1 - 2ABy_1 - 2AC}{A^2 + B^2}, \quad y_1' = \frac{-2ABx_1 + (A^2 - B^2)y_1 - 2AC}{A^2 + B^2}.$$

19). Se dau două puncte fixe, A pe Ox și B pe Oy (axe perpendiculare). Se ia pe Ox și Oy, înspre A și B, lungimile $AA' = BB' = \lambda$. Să se arate că perpendiculara pe mijlocul lui $A'B'$ trece printr'un punct fix când λ variază.

R. $A(a,0)$, $B(0,b)$, $A'(a+\lambda, 0)$, $B'(0, b+\lambda)$; ecuația perpendicularei este

$$2ax - 2by - a^2 + b^2 + \lambda(x - y - a + b = 0.$$

Distanța de la un punct la o dreaptă.

38. **Raportul în care o dreaptă $Ax + By + C = 0$ împarte segmentul A_1A_2 determinat de punctele $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.** Fie M punctul de intersecție al dreptei date cu segmentul A_1A_2 (Fig. 41). Să căutăm valoarea raportului $\overline{A_1M} : \overline{MA_2} = \lambda$. Coordonatele punctului M sunt

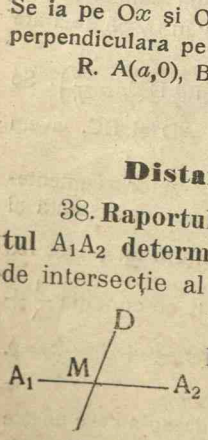


Fig. 41.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Scriind că acest punct este pe dreapta dată, avem

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0,$$

de unde

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

Deci valoare raportului căutat este

$$\frac{A_1M}{MA_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}. \tag{12}$$

Acest rezultat a fost obţinut, presupunând că punctul M este la distanţă finită, adică dreapta dată D nu este paralelă cu segmentul A_1A_2. Dacă dreapta D este paralelă cu A_1A_2, atunci coeficienţii lor unghiulari sunt egali, şi deci

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

De unde, dezvoltând

$$Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2.$$

Adunând C la ambii membrii, avem

$$Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C,$$

de unde

$$-\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = -1.$$

Dar, când dreapta D este paralelă cu A_1A_2, punctul M este la infinit pe dreapta A_1A_2, iar $A_1M:MA_2 = -1$. Deci şi în acest caz ambii membrii ai egalităţii (12) sunt egali, şi prin urmare, această relaţie este adevărată şi când dreapta considerată este paralelă cu segmentul dat.

Aşa dar, în toate cazurile, raportul în care dreapta $Ax + By + C = 0$ împarte segmentul A_1A_2, este dat de expresia (12).

39. **Separarea planului în regiuni de dreapta** $Ax + By + C = 0$. Dreapta dată D împarte planul în două regiuni. Fie $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ două puncte situate în planul dreptei D. M fiind punctul unde dreapta D tae segmentul A_1A_2 (Fig. 41), am văzut că raportul în care dreapta D împarte segmentul A_1A_2, este

$$\frac{A_1M}{MA_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

Dacă punctele A_1 şi A_2 sunt de aceeaş parte a dreptei D, atunci raportul $A_1M:MA_2$ este negativ şi deci urmează

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} > 0,$$

ceea ce înseamnă că expresiunile Ax_1+By_1+C, Ax_2+By_2+C au același semn.

Dacă A_1 și A_2 sunt de o parte și de alta a dreptei D, atunci $A_1M:MA_2>0$, deci

$$\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}<0,$$

ceea ce probează că Ax_1+By_1+C și Ax_2+By_2+C au semne contrarii.

Prin urmare, polinomul $Ax+By+C$ este pozitiv pentru toate punctele situate de aceeași parte a dreptei $Ax+By+C=0$ și negativ pentru toate punctele așezate de cealaltă parte a dreptei.

Așa dar, dreapta $Ax+By+C=0$ împarte planul în două regiuni, astfel că înlocuind pe x și y în $Ax+By+C$ cu coordonatele unui punct oarecare dintr'o regiune, rezultatul înlocuirii va avea un semn, iar rezultatul înlocuirii a lui x și y cu coordonatele oricărui punct din cealaltă regiune, va avea semn contrar.

Dacă dreapta D are forma generală $Ax+By+C=0$, pentru a vedea semnele ce le are expresiunea $Ax+By+C$, se înlocuesc x și y cu zero, coordonatele originii și se obține valoarea C. Pentru punctele așezate de aceeași parte cu origina, semnul expresiunei $Ax+By+C$ este același ca semnul lui C, iar pentru punctele așezate de partea cealaltă a originii, semnul expresiunei $Ax+By+C$ este contrar cu acela al lui C.

Exemple. 1°. *Să se rezolve neegalitatea* $2x+y-2>0$. Se construește dreapta $2x+y-2=0$ (Fig. 42). In regiunea unde se află origina, expresia $2x+y-2$ are semnul lui -2, deci <0; în cealaltă regiune, semnul $+$. Deci, neegalitatea este satisfăcută pentru punctele așezate în regiunea unde nu este origina.

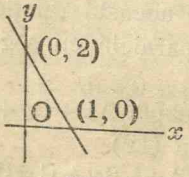


Fig. 42.

2° *Care este regiunea planului unde avem în același timp* $2x+y-2>0$. $3x-y+1<0$.

Construim dreptele $2x+y-2=0$, $3x-y+1=0$, care împart planul în patru regiuni (Fig. 43), pentru care avem

Regiunea	I	II	III	IV
$2x+y-2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$3x-y+1$	$-$	$-$	$+$	$+$

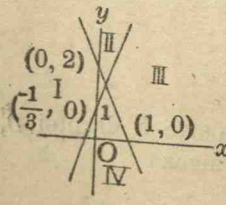


Fig. 43.

Deci, numai pentru punctele regiunei II avem $2x+y-2>0$, $3x-y+1<0$.

3°. *Să se afle regiunile planului pentru care avem* $(x+2y)(3x-2y+5)>0$. Se construesc dreptele $x+2y=0$, $3x-2y+5=0$ (Fig. 44). Semnele expresiunii $x+2y$ se obțin înlocuind pe x și y cu coordonatele unui punct (1, 0) de pe Ox; această expresie devine egală cu 1, deci are semnul $+$ pentru punctele regiunilor II și III; pentru celelalte, are semnul $-$. Avem tabloul

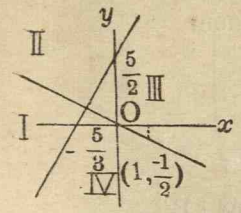


Fig. 44.

Regiunea	I	II	III	IV
$x+2y$	−	+	+	−
$3x-2y+5$	−	−	+	+
$(x+2y)(3x-2y+5)$	+	−	+	−

Expresiunea este pozitivă în regiunile I, III.

40. **Altă formă a ecuaţii linii drepte. Ecuaţia normală a linii drepte.** O dreaptă D poate fi definită prin distanţa $OP=p$ (Fig. 45) de la origina axelor până la dreaptă şi de unghiul θ ce această perpendiculară OP face cu Ox. In adevăr, fiind cunoscute cantităţile p şi θ, pentru a construi dreapta corăspunzătoare, descriem din origină ca centru un cerc cu o rază egală cu p. Ducem în acest cerc o rază OP, astfel ca unghiul $xOP=\theta$. Tangenta la cerc în punctul P este dreapta corespunzătoare.

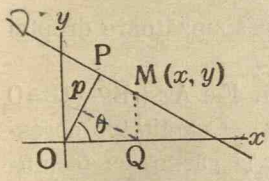


Fig. 45.

Aşa fiind, să considerăm o dreaptă D definită de cantităţile p şi θ şi să ne propunem a-i găsi ecuaţia. Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al acestei drepte, P piciorul perpendicularei lăsate din origină pe dreaptă, Q proecţia lui M pe Ox. Avem $p=OP$, iar θ este unghiul lui Ox cu OP.

Să proectăm ortogonal conturul OQMP pe direcţia OP. Avem

$$\text{pr}OP=\text{pr}OQ+\text{pr}QM+\text{pr}MP,$$

$$p=OQ\cos(OP, OQ)+QM\cos(OP, QM)+0,$$

$$p=x\cos\theta+y\cos(OP, Oy),\quad p=x\cos\theta+y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\quad x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

Deci, între coordonatele unui punct oarecare (x,y) ale dreptei definită prin cantităţile p şi θ, am găsit relaţia

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0, \tag{13}$$

care este ecuaţia acestei drepte. Aceasta se numeşte ecuaţia normală a linii drepte.

Invers, fiind dată ecuaţia unei drepte,

$$Ax+By+C=0, \tag{14}$$

se pot găsi cantităţile p şi θ corespunzătoare, scriind că ecuaţiile (13) şi (14) reprezintă aceeaş dreaptă. Avem

$$\frac{\cos\theta}{A}=\frac{\sin\theta}{B}=\frac{-p}{C}$$

Aplicând o proprietate a rapoartelor, obținem

$$\frac{\cos\theta}{A}=\frac{\sin\theta}{B}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\frac{\cos\theta}{A}=\frac{\sin\theta}{B}=\frac{-p}{C}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

de unde.

$$(15)\qquad \cos\theta=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\theta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Aceste relații ne dau valorile lui θ și p corespunzătoare dreptei date.

41. **Distanța de la un punct la o dreaptă.** Fie $Ax+By+C=0$ ecuația dreptei și $M_0(x_0,y_0)$ punctul dat. Fie θ și p cantitățile corespunzătoare dreptei date și găsite cu formulele (15). Fie P și R proecțiile ortogonale ale punctelor O și M_0 pe dreapta dată (Fig. 46) și Q proecția punctului M_0 pe axa Ox. Avem

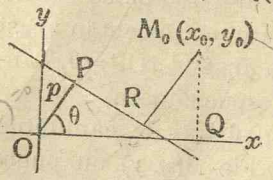


Fig. 46.

$$OP=p,\ \theta=(OP,Ox),\ OQ=x_0,\ QM=y_0.$$

Conturile $OPRM_0$ și OQM_0, având aceeași origină O și aceeași extremitate M_0, au proecții egale. Făcând proecția ortogonală pe OP, avem

$$\mathrm{pr}OP+\mathrm{pr}PR+\mathrm{pr}RM_0=\mathrm{pr}OQ+\mathrm{pr}QM_0,$$

$$p+0+RM_0=OQ\cos(OQ,\ OP)+QM_0\cos(QM_0,\ OP),$$

$$p+RM_0=x_0\cos\theta+y_0\cos(Oy,\ OP),\quad p+RM_0=x_0\cos\theta+y_0\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

$$(16)\qquad p+RM_0=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta,$$

$$RM_0=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p.$$

Această relație ne dă distanța de la punctul $M_0(x_0,y_0)$ la dreapta

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0,$$

și se obține înlocuind pe x și y cu coordonatele punctului.

Inlocuind în (16) pe $\cos\theta$, $\sin\theta$, $-p$ cu valorile lor (15), distanța $d=RM_0$ de la punctul $M_0(x_0,y_0)$ la dreapta $Ax+By+C=0$ este

$$(17)\qquad d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Distanța fiind o cantitate pozitivă, vom lua înăintea expresii (17) semnul + sau −, după cum punctul $M_0(x_0,y_0)$ este așezat în regiunea pentru care semnul expresii Ax_0+By_0+C este + sau −.

Exemplu. *Să se arate că suma distanțelor unui punct interior unui triunghi echilateral la laturi este o constantă.* Să luăm cu axă Ox latura BC (Fig. 47), iar ca axă Oy perpendiculara din A pe BC. Insemnând cu a lungimea laturei triunghiului echilateral, avem

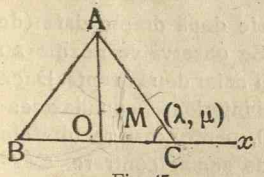


Fig. 47.

$$OC=OB=\frac{a}{2},\ OA=AC\sin OCA=a\sin 60^0=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Coordonatele vârfurilor sunt $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $A\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Fie $M(\lambda,\mu)$ un punct din interiorul triunghiului ABC. Distanța de la M la BC este egală cu μ.

Ecuația dreptei AC este

$$\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=1,\ 2x\sqrt{3}+2y-a\sqrt{3}=0.$$

Punctul M fiind de aceeaș parte cu origina față de această dreaptă, semnul expresii $2\lambda\sqrt{3}+2\mu-a\sqrt{3}$ este acelaș ca pentru origină, adică $-a\sqrt{3}<0$. Vom lua înaintea expresii (17) semnul —. Deci, distanța de la punctul M la dreapta AC este

$$\frac{2\lambda\sqrt{3}+2\mu-a\sqrt{3}}{-\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2)^2}}=\frac{2\lambda\sqrt{3}+2\mu-a\sqrt{3}}{-\sqrt{12+4}}=\frac{2\lambda\sqrt{3}+2\mu-a\sqrt{3}}{-4}.$$

Ecuația dreptei BA fiind

$$\frac{x}{-\frac{a}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=1,\ 2x\sqrt{3}-2y+a\sqrt{3}=0,$$

iar M și origina fiind de aceeaș parte a dreptei, semnul expresii $2\lambda\sqrt{3}-2\mu+a\sqrt{3}$, este acelaș ca pentru origină, adică $a\sqrt{3}>0$. Vom lua înaintea expresii (17) semnul +. Deci distanța de la M la dreapta AB este

$$\frac{2\lambda\sqrt{3}-2\mu+a\sqrt{3}}{4}.$$

Suma distanțelor punctului M la laturile triunghiului ABC este

$$\mu+\frac{2\lambda\sqrt{3}+2\mu-a\sqrt{3}}{-4}+\frac{2\lambda\sqrt{3}-2\mu+a\sqrt{3}}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\text{const.},$$

și anume egală cu înălțimea OA a triunghiului echilateral.

42. Ecuațiile bisectoarelor a două drepte. Fie $Ax+By+C=0$ și $A'x+B'y+C'=0$ ecuațiile celor două drepte în raport cu două axe perpendiculare. $M(x, y)$ fiind un punct al bisectoarei acestor drepte, ecuația bisectoarei se obține scriind că distanțele acestui punct la cele două drepte sunt egale,

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

Dublul semn, $\pm$, corespunde celor două bisectoare, una interioară și alta exterioară unghiului.

Pentru a vedea ce semn corespunde fiecărei bisectoare, se construesc dreptele $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$ și se substitue în locul lui x și y, în expresiunile

$$E \equiv \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}, \quad E' \equiv \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{A'x+B'y+C}{\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

coordonatele a două puucte P şi P′ respectiv pe cele două drepte date (de obicei punctele date tae sau axa Ox sau axa Oy). Se observă ce poziţie au cele două puncte P şi P′ faţă de bisectoarele unghiului celor două drepte. Dacă punctele P şi P′ sunt de o parte şi de alta a bisectoarei interioare, ecuaţia acestei bisectoare va fi aceea din ecuaţiile $E=0$ sau $E'=0$, pentru care rezultatele înlocuirii ale coordonatelor punctelor P şi P′ sunt de semne contrare. Cealaltă ecuaţie este a celeilalte bisectoare.

Exemplu. Să se afle ecuaţia bisectoarei unghiului ascuţit al dreptelor $x-2=0$, $3x-4y+4=0$.

Ecuaţiile bisectoarele sunt

$$\frac{3x-4y+4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm \frac{x-2}{\sqrt{1+0}},$$

sau

$$3x-4y+4 \pm 5(x-2)=0.$$

Pentru a vedea care din dreptele

$$E \equiv 3x-4y+4+5(x-2)=0, \quad E' \equiv 3x-4y+4-5(x-2)=0$$

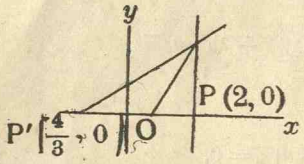


Fig. 48.

este bisectoarea interioară, se construesc dreptele $3x-4y+4=0$, $x-2=0$ (Fig. 48) şi se observă că punctele $P'(-\frac{4}{3}, 0)$, $P(2, 0)$, unde ele tae axa Ox, sunt aşezate de o parte şi de alta a bisectoarei interioare. Deci vom lua pe aceea din expresiunile E sau E′, pentru care rezultatele înlocuirii a cordonatelor punctelor P şi P′ au semne contrare. Inlocuind în E pe x şi y cu $(-\frac{4}{3}, 0)$ şi $(2, 0)$, avem respectiv

Deci $$5(-\frac{4}{3}-2) = -\frac{50}{3} < 0, \quad 3.2-4.0+4=10 > 0.$$

$3x-4y+4+5(x-2)=0$, $8x-4y-6=0$), $4x-2y-3=0$

este ecuaţia bisectoarei interioare.

43. **Aria unui triunghi.** Să considerăm o curbă închisă (C) (Fig. 49) şi fie A aria cuprinsă în interiorul curbei (C). Să presupunem că un observator M se mişcă pe curba (C). Dacă observatorul se mişcă în sensul direct (invers ca mersul àcelor unui ceasornic), aria închisă de curba (C) este la stânga sa, iar dacă se mişcă pe curba (C) în sens învers (ca mersul àcelor unui ceasornic), aria A este la dreapta observatorului.

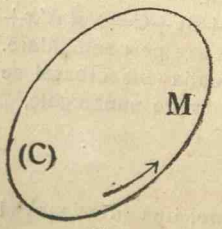


Fig. 49.

Aşa fiind, vom considera ca pozitivă sau negativă aria A, după cum observatorul care parcurge curba (C), lasă aria la stânga sau la dreapta sa.

In cazul unui triunghi $A_1A_2A_3$, vom considera aria triunghiului ca pozitivă sau negativă, după cum observatorul care parcurge perimetrul triunghiului $A_1A_2A_3$, trecând succesiv prin vârfurile A_1, A_2, A_3, lasă aria triunghiului la stânga sau la dreapta sa. Avem deci

$$A_1A_2A_3 = A_2A_3A_1 = A_3A_1A_2 = -A_3A_2A_1 = -A_1A_3A_2 = -A_2A_1A_3.$$

Aşa fiind, să considerăm triunghiurile OA_2A_3 şi OA'_2A_3 (Fig. 50). Se vede că aria OA_2A_3 este de acelaş semn cu aria OA'_2A_3 sau nu, după cum punctele A'_2, A_2 sunt de aceeaş parte a dreptei OA_3, sau de o parte şi de alta.

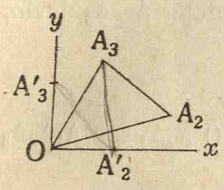


Fig. 50.

Triunghiurile OA_2A_3 şi OA'_2A_3 având aceeaş bază OA_3, raportul valorilor algebrice ale ariilor este acelaş ca al înălţimilor din A_2 şi A'_2. Fie (x_2, y_2), (x'_2, y'_2) coordonatele punctelor A_2, A'_2. Ecuaţia dreptei OA_3 fiind

$$xy_3 - yx_3 = 0,$$

valorile algebrice ale distanţelor de la A_2 şi A'_2 la OA_3 sunt

$$\frac{x_2y_3 - y_2x_3}{\pm\sqrt{x_3^2+y_3^2}}, \quad \frac{x'_2y_3 - y'_2x_3}{\pm\sqrt{x_3^2+y_3^2}}.$$

Deci, raportul valorilor algebrice ale ariilor OA_2A_3, OA'_2A_3 este

$$\frac{\text{aria alg } OA_2A_3}{\text{aria alg } OA'_2A_3} = \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{x'_2y_3 - y'_2x_3} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

In mod analog, însemnând cu (x'_3, y'_3) coordonatele punctului A'_3, raportul ariilor algebrice OA'_2A_3 şi $OA'_2A'_3$ este

$$\frac{\text{aria alg } OA'_2A_3}{\text{aria alg } OA'_2A'_3} = \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Inmulţind expresiunile (18), (19), avem

$$\frac{\text{aria alg } OA_2A_3}{\text{aria alg } OA'_2A'_3} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

Să luăm punctele A'_2 şi A'_3 respectiv pe axele Ox şi Oy, la

distanțele $OA_2'=OA_3'=1$. Atunci aria algebrică a triunghiului $OA_2'A_3'$ este $\frac{1}{2}OA_2' \cdot OA_3'=\frac{1}{2}$ și deci

$$\text{(20)} \qquad \text{aria alg } OA_2A_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Așa fiind, să considerăm un triunghi definit de punctele $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Să deplasăm axele paralel cu ele însile, luând noua origină O' în punctul A_1. Coordonatele punctelor A_2, A_3 devin, față de noile axe,

$$(x_2-x_1, y_2-y_1), (x_3-x_1, y_3-y_1).$$

Am văzut că aria algebrică a triunghiului $O'A_2A_3$ sau $A_1A_2A_3$ este determinantul [dat de formula (20)]

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

sau, aplicând o proprietate a determinanților, avem

$$\text{aria alg } A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aria triunghiului $A_1A_2A_3$ este valoarea absolută a expresii precedente și este egală cu aria algebrică a triunghiului $A_1A_2A_3$, luată ca semnul + sau −, după cum expresia

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

este pozitivă sau negativă, sau după cum punctul A_1 este în regiunea unde primul membru

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

al ecuației dreptei A_2A_3 este pozitiv sau negativ.

Observări. 1°. Putem determina aria triunghiului $A_1A_2A_3$ și altfel. In adevăr, ecuația dreptei A_2A_3 fiind

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$x(y_2-y_3)-y(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2=0,$$

înălțimea din A_1, sau distanța de la A_1 la dreapta A_2A_3, este

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}.$$

Deci

$$\text{aria } A_1A_2A_3=\frac{1}{2}A_2A_3.\ d=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}.\ \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}},$$

$$\text{aria } A_1A_2A_3=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2°. Dacă punctele A_1, A_2, A_3 sunt colineare, aria triunghiului $A_1A_2A_3$ este nulă și deci

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Am găsit pe altă cale condiția ca trei puncte $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$ să fie colineare.

3°. *Aria unui triunghi când se cunosc ecuațiile*

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

ale laturilor triunghiului. Rezolvând ecuațiile laturilor două câte două, coordonatele vârfurilor sunt

$$\left(\frac{B_2C_3-B_3C_2}{A_2B_3-A_3B_2}, \frac{A_3C_2-A_2C_3}{A_2B_3-A_3B_2}\right), \left(\frac{B_3C_1-B_1C_3}{A_3B_1-A_1B_3}, \frac{A_1C_3-A_3C_1}{A_3B_1-A_1B_3}\right),$$
$$\left(\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}\right).$$

Deci aria triunghiului este

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{B_2C_3-B_3C_2}{A_2B_3-A_3B_2} & \frac{A_3C_2-A_2C_3}{A_2B_3-A_3B_2} & 1 \\ \frac{B_3C_1-B_1C_3}{A_3B_1-A_1B_3} & \frac{A_1C_3-A_3C_1}{A_3B_1-A_1B_3} & 1 \\ \frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1} & \frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\pm\frac{1}{2}\frac{1}{(A_2B_3-A_3B_2)(A_3B_1-A_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)}\begin{vmatrix} B_2C_3-B_3C_2 & A_3C_2-A_2C_3 & A_2B_3-A_3B_2 \\ B_3C_1-B_1C_3 & A_1C_3-A_3C_1 & A_3B_1-A_1B_3 \\ B_1C_2-B_2C_1 & A_2C_1-A_1C_2 & A_1B_2-A_2B_1 \end{vmatrix}.$$

Dar, termenii determinantului Δ' aflat sunt minorii elementelor determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Deci Δ' este determinantul reciproc al determinantului Δ, şi $\Delta' = \Delta^2$. Deci aria triunghiului este

$$\pm \frac{1}{2(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3)(A_1B_2 - A_2B_1)} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2.$$

44. **Aplicaţii.** I. *Fie* $M_1, M_2, \ldots M_n$ (Fig. 51) *intersecţiile dreptei* $(D) \equiv Ax + By + C = 0$ *cu laturile* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$ *ale poligonului* $A_1A_2 \ldots A_n$. *Să se arate că*

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2} \frac{M_2A_2}{M_2A_3} \cdots \frac{M_nA_n}{M_nA_1} = 1.$$

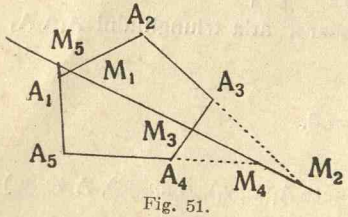


Fig. 51.

Insemnând cu (x_i, y_i) coordonatele punctului A_i, şi cu $D_i \equiv Ax_i + By_i + C$ rezultatul înlocuirii în D a lui x şi y cu x_i, y_i, avem

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2} = \frac{D_1}{D_2}, \quad \frac{M_2A_2}{M_2A_3} = \frac{D_2}{D_3}, \ldots \frac{M_nA_n}{M_nA_1} = \frac{D_n}{D_1},$$

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2} \frac{M_2A_2}{M_2A_3} \cdots \frac{M_nA_n}{M_nA_1} = 1.$$

In cazul triunghiului ABC (Fig. 52), fie D, E, F intersecţiile transversalei cu laturile BC, CA. AB. Avem

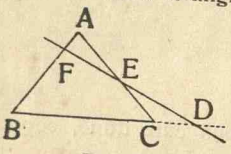


Fig. 52.

$$\frac{DB}{DC} \frac{EC}{EA} \frac{FA}{FB} = 1.$$

II. *Fie* D, E, F (Fig. 53) *intersecţiile laturilor* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *ale unui triunghi* $A_1A_2A_3$ *cu dreptele* A_1M_0, A_2M_0, A_3M_0, *ce unesc vârfurile cu un punct* $M_0(x_0, y_0)$. *Să se demonstreze*

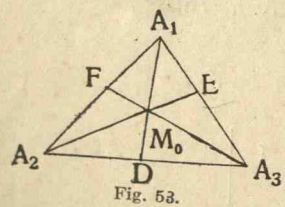


Fig. 53.

$$\frac{DA_2}{DA_3} \frac{EA_3}{EA_1} \frac{FA_1}{FA_2} = -1.$$

In adevăr, ecuaţia dreptei A_3M_0 fiind

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

avem (No. 38)

$$\frac{FA_1}{FA_2} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Deci

$$\frac{DA_2}{DA_3}\,\frac{EA_3}{EA_1}\,\frac{FA_1}{FA_2} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Aplicând proprietăţile determinanţilor, adică schimbând două linii, determinanţii se reduc, iar valoarea membrului al doilea este -1.

III. *Aria unui poligon.* Insemnând cu $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$, vârfurile poligonului şi O fiind origina, avem, în mărime şi în semn,

$$\text{aria } A_1A_2 \cdots A_n = \text{aria } OA_1A_2 + \text{aria } OA_2A_3 + \cdots + \text{aria } OA_nA_1 =$$
$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)\right].$$

P.C.

Exerciţii.

1) Să se afle distanţele de la vârfurile triunghiului $(5,0)$, $(1,2)$, $(-3,-2)$, la laturile opuse.

R. $\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{12}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{5}}$.

2) Să se afle distanţa de la origină la dreapta $a(x-a)+b(y-b)=0$.

R. $\sqrt{a^2+b^2}$.

3) Să se afle ecuaţiile bisectoarelor unghiului format de dreptele ce trec prin origină şi au coeficienţii unghiulari 2 şi $\frac{1}{2}$.

R. Draptele sunt $2x-y=0$, $x-2y=0$. Bisectoarele sunt acelea ale axelor.

4) Să se afle bisectoarea interioară a unghiului ascuţit al dreptelor $3y-4x-1=0$, Oy.

R. $4x-3y+1+5x=0$.

5) Să se probeze că suma distanţelor unui punct M al bazei BC a unui triunghi isoscel ABC, la laturile AB şi AC, este o constantă.

R. Se ia ca Ox şi Oy, BC şi înălţimea din A; $B(a, 0)$, $C(-a, 0)$, $A(0, h)$, $M(\lambda, 0)$. Distanţele lui M la AB şi AC sunt

$$\frac{h\lambda - ah}{-\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \frac{h\lambda + ah}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

6) Să se afle ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(b, c)$; se presupune $b>0$, $c>0$.

R. Bisectoarele unghiurilor A, B, C sunt respectiv.

$$\frac{cx - y(b-a) - ac}{\sqrt{c^2+(a-b)^2}} + y = 0, \quad \frac{cx - y(b+a) + ac}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}} - y = 0,$$

$$\frac{cx - y(b-a) - ac}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}} + \frac{cx - (b+a)y + ac}{\sqrt{c^2+(a-b)^2}} = 0.$$

7) Să se probeze că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

R. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Ecuațiile laturilor $\Delta_1 \equiv x(y_2-y_3)-y(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2=0$, $\Delta_2 \equiv x(y_3-y_1)-y(x_3-x_1)+x_3y_1-x_1y_3=0$, $\Delta_3 \equiv x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0$.

Bisectoarele unghiului A sunt

$$\frac{\Delta_2}{b}+\frac{\Delta_3}{c}=0, \quad \frac{\Delta_3}{c}-\frac{\Delta_2}{b}=0,$$

a, b, c fiind lungimele laturilor triunghiului. Bisectoarele interioare sunt

$$\frac{\Delta_2}{b}-\frac{\Delta_3}{c}=0, \quad \frac{\Delta_3}{c}-\frac{\Delta_1}{a}=0, \quad \frac{\Delta_1}{a}-\frac{\Delta_2}{b}=0.$$

Se poate, de asemenea, proba că două bisectoare exterioare și una interioară sunt concurente.

Elemente de la infinit. Elemente imaginare.

45. **Coordonate omogene.** Să considerăm un punct $M(x,y)$ raportat la două axe Ox și Oy. Insemnând cu X, Y, Z un sistem de valori care verifică ecuațiile

$$x=\frac{X}{Z}, \quad y=\frac{Y}{Z},$$

cantitățile (X, Y, Z), sau alte proporționale cu ele, kX, kY, kZ, se zic *coordonatele omogene ale punctului* M.

Dacă $Z=0$, una cel puțin din coordonatele carteziene ale punctului M, x sau y, devin infinit de mari, atunci punctul este aruncat la infinit.

Dacă un punct $M(x,y)$ este pe dreapta de parametrii directori a, b, coordonatele sale sunt de forma

$$x=x_0+a\rho, \quad y=y_0+b\rho,$$

poziția pe dreaptă fiind determinată de ρ. Putem lua pentru coordonatele omogene ale punctului M valorile

$$X=\frac{x_0+a\rho}{\rho}, \quad Y=\frac{y_0+b\rho}{\rho}, \quad Z=\frac{1}{\rho}.$$

Dacă M se depărtează la infinit pe dreapta considerată, atunci $\rho \to \infty$, iar coordonatele omogene ale punctului de la infinit al dreptei de parametrii directori a și b sunt

$$X=a, \quad Y=b, \quad Z=0.$$

Se vede, deci, că două drepte paralele au același punct la infinit, iar ecuația $Z=0$ reprezintă *dreapta de la infinit*.

Ecuația unei drepte fiind $Ax+By+C=0$, trecând la coordonate omogene, ecuația dreptei devine $A\frac{X}{Z}+B\frac{Y}{Z}+C=0$, sau $AX+$

$BY+CZ=0$, adică o ecuație de gradul întâi și omogenă în raport cu X, Y, Z. In general, ecuația $f(x,y)=0$ a unei curbe de gradul m, în coordonate omogene devine $F(X,Y,Z)=0$ și este o ecuație omogenă și de gradul m în raport cu X, Y, Z, de unde și numele de coordonate omogene dat acestor coordonate.

Coordonatele omogene ale uni punct fiind (X, Y, Z), iar cele neomogene

$$x=\frac{X}{Z},\quad y=\frac{Y}{Z},$$

rezultă că dacă se cunoaște ecuația unei curbe în coordonate omogene, se poate obține imediat ecuația curbei în coordonate neomogene, făcând $Z=1$.

Coordonatele omogene ale unui punct care divide un segmcnt într'un raport dat. Fie $M(x,y)$ un punct ce divide segmentul M_1M_2 în raportul $M_1M:MM_2=\lambda$. Insemnând cu (x_1,y_1), (x_2,y_2) coordonatele punctelor M_1 și M_2, știm că

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Fie acum (X_1,Y_1,Z_1), (X_2,Y_2,Z_2), (X,Y,Z) coordonatele omogene ale punctelor M_1, M_2, M. Avem

$$x=\frac{\frac{X_1}{Z_1}+\lambda\frac{X_2}{Z_2}}{1+\lambda},\quad y=\frac{\frac{Y_1}{Z_1}+\lambda\frac{Y_2}{Z_2}}{1+\lambda}.$$

De unde

$$x=\frac{X_1+\left(\lambda\frac{Z_1}{Z_2}\right)X_2}{Z_1+\left(\lambda\frac{Z_1}{Z_2}\right)Z_2},\quad y=\frac{Y_1+\left(\lambda\frac{Z_1}{Z_2}\right)Y_2}{Z_1+\left(\lambda\frac{Z_1}{Z_2}\right)Z_2}.$$

Punând $\lambda\frac{Z_1}{Z_2}=\mu$, avem

$$x=\frac{X_1+\mu X_2}{Z_1+\mu Z_2},\quad y=\frac{Y_1+\mu Y_2}{Z_1+\mu Z_2},$$

de unde urmează că coordonatele omogene ale punctului M sunt

$$X_1+\mu X_2,\quad Y_1+\mu Y_2,\quad Z_1+\mu Z_2,$$

sau valori proporționale cu acestea.

In mod analog, se vede că, *dacă M și N sunt conjugate armonic* cu punctele M_1 și M_2, avem

$$\frac{\overline{M_1N}}{\overline{NM_2}}=-\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=-\lambda,$$

iar coordonatele omogene ale punctelor M și N sunt

$$X_1+\mu X_2,\ Y_1+\mu Y_2,\ Z_1+\mu Z_2,$$
$$X_1-\mu X_2,\ Y_1-\mu Y_2,\ Z_1-\mu Z_2,\ \mu=\lambda\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Punctele de coordonate omogene

$$X_1+\mu X_2,\ Y_1+\mu Y_2,\ Z_1+\mu Z_2,$$
$$X_1+\mu' X_2,\ Y_1+\mu' Y_2,\ Z_1+\mu' Z_2,$$

sunt conjugate armonic în raport cu punctele $M_1(X_1,Y_1,Z_1)$, $M_2(X_2,Y_2,Z_2)$, când $\mu+\mu'=0$.

Considerând trei puncte ale căror coordonate omogene sunt $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, un punct N al dreptei M_2M_3 are coordonate de forma $\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$, $\lambda_2y_2+\lambda_3y_3$, $\lambda_2z_2+\lambda_3z_3$. Un punct al dreptei NM_1 are coordonate de forma $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$, $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3$, $\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fiind parametrii arbitrari. Deci, coordonatele unui punct M din planul triunghiului format de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$, sunt $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$, $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3$, $\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3$.

Importanța întrebuințării coordonatelor omogene. Să presupunem că o figură, când are toate punctele sale la distanță finită, posedă o proprietate care se exprimă cu o relație algebrică între coordonatele acestor puncte, $f(x_1,y_1\,;\,x_2,\,y_2\,;\,\cdots)=0$. Trecând la coordonate omogene, adică înlocuind pe x_i și y_i cu $\frac{X_i}{Z_i}$ și $\frac{Y_i}{Z_i}$, relația precedentă devine $F(X_1, Y_1, Z_1\,;\,X_2, Y_2, Z_2\,;\,\cdots)=0$,

și este omogenă în raport cu fiecare din cele trei litere, X_i, Y_i, Z_i, ale fiecărui grup.

Această relație, verificată pentru valorile ne nule ale lui Z_1, Z_2, ..., poate rămânea verificată, în aceleași condițiuni, când unele din cantitățile $Z_1, Z_2,\cdots$ se anulează, ceea ce însemnează că, dacă am stabilit o proprietate algebrică a unei figuri când toate punctele sunt la distanță finită, vom putea să continuăm a o aplica, cu aceeaș formă a enunțului, când vreunele din ele se depărtează la infinit.

Așa, de ex., considerând două drepte,

$$Ax+By+C=0,\ A'x+B'y+C'=0,$$

ele au un punct de intersecție la distanță finită, numai când $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$. Când $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$, adică dacă dreptele sunt paralele, coordonatele carteziene ale punctului lor de intersecție sunt foarte mari,

punctul lor de intersecţie n'are existenţă, dreptele nu se întâlnesc.

Intrebuinţind însă coordonate omogene, adică înlocuind pe x şi y cu $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$, ecuaţiile dreptelor devin

$$AX+BY+CZ=0,\ A'X+B'Y+C'Z=0.$$

Dacă dreptele sunt paralele, atunci

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=A\rho,\ B'=\rho,\ A'=B\rho,$$

şi deci ecuaţiile dreptelor devin

$$AX+BY+CZ=0,\ AX+BY+\frac{C'}{\rho}Z=0.$$

Vedem că aceste ecuaţii sunt verificate, amândouă, de sistemul de soluţii

$$Z=0,\ AX+BY=0;\ Z=0,\ \frac{X}{-B}=\frac{Y}{A},\ \frac{X}{-B}=\frac{Y}{A}=\frac{Z}{0},$$

adică, pe dreptele date se află punctul de coordonate omogene $(-B, A, 0)$, care este punctul de la înfinit al fiecărei drepte, şi care se obţine luând intersecţia fiecărei drepte cu dreapta de la înfinit, $Z=0$. Deci, punctul de întersecţie al acestor două drepte paralele are coordonatele omogene $(-B, A, 0)$.

Vedem, deci, că întrebuinţând coordonate omogene, totdeauna se pot exprima coordonatele punctului de intersecţie a două drepte totdeauna două drepte se întâlnesc (În cazul a două drepte paralele acest punct este aruncat la înfinit pe direcţia comună a celor două drepte). Din acest exemplu, dar mai ales din cele ce le vom întâlni mai departe, rezultă că întrebuinţarea coordonatelor omogene dă mai multă preciziune şi generalitate instrumentului analitic.

46. **Elemente imaginare.** Fiind date două curbe (C) şi (C'), reprezentate de ecuaţiile

$$f(x, y)=0,\ g(x, y)=0,$$

respectiv de gradele m şi n, în raport cu x şi y, punctele lor de intersecţie au coordonate (x, y) care verifică aceste ecuaţii de gradele m şi n. Eliminând pe y între aceste ecuaţii, rezultatul eliminării este o ecuaţie $F(x)=0$, cel mult de gradul $m \cdot n$ în raport cu x, astfel că aceste două curbe se tae în $m \cdot n$ puncte. Dar, se poate ca ecuaţia $F(x)=0$ să aibă şi rădăcini imaginare, x_1+ix_2, $i=\sqrt{-1}$, astfel că pentru unele puncte comune curbelor (C) şi (C'), să corespunză coordonate complexe,

$$x_1+ix_2,\ y_1+iy_2,\ i=\sqrt{-1}.$$

Aceste puncte, cărora le corespund coordonate complexe, care de fapt n'au existență în planul axelor de coordonate, se zic *puncte imaginare*. Punctele de coordonate $(a+ia', b+ib')$, $(a-ia', b-ib')$, se zic *imaginar conjugate*, iar mijlocul lor (a, b) este real.

De ex., dreapta $y=2$ nu tae cercul cu centrul în origină și raza 1, $x^2+y^2=1$; acestor puncte imaginare de intersecție le corespund coordonatele (x, y) ce verifică ecuațiile

$$x^2+y^2=1, \quad y=2.$$

Înlocuind pe y cu 2, avem $x^2=-3$, $x=\pm i\sqrt{3}$; coordonatele acestor puncte de intersecție sunt cantitățile complexe $(x=i\sqrt{3}, y=2)$, $(x=-i\sqrt{3}, y=2)$.

Prin analogie, *o curbă se zice imaginară*, când în ecuația ei intră cantități complexe.

Așa fiind, să presupunem că o proprietate geometrică, adevărată pentru puncte reale, se traduce printr'o relație algebrică între coordonatele acestor puncte. Această relație algebrică fiind verificată și pentru anumite valori complexe ale coordonatelor, putem extinde proprietatea geometrică despre care e vorba și pentru punctele corespunzătoare, care de fapt n'au existență reală. Acesta este sensul care convine a-l atribui *principiului continuității*, întrodus în Geometrie de *Poncelet* și care a dat o mare extindere raționamentului geometric.

Aceste convențiuni ne conduc să anunțăm pentru anumite elemente geometrice fictive, proprietăți paradoxale, din cauza obișnuinței ce avem cu elemente reale. De ex., în Geometria reală, distanța dintre două puncte este nulă, dacă punctele sunt confundate. În Geometria generalizată, această condiție nu mai este suficientă de oarece o sumă de două pătrate poate fi nulă, fără ca fiecare pătrat să fie nul, dacă este vorba de numere complexe. Distanța dintre punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ este nulă dacă avem relația

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=0.$$

Observând că x_1-x_2, y_1-y_2 formează un sistem de parametrii directori ai dreptei M_1M_2, se poate zice că *distanța dintre două puncte este nulă, dacă parametrii directori a, b ai dreptei ce unește cele două puncte verifică relația*

$$a^2+b^2=0.$$

O astfel de *direcție* se zice *izotropă* și se observă că după o schimbare de coordonate rectangulare, din cauza conservării formei distanței, ea rămâne tot izotropă. În particular, *prin fiecare punct*

al planului xOy *trec două drepte izotrope*, căci parametrii directori ai unei asemenea drepte verifică relația $a^2+b^2=0$, sau

$$1+\left(\frac{a}{b}\right)^2=0, \quad 1+m^2=0,$$

de unde $m=\pm i$, astfel că, generalizând noțiunea de coeficient unghiular, pentru aceste drepte izotrope corespund coeficienții unghiulari i, $-i$, iar ecuațiile dreptelor izotrope care trec prin punctul (x_1, y_1) sunt

$$y-y_1=i(x-x_1), \quad y-y_1=-i(x-x_1).$$

Se vede că *o dreaptă izotropă este perpendiculară pe ea însăși*, căci, între coeficienții unghiulari avem relația $i \cdot i+1=0$.

Ecuațiile dreptelor izotrope ce trec prin origină sunt $y=ix$, $y=-ix$, iar ecuația lor comună este

$$(y+ix)(y-ix)=0, \quad x^2+y^2=0.$$

Considerând două drepte izotrope din planul xOy,

$$y-y_1=i(x-x_1), \quad y-y_1=-i(x-x_1),$$

se vede că făcând ecuațiile omogene cu ajutorul variabilei z (înlocuind pe x și y cu $\frac{x}{z}$ și $\frac{y}{z}$), se obține

$$y-y_1z=i(x-x_1z), \quad y-y_1z=-i(x-x_1z),$$

iar intersecțiile acestor drepte cu dreapta de la infinit, $z=0$, sunt date de ecuațiile

$$y=ix, \quad z=0; \quad y=-ix, \quad z=0,$$

sau

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{i}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{-i}=\frac{z}{0},$$

iar punctele de la infinit ale acestor două drepte izotrope sunt

$$I(1, i, 0), \quad J(1, -i, 0),$$

care sunt comune tuturor dreptelor izotrope din planul xOy.

Considerând ecuația unui cerc,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

sau

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

să o facem omogenă; avem

$$x^2+y^2-2axz-2byz+(a^2+b^2-R^2)z^2=0.$$

Luând intersecția acestui cerc cu dreapta de la infinit, $z=0$, se obține

$$x^2+y^2=0,\ z=0,$$

care definesc punctele

$$y=ix,\ z=0;\ y=-ix,\ z=0,$$

sau

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{i}=\frac{z}{0},\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-i}=\frac{z}{0},$$

adică punctele I şi J comune tuturor dreptelor izotrope din planul $x0y$.

Deci, *toate cercurile din planul* $x0y$ *trec prin punctele* I(1, i, 0), J(1, $-i$, 0), *care se zic punctele (ciclice) circulare ale planului.*

Să considerăm acum două puncte imaginar conjugate $(a_1+ia_2,\ b_1+ib_2)$, $(a_1-ia_2,\ b_1-ib_2)$. Dreapta care le uneşte are ecuaţia

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

sau

$$\frac{x-a_1+ia_2}{a_1+ia_2-a_1+ia_2}=\frac{y-b_1+ib_2}{b_1-ib_2-b_1+ib_2},$$

$$\frac{x-a_1+ia_2}{a_2}=\frac{y-b_1+ib_2}{b_2},$$

$$(x-a_1)b_2+ia_2b_2=(y-b_1)a_2+ia_2b_2,$$

$$y-b_1=\frac{b_2}{a_2}(x-a_1).$$

Deci, *dreapta care uneşte două puncte imaginar conjugate este reală.* Se vede că această dreaptă trece prin punctul (a_1, b_1) şi este paralelă cu direcţia de parametrii directori (a_2, b_2).

Dacă un punct imaginar $(a+ia', b+ib')$ *este pe o curbă, reprezentată de o ecuaţie cu coeficienţi reali, atunci şi punctul imaginar conjugat,* $(a-ia', b-ib')$, *se află pe aceeaş curbă.* In adevăr, ecuaţia unei curbe fiind $f(x, y)=0$, rezultatul substituirii în locul lui x şi y a coordonatelor $(a+ia', b+ib')$ a punctului de pe curbă, ne conduce la o relaţie

$$F(a,b,a',b')+i\Phi(a,b,a',b')=0,$$

de unde

$$F=0,\ \Phi=0.$$

Dar, rezultatul substituirii lui $(a-ia', b-ib')$ ne dă

$$F(a,b,a',b')-i\Phi(a,b,a',b'),$$

care este nul, căci am avut $F(a,b,a',b')=0$, $\Phi(a,b,a',b')=0$, ceea ce probează că şi punctul imaginar conjugat este pe aceeaş curbă.

Din contră, dacă punctul M descrie o curbă a cărei ecuaţie conţine coeficienţi imaginari, punctul M', imaginar conjugat, va descrie o curbă zisă imaginar conjugată cu prima.

Considerând o dreaptă imaginară, a cărei ecuaţie este

$$(A+iA')x+(B+iB')y+C+iC'=0,$$

urmează

(1)
$$Ax+By+C=0,\ A'x+B'y+C'=0,$$

adică o dreaptă imaginară trece prin punctul real, intersecţia dreptelor reale (1) De asemenea, dreapta imaginar conjugată,

$$(A-iA')x+(B-iB')y+C-iC'=0,$$

trece prin acelaş punct real. Deci, *două drepte imaginar conjugate se tae în acelaş punct real.* Urmează, de asemenea, că pe orice dreaptă imaginară din planul xOy este un punct real.

Coordonate trilatere.

1°. Să însemnăm cu

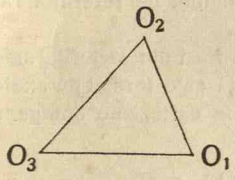


Fig. 54.

$$(O_2O_3)\equiv a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$(O_3O_1)\equiv a_2x+b_2y+c_2z=0,$$
$$(O_1O_2)\equiv a_3x+b_3y+c_3z=0$$

ecuaţiile laturilor triunghiului de referinţă $O_1O_2O_3$ (Fig. 54). Dreptele $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $a_3x+b_3y+c_3z=0$ nefiind concurente, nu sunt legate cu o relaţie lineară între ele, sunt, cum se mai zice, linear îndependente, adică

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aşa fiind, să însemnăm cu (x,y,z) coordonatele carteziene omogene ale unui punt M şi să considerăm transformarea

$$(2)\qquad \begin{aligned} X&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ Y&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ Z&=a_3x+b_3y+c_3z, \end{aligned}$$

care face să corespunză punctului M (x,y,z) cantităţile X,Y,Z.

Determinantul (1) fiind diferit de zero, din ecuaţiile (2) se pot deduce valori determinate pentru x, y, z,

$$(3)\qquad \begin{aligned} x&=A_1X+B_1Y+C_1Z,\\ y&=A_2X+B_2Y+C_2Z,\\ z&=A_3X+B_3Y+C_3Z. \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă se dau cantităţile X, Y, Z, cu ajutorul relaţiilor (3) se pot obţine x, y, z, şi deci un punct $M(x, y, z)$, astfel că aceste cantităţi X,Y, Z pot servi pentru determinarea unui punct din plan.

X,Y, Z se zic coordonatele trilatere sau trilineare ale punctului M în raport cu triunghiul de referinţă $O_1O_2O_3$, ale cărui laturi au respectiv ecuaţiile $(O_2O_3)X=0$, $(O_3O_1)Y=0$, $(O_1O_2)Z=0$.

Din relaţiile (2), se vede că aceste coordonate trilatere (X, Y, Z) sunt proporţionale cu distanţele punctului M la laturile O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2, sau, proporţionale cu ariile triunghiurilor O_2MO_3, O_3MO_1, O_1MO_2.

Coordonatele carteziene omogene x, y, z fiind cunoscute afară de un factor constant, din relaţiile (2) se vede că şi coordonatele trilatere sunt cunoscute afară de un factor constant, adică pot fi kX, kY, kZ, k fiind o constantă oarecare.

2°. Mai mult, cunoaşterea triunghiului de referinţă nu este suficientă pentru definirea coordonatelor trilatere. In adevăr, din relaţiile (2) se vede că fiind dat triunghiul de referinţă, adică ecuaţiile laturilor sale $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $a_3x+b_3y+c_3z=0$, coordonatele trilatere pot fi sau X, Y, Z, sau aX, bY, cZ, a, b, c fiind factori constanţi, căci, dacă ecuaţiile laturilor triunghiului de referinţă sunt $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, aceste laturi pot avea şi ecuaţiile $aX=0$, $bY=0$, $cZ=0$, de oarece a, b, c sunt diferiţi de zero. Deci, dacă un sistem de coordonate trilatere sunt X, Y, Z, atunci luând sistemul de coordonate trilatere aX, bY, cZ, a, b, c fiind constanţi, triunghiul de referinţă rămâne acelaş.

3°. Triunghiul de referinţă poate avea unul sau două din vârfurile sale aruncate la infinit. In cazul când triunghiul de referinţă este format de axele Ox, Oy şi dreapta de la infinit, ecuaţiile în coordonate carteziene omogene ale laturilor acestui triunghi sunt

$$(O_2O_3)\equiv Oy,\ x=0;\ (O_3O_1)\equiv Ox,\ y=0;\ (O_1O_2),\ z=0.$$

Cum membrii al doilea ai relaţiilor (2) sunt respectiv primii membri ai ecuaţiilor laturilor triunghiului de referinţă, (O_2O_3), (O_3O_1), (O_1O_2), urmează că, în cazul triunghiului de referinţă considerat, relaţiile (2) devin

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z,$$

şi deci coordonatele trilatere coincid cu coordonatele carteziene omogene. Aşa dar, sistemul de coordonate carteziene este un caz foarte particular al coordonatelor trilatere când una din laturile triunghiului de referinţă este aruncată la înfinit.

4°. Ecuaţia unei curbe de ordinul m în coordonate carteziene omogene fiind $f(x,y,z)=0$, făcând transformarea (3), ecuaţia acestei curbe în coordonate trilatere este

$$f(A_1X+B_1Y+C_1Z,\ A_2X+B_2Y+C_2Z,\ A_3X+B_3Y+C_3Z)=0$$

sau

$$F(X, Y, Z)=0,$$

o ecuaţie omogenă şi de gradul m în raport cu X, Y, Z.

In particular, ecuaţia unei drepte are o ecuaţie de forma

$$AX+BY+CZ=0.$$

Din relaţiile (3) se vede că punctul este la înfinit când $z=0$, adică

$$A_3X+B_3Y+C_3Z=0,$$

care este deci ecuaţia dreptei de la infinit în coordonate trilatere.

5°. Fiind dat triunghiul de referinţă ale cărui laturi au ca ecuaţii în coordonate trilatere $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, vârful O_1 fiind la intersecţia dreptelor $(O_1O_2)\equiv Z=0$, $(O_3O_1)\equiv Y=0$, coordonatele sale trilatère sunt $(\lambda,0,0)$, λ fiind un număr oarecare. De asemenea, coordonatele trilatere ale vârfurilor O_2 şi O_3 sunt $(0,\mu,0)$, $(0,0,\nu)$, μ şi ν fiind numere oarecare. Aceste coordonate pot fi $O_1(1,0,0)$, $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,0,1)$.

Inlocuind în relaţiile (3) pe X, Y, Z cu coordonatele vârfului O_1, avem $x=A_1\lambda$, $y=A_2\lambda$, $z=A_3\lambda$. ceea ce probează că coordonatele omogene carteziene ale vârfului O_1 sunt (A_1, A_2, A_3). In mod analog, se vede că coordonatele carteziene omogene ale vârfurilor O_2 şi O_3 sunt respectiv (B_1,B_2,B_3), (C_1,C_2,C_3). Vedem deci ce însemnare au coeficienţii din transformarea (3).

Să considerăm un triunghiu de referință $O_1O_2O_3$ cu toate vârfurile la distanță finită. Din cele de mai sus, coordonatele carteziene neomogene ale punctelor O_1, O_2, O_3 sunt

$$O_1\left(\frac{A_1}{A_3}=x_1, \frac{A_2}{A_3}=y_1\right),\ O_2\left(\frac{B_1}{B_3}=x_2, \frac{B_2}{B_3}=y_2\right),\ O_3\left(\frac{C_1}{C_3}=x_3, \frac{C_2}{C_3}=y_3\right).$$

Punând $A_3X=\alpha$, $B_3Y=\beta$, $C_3Z=\gamma$, relațiile (2) se pot scrie

$$\frac{x}{z}=\frac{A_1X+B_1Y+C_1Z}{A_3X+B_3Y+C_3Z}=\frac{\frac{A_1}{A_3}A_3X+\frac{B_1}{B_3}B_3Y+\frac{C_1}{C_3}C_3Z}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\frac{y}{z}=\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Cum $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sunt coordonatele carteziene neomogene ale punctului M de coordonate trilatere X, Y, Z, și observând forma acestor coordonate, urmează că punctul M este centrul de greutate a trei mase $A_3X=\alpha$, $B_3Y=\beta$, $C_3Z=\gamma$, aplicate în vârfurile triunghiului de referință $O_1O_2O_3$.

Dacă $A_3=B_3=C_3=1$, avem $X=\alpha$, $Y=\beta$, $Z=\gamma$, iar coordonatele trilatere sunt în acest caz *coordonate baricentrice*.

6°. Să considerăm două puncte ale căror coordonate carteziene omogene sunt $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Coordonatele trilineare (X_1,Y_1,Z_1), (X_2,Y_2,Z_2) ale acestor puncte sunt date de relațiile (2) și sunt

$$X_1=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1, \qquad X_2=a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2,$$
$$Y_1=a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1, \qquad Y_2=a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2,$$
$$Z_1=a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1, \qquad Z_2=a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2.$$

Coordonatele carteziene x,y,z ale unui punct M ce divide pe M_1M_2 în raportul $M_1M:MM_2$, sunt $x_1+\lambda x_2$, $y_1+\lambda y_2$, $z_1+\lambda z_2$, $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}\frac{z_1}{z_2}$, iar coordonatele trilineare X, Y, Z ale acestui punct sunt date de relațiile (2) și sunt

$$X=a_1(x_1+\lambda x_2)+b_1(y_1+\lambda y_2)+c_1(z_1+\lambda z_2),$$
$$X=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+\lambda(a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2)=X_1+\lambda X_2.$$

Deci, fiind date coordonatele trilineare ale punctelor $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $M_2(X_2,Y_2,Z_2)$, coordonatele trilineare ale punctului M ce divide segmentul M_1M_2 în raportul $M_1M:MM_2$, sunt

$$X=X_1+\lambda X_2,\ Y=Y_1+\lambda Y_2,\ Z=Z_1+\lambda Z_2,\ \lambda=\frac{M_1M}{MM_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Coordonatele trilatere ale punctului conjugat armonic sunt $X_1-\lambda X_2$, $Y_1-\lambda Y_2$, $Z_1-\lambda Z_2$.

48. Aplicații. I. *Prin vârfurile triunghiului* ABC *se duc trei drepte concurente (trei ceviene) care tae laturile* BC, CA, AB, *în punctele* A′, B′, C′. *Să se arate că punctele de intersecție a dreptelor* (BC, B′C′) (CA, C′A′), (AB, A′B′) *sunt colineare.*

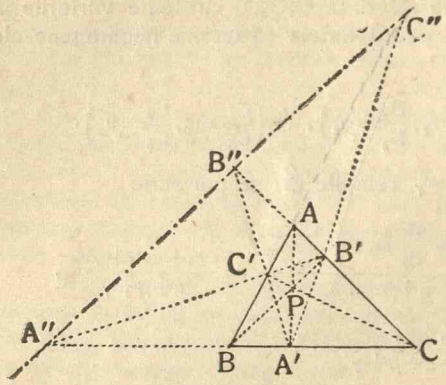


Fig. 55.

Să luăm triunghiul ABC (Fig. 55) ca triunghi de referinţă şi fie $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, ecuaţiile laturilor BC, CA, AB.

O dreaptă ce trece prin A, trece prin intersecţia dreptelor AC şi AB, ale căror ecuaţii sunt $\beta=0$, $\gamma=0$, deci ecuaţia acestei drepte AA' este de forma $m\beta-n\gamma=0$, m şi n fiind două constante. Ecuaţia dreptei BB' este, de asemenea, de forma $n\gamma-l\alpha=0$. Punctul P de intersecţie al dreptelor AA' şi BB' are coordonate (α,β,γ), care verifică ecuaţiile acestor drepte, adică,

$$m\beta-n\gamma=0,\ n\gamma-l\alpha=0;\ l\alpha=m\beta=n\gamma,\ \frac{\alpha}{\frac{1}{l}}=\frac{\beta}{\frac{1}{m}}=\frac{\gamma}{\frac{1}{n}};$$

aceste coordonate baricentrice sunt $\left(\frac{1}{l},\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$. Tot de aci mai rezultă că $l\alpha=m\beta$, sau $l\alpha-m\beta=0$, este o dreaptă ce trece prin acest punct P de intersecţie şi punctul de intersecţie C al dreptelor $\alpha=0$, $\beta=0$, adică BC, CA, astfel că $l\alpha-m\beta=0$ este ecuaţia dreptei CC', concurentă în acelaş punct P cu AA' şi BB'. Deci, ecuaţiile dreptelor AA', BB', CC' sunt

$$(AA')\ m\beta-n\gamma=0,\ (BB')\ n\gamma-l\alpha=0,\ (CC')\ l\alpha-m\beta=0.$$

Să găsim acum ecuaţia dreptei A'B'. Această dreaptă trece mai întâi prin punctul A' de intersecţie al dreptelor BC şi AA', de ecuaţii $\alpha=0$, $m\beta-n\gamma=0$. Ecuaţia acestei drepte este de forma

(12) $$\lambda\alpha+m\beta-n\gamma=0.$$

De asemenea, ecuaţia unei drepte ce trece prin B', de intersecţie al dreptelor CA, BB', de ecuaţii $\beta=0$, $n\gamma-l\alpha=0$, este de forma

(13) $$n\gamma-l\alpha+\mu\beta=0.$$

Pentru ca această ecuaţie să reprezinte aceeaş dreaptă ca şi ecuaţia (12), trebue ca să fie proporţionali coeficienţii lui α,β,γ,

$$\frac{\lambda}{-l}=\frac{m}{\mu}=-1,\ \lambda=l,\ m=-\mu;$$

în aceste condiţii, ecuaţiile (12) şi (13) reprezintă dreapta A'B', a cărei ecuaţia este

$$(A'B')\ l\alpha+m\beta-n\gamma=0.$$

In mod analog se vede că ecuaţiile dreptelor B'C' şi C'A' sunt

$$(B'C')\ -l\alpha+m\beta+n\gamma=0,\ (C'A')\ l\alpha-m\beta+n\gamma=0.$$

Să găsim acum coordonatele punctului C'' de intersecţie al dreptelor A'B', AB. Aceste coordonate verifică ecuaţiile lor,

deci $$l\alpha+m\beta-n\gamma=0,\ \gamma=0,$$

$$(C'')\ l\alpha+m\beta=0,\ \gamma=0.$$

In mod analog se vede că pentru punctele de intersecţie A", B", avem coordonatele

$$(A'')\ m\beta+n\gamma=0,\ \alpha=0;\ (B'')\ l\alpha+n\gamma=0,\ \beta=0.$$

O dreaptă ce trece prin A" este de forma

$$m\beta+n\gamma+k\alpha=0, \tag{14}$$

iar o dreaptă ce trece prin B" este de forma

$$l\alpha+n\gamma+s\beta=0. \tag{15}$$

Scriind că ecuaţiile (14) şi (15) reprezintă aceeaş dreaptă, adică dreapta A"B", urmează

$$\frac{k}{l}=\frac{m}{s}=1,\ k=l,\ s=m,$$

aşa că ecuaţia dreptei A"B" este

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0. \tag{16}$$

In mod analog se arată că se obţine aceeaş ecuaţie şi pentru dreapta B"C", ceea ce probează că punctele A", B", C" sunt colineare pe dreapta (16) şi astfel proprietatea geometrică este învederată. A"B"C" se zice polara trilineară a punctului P.

II. *Se zice că două triunghiuri sunt omologice când laturile lor corespunzătoare se tae două câte două pe aceeaş dreaptă numită axa de omologie; să se arate că dreptele care unesc vârfurile corespunzătoare ale celor două triunghiuri omologice sunt concurente.*

Fie ABC, A'B'C' (Fig. 56) triunghiurile omologice şi Δ axa lor de omologie. Să luăm triunghiul ABC ca triunghi de referinţă şi fie $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ ecuaţiile laturilor BC, CA, AB şi axei Δ.

Dreapta B'C' trecând prin intersecţia dreptelor BC şi Δ, are o ecuaţie de forma

$$l\alpha+m\beta+n\gamma+\lambda\alpha=0,\ (l+\lambda)\alpha+m\beta+n\gamma=0,\ l'\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

In mod analog, se vede că ecuaţiile dreptelor C'A', A'B' sunt de formele

$$(C'A')\ l\alpha+m'\beta+n\gamma=0,\ (A'B')\ l\alpha+m\beta+n'\gamma=0.$$

O dreaptă ce trece prin A', adică prin intersecţia dreptelor A'B', A'C', are o ecuaţie de forma

$$l\alpha+m\beta+n\gamma+\lambda(l\alpha+m'\beta+n\gamma)=0.$$

Ca această dreaptă să fie chiar dreapta AA', trebue ca ecuaţia precedentă să fie verificată de coordonatele lui A(1, 0, 0), şi deci

$$l+\lambda l=0,\ \lambda=-1.$$

Inlocuind pe λ cu -1, efectuând calculele, ecuaţia dreptei AA' este

$$(AA')\ (m-m')\beta=(n-n')\gamma$$

In mod analog se obţin ecuaţiile dreptele BB', CC',

$$(BB')\ (n-n')\gamma=(l-l')\alpha,\ (CC')\ (l-l')\alpha=(m-m')\beta.$$

Dar, se vede că avem

$$(AA')+(BB')+(CC')\equiv 0,$$

relație care arată că dreptele (AA'), (BB'), (CC') sunt concurente și anume în punctul 0, ele cărui coordonate verifică ecuațiile

$$(O)\quad (l-l')\alpha=(m-m')\beta=(n-n')\gamma,$$

iar valorile lor proporționale sunt date de

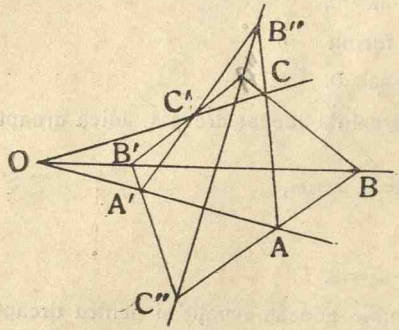


Fig. 56.

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{l-l'}}=\frac{\beta}{\frac{1}{m-m'}}=\frac{\gamma}{\frac{1}{n-n'}}.$$

Acest punct O se zice *centrul* de *omologie* al celor două triunghiuri omologice.

Observare. Se poate rezolva invers problema și anume, fiind date două triunghiuri ABC, A'B'C', ale căror vârfuri omoloage se află pe trei drepte concurente, să se arate că dreptele omologe (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') se tae în trei puncte colineare, C'', A'', B''.

Fascicole de drepte.

49. **Generalități.** 1°. Ecuația unei curbe de gradul m este de forma

$$f(x, y)=f_m(x, y)+f_{m-1}(x, y)+\cdots+f_1(x, y)+f_0=0,$$

$f_s(x, y)$ fiind grupul termenilor de gradul s în raport cu x și y, iar $f_s(x, y)$ fiind o funcțiune omogenă și de gradul s în raport cu x și y.

Inlocuind pe x și y cu $\frac{x}{z}$ și $\frac{y}{z}$, ecuația curbei devine

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=f_m\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)+f_{m-1}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)+\cdots+f_0$$

și gonind numitorii, ecuația curbei în coordonate omogene este

(1) $$F(x, y, z)=f_m(x, y)+zf_{m-1}(x, y)+\cdots+z^{m-1}f_1(x, y)+z^m f_0=0,$$

unde

$$F(x, y, 1)\equiv f(x, y).$$

Să considerăm dreapta definită de punctele (x_1, y_1, z), (x_2, y_2, z_2); un punct al acestei drepte are cordonatele omogene

$$x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ z_1+\lambda z_2.$$

Pentru a găsi punctele de intersecție ale acestei drepte cu curba, va trebui să găsim valorile lui λ corespunzătoare acestor puncte de intersecție, adică se rezolvăm ecuația în λ,

$$F(x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ z_1+\lambda z_2)=0.$$

Dezvoltând cu ajutorul formulei lui Taylor, avem

(2) $$F(x_1, y_1, z_1)+\frac{\lambda}{1}\left(x_2\frac{\partial F}{\partial x}+y_2\frac{\partial F}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)+\cdots+\lambda^m(Fx_2, y_2, z_2)=0$$

Această ecuație fiind de gradul m în λ [presupunând că $F(x_2, y_2, z_2)\neq 0$, adică punctul (x_2, y_2, z_2) nu aparține curbei (1)], urmează că avem m valori pentru λ (reale sau imaginare) și deci, pe dreapta ce unește punctele (x_1, y_1, z_1),

(x_1, y_2, z_2), sunt m punctele ale curbei, adică *o dreaptă tae o curbă de ordinul m în m puncte.*

In demonstrația precedentă am presupus că punctul $M_3(x_3, y_3, z_3)$, nu este pe curbă. Dacă dreapta M_1M_3 nu aparține în întregimea curbei, ea o întâlnește într'un număr finit de puncte și atunci alegerea punctului M_3 totdeauna este posibilă. Deci, pentruca demonstrația precedentă să fie valabilă, trebue presupus că dreapta nu aparține în întregime curbei. Așa fiind, o dreaptă aparține în întregime unei curbe, când numărul punctelor de intersecție ale dreptei cu curba este mai mare ca gradul ecuației curbei. In acest caz ecuația (2) se reduce la o identitate.

2°. *Cazul de descompunere al unei curbe.* Știm că un polimon de gradul m, in raport cu o singură variabilă x, se descompune în m factori de gradul întâi. Aceeaș proprietate nu este adevărată pentru orice polinom de gradul m, în raport cu mai multe variabile. De ex., $x^2+y^2-R^2$ nu se poate descompune în doi factori lineari reali în raport cu x și y. Se zice, în acest caz, că curba reprezentată de această ecuație nu se descompune.

Dacă, din contră, ecuația curbei se descompune,

$$f(x, y)=f_1(x, y).\ f_2(x, y)\ldots f_p(x, y),$$

atunci curba noastră se descompune în curbele

$$f_1(x, y)=0, \ldots f_p(x, y)=0.$$

3°. *Condițiile ca ecuațiile* $f(x,y)=0$, $g(x, y)=0$ *să reprezinte aceeaș curbă.* Dacă curbele reprezentate de ecuațiile $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ sunt identice, tăindu-le cu o dreaptă oarecare, avem aceleași puncte de intersecție. $f(x, y)$ și $g(x, y)$ fiind două polinonoame în x și y, tăind cele două curbe cu dreapta $x=x_0$, obținem, oricare ar fi x_0, două ecuații algebrice în y,

$$f(x_0, y)=0,\ g(x_0, y)=0,$$

care trebue să aibă aceleași rădăcini. Deci, oricare ar fi x_0, câtul

$$\frac{g(x_0, y)}{f(x_0, y)}$$

este îndependent de y adică egal cu $f(x_0)$, cu alte cuvinte, câtul

$$\frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

nu depinde de y.

In acelaș mod, dând lui y valoarea y_0, vom demonstra, de asemenea, că $\frac{g(x,y)}{f(x,y}$ nu depinde de x și prin urmare este o constantă λ,

$$\frac{g(x, y)}{f(x, y)}=\lambda,$$

sau

$$g(x, y)=\lambda f(x, y).$$

Deci, $f(x, y)$ și $g(x, y)$ fiind două polinoame, pentru ca ecuațiile $f(x,y)=0$, $g(x, y)=0$, să reprezinte aceeaș curbă, trebue să avem $g(x, y)=\lambda f(x, y)$, λ fiind o constantă.

50. **Fascicol de drepte ce trec prin origină.** Să considerăm ecuația omogenă și de gradul p în x și y,

$$F(x,y)=A_0x^p+A_1x^{p-1}y+\cdots+A_{p-1}xy^{p-1}+A_py^p=0.$$

Divizând cu x^p, avem

$$A_0+A_1\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+A_p\left(\frac{y}{x}\right)^p=0.$$

Punând $\frac{y}{x}=m$, obținem ecuația

$$A_0+A_1m+\cdots+A_pm^p=0.$$

Insemnând cu $m_1, m_2,\cdots m_p$ rădăcinile acestei ecuații, avem

$$A_p(m-m_1)(m-m_2)\cdots(m-m_p)=0,$$

unde, înlocuind pe m cu $\frac{y}{x}$, obținem

$$A_p\left(\frac{y}{x}-m_1\right)\left(\frac{y}{x}-m_2\right)\cdots\left(\frac{y}{x}-m_p\right)=0.$$

Deci curba noastră se descompune în p drepte ce trec prin origină,

$$y-m_1x=0,\ \cdots y-m_px=0,$$

ai căror coeficienți unghiulari sunt dați de ecuația

$$A_0+A_1m+\cdots+A_pm^p=0.$$

De ex., ecuația $2y^2-3xy+x^2=0$, reprezintă două drepte ce trec prin origină, ai căror coeficienți unghiulari sunt dați de ecuația

$$2m^2-3m+1=0,$$

cu rădăcinile $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=1$, iar ecuațiile acestor două drepte sunt

$$y=\frac{1}{2}x,\ y=x.$$

Aplicații. 1°. Condiția cu dreptele $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ să fie perpendiculare Insemnând cu m' și m'' coeficienții unghiulari ai acestor drepte, trebue să avem relația $1+m'm''=0$. Dar, m' și m'' sunt rădăcinile ecuații $Cm^2+2Bm+A=0$; deci $1+\frac{A}{C}=0$, $A+C=0$.

2°. Să se afle ecuația bisectoarelor unghiului dreptelor $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$. Insemnând cu α_1, α_2 (Fig. 57) unghiurile acestor drepte cu Ox, și cu $m_1=\text{tg}\alpha_1$, $m_2=\text{tg}\alpha_2$ coeficienții lor unghiulari, ecuația coeficienților unghiulari este

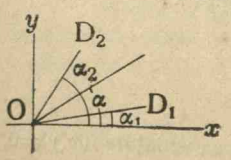


Fig. 57.

$$Cm^2+2Bm+A=0.$$

Insemnând cu α unghiul bisectoarei interioare cu Ox, și cu u jumătatea unghiului D_1OD_2, avem $\alpha=\alpha_1+u$, $\alpha=\alpha_2-u$, de unde $2\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,

$$\text{tg}\,2\alpha=\text{tg}(\alpha_1+\alpha_2),\ \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2},\ \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{-\frac{2B}{C}}{1-\frac{A}{C}},\ \frac{\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{B}{A-C};$$

punând $\operatorname{tg}=\mu$, ecuația coeficienților unghiulari ai bisectoarelor este

$$\frac{\mu}{1-\mu^2}=\frac{B}{A-C},\quad B\mu^2+\mu(A-C)-B=0.$$

Ecuația bisectoarei fiind $y=\mu x$, înlocuind pe μ cu $\frac{y}{x}$, ecuația comună a celor două bisectoare este

$$B(y^2-x^2)+(A-C)xy=0.$$

51. **Polara unui punct față de un unghi. Fascicol armonic.** Fie $M_1(x_1,y_1)$ un punct in planul dreptelor (Fig. 58)

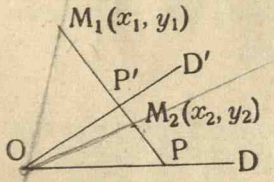


Fig. 58.

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\ (D')\equiv A'x+B'y+C'=0.$$

Să însemnăm cu P și P′ punctele de intersecție ale dreptelor D și D′ cu o secantă variabilă ce trece prin M_1. Fie M_2 conjugatul armonic al lui M_1 în raport cu punctele P și P′. Curba descrisă de punctul M_2, când secanta se învârtește în jurul lui M_1, se zice polara lui M_1 în raport cu unghiul format de dreptele D și D′.

A găsi ecuația acestei polare, însemnează a afla o relație între coordonatele (x_2,y_2) ale punctului M_2. Pentru aceasta, să observăm că punctul P fiind pe dreapta M_1M_2, coordonatele sale sunt de forma

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad \lambda=\frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}},$$

iar valoarea lui λ se găsește scriind că acest punct este pe dreapta D, adică

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0,\quad \lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

De asemenea, coordonatele lui P′ sunt

$$\frac{x_1+\lambda' x_2}{1+\lambda'},\ \frac{y_1+\lambda' y_2}{1+\lambda'},\ \lambda'=\frac{\overline{M_1P'}}{\overline{P'M_1}},\ \lambda'=-\frac{A'x_1+B'y_1+C'}{A'x_2+B'y_2+C'}.$$

Dar M_1 și M_2 fiind conjugate armonic cu P și P′, avem

$$\frac{\overline{PM_1}}{\overline{M_1P'}}=-\frac{\overline{PM_2}}{\overline{M_2P'}},\ \frac{\overline{PM_1}}{\overline{PM_2}}=-\frac{\overline{M_1P'}}{\overline{M_2P'}},\ -\frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}}=\frac{\overline{M_1P'}}{\overline{P'M_2}},\ \lambda+\lambda'=0,$$

deci

$$\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}+\frac{A'x_1+B'y_1+C'}{A'x_2+B'y_2+C'}=0.$$

De unde

$$Ax_2+By_2+C+\frac{Ax_1+By_1+C}{A'x_1+B'y_1+C'}(A'x_2+B'y_2+C')=0,$$

şi cum între coordonatele (x_2, y_2) ale punctului M_2 avem o relaţie de gradul întâi, urmează că locul lui M_2 este o dreaptă. Deci polara unui punct în raport cu cele două drepte date este o dreaptă, a cărui ecuaţie este

$$(3) \qquad Ax+By+C+\frac{Ax_1+By_1+C}{A'x_1+B'y_1+C'}(A'x+B'y+C')=0,$$

care trece prin intersecţia celor două drepte date, D şi D'.

Insemnând cu O intersecţia dreptelor D şi D', ecuaţia dreptei OM_1 este de forma

$$Ax+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0,$$

şi scriind că trece prin $M_1(x_1, y_1)$, avem.

$$Ax_1+By_1+C+\lambda(A'x_1+B'y_1+C')=0, \quad \lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{A'x_1+B'y_1+C'},$$

aşa că ecuaţia dreptei OM este

$$(4) \qquad Ax+By+C-\frac{Ax_1+By_1+C}{A'x_1+B'y_1+C'}(A'x+B'y+C')=0.$$

Dreptele D şi D', dreapta OM_1 şi polora sa Δ în raport cu unghiul DOD' (Fig. 59) se zice că formează un *fascicol armonic*. Se vede, din felul cum am obţinut polara, că tăind aceste patru raze concurente cu o secantă oarecare, punctele de intersecţie formează o diviziune armonică.

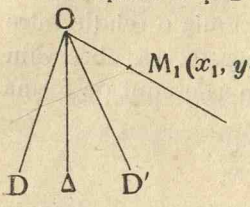


Fig. 59.

Comparând ecuaţiile (3) şi (4), se vede că, fiind date dreptele D=0, D'=0 şi D+μD'=0, a patra rază a fascicolului armonic este D−μD'=0.

Pentru a *construi polora unui punct* M *în raport cu dreptele* D *şi* D, care se tae în A (Fig. 60), ducem două secante prin M, MPP', MQQ', şi fie S şi S' punctele polarei situate pe aceste secante. Polara SS' trece prin punctul de intersecţie A al dreptelor (vârful unghiului). Unind PQ', QP', care se tae în B, se vede că SS' este polara lui M şi în raport cu unghiul B; deci SS' trece prin punctul B. Cum trece prin A şi B polara este dreapta AB.

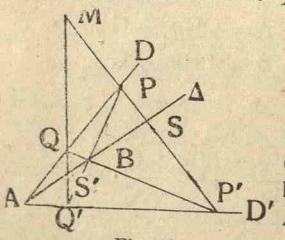


Fig. 60.

Cu acest procedeu *găsim şi conjugatul armonic al unui punct* C *în raport cu două puncte date* A *şi* B (Fig. 61). Pentru aceasta, se uneşte un punct P oarecare din plan cu A şi B. Chestiunea revine la a construi a patra rază a fascicolului armonic, primele trei fiind PA, PC, PB. Fie D şi E intersecţiile razelor PA şi PC cu o dreaptă oarecare dusă prin B. Dreapta AE tae pe PB în F, iar dreapta DF tae pe AB în M. Din modul cum am construit polara unui punct faţă de un unghi, se vede că PC este polara punctului M în raport cu unghiul APB, deci PM este a patra rază a fascicolului armonic format de PA, PC, PB, de unde urmează că tăind aceste patru raze

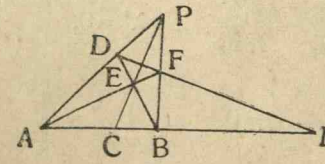


Fig. 61.

cu o secantă se obține o diviziune armonică, sau că M este conjugatul armonic al lui C în raport cu A și B.

Tot de aci mai observăm că, *în patrulaterul complect* PDEFAB (Fig. 61), ale cărui diagonale sunt PE, DF, AB, că *o diagonală* AB, *de ex., este împărțită armonic de celelalte două diagonale*, căci C și M sunt conjugate armonic în raport cu A și B.

Exemplu. Să se afle locul punctelor M *al căror raport al distanțelor la două drepte date să fie constant.* Ecuațiile dreptelor fiind

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\ (D')\equiv A'x+B'y+C'=0,$$

coordonatele unui punct al locului căutat verifică relația

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm k\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

ceea ce probează că locul acestor puncte se compune din dreptele

$$Ax+By+C-\mu(A'x+B'y+C')=0,\ Ax+By+C+\mu(A'x+B'y+C')=0,$$

$$\mu=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}k.$$

Aceastea formează împreună cu dreptele D și D' un fascicol armonic.

Observări. 1°. Tăind un fascicol armonic (O.ABCD) cu o secantă paralelă cu una din raze, de ex., cu OD (Fig. 62), punctele de intersecție *m*, *n*, *p*, cu OA, OB, OC, sunt astfel că *n* este mijlocul lui *mp*, căci conjugatul armonic al lui *n* în raport cu *mp* este intersecția lui OD cu *mnp*, adică la infinit, și se știe că dacă conjugatul armonic al unui punct este punctul de la infinit, acel punct este mijlocul segmentului.

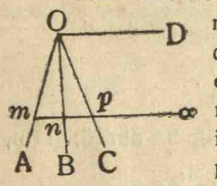


Fig. 62.

2°. *Dacă două din razele unui fascicol armonic sunt perpendiculare, ele sunt bisectoarele unghiului format de celelalte două.* In adevăr, tăind razele OA, OB, OC (Fig. 62) cu o paralelă *mnp* la OD, se știe că *n* este mijlocul lui *mp*. Dacă OB și OD sunt perpendiculare, urmează că triunghiurile dreptunghice O*mn*, O*np* sunt egale, apoi că triunghiul O*mp* este isoscel, O*n* este bisectoarea unghiului AOC, deci OB, OD sunt bisectoarele unghiului AOC.

Această proprietate o mai putem vedea și în modul următor. Fie D=0, D'=0, D−λD'=0, D+λD'=0, cele patru raze ale fascicolului armonic, unde

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\ (D')\equiv A'x+B'y+C'=0.$$

Dacă razele D−λD'=0, D+λD'=0 sunt perpendiculare, urmează că între coeficienții lor unghiulari avem relația

$$\left(-\frac{A-\lambda A'}{B-\lambda B'}\right)\left(-\frac{A+\lambda A'}{B+\lambda B'}\right)+1=0,$$

de unde

$$\lambda=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

așa că ecuațiile razelor D−λD'=0, D+λD'=0 devin

$$Ax+By+C\pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}(A'x+B'y+C')=0,$$

sau

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm \frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

ceea ce probează că aceste drepte sunt bisectoarele unghiului dreptelor D şi D'.

52. **Fascicol anarmonic. Proectivitatea raportului anarmonic. Proprietăţile raportului anarmonic.** I. Am văzut că tăind un fascicol armonic cu o secantă oarecare, punctele de intersecţie formează o diviziune armonică, oricare ar fi secanta.

Mai general, să considerăm un *fascicol anarmonic*, adică format din patru drepte concurente oarecare (Fig. 63),

$(D_1)\equiv D+\lambda_1 D'=0$, $(D_2)\equiv D+\lambda_2 D'=0$, $(D_3)\equiv D+\lambda_3 D'=0$, $(D_4)\equiv D+\lambda_4 D'=0$,

unde

$$(D)\equiv Ax+By+C=0,\ (D')\equiv A'x+B'y+C'=0.$$

Să însemnăm cu M_1, M_2, M_3, M_4 punctele de intersecţie ale acestor raze concurente D_1, D_2, D_3, D_4 cu o dreaptă oarecare. Să presupunem că această secantă variabilă este definită de punctele $M_1(x_1,y_1)$ al dreptei D_1 şi punctul $M_2(x_2,y_2)$ al dreptei D_2, adică

$$Ax_1+By_1+C+\lambda_1(A'x_1+B'y_1+C')=0, \tag{5}$$

$$Ax_2+By_2+C+\lambda_2(A'x_2+B'y_2+C')=0. \tag{6}$$

Raportul în care dreapta M_1M_2 este împărţită de D_3 este dat de

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{Ax_1+By_1+C+\lambda_3(A'x_1+B'y_1+C')}{Ax_2+By_2+C+\lambda_3(A'x_2+B'y_2+C')}.$$

Inlocuind pe Ax_1+By_1+C şi Ax_2+By_2+C cu valorile lor din (5) şi (6), avem

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{-\lambda_1(A'x_1+B'y_1+C')+\lambda_3(A'x_1+B'y_1+C')}{-\lambda_2(A'x_2+B'y_2+C')+\lambda_3(A'x_2+B'y_2+C')},$$

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{A'x_1+B'y_1+C'}{A'x_2+B'y_2+C'}\cdot\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}. \tag{7}$$

In mod analog, avem

$$\frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{A'x_1+B'y_1+C'}{A'x_2+B'y_2+C'}\cdot\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}. \tag{8}$$

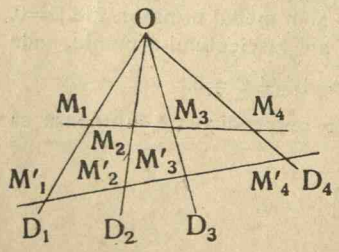


Fig. 63.

Divizând (7) cu (8), obţinem

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} : \frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} : \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2},$$

ceea ce probează că acest raport nu depinde de poziţia secantei $M_1M_2M_3M_4$, ci numai de dreptele D_1,D_2,D_3,D_4.

Raportul

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{M_3M_1}{M_3M_2} : \frac{M_4M_1}{M_4M_2}$$

se zice *raportul anarmonic* al fascicolului format $(O.D_1D_2D_3D_4)$, iar fascicolul $(O.D_1D_2D_3D_4)$ se zice el însuşi *fascicol anarmonic*. Acest raport este independent de poziţia secantei cu care am tăiat fascicolul şi depinde numai de ordinea în care se consideră dreptele D_1,D_2,D_3,D_4, şi de valorile lui $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, care definesc dreptele,

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{M_3M_1}{M_3M_2}:\frac{M_4M_1}{M_4M_2}=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}.$$

Deci, unind un punct oarecare O cu patru puncte colineare M_1,M_2,M_3,M_4 şi însemnând cu M_1',M_2',M_3',M_4' (Fig. 63) intersecţiile acestor patru raze cu o secantă oarecare, avem

$$(M_1M_2M_3M_4)=(M_1'M_2'M_3'M_4').$$

Această proprietate este ceea ce se numeste *proectivitatea raportului anarmonic.*

Putem găsi şi altfel expresia raportului anarmonic al fascicolului $D+\lambda_i D'=0$, $i=1,2,3,4$. Pentru aceasta, să găsim mai întâi expresia raportului anarmonic al punctelor M_1,M_2,M_3,M_4, aşezate pe dreapta definită de punctele $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$ şi ale căror coordonate sunt

$$\frac{x'+\mu_i x''}{1+\mu_i},\quad \frac{y'+\mu_i y''}{1+\mu_i},\quad i=1,2,3,4.$$

Raportul anarmonic $(M_1M_2M_3M_4)$ este proectiv, adică unind un punct P cu M_1,M_2,M_3,M_4 şi însemnând cu N_1,N_2,N_3,N_4 punctele de intersecţie ale razelor PM_1,PM_2,PM_3,PM_4 cu o dreaptă Δ, avem $(M_1M_2M_3M_4)=(N_1N_2N_3N_4)$. Presupunând că Δ este axa Oy, iar P este la infinit în direcţia axei Oy, atunci razele PM_1,PM_2,PM_3,PM_4 sunt paralele cu Oy, iar punctele N_1,N_2,N_3,N_4 ale axei Ox au abscisele

$$\frac{x'+\mu_i x''}{1+\mu_i},\quad i=1,2,3,4.$$

Deci

$$(M_1M_2M_3M_4)=(N_1N_2N_3N_4)=\frac{N_3N_1}{N_3N_2}:\frac{N_4N_1}{N_4N_2},$$

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{\dfrac{x'+\mu_1x''}{1+\mu_1}-\dfrac{x'+\mu_3x''}{1+\mu_3}}{\dfrac{x'+\mu_2x''}{1+\mu_2}-\dfrac{x'+\mu_3x''}{1+\mu_3}}:\frac{\dfrac{x'+\mu_1x''}{1+\mu_1}-\dfrac{x'+\mu_4x''}{1+\mu_4}}{\dfrac{x'+\mu_2x''}{1+\mu_2}-\dfrac{x'+\mu_4x''}{1+\mu_4}}=$$

$$\frac{(\mu_3-\mu_1)(x'-x'')}{(\mu_3-\mu_2)(x'-x'')}:\frac{(\mu_4-\mu_1)(x'-x'')}{(\mu_4-\mu_2)(x'-x'')},$$

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{M_3M_1}{M_3M_2}:\frac{M_4M_1}{M_4M_2}=\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2}:\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2},$$

astfel că expresia raportului anarmonic a punctelor considerate este în strânsă legătură cu parametrii μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 care definesc aceste patru puncte.

Aşa fiind, să considerăm fascicolul $D+\lambda_i D'=0$, $i=1,2,3,4$ şi să însemnăm cu M_1,M_2,M_3,M_4 punctele de intersecţie ale razelor acestui fascicol cu dreapta $M'M''$, definită de punctele $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$. Coordonatele M_i sunt de forma

$$\frac{x'+\mu_i x''}{1+\mu_i},\quad \frac{y'+\mu_i y''}{1+\mu_i},$$

şi scriind că aparţine dreptei $D+\lambda_i D'=0$, urmează

$$A\frac{x'+\mu_i x''}{1+\mu_i}+B\frac{y'+\mu_i y''}{1+\mu_i}+C+\lambda_i\left(A'\frac{x'+\mu_i x''}{1+\mu_i}+B'\frac{y'+\mu_i y''}{1+\mu_i}+C'\right)=0.$$

de unde

$$\mu_i=-\frac{Ax'+By'+C+\lambda_i(A'x'+B'y'+C')}{Ax''+By''+C+\lambda_i(A'x''+B'y''+C')},\quad i=1,2,3,4.$$

Expresia raportului anarmonic al fascicolului este dată de

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2}:\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2},$$

unde înlocuind pe μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 cu valoarele lor de mai sus, făcând reducerile, obținem

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}.$$

O altă expresie trigonometrică a raportului anarmonic a patru raze concurente (a unui fascicol de patru drepte) este obținută astfel. Avem

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2}:\frac{M_4M_1}{M_4M_2}=\frac{\text{aria}M_3OM_1}{\text{aria}M_4OM_2}:\frac{\text{aria}M_4OM_1}{\text{aria}M_4OM_2},$$

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2}:\frac{M_4M_1}{M_4M_2}=\frac{OM_1\cdot OM_3\sin M_1OM_3}{OM_2\cdot OM_3\sin M_2OM_3}:\frac{OM_1\cdot OM_4\sin M_1OM_4}{OM_2\cdot OM_4\sin M_2OM_4}=\frac{\sin M_1OM_3\sin M_2OM_4}{\sin M_2OM_3\sin M_1OM_4},$$

relație care probează că raportul $(M_1M_2M_3M_4)$ depinde numai de razele fascicolului.

De aci urmează că unind un punct M variabil al unui cerc cu patru puncte fixe A_1, A_2, A_3, A_4 ale cercului, raportul anarmonic al fascicolului $(M.A_1A_2A_3A_4)$ este constant, căci unghiurile A_1MA_2, A_1MA_3, A_2MA_3, A_2MA_4 rămân constante când M variază pe cerc.

Observări. 1°. Când punctele de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 formează o diviziune armonică, se zice că fascicolul este armonic, iar valoarea raportului este -1,

$$(M_1M_2M_3M_4)=-1.$$

2°. Să presupunem că vârful fascicolului anarmonic este în origina axelor de coordonate, iar ecuațiile dreptelor sunt $y=m_ix$, $i=1, 2, 3, 4$. Raportul anarmonic al acestui fascicol este

$$\frac{m_3-m_1}{m_3-m_2}:\frac{m_4-m_1}{m_4-m_3}.$$

Condiția ca acest fascicol să fie armonic (dreptele $y=m_3x$, $y=m_4x$, conjugate armonic cu dreptele $y=m_1x$, $y=m_2x$) este

$$\frac{m_3-m_1}{m_3-m_2}:\frac{m_4-m_1}{m_4-m_2}=-1,\quad (m_1+m_2)(m_3+m_4)=2(m_1m_2+m_3m_4).$$

II. *Aplicații.* 1°. *Când două fascicole de patru drepte* OA, OB, OC, OD, și O'A, O'B, O'C, O'D, *au același raport anarmonic și o rază comună*, OO' *punctele* β, γ, δ *de intersecție ale celorlalte raze omoloage sunt în linie dreaptă.*

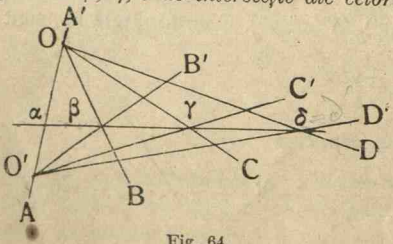


Fig. 64.

In adevăr, să însemnăm cu α, δ, δ' punctele unde dreapta $\beta\gamma$ (Fig. 64) tae pe OO', OD, O'D'. Avem, prin ipoteză,

$$(\alpha\beta\gamma\delta)=(\alpha\beta\gamma\delta'),$$

adică

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}:\frac{\delta\alpha}{\delta\beta}=\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}:\frac{\delta'\alpha}{\delta'\beta},\quad \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}=\frac{\delta'\alpha}{\delta'\beta}.$$

Deci punctele δ și δ' coincid, căci pe segmentul $\alpha\beta$ este numai un punct exterior sau interior segmentului care să-l împartă într'un raport dat.

2°. *Când două figuri rectilinii de patru puncte* A,B,C,D şi A′,B′,C′,D′, (Fig. 65) *au un raport anarmonic egal şi un punct omolog* A, *cele trei drepte* BB′, CC′, DD′ *sunt concurente în acelaş punct* O. In adevăr fie O punctul de intersecţie al dreptelor BB′ şi CC′ şi fie δ′ punctul unde OD′ tae pe ABC. Tăind fascicolul (O . AB′C′D′) cu secanta ABCδ′, avem

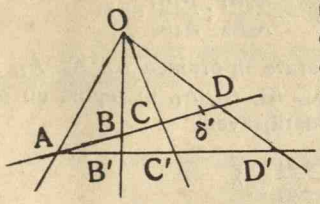


Fig. 65.

$$(AB'C'D')=(ABC\delta').$$

Dar, prin ipoteză, avem (AB′C′D′)=(ABCD), ceea ce probează că δ′ coincide cu D şi deci că DD′ trece prin O.

3°. *Când două triunghiuri* ABC, A′B′C′ (Fig. 66) *au vârfurile situate două câte două pe trei drepte* OAA′, OBB′, OCC′, *concurente în acelaş punct* O, *laturile omoloage* (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′) *se tae în trei puncte* α, β, γ *colineare.* In adevăr, fie D şi D′ punctele unde dreapta OC′C tae pe AB şi A′B′. Fascicolul Oγ, OB, OA, OC, tăiat cu secantele AB, A′B′, dă

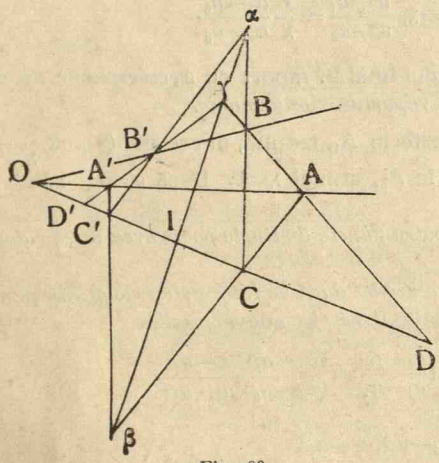


Fig. 66.

$$(\gamma BAD)=(\gamma B'A'D');$$

deci

$$(C\,.\,\gamma BAD)=(C'.\,\gamma B'A'D').$$

Or, aceste fascicole au raportul anarmonic egal şi raza comună DD′; deci, punctele de intersecţie γ, α, β, ale celorlalte trei perechi de raze sunt colineare.

IV. *Când două triunghiuri* ABC *şi* A′B′C′ *sunt astfel în cât laturile lor,* (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′), *se tae în trei puncte colinare* α, β, γ, *vârfurile lor sunt situate două câte două pe trei drepte concurente în acelaş punct* O. In adevăr, fie I intersecţia dreptei αβγ cu CC′. Avem (Fig. 66)

$$(C\,.\,\alpha\gamma I\beta)=(C'.\,\alpha\gamma I\beta).$$

Deci, tăind primul fascicol cu AB şi al doilea cu A′B′, şi numind cu D şi D′ punctele unde aceste drepte tae pe CC′, avem

$$(B\gamma DA)=(B'\gamma D'A').$$

Or, aceste două figuri au un punct omolog comun, γ; deci dreptele BB′, DD′, AA′, care unesc celelalte puncte omoloage două câte două, se tae în acelaş punct O.

Aceste ultime două proprietăţi, atribuite lui *Desargues*, au fost reluate de *Poncelet*, care a pus baza teorii figurilor omologice. Triunghiurile ABC, A′B′C′, care satisfac la condiţiile precedente, se zic *omologice;* O este *centrul,* iar αβγ *axa de omologie.*

III *Proprietăţile raportului anarmonic.* 1°. Să considerăm patru puncte colineare, A_1, A_2, A_3, A_4 (Fig. 67) şi să notăm cu

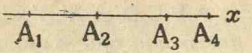


Fig. 67.

$$(A_1A_2A_3A_4)=\frac{A_3A_1}{A_3A_2}:\frac{A_4A_1}{A_4A_2}=\lambda$$

raportul anarmonic al acestor puncte, considerate în ordinea A_1, A_2, A_3, A_4. Notând cu a_1, a_2, a_3, a_4 abscisele punctelor A_1, A_2, A_3, A_4, în raport cu origină oarecare O, axa Ox fiind chiar dreapta dată, avem

$$(A_1A_2A_3A_4)=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}:\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4}=\lambda.$$

Presupunând că trei din aceste puncte, A_1, A_2, A_3, sunt date, iar λ are o valoare cunoscută, abscisa x corespunzătoare punctului M al patrulea, care, împreună cu cele trei, să formeze raportul anarmonic $(A_1A_2A_3M)=\lambda$, este dată de

$$(9)\qquad \frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}:\frac{a_1-x}{a_2-x}=\lambda,\quad \frac{x-a_1}{x-a_2}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}.$$

Această ecuație fiind de gradul întâi în raport cu x, *corespunde un singur punct* M *la o valoare dată* λ *a raportului anarmonic.*

Dacă $x=a_1$, adică dacă M este în A_1, rezultă, din relația (9), că $\frac{1}{\lambda}\to 0$, $\lambda\to\infty$. Dacă $x=a_2$, adică M este în A_2, atunci $\lambda=0$. Dacă $x=a_3$, adică M în A_3, Atunci $\lambda=1$.

Deci, *raportul anarmonic a patru puncte distincte poate avea orice valoare afară de* 0, 1, ∞.

2°. *Raportul anarmonic nu se schimbă dacă se intervertesc două din puncte cu condiție de a se interverti și celelalte două.* In adevăr, avem

$$(A_1A_2A_3A_4)=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}=\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}.$$

Dar

$$\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}=\frac{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}{(a_4-a_1)(a_3-a_2)}=(A_3A_4A_1A_2).$$

Deci

$$(A_1A_2A_3A_4)=(A_3A_4A_1A_2).$$

In mod analog, se arată că

$$(A_1A_2A_3A_4)=(A_2A_1A_4A_3)=(A_3A_4A_1A_2)=(A_4A_3A_2A_1).$$

3°. *Intervertind ordinea punctelor, se pot forma 6 rapoarte distincte, care se exprimă cu unul din ele.* In adevăr, cu trei litere, A_1, A_2, A_3, se pot face permutările

$$A_3A_1A_2,\quad A_1A_3A_2,\quad A_1A_2A_3,$$

$$A_3A_2A_1,\quad A_2A_3A_1,\quad A_2A_1A_3.$$

De asemenea, cu patru litere A_1, A_2, A_3, A_4, se pot face 24 permutări, așezând pe A_4 în fiecare din cele patru intervale ce le determină cele trei litere din fiecare din cele 6 permutări ale celor trei litere.

Dar conform proprietății precedente, sunt egale patru câte patru, deci rămân numai 6 distincte și anume

$$(A_1A_2A_3A_4),\ (A_2A_1A_3A_4),\ (A_3A_2A_1A_4),\ (A_4A_2A_3A_1),\ (A_2A_3A_1A_4),\ (A_2A_4A_3A_1).$$

1). Primul raport este

$$(A_1A_2A_3A_4)=\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}=\lambda.$$

2) Conform definiției expresii analitice a raportului anarmonic, raportul al doilea este

$$(A_2A_1A_3A_4)=\frac{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}=\frac{1}{\lambda}.$$

3). Al treilea raport este

$$\mu=(A_3A_2A_1A_4)=\frac{(a_3-a_1)(a_2-a_4)}{(a_2-a_1)(a_3-a_4)}.$$

Avem

$$\mu-1=\frac{(a_3-a_1)(a_2-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}-1=\frac{(a_3-a_1)(a_2-a_4)-(a_2-a_1)(a_2-a_4)}{(a_2-a_1)(a_3-a_4)}=\frac{a_1(a_3-a_2)+a_4(a_2-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_4)},$$

$$\mu-1=\frac{(a_1-a_4)(a_3-a_2)}{(a_2-a_1)(a_3-a_4)}.$$

Deci

$$\frac{\mu}{\mu-1}=\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_4)}{(a_1-a_4)(a_3-a_2)}=\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}=\lambda,$$

$$\frac{\mu}{\mu-1}=\lambda,\quad \mu=\frac{\lambda}{\lambda-1},\quad \mu=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

4). Raportul al patrulea este

$$\nu=(A_4A_2A_3A_1)=\frac{(a_4-a_3)(a_2-a_1)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}.$$

Avem

$$\nu-1=\frac{(a_4-a_3)(a_2-a_1)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}-1=\frac{(a_4-a_3)(a_2-a_1)-(a_2-a_3)(a_4-a_1)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)},$$

$$\nu-1=\frac{(a_2-a_4)(a_1-a_3)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}=\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}{-(a_2-a_3)(a_1-a_4)}=-\lambda,$$

deci

$$\nu=1-\lambda.$$

5). Al cincilea raport este

$$(A_2A_3A_1A_4)=\frac{(a_2-a_1)(a_3-a_4)}{(a_3-a_1)(a_2-a_4)}=\frac{1}{\mu}=1-\frac{1}{\lambda}.$$

6). Al şaselea este

$$(A_2A_4A_3A_1)=\frac{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}{(a_4-a_3)(a_2-a_1)}=\frac{1}{\nu}=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Aşa dar, valorile acestor şase rapoarte sunt

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}},\ 1-\lambda,\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda}.$$

Aceste rapoarte se pot grupa două câte două, astfel ca suma lor să fie egală cu 1, şi produsul lor să fie egal cu 1, adică

$$\lambda+(1-\lambda)=1,\ \frac{1}{\lambda}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=1,\ \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}+\frac{1}{1-\lambda}=1;$$

$$\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}=1,\ \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}\left(1-\frac{1}{1-\lambda}\right)=1,\ (1-\lambda)\frac{1}{1-\lambda}=1.$$

53. **Curbe de ordinul al doilea care se reduc la două drepte.** Considerând ecuația $Ax^2+Bx+C=0$, ale cărei rădăcini sunt a și b, se poate scrie

$$A(x-a)\ (x-b)=0,$$

și deci curba considerată de ordinul al doilea, $Ax^2+Bx+C=0$, se reduc la dreptele $x-a=0$, $x-b=0$, paralele cu Oy. In mod analog se vede că $y^2+py+q=0$ reprezintă două drepte paralele cu Ox.

De asemenea, $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ reprezintă două drepte ce trec prin origină.

I. Sunt cazuri când ecuația de gradul al doilea,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

reprezintă două drepte. Fie

$$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0,$$

dreptele la care se reduce. Avem

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F\equiv(ax+by+c)(a'x+b'y+c').$$

Egalând coeficienții diferitelor puteri ale lui x și y, avem identificând

$$A=aa',\ 2B=ab'+a'b,\ C=bb',$$

(10)

$$2D=ac'+a'c,\ 2E=bc'+b'c,\ F=cc'.$$

1°. Să presupunem că dreptele $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ sunt distincte și că $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$. Din $ab'+a'b=2B$, $ac'+a'c=2D$, avem

$$a=\frac{2(Bc-Db)}{cb'-c'b},\ a'=\frac{2(Db'-Bc')}{cb'-c'b},\ (cb'-c'b\neq0),$$

pe care înlocuindu-i în $A=aa'$, găsim

$$A=\frac{4(Bc-Db)(Db'-Bc')}{(cb'-bc)'^2}.$$

De unde

$$A(cb'-bc')^2=4[-B^2cc'+BD(c'b+b'c)-D^2bb'],$$

$$A[(cb'+bc')^2-4bb'cc']=4[-B^2cc'+BD(c'b+b'c)-D^2bb'].$$

Inlocuind pe $cb'+bc'$, bb', cc' cu valorile lor (10), avem

$$A[(2E)^2-4CF]=4[-B^2F+BD(2E)-D^2C],$$

$$2BDE+ACF-AE^2-FB^2-CD^2=0,$$

care este tocmai determinantul

$$(11) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiţia ca ecuaţia

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

să reprezinte două drepte.

Făcând ecuaţia de ordinul al doilea dată omogenă cu variabila z, înlocuind pe x şi y cu $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ecuaţia devine

$$(12) \qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2.$$

Se vede că determinantul (11) este determinantul formelor lineare

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = Ax + By + Dz,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = Bx + Cy + Ez,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = Dx + Ey + Fz,$$

sau, cum se mai zice, *discriminantul* formei cuadratice (12).

Am obţinut relaţia (11) în cazul $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$. Dacă $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, atunci rezolvăm ecuaţiile $ac' + a'c = 2D$, $bc' + cb' = 2E$, în raport cu c şi c', şi operând la fel, se obţine aceeaş condiţie (11)

2°. Dacă dreptele $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ ar fi paralele, dar distincte, adică

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'},$$

rezolvăm ecuaţiile $ab' + a'b = 2B$, $ac' + a'c = 2D$, în raport cu a şi a' şi obţinem condiţia (11). Dar, din $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$, deducem $a' = ka$, $b' = kb$, aşa în cât primele trei ecuaţii (10) devin

$$A = ka^2, \quad B = kab, \quad C = kb^2,$$

de unde rezultă

$$B^2 = AC.$$

Deci, condiţiile ca ecuaţia de gradul al doilea să reprezinte două drepte paralele sunt ca discriminantul, $\Delta = 0$, al formei cuadratice să fie nul, şi $B^2 - AC = 0$, adică minorul corespunzător elementului F din acest discriminant să fie nul.

3°. În fine, când dreptele la care se reduce ecuaţia de gradul al doilea sunt confundate, atunci

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\lambda;$$

deci ecuaţiile (10) devin

$$A=\lambda a^2,\ B=\lambda ab,\ C=\lambda b^2,\ D=\lambda ac,\ E=\lambda bc,\ F=\lambda c^2,$$

de unde urmează

(13) $B^2=AC,\ D^2=AF,\ BD=AE,\ BE=CD,\ E^2=CF,\ ED=BF.$

Dar aceste condiţii se reduc la trei. În adevăr, unul din coeficienţii A,C,F trebue să fie diferit de zero, căci dacă am avea A=C=F=0, din relaţiile precedente ar rezulta B=D=E=0, iar polinomul $f(x,y,z)$ ar fi identic nul. Să presupunem, de ex., $A\neq 0$; din primele trei din relaţiile (13) deducem

$$F=\frac{D^2}{A},\ E=\frac{BD}{A},\ C=\frac{B^2}{A},$$

şi înlocuindu-le în celelalte trei rămase, se vede că ele sunt verificate.

Deci condiţiile ca ecuaţia de gradul al doilea să reprezinte două drepte confundate sunt

$$D^2-AF=0,\ BE-BD=0,\ B^2-AC=0,$$

adică minorii discriminantului Δ, corespunzători elementelor egale cu coeficienţii lui y^2, yz, z^2 din forma cuadratică (12), să fie nuli. Dar, şi în acest caz, $\Delta=0$.

Deci, în toate cazurile, curba de ordinul al doilea

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

se reduce la două drepte, când

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0.$$

Observări. I. Coeficienţii unghiulari ai dreptelor $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ se obţin astfel. Aceşti coeficienţi fiind $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ suma şi produsul lor sunt

$$-\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=-\frac{ab'+a'b}{bb'}=-\frac{2B}{C},\ \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right)=\frac{aa'}{bb'}=\frac{A}{C},$$

astfel că ecuaţia de gradul al doilea ce are ca rădăcini valorile $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$, este

$$m^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)m+\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right)=0,\ m^2+\frac{2B}{C}m+\frac{A}{C}=0,$$

sau

(14) $$Cm^2+Bm+A=0.$$

Se vede, deci, că, dacă ecuaţia

(15) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

reprezintă două drepte, coeficienţii unghiulari ai acestor drepte sunt aceeaşi ca ai dreptelor

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

care sunt paralele cu cele reprezentate de ecuaţia (15).

Dreptele considerate (15) sunt reale sau imaginare, după cum ecuaţia (14) are rădăcini reale sau imaginare, adică, după cum B^2-AC este pozitiv sau negativ. Dreptele sunt paralele, când $B^2-AC=0$.

II. Condiţia ca ecuaţia (15) să reprezinte două drepte se poate obţine şi altfel. Presupunând $C\neq 0$, rezolvând ecuaţia de gradul al doilea în y, (15), avem

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-C(Ax^2+2Dx+F)}}{C},$$

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{x^2(B^2-AC)+2x(BE-CD)+E^2-CF}}{C}.$$

Ca ecuaţia (15) să reprezinte două drepte, trebue ca sub radical să fie un pătrat perfect, adică trinomul

$$x^2(B^2-AC)+2x(BE-CD)+E^2-CF$$

să fie pătrat perfect, să aibă rădăcinile egale, deci

$$(BE-CD)^2=(B^2-AC)(E^2-CF),$$

care este tocmai

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0.$$

Insemnând cu $(\alpha x+\beta)^2$ câtimea de sub radical, ecuaţiile acestor drepte sunt

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\alpha(x+\beta)}{C}.$$

Dacă $C=0$, dar $A\neq 0$, rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea în raport cu x, şi operând la fel, obţinem aceeaş condiţie $\Delta=0$.

Dacă $A=C=0$, trebue ca $B\neq 0$, căci atunci ecuaţia (15) n'ar mai fi de gradul al doilea. In acest caz, avem

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

de unde

$$2y(Bx+E)+2Dx+F=0,$$

aşa că ar trebui ca ecuaţiile $Bx+E=0$, $2Dx+F=0$ să reprezinte aceeaş dreaptă adică

$$\frac{B}{2D}=\frac{E}{F}.$$

Dar şi în acest caz $\Delta=0$, aşa că $\Delta=0$ este condiţia ca ecuaţia (15) să reprezinte două drepte.

Exemplu. Să se determine λ, astfel ca ecuaţia

$$x^2+(a+1)xy+ay^2+(1-a)y+\lambda=0 \tag{16}$$

să se reprezinte două drepte.

Trebue să avem

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}(a+1) & 0 \\ \frac{1}{2}(a+1) & a & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & \frac{1}{2}(1-a) & \lambda \end{vmatrix} = 0,\ a\lambda-\left[\frac{1}{2}(1-a)\right]^2-\lambda\left[\frac{1}{2}(a+1)\right]^2=0,\ \lambda=-1.$$

Pentru a obţine ecuaţiile acestor drepte, rezolvăm ecuaţia (16) în raport cu y şi avem

$$y=\frac{-(a+1)x-1+a\pm\sqrt{[(a+1)x+1-a]^2-4a(x^2-1)}}{2a},$$

$$y=\frac{-(a+1)x-1+a\pm[(a-1)x-(1+a)]}{2a};\ y=-\frac{x+1}{a},\ y=-x+1.$$

Exerciţii.

1) Polarele unui punct relative la cele trei laturi ale unui triunghi, întâlnesc respectiv laturile opuse în trei puncte situate în linie dreaptă.

R. Fie $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ ecuaţiile laturilor triunghiului de referinţă ABC (BC, CA, AB) şi $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ coordonatele baricentrice ale punctului P dat. Ecuaţia dreptei AP este $\beta-\frac{\beta_0}{\gamma_0}\gamma=0$, iar aceea a polarei lui P în raport cu unghiul A este $\beta+\frac{\beta_0}{\gamma_0}\gamma=0$. Polara tae pe BC în punctul A', ale cărui coordonate verifică ecuaţiile $\alpha=0$, $\beta+\frac{\beta_0}{\gamma_0}\gamma=0$. Punctul A' şi analoagele sale, B', C', sunt pe dreapta $\frac{\alpha}{\alpha_0}+\frac{\beta}{\beta_0}+\frac{\gamma}{\gamma_0}=0$.

2). Insemnând cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC, ale cărui vârfuri au coordonatele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, să se arate, cu ajutorul coordonatelor baricentrice, că coordonatele centrului de greutate al triunghiului sunt

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

iar acelea ale centrului cercului înscris

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\ y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

R. Luând triunghiul ABC de referinţă, după definiţie, coordonatele baricentrice ale lui M sunt proporţionale cu ariile AMB, BMC, CMA. Pentru centrul de greutate, coordonatele baricentrice sunt (1,1,1), iar pentru centrul cercului înscris, (a,b,c).

3). Insemnând cu $V=(\Delta_1,\Delta_2)$ unghiul a două drepte Δ_1, Δ_2 şi cu ρ raportul anarmonic al fascicolului format de aceste drepte cu dreptele izotrope ce trec prin intersecţia lor, să se arate, bazându-se pe expresia raportului anarmonic a patru drepte concurente, că avem formula lui Laguerre

$$\rho=e^{2iV}.$$

R. Luând origina în intersecţia dreptelor date şi însemnând cu m_1, m_2, m_3, m_4 coeficienţii unghiulari ai lor, avem

$$\rho = R(\Delta_2, \Delta_1, OI, OJ) = \frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3} : \frac{m_2 - m_4}{m_1 - m_4};\ m_3 = i,\ m_4 = -i,\ \operatorname{tg} V = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

$$\rho = \frac{\cos V + i \sin V}{\cos V - i \sin V} = \cos 2V + i \sin 2V = e^{2iV}.$$

Când $V = 90^0$, dreptele perpendiculare, $\rho = -1$, fascicolul este armonic; deci, două drepte perpendiculare formează un fascicol armonic cu dreptele izotrope duse prin punctul lor de intersecţie.

Cercul.

54. **Ecuaţia cercului.** In cele ce urmează vom presupune că axele de coordonate sunt perpendiculare. Ecuaţia unui cerc cu centrul în punctul (a,b) şi cu raza R este

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

Deci, pentru ca ecuaţia

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

să reprezintă un cerc, trebue ca

$$A = C,\ B = 0.$$

Fiind dat cercul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \tag{2}$$

pentru a-i găsi centrul şi raza, vom compara ecuaţia sa cu ecuaţia (1), de unde urmează

$$c = a^2 + b^2 - R^2,\ R^2 = a^2 + b^2 - c,$$

şi deci, coordonatele (a,b) ale centrului sunt jumătăţile coeficienţilor lui x şi y cu semne schimbate din ecuaţia (2), iar raza este dată de relaţia

$$R^2 = a^2 + b^2 - c,$$

c fiind termenul liber din ecuaţia (2) a cercului considerat.

Cercul este real sau imaginar, după cum expresia $a^2 + b^2 - c$ este pozitivă sau negativă.

Exemple. 1°. $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$. Ecuaţia se poate scrie

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0.$$

Coordonatele centrului sunt $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, iar raza e dată de

$$R^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\quad R=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

2°. $x^2+y^2-2x=0$; este un cerc tangent axei Oy în origină.

3°. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$; este un cerc tangent la axele de coordonate.

55. **Determinarea unui cerc în plan.** Ecuația generală a unui cerc fiind

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \tag{3}$$

conține trei parametrii, a,b,c, deci trebue trei condiții spre a determina cercul, adică să treacă prin trei puncte. Coordonatele acelor puncte fiind $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, urmează

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1+c=0,$$

$$x_2^2+y_2^2-2ax_2-2by_2+c=0,$$

$$x_3^2+y_3^2-2ax_3-2by_3+c=0.$$

Eliminând pe a,b,c între aceste trei ecuații și (3), obținem

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

care este ecuația cercului cerut.

56. **Reprezentarea parametrică a cercului.** Însemnând cu α unghiul lui Ox cu raza CM a cercului cu centrul în $C(a,b)$ și raza R (Fig. 68), coordonatele unui punct $M(x,y)$ al cercului sunt

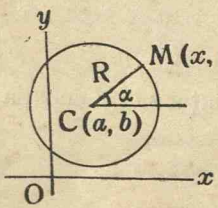


Fig. 68.

$$x=a+R\cos\alpha,\quad y=b+R\sin\alpha. \tag{4}$$

Punând $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, avem

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},$$

așa că reprezentarea parametrică a cercului este

$$x=a+R\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b+R\frac{2t}{1+t^2}.$$

Se ia, uneori, ca reprezentare parametrică a cercului și expresiunile (4).

57. **Aplicații.** I. *Să se afle ecuația cercurilor ce trec prin origina axelor de coordonate și punctul* (1,0). Ecuația cercurilor ce trec prin origină este

$$x^2+y^2-2\lambda x-2\mu y=0,$$

λ și μ fiind necunoscute. Scriind că trece prin punctul (1,0), avem

$$1^2+0-2\lambda.1-2\mu.0=0,\quad 1-2\lambda=0,\quad 2\lambda=1,$$

iar ecuația cercurilor este

$$x^2+y^2-x-2\mu y=0,$$

μ fiind un parametru variabil.

II. *Dacă α și β sunt coordonatele unui punct* P *din plan, să se găsească curba pe care trebue să se afle punctul* P, *astfel ca dreptele* $2x-\alpha y=\beta$, $\beta x-3y=\alpha$

să se tae pe bisectoarea întâi a axelor de coordonate. Va trebui să scriem că dreptele

$$2x-\alpha y-\beta=0,$$
$$\beta x-3y-\alpha=0,$$
$$x-y=0$$

sunt concurente. Deci

$$\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & -\beta \\ \beta & -3 & -\alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

de unde $\alpha^2+\beta^2-2\alpha-3\beta=0$. Punctul $P(\alpha,\beta)$ trebue să descrie cercul

$$x^2+y^2-2x-3y=0,$$

ce trece prin origină, cu centrul în $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ şi cu raza dată de $R^2=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$.

III. *A şi B fiind două puncte fixe, să se găsească locul geometric al punctelor* M, *astfel ca unghiul* AMB *să fie constant.* Luăm ca axă Ox dreapta AB, ca axă Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Să notăm cu $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $M(x,y)$ coordonatele punctelor A,B,M. Unghiul AMB fiind constant, să însemnăm cu $k=\text{tg}AMB$, m şi m' coeficienţii unghiulari ai dreptelor MA şi MB. Avem

$$m=\frac{y}{x-a},\quad m'=\frac{y}{x+a},\quad k=\text{tg}AMB=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

Inlocuind în ultima relaţie valorile lui m şi m', avem

$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}}=k,\quad x^2+y^2-\frac{2a}{k}y-a^2=0,$$

relaţie care probează că punctul $M(x,y)$ descrie cercul cu centrul $\left(0,\frac{a}{k}\right)$ pe Oy, trecând prin punctele $A(a,0)$, $B(-a,0)$ şi anume, arcul AB deasupra sau dedesubtul coardei AB, după semnul lui k.

IV. *Să se afle ecuaţia cercului circumscris triunghiului ale cărui laturi sunt reprezentate de ecuaţiile* $y=3$, $x+y+1=0$, $x-y-1=0$. In general, fie $D_1=0$, $D_2=0$, $D_3=0$ ecuaţiile a trei drepte. Ecuaţia

$$D_1D_2+\lambda D_2D_3+\mu D_3D_1=0,$$

unde λ şi μ sunt doi parametrii variabili, reprezintă o curbă de ordinul al doilea ce trece prin punctele comune dreptelor D_1 şi D_2, D_2 şi D_3, D_3 şi D_1, adică prin vârfurile triunghiului format de aceste trei drepte.

In cazul nostru, o curbă de ordinul al doilea circumscrisă triunghiului format de dreptele date este

$$(y-3)(x+y+1)+\lambda(x+y+1)(x-y-1)+\mu(x-y-1)(y-3)=0.$$

Desvoltând, avem

$$\lambda x^2+(1+\mu)xy+(1-\lambda-\mu)y^2-3(1+\mu)x+2(-1-\lambda+\mu)y-3-\lambda+3\mu=0.$$

Ca să fie cerc, trebue se avem

$$\lambda=1-\lambda-\mu,\quad 1+\mu=0;\quad \mu=-1,\quad \lambda=1,$$

iar ecuația cercului este

$$x^2+y^2-6y-7=0.$$

58 **Intersecția unei drepte cu un cerc. Puterea unui punct față de un cerc.** Fie

$$f(x\,y)\equiv x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

ecuația unui cerc și o dreaptă definită prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ și unghiul θ al ei cu Ox. Pentru a găsi punctele unde această dreaptă tae cercul, să notăm cu (x, y) coordonatele unui punct M al dreptei date. Însemnând cu $M_0M=r$, coordonatele lui M sunt

$$x=x_0+r\cos\theta,\quad y=y_0+r\sin\theta.$$

Acest punct este pe cerc, când coordonatele sale verifică ecuația cercului, adică

$$(x_0+r\cos\theta)^2+(y_0+r\sin\theta)^2-2a(x_0+r\cos\theta)-2b(y_0+r\sin\theta)+c=0.$$

De unde

$$(5)\quad r^2+2r[x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-a\cos\theta-b\sin\theta]+x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0.$$

Această ecuație fiind de gradul al doilea în r, are două rădăcini, r', r'', astfel că, în general, sunt două puncte, M', M'', comune cercului și dreptei date, ale căror coordonate sunt

$$M'(x_0+r'\cos\theta, y_0+r'\sin\theta),\quad M''(x_0+r''\cos\theta, y_0+r''\sin\theta).$$

Produsul rădăcinilor r', r'' ale ecuației (5) este $x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c$, de unde

$$M_0M'\cdot M_0M''=x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=f(x_0, y_0).$$

Aceasta relație probează că orice secantă vom duce prin $M_0(x_0, y_0)$, produsul distanțelor de la punctul M_0 la cele două puncte de intersecție ale secantei cu cercul este constant. Acest produs se numește *puterea punctului* M_0 în raport cu cercul dat, și se obține înlocuind în ecuația cercului coordonatelor curente x și y prin coordonatele punctului M_0.

Presupunând secanta dusă prin M_0 devine tangenta M_0T la cerc, punctele M' și M'' se confundă cu T și deci puterea punctului M_0 în raport cu cercul este egală cu $\overline{M_0T}^2$ adică egală cu pătratul tangentei dusă din punctul dat M_0 la cerc.

59. **Ecuația tangentei într'un punct al unui cerc.** Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct al cercului

$$f(x, y)\equiv x^2+y^2-2ax-2by+c=0;$$

pri urmare

$$(6)\quad f(x_0, y_0)\equiv x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0.$$

Să găsim ecuația tangentei în punctul M_0 la cerc. Însemnând cu $m=\operatorname{tg}\alpha$ coeficientul unghiular al tangentei căutate, ecuația sa va fi

(7) $$y-y_0=m(x-x_0).$$

Pentru a determina pe m, vom scrie că această dreaptă tae cercul în două puncte confundate în M_0. Aceasta o putem face în modul următor. Să însemnăm cu

$$x=x_0+r\cos\alpha,\quad y=y_0+r\sin\alpha,\quad r=M_0M,$$

coordonatele unui punct M de intersecție al acestei drepte cu cercul. Coordonatele sale verifică ecuația cercului și deci avem

$$(x_0+r\cos\alpha)^2+(y_0+r\sin\alpha)^2-2a(x_0+r\cos\alpha)-2b(y_0+r\sin\alpha)+c=0,$$

de unde obținem ecuația

(8) $$r^2+2r(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-a\cos\alpha-b\sin\alpha)+x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0,$$

care dă valorile lui r corespunzătoare punctelor de intersecție.

Ținând seamă de relația (6), care exprimă că punctul $M_0(x_0,y_0)$ este pe cerc, ecuația (8) devine

$$r^2+2r[(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\sin\alpha]=0,\quad r\{r+2[(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\sin\alpha]\}.$$

Așa dar, o valoare a lui r este egală cu zero, ceea ce trebuia, căci unul din punctele de intersecție se confundă cu M_0.

Pentru ca dreapta considerată să fie tangenta în M_0, trebue ca și cel de al doilea punct de intersecție să se confunde în M_0, adică și cealaltă valoare a lui r să fie zero. Aceasta are loc când

$$(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\sin\alpha=0.$$

De unde

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{x_0-a}{y_0-b}.$$

Coeficientul unghiular al tangentei în M_0 fiind determinat, ecuația tangentei la cerc în acest punct $M_0(x_0,y_0)$ este

(9) $$y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0),$$

împreună cu relația (6),

$$f(x_0,y_0)=x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0,$$

care exprimă că acest punct M_0 este pe cerc.

Făcând calculele în (9) avem

(10) $$x_0x+y_0y-ax-by-x_0^2-y_0^2+ax_0+by_0=0.$$

Din relaţia (6), deducem

$$x_0^2+y_0^2-ax_0-by_0=ax_0+by_0-c,$$

aşa că ecuaţia (10) devine

$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0. \tag{11}$$

Aceasta este ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ la cercul

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

care se mai poate scrie

$$xx+yy-a(x+x)-b(y+y)+c=0,$$

de unde rezultă o regulă pentru obţinerea imediată a tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ la cercul considerat.

Ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ la cercul dat este, sau ecuaţia (9), sau ecuaţia (11), în ambele cazuri trebuind a considera şi relaţia (6).

Exemplu. Ecuaţia tangentei în punctul (1,1) al cercului

$$x^2+y^2-2x+y-1=0$$

este

$$y-1=-\frac{1-1}{1+\frac{1}{2}}(x-1),$$

sau

$$y-1=0.$$

Intrebuinţând formula (11), ecuaţia tangentei se poate scrie

$$x.1+y.1-(1+x)+\frac{1}{2}(1+y)-1=0\ ;\ y-1=0.$$

60. **Intersecţia a două cercuri.** Fie O şi O′ două cercuri cu centrele în punctele O şi O′ şi cu razele R şi R′. Să însemnăm cu $d=OO'$ distanţa centrelor. Să luăm ca axă Ox linia centrelor OO′, iar ca axă Oy perpendiculara în O pe OO′.

Ecuaţiile celor două cercuri sunt

$$x^2+y^2-R^2=0,\ (x-d)^2+y^2-R'^2=0. \tag{12}$$

Pentru a găsi punctele lor de intersecţie, va trebui să cunoaştem coordonatele acestor puncte. Să rezolvăm deci ecuaţiile acestor cercuri în raport cu x şi y. Ecuaţia a doua poate fi înlocuită prin aceea ce se obţine scăzând ecuaţiile (12), adică

$$2dx-d^2-R^2+R'^2=0, \tag{13}$$

de unde

$$x=\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}.$$

Ecuaţia (13) reprezintă o dreaptă D paralelă cu axa Oy.

Problema revine deci la găsirea punctelor de intersecţie ale cercului O cu dreapta D. Înlocuind pe x cu valoarea sa în ecuaţia cercului O, valorile lui y, corespunzătoare punctelor de intersecţie, sunt date de

$$y^2=R^2-\left(\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}\right)^2.$$

Pentru ca dreapta să tae cercul O, trebue ca valorile lui y să fie reale, adică

$$R^2-\left(\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}\right)^2>0,\quad \left(R-\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}\right)\left(R+\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d}\right)>0,$$

$$\frac{(d^2+2Rd+R^2-R'^2)[R'^2-(d^2-2Rd+R^2)]}{4d^2}>0,$$

$$[(d^2+2Rd+R^2)-R'^2][d^2-2Rd+R^2-R'^2]<0,$$

$$[(d+R)^2-R'^2][(d-R)^2-R'^2]<0,$$

$$(d+R+R')(d+R-R')(d-R+R')(d-R-R')<0.$$

Presupunând $R>R'$, ceea ce totdeauna se poate face, alegând origina O în centrul cercului de rază ceea mai mare, factorii $(d+R+R')$ şi $(d+R-R')$ sunt pozitivi, şi deci trebue să avem

$$(d-R+R')(d-R-R')<0,$$

adică d să fie cuprins între $R-R'$, $R+R'$,

$$R-R'<d<R+R'.$$

Aşa dar, cercurile O şi O' se vor tăia în două puncte reale, când dreapta D va tăia cercul O, adică

$$d>R-R',\ d<R+R',$$

ceea ce însemnează că distanţa centrelor să fie mai mică de cât suma razelor şi mai mare ca diferenţa lor.

Observare. Făcând ecuaţiile cercurilor date omogene, cu ajutorul lui z, ecuaţiile devin

$$x^2+y^2-2axz-2byz+cz^2=0,\ x^2+y^2-2a'xz-2b'yz+c'z^2=0.$$

Tăindu-le cu dreapta de la infinit, $z=0$, se vede că ambele cercuri au comune punctele $x^2+y^2=0$, $z=0$, adică $(y+ix)(y-ix)=0$, $z=0$,

$$y-ix=0,\ z=0,\ y+ix=0,\ z=0\ ;\ \frac{x}{1}=\frac{y}{i}=\frac{z}{0},\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-i}=\frac{z}{0},$$

care sunt punctele circulare I(1, i, 0), J(1, $-i$, 0).

Deci, două cercuri se tae în patru puncte, două la distanţă finită (reale sau imaginare) şi două la infinit, imaginar conjugate (punctele ciclice care sunt comune tuturor cercurilor).

61. **Polara unui punct faţă de un cerc.** Fiind date cercul

$$f(x, y)\equiv x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

și punctul $M_0(x_0, y_0)$ (Fig. 69), se știe că polara lui M_0 în raport cu cercul este locul punctelor conjugate armonic a punctului M_0 în raport cu punctele de intersecție ale cercului cu secantele duse prin M_0. Insemnând cu M', M'' intersecțiile cercului cu o secantă oarecare, fie $M_1(x_1, y_1)$ conjugatul armonic al lui M_0 în raport cu M' și M''. Coordonatele unui punct de pe dreapta M_1M_0 fiind

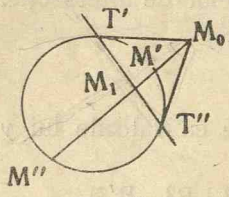


Fig. 69.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_0}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_0}{1+\lambda},$$

pentru că acest punct să fie unul din punctele M' sau M'', trebue ca ecuația cercului să fie verificată de coordonatele acestui punct, adică

$$f\left(\frac{x_1+\lambda x_0}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_0}{1+\lambda}\right)=0,$$

pe care desvoltând-o, obținem

$$\lambda^2(x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c)+2\lambda[x_1x_0+y_1y_0-a(x_1+x_0)-b(y_1+y_0)+c]+x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1+c=0. \tag{14}$$

Această ecuație fiind de gradul al doilea în λ, sunt două puncte M', M'' pe dreapta M_1M_0 comune cu cercul, și însemnând cu λ', λ'' rădăcinile acestei ecuații, coordonatele acestor puncte sunt

$$M'\left(\frac{x_1+\lambda' x_0}{1+\lambda'},\ \frac{y_1+\lambda' y_0}{1+\lambda'}\right),\quad M''\left(\frac{x_1+\lambda'' x_0}{1+\lambda''},\ \frac{y_1+\lambda'' y_0}{1+\lambda''}\right).$$

Insă, punctele M_1 și M_0 fiind conjugate armonic în raport cu M' și N', atunci și punctele M', M'' sunt conjugate armonic în raport cu M_1 și M_0, deci

$$\lambda'+\lambda''=0.$$

Prin urmare coeficientul lui λ din ecuația (14) trebue să fie zero, adică

$$x_1x_0+y_1y_0-a(x_1+x_0)-b(y_1+y_0)+c=0. \tag{15}$$

Aceasta este condiția care exprimă că punctul M_1 și M_0 sunt conjugate armonic în raport cu punctele de intersecție ale cercului cu secanta M_0M_1. Când secanta M_1M_0 se învârtește în jurul lui M_0, punctul M_1 descrie polara lui M_0 în raport cu cercul.

Coordonatele (x_1, y_1) ale unui punct oarecare M_1 al acestei polare verificând relația (15), rezultă că ecuația polarei punctului $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu cercul

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

este dreapta

$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0.$$

Se vede că polara este perpendiculară pe diametrul cercului ce trece prin M_0.

Observări. I. Ecuaţia polarei unui punct $M_0(x_0, y_0)$ este tocmai ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0)$, când punctul M_0 este pe cerc. Deci, polara unui punct de pe cerc, este tangenta în acel punct la cerc.

II. Printre secantele duse prin M_0 sunt şi cele două tangente M_0T', M_0T'' duse din M_0 la cerc (Fig. 69). Considerând tangenta M_0T', se vede că punctele M' şi M'' de intersecţie ale cercului cu secanta se confundă cu T', astfel că polara trece prin T', deci şi conjugatul armonic M_1 al lui M_0 în raport cu M' şi M'' se confundă cu T', astfel că polara trece prin T'. Deci, polara unui punct M_0, exterior unui cerc, în raport cu cercul este dreapta care uneşte punctele de contact ale cercului cu tangentele duse la cerc din M_0.

III. Fiind date cercul

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

şi dreapta $Ax+By+C=0$, să ne propunem a găsi punctul $M_0(x_0, y_0)$ a cărui polară în raport cu cercul este dreapta dată. Polara lui $M_0(x_0, y_0)$ fiind

$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0,$$

pentru ca această ecuaţie să reprezinte aceeaş dreaptă ca şi ecuaţia $Ax+By+C=0$, trebue să avem

$$\frac{x_0-a}{A}=\frac{y_0-b}{B}=\frac{-ax_0-by_0+c}{C}.$$

Rezolvând aceste două ecuaţii în raport cu x_0, y_0, găsim coordonatele punctului M_0, care se zice *polul* dreptei date în raport cu cercul.

62. **Tangente paralele cu o direcţie dată.** Am văzut că coeficientul unghiular al tangentei în punctul (x_0, y_0) al cercului

este $$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

(16) $$m=-\frac{x_0-a}{y_0-b},$$ (17) $$x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0.$$

Presupunând că m este coeficientul unghiular al direcţii date, cele două tangente paralele cu direcţia m sunt cunoscute dacă se ştiu coordonatele (x_0, y_0) ale punctelor de contact, care sunt date de ecuaţiile (16) şi (17).

In cazul particular, când cercul are ecuaţia

$$x^2+y^2=R^2,$$

fie $y=mx+n$ o dreaptă paralelă cu direcţia m. Pentru a determina valorile lui n corespunzătoare celor două tangente paralele cu direcţia m, va trebui să scriem că punctele de intersecţie ale dreptei $y=mx+n$ cu cercul sunt confundate. Inlocuind în ecuaţia cercului pe y cu $mx+n$, abscisele punctelor de intersecţie sunt date de ecuaţia

$$x^2+(mx+n)^2=R^2,$$

sau

$$x^2(1+m^2)+2mnx+n^2-R^2=0.$$

Scriind că această ecuaţie are o rădăcină dublă, avem

$$(mn)^2-(1+m^2)(n^2-R^2)=0,\quad n^2=R^2(1+m^2),\quad n=\pm R\sqrt{1+m^2}.$$

Ecuaţiile celor două tangente paralele cu direcţia m la cercul $x^2+y^2-R^2=0$ sunt

$$y=mx\pm R\sqrt{1+m^2}.$$

63. **Tangente duse dintr'un punct la un cerc.** Tangentele vor fi cunoscute, sau dacă se cunosc coordonatele punctelor de contact cu cercul, sau dacă se ştiu coeficienţii lor unghiulari.

I. *Determinarea punctelor de contact.* Punctele de contact ale tangentelor duse din punctul $P(x_1, y_1)$ la cercul (Fig. 70)

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \tag{18}$$

sunt la intersecţia cercului cu polara

$$x_1x+y_1y-a(x_1+x)-b(y_1+y)+c=0 \tag{19}$$

a punctului P în raport cu cercul.

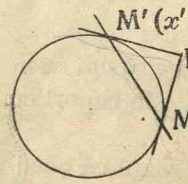


Fig. 70.

Rezolvând ecuaţiile (18) şi (19) în raport cu x şi y, vom găsi două sisteme de valori (x', y'), (x'', y'') corespunzătoare celor două puncte de contact $M'(x', y')$ şi $M''(x'', y'')$. Odată cunoscute aceste puncte, ecuaţiile tangentelor duse din $P(x_1, y_1)$ sunt

$$xx'+yy'-a(x+x')-b(y+y')+c=0,$$

$$xx''+yy''-a(x+x'')-b(y+y'')+c=0.$$

II. *Determinarea coeficienţilor unghiulari ai tangentelor.* 1°. Să considerăm mai întâi cazul când cercul are ecuaţia $x^2+y^2=R^2$. Am văzut că ecuaţia unei tangente la acest cerc paralelă cu direcţia m este

$$y=mx\pm R\sqrt{1+m^2}.$$

Pentru ca această dreaptă să fie tocmai tangenta dusă din $P(x_1, y_1)$ la cerc, trebue să treacă prin $P(x_1, y_1)$ adică

$$y_1 = mx_1 \pm R\sqrt{1+m^2}.$$

De unde

$$(y_1 - mx_1)^2 = R^2(1+m^2),$$

$$m^2(x_1^2 - R^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 - R^2 = 0, \tag{20}$$

care este ecuația care dă cele două valori m' și m'' ale coeficienților unghiulari ai tangentelor duse din $P(x_1, y_1)$.

Vom putea duce, două tangente, una, sau nici una, după cum rădăcinile ecuații (20) sunt reale și neegale, egale, sau imaginare. Realizantul ecuații fiind

$$(x_1y_1)^2 - (x_1^2 - R^2)(y_1^2 - R^2) = R^2(x_1^2 + y_1^2 - R^2),$$

se pot duce două tangente din $P(x_1, y_1)$, când $x_1^2 + y_1^2 - R^2 > 0$, două tangente confundate, când $x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0$ și nici una, când $x_1^2 + y_1^2 - R^2 < 0$.

Primul membru al acestor neegalități este primul membru al ecuații cercului dat, unde s'a înlocuit (x,y) cu coordonatele (x_1,y_1) ale punctului $P(x_1,y_1)$.

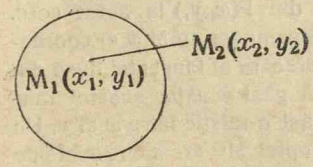


Fig. 71.

Pentru a rezolva aceste neegalități, să considerăm, în general, curba închisă $f(x,y)=0$ (Fig. 71) și fie $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ două puncte din planul acestei curbe. Curba $f(x,y)=0$ împarte planul în două regiuni, una interioară și alta exterioară curbei. Un punct $M(x,y)$ al dreptei M_1M_2 are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Valorile lui λ, corespunzătoare punctelor de intersecție ale curbei cu dreapta M_1M_2, sunt date de ecuația

$$F(\lambda) \equiv f\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right) = 0.$$

Să substituim în $F(\lambda)$ pe 0 și ∞; avem

$$F(0) = f(x_1,y_1), \quad F(\infty) = f(x_2,y_2).$$

Dacă $f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$ au semne contrarii, între 0 și ∞ sunt un număr fără soț de rădăcini reale pentru λ; ecuația $F(\lambda)=0$ are cel puțin o rădăcină reală între 0 și ∞ și deci pe segmentul M_1M_2, între M_1 și M_2, este un punct de intersecție cu curba, sau un număr fără soț de puncte de intersecție.

Dacă $f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$ au același semn, este un număr cu soț sau nici o rădăcină reală între 0 și ∞. Deci, pe segmentul M_1M_2, între M_1 și M_2, sunt un număr cu soț de puncte sau nici unul reale comune curbei $f(x,y)=0$.

De aci urmează că, dacă M_1 și M_2 sunt două puncte pe care unindu-le traversăm curba $f(x,y)=0$, adică unul interior și altul exterior curbei, atunci $f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$ au semne contrarii. Dacă unind M_1 și M_2, nu traversăm curba, adică ambele sunt interioare, sau ambele exterioare curbei $f(x,y)=0$, atunci $f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$ au același semn.

Așa dar, curba $f(x,y)=0$ împarte planul în două regiuni; pentru punctele regiunei interioare, primul membru $f(x,y)$ are un semn, iar pentru punc-

tele exterioare, semn contrar. Pentru a determina aceste semne, se vede în ce regiune este origina si ce semn are rezultatul înlocuirii

Pentru cercul $x^2+y^2-R^2=0$, în regiunea interioară, unde este origina, expresiunea $x^2+y^2-R^2$ are acelaş semn, ca pentru origină ($x=0$, $y=0$), adică $-R^2<0$; pe curbă, avem $x^2+y^2-R^2=0$, iar în regiunea exterioară cercului, avem $x^2+y^2-R^2>0$.

Revenind la discuţia rădăcinilor ecuaţii (20), ce dă coeficienţii unghiulari, rezultă că putem duce două tangente, sau nici una reală din $P(x_1,y_1)$, după cum $x_1^2+y_1^2-R^2>0$, sau $x_1^2+y_1^2-R^2<0$, adică după cum punctul $P(x_1,y_1)$ este exterior sau interior cercului, rezultate care concordă cu cele obţinute pe cale geometrică.

Insemnând cu m' şi m'' coeficienţii unghiulari corespunzători celor două tangente duse din $P(x_1,y_1)$, ecuaţiile acestor tangente sunt

$$y-y_1=m'(x-x_1),\quad y-y_1=m''(x-x_1).$$

2°. *Să considerăm acum cazul general când ecuaţia cercului este*

$$f(x,y)\equiv x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

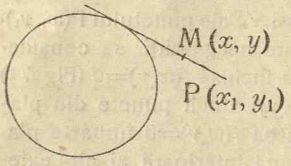


Fig. 72.

şi să ne propunem a găsi ecuaţia comună a celor două tangente duse din $P(x_1,y_1)$ la acest cerc. Pentru aceasta, să însemnăm cu $M(x,y)$ coordonatele unui punct oarecare al tangentei dusă din P la cerc (Fig. 72). A găsi ecuaţia acestor tangente, înseamnă a găsi o relaţie între x şi y. Un punct oarecare al dreptei MP are coordonate de forma

$$\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}.$$

Dreapta MP este tangentă la cerc, când punctele de intersecţie ale cercului şi dreptei sunt confundate. Aceste puncte sunt date de ecuaţia

$$f\left(\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}\right)=0,$$

sau

$$\lambda^2 f(x,y)+2\lambda[x_1x+y_1y-a(x_1+x)-b(y_1+y)+c]+f(x_1,y_1)=0.$$

Scriind că are o rădăcină dublă, avem

$$[x_1x+y_1y-a(x_1+x)-b(y_1+y)+c]^2=f(x,y)\,f(x_1,y_1),$$

care este ecuaţia comună a celor două tangente duse din $P(x_1,y_1)$ la cerc.

Aplicaţie. Locul punctelor de unde se poate duce tangente perpendiculare la cercul $x^2+y^2-R^2=0$. Fie (x_1,y_1) un punct al locului geometric. Scriind că între coeficienţii unghiulari m' şi m'' ai celor două tangente duse din $P(x_1,y_1)$, daţi de ecuaţia (20), avem relaţia $m'm''+1=0$, obţinem

$$\frac{y_1^2-R^2}{x_1^2-R^2}+1=0,\quad x_1^2+y_1^2-2R^2=0,$$

ceea ce probează că aceste puncte $P(x_1,y_1)$ sunt pe cercul $x^2+y^2-2R^2=0$.

64. **Axul radical a două cercuri** este locul punctelor ce au puteri egale în raport cu două cercuri. Ecuaţiile cercurilor fiind

$$(C_1)\equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,\ (C_2)\equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0,$$

fie $M(x, y)$ un punct al locului geometric căutat. Avem

$$(21) \qquad x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2,$$

şi deci ecuaţia axului radical este

$$2x(a_1-a_2)+2y(b_1-b_2)+c_2-c_1=0,$$

ceea ce însemnează că este o linie perpendiculară pe linia centrelor.

Din relaţia (21) se vede că axul radical a două cercuri (C_1) şi (C_2) se obţine scăzând ecuaţiile lor, $(C_1)-(C_2)=0$.

65. **Centru radical a trei cercuri** este punctul care are puteri egale în raport cu cele trei cercuri date. Ecuaţiile celor trei cercuri fiind

$$(C_i)\equiv x^2+y^2-2a_ix-2b_iy+c_i=0,\ i=1,\ 2,\ 3,$$

centrul radical e dat de ecuaţiile $(C_1)=(C_2)=(C_3)$. Axele radicale a trei cercuri, luate două câte două, se tae în centrul radical ω al celor trei cercuri (Fig. 73).

66. **Condiţia ca două cercuri să fie ortogonale.** Două cercuri (C_1) şi (C_2) sunt ortogonale când se tae subt un unghi drept, adică tangentele în unul din punctele lor de intersecţie sunt perpendiculare. Fie $M(x, y)$ un punct de intersecţie al cercurilor (Fig. 74)

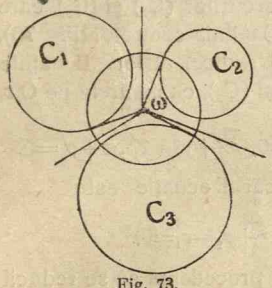


Fig. 73.

$$(22) \qquad \begin{aligned}(C_1)&\equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,\\ (C_2)&\equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0.\end{aligned}$$

Coeficienţii unghiulari ai tangentelor în $M(x,y)$ fiind

$$-\frac{x-a_1}{y-b_1},\quad -\frac{x-a_2}{y-b_2},$$

ca să fie ortogonale trebue

$$\left(-\frac{x-a_1}{y-b_1}\right)\left(-\frac{x-a_2}{y-b_2}\right)+1=0.$$

De unde

$$x^2+y^2-x(a_1+a_2)-y(b_1+b_2)+a_1a_2+b_1b_2=0.$$

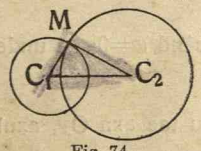


Fig. 74.

Inmulţind această ecuaţie cu 2 şi scăzând din suma ecuaţiilor (22), obţinem

$$(23) \qquad 2(a_1a_2+b_1b_2)-(c_1+c_2)=0,$$

care este condiţia ca cercurile (22) să fie ortogonale.

Dacă ecuaţiile cercurilor sunt scrise sub forma

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2,\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R_2^2,$$

condiţia (23) devine

$$2(a_1a_2+b_1b_2)-(a_1^2+b_1^2-R_1^2)-(a_2^2+b_2^2-R_2^2)=0,$$

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=R_1^2+R_2^2,$$

care exprimă că distanţa centrelor (Fig. 74) este ipotenuza triunghiului dreptunghic format de centrele cercurilor şi unul din punctele de intersecţie.

67. Fascicol linear de cercuri. Fiind date două cercuri

$$(C_1)\equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,\quad (C_2)\equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0,$$

ecuaţia

$$(C_1)+\lambda(C_2)=0 \tag{24}$$

reprezintă un fascicol linear de cercuri. Toate aceste cercuri trec prin punctele comune cercurilor $(C_1)=0$, $(C_2)=0$.

Dând lui λ valoarea -1, obţinem

$$(C_1)-(C_2)=0,\quad 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+c_2-c_1=0,$$

care este coarda comună a celor două cercuri. Dar, $(C_1)-(C_2)=0$ este axul radical al cercurilor $(C_1)=0$ şi $(C_2)=0$, aşa că axul radical a două cercuri este coarda comună a celor două cercuri. Mai rezultă că toate cercurile fascicolului (23) au acelaş ax radical, anume axul radical al cercurilor $(C_1)=0$ şi $(C_2)=0$.

Centrul unuia din cercurile $(C_1)+\lambda(C_2)=0$ având coordonatele

$$x=\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{b_1+\lambda b_2}{1+\lambda},$$

se vede că acest punct este pe linia centrelor a cercurilor (C_1) şi (C_2), care este perpendiculară pe axul radical. Să luăm ca axă Ox linia centrelor (Fig. 75), iar ca axă Oy, axul radical al lor. Ecuaţiile a două cercuri (C_1) şi (C_2), cu centrele pe Ox, sunt

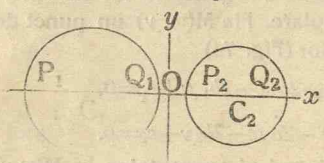


Fig. 75.

$$x^2+y^2-2a_1x+c_1=0,\quad x^2+y^2-2a_2x+c_2=0.$$

Axul lor radical, a cărui ecuaţie este

$$(C_1)-(C_2)=0,$$

$$2(a_1-a_2)x+c_2-c_1=0,$$

trebuind a fi axa Oy, adică $x=0$, trebue ca ecuaţia precedentă să se reducă la $x=0$, deci $c_2-c_1=0$, $c_1=c_2$. Ecuaţiile cercurilor (C_1) şi (C_2), raportate la linia centrelor şi axul lor radical, sunt deci

$$x^2+y^2-2a_1x+c=0,\quad x^2+y^2-2a_2x+c=0,$$

iar aceea a fascicolului linear de cercuri este

$$x^2+y^2-2a_1x+c+\lambda(x^2+y^2-2a_2x+c)=0.$$

Intersecţia acestor cercuri cu axa Oy se obţine făcând $x=0$; de unde

$$y^2+c=0.$$

Distingem două cazuri. 1° Dacă $c>0$, cercurile nu tae axa Oy, axul radical. Punctele de intersecţie cu Ox sunt date de

$$x^2-2a_1x+c+\lambda(x^2-2a_2x+c)=0,$$

sau

$$x^2-2\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}x+c=0,$$

şi sunt astfel că produsul rădăcinilor $x'x''=c>0$. Insemnând cu P_1, Q_1, punctele unde unul din cercurile fascicolului tae axa Ox (Fig. 75), avem $OP_1=x'$, $OQ_1=x''$, $OP_1\cdot OQ_1=c=\text{const.}$ Punctul O este exterior tuturor cercurilor fascicolului, iar punctele de intersecţie (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), ..., ale acestor cercuri cu axa Ox, verifică relaţia

$$OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2 = \cdots = C,$$

când se zice că perechile de puncte $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), \cdots$, formează pe dreapta Ox o *involuție* (Ox este linia centrelor cercurilor fascicolului).

2°. Când $c<0$, cercurile fascicolului tae axul radical în P și Q (Fig 76), punctele de intersecție cu Ox sunt date de

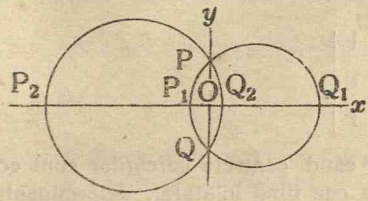


Fig. 76.

$$x^2 - 2\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}x + c = 0,$$

puterea originii în raport cu aceste cercuri este $c<0$, adică O este interior tuturor cercurilor fascicolului; punctele (P_i, Q_i) de intersecție ale acestor cercuri cu Ox (linia centrelor), verifică relația

$$OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2 = \cdots = \overline{OP}^2 = \text{const.},$$

P fiind unul din punctele de intersecție cu axa Oy și se vede că, și în acest caz, cercurile fascicolului determină pe axa Ox (linia centrelor) o *involuție*.

68. **Cercuri ortogonale la două cercuri date.** Luând axul radical ca Oy, cercurile date au ecuațiile

$$x^2+y^2-2a_1x+c=0, \quad x^2+y^2-2a_2x+c=0.$$

Un cerc

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

este ortogonal cercurilor date, când (No. 66)

$$2a_1\alpha = c+\gamma, \quad 2a_2\alpha = c+\gamma.$$

Scăzând, rezultă $2(a_1-a_2)\alpha=0$, de unde $\alpha=0$, $\gamma=-c$. Ecuația acestor cercuri este

(25) $$x^2+y^2-2\beta y-c=0,$$

ceeace arată că centrele acestor cercuri se află pe Oy, adică axul radical al celor două cercuri date (Fig. 77).

Ecuația (25) a cercurilor ortogonale la două cercuri date (C_1) și (C_2) conținând parametrul variabil β la gradul întâi, urmează că aceste cercuri formează un fascicol linear, având axul radical axul Ox, adică linia centrelor cercurilor date (toate tae axa Ox în punctele U și V).

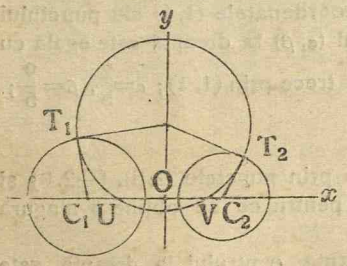


Fig. 77.

Fascicolul (25) are toate cercurile sale ortogonale cercurilor fascicolului

(26) $$x^2+y^2-2\frac{a_i+\lambda a_2}{1+\lambda}x+c=0,$$

format cu cercurile date (C_1) și (C_2). Fascicolile (25) și (26) sunt ortoganale. Fascicolul (25) determină pe Oy o involuție, după cum fascicolul (26) determină pe axa Ox o involuție.

69. **Cerc ortogonal la trei cercuri date.** Să luăm centrul radical al celor trei cercuri ca origină a axelor de coordonate perpendiculare. Ecuațiile cercurilor sunt

$$x^2+y^2-2a_ix-2b_iy+k=0, \quad i=1, 2, 3.$$

Cercul

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0.$$

le tae ortogonal, când

$$2(a_1\alpha+b_1\beta)=k+\gamma,\ 2(a_2\alpha+b_2\beta)=k+\gamma,\ 2(a_3\alpha+b_3\beta)=k+\gamma.$$

Acest sistem de ecuații lineare și omogene în raport cu α, β, $(k+\gamma)$, are determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

în general, diferit de zero, afară de cazul când centrele cercurilor sunt colineare, iar centrul radical la infinit. Acest caz fiind înlăturat, determinantul este diferit de zero, deci sistemul admite soluții toate nule, $\alpha=0$, $\beta=0$, $k+\gamma=0$. Ecuația cercului ortogonal la cele trei cercuri date este $x^2+y^2-k=0$; centrul acestui cerc este centrul radical al celor trei cercuri date, iar raza sa, $\sqrt{k}$, estă rădăcina pătrată a puterii comune a centrului radical în raport cu cele trei cercuri. Raza acestui cerc este egală cu tangentele egale (Fig. 73) ce se pot duce din centrul radical ω la cele cercuri date (Se știe că puterea unui punct față de un cerc este egală cu pătratul tangentei dusă din acel punct la cerc).

Exerciții.

1) Să se construiască cercurile $x^2+y^2-6x-8y-24=0$, $x^2+y^2-6x-16=0$, $2x^2+2y^2-x=0$, $4x^2+4y^2-4x+16y+1=0$, $\frac{x}{y}=\frac{y-6}{8-x}$.

2) Să se afle ecuația cercului ce trece prin origină și determină pe axele Ox, Oy lungimile $OA=2a$, $OB=2b$.

R. $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$.

3) Să se afle ecuația cercului cu raza egală cu 1 și tangent dreptei $3x-4y+1=0$ în punctul de abscisă 1.

R. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=1$. Se calculează coordonatele (1, 1) ale punctului de contact. Se scrie că distanța de la centrul (α, β) la dreaptă este egală cu 1 și că perpendiculara din centru pe dreaptă trece prin (1, 1); $\alpha=\frac{2}{5}$, $\beta=\frac{9}{5}$; $\alpha=\frac{24}{15}$; $\beta=\frac{1}{5}$.

4) Să se afle ecuația cercului ce trece prin punctele (2, 0), (−2, 0) și tangent dreptei $3x-4y+6=0$. Să se explice pentru ce se obține o singură soluție.

R. $x^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+4$. Se scrie că distanța centrului la dreaptă este egală cu raza. Se obține $\lambda=-\frac{8}{3}$. Punctul (−2,0) aparține dreptei.

5) Să se afle ecuația cercului cu centrul în punctul (3,−2) și tangent dreptei $x+2y-1=0$.

R. $(x-3)^2+(y+2)^2=\lambda^2$. Se determină λ scriind că dreapta tae cercul în două puncte confundate; $\lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

6) Să se afle ecuația cercului ce trece prin origină, prin punctul (2,0) și tangent cercului $(x-5)^2+(y-3)^2=16$.

R. $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$; trecând prin (2, 0), urmează $\alpha=1$. Fiind tangent cercului, distanța centrelor este egală cu suma sau diferența razelor,

$$\sqrt{1+\beta^2}\pm 4=\sqrt{(5-1)^2+(3-\beta)^2},\quad 1+\beta^2+16\pm 8\sqrt{1+\beta^2}=16+9-6\beta+\beta^2,$$

$$\pm 4\sqrt{1+\beta^2}=4-3\beta,\quad \beta(7\beta+24)=0;\quad \beta'=0,\quad \beta''=-\frac{24}{7};\quad x^2+y^2-2x=0.$$

$$x^2+y^2-2x+\frac{48}{7}y=0.$$

7) Să se afle ecuația unui cerc de rază R tangent la axele de coordonate.

R. $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$.

8) Să se afle ecuația cercului ce trece prin (3, 5) și taie axa Oy în punctele A și B astfel ca $OA=4$, $OB=-2$.

R. $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$. Se face $x=0$ și se scrie că eeuația obținută are rădăcinile $4,-2$. Se scrie că trece prin (3, 5); $\alpha=\frac{8}{3}$, $\beta=2$, $\gamma=-8$.

9) Să se scrie ecuația cercului ce trece prin punctul (0, 2) și este tangent în origină la dreapta $y+2x=0$.

R. $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$. Trece prin (0, 2), $\beta=1$. Se scrie că tangenta în origină se confundă cu $2x+y=0$; se obține $\alpha=2$.

10) Să se afle ecuația cercului cu centrul în (3, 1) și tangent cercului $x^2+y^2+2x+6y=0$.

R. $(x-3)^2+(y-1)^2=R^2$. Se scrie că distanța de la (3, 1) la axul radical al cercurilor este R; se obține $R^2=42+32\sqrt{5}$.

11) Se dau o dreaptă D și un cerc (C). Dintr'un punct M variabil al dreptei D ca centru și cu o rază cât tangenta dusă la cercul (C), se descrie un cerc (C'). Să se arate că cercurile (C') au acelaș ax radical.

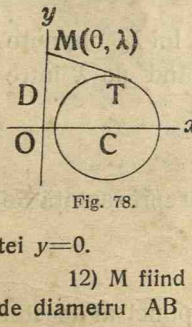


Fig. 78.

R. Se ia dreapta D ca Oy și perpendiculara din centrul cercului C ca Ox (Fig. 78). Avem $M(0, \lambda)$ și $(C)\equiv x^2+y^2+2ax+b=0$, $(C')\equiv x^2+(y-\lambda)^2-(\lambda^2+b)=0$, căci $\overline{MT}^2$ este puterea punctului M în raport cu cercul (C). Avem $(C')\equiv x^2+y^2-2\lambda y-b=0$, deci aceste cercuri trec prin punctele de intersecție a cercului $x^2+y^2-b=0$, și dreptei $y=0$.

12) M fiind punctul de contact al unei tangente variabile la un cerc de diametru AB (Fig 79), fie C și D punctele unde această tangentă tae tangentele fixe în A și B. Să se arate că produsul AC.BD este constant și că dreptele CO, OD sunt perpendiculare.

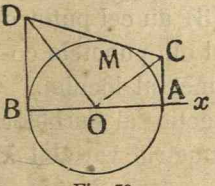


Fig. 79.

R. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $M(\alpha, \beta)$, $\alpha^2+\beta^2=a^2$. Se scriu tangentele în A, B, M și se calculează coordonatele punctelor C și D,

$$C\left(a, \frac{a^2-a\alpha}{\beta}\right),\ D\left(-a, \frac{a^2+a\alpha}{\beta}\right);\quad AC.BD=\frac{a^2(a^2-\alpha)^2}{\beta^2}.$$

Se ține seamă de $\alpha^2+\beta^2=a^2$, se obține a^2. Se scriu coeficienții unghiulari m' și m'' ai dreptelor OC și OD și se arată că $m'\,m''+1=0$.

Locuri geometrice.

70. Loc geometric este o reunire de mai multe puncte care se bucură de aceeaş proprietate. Se întâmplă câte odată că această proprietate este aşa de simplă, în cât se poate deduce imediat ecuaţia locului; aşa a fost obţiuntă ecuaţia cercului din chiar definiţia locului. În general, însă, locul căutat este descris de un punct mobil M, ale cărui poziţii succesive depind de valori atribuite unui parametru variabil. De ex., punctul M poate fi definit ca fiind unul oarecare din punctele de intersecţie a două curbe

$$f(x,y,\lambda)=0,\ g(x,y,\lambda)=0, \tag{1}$$

variabile cu parametrul λ. La fiecare valoare λ_0, dată lui λ, corespund două curbe, una din fiecare familie, care se tae în unul sau mai multe puncte, ale căror coordonate verifică ecuaţiile

$$f(x,y,\lambda_0)=0,\ g(x,y,\lambda_0)=0. \tag{2}$$

Fie M unul din aceste puncte. Când λ variază, punctul M se va mişca, iar totalitatea acestor puncte vor fi pe o curbă a cărei ecuaţie ne propunem a o găsi. Pentru aceasta, să însemnăm cu (x_0,y_0) coordonatele unui punct al locului, adică un punct comun curbelor (2), astfel că

$$f(x_0,y_0,\lambda_0)=0,\ g(x_0,y_0,\lambda_0)=0.$$

Ecuaţiile

$$f(x_0,y_0,\lambda)=0,\ g(x_0,y_0,\lambda)=0 \tag{3}$$

au cel puţin o soluţie comună λ_0. Egalând valorile lui λ_0, obţinute din aceste ecuaţii, sau, cum se mai zice, eliminând pe λ între aceste ecuaţii, se obţine

$$R(x_0,y_0)=0, \tag{4}$$

ceea ce însemnează că punctul (x_0,y_0) este pe curba reprezentată de ecuaţia

$$R(x,y)=0. \tag{5}$$

Reciproc, dacă (x_0,y_0) sunt coordonatele unui punct al acestei curbe, condiţia (4) este verificată, deci ecuaţiile (3) au cel puţin o soluţie comună λ_0, adică punctul (x_0,y_0) este unul din punctele comune curbelor (2) şi deci acest punct este un punct al locului.

Deci, locul geometric al punctelor de intersecţie al curbelor $f(x,y,\lambda)=0$, $g(x,y,\lambda)=0$, se obţine eliminând parametrul variabil λ între aceste două ecuaţii.

71. Să considerăm acum cazul când punctul M este la intersecţia curbelor

(6) $$f(x,y,\lambda,\mu)=0,\ g(x,y,\lambda,\mu)=0,$$

λ şi μ fiind doi parametri variabili, legaţi cu relaţia

(7) $$h(\lambda,\mu)=0.$$

Să ne propunem a găsi locul geometric al punctului M, când λ şi μ variază.

Fie $R(x,y)=0$ rezultatul eliminării lui λ şi μ între ecuaţiile (6) şi (7). Dacă (x_0,y_0) sunt coordonatele unui punct M al locului, există un sistem de valori, λ_0, μ_0, satisfăcând ecuaţia (7) şi cărora le corespund curbele definite de ecuaţiile (6), $f(x,y,\lambda_0,\mu_0)=0, g(x,y,\lambda_0\mu_0)=0$, care trec prin punctul M, astfel că avem

$$f(x_0,y_0,\lambda_0,\mu_0)=0,\ g(x_0,y_0,\lambda_0,\mu_0)=0,\ h(\lambda_0,\mu_0)=0.$$

Rezultă că ecuaţiile

(8) $$f(x_0,y_0,\lambda,\mu)=0,\ g(x_0,y_0\,\lambda,\mu)=0,\ h(\lambda,\mu)=0$$

au cel puţin o soluţie λ_0,μ_0 şi eliminând între aceste ecuaţii pe λ şi μ, urmează

$$R(x_0,y_0)=0,$$

ceea ce însemnează că punctul (x_0,y_0) este pe curba reprezentată de ecuaţia

(9) $$R(x,y)=0.$$

Reciproc, dacă (x_0,y_0) sunt coordonatele unui punct al acestei curbe, avem $R(x_0,y_0)=0$, ecuaţiile (8) au o soluţie comună, ceea ce probează că punctul (x_0,y_0) este un punct al locului.

Deci, locul geometric al punctului M, intersecţia curbelor (6), parametrii λ şi μ fiind legaţi cu relaţia (7), se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (6) şi (7).

Mai general, ecuaţia curbei descrisă de punctul ale cărui coordonate (x,y) verifică $n+1$ ecuaţii,

$$f(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0,\ g(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0,$$

(10) $$h_1(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0,$$

$$h_2(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0,$$

$$h_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0,$$

în care $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ sunt n parametrii variabili, se obţine eliminând aceşti n parametrii între ecuaţiile (10).

72. Propoziţia stabilită mai sus este generală, dar trebue făcute oarecare observări. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că condiţiile geometrice care definesc poziţia locului geometric căutat sunt exprimate prin ecuaţiile (1), care conţin un singur parametru variabil λ şi fie $R(x,y)=0$ rezultatul elimi-

nării a lui λ din ecuațiile (1). Fie M un punct al curbei $R(x,y)=0$. Propoziția stabilită a avut loc presupunând că la acest punct de coordonate (x_0,y_0), corespunde cel puțin o valoare λ_0 a parametrului λ, astfel ca curbele reprezentate de ecuațiile $f(x,y,\lambda_0)=0$, $g(x,y,\lambda_0)=0$ să treacă amândouă prin punctul M. Dar, se poate ca aceste curbe să nu corespunză efectiv condițiilor geometrice ale enunțului problemei pentru toate valorile atribuite lui λ; așa, de ex., ar trebui ca λ să fie real, sau să fie cuprins între anumite limite. Dacă λ_0 nu îndeplinește aceste condițiuni, punctul M nu face parte din locul geometric căutat și astfel se vede că, în unele cazuri, anumite părți ale curbei $R(x,y)=0$ nu fac parte din locul geometric.

Se mai poate ca una din curbele (1) să treacă printr'un punct $A(x_1,y_1)$, oricare ar fi valoarea lui λ și fie că $f(x_1,y_1,\lambda)=0$, oricare ar fi λ. Se pot găsi, în general, una sau mai multe valori ale lui λ, soluții ale ecuații $g(x_1,y_1,\lambda)=0$. Insemnând cu λ_0 una din aceste soluții, avem $f(x_1,y_1,\lambda_0)=0$, $g(x_1,y_1,\lambda_0)=0$, de unde eliminând pe λ_0, urmează $R(x_1,y_1)=0$, ceea ce probează că punctul $A(x_1,y_1)$ aparține curbei $R(x,y)=0$. Punctul $A(x_1,y_1)$ va aparține locului geometric numai în cazul când se poate găsi o soluție λ_0, astfel ca curbele $f(x,y,\lambda_0)=0$, $g(x,y,\lambda_0)=0$ să îndeplinească condițiile geometrice date. In caz contrar punctul $A(x_1,y_1)$ nu aparține locului geometric.

Exemplu. Să se afle locul mijloacelor coardelor unui cerc care trec printr'un punct fix. Să luăm ca axă Ox dreapta ce unește centrul cercului dat cu punctul fix $A(a,0)$ (Fig. 80). Ecuația cercului O este $x^2+y^2-R^2=0$, iar aceea a unei secante ce trece prin A este

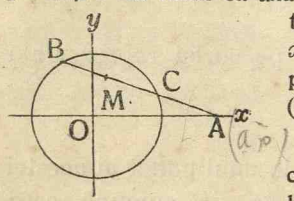


Fig. 80.

$$y=\lambda(x-a). \tag{11}$$

Secanta tae cercul în două puncte B și C, ale căror abscise sunt date de ecuația ce se obține înlocuind în ecuația cercului pe y cu $\lambda(x-a)$, adică

$$x^2+\lambda^2(x-a)^2=R^2. \tag{12}$$

Mijlocul M al coardei BC are ca abscisă semisuma absciselor punctelor B și C, adică semisuma rădăcinilor acestei ecuații,

$$x=\frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2}. \tag{13}$$

Locul geometric al punctului M se obține eliminând pe λ între ecuațiile (11) și (13).

De unde

$$x[(x-a)^2+y^2]=ay^2,$$

$$(x-a)[x(x-a)+y^2]=0.$$

Locul geometric se compune din dreapta $x-a=0$ și cercul

$$x(x-a)+y^2=0. \tag{14}$$

Dreapta $x-a=0$ nu face parte din locul geometric căutat. In adevăr, am văzut ca abscisa mijlocului coardei BC ce trece prin punctul A este egală cu semisuma rădăcinilor ecuații (12); reciproca nu este adevărată, căci nu orice punct situat pe secanta ce trece prin punctul A și a cărui abscisă este egală cu semisuma absciselor punctelor de intersecție ale secantei cu cercul este necesar mijlocul coardei pe care această secantă o determină în cerc.

In adevăr, dacă coarda este perpendiculară pe OA, ceea ce are loc când $\lambda \to \infty$, ecuaţia (12), care se poate scrie

$$\frac{1}{\lambda^2}(x^2-R^2)+(x-a)^2=0,$$

devine la limită, pentru $\lambda \to \infty$,

$$(x-a)^2=0,$$

şi se vede că abscisa unui punct oarecare al acestei secante şi deci nu numai mijlocul coardei pe care ea o determină în cerc, este egală cu semisuma rădăcinilor ecuaţii precedente. Urmează că $x-a=0$ face parte din locul geometric al punctului secantei (11), a cărui abscisă este egală cu semisuma absciselor punctelor de intersecţie ale acestei secante cu cercul. Aşa dar, $x-a=0$, este o soluţie streină a problemei propuse.

Mai mult, dacă punctul A este exterior cercului O, nu toate punctele cercului (14) aparţin locului geometric, ci numai porţiunea cercului (14) interioară cercului O şi care puncte corespund secantelor (11) care tae cercul O în puncte reale, ceea ce are loc când ecuaţia (12) are rădăcinile reale adică

$$\lambda^2 \leqq \frac{R^2}{a^2-R^2}.$$

In fine, se observă că secantele considerate, trecând prin punctul A, locul geometric conţine acest punct, care de altfel este strein pentru locul geometric când punctul A este exterior cercului O.

Pentru ca întreg cercul (14) să fie locul geometric, trebuia să enunţăm altfel problema şi anume, să se afle locul geometric al picioarelor perpendicularelor lăsate din punctul O pe secantele ce trec prin punctul fix A.

73. **Aplicaţii.** I. *Să se afle locul geometric al punctelor astfel ca suma pătratelor distanţelor la două puncte fixe să fie constantă.* Să luăm ca axă Ox dreapta ce uneşte cele două puncte date A şi B, iar ca axă Oy, perpendiculara pe mijlocul lui AB. Fie $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $M(x,y)$ coordonatele punctelor date şi a unui punct al locului geometric. Avem, prin ipoteză,

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=k^2=\text{const.}$$

De unde

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=k^2,\quad x^2+y^2=\frac{k^2-2a^2}{2},$$

ceea ce probează că locul punctului M este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului AB.

II. *Să se afle locul centrelor cercurilor care tae două cercuri date la capetele unui diametru.* Să luăm linia centrelor C, C′ ca axă Ox şi ca Oy axul lor radical (Fig. 81). Ecuaţiile a două cercuri fiind

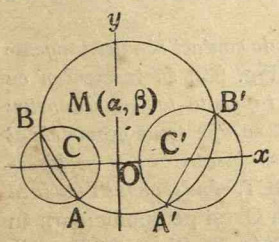


Fig. 81.

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\quad x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0,$$

centrelor lor sunt pe Ox când $b=b'=0$. Axul radical al cercurilor date este

$$2x(a-a')+c'-c=0.$$

Ca această dreaptă să fie Oy, trebue să aibă ecuaţia $x=0$, deci $c'-c=0$, $c'=c$. Ecuaţiile cercurilor date sunt

$$(C)\equiv x^2+y^2-2ax+c=0,\quad (C')\equiv x^2+y^2-2a'x+c=0.$$

Fie

$$(\Gamma)\equiv x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

ecuația unui cerc cu centrul în (α,β) și care să tae cercurile date la capetele diametrelor AB, A'B'. Aceasta se exprimă analitic, scriind că axul radical al cercurilor (C) și (Γ) trece prin centrul cercului (C), iar axul radical al cercurilor (C') și (Γ) trec prin centrul cercului (C').

Axele radicale ale cercurilor (C) și (Γ), (C') și (Γ) sunt

$$2x(\alpha-a)+2\beta y-\gamma+c=0,\quad 2x(\alpha-a')+2\beta y-\gamma+c=0.$$

Scriind că sunt verificate respectiv de $(a,0)$. $(a',0)$, obținem

$$2a(\alpha-a)-\gamma+c=0,\quad 2a'(\alpha-a')-\gamma+c=0.$$

Eliminând pe γ între aceste ecuații, ceea ce se poate face scăzându-le, avem

$$\alpha-(a+a')=0,$$

relație care probează că locul geometric al centrului (α,β) al cercului variabil este dreapta $x=a+a'$, perpendiculară pe linia centrelor cercurilor date.

III. *Fie* CD *polara unui punct fix* P *(Fig. 82) în raport cu un cerc variabil ce trece prin două puncte fixe* A *și* B. *Insemnând cu* E *centrul acestui cerc, să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor* CD, EP. Să luăm ca axă Ox dreapta AB, ca axă Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Să notăm cu $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $E(0,\lambda)$, $P(p,q)$, λ fiind variabil. Ecuația cercului cu centrul în E și care trece prin A și B este

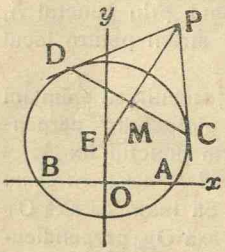


Fig. 82.

$$x^2+(y-\lambda)^2=a^2+\lambda^2,$$

sau

$$x^2+y^2-2\lambda y-a^2=0.$$

Polara punctului $P(p, q)$ în raport cu acest cerc este

$$px+qy-\lambda(q+y)-a^2=0. \tag{15}$$

Ecuația dreptei EP este

$$y-\lambda=\frac{q-\lambda}{p}x \tag{16}$$

Locul geometric se obține eliminând λ între ecuațiile (15) și (16). Scoțând valoarea lui λ din (15) și înlocuind în (16) se obține:

$$px^2+py^2-(p^2+q^2+a^2)x+a^2p=0,$$

care probează că locul geometric este un cerc cu centrul pe Ox, care nu tae axa Oy și care trece prin P.

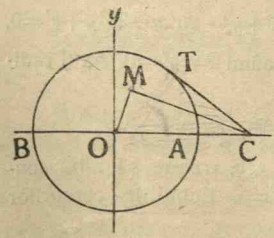


Fig. 83.

IV. T *fiind punctul de contact al unei tangente variabile la un cerc* 0, (Fig. 83). *să însemnăm cu* C *punctul unde această tangentă tae un diametru fix* AB *al cercului* 0. *Să se afle locul geometric al piciorului perpendicularei lăsate din* 0 *pe bisectoarea unghiului ascuțit* OCT, *când punctul* T *variază pe cercul* 0. Luând AB ca Ox și perpendiculara în O ca Oy, să notăm cu $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$. Ecuația cercului O este $x^2+y^2=a^2$ și notând cu $\theta=\widehat{COT}$,

coordonatele punctului variabil T sunt $(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Ecuaţia tangentei în T la cerc este

$$x\cos\theta+y\sin\theta-a=0,$$

iar coordonatele punctului C sunt $\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$.

Ecuaţia bisectoarelor unghiului OCT este

$$x\cos\theta+y\sin\theta-a\pm y=0.$$

Pentru a vedea ce semn trebue luat ca să fie bisectoarea unghiului ascuţit, vom înlocui coordonatele originii şi ale punctului T; rezultatele înlocuirei sunt $-a, \pm a\sin\theta$. Presupunând T deasupra axei Ox $(\theta<\pi)$, rezultatele trebuind să fie de semne contrare, vom lua semnul $+$, iar ecuaţia bisectoarei este

(17) $$x\cos\theta+y\sin\theta-a+y=0.$$

Ecuaţia perpendicularei din origină pe această dreaptă este

(18) $$y-\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}x=0.$$

Locul geometric al punctului M de intersecţie al dreptelor (17), (18) se obţine eliminând pe θ între ecuaţiile (17), (18), ţinând seamă de relaţia

(19) $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

Din (18), avem, ţinând seamă de (17),

$$\frac{\cos\theta}{x}=\frac{1+\sin\theta}{y}=\frac{x\cos\theta+y(1+\sin\theta)}{x^2+y^2}=\frac{a}{x^2+y^2}.$$

de unde

$$\cos\theta=\frac{ax}{x^2+y^2},\quad \sin\theta=\frac{ay}{x^2+y^2}-1.$$

Inlocuind în (19), obţinem

$$\frac{a^2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+1-\frac{2ay}{x^2+y^2}=1,$$

de unde

$$\frac{a^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2ay}{x^2+y^2}=0.$$

Inlăturând curba $x^2+y^2=0$, ecuaţia locului geometric este $a-2y=0$, o paralelă cu Ox. Se constată că numai o porţiune din dreaptă, care este interioară cercului corespunde locului geometric.

V. *Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor trecând printr'un punct dat* A *şi tăind ortogonal cercul dat* O. Să luăm ca Ox dreapta OA şi ca Oy perpendiculara în O (Fig. 84). Coordonatele lui A sunt $(a, 0)$, iar ecuaţia cercului O este $x^2+y^2=R^2$.

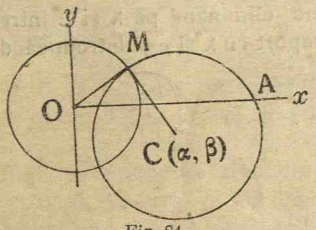


Fig. 84.

Fie

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2$$

ecuaţia unui cerc cu centrul în $C(\alpha, \beta)$, care trece prin A; deci

(20) $$(a-\alpha)^2+\beta^2=\lambda^2.$$

Condiţia ca cercurile O şi C să fie ortogonale este $\overline{OC}^2=R^2+\lambda^2$, adică

(21) $$\alpha^2+\beta^2=R^2+\lambda^2.$$

Eliminând pe λ între ecuaţiile (20) şi (21), avem

$$R^2+a^2-2a\alpha=0.$$

care este ecuaţia locului geometric al punctului $C(\alpha, \beta)$. Deci locul centrului este dreapta $R^2+a^2-2ax=0$, perpendiculară pe OA.

VI. *Se dau trei puncte colineare* A, B, C. *Să se afle locul geometric al punctelor de contact al cercurilor ce trec prin punctele* A *şi* B *cu tangentele duse din* C *la aceste cercuri.* Luând ca axă Ox dreapta ABC (Fig. 85), ca Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB, să notăm cu $A(-a,0)$, $B(a, 0)$, $C(c, 0)$. Insemnând cu $(0,\lambda)$ coordonatele centrului variabil al cercului ce trece prin A şi B, ecuaţia cercului este

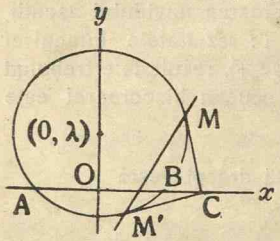


Fig. 85.

(22) $\quad x^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+a^2,\ x^2+y^2-2\lambda y-a^2=0.$

Punctele de contact ale tangentelor din C sunt la intersecţia cercului cu polara punctului C,

(23) $\quad cx-\lambda y-a^2=0.$

Eliminând pe λ între ecuaţiile (22) şi (23) obţinem

$$x^2+y^2-2cx+a^2=0.$$

care arată că locul geometric al punctelor de contact este un cerc cu centrul în C.

VII. *O dreaptă* PQ *(Fig. 86) de lungime constantă d se reazemă pe laturile* OA *şi* OB *ale unghiului dat* AOB, P *fiind pe* OA *şi* Q *pe* OB. *Se cere locul geometric al punctului de intersecţie al perpendicularelor ridicate în* P *pe* OA *şi* Q *pe* OB, *când* PQ *variază ca poziţie.* Să luăm ca axe Ox şi Oy bisectoarele unghiului AOB. Ecuaţiile dreptelor OA şi OB sunt

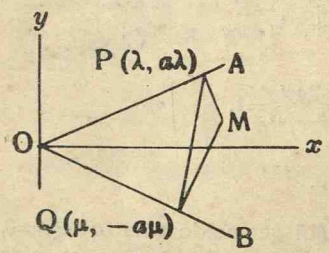


Fig. 86.

$$y=ax,\ y+ax=0.$$

Fie $P(\lambda,a\lambda)$, $Q(\mu,-a\mu)$. Avem $\overline{PQ}^2=d^2$,

(25) $\quad (\lambda-\mu)^2+a^2(\lambda+\mu)^2=d^2.$

Ecuaţiile perpendicularelor în P pe OA şi Q pe OB sunt

(26) $$y-a\lambda=-\frac{1}{a}(x-\lambda),\ y+a\mu=\frac{1}{a}(x-\mu).$$

Locul geometric al punctului M se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (25) şi (26). Rezolvând ecuaţiile (26) în raport cu λ şi μ şi introducând în (25), ecuaţia locului este

$$x^2+y^2=\frac{d^2(1+a^2)^2}{4a^2},$$

care reprezintă un cerc cu centrul în origină.

Exerciţii.

1). Se dă un punct fix A în planul a două axe perpendiculare Ox şi Oy. O secantă variabilă ce trece prin A tae pe Ox în N. Se ia pe Oy punctul P astfel ca OP=ON. Din P se lasă perpendiculara pe AN pe care o tae

în M. Să se afle locul geometric al punctului M când secanta se învârteşte în jurul lui A.

R. A(a,b). Ecuaţia secantei este (1)$y-b=\lambda(x-a)$. Ecuaţia perpendicularei din P pe AN este (2) $x+\lambda(y-a)+b=0$. Se elimină λ între (1) şi (2); locul este cercul $x^2+y^2-(a-b)x-(a+b)y=0$ ce trece prin origină.

2) Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi un punct A fix pe Ox, D un punct variabil pe Oy, iar pe perpendiculara în A pe Ox, punctul C, astfel ca OD=2AC. Să se afle locul geometric al proecţii punctului O pe DC, când D variază pe Oy.

R. A$(a,0)$, C(a,λ), D$(0,2\lambda)$. Se elimină λ între ecuaţiile $\lambda x+ay-2a\lambda=0$, $\lambda y=ax$. Locul este cercul $x^2+y^2-2ax=0$.

3) Fie AB o coardă fixă a unui cerc dat şi M un punct variabil al acestui cerc. Din mijlocul coardei AM se lasă o perpendiculară pe BM pe care o tae în P. Se cere locul geometric al punctului P.

R. A$(a,0)$, B$(-a,0)$, $x^2+y^2-2by-a^2=0$. Ecuaţia dreptei variabile BM este $y=\lambda(x+a)$. Coordonatele punctului M se obţin rezolvând sistemul format din ecuaţia cercului şi a dreptei; avem

$$M\left(\frac{a+2b\lambda-a\lambda^2}{1+\lambda^2},\ \frac{2a+2b\lambda}{1+\lambda^2}\lambda\right).$$

Se calculează coordonatele mijlocului segmentului AM şi perpendiculara din acest punct pe BM are ecuaţia $\lambda y+x-b\lambda-a=0$. Se elimină λ între această ecuaţie şi aceea a dreptei BM. Locul lui P este cercul $x^2+y^2-by-a^2=0$.

4). Fie AT o tangentă fixă şi PT o tangentă variabilă la un cerc de rază R. Să se afle locul geometric al centrului circumscris triunghiului APT, când P descrie cercul dat.

R. Se ia AT ca Oy şi diametrul din A ca Ox. Cercul are ecuaţia $x^2+y^2-2Rx=0$. P(λ,μ). Se calculează coordonatele lui T. Se elimină λ şi μ între ecuaţiile $\lambda^2+\mu^2-2\lambda R=0$, a perpendicularei din T pe AP şi a perpendicularei pe mijlocul lui AT. Se găseşte $x=\frac{R}{2}$.

Sau, se ia T$(0,\lambda)$ şi se elimină λ între ecuaţia perpendicularei pe mijlocul lui AT şi aceea a dreptei care uneşte punctul T cu centrul cercului dat.

5). Se dau două puncte fixe A şi B şi se consideră un cerc variabil cu centrul în P tangent în A dreptei AB. Fie M punctul de contact al acestui cerc cu tangenta dusă din B. Să se afle: 1° locul geometric al punctului M; 2° locul intersecţii dreptelor AM şi PB.

R. Se iau ca Ox şi Oy dreptele AB şi perpendiculara în A pe AB. P$(0,\lambda)$, B$(a,0)$. 1° Se elimină λ între ecuaţia cercului şi polarei punctului B; se găseşte $x^2+y^2-2ax=0$. 2° $x^2+y^2-ax=0$.

6). Fie M un punct variabil al unui cerc de diametru AB, cu centrul în O. 1°. Să se scrie ecuaţiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM şi BOM. 2°. Să se arate că produsul distanţelor centrelor P şi Q ale acestor cercuri la dreapta AB este constant. 3°. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a dreptelor AP şi BQ.

R. Se ia AB ca Ox şi perpendiculara în O ca Oy, Insemnând cu OA=$2a$ M(α,β), $\alpha^2+\beta^2=4a^2$, P(a,λ), Q$(-a,\mu)$, ecuaţiile cercurilor AOM, BOM sunt

$$1^0\ x^2+y^2-2ax-2\lambda y=0,\ x^2+y^2+2ax-2\mu y=0,$$

cu condiţiile $\alpha^2+\beta^2-2a\alpha-2\lambda\beta=0$, $\alpha^2+\beta^2+2a\alpha-2\mu\beta=0$, $\alpha^2+\beta^2=4a^2$,

$$\lambda=\frac{\alpha^2+\beta^2-2a\alpha}{2\beta},\ \mu=\frac{\alpha^2+\beta^2+2a\alpha}{2\beta},\ \lambda=\frac{a(2a-\alpha)}{\beta},\ \mu=\frac{a(2a+\alpha)}{\beta}.$$

2°. $\lambda\mu=a^2$. 3°. Se elimină λ și μ între ecuațiile dreptelor AP, BQ, $\lambda\mu=a^2$, ceea ce se obține înmulțind ecuațiile dreptelor. Se obține $x^2+y^2=4a^2$, cercul dat.

7. Să se scrie ecuația bisectoarei unghiului ascuțit ce face cu Oy dreapta $3x-4y+4=0$. Să se scrie apoi ecuația cercului tangent în origină la dreapta ce face cu Ox unghiul α și trecând prin punctul unde bisectoarea de mai sus tae pe Ox. Presupunând că α variază, să se afle locul geometric al centrului cercului precedent.

R. Punctul unde bisectoarea tae pe Ox este $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$;

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}x-2\lambda y=0.$$

Se scrie că tangenta în origină la acest cerc se confundă cu $y=x\operatorname{tg}\alpha$; $x^2+y^2+\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\operatorname{cotg}\alpha=0$. Locul centrelor este dreapta $x=-\frac{1}{4}$.

8) Se unește un punct M al axului radical a două cercuri de centre A și B cu centrele și se ridică perpendiculare în A pe AM și B pe BM. Se cere locul geometric al punctului de intersecție al acestor perpendiculare când M variază pe axul radical.

R. Ox este AB, Oy axul radical; $M(0, \lambda)$. Locul este $x=a+b$.

9) Se dau punctele A, B, C, D pe o dreaptă. Se duce un cerc variabil (Γ) tangent în A dreptei AB și un cerc (Γ') trecând prin B și C și care tae cercul (Γ) în punctele M și N. Să se arate că cercul circumscris triunghiului DMN tae dreapta AB încă într'un punct fix.

R. A origina, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $D(d, 0)$; $(\Gamma)\equiv x^2+y^2-2\lambda y=0$,

$$(\Gamma')\equiv x^2+y^2-(b+c)x+2\mu y+bc=0;$$

$$(DMN)\equiv x^2+y^2-(b+c)x+2\mu y+bc+k(x^2+y^2-2\lambda y)=0.$$

Se scrie că acest cerc trece prin D, de unde

$$k=\frac{(b+c)d-d^2-bc}{d^2}.$$

Ecuația care dă abscisele punctelor de intersecție cu Ox are coeficienții constanți.

10) Tangenta într'un punct variabil al unui cerc de centru O tae un cerc dat (C) în punctele A și B. Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OAB.

R. $x^2+y^2=R^2$, $(C)\equiv x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0$, $(OAB)\equiv x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$. Se scrie că axul radical al cercurilor (C) și (OAB) este tangent la cercul O (distanța de la centru la ax este egală cu raza R). Locul centrului (α, β) este cercul

$$\frac{a^2-r^2}{\sqrt{4(\alpha-a)^2+4\beta^2}}=R.$$

11) Fiind date patru puncte A, B, C, D care formează o diviziune armonică, toate cercurile ce trec prin două puncte conjugate A și C, tae ortogonal cercul de diametru BD.

R. $D(-d, 0)$, $B(d, 0)$, $C(c, 0)$, $A(a, 0)$. O fiind mijlocul lui BD, avem $d'=ac$. Ecuația unui cerc ce trece prin A și C este

$$x^2+y^2-(a+c)x+2\lambda+ac=0.$$

12. Se dă o dreaptă variabilă (1) $(1-k^2)x+2ky+k^2a=0$, în care a este dat iar k variabil. 1° Să se arate că prin fiecare punct M (x_0, y_0) al planului trec două drepte din familia (1). In ce regiune trebue să fie M, pentru ca dreptele (1) să fie reale şi distincte. 2° Să se afle locul punctelor M pentru care dreptele corespunzătoare sunt perpendiculare. 3° Să se afle locul punctelor M pentru care dreptele corespunzătoare tae axa Oy în două puncte aşezate simetric faţă de un punct P(0, b). 4° Să se arate că dreptele (1) sunt tangente la un cerc oricare ar fi k şi să se afle punctul de contact.

R. Valorile lui k sunt date de $k^2(a-x_0)+2ky_0+x_0=0$ (2). 1° M exterior cercului $x_0^2+y_0^2-ax_0=0$. 2°. Coeficientul unghiular al dreptei (1) fiind $m=\frac{k^2-1}{2k}$, trebue să avem $(k_1^2-1)(k_2^2-1)+4k_1k_2=0$, k_1, k_2 fiind rădăcinile ecuaţii (2); M trebue să fie pe cercul $x_0^2+y_0^2-ax_0-\frac{1}{4}a^2=0$. 3° Ordonatele punctelor unde cele două drepte (1) tae Oy sunt $-\frac{1}{2}ak_1, -\frac{1}{2}ak_2$; Condiţia este $b=-\frac{1}{4}(k_1+k_2)a$ şi (2) M se află pe dreapta $2bx_0+ay_0-2ab=0$. 4°. Fie (x_1, y_1) coordonatele centrului cercului la care dreapta (1) este tangentă; distanţa d de la acest punct la dreaptă, $\frac{k^2(a-x_1)+2ky_1+x_1}{k^2+1}$, trebue să fie independentă de k; deci

$$\frac{a-x_1}{1}=\frac{2y_1}{0}=\frac{x_1}{1};\ x_1=\frac{a}{2},\ y_1=0,$$

iar raza cercului este $d=\frac{a}{2}$.

13) Prin vârful A al unui pătrat ABCD se duce o secantă variabilă ce tae pe CB în E şi CD în F. 1°. Să se arate că dreapta ce uneşte punctul F cu mijlocul I al dreptei EB este tangentă la cercul înscris în pătrat. 2° Să se arate că punctul de intersecţie al dreptelor FI şi DE este pe cercul circumscris pătratului.

R. A$(-a, -a)$, B$(a, -a)$, C(a, a), D$(-a, a)$. (AEF)$\equiv y+a-\lambda(x+a)=0$, λ variabil. (FI) $\equiv(\lambda^2-2\lambda)x-2(\lambda-1)y+a(\lambda^2-2\lambda+2)=0$. 1° Distanţa de la origină la FI este a. 2° (DE) $\equiv x(\lambda-1)-y+a\lambda=0$; locul este cercul $x^2+y^2-2a^2=0$.

14) Se dă un punct P în planul unui unghi AOB. Un cerc variabil dus prin O şi P tae laturile OA şi OB în Q şi S. Să se afle locul geometric al ortocentrului (punctul de întâlnire al înălţimilor) triunghiului OQS.

R. P(a, b), (OB) $\equiv y-cx=0$. Ecuaţia cercului $x^2+y^2-2\lambda x-\mu 2y=0$, cu condiţia $a^2+b^2-2\lambda a-2\mu b=0$. Q$(2\lambda, 0)$, S$\left[\frac{2(\lambda+\mu c)}{1+c^2}, c\ \frac{2(\lambda+\mu c)}{1+c^2}\right]$. Locul este o dreaptă paralelă cu dreapta ce uneşte proecţiile lui P pe OA şi OB.

Studiul curbelor de ordinul al doilea. Conicele.

74. Ecuaţia generală a curbelor de ordinul al doilea fiind

$$f(x, y) \equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

am văzut când această ecuaţie reprezintă două drepte sau un cerc.

Inainte de a studia în general curbele de ordinul al doilea, care se mai numesc şi conice, vom considera câteva cazuri simple ale ecuaţii de gradul al doilea,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ y^2-2px=0.$$

Curbele reprezentate de aceste ecuații se zic respectiv elipsă, iperbolă, parabolă, și se pot obține ca locuri geometrice interesante.

75. **Elipsa** *Elipsa este locul geometric al punctelor a căror sumă a distanțelor la două puncte fixe este constantă.* Vom lua ca axă Ox dreapta care unește cele două puncte fixe F și F′ (Fig. 87), iar ca axă Oy perpendiculara pe mijlocul lui FF′. Insemnând cu $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ și $M(x, y)$ un punct al locului, ecuația locului geometric se obține exprimând analitic condiția geometrică, $MF+MF'=2a=\text{const.}$, și este

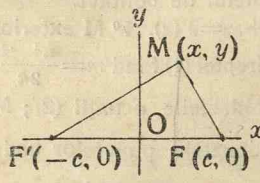


Fig. 87.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Ridicând la pătrat, avem

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=4a^2,$$

sau

$$\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2)$$

Ridicând din nou la pătrat, obținem

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{1}$$

Dar în triunghiul MFF′ (Fig. 87), avem $FF'<MF+MF'$, sau $2c<2a$, $c<a$. Deci a^2-c^2 este o cantitate pozitivă b^2, $a^2-c^2=b^2$. Inlocuind în (1), ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

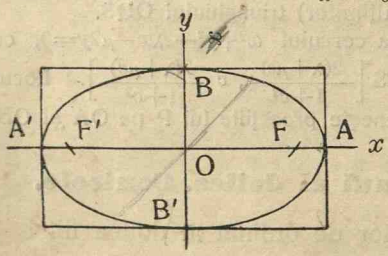


Fig 88.

Schimbând pe x cu $-x$ și y cu $-y$, ecuația rămâne neschimbată. Deci, dacă punctul $M(x, y)$ se află pe curbă, atunci și punctele $M'(-x, y)$, $M''(x, -y)$, $M'''(-x, -y)$ se vor afla pe curbă. M′ este simetricul lui M față de Oy, M″ simetricul lui M față de Ox, M‴ simetricul lui M față de origină; deci elipsa este simetrică în raport cu Ox, Oy și origina O. Va fi de ajuns să construim curba în unghiul xOy, căci, pentru a construi curba întreagă, vom lua simetrica ramurei din unghiul xOy în raport cu Ox, Oy, O.

Rezolvând ecuația elipsei în raport cu y, avem

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Pentru ca y să existe, trebue să avem $a^2-x^2>0$, adică $-a<x<a$. Curba este deci cuprinsă între paralele $x-a=0$, $x+a=0$ (Fig. 88). De asemenea, rezolvând ecuația în raport cu x, vom găsi că trebue să avem $-b<y<b$, adică elipsa este cuprinsă între paralelele $y-b=0$, $y+b=0$. Deci elipsa este interioară dreptunghiului format de aceste patru drepte.

Să construim ramura

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

când x variază dela O la a. Mai întâi se vede că y descreşte când x creşte. Când $x=0$, $y=b$, obținem punctul B (Fig. 88); dacă x creşte, y descreşte şi când $x=a$, $y=0$, obținem punctul A. Luând simetrica acestei ramuri în raport cu Oy, Ox, O, se obține curba întreagă.

Elipsa este tangenta în A la dreapta $x=a$. In adevăr, luând intersecția acestei drepte cu elipsa, ecuația care dă ordonatele punctelor de intersecție este $\frac{y^2}{b^2}=0$; deci cele două puncte de intersecție au ordonatele egale cu zero, şi sunt confundate cu A, adică dreapta $x=a$ tae elipsa în două puncte confundate cu A, este, după cum se mai zice, tangentă la elipsă în A. Tot aşa se vede că elipsa este tangentă în B, A' şi B' dreptelor $y=b$, $x=-a$, $y=-b$.

Punctele A, A', B, B' se zic vârfurile elipsei, AA', BB' se numesc axa mare şi axa mică a elipsei, O centrul elipsei. Când se cunosc semiaxele a şi b, pentru a construi focarele F şi F' ale căror coordonate sunt $(c, 0)$, $(-c, 0)$, ne servim de relația $a^2-c^2=b^2$; de unde $c^2=a^2-b^2$, $\overline{OF}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2$ (Fig. 88), adică OF este cateta unui triunghi dreptunghic, o catetă fiind OB, iar ipotenuza egală cu OA. Punctele F şi F' se obțin luând intersecția axei AA' cu cercul cu centru în B şi cu raza OA. Distanța FF' se zice distanța focală.

Exemplu. In cazul elipsei $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, avem A(5, 0), A'(−5, 0), B(0, 4), B'(0,−4), F(3, 0), F'(−3, 0).

Observare. Când $a=b$, elipsa se reduce la

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\quad x^2+y^2=a^2,$$

adică la cercul de rază a.

76. **Iperbola** *este locul geometric al punctelor astfel încât diferența distanțelor la două puncte fixe este constantă.* Luând ca axă Ox dreapta ce unește cele două puncte fixe F și F′ (Fig. 89), perpendiculara pe mijlocul ei ca Oy, notând coordonatele punctelor $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $M(x, y)$, avem $MF'-MF=2a$,

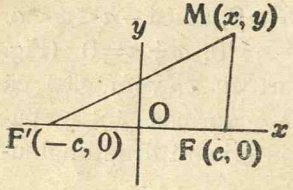


Fig. 89.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Operând ca și în cazul elipsei, avem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Dar din triunghiul MFF′, avem $FF'>MF'-MF$, $2c>2a$, $c>a$, deci a^2-c^2 este un număr negativ și deci $a^2-c^2=-b^2$, $c^2=a^2+b^2$. Ecuația locului geometric este

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad c^2=a^2+b^2,$$

adică este o iperbolă.

Rezolvând ecuația în raport cu y, avem

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Pentru ca y să existe trebue ca $x^2-a^2>0$, adică $x<-a$, $x>a$; deci curba nu se găsește între paralelele $x=a$, $x=-a$, duse prin A și A′ la Oy (Fig. 90). Curba e simetrică în raport cu Ox, Oy și O. Să construim numai ramura

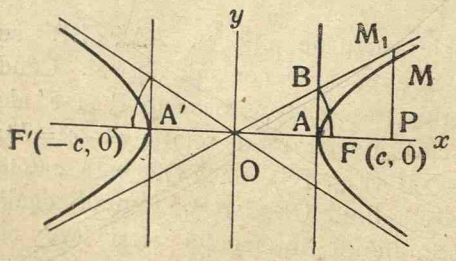


Fig. 90.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

așezată în unghiul format de direcțiile pozitive ale axelor de coordonate, când x variază de la a la ∞. Când $x=a$, $y=0$, avem punctul A. Dreapta $x=a$ este tangentă la curbă în punctul A, căci ordonatele punctelor de intersecție cu $x=a$, sunt date de $y^2=0$, adică ambele puncte sunt confundate cu A. Deci iperbola este tangentă la paralela din A la Oy. Când x crește și y crește, iar când $x\to\infty$, atunci $y\to\infty$; deci iperbola are puncte la infinit, are, cum se mai zice, ramuri la infinit. Pentru a vedea felul de creștere a lui y față de x, să facem raportul

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Când $x\to\infty$, $\lim\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, deci punctul de la infinit al ramurei iperbolei se apropie de dreapta $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, sau $y=\frac{b}{a}x$.

Să considerăm diferența PM_1-PM dintre ordonatele a unui punct al dreptei $y=\frac{b}{a}x$ și a curbei $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, corespunzătoare la aceeaș valoare a lui x,

$$d=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}).$$

Pentru a căuta limita acestei expresii pentru $x\to\infty$, să o scriem

$$d=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Când $x\to\infty$, $\lim d=0$, deci curba se apropie de dreapta $y=\frac{b}{a}x$, când x crește nemărginit. Se zice că curba admite această dreaptă ca asimptotă. Luând pe perpendiculara în A pe Ox lungimea $AB=b$, dreapta $y=\frac{b}{a}x$ este OB, deci OB este o asimptotă a iperbolei.

Considerând ramurile simetrice în raport cu Ox, Oy, O, se vede că iperbola mai admite asimptota $y=-\frac{b}{a}x$. Ecuațiile celor două asimptote ale iperbolei sunt

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x,$$

iar ecuația comună a lor este

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

adică grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația iperbolei.

Axa Ox se zice axa transversă a iperbolei, iar Oy, axă netransversă; O se zice, ca și la elipsă, centrul curbei. Când se cunosc a și b pentru a construi focarele $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, ne servim de relația $c^2=a^2+b^2$, adică c este ipotenuza unui triunghi dreptunghic de catete a și b, adică este egală cu OB. Deci, focarele F și F' sunt la intersecția axei transverse cu cercul cu centrul O și raza OB.

Iperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$ are ca axă transversă axa Oy, are aceleași asimptote, și se zice iperbolă conjugată cu cea dintâi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Când $a=b$, iperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se reduce la $x^2-y^2=a^2$, când se zice iperbolă echilateră și are asimptotele perpendiculare, bisectorale axelor de coordonate (axelor iperbolei).

Exemplu. Să se construiască iperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-1=0$. Avem $a=4$, $b=3$; construim asimptotele $y=\frac{3}{4}x, y=-\frac{3}{4}x$. Focarele sunt F(5, 0), F'(−5, 0).

77. **Parabola** *este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix și o dreaptă fixă.* Luând ca axă Ox perpendiculara din punctul fix F pe dreapta fixă (D) (Fig. 91), iar ca Oy paralela cu (D) egal depărtată de F și (D), să notăm cu $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $M(x,y)$ un punct al curbei; ecuația dreptei (D) este $x+\frac{p}{2}=0$. Distanța de la M la dreapta (D) este $x+\frac{p}{2}$, iar la punctul F este dată de

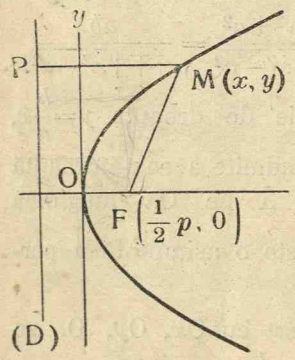


Fig. 91.

$$\overline{MF}^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

Ecuația locului geometric este

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

sau

$$y^2-2px=0,$$

care reprezintă o parabolă.

Ecuația fiind verificată când înlocuim pe y cu $-y$, urmează că parabola este simetrică în raport cu Ox. Rezolvând ecuația în raport cu y, avem

$$y=\pm\sqrt{2px}.$$

Ca y să fie real, trebue ca $x>0$, deci curba e situată la dreapta axei Oy. Vom construi numai ramura situată în unghiul format de direcțiile pozitive ale axelor și anume $y=\sqrt{2px}$, când x variază de la 0 la ∞. Când $x=0$, $y=0$; deci curba trece prin origină.

Parabola este tangentă în origină la Oy, căci intersecția parabolei cu axa Oy ($x=0$) se obține făcând $x=0$, astfel că ordonatele punctelor de intersecție sunt date de $y^2=0$, ceeace arată că ambele puncte se confundă cu O.

Când x crește și y crește, iar când $x \to \infty$, atunci $y \to \infty$. Avem

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2px}}{x}=\sqrt{\frac{2p}{x}}.$$

Limita expresii $\frac{y}{x}$ când $x \to \infty$ este zero. Deci, dreapta dusă prin origină și punctul de la infinit al parabolei are ecuația $y=0$. Asimptota este paralelă cu această dreaptă și are ecuația $y=n$. Pentru ca să fie asimptotă, trebue ca punctul de la infiinit al acestei drepte să se confunde cu punctul de la infinit al parabolei, de unde urmează că $n=\lim y=\lim_{x \to \infty} \sqrt{2px}=\infty$. Deci parabola are o asimptotă paralelă cu Ox, aruncată la infinit.

Punctul O se zice vârful parabolei, Ox axa parabolei, Oy este tangentă la vârf, F focarul, (D) directoarea, p parametrul parabolei.

Reducerea ecuației de gradul al doilea. Centre.

78. In cele ce urmează vom arăta că ecuația generală de gradul al doilea,

$$(1) \qquad f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

reprezintă numai elipse, iperbole sau parabole.

Să deplasăm axele paralel cu ele înșiși-le în punctul $O'(x_0,y_0)$, astfel că (x,y) și (x',y') fiind coordonatele unui punct față de vechile axe Ox, Oy și față de noile axe $O'x'$, $O'y'$, avem

$$x=x_0+x',\ y=y_0+y'.$$

Ecuația (1) devine

$$(2) \quad f(x_0+x',y_0+y')\equiv Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+x'\frac{\partial f}{\partial x_0}+y'\frac{\partial f}{\partial y_0}+f(x_0,y_0)=0,$$

unde

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}=Ax_0+By_0+D,\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_0}=Bx_0+Cy_0+E.$$

Pentru ca punctul O' să fie centrul curbei, trebue ca, dacă $M(x'\,y')$ este un punct al curbei, atunci și simetricul său $(-x',-y')$, în raport cu O' (cu origina cea nouă) să fie pe curbă, adică, ecuația (2) să fie verificată și de coordonatele $(-x',-y')$. Aceasta are loc numai când ecuația (2) nu conține termeni cu x', y', la gradul întâi, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0.$$

Deci, coordonatele centrului O′ sunt date de ecuaţiile $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, sau

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}\equiv Ax_0+By_0+D=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_0}\equiv Bx_0+Cy_0+E=0.$$

Acest sistem de ecuaţii admite soluţii finite şi determinate, dacă determinantul

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

este diferit de zero. Dacă $\delta=0$, atunci punctul O′ este aruncat la infinit sau nedeterminat.

79. **Conice cu centru. Cazul $\delta\neq 0$.** In caz când $AC-B^2\neq 0$, curba (1) are un centru $O'(x_0, y_0)$ ale cărui coordonate sunt date de ecuaţiile

$$(3)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}=0,\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_0}=0;\ Ax_0+By_0+D=0,\ Bx_0+Cy_0+E=0.$$

I. Transportând axele paralel cu ele înşi-le în acest punct, $O'(x_0, y_0)$, ecuaţia curbei devine

$$(4)\qquad Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+f(x_0, y_0)=0.$$

Pentru a calcula pe $f(x_0, y_0)$, să observăm că

$$f(x_0,y_0)=x_0(Ax_0+By_0+D)+y_0(Bx_0+Cy_0+E)+Dx_0+Ey_0+F.$$

Ţinând seamă de relaţiile (3), avem

$$(5)\qquad f(x_0, y_0)=Dx_0+Ey_0+F.$$

Trebue să înlocuim în (5) pe x_0, y_0 cu valorile lor deduse din (3), ceea ce însemnează a elimina pe x_0, y_0 între ecuaţiile (3) şi (5); obţinem

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F-f(x_0, y_0) \end{vmatrix}=0.$$

Dezvoltând după elementele ultimei coloane, avem

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}-f(x_0,y_0)\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=0,$$

de unde

$$f(x_0,y_0)=\frac{\Delta}{\delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ecuația (4) devine

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{6}$$

Observare. Centrul (x_0,y_0) al conicei fiind dat de ecuațiile

$$Ax_0+By_0+D=0,\ Bx_0+Cy_0+E=0,$$

iar ecuația conicei putându-se scrie

$$x(Ax+By+D)+y(Bx+Cy+E)+Dx+Ey+F=0,$$

urmează că dacă avem

$$Ax_0+By_0+D=0,\ Bx_0+Cy_0+E=0,\ Dx_0+Ey_0+F=0,$$

centrul (x_0, y_0) se găsește pe curbă. Aceste trei ecuații lineare în x_0, y_0 fiind compatibile, urmează că

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0,$$

adică conica se reduce la două drepte și reciproc. Deci, dacă conica se reduce la două drepte, centrul M_0 se află pe conică și este punctul lor de intersecție.

Așadar, dacă conica $f(x,y)=0$ se reduce la două drepte, punctul lor de intersecție este centrul conicei și e dat de ecuațiile $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$. Transportând axele paralel în centru (punctul de intersecție al dreptelor), ecuația acestor drepte față de noile axe $O'x'$, $O'y'$ este

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2=0,$$

iar față de vechile axe Ox, Oy este

$$A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2=0,$$

și ecuația care dă coeficienții unghiulari ai acestor drepte este

$$Cm^2+2Bm+A=0.$$

II. Putem face să dispară termenul cu $x'y'$ din ecuația (6), făcând o rotație în jurul centrului O' de unghiul α. Noile axe fiind $O'X$, $O'Y$, formulele de transformare sunt

$$x'=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\ y'=X\sin\alpha+Y\cos\alpha.$$

Ecuaţia curbei (1) faţă de noile axe O'X, O'Y se obţine din (6) şi este

$$A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + 2B(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) +$$
$$+ C(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

sau

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + 2TXY + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde

$$(7) \quad \begin{cases} S_1 = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha, \\ S_2 = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha, \end{cases}$$
$$T = B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (A - C)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Punând condiţia $T=0$, rezultă

$$B\cos 2\alpha - \frac{A-C}{2}\sin 2\alpha = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este de forma

$$2\alpha = 2\alpha_0 + k\pi,$$

în care $2\alpha_0$ este un unghi pozitiv cuprins între 0 şi π, iar k un întreg oarecare, pozitiv sau negativ. De unde

$$\alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{2},$$

ceea ce dă pentru α patru direcţii distincte, dar perpendiculare două câte două, corespunzătoare valorilor $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$; deci, un singur sistem de axe perpendiculare O'X, O'Y. Vom alege, prin convenţiune, pentru unghiul α, valoarea α_0 cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{2}$, care verifică ecuaţia $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$.

Ecuaţia curbei (1) faţă de noile axe devine

$$(8) \quad S_1X^2 + S_1Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Pentru a calcula pe S_1 şi S_2 să observăm că din (7) avem

$$S_1 + S_2 = A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

$$(9) \quad S_1 + S_2 = A + C;$$

$$S_1 - S_2 = (A-C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha = (A-C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha.$$

Ţinând seamă de formulele

$$(10) \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{2B}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}},$$

avem

$$S_1-S_2=(A-C)\frac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}+2B\frac{2B}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}=\frac{(A-C)^2+4B^2}{\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}},$$

$$S_1-S_2=\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}. \tag{11}$$

Pentru a vedea ce semn trebue luat în formula (11), trebue observat că α fiind cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, 2α este cuprins între 0 și π și deci $\sin 2\alpha$ este pozitiv. Deci, în formula (10) vom lua semnul + sau −, după cum B este pozitiv sau negativ, așa că și în formula (11) vom lua semnul + sau −, după cum B este pozitiv sau negativ.

Relațiile (9) și (11) ne dau pe S_1 și S_2. Ecuația de gradul al doilea ce are ca rădăcini pe S_1 și S_2 este obținută ușor, dacă calculăm pe

$$S_1S_2=\frac{1}{4}\left[(S_1+S_2)^2-(S_1-S_2)^2\right]=\frac{1}{4}\left[(A+C)^2-(A-C)^2-4B^2\right],$$

$$S_1S_2=AC-B^2=\delta. \tag{12}$$

Cunoscând suma și produsul lui S_1 și S_2, date de (9) și (12), ecuația de gradul al doilea, ce are ca rădăcini pe S_1 și S_2, este

$$S^2-(A+C)S+AC-B^2=0,\ (A-S)(C-S)-B^2=0. \tag{13}$$

Valorile lui S_1 și S_2 sunt date de (9) și (11) și au valorile

$$S_1,\ S_2=\frac{A+C\pm\varepsilon\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

și vom lua în locul lui ε semnul + sau −, după cum B este pozitiv sau negativ.

III. *Discuție.* Am văzut că ecuația generală de gradul al doilea, în cazul $\delta\neq 0$, se reduce la

$$S_1X^2+S_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{14}$$

Se observă că S_1 și S_2 sunt diferiți de zero, căci din (12) se vede că produsul lor este diferit de zero.

1°. Dacă $\Delta=0$, ecuația (14) devine

$$S_1X^2+S_2Y^2=0,$$

iar curba se reduce la dreptele

$$\sqrt{S_1}X+\sqrt{-S_2}Y=0,\ \sqrt{S_1}X-\sqrt{-S_2}Y=0.$$

Deci, dacă $\Delta=0$, ecuația generală reprezintă două drepte. Dreptele sunt reale sau imaginare, după cum S_1 și S_2 sunt de semne contrare sau de același semn. Dar, din (12), $S_1S_2=\delta$; deci, dacă $\delta>0$, dreptele sunt imaginare, dacă $\delta<0$, dreptele sunt reale.

2°. Dacă $\Delta\neq 0$, ecuația (14) se poate scrie

$$\frac{X^2}{-\frac{\Delta}{S_1}\frac{1}{\delta}}+\frac{Y^2}{-\frac{\Delta}{S_2}\frac{1}{\delta}}=1. \tag{15}$$

In cazul $\delta=AC-B^2>0$, S_1 și S_2 sunt de același semn, semnul lor fiind dat de acela al sumei $S_1+S_2=A+C$. Dacă $\Delta(A+C)>0$, S_1 și S_2 sunt de același semn cu Δ, deci $\frac{\Delta}{S_1}>0$, $\frac{\Delta}{S_2}>0$, ecuația (15) e de forma

$$\frac{X^2}{-p^2}+\frac{Y^2}{-q^2}=1,\quad \frac{X^2}{p^2}+\frac{Y^2}{q^2}=-1,$$

$$p^2=\frac{\Delta}{S_1\delta},\ q^2=\frac{\Delta}{S_2\delta},$$

curba (1) este o *elipsă imaginară*. Dacă $\Delta(A+C)<0$, S_1 și S_2 sunt de semn contrar cu Δ, atunci $\frac{\Delta}{S_1}<0$, $\frac{\Delta}{S_2}<0$, ecuația (15) se poate scrie

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\ a^2=-\frac{\Delta}{S_1\delta},\ b^2=-\frac{\Delta}{S_2\delta},$$

curba (1) reprezintă o *elipsă reală*. Deci, dacă $\delta=AC-B^2>0$, curba e de gen elipsă.

In cazul $\delta=AC-B^2<0$, din ecuația (12) se vede să S_1 și S_2 sunt de semne contrarii, ecuația (15) este de forma

$$\frac{X^2}{a_1^2}-\frac{Y^2}{b_1^2}=1,$$

curba (1) este *iperbolă*. Dacă $A+C=0$, din (9) se vede că $S_1+S_2=0$, ecuația (15) se poate scrie

$$X^2-Y^2=a_2^2,\ a_2^2=-\frac{\Delta}{S_1\delta}=\frac{\Delta}{S_2\delta},$$

curba (1) este o *iperbolă echilateră*.

Tabloul discuției este următorul

$\Delta=0$	Două drepte	$\delta>0$, imaginare $\delta<0$, reale
$\Delta\neq0$	$\delta>0$, elipsă	$(A+C)\Delta<0$, reală $(A+C)\Delta>0$, imag.
	$\delta<0$, iperbolă.	
	$\delta<0$, $A+C=0$, iperbolă echilateră.	

IV. *Mărimea axelor* este dată de relațiile

$$a^2=-\varepsilon\frac{\Delta}{S_1\delta},\ b^2=-\varepsilon'\frac{\Delta}{S_2\delta},$$

în care vom lua în locul lui ε și ε' semnul $+$ sau $-$, astfel ca a^2 și b^2 să fie pozitivi.

V. *Aplicații.* 1) Să se construiască curba

$$2x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+4a^2=0.$$

Avem $AC-B^2=2.1-1=1>0$; curba este elipsă. Centrul O′ e dat de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y-a=0,\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=-x+y-a=0,$$

și are coordonatele $x_0=2a, y_0=3a$. Unghiul α e dat de

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C},\ \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-2,\ \operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha-1=0,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Valoarea care trebue aleasă pentru α este dată de $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Fig. 92). Mai

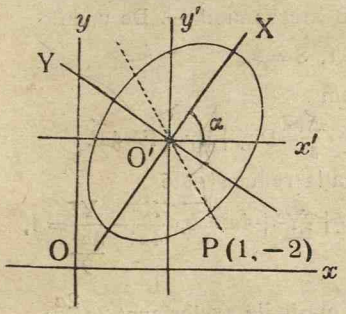


Fig. 92.

putem găsi și altfel valoarea lui α. In adevăr, având $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}=-2$, să construim dreapta ce trece prin O′, de coeficient unghiular -2, $y'=-2x'$. Pentru aceasta, construim, față de axele $O'x'$, $O'y'$, punctul $P(x'=1,\ y'=-2)$ și dreapta O′P este dreapta cerută de ecuație $y'=-2x'$. Bisectoarele unghiului 2α format de $O'x'$ cu această dreaptă, sunt O′X, O′Y, chiar axele elipsei considerate.

Pentru a determina mărimea axelor, ne servim de ecuațiile

$$S_1+S_2=A+C=3,\ S_1-S_2=-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}=-\sqrt{(2-1)^2+4}=-\sqrt{5},$$

luând semnul $-$ înaintea radicalului, căci B din ecuația dată are semnul $-$. De unde, prin adunare și scădere, avem

$$S_1=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}),\ S_2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Apoi,

$$\frac{\Delta}{\delta}=Dx_0+Ey_0+F=-a.2a-a.3a+4a^2=-a^2.$$

Ecuația redusă este

$$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})X^2+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})Y^2-a^2=0,\ \frac{X^2}{\frac{2a^2}{3-\sqrt{5}}}+\frac{Y^2}{\frac{2a^2}{3+\sqrt{5}}}=1,$$

iar lungimile axelor sunt

$$a\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}=a\sqrt{\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}}=a(\sqrt{5}+1),\ \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Axele elipsei considerate trec prin centrul $O'(2a, 3a)$ și fac cu Ox unghiurile α și $90+\alpha$, astfel că față de axele de coordonate Ox, Oy ecuațiile acestor axe sunt $y-3a=\operatorname{tg}\alpha(x-2a)$, $y-3a=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(x-2a)$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sau

$$y-3a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(x-2a),\ y-3a=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}(x-2a).$$

2). Să se construiască curba

$$f(x,y)\equiv 7x^2-8xy+y^2-2ax-4ay-a^2=0$$

De oarece $AC-B^2=7.1-16=-9<0$, curba este iperbolă. Centrul O′ e dat de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=7x-4y-a=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=-4x+y-2a=0,$$

şi are coordonatele $x_0=-a$, $y_0=-2a$.

Avem $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}=\frac{-8}{7-1}=-\frac{4}{3}$. Construim dreapta $y'=-\frac{4}{3}x'$, unind origina O′ cu punctul $x'=3$, $y'=-4$; luăm bisectoarele unghiului format de această dreaptă cu $O'x'$ (Fig. 93).

Avem

$$S_1+S_2=A+C=8,\quad S_1-S_2=\sqrt{(A-C)^2+4B^2}=-\sqrt{4.16+36}=-10;$$

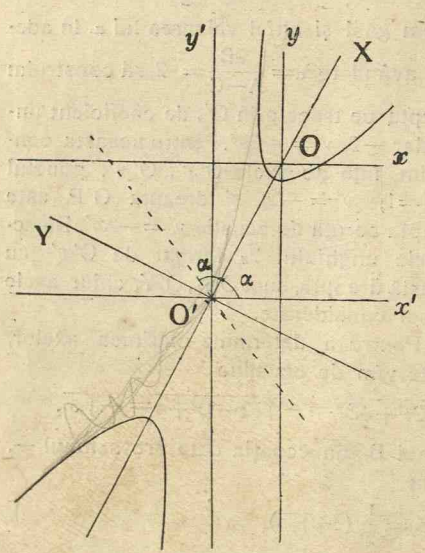


Fig. 93.

s'a luat semnul — înaintea radicalului, căci B are semnul —. De unde

$S_1=-1$, $S_2=9$.

Avem

$$\frac{\Delta}{\delta}=Dx_0+Ey_0+F=4a^2.$$

Ecuaţia redusă este

$$-X^2+9Y^2+4a^2=0,\quad \frac{X^2}{4a^2}-\frac{Y^2}{\frac{4a^2}{9}}=1,$$

iar mărimile axelor sunt $2a, \frac{2a}{3}$.

De oarece $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{4}{3}$, avem $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{4}{3}$, de unde $\operatorname{tg}\alpha=2$, astfel că faţă de axele Ox, Oy ecuaţiile axelor acestei iperbole sunt

$y+2a=2(x+a)$, $y+2a=-\frac{1}{2}(x+a)$.

80. **Conice de genul parabolă. Cazul $\delta=0$.** Avem $AC-B^2=0$, $C=\frac{B^2}{A}$, ecuaţia curbei

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

se reduce la

$$Ax^2+2Bxy+\frac{B^2}{A}y^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

sau

$$\frac{1}{A}(Ax+By)^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{16}$$

aşa că forma generală a ecuaţii curbei, în acest caz, este astfel că grupul termenilor de gradul al doilea formează un pătrat perfect.

Să presupunem $A\neq 0$. Să facem o rotaţie de unghiul α, aşa ca axele perpendiculare Ox, Oy să devină Ox', Oy'. Formulele de transformare sunt

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

iar ecuația (16) a curbei devine

$$\frac{1}{A}[A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+B(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)]^2+2D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0,$$

$$\frac{1}{A}[(A\cos\alpha+B\sin\alpha)x'+(B\cos\alpha-A\sin\alpha)y']^2+2D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0.$$

Să determinăm pe α, astfel că

$$A\cos\alpha+B\sin\alpha=0,\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B};$$

de unde

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{-B}{\pm\sqrt{A_2+B^2}}.$$

Vom alege pentru α unghiul α_0 ce verifică ecuația $\operatorname{tg}\alpha_0=-\frac{A}{B}$ și cuprins între 0 și π. Soluția generală a ecuației $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\alpha_0$ este dată de $\alpha=\alpha_0+k\pi$, k fiind un întreg oarecare și se obțin numai două valori distincte $\alpha=\alpha_0$ ($k=0$), $\alpha=\alpha_0+\pi$ ($k=1$), care formează o singură direcție. Această dreaptă se poate construi, căci se cunoaște coeficientul ei unghiular, $-\frac{A}{B}$, dat de relația $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B}$. Prin convenție, se ia pentru α valoarea α_0; atunci $\sin\alpha$ fiind pozitiv, avem

$$\sin\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\alpha=\frac{-B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

și vom lua, înaintea radicalului, semnul + sau −, după cum A este pozitiv sau negativ.

Ecuația curbei devine

$$C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0, \tag{17}$$

$$C'=\frac{(B\cos\alpha-A\sin\alpha)^2}{A}=\frac{1}{A}(B^2\cos^2\alpha+A^2\sin^2\alpha-2AB\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{A}\left(B^2\frac{B^2}{A^2+B^2}+A^2\frac{A^2}{A^2+B^2}+2AB\frac{AB}{A^2+B^2}\right),$$

$$C'=\frac{1}{A}\frac{A^4+B^4+A^2B^2}{A^2+B^2}=\frac{1}{A}\frac{(A^2+B^2)^2}{A^2+B^2}=\frac{A^2+B^2}{A},$$

$$D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha=\frac{AE-BD}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad E'=\frac{-(AD+BE)}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

luând înaintea radicalului semnul lui A.

Dacă $A=0$, din relaţia $AC-B^2=0$, rezultă $B=0$ şi atunci ecuaţia curbei faţă de vechile axe, Ox, Oy, este

$$Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{18}$$

ecuaţie de aceeaş formă ca (17).

Ecuaţia curbei fiind (17) sau (18), să deplasăm axele paralel cu ele în punctul $O'(x_0, y_0)$. Formulele de transformare sunt

$$x'=x_0+X,\ y'=y_0+Y.$$

Ecuaţia (17) devine

$$C'(y_0+Y)^2+2D'(x_0+X)+2E'(y_0+Y)+F=0.$$

$$C'Y^2+2D'X+2(C'y_0+E')Y+C'y_0^2+2D'x_0+2E'y_0+F=0. \tag{19}$$

Să alegem punctul $O'(x_0, y_0)$ astfel ca

$$C'y_0+E'=0,\ C'y_0^2+2D'x_0+2E'y_0+F=0, \tag{20}$$

adică la intersecţia curbei cu dreapta $C'y_0+E'=0$. Din prima din ecuaţiile (20) avem $y_0=-\frac{E'}{C'}$ şi cum $C'\neq 0$, căci altfel curba (17) s'ar reduce la o linie dreaptă, y_0 are o valoare finită şi înlocuind în a doua ecuaţie (20), se găseşte valoarea lui

$$x_0=\frac{E'^2-FC'}{2D'C'}.$$

Să presupunem că $D'\neq 0$. Atunci x_0, y_0 au valori finite, noua origină O' este determinată; făcând translaţia în punctul O', ecuaţia curbei faţă de noile axe $O'X$, $O'Y$ este

$$C'Y^2+2D'X=0,$$

sau

$$Y^2+\frac{2D'}{C'}X=0,\ Y^2+2A\frac{AE-BD}{(A^2+B^2)^{3/2}}X=0.$$

Deci, dacă $\delta=0$, $D'\neq 0$ curba considerată este o parabolă având vârful în O', axa este dreapta $O'X$, parametrul parabolei fiind valoarea absolută

$$p=\frac{|A(AE-BD)|}{(A^2+B^2)^{3/2}}.$$

Am presupus $D'\neq 0$. Să considerăm acum cazul $D'=0$. Atunci ecuaţia (17) este

$$C'y'^2+2E'y'+F=0, \tag{21}$$

şi reprezintă, faţă de Ox', Oy' două drepte paralele cu Ox'. Cum avem $AC-B^2=0$, $C=\frac{B^2}{A}$, rezultă atunci

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & \frac{B^2}{A} & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

dezvoltând după elementele ultimei coloane, avem

$$\Delta=D\left(BE-\frac{B^2}{A}D\right)-E\left(AE-BD\right)=\left(AE-BD\right)\left(\frac{BD}{A}-E\right)=-\frac{\left(AE-BD\right)^2}{A}.$$

Cum însă

$$D'=\frac{AE-BD}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

urmează $\Delta=0$.

Deci, dacă $AC-B^2=0, \Delta=0$, curba se reduce la două drepte parelele. Dreptele sunt reale, distincte, dacă ecuaţia (21) are rădăcini distincte şi reale, adică $E'^2-C'F>0$

Dar,

$$E'^2-C'F=\frac{(AD+BE)^2}{A^2+B^2}-F\frac{A^2+B^2}{A}.$$

Ţinând seamă de $AE-BD=0$, avem $E=\frac{BD}{A}$ şi înlocuind, obţinem

$$E'^2-C'F=\frac{\left(AD+\frac{B^2D}{A}\right)^2}{A^2+B^2}-F\frac{A^2+B^2}{A}=\frac{D^2}{A^2}\frac{(A^2+B^2)^2}{A^2+B^2}$$

$$-F\frac{A^2+B^2}{A}=\frac{A^2+B^2}{A^2}(D^2-AF).$$

Deci, dacă $D^2-AF>0$, dreptele paralele la care se reduce curba dată sunt reale şi distincte; dacă $D^2-AF<0$, dreptele sunt imaginare; dacă $D^2-AF=0$, dreptele sunt confundate.

Aşa dar, dacă $AC-B^2=0$, curba este parabolă; dacă $AE-BD=0$, sau $\Delta=0$, avem două drepte paralele; dacă $D^2-AF=0$, dreptele paralele sunt confundate.

81. *In rezumat*, ecuaţia generală de gradul al doilea reprezintă elipsă dacă $AC-B^2>0$, iperbolă dacă $AC-B^2<0$, parabolă în cazul $AC-B^2=0$. Mai mult, această ecuaţie reprezintă numai aceste curbe, deci, curbele de ordinul al doilea sunt numai elipse, iperbole, parabole (în cazuri particulare, cercuri şi drepte). Aceste curbe sunt obţinute ca secţiunile plane ale unui con de rotaţie, de aceea se zic *conice*. Au fost considerate, în acest fel, şi studiate geometric întâia dată, de *Apollonius* (250 a. Cr.)

Tabloul rezumativ al discuţiei ecuaţiei de gradul al doilea este

$AC-B^2>0$; elipsă	$AC-B^2<0$; iperbolă	$AC-B^2=0$; parabolă
$(A+C)\Delta<0$, elipsă reală;	$\Delta\neq 0$, iperbolă;	$\Delta\neq 0$, parabolă;
$(A+C)\Delta>0$, elipsă imag;	$\Delta=0$, două drepte secante reale;	$\Delta=0$, $A\neq 0$: $AF-D^2<0$, două paralele reale; $AF-D>0$, două drepte paralele imaginare; $AF-D^2=0$, două drepte confundate.
$\Delta=0$, două drepte secante imaginare.	$\Delta\neq 0$, $A+C=0$, iperbolă echilateră.	

82. **Aplicaţii. I.** *Să se construiască curba*

$$16x^2-24xy+9y^2-38ax-34ay+11a^2=0.$$

Avem $AC-B^2=0$, curba este parabolă. Ecuaţia curbei se poate scrie

$$(4x-3y)^2-38ax-34ay+11a^2=0.$$

Avem $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B}=\frac{4}{3}$. Construim dreapta Ox', a cărei ecuaţie este $y=\frac{4}{3}x$ (Fig. 94);

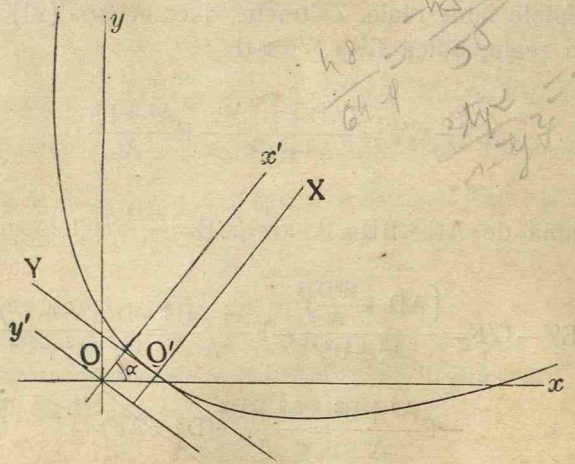


Fig. 94.

$C'=\frac{A^2+B^2}{A}=25$, $D'=\frac{AE-BD}{\sqrt{A^2+B^2}}=-25a$, $E'=\frac{-(AD+BE)}{\sqrt{A^2+B^2}}=5a$; am luat semnul $+$ înaintea radicalului, căci A are semnul $+$.

Ecuaţia devine

$$25y'^2-50ax'+10ay'+11a^2=0.$$

Vârful parabolei e dat de ecuaţiile

$$25y_0+5a=0,\quad 25y_0^2-50ax_0+10ay_0+11a^2=0;\quad x_0=\frac{a}{5},\ y_0=-\frac{a}{5}.$$

Deplasând axele în acest punct, ecuaţia curbei devine $25Y^2-50aX=0$, $Y^2=2aX$. Paralela prin vârf, la direcţia α, ne dă axa parabolei şi faţă de axele Ox, Oy are ecuaţia $y-y_0=\operatorname{tg}\alpha(x-x_0)$, $y+\frac{a}{5}=\frac{4}{3}\left(x-\frac{a}{5}\right)$.

II. *Să se discute natura curbei*

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+3=0,$$

λ *fiind un parametru variabil.* Avem

$\delta = AC - B^2 = \lambda^2 - 1$, $\Delta = 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = (3\lambda+1)(\lambda-1)$, $(A+C)\Delta = 2\lambda(3\lambda+1)(\lambda-1)$,
$D^2 - AF = 1 - 3\lambda$.

Tabloul discuției este următorul:

λ	δ	Δ	$(A+C)\Delta$	D^2-AF	Natura conicei
$-\infty$	$+$		$-$	$+$	Elipsă reală.
	0	...	...	...	Parabolă.
-1	$-$		$-$	$+$	Iperbolă.
	...	0	...	...	Două drepte reale, ce se obțin rezolvând ecuația în y.
$-\frac{1}{3}$	$-$		$+$	$+$	Iperbolă.
0	$-$		$-$	$+$	Iperbolă.
$\frac{1}{3}$	...	...	...	0	
	$-$		$-$	$-$	Iperbolă.
1	0	0	...	...	Două drepte paralele imaginare.
	$+$		$+$	$-$	Elipsă imaginară.
∞					

III. *Dintr'un punct P al bazei AB a triunghiului ABC se lasă perpendiculara PQ pe AC și se duc dreptele BQ și CP care se tae în M. 1° Se cere locul geometric al lui M când P variază pe AB. 2° Să se afle locul centrelor acestor curbe, când A și B sunt date, dreapta AC fixă, iar BC se învârtește în jurul lui B. Caz particular BAC=45°.*

Luând AB ca Ox și perpendiculara în A ca Oy, avem $B(b, 0)$, $(AC) \equiv y - ax = 0$, $P(\lambda, 0)$, $C(a, a\alpha)$. Ecuația dreptei PQ este $y = -\frac{1}{a}(x-\lambda)$. Coordonatele lui Q sunt date de ecuațiile $y = ax$, $y = -\frac{1}{a}(x-\lambda)$ și sunt $\left(\frac{\lambda}{1+a^2}, \frac{a\lambda}{1+a^2}\right)$. Ecuațiile dreptelor CP și BQ sunt

$$y = \frac{a\alpha}{\alpha - \lambda}(x-\lambda), \quad y = \frac{\frac{a\lambda}{1+a^2}}{\frac{\lambda}{1+a^2} - b}(x-b).$$

1° Locul geometric al lui M se obține eliminând pe λ între aceste ecuații și se obține

$$a\alpha^2 x^2 - 2a\alpha xy + y^2(\alpha - b - ba^2) - a\alpha^2 bx + (2a\alpha + a\alpha^3 b)y = 0,$$

care reprezintă o conică ce trece prin A (origină).

Natura acestei conice e dată de

$$AC - B^2 = a^2\alpha(\alpha - b - ba^2) - a^2\alpha^2 = -a^2 b\alpha(1+a^2).$$

Deci, când $\alpha < 0$, adică punctul C, pe dreapta AC, la stânga lui A (la stânga axei Oy), atunci $\delta > 0$, elipsă; dacă $\alpha > 0$, punctul C la dreapta lui Oy, $\delta < 0$, iperbolă.

2°. Locul centrelor acestor conice, când secanta BC se învârtește în jurul lui B, se obține eliminând parametrul variabil α între ecuațiile $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ce definesc centrul.

$$2a_\alpha x - 2a_\alpha y - \alpha a^2 b = 0, \quad -2a_\alpha x + 2y(\alpha - b - ba^2) + 2\alpha ab + \alpha a^3 b = 0.$$

Prima din aceste ecuații conținând în factor pe α, eliminarea lui α între aceste ecuații nu mai trebue făcută și locul geometric este chiar această ecuație, fără α,

$$2x - 2y - ab = 0,$$

adică o linie dreaptă.

Exerciții.

1) Să se reducă ecuația $4x^2+2xy+y^2-2x+y+3=0$.

R. Centrul $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}X^2 + \frac{5-\sqrt{13}}{2}Y^2+2=0$, elipsă imaginară.

2) Să se reducă ecuația $x^2-4xy+y^2+3x-3y+2=0$.

R. Centrul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\alpha = 45^0$; ecuațiile axelor sunt $y-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$, $y-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $X^2-3Y^2=\frac{1}{2}$; iperbolă.

3) Să se reducă ecuația $x^2+4xy+4y^2+2x-2y+1=0$.

R. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$; $Y^2 - \frac{6}{5\sqrt{5}}X=0$, parabolă. Paralela prin vârf, la direcția α, ne dă axa parabolei.

4) Să se construiască conica $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$.

R. Elipsă cu centrul în (1, 2); $X^2+2Y^2-8=0$. Axele elipsei au ecuațiile $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$, $y-2=-2(x-1)$.

5) Să se construiască conica $xy-2x+4y-10=0$.

R. Iperbolă echilateră cu centrul (−4, 2); ecuațiile axelor sunt $y-2=x+4$, $y-2=-(x+4)$; $X^2-Y^2=4$.

6) Să se construiască conica $4x^2-4xy+y^2-8x-8y+4=0$.

R. Parabolă; Vârful $\left(\frac{23}{50}, \frac{3}{25}\right)$, ecuația axei $10x-5y-4=0$; $Y^2=\frac{24}{5\sqrt{5}}X$.

7) Să se discute natura conicei

$$(\alpha-1)x^2+2\beta xy-(\alpha+1)y^2+2\alpha x+2\beta y-(\alpha+1)=0,$$

α și β fiind coordonatele unui punct din plan.

R. Avem $\delta=-(\alpha^2+\beta^2-1)$, $\Delta=(\alpha+1)(2\alpha^2+2\beta^2-1)$. Să construim dreapta $x+1=0$ și cercurile $x^2+y^2=1$, $2x^2+2y^2=1$ (Fig. 95).

Regiunea	δ	$\alpha+1$	$2\alpha^2+2\beta^2-1$	Δ	$(A+C)\Delta$	
I	+	+	−	−	+	Elipsă imaginară.
II	+	+	+	+	−	Elipsă reală.
III	−	+	+	+	−	Iperbolă.
IV	−	−	+	−	+	Iperbolă.

Pe cercul $2x^2+2y^2-1=0$, avem $\Delta=0$, $\delta>0$, două drepte imaginare. Pe cercul $x^2+y^2-1=0$, parabolă. Pe dreapta $x+1=0$, avem $\Delta=0$, $\delta<0$, două

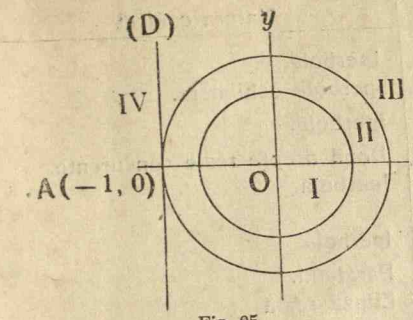


Fig. 95.

drepte reale concurente. In punctul $A(-1, 0)$, $\Delta=0$, $\delta=0$, două drepte paralele; cum $AF-D^2=-2a^2+1$, înlocuind pe a cu -1, avem

$$AF-D^2=-1<0,$$

dreptele paralele sunt reale.

8) Se dau două drepte OA și OB și un punct P în planul lor. O secantă variabilă ce trece prin P le tae în Q și R. Perpendicularele în Q pe OA și R pe OB se tae în M. Se cere locul geometric al punctului M. Să se discute natura curbei după poziția punctului P în plan.

R. Luăm axe Ox și Oy, OA și perpendiculara în O; $P(\alpha, \beta)$. Ecuația secantei variabile este $y-\beta=\lambda(x-\alpha)$; ecuația dreptei OB, $y=ax$. Locul este curba de ordinul al doilea $x^2+axy-x(\alpha+a\beta)+y(\beta-a\alpha)=0$, o iperbolă. Ca să reprezinte două drepte, trebue ca $P(\alpha, \beta)$ să aparțină dreptelor $\beta(a\alpha-\beta)=0$.

9) Se unesc două puncte fixe A și B cu un punct M variabil al unei drepte (D). Perpendicularele în A și B respectiv pe AM și BM se tae în N. Se cere locul lui N.

R. $A(\alpha, 0)$, $B(-\alpha, 0)$, $(D)\equiv Ax+By+C=0$, $M(\lambda, \mu)$, $A\lambda+B\mu+C=0$. Se elimină λ și μ între această ecuație și acelea ale perpendicularelor. Se obține $Bx^2-Axy+Cy-Ba^2=0$, o conică ce trece prin A și B. Dacă $A\neq 0$, iperbolă. Când $A=0$, parabolă. Două drepte, când $B(A^2a^2-C^2)=0$.

10) Se dau punctele $B(0, a)$, $B'(0,-a)$ și un cerc, $x^2+y^2-R^2=0$. Se unește un punct M al cercului cu B, care tae pe Ox în A. O fiind origina, să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor OM și B'A.

R. $M(\alpha, \beta)$, $\alpha^2+\beta^2=R^2$. Se elimină α și β între această ecuație și acelea ale dreptelor OM, B'A. Se găsește $a^2x^2+(a^2-4R^2)y^2-4R^2ay-R^2a^2=0$. Dacă $a>2R$, elipsă; $a<2R$, iperbolă; $a=2R$, parabolă.

11) Să se afle locul geometric al centrelor conicelor $x^2-2y+\lambda(2xy+y^2-2x+1)=0$, λ fiind variabil.

R. Se elimină λ dintre ecuațiile $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; se obține $x^2+xy+y-1=0$, două drepte.

12) Să se afle locul centrelor conicelor $x^2-k(1-k)xy+k^2y^2-ak^2y=0$, k variabil.

R. Iperbola $2x^2+8xy+6y^2-4ax-7ay+2a^2=0$.

13. Să se discute natura conicei $x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2\lambda x+2y+\lambda+1=0$.

R. $AC-B^2=\lambda(1-\lambda)$, $\Delta=-(2\lambda^2-1)(\lambda-1)$, $(A+C)\Delta=-(\lambda+1)(2\lambda^2-1)(\lambda-1)$, $D^2-AF=\lambda^2-\lambda-1$.

λ	δ	Δ	$(A+C)\Delta$	D^2-AF	Natura conicei
$-\infty$	$-$		$-$	$+$	Iperbolă.
-1					Iperbolă echilateră.
	$-$		$+$	$+$	Iperbolă.
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0			Două drepte reale concurente.
	$-$		$-$	$+$	Iperbolă.
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$				0	
	$-$		$-$	$-$	Iperbolă.
0	0				Parabolă.
	$+$		$-$	$-$	Elipsă reală.
$\frac{1}{\sqrt{2}}$		0			Două drepte secante imaginare.
	$+$		$+$	$-$	Elipsă imaginară.
1	0	0			Două drepte paralele imaginare.
	$-$		$-$	$-$	Iperbolă.
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$				0	
	$-$		$-$	$+$	Iperbolă.
∞					

14). Să se discute natura conicei $\alpha x^2+2\beta xy-(\alpha-2)y^2+2x+2y+2=0$, (α,β) fiind coordonatele unui punct din plan.

R. $AC-B^2=-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha)$; $\Delta=-2(\alpha^2+\beta^2-2\alpha-\beta+1)$. Construim cercurile $(C)\equiv x^2+y^2-2x=0$, $(C')\equiv x^2+y^2-2x-y+1=0$ (Fig. 96). Avem tabloul

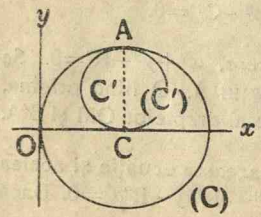


Fig. 96.

Poziția lui $M(\alpha,\beta)$	Natura conicei
Interior lui (C')	Elipsă, imaginară;
Pe (C'), afară de A . . .	Două drepte secante imaginare;
In punctul A	Două drepte paralele imaginare;
Exterior lui (C'), interior lui (C)	Elipsă reală;
Pe (C), afară de A . . .	Parabolă;
Exterior lui (C)	Iperbolă.

15). Să se afle locul centrelor conicelor $x^2+2\lambda xy+\lambda y^2-2\lambda x-2y+\lambda=0$, și să se distingă pe acest loc punctele ce provin din centre de elipsă sau iperbolă.

R. Locul centrelor se obține eliminând λ între ecuațiile $\lambda(y-1)+x=0$, $\lambda(x+y)-1=0$, și se obține $(x+1)(x+y-1)=0$, două drepte. Se rezolvă ecuațiile centrului și coordonatele lui sunt $\frac{x}{-\lambda+\lambda^2}=\frac{y}{-\lambda^2+1}=\frac{1}{\lambda-\lambda^2}$, în funcțiune de parametrul λ. 1°. Se vede că λ variind de la $-\infty$ la 0, ecuația dată reprezintă iperbole. Valoarea $\lambda=0$ dă o parabolă cu centrul la infinit pe Oy. 2°. Apoi λ variind de la 0 la 1, avem elipse. Valoarea $\lambda=1$ dă o parabolă, care se reduce la dreptele confundate $(x+y-1)^2=0$, centrul fiind orice punct al dreptei $x+y-1=0$. 3°. Dacă λ variază de la 1 la ∞, avem iperbole. Pentru a distinge care părți din locul centrelor corespunde la centre de elipse, iperbole, etc., se construește curba

$$x=\frac{-\lambda+\lambda^2}{\lambda-\lambda^2},\quad y=\frac{-\lambda^2+1}{\lambda-\lambda^2},$$

pentru λ variind de la $-\infty$ la 0; apoi de la 0 la 1; în fine, de la 1 la ∞.

Pe acest exemplu simplu, este ușor de văzut că dreapta $x+y-1=0$ este locul centrelor parabolei corespunzătoare lui $\lambda=1$; că porțiunea KE din dreapta $x=-1$. $-\infty<y<1$ provine din centre de iperbole; că partea CF, $x=-1$, y variind de la 2 la ∞, provine din centre de elipse; în fine că partea CK, $x=-1$, y variind de la 2 la 1, provine din centre de iperbole (Fig. 97).

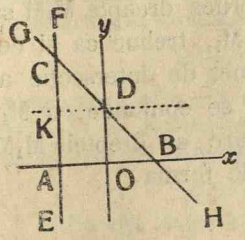


Fig. 97.

In orice chestiune de acest fel, problema se rezolvă astfel. Se calculează coordonatele centrului, $x=f(\lambda)$, $y=g(\lambda)$, λ fiind parametrul variabil din ecuația conicei. Se vede apoi din tabloul cu discuția naturei conicei, care sunt intervalele în care trebue să rămâe cuprins λ ca să reprezinte elipse, iperbole, parabole, etc. Se construește, cum vom vedea mai departe, curba $x=f(\lambda)$, $y=g(\lambda)$, făcând pe λ să varieze în intervalele de mai sus și avem, astfel, ramurile curbei locul centrelor, $x=f(\lambda)$, $y=g(\lambda)$, care provin din centre de elipse, iperbole, etc.

Proprietăți generale ale conicelor.

Tangente.

83. **Intersecția unei drepte cu o conică.** Ecuația omogenă a unei conice este

$$(1)\qquad f(x,y,z)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0.$$

Ecuația conicei în coordonate carteziene obișnuite, (x, y), se obține din ecuația precedentă făcând $z=1$.

Să considerăm dreapta definită de punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2\ y_2, z_2)$. Un punct al acestei drepte are coordonate de forma

$$(2)\qquad x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ z_1+\lambda z_2.$$

A găsi punctele de intersecție ale dreptei M_1M_2 cu conica (1), înseamnă a găsi valorile lui λ corespunzătoare acestor puncte. Scriind că punctul ale cărui coordonate sunt date de expresiile (2) se află pe conica (1), rezultă

$$f(x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ z_1+\lambda z_2)=\lambda^2 f(x_2,\ y_2,\ z_2)+$$
$$\lambda\left[x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}\right]+f(x_1,\ y_1,\ z_1)=0.$$

Această ecuație fiind de gradul al doilea în λ, ne dă două valori, λ' și λ'', pentru λ, deci două puncte de intersecție

$$x_1+\lambda' x_2,\ y_1+\lambda' y_2,\ z_1+\lambda' z_2;\ x_1+\lambda'' x_2,\ y_1+\lambda'' y_2,\ z_1+\lambda'' z_2,$$

are dreapta M_1M_2 cu o conică oarecare.

84. **Tangenta într'un punct al unei conice.** Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un punct al conicei (1), deci

$$f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare (Fig. 98) al tangentei în M_1 la conica (1). Pentruca dreapta M_1M să fie tangentă în M_1, trebue ca și cel de al doilea punct de intersecție al ei cu conica să se confunde cu M_1. Un punct oarecare al dreptei M_1M are cordonate de forma

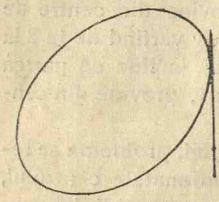


Fig. 98.

$$x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z.$$

Scriind că acest punct este pe conică, urmează

$$f(x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z)=\lambda^2 f(x, y, z)+\lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)=0,$$

$$f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

Această ecuație admite rădăcina $\lambda'=0$, care corespunde punctului de intersecție $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Pentru ca M_1M să fie tangenta în M_1, trebue ca și al doilea punct de intersecție să se confunde cu M_1, deci și cealaltă rădăcină pentru λ să fie nulă, adică

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0. \tag{4}$$

Deci, pentruca M_1M să fie tangentă în $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la conica dată, trebue ca coordonatele unui punct oarecare M al acestei tangente să verifice relația (4), care este ecuația tangentei în $M_1(x_1,y_1,z_1)$ la conica $f(x,y,z)=0$, la care trebue adăugată relația $f(x_1,y_1,z_1)=0$, care exprimă că punctul este pe conică. Se poate vedea că ecuația tangentei se mai poate scrie și sub forma

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Desvoltând ecuația (4), se vede că ecuația acestei tangente este

$$x(Ax_1+By_1+Dz_1)+y(Bx_1+Cy_1+Ez_1)+z(Dx_1+Ey_1+Fz_1)=0,$$

sau, în coordonate carteziene (x, y), $z=1$, $z_1=1$,

$$x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

care se mai poate scrie

$$Ax_1x+B(xy_1+yx_1)+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0,$$

a cărei formă este strâns legată de aceea a ecuații conicei,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Exemple. 1). Să se scrie ecuaţia tangentei la conica

$$x^2-2xy+2y^2-x+3y-3=0,$$

într'unul din punctele unde tae bisectoarea întâi a axelor de coordonate. Ecuaţia bisectoarei fiind $y=x$, abscisele punctelor de intersecţie ale conicei cu bisectoarea sunt date de ecuaţia

$$x^2-2x^2+2x^2-x+3x-3=0, \quad x^2+2x-3=0.$$

Avem $x'=1$, $x''=-3$; deci punctele de intersecţie au coordonatele (1, 1), (—3,—3). Să scriem tangenta în punctul (1, 1). Să aplicăm formula (4). Făcând ecuaţia conicei omogenă, avem

$$f(x,y,z)\equiv x^2-2xy+2y^2-xz+3yz-3z^2=0.$$

Ecuaţia tangentei este

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,$$

$$x(2x_1-2y_1-z_1)+y(-2x_1+4y_1+3z_1)+z(-x_1+3y_1-6z_1)=0.$$

Inlocuind $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=z=1$, ecuaţia tangentei în (1, 1) este $x-5y+4=0$.

2) *Să se scrie ecuaţia iperbolelor echilatere, care trec prin origină şi sunt tangente în origină dreptei* $y+2x=0$. Ecuaţia unei iperbole echilatere ce trece prin origină este de forma (A+C=0)

$$x^2+2Bxy-y^2+2Dx+2Ey=0.$$

Să scriem că tangenta în origină la această conică se confundă cu $y+2x=0$. Dar, tangenta într'un punct (x_1,y_1,z_1) fiind

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0, \quad x(x_1+By_1+Dz_1)+y(Bx_1-y_1+E)+z(Dx_1+Ey_1)=0,$$

să înlocuim pe $x_1=y_1=0$, $z=z_1=1$ şi avem

$$Dx+Ey=0,$$

adică, ecuaţia tangentei în origină la o conică este aceea formată de grupul termenilor de gradul întâi din ecuaţia conicei. Scriind că $Dx+Ey=0$, $y+2x=0$ reprezintă aceeaş dreaptă, urmează

$$\frac{D}{2}=\frac{E}{1}, \quad D=2E,$$

aşa că ecuaţia iperbolelor echilatere este

$$x^2+2Bxy-y^2+4Ex+2Ey=0,$$

B şi E fiind arbitrari.

85. **Tangente duse dintr'un punct exterior.** Fie $M_1(x_1,y_1,z_1)$ un punct dat (Fig. 99) şi $M(x,y,z)$ un punct oarecare al unei tangente duse din M_1 la conica $f(x,y,z)=0$. Ecuaţia care dă valorile lui λ corespunzătoare punctelor de intersecţie,

$$x_1+\lambda x, \quad y_1+\lambda y, \quad z_1+\lambda z,$$

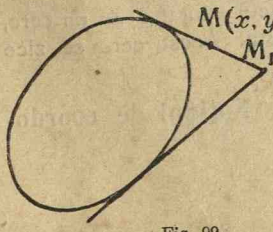


Fig. 99.

ale dreptei M_1M cu conica, este

(5) $$\lambda^2 f(x, y, z)+\lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)+f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

Pentru ca dreapta M_1M să fie tangentă la conică, trebue ca punctele de intersecție să fie confundate, adică ecuația (5) să aibă rădăcinile λ', λ'' confundate, deci

(6) $$\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2=4f(x, y, z)f(x_1, y_1, z_1).$$

Aceasta este ecuația comună a celor două tangente duse din $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la conica $f(x, y, z)=0$.

Exemple. 1). *Să se afle ecuația tangentelor duse din punctul* (1, 1) *la conica* $x^2+2y^2-1=0$. Făcând ecuația omogenă, avem $x^2+2y^2-z^2=0$. Ecuația comună a tangentelor este dată de (6), $(xx_1+2yy_1-zz_1)^2=4(x^2+2y^2-z^2)(x_1^2+2y_1^2-z_1^2)$. Făcând $x=y=1$, $z=z_1=1$, ecuația comună a tangentelor este

$(x+2y-1)^2=2(x^2+2y^2-1)$, $x^2+2x-3-4y(x-1)=0$, $(x-1)(x+3)-4y(x-1)=0$, $(x-1)(x-4y+3)=0$, astfel că ecuațiile tangentelor duse din (1,1) sunt $x-1=0$, $x-4y+3=0$.

2) *Să se afle locul punctelor de unde se pot duce la o conică două tangente perpendiculare.* Ecuația conicei fiind $f(x, y, z)=0$, aceea a tangentelor duse din $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este (6); făcând $z=z_1=1$, aceasta ecuație devine

$$[x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+Dx_1+Ey_1+F]^2=(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F).$$

Transportând axele paralel cu ele înșii-le, în punctul de intersecție al acestor două drepte (centrul conicei redusă la aceste două drepte), ecuația acestor două drepte, față de noile axe, se reduce (No. 79, observare) la grupul termenilor de gradul al doilea,

$$X^2(Ax_1+By_1+D)^2+2XY(Ax_1+By_1+D)(Bx_1+Cy_1+E)+Y^2(Bx_1+Cy_1+E)^2-(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)(AX^2+2BXY+CY^2)+0.$$

Ca să fie perpendiculare, trebue ca suma coeficienților lui X^2 și Y^2 să fie nulă, adică

$$(Ax_1+By_1+D)^2-A(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)+(Bx_1+Cy_1+E)^2-C(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)=0.$$

Se vede că locul geometric al punctelor $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este

$$(Ax+By+D)^2+(Bx+Cy+E)^2-(A+C)(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F)=0,$$

sau

$$(x^2+y^2)(B^2-AC)+\ldots=0.$$

Deci, în cazul elipsei sau iperbolei ($B^2-AC\neq 0$), locul căutat este un cerc, iar în cazul parabolei ($B^2=AC$), locul este o dreaptă. Acest cerc se zice *cercul ortoptic*, sau al lui *Monge*.

86. Ecuația tangențială a unei conice. Noțiuni de coordonate tangențiale. Să exprimăm că dreapta

(7) $$ux+vy+wz=0$$

este tangentă la conica

$$f(x, y, z)=0.$$

Pentru aceasta, e destul a exprima că există pe conică un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$, în care tangenta se confundă cu dreapta dată. Cu alte cuvinte că dreapta

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,\ f(x_1, y_1, z_1)=0,$$

este echivalentă cu dreapta (7). Deci, trebue a găsi o valoare diferită de zero pentru λ, astfel în cât să avem

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{u}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{w}=2\lambda.$$

De unde

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\lambda u,\quad \frac{\partial f}{\partial y_1}=2\lambda v,\quad \frac{\partial f}{\partial z_1}=2\lambda w, \tag{8}$$

sau

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Dz_1-\lambda u=0,\\ Bx_1+Cy_1+Ez_1-\lambda v=0,\\ Dx_1+Ey_1+Fz_1-\lambda w=0. \end{cases} \tag{9}$$

Dar, aplicând o proprietate a lui Euler asupra funcţiunilor omogene, avem

$$2f(x_1, y_1, z_1)=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}.$$

Ţinând seamă de (8), obţinem

$$2f(x_1, y_1, z_1)=x_1 2\lambda u+y_1 2\lambda v+z_1 2\lambda w,$$

$$f(x_1, y_1, z_1)=\lambda(ux_1+vy_1+wz_1).$$

Insă punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ fiind pe conică, urmează $f(x_1, y_1, z_1)=0$ şi cum $\lambda\neq 0$, rezultă

$$ux_1+vy_1+wz_1=0. \tag{10}$$

Vom avea condiţia care exprimă că dreapta $ux+vy+wz=0$ este tangentă la conica dată, eliminând pe x_1, y_1, z_1, λ între ecuaţiile omogene (9) şi (10). Deci

$$\varphi(u, v, w)=-\begin{vmatrix} A & B & D & u\\ B & C & E & v\\ D & E & F & w\\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Această ecuaţie se zice *ecuaţia tangenţială* a conicei $f(x, y, z)=0$.

Insemnând cu a, b, c, d, e, f minorii determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

adică

$$a = CF - E^2,\ b = ED - BF,\ c = AF - D^2,\ d = BE - CD,\ e = BD - AE,\ f = AC - B^2,$$

ecuația tangențială a conicei $f((x, y, z) = 0$ se poate scrie

$$\varphi(u, v, w) \equiv au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0. \tag{12}$$

Deci, dacă dreapta $ux + vy + wz = 0$ este tangentă la conica $f(x, y\ z) = 0$, avem $\varphi(u, v, w) = 0$, iar coordonatele punctului de contact sunt date de ecuațiile (9).

Să presupunem $\Delta \neq 0$. Rezolvând ecuațiile (9), găsim

$$x_1 = \frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u},\ y_1 = \frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial v},\ z_1 = \frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial w}.$$

Deci, coordonatele punctului de contact, afară de un factor constant, sunt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u},\ \frac{\partial \varphi}{\partial v},\ \frac{\partial \varphi}{\partial w}. \tag{13}$$

Invers, fiind cunoscută ecuația tangențială,

$$\varphi(u, v, w) \equiv au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0, \tag{14}$$

a unei conice, să găsim ecnația ei punctuală, $f(x, y, z) = 0$. Pentru aceasta, să considerăm un sistem de valori (u, v, w) care verifică ecuația $\varphi(u, v, w) = 0$ și fie

$$ux + vy + wz = 0 \tag{15}$$

dreapta corespunzătoare tangentă la curba $f(x, y, z) \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots = 0$, a cărei ecuație o căutăm. Tangenta la curba $f(x, y, z) = 0$ într'un punct (x_1, y_1, z_1) fiind

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

comparând cu ecuația (15), urmează

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{w} = 2\lambda,$$

sau

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Dz_1 - 2\lambda u &= 0, \\ Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 - 2\lambda v &= 0, \\ Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 - 2\lambda w &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

la care trebue să adăugăm şi

$$ux_1+vy_1+wz_1=0, \tag{17}$$

care exprimă că punctul (x_1,y_1,z_1) de contact este pe tangenta (15). Presupunând

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0,$$

să rezolvăm că ecuaţiile (16) în raport cu x_1, y_1, z_1. Avem

$$x_1=\frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad y_1=\frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad z_1=\frac{\lambda}{\Delta}\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}.$$

Deci fiind dată conica a cărei ecuaţie tangenţială este $\varphi(u,v,w)=0$, punctul de contact (x_1, y_1, z_1) al tangentei $ux+vy+wz=0$ la această conică, este dat de

$$\rho x_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \rho y_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \rho z_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}, \tag{18}$$

ρ fiind un parametru oarecare, diferit de zero.

Desvoltând aceaste ecuaţii, avem

$$au+bv+dw-\rho x_1=0,$$
$$bu+cv+ew-\rho y_1=0,$$
$$du+ev+fw-\rho z_1=0.$$

Eliminând pe u, v, w între aceste ecuaţii şi (17), se obţine

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x_1 \\ b & c & e & y_1 \\ d & e & f & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

astfel că locul punctelor de contact (x_1, y_1, z_1) a tangentelor la conica $\varphi(u, v, w)=0$ are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}=0, \tag{19}$$

şi care se zice ecuaţia punctuală a conicei date.

Deci, fiind dată ecuaţia tangenţială $\varphi(u, v, w)=0$ a unei conice, ecuaţia ei punctuală (19) se obţine eliminând pe u, v, w între

ecuaţiile (17) şi (18), adică

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\rho x,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\rho y,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}=\rho z,\ ux+vy+wz=0.$$

Desvoltând (19), se obţine

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

A, B, . . . F fiind minorii elementelor $a, b, \ldots f$ din determinantul

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

Observări. I. O ecuaţie de gradul întâi, $ux_0+vy_0+wz_0=0$, în coordonate tangenţiale (u, v, w), reprezintă un punct, (x_0, y_0, z_0). In adevăr, ecuaţia dată, însemnează că dreapta $ux+vy+wz=0$, ale cărei coordonate tangenţiale sunt (u, v, w), trece prin punctul de coordonate omogene (x_0, y_0, z_0). De ex., $u+w=0$ reprezintă punctul de coordonate omogene (1, 0, 1); $u^2+v^2=0$, sau $(u+iv)(u-iv)=0$, reprezintă punctele $u+iv=0$, $u-iv=0$, sau, în coordonate omogene, (1, i, 0), (1, $-i$, 0), adică punctele ciclice, I şi J; $w=0$ reprezintă origina, (0, 0, 1).

II. Să considerăm ecuaţia tangenţială a unei conice,

(20) $$g(u, v, w)\equiv au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0.$$

Să aflăm, cu procedeul de mai sus, ecuaţ punctuală a conicei,

(21) $$f(x, y, z)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

A, B, . . . fiind minorii elementelor $a, b, \ldots$ din

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

Dacă $\Delta_1=0$, forma cuadratică (20), $g(u, v, w)$, se descompune în doi factori lineari,

$$g(u, v, w)\equiv(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w).$$

Conica $g(u, v, w)=0$ se reduce la două puncte,

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0,\ \alpha' u+\beta' v+\gamma' w=0,$$

ale căror coordonate omogene sunt (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. Deci, dacă $\Delta_1=0$, conica reprezentată de ecuaţia $g(u, v, w)=0$ se reduce la două puncte.

Să presupunem $\Delta_1\neq 0$. Să calculăm determinantul

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Avem, efectuând produsul determinanţilor,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Delta_1 = \begin{vmatrix} Aa+Bb+Dd & 0 & 0 \\ 0 & Bb+Cc+Ee & 0 \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}.$$

Dar

$$Aa+Bb+Dd=\Delta_1,\ Bb+Cc+Ee=\Delta_1, \cdots$$

Deci

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Delta_1=\Delta_1^2 f, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta_1 . f.$$

Genul conicei date este cunoscut dacă se ştie semnul expresii $AC-B^2=\Delta_1 f$. Deci, din (21), dacă $\Delta_1 f>0$, atunci $AC-B^2>0$, conica este de gen elipsă; dacă $\Delta_1 f<0$, conica este de gen iperbolă; dacă $f=0$, conica este de gen parabolă.

Aplicaţie. Să se arate că dreptele care se bucură de proprietatea că distanţele lor d şi d' la două puncte fixe A *şi* B *verifică relaţia* $d^2-d'^2=k^2$, *sunt tangente la o conică.* Luând dreapta AB ca Ox (Fig. 100) şi perpendiculara pe mijlocul ei ca Oy, fie

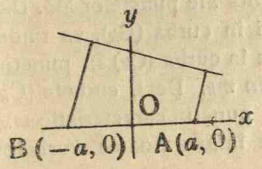


Fig. 100.

$$ux+vy+wz=0$$

ecuaţia unei drepte din plan. Exprimând analitic condiţia geometrică, avem

$$\frac{(au+w)^2}{u^2+v^2} - \frac{(-au+w)^2}{u^2+v^2} = k^2,$$

sau

$$k^2(u^2+v^2)-2auw=0.$$

Ecuaţia tangenţială fiind de gradul al doilea în raport cu (u,v,w), reprezintă o conică şi anume o parabolă, căci $f=0$ (lipseşte termenul cu w^2). Deci dreptele considerate sunt tangente la o parabolă. Ecuaţia punctuală a acestei parabole este

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} k^2 & 0 & -a & x \\ 0 & k^2 & 0 & y \\ -a & 0 & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$y^2=k^2\left(x+\frac{2a}{k^2}\right).$$

87. **Noţiuni asupra curbelor înfăşurătoare.** I. Să considerăm o familie de curbe (C), $f(x,y,\lambda)=0$, depinzând de parametrul variabil λ. Fie (C_k) (Fig. 101) curba corespunzătoare la o valoare determinată λ şi (C_{k-1}) curba infinit vecină de (C_k) care corespunde la valoarea $\lambda+\Delta\lambda$ a parametrului. Insemnând cu M_k unul din punctele de intersecţie ale curbelor (C_{k-1}) şi (C_k), aceste puncte sunt date de ecuaţiile în x şi y,

$$f(x,y,\lambda)=0,\ f(x,y,\lambda+\Delta\lambda)=0,$$

sau de ecuaţiile

$$f(x,y,\lambda)=0,\ \frac{f(x,y,\lambda+\Delta\lambda)-f(x,y,\lambda)}{\Delta\lambda}=0,$$

care, la limită, devin

(22) $$f(x,y,\lambda)=0,\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0.$$

Deci punctele M_k ale curbei (C_k) tind către anumite puncte m_k date de ecuaţiile (22). Aceste puncte m_k se zic *punctele caracteristice* ale curbei (C_k). Locul punctelor caracteristice m_k, când λ sau curba (C_k) variază, se zice *curba înfăşurătoare* (E) a curbelor (C).

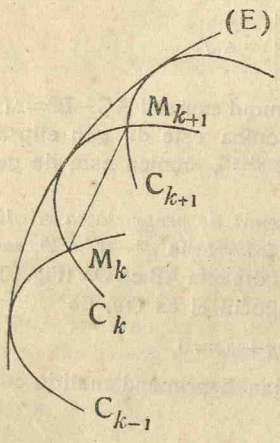


Fig. 101.

Curba (E) are o proprietate interesantă şi anume este tangentă la fiecare din curbele familii (C) respectiv în punctele caracteristice ale fiecărei curbe (C). In adevăr, fie M_k un punct de intersecţie al curbelor vecine (C_{k-1}), (C_k); să considerăm punctul M_{k+1} vecin cu M_k şi care este la intersecţia curbei (C_k) cu curba (C_{k+1}) infinit vecină. Când curbele (C_{k-1}) şi (C_{k+1}) tind către curba (C_k), coarda M_kM_{k+1} tinde către tangenta în punctul m_k al înfăşurătoarei (E), care este locul punctelor limită ale punctelor M_k. Dar M_kM_{k+1} fiind coardă şi în curba (C_k), va tinde, la limită, către tangenta la curba (C_k) în punctul limită al lui M_k, adică în m_k. Deci, curbele (C_k) şi (E) sunt tangente în punctul caracteristic m_k. Aşa dar, curba (E) este înfăşurătoarea curbelor (C_k).

Exemplu. Să se afle înfăşurătoarea dreptelor

$$(1-\lambda^2)x+2\lambda y+\lambda^2 a=0,$$

λ fiind un parametru variabil.

Va trebui să eliminăm pe λ între ecuaţia dreptei şi derivata sa în raport cu λ,

$$-2\lambda x+2y+2\lambda a=0.$$

De unde $\lambda=\frac{y}{x-a}$, pe care înlocuind-o în prima, si înlăturând soluţia $x-a=0$, avem

$$x^2+y^2-ax=0.$$

Deci, înfăşurătoarea acestor drepte este un cerc.

II. *Observare.* Dacă avem de găsit înfăşurătoarea unei curbe variabile,

(23) $$f(x, y, \lambda, \mu)=0,$$

a cărei ecuaţie conţine doi parametrii λ şi μ, legaţi cu relaţia $g(\lambda, \mu)=0$, acest caz revine la precedentul, căci se poate considera μ ca funcţiune de λ, definită de ecuaţia $g(\lambda, \mu)=0$. După regula pe mai sus, pentru a găsi înfăşurătoarea, trebue a adăuga la relaţia $f(x, y, \lambda)=0$, pe derivata în λ a ecuaţii (23), adică

(24) $$\frac{\partial f}{\partial \lambda}+\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\lambda}=0.$$

Dar, din $g(\lambda, \mu)=0$, avem

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}+\frac{\partial g}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\lambda}=0,$$

de unde scoţând pe $\frac{d\mu}{d\lambda}$ şi înlocuind în (24), găsim

(25) $$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial g}{\partial \mu}-\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial g}{\partial \lambda}=0.$$

Se obţine deci ecuaţia înfăşurătoarei, eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile $f(x, y, \lambda, \mu)=0$, $g(\lambda, \mu)=0$ şi (25), $\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial g}{\partial \mu}-\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial g}{\partial \lambda}=0$.

III. *Ca aplicaţie, să ne propunem a găsi ecuaţia punctuală a unei conice, cunoscând ecuaţia ei tangenţială.* Pentru aceasta, fie

(26) $$g(u, v, w)\equiv au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0$$

ecuaţia tangenţială a conicei. Chestiunea revine a arăta că toate dreptele $ux+vy+wz=0$, ale căror parametrii (coordonate tangenţiale) u, v, w verifică ecuaţia (26), sunt tangente la o conică a cărei ecuaţie punctuală se caută. Deci, trebue a găsi înfăşurătoarea dreptelor

(27) $$ux+vy+wz=0,$$

când u, v, w verifică ecuaţia (26). Deşi sunt trei parametrii, u, v, w, de fapt sunt numai doi, căci se poate presupune unul diferit de zero, de ex., $w\neq 0$; acest coeficient poate fi considerat constant şi deci rămân numai doi parametrii, u şi v ($w=1$).

Scriind ecuaţia (25), în cazul nostru, avem

$$x\frac{\partial g}{\partial v}-y\frac{\partial g}{\partial u}=0,$$

sau

(28) $$\frac{x}{\frac{\partial g}{\partial u}}=\frac{y}{\frac{\partial g}{\partial v}}=\frac{ux+vy}{u\frac{\partial g}{\partial u}+v\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

Dar, din (27), $ux+vy=-wz$, iar după teorema lui Euler de la funcţiunile omogene, avem

$$u\frac{\partial g}{\partial u}+v\frac{\partial g}{\partial v}+w\frac{\partial g}{\partial w}=2g(u, v, w)=0,\quad u\frac{\partial g}{\partial u}+v\frac{\partial g}{\partial v}=-w\frac{\partial g}{\partial w}.$$

Relaţiunile (28) devin

$$\frac{x}{\frac{\partial g}{\partial u}}=\frac{y}{\frac{\partial g}{\partial v}}=\frac{-wz}{-w\frac{\partial g}{\partial w}}=\frac{z}{\frac{\partial g}{\partial w}},$$

sau

(29) $$\frac{x}{\frac{\partial g}{\partial u}}=\frac{y}{\frac{\partial g}{\partial v}}=\frac{z}{\frac{\partial g}{\partial w}}.$$

Deci, punctul de contact (x, y, z) al dreptei (27) cu înfăşurătoarea sa verifică ecuaţiile (27) şi (29). Egalând rapoartele cu $\frac{1}{2\rho}(\rho\neq 0)$, aceste ecuaţii se pot scrie

$$\begin{aligned} au+bv+dw-\rho x&=0,\\ bu+cv+ew-\rho y&=0,\\ du+ev+fw-\rho z&=0,\\ xu+yv+zw\quad\ &=0. \end{aligned}$$

Eliminând pe u, v, w, ρ între aceste ecuaţii, obţinem

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix} = 0,$$

care este înfăşurătoarea dreptelor considerate, sau ecuaţia punctuală a conicei căreia i se cunoaşte ecuaţia tangenţială.

Pol şi Polară.

88. **Polara unui punct.** Să ducem printr'un punct fix $P(x_1,y_1,z_1)$ o dreaptă variabilă ce tae conica dată (Fig. 102) în punctele M' şi M'' şi fie M conjugatul armonic a lui P în raport cu M' şi M''. Polara punctului P în raport cu conica considerată este locul geometric al punctului M când secanta PM se roteşte în jurul lui P.

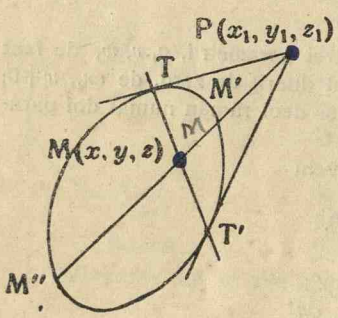


Fig. 102.

Pentru a găsi ecuaţia polarei punctului P, să notăm cu $M(x,y,z)$ un punct oarecare din plan. Valorile lui λ corespunzătoare punctelor de intersecţie ale conicei $f(x,y,z)=0$ cu dreapta PM,

$$x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z,$$

sunt date de ecuaţia

$$f(x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z)=0,$$

$$(1)\qquad \lambda^2 f(x,y,z)+\lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)+f(x_1,y_1,z_1)=0.$$

Pentru ca M să aparţină polarei lui P, trebue ca P şi M să fie conjugate armonic în raport cu M' şi M'', ale căror coordonate sunt

$$M'(x_1+\lambda' x,\ y_1+\lambda' y,\ z_1+\lambda' z),\quad M''(x_1+\lambda'' x,\ y_1+\lambda'' y,\ z_1+\lambda'' z),$$

λ' şi λ'' fiind rădăcinile ecuaţii (1). Dar, dacă P şi M sunt conjugate armonic în raport cu M' şi M'', invers, şi M' şi M'' sunt conjugate armonic în raport cu P şi M, ceea ce se exprimă prin condiţia $\lambda'+\lambda''=0$, adică

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,$$

care este ecuaţia polarei punctului $P(x_1,y_1,z_1)$. Această ecuaţie a polarei se mai scrie şi sub forma $x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}=0$. Deci, polara unui punct faţă de o conică este o dreaptă.

Presupunând că secanta variabilă ce trece prin P ajunge să fie tangenta PT la conica (C), punctele M' și M'' de intersecție ale secantei cu conica se confundă cu punctul de contact T, iar conjugatul armonic M al lui P se confundă tot cu T. Deci, polara punctului P trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din acel punct la conica dată, iar, în cazul când punctul P este exterior conicei, polara se obține unind punctele de contact ale conicei cu cele două tangente duse din acel punct la conică.

Ecuația polarei punctului $P(x_1,y_1,z_1)$ seamănă cu a tangentei, numai că în cazul tangentei punctul P este pe curbă, ceea ce se poate verifica și geometric, construind polara punctului P, care, în caz când punctul P este pe curbă, polara devine tangenta în acel punct.

89. **Polul unei drepte.** Am văzut că orice punct P are o polară (D) în raport cu o conică. Punctul P se zice polul dreptei (D). Se poate propune problema inversă și anume, fiind dată dreapta, să se afle polul acestei drepte. Fie

$$ux+vy+wz=0 \tag{2}$$

ecuația unei drepte date și să însemnăm cu $P(x_1,y_1,z_1)$ polul acestei drepte, adică punctul a cărui polară,

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,$$

trebue să fie identică cu dreapta (2). Deci

$$\frac{u}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{v}{\frac{\partial f}{\partial y_1}}=\frac{w}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}=\frac{1}{2\rho},\quad \rho\neq 0,$$

sau, rezolvând,

$$\begin{aligned} Ax_1+By_1+Dz_1-\rho u&=0,\\ Bx_1+Cy_1+Ez_1-\rho v&=0,\\ Dx_1+Ey_1+Fz_1-\rho w&=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Acest sistem de ecuații lineare în raport cu x_1,y_1,z_1, admite soluții determinate dacă determinantul necunoscutelor

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix}$$

este diferit de zero. Prin urmare, dacă o conică nu se reduce la două drepte, orice dreaptă are un pol, ale cărui coordonate (x_1,y_1,z_1) se obțin rezolvând ecuațiile (3).

Dacă $\Delta=0$, să presupunem că determinantul

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2 \neq 0,$$

pe care să-l luăm ca determinant principal. Pentru ca sistemul (3) să fie compatibil, trebue ca determinantul caracteristic să fie nul, adică

$$\begin{vmatrix} A & B & \rho u \\ B & C & \rho v \\ D & E & \rho w \end{vmatrix} = 0,$$

și cum $\rho \neq 0$, aceasta exprimă că dreptele

$$Ax+By+Dz=0,$$
$$Bx+Cy+Ez=0,$$
$$ux+vy+wz=0$$

sunt concurente. Dar, $Ax+By+Dz=0$, $Bx+Cy+Ez=0$, în cazul $\Delta=0$, ne dau centrul conicei $f(x,y,z)=0$, care este punctul de intersecție al dreptelor la care se reduce conica $f(x,y,z)=0$. Deci, când conica se reduce la două drepte, pentru ca dreapta să aibă un pol, trebue să treacă prin punctul de intersecție al dreptelor din care este formată conica. Presupunând că cele două drepte la care se reduce conica $f(x,y,z)=0$ sunt D_1 și D_2, că dreapta D al cărei pol P se caută trece prin intersecția dreptelor D_1, D_2, polul P este un punct oarecare al celei de a patra rază a fascicolului armonic format cu dreptele D_1, D_2, D.

Observări. I. Punctele de contact al unei conice $f(x,y,z)=0$, cu tangentele duse din punctul (x_1,y_1,z_1) sunt la intersecția conicei cu polara lui (x_1,y_1,z_1),

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0.$$

II. Polul (x_1,y_1,z_1) al unei drepte $ux+vy+wz=0$ verifică relațiile

$$\frac{u}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{v}{\frac{\partial f}{\partial y_1}}=\frac{w}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}. \tag{4}$$

Dacă dreapta $ux+vy+wz=0$ este dreapta de la infinit, adică $z=0$, atunci trebue ca $u=0$, $v=0$, căci numai în aceste condiții ecuația $ux+vy+wz=0$, se reduce la $z=0$. Egalând primele două rapoarte (4) cu ultimul, urmează

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1}=0,$$

ceea ce probează că punctul (x_1,y_1,z_1) este centrul conicei. Deci, *polul dreptei de la infinit este centrul conicei.*

90. **Proprietăți.** I. *Dacă un punct* M *descrie o dreaptă* (D), *polara punctului* M *trece prin polul dreptei* (D). In adevăr, fie P polul dreptei (D) și M un punct al acestei drepte (Fig. 103). Punctele M și P fiind conjugate armonic în raport cu conica, polara lui M trece prin punctul P.

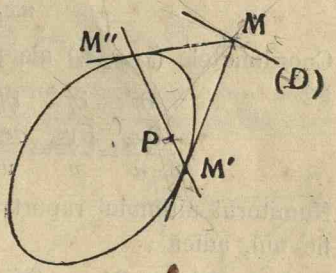


Fig. 103.

Demonstrația analitică se face astfel. Fie (x_1,y_1,z_1) coordonatele punctului P. Polara sa (D) are ecuația

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,$$

care se mai poate scrie

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Fie $M(x_2,y_2,z_2)$ un punct al acestei drepte, adică

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}=0.$$

Din această relație se vede că polara punctului $M(x_2,y_2,z_2)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x_2}+y\frac{\partial f}{\partial y_2}+z\frac{\partial f}{\partial z_2}=0,$$

trece prin punctul $P(x_1,y_1,z_1)$. Deci, când un punct descrie o dreaptă, polarele acestor puncte se învârtesc în jurul polului acelei drepte.

II. *Reciproc dacă o dreaptă trece printr'un punct fix, polurile acestor drepte se află pe polara punctului fix.* In adevăr, fie (D') o dreaptă ce trece prin punctul fix P și fie M polul dreptei (D'). Punctele M și P fiind conjugate în raport cu conica, polara punctului P conține punctul M.

In mod analitic, demonstrația se face astfel. Polara punctului $P(x_1,y_1,z_1)$ este

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0.$$

Un punct $M(x_2,y_2,z_2)$ al acestei drepte verifică relația

$$x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,\quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}=0,$$

care arată că polara punctului $M(x_2,y_2,z_2)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x_2}+y\frac{\partial f}{\partial y_2}+z\frac{\partial f}{\partial z_2}=0,$$

trece prin $P(x_1,y_1,z_1)$.

Sau altfel. Fie $ux+vy+wz=0$ o dreaptă (D') ce trece prin punctul fix $P(x_1,y_1,z_1)$. Avem

$$ux_1+vy_1+wz_1=0.$$

Coordonatele (x_2,y_2,z_2) ale polului dreptei (D') verifică relaţiile

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{u}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_2}}{v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z_2}}{w}=\frac{x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}}{ux_1+vy_1+wz_1}.$$

Numitorul ultimului raport fiind nul, urmează că şi numărătorul să fie nul, adică

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}=0, \text{ sau } x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}=0,$$

relaţie care probeaza că polul $M(x_2,y_2,z_2)$ al dreptei (D') este pe polara punctului $P(x_1,y_1,z_1)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0.$$

91. **Drepte conjugate în raport cu o conică.** Dreptele

$$u_1x+v_1y+w_1z=0,\ u_2x+v_2y+w_2z=0$$

sunt conjugate în raport cu conica $f(x, y, z)=0$, când polul uneia se află pe cealaltă. Insemnând cu (x_1, y_1, z_1) polul dreptei (u_1, v_1, w_1), avem

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{u_1}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{v_1}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{w_1}=2\lambda;$$

sau

$$(5)\quad \begin{cases} Ax_1+By_1+Dz_1-\lambda u_1=0, \\ Bx_1+Cy_1+Ez_1-\lambda v_1=0, \\ Dx_1+Ey_1+Fz_1-\lambda w_1=0. \end{cases}$$

Scriind că polul (x_1, y_1, z_1) aparţine dreptei (u_2, v_2, w_2), avem

$$(6)\quad u_2x_1+v_2y_1+w_2z_1=0.$$

Eliminând pe x_1, y_1, z_1, λ între ecuaţiile (5) şi (6), obţinem

$$(7)\quad \begin{vmatrix} A & B & D & u_1 \\ B & C & E & v_1 \\ D & E & F & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

care este condiţia ca dreptele (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) să fie conjugate în raport cu conica. Această relaţie fiind simetrică în raport cu coordonatele tangenţiale (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) ale dreptelor $u_1x+v_1y+w_1z=0$, $u_2x+v_2y+w_2z=0$, urmează că, dacă polul uneia este pe a doua, invers, polul celei de a doua se află pe cea dintâi.

Relația (7) se mai poate scrie și altfel. Presupunând că $g(u, v, w)=0$ este ecuația tangențială, care știm cum se obține din ecuația punctuală $f(x, y, z)=0$ a conicei, relația (7) dezvoltată este

$$(8)\qquad u_1\frac{\partial g}{\partial u_2}+v_1\frac{\partial g}{\partial v_2}+w_1\frac{\partial g}{\partial w_2}=0, \text{ sau } u_2\frac{\partial g}{\partial u_1}+v_2\frac{\partial g}{\partial v_1}+w_2\frac{\partial g}{\partial w_1}=0.$$

Relativ la drepte conjugate avem următoarea proprietate: *Două drepte conjugate în raport cu o conică sunt conjugate armonic în raport cu cele două tangente duse la conică prin punctul lor de intersecție.* Fie

$(D_1)\equiv u_1x+v_1y+w_1z=0, (D_2)\equiv u_2x+v_2y+w_2z=0$

cele două drepte conjugate, între coeficienții cărora avem relația (8),

$$u_1\frac{\partial g}{\partial u_2}+v_1\frac{\partial g}{\partial v_2}+w_1\frac{\partial g}{\partial w_2}=0.$$

O dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor date (Fig. 104) are ecuația

$$(D_1)+\lambda(D_2)=0,$$
$$(u_1+\lambda u_2)x+(v_1+\lambda v_2)y+(w_1+\lambda w_2)z=0.$$

Coordonatele tangențiale ale acestei drepte sunt

$$u_1+\lambda u_2,\ v_1+\lambda v_2,\ w_1+\lambda w_2.$$

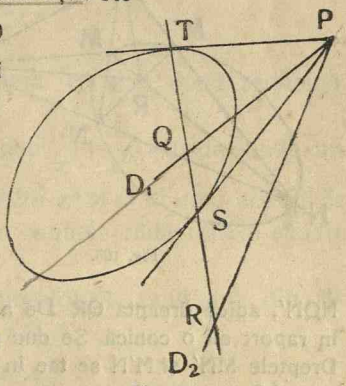


Fig. 104.

Pentru ca aceasta să fie tangentă la conică, trebue ca coordonatele sale tangențiale să verifice ecuația tangențială a conicei, adică

$$g(u_1+\lambda u_2,\ v_1+\lambda v_2,\ w_1+\lambda w_2)=0,$$

$$(9)\qquad \lambda^2 g(u_2, v_2, w_2)+\lambda\left(u_1\frac{\partial g}{\partial u_2}+v_1\frac{\partial g}{\partial v_2}+w_1\frac{\partial g}{\partial w_2}\right)+g(u_1, v_1, w_1)=0.$$

Însemnând cu λ', λ'' rădăcinile acestei ecuații, ecuațiile celor două tangente duse la conică prin punctul P de intersecție al dreptelor (D_1) și (D_2) sunt

$$(D_1)+\lambda'(D_2)=0,\ (D_1)+\lambda''(D_2)=0.$$

Pentru ca aceste drepte să fie conjugate armonic cu (D_1) și (D_2), știm că $\lambda'+\lambda''=0$, adică suma rădăcinilor ecuații (9) să fie nulă,

$$u_1\frac{\partial g}{\partial u_2}+v_1\frac{\partial g}{\partial u_2}+w_1\frac{\partial g}{\partial w_2}=0.$$

Dar aceasta este tocmai relația care arată că dreptele (D_1) și (D_2) sunt conjugate în raport cu conica și deci proprietatea este demonstrată.

Demonstrația geometrică este imediată, căci, dacă Q și R sunt respectiv (Fig. 104) polurile dreptelor (D_2) și (D_1), dreapta QR este polara punctului lor de întâlnire P. Această polară știm că trece și prin punctele de contact T, S ale tangentelor duse din P la conică și cum Q și R sunt conjugate în raport cu conica, diviziunea (TQSR) este armonică și deci fascicolul PT, PQ, PS, PR este armonic. Prin punctul P trec o infinitate de perechi de drepte conjugate cu conica; în particular, când punctul Q se confundă cu T și punctul R vine în T; deci, dacă o dreaptă ce trece prin P se confundă cu PT, și conjugata ei se confundă cu PT. Așa dar, printre perechile de

drepte ce trec prin P, conjugate cu conica, sunt două perechi, ale căror ambele raze ale fiecărei perechi se confundă, pentru prima pereche cu PT, iar pentru a doua pereche, cu PS. Cum, de altfel, este o reciprocitate între razele PQ, PS, ale fiecărei perechi, adică conjugata razei PQ este PR, iar conjugata razei PR este PQ, urmează că fascicolul format de perechile de drepte conjugate cu o conică formează un *fascicol involutiv*, ale cărui raze duble sunt tangentele duse din vârful P al fascicolului la conica considerată.

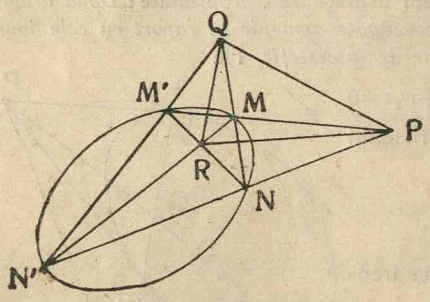


Fig. 105.

Triunghiul PQR se bucură de proprietatea că un vârf al său este polul laturei opuse. Acest triunghi se zice *triunghi conjugat* cu conica.

Construcția polarei unui punct P (Fig. 105) în raport cu conica se face astfel. Ducem prin P două secante oarecare PMM', PNN'. Polara lui P în raport cu conica este aceeaș ca polara lui P în raport cu unghiul NQN', adică dreapta QR. De aci un mijloc de a construi polara unui punct în raport cu o conică. Se duc prin P două secante oarecare PMM', PNN'. Dreptele MN' și M'N se tae în R, iar MN și M'N' se tae în Q; polara lui P este QR.

Se vede că triunghiul PQR este conjugat cu conica.

Asimptote.

92. Când un punct al unei curbe se depărtează la infinit, se se zice că acea curbă are ramuri infinite. Se zice *direcție asimptotică* o direcție astfel că o dreaptă paralelă cu acea direcție tae curba într'un punct la infinit. Dacă o dreaptă tae curba în două puncte aruncate la infinit, se zice *asimptotă*.

Am văzut că o dreaptă tae o conică în două puncte. Ne propunem a găsi direcțiunile asimptotice și asimptotele conicelor. Fie

$$y=mx+n$$

o asimptotă. Abscisele punctelor de intersecție cu dreapta sunt date de ecuația

$$Ax^2+2Bx(mx+n)+C(mx+n)^2+2Dx+2E(mx+n)+F=0,$$

sau

$$(1)\quad (A+2Bm+Cm^2)x^2+2[D+Em+n(B+Cm)]x+Cn^2+2En+F=0.$$

Pentru a vedea când această ecuație de gradul al doilea în x are rădăcini infinit de mari, să considerăm, în general ecuația

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

ale cărei rădăcini să le notăm cu x' și x''. Avem

(2) $$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha},\ x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Dacă o rădăcină x' sau x'' este foarte mare, atunci $x'+x''\to\infty$, deci trebue ca $\alpha\to 0$. Deci, o ecuaţie de gradul al doilea, în care coeficientul lui x^2, α, tinde către zero, are o rădăcină care tinde către infinit. Inpărţind relaţiile (2), avem

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=-\frac{\beta}{\gamma}.$$

Dacă $x'\to\infty$, atunci $\frac{1}{x'}\to 0$. Să presupunem că şi a două rădăcină, x'', tinde către infinit. Atunci $\frac{1}{x''}\to 0$, deci $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\to 0$, de unde urmează $\beta\to 0$. Aşa dar, dacă coeficienţii lui x^2 şi x ai unei ecuaţii de gradul al doilea tind către zero, atunci ambele rădăcini ale ecuaţii tind către ∞.

Aşa fiind, direcţia $y=mx$ este asimptotică, când una din rădăcinile ecuaţii (1) tinde către infinit, adică

(3) $$A+2Bm+Cm^2=0.$$

Deci direcţiile asimptotice ale conicelor sunt date de ecuaţia (3), iar ecuaţia paralelelor din origină la aceste direcţii este

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

Aşa dar, direcţiile asimptotice sunt date de grupul termenilor de gradul al doilea din ecuaţia conicei. Vor fi două direcţii asimptotice reale şi distincte, în cazul când ecuaţia (3) are rădăcinile reale şi distincte, adică $B^2-AC>0$, când conica este iperbolă; nu vor fi direcţii asimptotice când $B^2-AC<0$, în cazul elipsei, şi două direcţii asimptotice confundate într'una singură, în cazul $B^2-AC=0$, al parabolei.

In cazul parabolei, $B^2=AC$, ecuaţia curbei este de forma

$$(Ax+By)^2+\cdots=0,$$

astfel că direcţia asimptotică este dată de $Ax+By=0$, sau $Bx+Cy=0$ $\left(\text{căci}\ \frac{B}{A}=\frac{C}{B}\right)$. Scriind ecuaţia parabolei în coordonate omogene,

$$(Ax+By)^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

se vede că punctele de intersecţie ale parabolei cu dreapta de la infinit, $z=0$, sunt date de $(Ax+By)^2=0$, $z=0$, adică sunt confundate; deci parabola este tangentă la dreapta de la infinit în punctul dat de ecuaţiile $Ax+By=0$, $z=0$. Deci, direcţia asimptotică

$Ax+By=0$ a parabolei este direcţia punctului de contact a parabolei cu dreapta de la infinit.

Dreapta $y=mx+n$ este o asimptotă a conicei, când şi a doua rădăcină a ecuaţii (1) este foarte mare, adică

$$A+2Bm+Cm^2=0,\ D+Em+n(B+Cm)=0.$$

De unde

$$n=-\frac{D+Em}{B+Cm}.$$

În cazul parabolei, coeficientul unghiular al direcţii asimptotice este $m=-\frac{B}{C}$, astfel că $B+Cm=0$, deci $n\to\infty$, ceea ce arată că asimptota parabolei este aruncată la infinit. Aşa dar, numai iperbola are două asimptote date de ecuaţiile

$$y=mx+n,\ A+2Bm+Cm^2=0,\ n=-\frac{D+Em}{B+Cm},$$

sau

$$(4)\qquad y=mx-\frac{D+Em}{B+Cm},\ Cm^2+2Bm+A=0.$$

Eliminând pe m între aceste ecuaţii, găsim ecuaţia comună a celor două asimptote. Scriind prima ecuaţie (4) sub forma

$$Cm^2x+(Bx-Cy-E)m-By-D=0,$$

şi ţinând seamă de a doua, $Cm^2+Bm=-Bm-A$, ea devine

$$-m(Bx+Cy+E)=Ax+By+D,$$

m fiind o rădăcină a ecuaţii $Cm^2+2Bm+A=0$. Această formă a ecuaţii asimptotei, arată că asimptotele trec prin punctul de intersecţie al dreptelor

$$Ax+By+D=0,\ Bx+Cy+E=0,$$

adică prin centrul conicei. Deci, asimptotele iperbolei sunt două drepte ce trec prin centru, ale căror ecuaţii sunt

$$Ax+By+D+m(Bx+Cy+E)=0,\ Cm^2+2Bm+A=0.$$

Ecuaţia lor comună se obţine eliminând pe m între aceste ecuaţii. Această ecuaţie se poate găsi şi direct în modul următor. Ecuaţia conicei fiind $f(x,y)=0$, ecuaţia

$$f(x,y)+\lambda=0$$

reprezintă o conică cu aceleaşi direcţii asimptotice ca şi conica dată (căci grupul termenilor de gradul al doilea este acelaş) şi cu acelaş centru (căci ecuaţiile ce dau centrul la ambele conice sunt $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$); deci au aceleaşi asimptote. Dacă această ecuaţie se

reduce la două drepte, aceasta este chiar ecuația asimptotelor. Ca să se reducă la două drepte, trebue

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F+\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \Delta+\lambda\delta=0,\ \lambda=-\frac{\Delta}{\delta}.$$

Ecuația asimptotelor este deci în cazul iperbolei

$$f(x,y)-\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Observări. I. Iperbola echilateră având asimptotele perpendiculare, trebue ca ecuatia (3) să aibă rădăcinile astfel ca $m'm''+1=0$, deci $A+C=0$.

II. Dacă ecuația unei conice se poate aduce la forma

$$(y+ax+b)(y+a'x+b')+k=0,$$

conica este iperbolă, căci $\delta=AC-B^2<0$. Asimptotele sunt dreptele

$$y+ax+b=0,\ y+a'x+b'=0,$$

căci fiecare tae curba în două puncte aruncate la infinit.

Exemplu. $f(x,y)\equiv 3x^2-4xy+y^2+5x-2y+3=0$. Avem $\Delta=-\frac{9}{4}$, $\delta=-1$. Ecuația comună a asimptotelor este

$$3x^2-4xy+y^2+5x-2y+3-\frac{9}{4}=0,$$

iar ecuațiile fiecărei asimptote sunt $y=3+\frac{1}{2}$, $y=x+\frac{3}{2}$.

93. Aplicații. I. *Să se afle ecuația iperbolelor care au axa Oy ca asimptotă și sunt tangente dreptei $y=mx$ în punctul de intersecție cu dreapta $x=a$. Să se găsească ecuația asimptotei a doua și să se arate că trece printr'un punct fix.* Ecuația iperbolelor este

$$x(y+\lambda x+\mu)+\nu=0,$$

a doua asimptotă fiind $y+\lambda x+\mu=0$.

Abscisele punctelor de intersecție cu $y=mx$ sunt date de

$$x(mx+\lambda x+\mu)+\nu=0,\ (m+\lambda)x^2+\mu x+\nu=0.$$

Scriind că admite rădăcina $x=a$ ca dublă, urmează

$$(m+\lambda)a^2+\mu a+\nu=0,\ \mu^2=4\nu(m+\lambda).$$

De unde $m+\lambda=-\frac{a\mu+\nu}{a^2}$; înlocuind în a doua, avem

$$\mu^2+4\nu\frac{a\mu+\nu}{a^2}=0,\ (a\mu+2\nu)^2=0,\ \nu=-\frac{a\mu}{2};\lambda=-m-\frac{\mu}{2a}.$$

Ecuația asimptotei este

$$y+\lambda x+\mu=0,\ y-\left(m+\frac{\mu}{2a}\right)x+\mu=0,\ 2a(y-mx)-\mu(x-2a)=0$$

şi se vede că trece prin punctul de intersecţie al dreptelor $y=mx$, $x=2a$. Acest punct este simetricul lui O în raport cu A(a, ma).

II. *Se dau două axe perpendiculare şi punctul $A(a, o)$. 1° Să se scrie ecuaţia generală a iperbolelor tangente în origină la bisectoarea a doua, trecând prin punctul A şi având pe Oy ca direcţie asimptotică. 2° Să se găsească şi să se construiască locul centrelor acestor iperbole. 3° Să se scrie ecuaţia asimptotei neparalelă cu Oy a uneia din iperbolele considerate. 4° Să se arate că, dacă iperbola variază, prin fiecare punct al planului trec două asimptote de felul acesta. Să se caute locul punctelor unde aceste două asimptote sunt perpendiculare şi locul punctelor unde aceste două asimptote sunt confundate.*

1°. Insemnând cu $y=\alpha x$, $y=\beta x$ cele două direcţii asimptotice, ecuaţia iperbolelor ce trec prin origină, este

$$(y-\alpha x)(y-\beta x)+\lambda x+\mu y=0.$$

Prima direcţie asimptotică fiind $x=0$, şi tangenta în origină fiind dată de grupul termenilor de gradul întâi, $\lambda x+\mu y=0$, care trebue să reprezinte bisectoarea a doua, ecuaţia iperbolelor este

$$x(y-\beta x)+\lambda(x+y)=0,$$

β şi λ fiind doi parametrii variabili. Scriind că trece prin A$(a, 0)$, avem

$$-a^2\beta+\lambda a=0,\ \lambda=a\beta,$$

astfel că ecuaţia iperbolelor este

$$x(y-\beta x)+a\beta(x+y)=0. \tag{5}$$

2°. Locul centrelor se obţine eliminând β între derivatele în raport cu x şi y ale ecuaţii (5),

$$y-2\beta x+a\beta=0,\ x+a\beta=0.$$

Locul este parabola

$$x^2-\frac{a}{2}(x-y)=0,\ \left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a}{2}\left(y-\frac{a}{8}\right)=0.$$

Transportând axele paralel cu ele în punctul $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{8}\right)$, ecuaţia parabolei devine

$$X^2+\frac{a}{2}Y=0,$$

şi se vede că parabola este tangentă în $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{8}\right)$ la dreapta $y=\frac{a}{8}$ şi trece prin origina axelor date, Ox şi Oy.

3°. Ecuaţia asimptotei neparalelă cu Oy este

$$y-\beta x+\mu=0.$$

Să scriem că tae iperbola în două puncte la infinit; înlocuind pe $y=\beta x-\mu$ în (5), avem

$$x(-\mu)+a\beta(x+\beta x-\mu)=0,\ x(-\mu+a\beta+a\beta^2)-a\mu\beta=0.$$

Ecuaţia fiind de gradul întâi, o rădăcină este infinită; ca să fie şi a doua, trebue ca

$$-\mu+a\beta+a\beta^2=0,\ \mu=a\beta+a\beta^2.$$

Ecuaţia asimptotei este

$$y-\beta x+a\beta+a\beta^2=0.$$

4°. Fiind de gradul al doilea în β, rezultă că printr'un punct (x_1, y_1) trec două asimptote, valorile lui β fiind date de ecuaţia

$$a\beta^2+\beta(a-x_1)+y_1=0. \tag{6}$$

Locul punctelor unde asimptotele sunt perpendiculare se obţine scriind că între coeficienţii unghiulari β', β'', ai acestor asimptote avem $\beta'\beta''+1=0$ şi scriind aceasta pentru ecuaţia (6), avem $\frac{y_1}{a}+1=0$, $y_1+a=0$, o dreaptă. Ca să fie confundate, trebue ca $\beta'=\beta''$, adică ecuaţia (6) să aibă o rădăcină dublă, adică $(a-x_1)^2-4ay_1=0$, o parabolă.

Diametrii. Axe.

94. **Diametrii.** Să considerăm într'o conică o serie de coarde paralele cu o direcţie dată prin parametrii săi directori p şi q. Se zice *diametru conjugat* direcţii date, locul mijloacelor coardelor paralele cu această direcţie.

Insemnând cu $M(x, y)$ mijlocul uneia din aceste coarde $M'M''$, un punct M' (Fig. 106) al acestei coarde are coordonate de forma

$$x+p\rho,\quad y+q\rho,$$

ρ fiind raportul dintre vectorul MM' şi vectorul ON care uneşte origina cu punctul de coordonate (p, q). Ecuaţia care dă valorile lui ρ corespunzătoare punctelor de intersecţie M' şi M'' ale conicei cu această dreaptă, este

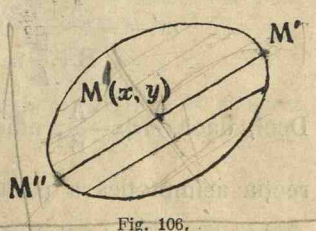


Fig. 106.

$$f(x+p\rho,\ y+q\rho)=0,$$

sau

$$\rho^2(Ap^2+2Bpq+Cq^2)+2\rho\left(p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}\right)+f(x, y)=0.$$

Pentru ca M să fie mijlocul coardei $M'M''$, trebue ca $\overline{MM'}=-\overline{MM''}$, $\rho'+\rho''=0$, adică

$$p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Aceasta este ecuaţia locului descris de mijloacele coardelor paralele cu direcţia (p, q), şi de oarece este de gradul întâi, rezultă că diametrul conjugat coardelor de direcţie (p, q) este o dreaptă. Din ecuaţia diametrului, se vede că trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

adică *prin centrul conicei.* Dacă direcția e definită prin coeficientul ei unghiular $\frac{q}{p}=m$, ecuația diametrului conjugat direcții m este

$$\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad Ax+By+D+m(Bx+Cy+E)=0.$$

Printre coardele paralele cu direcția dată sunt și tangentele la conică paralele cu acea direcție, iar mijloacele coardelor tind către punctele de contact P și Q (Fig. 107). Deci, *diametrul conjugat unei direcții este dreapta care unește punctele de contact ale conicei cu cele două tangente paralele cu acea direcție.*

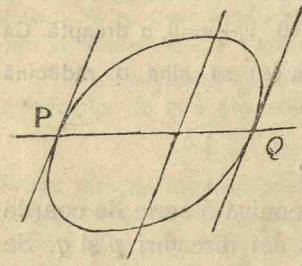


Fig. 107.

Coeficentul unghiular al diametrului fiind

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm},$$

se vede că, în cazul parabolei, $AC=B^2$, $C=\frac{B^2}{A}$, acest coeficient este egal cu

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+\frac{B^2}{A}m}=-\frac{A+Bm}{\frac{B}{A}(A+Bm)}=-\frac{A}{B}\frac{A+Bm}{A+Bm}.$$

Deci, dacă $m\neq-\frac{A}{B}$, adică, dacă coardele nu sunt paralele cu direcția asimptotică a parabolei, $A+Bm\neq0$, avem $m'=-\frac{A}{B}$, ceea ce probează că *toți diametrii la parabolă sunt paraleli cu direcția asimptotică.*

Tangentele paralele cu o dtrecție dată sunt tangentele la conică în punctele de intersecție ale ei cu diametrul conjugat direcții date.

Exemplu. Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale conicelor

$$x^2+2\lambda xy-y^2-2x\lambda+1=0$$

cu tangentele paralele cu Oy. Parametrii directori p și q ai lui Oy sunt $p=0$, $q\neq0$. Punctele de contact sunt la intersecția conicei cu diametrul conjugat lui Oy,

$$p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad q\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2\lambda x-2y=0.$$

Locul geometric al punctelor de contact se obține eliminând pe λ între ecuația conicei și $\lambda x-y=0$. De unde $\lambda=\frac{y}{x}$, iar locul este cercul $x^2+y^2-2y+1=0$.

Diametrii conjugați. Ecuația diametrului conjugat coardelor de direcție m este

$$\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad Ax+By+D+m(Bx+Cy+E)=0.$$

Coeficientul unghiular m' al acestui diametru este

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm}.$$

Deci, între coeficientul unghiular m al direcţii coardelor şi coeficientul unghiular m' al diametrului conjugat, avem relaţia involutivă

$$Cmm'+B(m+m')+A=0.$$

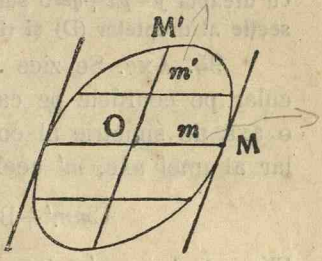


Fig. 108.

Această relaţie fiind simetrică în raport cu m şi m', rezultă că diametrul OM (Fig. 108) conjugat coardelor de direcţie m' are coeficientul unghiular m şi diametrul OM' conjugat coardelor de direcţie m, are coeficientul unghiular m'. Deci, în cazul unei conice cu centru, *diametrii* OM *şi* OM' *se bucură de proprietatea că unul din ei este locul mijloacelor coardelor paralele cu celalt.* Aceştia se zic *diametrii conjugaţi.*

Aplicaţii. I. *Ecuaţia unei conice raportată la două direcţii conjugate.* Relaţia dintre coeficienţii unghiulari a doi diametrii conjugaţi fiind

$$Cmm'+B(m+m')+A=0,\quad m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm},$$

pentru ca Ox şi Oy să fie direcţii conjugate, trebue ca pentru $m=0$ să avem $m'=-\frac{A}{B}=\infty$, deci $B=0$. Ecuaţia curbei este

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

In cazul parabolei, $AC-B^2=0$, $AC=0$; deci, sau $A=0$, sau $C=0$. Ecuaţia se reduce la $Ax^2+2Dx+2Ey+F=0$.

II. *Ecuaţia conicei raportată la un diametru şi la direcţia conjugată.* Trebue ca Ox să fie diametrul conjugat direcţii Oy, care are coeficientul unghiular ∞, deci $m=\frac{q}{p}=\infty$. Ecuaţia $pf'_x+qf'_y=0$ a diametrului conjugat trebue să se reducă la $f'_y=0$; $Bx+Cy+E=0$ trebue să se reducă la Ox, adică $B=0$, $E=0$, $C\neq 0$. Ecuaţia curbei este $Ax^2+Cy^2+2Dx+F=0$.

III. Ox are o poziţie determinată pe când Oy poate fi deplasată paralel cu ea însăşi, astfel că, în anumită poziţie, se poate simplifica ecuaţia mai mult. In cazul conicei cu centru, se pot deplasa axele în centru, $D=0$, şi atunci *ecuaţia conicei raportată la doi diametrii conjugaţi* este de forma $AX^2+CY^2+F=0$.

IV. Când centrul este aruncat la infinit, este parabolă, $AC-B^2=0$, $AC=0$; de ex., $A=0$, ecuaţia se reduce la $Cy^2+2Ex+F=0$ şi tae Ox în punctul O' de abscisă $-\frac{F}{2D}$. Deplasând axele în acest punct când axa O'Y devine tangentă la conică în acest punct O', rezultă că *ecuaţia parabolei ra-*

portată la un diametru şi tangenta la extremitatea sa este de forma $CY^2+2DX=0$.

V. *Fiind date două drepte,* $(D)\equiv y-mx+n=0$, $(D_1)\equiv y-px+q=0$, *să se scrie ecuaţia parabolelor tangente la* (D_1) *în punctul de intersecţie cu* (D) *şi care admit ca direcţie asimptotică dreapta* (D). (D este diametru iar D_1 tangentă la extremitatea diametrului). Ecuaţia acestor parabole este de forma

$$(y-mx+n)^2+\lambda(y-px+q)=0,$$

căci direcţia asimptotică este paralelă cu $y-mx=0$, iar intersecţia parabolei cu dreapta $y-px+q=0$ sunt două puncte confundate cu punctul de intersecţie al dreptelor (D) şi (D_1).

95. **Axe**. Se zice axă a unei conice un diametru perpendicular pe coardele pe care le divide în părţi egale. O axă este deci o axă de simetrie al conicei. Insemnând cu m coeficientul unghiular al unei axe, m' acela al coardelor conjugate, avem

$$Cmm'+B(m+m')+A=0,\ 1+mm'=0.$$

Eliminând pe m' între aceste două ecuaţii, avem

$$Bm^2+(A-C)m-B=0, \tag{1}$$

care este ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai axelor. Această ecuaţie are totdeauna rădăcinile reale, căci realizantul este $(A-C)^2+4B^2>0$. Cele două direcţii pe care le determină sunt perpendiculare şi sunt bisectoarele celor două direcţii asimptotice reale sau imaginare ale conicei, date de

$$Cm^2+2Bm+A=0.$$

Să presupunem că avem o *conică cu centru* la distanţă finită. Diametrii ce au coeficienţii unghiulari m' şi m'', rădăcinile ecuaţii (1), sunt axele. Orice conică de genul elipsă sau iperbolă admite deci două axe care fac un sistem de doi diametri conjugaţi perpendiculari. In cazul cercului, $A=C$, $B=0$, ecuaţia (1) devine o identitate, toţi diametrii cercului sunt axe de simetrie.

Insemnând cu m una din rădăcinile ecuaţii (1), diametrul conjugat acestei direcţii este o axă având ca ecuaţie

$$f'_x+mf'_y=0. \tag{2}$$

Eliminând pe m între ecuaţiile (1) şi (2), se obţine ecuaţia

$$B(f'^2_x-f'^2_y)=(A-C)f'_xf'_y, \tag{3}$$

care este verificată de coordonatele unui punct oarecare al uneia sau celeilalte axe, este deci *ecuaţia comună a axelor unei conice cu centru.*

In cazul parabolei, $AC-B^2=0$, toţi diametrii sunt paralelii cu

direcția asimptotică, deci au coeficientul unghiular $-\frac{A}{B}$, sau $-\frac{B}{C}$.

Coardele perpendiculare pe această direcție au coeficientul $\frac{B}{A}$ sau $\frac{C}{B}$.

Deci, diametrul conjugat acestor coarde, sau *axa parabolei, are ecuația*

$$f'_x+\frac{B}{A}f'_y=0, \text{ sau } f'_x+\frac{C}{B}f'_y=0,$$

sau

$$Af'_x+Bf'_y=0, \quad Bf'_x+Cf'_y=0.$$

Vârfurile sunt la intersecția conicei cu axele.

Aplicații. I. *Se consideră parabolele tangente în* O *la* Ox, *trecând prin* A. *Să se arate că prin fiecare punct* $M_0(x_0, y_0)$ *al planului trec două parabole. Să se afle locul punctelor* M_0 *pentru care direcțiile axelor parabolelor corespunzătoare să fie perpendiculare.* Ecuația parabolelor este de forma

$$(y-\lambda x)^2+2\mu y=0,$$

tangenta în origină fiind $y=0$. Trecând prin punctul $A(a,b)$, avem

$$(b-\lambda a)^2+2\mu b=0, \quad 2\mu=-\frac{(b-\lambda a)^2}{b},$$

așa că ecuația parabolelor este

$$(y-\lambda x)^2-\frac{(b-\lambda a)^2}{b}y=0,$$

sau

$$\lambda^2\left(x^2-\frac{a^2}{b}y\right)+2\lambda(-xy+ay)-by+y^2=0.$$

Prin fiecare punct $M_0(x_0,y_0)$ trece două parabole cărora le corespund λ' și λ'' dați de

$$\lambda^2\left(x_0^2-\frac{a^2}{b}y_0\right)+2\lambda(-x_0y_0+ay_0)-by_0+y_0^2=0.$$

Direcția axelor fiind dată de $y-\lambda x=0$, are coeficientul unghiular λ; trebue ca $\lambda'\lambda''+1=0$, adică

$$\frac{-by_0+y_0^2}{x_0^2-\frac{a^2}{b}y_0}+1=0, \quad x_0^2+y_0^2-\left(\frac{a^2}{b}+b\right)y_0=0,$$

astfel că locul punctilor M_0 este cercul $x^2+y^2-\frac{1}{b}(a^2+b^2)y=0$.

II. *Se dau punctele* $A(a, o)$, $P(o. p)$. *Să se scrie ecuația parabolei cu axa paralelă cu* Ox, *ce trece prin* O *și* P *și e tangentă în* P *dreptei* AP. *Să se determine coordonatele punctului* M *comun tangentelor în* O *și* P *la parabolă și să se afle locul acestui punct când* P *variază pe* Oy, A *rămânând fix. In aceste condițiuni, prin fiecare punct* M_0 *al planului trec câte două din parabolele precedente. Să se afle locul punctelor* M_0, *așa ca tangentele în* M_0 *la parabolele ce trec prin el să fie perpendiculare.* Ecuația parabolei având ca tangentă în P pe AP,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{p}=1,$$

și direcție asimptotică $y=0$, este

$$(y-p)^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{p}-1\right)=0.$$

Trecând prin origină, urmează $p^2-\lambda=0$; deci ecuația parabolei este

$$(4)\qquad (y-p)^2+p^2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{p}-1\right)=0,\ y^2-py+\frac{p^2}{a}x=0.$$

Punctul M este la intersecția dreptelor AP, $\frac{x}{a}+\frac{y}{p}-1=0$ și tangenta în origină, grupul termenilor de gradul întâi, $-py+\frac{p^2}{a}x=0$, sau $px-ay=0$, și are coordonatele $\left(\frac{a}{2},\frac{p}{2}\right)$. Locul acestui punct când P variază pe Oy este dreapta $x=\frac{a}{2}$.

Parabolele care trec prin $M_0(x_0, y_0)$ corespund valorilor lui p date de ecuația

$$p^2x_0-apy_0+ay_0^2=0.$$

Tangenta în M_0 la parabola considerată are ecuația

$$y_0y-\frac{p}{2}(y_0+y)+\frac{p^2}{2a}(x_0+x)=0,$$

și are coeficientul unghiular

$$\frac{-\frac{p^2}{2a}}{-\frac{p}{2}+y_0};$$

deci

$$\frac{\frac{p'^2}{2a}}{-\frac{p'}{2}+y_0}\cdot\frac{\frac{p''^2}{2a}}{-\frac{p''}{2}+y_0}+1=0,\ \frac{(p'p'')^2}{4a^2}+\frac{p'p''}{4}-\frac{y_0}{2}(p'+p'')+y_0^2=0.$$

Locul este

$$\left(\frac{ay_0^2}{x_0}\right)^2\frac{1}{4a^2}+\frac{ay_0^2}{x_0}-\frac{y_0}{2}\left(\frac{ay_0}{x_0}\right)+y_0^2=0.$$

Focare.

96. **O nouă definiție a conicelor.** *Locul punctelor al căror raport al distanțelor la un punct* F *și la o dreaptă* D *să fie constant, este o conică.* Luând ca Ox dreapta dusă din F (Fig. 109) perpendiculară pe D, fie Q punctul unde Ox tae pe D. Insemnând cu MP distanța de la M la dreapta D, și cu $\frac{MF}{MP}=e$, raportul dat, să alegem punctul O pe Ox astfel ca $\frac{OF}{OQ}=e$. Fie $FQ=k$. Atunci

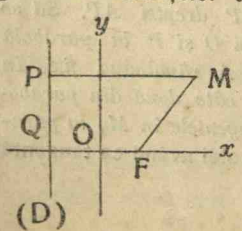


Fig. 109.

$$\frac{QF}{e}=\frac{QO}{1}=\frac{OF+QO}{e+1}=\frac{k}{e+1},\quad OF=\frac{ek}{e+1},\quad QO=\frac{k}{e+1}.$$

Coordonatele punctelor F şi Q sunt $F\left(\frac{ke}{e+1},\ 0\right)$, $Q\left(-\frac{k}{e+1},\ 0\right)$.

Exprimând analitic condiţia geometrică, $MF=eMP$, avem

$$\left(x-\frac{ke}{1+e}\right)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{k}{1+e}\right)^2,$$

astfel că ecuaţia locului geometric este

$$y^2=2ekx+(e^2-1)x^2,$$

care reprezintă o conică. Va fi elipsă, dacă $e^2-1<0$, $e<1$; iperbolă $e>1$; parabolă, $e=1$.

Punctul F se zice *focar*; D, *directoarea; e, excentricitatea* conicei.

Aplicaţie. Să considerăm un con de rotaţie S (Fig. 109*a*) (născut prin rotaţia unei drepte în jurul unei axe cu care face un unghi constant). Să tăem acest con cu planul P. Pentru a găsi curba de intersecţie, să ducem prin axa conului un plan Q perpendicular pe planul secant P. Q tae P după Ax, iar conul după generatoarele G şi G'. Să figurăm cercul tangent la G, G' şi Ax; fie F punctul de contact cu Ax. Învârtind acest cerc în jurul axei conului, se naşte o sferă (Σ) tangentă la con dealungul cercului γ şi tangentă şi planului P în F. Planul cercului γ tae planul P după dreapta DD_1 perpendiculară pe Ax.

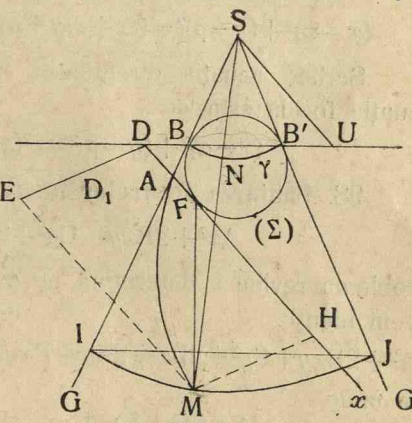


Fig. 109*a*.

Să considerăm un punct M al secţiunei conului cu planul P. Planul dus prin M, perpendicular pe axa conului, tae conul după cercul IMJ; tae pe Ax în H, care este proecţia lui M pe IJ (pe planul Q); ducem generatoarea MSN a punctului M, ce tae pe γ în N. Avem MF=MN ca tangente duse din M la sfera (Σ) şi MN=BI ca fiind diferenţele lungimilor egale SM=SI, SN=SB. Să ducem ME perpendiculară pe DD_1; avem

$$\frac{MF}{ME}=\frac{MN}{DH}=\frac{BI}{DH}=\frac{AB}{AD}=\text{const.},$$

deci locul lui M este o conică (Γ) cu focarul F şi directoarea DD_1.

Pentru a găsi genul acestei conice, să ducem prin S planul P_1 paralel cu P; acest plan este perpendicular pe planul Q (al figurei) şi-l tae după SU paralela cu Ax. Excentricitatea este $e=\frac{AB}{AD}$. 1°. Dacă $e<1$, avem elipsă, SU exterioară conului, planul P_1 nu tae conul; 2°. $e>1$, iperbolă, SU inte-

rioară conului, planul P_1 îl tae după două generatoare; 3°. $e=1$, parabolă, $SB=SU=SB'$, planul P_1 tangent la con.

Deci, *un plan tae un con de rotație după o elipsă, iperbolă, sau parabolă, după cum planul dus prin vârful conului, paralel cu cel secant, tae conul după două generatoare imaginare, reale, sau confundate,* de unde și numele de conice date elipsei, iperbolei și parabolei.

97. **Ecuația conicelor având un focar și o directoare dată.** Fie $F(\alpha,\beta)$ focarul și D directoarea, $\lambda x+\mu y+\nu=0$, e excentricitatea. Ecuația conicei cu focarul F, directoarea D și excentricitatea e, este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(\lambda x+\mu y+\nu)^2}{\lambda^2+\mu^2},$$

sau

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,$$

$$l=\frac{e\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad m=\frac{e\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad n=\frac{e\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad e^2=l^2+m^2.$$

Ecuația focală a conicei este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,\quad e^2=l^2+m^2,\quad e=\sqrt{l^2+m^2}.$$

Scriind ecuația directoarei sub forma $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$, ecuația focală este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2(x\cos\varphi+y\sin\varphi-p)^2.$$

98. **Căutarea focarelor unei conice date.** Ecuația conicei fiind

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

problema revine a determina pe α, β, l, m, n, S, astfel în cât să avem identic

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F\equiv S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2].$$

De unde

$$A=S(1-l^2),\quad B=-Slm,\quad C=S(1-m^2),$$

$$D=-S(\alpha+ln),\quad E=-S(\beta+mn),\quad F=S(\alpha^2+\beta^2-n^2).$$

Din primele trei, avem

$$l^2=\frac{S-A}{S},\quad lm=-\frac{B}{S},\quad m^2=\frac{S-C}{S}.$$

De unde

$$(S-A)(S-C)=B^2,\quad S^2-S(A+C)+AC-B^2=0,$$

ecuație care dă valorile lui S, al cărei realizant este $(A-C)^2+4B^2>0$, deci ale cărei rădăcini totdeauna sunt reale și distincte, afară de cazul $A=C$, $B=0$, când conica este cerc.

Excentricitatea este dată de $e^2=l^2+m^2$. Avem

$$e^2-1=l^2+m^2-1=\frac{S-A}{S}+\frac{S-C}{S}-1=\frac{S-(A+C)}{S}=\frac{S^2-S(A+C)}{S^2}=\frac{B^2-AC}{S^2}.$$

Deci, elipsă, $e^2-1<0$, $B^2-AC<0$; iperbolă, $e^2-1>0$, $B^2-AC>0$; parabolă $B^2-AC=0$.

Din celelalte ecuații, avem

$$\alpha=-ln-\frac{D}{S},\quad \beta=-mn-\frac{E}{S},$$

iar, ultima,

$$F=S(\alpha^2+\beta^2-n^2),$$

ne dă pe n

Exemple. 1°. In cazul *elipsei* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, avem

$$S(1-l^2)=\frac{1}{a^2},\ Slm=0,\ S(1-m^2)=\frac{1}{b^2},\ 0=S(\alpha+ln),\ 0=S(\beta+mn),$$

$$-1=S(\alpha^2+\beta^2-n^2);\ lm=0,\ \alpha+ln=0,\ \beta+mn=0,\ (1-l^2)a^2=(1-m^2)b^2=n^2-\alpha^2-\beta^2.$$

Avem două cazuri de considerat, $l=0$, sau $m=0$. Luăm întâi cazul $m=0$; atunci

$$S=\frac{1}{b^2},\ \alpha=-ln,\ \beta=0,\ 1-l^2=\frac{b^2}{a^2},\ -b^2=\alpha^2-n^2.$$

De unde

$$\alpha^2=c^2,\ n^2=a^2,\ l^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2};$$

$$n=\pm a,\ l=\pm\frac{c}{a},\ \alpha=\mp c.$$

Când $\alpha=c$, $l=-\frac{c}{a}$, $n=a$; când $\alpha=-c$, $l=-\frac{c}{a}$, $n=-a$ Deci, sunt două focare pe axa mare, $(c, 0)$, $(-c, 0)$, iar directoarele au ecuațiile

$$lx+my+n=0,\qquad -\frac{c}{a}x+a=0,\qquad \frac{c}{a}x+a=0.$$

Să considerăm acum cazul $l=0$. Avem

$$S=\frac{1}{a^2},\ \alpha=0,\ \beta^2=b^2-a^2<0,$$

deci avem două focare imaginare.

In rezumat, elipsa are două focare reale, situate pe axa mare, excentricitatea $e=\sqrt{l^2+m^2}=\sqrt{l^2}=\frac{c}{a}$.

2°. In cazul *iperbolei*, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, avem un calcul analog, numai că în loc de b^2 punem $-b^2$. Iperbola are două focare reale situate pe axa transversă, iar $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

3°. *Parabola.* Avem ecuația $y^2=2px$; deci, pentru a determina pe $\alpha, \beta, l, m, n, S$, avem ecuațiile $0=S(1-l^2)$, $0=Slm$, $1=S(1-m^2)$, $-p=-S(\alpha+l\beta)$, $0=-S(\beta+mn)$, $0=S(\alpha^2+\beta^2-n^2)$. Cum $S\neq0$, rezultă $l^2=1$; vom lua numai $l=1$, căci cazului $l=-1$ corespund valorile m, n schimbate de semn, astfel că ecuația directoarei este aceeaș în ambele cazuri. Deci $m=0$, $S=1$, $l=1$, $\beta=0$, $p=\alpha+n$, $\alpha^2-n^2=0$.

Din ultima, $(\alpha-n)(\alpha+n)=0$, $p(\alpha-n)=0$, $\alpha=n$; $\alpha=n=\frac{p}{2}$; deci

$$S=1,\ \alpha=n=\frac{p}{2},\ \beta=0,\ l=1,\ m=0.$$

Deci, parabola are un singur focar real situat pe axă, directoarea are ecuaţia $lx+my+n=0$, $x+\frac{p}{2}=0$; $e=1$.

99. **Proprietăţi focale ale conicelor.** 1°. *Elipsă.* Ecuaţia focală este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,$$

aşa că distanţa de la un punct la focar este valoarea absolută a expresii $lx+my+n$,

$$MF=|lx+my+n|=\left|-\frac{c}{a}x+a\right|.$$

Dar x este cuprins între $-a$ şi $+a$, şi $c<a$; deci $a-\frac{cx}{a}$ este totdeauna pozitivă. Deci $MF=a-\frac{cx}{a}$. Apoi $MF'=a+\frac{cx}{a}$. Deci

$$MF+MF'=a-\frac{cx}{a}+a+\frac{cx}{a}=2a.$$

Regăsim prima definiţie a elipsei că suma distanţelor unui punct la cele două focare este constantă şi egală cu $2a$. Distanţa de la un punct la focarul elipsei se zice *rază vectoare.*

Dreptele $a-\frac{cx}{a}=0$, $a+\frac{cx}{a}=0$, sau $x=\frac{a^2}{c}$, $x=-\frac{a^2}{c}$, sunt *directoarele elipsei.* Ele *sunt* respectiv *polarele celor două focare* $(c,0)$, $(-c,0)$.

2°. Pentru *iperbolă*, avem

$$MF=\frac{cx}{a}-a,\quad MF'=\frac{cx}{a}+a,\quad MF'-MF=2a,$$

astfel că regăsim prima definiţie a iperbolei. Directoarele sunt polarele focarelor.

3°. In cazul *parabolei*, directoarea $x+\frac{p}{2}=0$ este polara focarului.

100. **Determinarea ecuaţiilor care dau coordonatele focarelor în cazul general.** Ecuaţia conicei fiind

$$f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

pentru determinarea focarelor, trebue să facem identificarea

$$f(x,y)\equiv S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2].$$

Deplasând axele în punctul (α,β), avem $x=\alpha+X$, $y=\beta+Y$, iar ecuaţia precedentă devine

$$f(\alpha,\beta)+Xf'_\alpha+Yf'_\beta+AX^2+2BXY+CY^2\equiv S[X^2+Y^2-(l_1X+m_1Y+n_1)^2],$$

$$f(\alpha,\beta)+Xf'_\alpha+Yf'_\beta+AX^2+2BXY+CY^2-S(X^2+Y^2)\equiv$$

$$-(l_1X+m_1Y+n_1)^2S.$$

Făcând această relaţie omogenă cu ajutorul variabilei Z, adică înlocuind pe X şi Y cu $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$, avem

$$Z^2f(\alpha,\beta)+(Xf'_\alpha+Yf'_\beta)Z+AX^2+2BXY+CY^2-S(X^2+Y^2)\equiv$$
$$-(l_1X+m_1Y+n_1Z)^2S.$$

Membrul al doilea fiind pătrat perfect în Z, atunci şi membrul întâi trebue să fie pătrat perfect în Z, adică realizantul trebue să fie nul,

$$(Xf'_\alpha+Yf'_\beta)^2-4f(\alpha,\beta)[(A-S)X^2+2BXY+(C-S)Y^2]\equiv 0.$$

Egalând cu zero coeficienţii lui X^2, Y^2, XY, avem

$$f'^2_\alpha=4f(\alpha,\beta)(A-S),\ f'^2_\beta=4f(\alpha,\beta)(C-S),\ f'_\alpha f'_\beta=4f(\alpha,\beta)B.$$

Eliminând pe S între primele două ecuaţii, coordonatele (α,β) ale focarelor sunt date de

(1) $$f'^2_\alpha-f'^2_\beta=4(A-C)f(\alpha,\beta),\ f'_\alpha f'_\beta=4f(\alpha,\beta)B.$$

Eliminând pe $f(\alpha,\beta)$ între aceste ecuaţii, avem

$$B(f'^2_\alpha-f'^2_\beta)+(C-A)f'_\alpha f'_\beta=0,$$

care reprezintă ecuaţia comună a axelor conicei. Deci focarele sunt pe axele conicei.

101. Aplicaţii. I. *Se dau o dreaptă* D *şi un punct* O. *Se consideră două parabole al căror focar comun este* O, *tangente la dreapta* D, *având axele perpendiculare una pe alta. Se cere locul punctelor de intersecţie ale parabolelor.* Luând punctul O ca origină şi axa Ox perpendiculara din O pe D, a cărei ecuaţie este $x-a=0$, focarul fiind în origină, ecuaţia conicei este

$$x^2+y^2=\lambda(y-mx+n)^2,$$

unde $y-mx+n=0$ este ecuaţia directoarei.

Pentru a fi parabolă, trebue ca $AC-B^2=0$, $\lambda=\frac{1}{m^2+1}$, aşa că ecuaţia parabolei este

$$x^2+y^2=\frac{1}{m^2+1}(y-mx+n)^2.$$

Directoarea fiind perpendiculară pe axa parabolei, urmează că ecuaţia celeilalte parabole cu axa perpendiculară pe a precedentei, este

$$x^2+y^2=\frac{1}{m^2+1}(my+x+r)^2.$$

Luând intersecţia parabolelor cu $x-a=0$ şi scriind că ecuaţiile obţinute au o rădăcină dublă în y, avem $n=2am$, $r=-2a$; aşa că ecuaţiile parabolelor sunt

$$x^2+y^2=\frac{1}{m^2+1}(y-mx+2am)^2,\ x^2+y^2=\frac{1}{m^2+1}(my+x-2a)^2.$$

Eliminând pe m între ele, locul punctelor de intersecţie este cercul $x^2+y^2-4ax-4a^2=0$, dreapta $x+y-2a=0$ şi punctul $(2a, 0)$.

II. *Să se afle locul focarelor iperbolelor echilatere care admit dreapta* $x=d$ *ca directoare şi care trec prin origina axelor. Să se afle locul geometric al centrelor acestor iperbole echilatere.* Ecuaţia iperbolelor este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda(x-d)^2,\ \lambda=2.$$

Scriind că trec prin origina axelor, locul focarelor este cercul $\alpha^2+\beta^2=2d^2$. Locul centrelor se obține eliminând α și β între ecuația precedentă și acelea care dau centrul, $x-\alpha=2(x-d)$, $y-\beta=0$; se obține cercul $x^2+y^2-4dx+2d^2=0$.

III. *Se dau o dreaptă și un punct. Să se scrie ecuația iperbolelor echilatere care au ca directoare dreapta dată și ca focar punctul dat. Să se afle locul celui de al doilea focar când cel dintâi descrie o curbă oarecare. Aplicație pentru o dreaptă paralelă cu Oy, sau o parabolă, $y^2-2px-d^2=0$.* Luăm ca axă Oy dreapta dată și fie punctul (α, β). Ecuația iperbolelor echilatere este $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda x^2$, cu condiția $1-\lambda+1=0$, $\lambda=2$, adică

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=2x^2.$$

Coordonatele centrului sunt $x=-\alpha$, $y=\beta$. Cel de al doilea focar este simetricul primului, (α, β), față de centru și are coordonatele $x_1=-3\alpha$, $y_1=\beta$. Dacă primul focar descrie curba $f(\alpha, \beta)=0$, al doilea focar descrie curba $f\left(-\frac{x_1}{3}, y_1\right)=0$.

IV. *Se dau două axe perpendiculare Ox și Oy și punctul A$(a, 0)$. Se consideră conicele* (C) *care au ca focar punctul* F(α, β) *și ca directoare $x+y-a=0$. 1°. Să se scrie ecuația conicelor* (C) *care sunt tangente în origină axei Ox. 2°. Să se arate că locul geometric al focarului* F *este cercul* (Γ) *descris pe* OA *ca diametru. 3°. Să se discute natura conicelor* (C) *când punctul* F *descrie cercul* (Γ). *4° Să se afle locul centrelor conicelor* (C). *5°. Printre conicele* (C) *este o parabolă. Să se afle locul focarului acestor parabole când* A *variază pe Ox.*

1° Ecuația conicelor este $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda(x+y-a)^2$. Pentru a fi tangente la Ox, facem $y=0$ și avem

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=\lambda(x-a)^2,$$

care trebue să aibă o rădăcină dublă, $x=0$, adică

$$\alpha^2+\beta^2=\lambda a^2,\ \alpha-\lambda a=0;\ \lambda=\frac{\alpha}{a},$$

$$\alpha^2+\beta^2-a\alpha=0. \tag{1}$$

Ecuația conicelor este

$$x^2\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)-2\frac{\alpha}{a}xy+y^2\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)-2y(\beta-\alpha)=0, \tag{2}$$

cu relația (1).

2°. Din relația (1) se vede că locul focarelor este cercul $x^2+y^2-ax=0$, descris pe OA ca diametru.

3°. Natura conicei (2) depinde de $\frac{\alpha^2}{a^2}-\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)^2=\frac{2}{a}\left(\alpha-\frac{a}{2}\right)$. Dreapta $\alpha=\frac{a}{2}$, sau $x=\frac{a}{2}$, tae cercul (1) în punctele B și C. Dacă F este pe porțiunea cercului COB (Fig. 110), atunci avem elipsă; dacă pe cealaltă, iperbolă. Parabolă, $\alpha=\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{a}{2}$. Două drepte, $\alpha=\frac{a}{2}$, $\beta=\frac{a}{2}$; $\alpha=0$, $\beta=0$; $\alpha=a$, $\beta=0$.

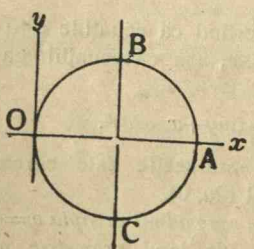


Fig. 110.

4°. Locul centrelor e dat de

$$2x\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)-2\frac{\alpha}{a}y=0,\ -2\frac{\alpha}{a}x+2y\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)-2(\beta-\alpha)=0,$$

şi ecuaţia (1). Eliminând pe α şi β între aceste trei ecuaţii, avem $(x^2-y^2-ax)^2=a^2xy$.

5°. Avem parabolă, când $\alpha=\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{a}{2}$; ecuaţia parabolei se obţine înlocuind în (2) şi este $f(x, y)\equiv x^2-2xy+y^2+4ay=0$.

Coordonatele focarului sunt date de

$$f_x'^2-f_y'^2=4(A-C)f(x, y),\quad f_x'f_y'=4f(x, y)B,$$

care în cazul nostru se reduc la

$$f_x'^2-f_y'^2=0, f_x'f_y'=4Bf(x, y),$$

iar acceptabile sunt numai

$$f_x'-f_y'=0,\quad f_x'f_y'=4Bf(x, y),$$

sau

$$x-y-a=0,\quad (x-y)(-x+y+2a)=-(x^2-2xy+y^2+4ay).$$

Locul focarelor se obţine eliminând pe a între aceste două ecuaţii şi se găseşte $(x-y)(x+y)=0$, bisectoarele axelor.

O aplicaţie interesantă ar fi să se identifice

$$x^2-2xy+y^2+4ay\equiv S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2],$$

cu care ocazie s'ar găsi valorile lui α, β, l, m, n; apoi să se elimine a între ecuaţiile ce dau pe α şi β.

102. **Conice omofocale.** I. *Conice cu centru omofocale* sunt acelea care au aceleaşi focare. Insemnând cu $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ focarele, ecuaţia acestor conice care au axele Ox şi Oy, este de forma

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1,\quad A-B=c^2,\quad \frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}-1=0,$$

sau

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1,$$

λ fiind un parametru variabil.

Se vede că, dacă $\lambda>0$, conica este elipsă; dacă $-c^2<\lambda<0$, este iperbolă; dacă $\lambda<-c^2$, elipsă imaginară. Când λ tinde către zero prin valori pozitive, conica devine o elipsă cu axa mică nulă şi cu axa mare $2c$; ea se confundă cu segmentul de dreaptă FF' cuprins între cele două focare. Când λ tinde către zero prin valori negative, conica devine iperbolă şi se confundă cu partea axei focale exterioară focarelor F şi F'. In fine, când λ tinde către $-c^2$ prin valori superioare lui $-c^2$, conica devine o iperbolă ale cărei două ramuri sunt turtite pe axa nefocală Oy.

Proprietăţi. 1°. *Prin fiecare punct al planului trec două conice omofocale având focarele date, o elipsă şi o iperbolă.* In adevăr, fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul dat. Valorile lui λ corespunzătoare conicelor ce trec prin acest punct sunt date de ecuaţia

$$f(\lambda)\equiv\frac{x_0^2}{c^2+\lambda}+\frac{y_0^2}{\lambda}-1=0,$$

de gradul al doilea în λ. Din tabloul alăturat, se vede că în intervalele $(-c^2, 0)$ şi $(0, \infty)$

λ	$-\infty$	$-c^2-\varepsilon$	$-c^2+\varepsilon$	$0-\varepsilon$	$0+\varepsilon$	∞
$f(\lambda)$	-1 descr	$-\infty$	∞	des $-\infty$	∞	des -1

este câte o rădăcină reală a ecuaţii $f(\lambda)=0$, care corespund respectiv unei iperbole şi unei elipse omofocale ce trec prin M_0.

2°. *Printre conicele omofocale de focare date numai una este tangentă la o dreaptă dată.* In adevăr, fie $y=mx+n$ dreapta la care vrem să fie tangentă una din conicele omofocale

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1.$$

Inlocuind pe y cu $mx+n$, ecuaţia ce dă abscisele punctelor de intersecţie este

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{(mx+n)^2}{\lambda}=1,\quad x^2\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{m^2}{\lambda}\right)+\frac{2mnx}{\lambda}+\frac{n^2}{\lambda}-1=0.$$

Ca să fie tangentă, trebue să admită o rădăcină dublă; deci

$$\frac{m^2n^2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{m^2}{\lambda}\right)\left(\frac{n^2}{\lambda}-1\right)=0,\ \lambda=\frac{n^2-m^2c^2}{1+m^2},$$

adică o singură valoare pentru λ, o singură conică omofocală tangentă la dreapta dată.

3°. *Tangentele duse din acelaş punct la conicele omofocale admit aceleaşi bisectoare şi aceste bisectoare sunt tangentele în acest punct la cele două conice omofocale ce trec prin acel punct.* Să găsim mai întâi ecuaţia unei tangente de direcţie m la conicele omofocale

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1.$$

Trebue a exprima că dreapta $y=mx+n$ o tae în două puncte confundate, de unde

$$n^2=\lambda(1+m^2)+m^2c^2.$$

Ecuaţia tangentelor de direcţie m este

$$y=mx\pm\sqrt{\lambda+m^2(\lambda+c^2)}.$$

Tangentele duse din $M_0(x_0, y_0)$ au coeficienţii unghiulari daţi de relaţia

$$y_0 = mx_0 \pm \sqrt{\lambda + m^2(\lambda + c^2)},$$

sau ridicând la pătrat,

$$m^2(c^2 + \lambda - x_0^2) + 2mx_0y_0 + \lambda - y_0^2 = 0.$$

Rădăcinile m' și m'' ale acestei ecuații sunt coeficienții unghiulari ai celor două tangente duse din $M_0(x_0, y_0)$ la conica

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1.$$

Coeficienții unghiulari ai bisectoarelor acestor două drepte sunt dați de ecuația

$$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{m'+m''}{1-m'm''}, \quad \frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{-2x_0y_0}{c^2-x_0^2+y_0^2},$$

independentă de λ. Aceste bisectoare $M_0\Delta'$ și $M_0\Delta''$ sunt fixe pentru toate conicele omofocale. Insă, am văzut că prin punctul M_0 trec două conice omofocale, (Γ_1) și (Γ_2). Considerând conica (Γ_1), cele două tangente duse din M_0 la (Γ_1) se confundă cu tangenta în M_0 la (Γ_1), cu care se confundă și bisectoarea lor. Deci bisectoarea $M_0\Delta'$ este tangenta în M_0 la (Γ_1), iar cealaltă bisectoare este tangenta în M_0 la conica (Γ_2) ce trece prin M_0.

Deci, tangentele duse din M_0 la conicele omofocale admit aceleași bisectoare, tangentele în M_0 la cele două conice omofocale ce trec prin M_0.

4°. *Două conice omofocale sunt ortogonale într'un punct oarecare al intersecții lor.* In adevăr, printr'un punct trec două conice omofocale ale căror tangente în acest punct sunt bisectoarele unghiului tangentelor duse din acel punct la toate conicele omofocale cu cele ce trec prin acel punct; cum bisectoarele sunt perpendiculare, tangentele sunt ortogonale, adică conicele sunt ortogonale.

5°. *Tangentele duse dintr'un punct la o conică cu centru sunt egal înclinate și de sensuri contrarii pe razele vectoare ce unesc acest punct cu focarele conicei.* In adevăr, fie MT și MT' tangentele duse din M la o elipsă sau o iperbolă (Γ) de focare F și F'. Una dintre conicele omofocale cu (Γ) și care corespunde lui $\lambda=0$, este, cum am văzut, turtită pe segmentul de dreaptă FF' și tangentele duse din M la această conică sunt MF și MF'. Unghiul acestor raze vectoare admite aceleași bisectoare ca și tangentele MT și MT' și deci propoziținea este verificată.

6°. *Tangenta într'un punct al unei elipse este bisectoarea exterioară a unghiului razelor vectoare ale punctului de contact;*

tangenta într'un punct al unei iperbole este bisectoarea interioară a aceluiaș unghi. Fie MΔ tangenta într'un punct M al unei elipse de focare F și F′ (Fig. 111). Prin punctul M trec elipsa și o iperbolă omofocală, cu focarele F și F′. Considerând conica omofocală redusă la segmentul FF′, dreptele MΔ tangenta la elipsă și MΔ′ tangenta în M la iperbolă, sunt bisectoarele unghiului FMF′ și deci proprietatea este demonstrată, căci tangenta la elipsă are focarele de aceeaș parte ale ei, pe când tangenta la iperbolă are un focar de o parte și celalt, de cealaltă parte.

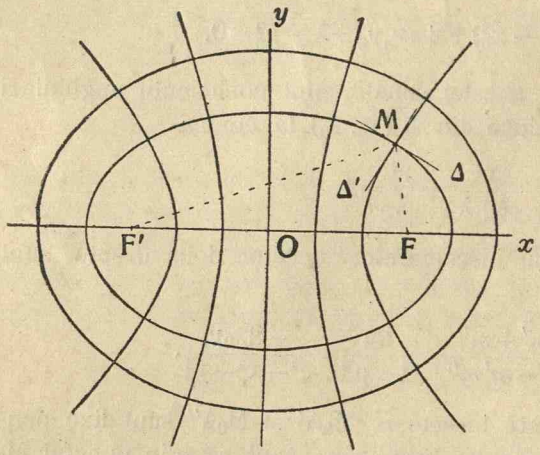


Fig. 111.

II. *Parabole omofocale.* Se zic parabole omofocale acelea care au același focar și aceaș axă. Luând ca origină focarul și axa ca axă Ox, ecuația acestor parabole omofocale este

$$x^2+y^2-(x+\lambda)^2=0,$$

sau

$$y^2-2\lambda x-\lambda^2=0,$$

λ fiind un parametru variabil. Scriind această ecuație sub forma

$$y^2=2\lambda(x+\frac{\lambda}{2}),$$

urmează că sunt două categorii de parabole omofocale, unele corespunzătoare lui $\lambda>0$, cu partea deschisă către Ox și celelalte pentru $\lambda<0$, cu partea deschisă spre Ox'. Când λ tinde către zero, prin valori pozitive sau negative, parabola tinde să se confunde cu semidreapta Ox sau semidreapta Ox'.

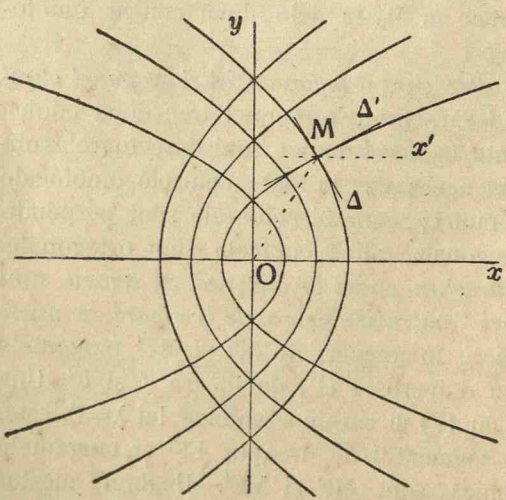


Fig. 112.

1°. *Printr'un punct al planului trec două parabole omofocale*

de direcții deosebite. Exprimând că parabola omofocală trece prin $M_0(x_0, y_0)$, urmează

$$y_0^2 - 2\lambda x_0 - \lambda^2 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini λ' și λ'' sunt totdeauna reale și de semne contrarii.

2°. *Printre parabolele omofocale numai una este tangentă la o dreaptă.* In adevăr, dreapta dată fiind $y = mx + n$, valorile lui λ corespunzătoare parabolei omofocale,

$$y^2 - 2\lambda x - \lambda^2 = 0,$$

tangentă la această dreaptă, se obține scriind că ecuația ce dă abscisele punctelor de intersecție,

$$(mx+n)^2 - 2\lambda x - \lambda^2 = 0, \quad m^2x^2 + 2(mn-\lambda)x + n^2 - \lambda^2 = 0,$$

are rădăcini egale. Deci

$$(mn-\lambda)^2 = m^2(n^2-\lambda^2), \quad \lambda = \frac{2mn}{1+m^2},$$

adică numai o singură valoare pentru λ, o singură parabolă.

3°. *Tangentele duse dintr'un punct la parabolele omofocale admit același bisectoare, care sunt tangentele în acest punct la parabolele omofocale cu cele considerate și care trec prin acest punct.* In adevăr, să determinăm ecuația tangentei la parabola

$$y^2 - 2\lambda x - \lambda^2 = 0,$$

paralelă cu direcția m. Ecuația acestei tangente este de forma $y = mx + n$, și scriind că o tae în două puncte confundate, urmează

$$n = \frac{\lambda(1+m^2)}{2m},$$

astfel că ecuația tangentei de direcție m la parabolă, este

$$y = mx + \frac{\lambda(1+m^2)}{2m}.$$

Scriind că trece prin $M_0(x_0, y_0)$, coeficienții unghiulari, m' și m'', ai tangentelor ce trec prin $M_0(x_0, y_0)$, sunt dați de ecuația

$$y_0 = mx_0 + \frac{\lambda(1+m^2)}{2m}, \quad m^2(\lambda + 2x_0) - 2my_0 + \lambda = 0.$$

Tangentele M_0T, M_0T' duse din M_0 la una din parabolele omofocale au coeficienții unghiulari m' și m''. Aceia ai bisectoarelor unghiului acestor tangente sunt dați de ecuația

$$\frac{2\mu}{1-\mu^2}=\frac{m'+m''}{1-m'm''},\quad \frac{2\mu}{1-\mu^2}=\frac{\frac{2y_0}{\lambda+2x_0}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+2x_0}},\quad \frac{2\mu}{1-\mu^2}=\frac{y_0}{x_0},$$

care nu depinde de λ; urmează că aceste bisectoare sunt aceleaşi pentru toate parabolele omofocale.

Se vede, prin acelaş procedeu, ca şi la elipse omofocale, că aceste bisectoare sunt tangentele în M_0 respectiv la cele două parabole omofocale ce trec prin M_0.

4°. *Două parabole omofocale sunt ortogonale în oricare din punctele lor de intersecţie.*

5°. *Tangentele duse dintr'un punct la o parabolă sunt egal înclinate pe raza vectoare ce uneşte acest punct cu focarul şi pe paralela la axă dusă prin acel punct.* In adevăr, aceste două ultime drepte sunt tangentele duse la parabola particulară, turtită pe Ox, care corespunde la valoarea $\lambda=0$. Aceasta mai rezultă şi din faptul că, în ecuaţia în μ, formată mai sus, $\frac{y_0}{x_0}$ reprezintă coeficientul unghiular al razei vectoare a punctului M, sau încă tangenta unghiului a acestei raze vectoare cu axa Ox.

6°. *Tangenta într'un punct al unei parabole este bisectoarea exterioară a unghiului format de raza vectoare a punctului de contact şi paralela la axă dusă prin acest punct, în acelaş sens ca axa parabolei.* In adevăr, considerând tangenta într'un punct al unei parabole cu focarul F (Fig. 112), am văzut că unghiul format de dreapta FM şi paralela din M la axa parabolei, au ca bisectoare tangentele în M la parabolele omofocale ce trec prin M, una fiind cea dată şi ţinând seamă de sens, proprietatea este învederată.

Determinarea conicelor prin condiţii iniţiale.

103. **Generalităţi.** Ecuaţia generală a conicelor conţinând şase coeficienţi, se poate împărţi cu unul din ei, astfel că rămân în ecuaţia unei conice numai *cinci parametrii arbitrari.* Prin urmare, pentru ca o conică să fie complect determinată, trebue cinci relaţiuni între coeficienţi.

Presupunând că se dă un *punct*, vom scrie că ecuaţia conicei este verificată de coordonatele punctului, avem o relaţie între coeficienţi, aşa că unul din coeficienţi este determinat. Deci, *o conică e definită prin cinci puncte.* Scriind că o conică este tangentă la o dreaptă, vom obţine tot o singură relaţie între coeficienţi. Dacă o conică este tangentă într'un punct la o dreaptă, avem două re-

laţii între coeficienţi. Scriind că o conică are centrul într'un punct dat, vom avea două relaţii între coeficienţii ce intră în ecuaţiile ce dau coordonatele centrului. Cunoscând focarul, vom înlocui, în ecuaţia focală, coordonatele focarului şi deci mai rămân trei coeficienţi necunoscuţi în ecuaţia conicei. Două focare date valorează cu patru relaţii, deci mai rămâne un singur coeficient în ecuaţia conicei. Un diametru echivalează cu o singură relaţie, care se exprimă scriind că ecuaţia diametrului trece prin centru, sau că este parelel cu o direcţie dată în cazul parabolei.

104. **Intersecţia a două conice.** Ecuaţiile a două conice fiind

$$f(x,y) \equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$g(x,y) \equiv A'x^2+2B'xy+C'y^2+2D'x+2E'y+F'=0,$$

punctele lor de intersecţie se obţin rezolvând ecuaţiile acestor conice. Dar aceste două ecuaţii de gradul al doilea au patru sisteme de soluţii (x,y), deci două conice se tae în general în patru puncte. Când ecuaţia care dă, de ex., abscisele punctelor de intersecţie, care este de gradul al patrulea, se reduce la o ecuaţie de grad mai mic, aceasta însemnează că cele două conice au puncte la infinit.

Punctele de intersecţie ale conicelor se pot găsi şi altfel. In adevăr, $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$, fiind ecuaţiile conicelor (C) şi (C'), se vede că ecuaţia

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0,$$

reprezintă când λ variază, o conică ce trece prin punctele de intersecţie ale celor două conice. Printre aceste conice sunt şi unele reduse la două drepte, corespunzătoare valorilor lui λ date de ecuaţia

$$\begin{vmatrix} A+\lambda A' & B+\lambda B' & D+\lambda D' \\ B+\lambda B' & C+\lambda C' & E+\lambda C' \\ D+\lambda D' & E+\lambda E' & F+\lambda F' \end{vmatrix}=0.$$

Această ecuaţie fiind, în general, de gradul al treilea în λ, sunt *trei conice din acestea care se reduc la două drepte* şi anume sunt conicele reduse la *secantele comune acestor conice.* Dacă A,B,C,D sunt punctele comune ale conicelor (C) şi (C') (Fig. 113), conicele reduse sunt cele formate de dreptele (AD), (BC); (AC), (BD); (AB), (CD). Intersecţiile acestor perechi de drepte ne dau punctele comune ale celor două conice.

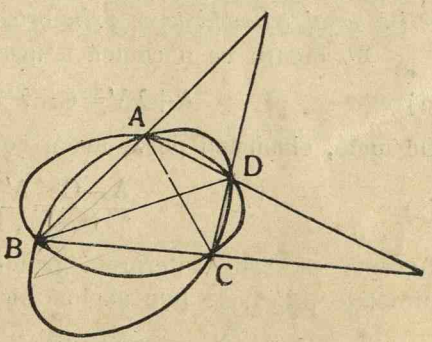


Fig. 113.

Conicele

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$$

se zice că formează un *fascicol punctual* de conice.

1°. Pentru ca una din aceste conice să fie *parabolă*, trebue ca

$$(A+\lambda A')(C+\lambda C')-(B+\lambda B')^2=0.$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea în λ, în general sunt două parabole care trec prin punctele de intersecţie a două conice.

2°. Pentru ca să fie *iperbolă echilateră*, trebue ca

$$A+\lambda A'+C+\lambda C'=0,$$

şi deci, în general, există numai o iperbolă echilateră care să treacă prin intersecţia a două conice, afară de cazul când $A+C=0, A'+C'=0$, adică conicele date să fie iperbole echilatere, când toate conicele ce trec prin intersecţia lor sunt iperbole echilatere.

Ca aplicaţie, să considerăm un triunghi ABC (Fig. 114) şi fie (Σ) o iperbolă echilateră circumscrisă acestui triunghi, H punctul de întâlnire al iperbolei cu înălţimea AD. Prin punctele A,B,C,H trec, iperbola (Σ) şi iperbola echilateră redusă la dreptele perpendiculare (AD), (BC). Deci, toate conicele, ce trec prin intersecţia acestor conice, iperbole echilatere, sunt iperbole echilatere. Dar, printre aceste iperbole este şi una redusă la dreptele (AC), (BH); deci această conică trebue să fie de genul iperbolă echilateră, adică dreptele care o formează să fie perpendiculare. Aşa dar, BH este perpendiculară pe AC, adică H este ortocentrul triunghiului. Deci, *orice iperbolă echilateră circumscrisă unui triunghi trece prin ortocentrul triunghiului.*

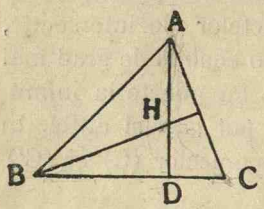


Fig. 114.

3°. Pentru ca o conică a fascicolului să fie cerc, trebue ca

$$A+\lambda A'=C+\lambda C',\quad B+\lambda B'=0. \tag{1}$$

De unde, eliminând pe λ, avem condiţia

$$\frac{A-C}{B}=\frac{A'-C'}{B'}. \tag{2}$$

Aceasta se poate interpreta geometric astfel. Ecuaţiile care dau direcţiile principale (ale axelor) ale celor două conice, fiind

$$Bm^2+(A-C)m-B=0,\quad B'm^2+(A'-C')m-B'=0,$$

relaţia (2) exprimă că aceste direcţii coincid. De altă parte, relaţiile (1) arată că direcţiile asimptotice nu sunt aceleaşi. De aci rezultă condiţia necesară şi suficientă *pentru ca să se poate duce un cerc prin punctele de intersecţie a două conice şi anume trebue ca aceste*

conice să aibă aceleași direcții ale axelor, fără să aibă aceleași direcții asimptotice.

4°. *Punctele de intersecție ale unei drepte* (Δ) *cu conicele unui fascicol punctual formează o involuție.* In adevăr, putem schimba axele astfel ca dreapta (Δ) să fie luată ca axă Ox. Punctele de intersecție ale fascicolului de conice

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+...+\lambda(A'x^2+2B'xy+...)=0$$

cu Ox sunt date de ecuația

$$Ax^2+2Dx+F+\lambda(A'x^2+2D'x+F')=0. \tag{3}$$

Fie M' și M'' punctele ale căror abscise sunt rădăcinile x', x'' ale acestei ecuații.

Să vedem dacă există pe Ox punctul P de abscisă u, astfel ca PM'. PM'' să fie independent de λ. Avem

$$PM'.PM''=(x'-u)(x''-u)=x'x''-(x'+x'')u+u^2;$$

$$x'+x''=-\frac{2(D+\lambda D')}{A+\lambda A'},\quad x'x''=\frac{F+\lambda F'}{A+\lambda A'}.$$

De unde

$$PM'.PM''=\frac{\lambda(A'u^2+2D'u+F)+Au^2+2Du+F}{\lambda A'+A}.$$

Ca să fie independent de λ, trebue ca

$$\frac{A'u^2+2D'u+F'}{A'}=\frac{Au^2+2Du+F}{A},$$

de unde

$$u=\frac{A'F-AF'}{2(D'A-A'D)}.$$

Deci, punctul P există și este unic, de unde urmează că, oricare ar fi λ, avem PM'.PM''=const., ceea ce însemnează că punctele de intersecție cu Ox formează o involuție.

5°. *Ecuația generală a conicelor trecând prin intersecția unei conice* $f(x,y)=0$ *cu două drepte* $\Delta=0$, $\Delta_1=0$, este de forma

$$f(x,y)+\lambda\Delta.\Delta_1=0.$$

λ fiind un parametru variabil.

6°. *Ecuația generală a conicelor bitangente la o conică dată în punctele de intersecție cu o dreaptă dată.* Dacă dreapta Δ_1 se apropie nemărginit de Δ, atunci punctele A și C, B și D (Fig 115) se confundă, iar conica este bitangentă în A și B la coni-

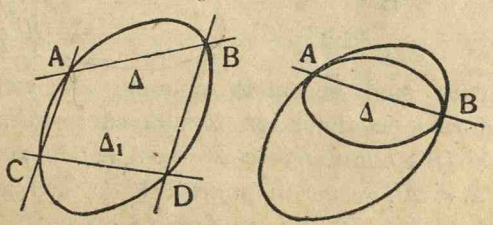


Fig. 115.

ca $f(x,y)=0$, iar ecuaţia generală a acestor conice este

$$f(x,y)+\lambda\Delta^2=0,$$

coarda de contact fiind dreapta $\Delta=0$.

Ca aplicaţie, să găsim *ecuaţia tangentelor duse din punctul* $P(x_1,y_1)$ *la conica* $f(x,y,z)=0$. Ecuaţia generală a conicelor bitangente la conica dată în punctele de contact cu tangentele din P, este ecuaţia conicelor bitangente la conică în punctele de intersecţie cu polara lui P,

$$f(x,y,z)+\lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2=0.$$

Pentru ca să reprezinte cele două tangente, e destul a scrie că această conică trece prin $P(x_1,y_1,z_1)$; de unde

$$f(x_1,y_1,z_1)+\lambda\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2=0.$$

Dar,

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}=2f(x_1,y_1,z_1).$$

Deci

$$f(x_1,y_1,z_1)+4\lambda f^2(x_1,y_1z_1)=0,\quad \lambda=-\frac{1}{4f(x_1,y_1,z_1)},$$

iar ecuaţia tangentelor este

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2-4f(x,y,z)f(x_1,y_1,z_1)=0.$$

Ca altă aplicaţie, să considerăm două conice (S) şi (S'), bitangente la conica (Σ) (Fig. 116), în punctele de intersecţie cu coardele de contact Δ şi Δ',

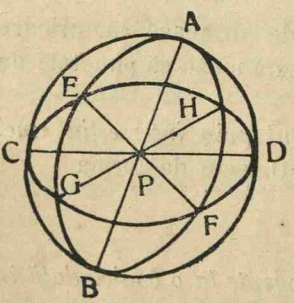


Fig. 116.

$$f(x,y)+\lambda\Delta^2=0,\quad f(x,y)+\lambda'\Delta'^2=0.$$

Scăzând aceste ecuaţii, avem

$$\lambda\Delta^2=\lambda'\Delta'^2,$$

adică două drepte

$$\Delta=\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\,\Delta',\quad \Delta+\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\,\Delta'=0,$$

care sunt secantele comune ale conicelor (S) şi (S'). Dar, din forma ecuaţiilor lor, rezultă că *secantele comune a două conice* (S) *şi* (S') *bitangente la o conică* (Σ) *în punctele de contact cu coardele* Δ *şi* Δ', *se tae în punctul* P *de intersecţie al acestor coarde şi formează cu acestea un fascicol armonic.*

7°. *Ecuația generală a conicelor circumscrise unui patrulater.* Dacă vârfurile patrulaterului sunt punctele A, B, C, D (Fig. 117), să considerăm conicele particulare formate din dreptele (AB), (CD), de o parte și (AD), (BC) de alta. Ecuația generală a conicelor este

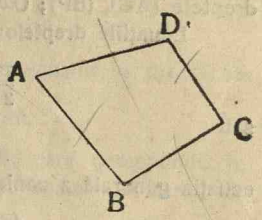


Fig. 117.

$$(AB)(CD)+\lambda(AD)(BC)=0,$$

$(AD)=0, (CD)=0, (AB)=0, (BC)=0$ fiind ecuațiile dreptelor AD, CD, AB, BC.

8°. *Ecuația conicelor circumscrise unui triunghi.* Insemnând cu $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$ ecuațiile laturilor triunghiului, ecuația conicelor circumscrise triunghiului format de aceste drepte, este

$$\Delta_1\Delta_2+\lambda\Delta_2\Delta_3+\mu\Delta_3\Delta_1=0, \tag{4}$$

λ și μ fiind parametrii arbitrari. In adevăr, se vede că vârful triunghiului ce este la intersecția dreptelor $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$ are coordonate ce verifică ecuația (4) și deci conica reprezentată de această ecuație trece prin acest vârf. La fel se arată că trece și prin celelalte vârfuri ale triunghiului.

9°. *Ecuația generală a conicelor ce au un vârf dat și axa corespunzătoare dată.* Luând vârful dat ca origină, și axa ca axă Ox, ecuația este

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx=0,$$

căci trece prin origină și tangenta în origină este Oy (perpendiculară pe axa de simetrie dată). Dar, Ox este axă de simetrie, deci ecuația este verificată, oricare ar fi x, dacă înlocuim pe y cu $-y$; deci $B=0$. Ecuația acestor conice este

$$Ax^2+Cy^2+Dx=0.$$

Cum $C\neq 0$, căci altfel conica s'ar reduce la două drepte, putem divide cu C, iar ecuația conicelor este

$$y^2=2px+qx^2,$$

și reprezintă parabolă când $q=0$, elipsă când $q<0$, iperbolă când $q>0$.

105. **Aplicații.** 1°. *Să se scrie ecuația generală a conicelor* (C) *ce trec prin punctele* A(2, 0), B(−1, 0), C(0, 3), P(0, p). 2°. *Să se arate că locul geometric al centrelor conicelor* (C) *este o conică* (Γ) *care trece prin patru puncte ale căror coordonate se cer.* 3°. *Să se studieze natura conicei* (Γ) *după diferitele poziții ale punctului* P *pe* Oy. 4°. *In cazul* $p=1$, *să se afle ecuațiile axelor conicei* (Γ), *coordonatele focarelor, lungimile axelor.*

1°. Printre conicele ce trec prin A, B, C, P, sunt şi cele formate de dreptele (AC), (BP); Ox, Oy.

Ecuaţiile dreptelor (AC), (BP) fiind

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0,\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{p}-1=0,$$

sau

$$3x+2y-6=0,\ px-y+p=0,$$

ecuaţia generală a conicelor (C) este

$$(3x+2y-6)(px-y+p)+\lambda xy=0,$$

λ fiind variabil.

2°. Locul centrelor se obţine eliminând λ între ecuaţiile $f'_x=0$, $f'_y=0$,

$$3(px-y+p)+p(3x+2y-6)+\lambda y=0,\ 2(px-y+p)-(3x+2y-6)+\lambda x=0,$$

şi este

$$6px^2+4y^2-3px-(2p+6)y=0,$$

care se poate scrie

$$4y^2-6y+p(6x^2-3x-2y)=0,$$

ceeace probează că această conică trece prin intersectia conicelor

$$4y^2-6y=0,\ 6x^2-3x-2y=0,$$

ale căror puncte de intersecţie sunt $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3°. Natura conicei (Γ) depinde de coeficientul $6p$; va fi elipsă, când $p>0$; iperbolă, $p<0$; cerc, $6p=4$, $p=\frac{2}{3}$; două drepte, $p=-\frac{3}{2}$, -6, 0.

4°. In cazul $p=1$, ecuaţia este $6x^2+4y^2-3x-8y=0$. Centrul este în $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$. Ecuaţia redusă este $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, $a^2=\frac{35}{46}$, $b^2=\frac{35}{32}$, de unde se vede lungimile axelor. Ecuaţia axelor este $B(f'^2_x-f'^2_y)=(A-C)f'_x f'_y$ sau $f'_x=0$, $f'_y=0$ (căci $B=0$).

Coordonatele focarelor sunt date de $f'^2_x-f'^2_y=4(A-C)f(x,y)$, $f'_x f'_y=4Bf(x,y)$, care se reduc la ecuaţiile $f'_x=0$, $-f'_y=4(A-C)f(x,y)$; sau $f'_x=0$, $f'^2_x=4(A-C)f(x,y)$. De unde $x=\frac{1}{4}$, $y=1\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{6}}$. Se mai pot găsi coordonatele focarelor, făcând identificarea

$$6x^2+4y^2-3x-8y\equiv S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2].$$

Când lipseşte B, axele conicei sunt paralele cu axele de coordonate. Se găsesc coordonatele (α, β) ale focarelor faţă de ecuaţia redusă a conicei şi (x_0, y_0) fiind centrul, coordonatele focarelor faţă de vechile axe sunt $x_0+\alpha$, $y_0+\beta$.

H. Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi punctele $A(a, 0)$, $B(0,a)$. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor tangente în A la Ox şi B la Oy. Să se găsească locul vârfurilor şi focarelor acestor conice.

1°. Ecuaţia generală a conicelor este

$$f(x, y)\equiv(x+y-a)^2+2\lambda xy=0. \tag{5}$$

2°. Ecuaţia axelor este $B(f'^2_x-f'^2_y)=(A-C)f'_x f'_y$, care se reduce la $f'_x=\pm f'_y$ sau

$$x+y-a+\lambda y=\pm(x+y-a+\lambda x).$$

Luând semnul +, avem $x=y$, ceea ce arată că bisectoarea unghiului xOy face parte din locul vârfurilor. Luând semnul —, avem

$$2(x+y-a)+\lambda(x+y)=0;$$

locul vârfurilor se obține eliminând pe λ între această ecuație și (5) și se găsește

$$(x+y-a)[(x+y-a)(x+y)-4xy]=0.$$

Primul factor egalat cu zero, reprezintă dreapta AB, care corespunde la conica formată din dreapta dublă AB. Al doilea factor egalat cu zero, dă ecuația

$$(x-y)^2-a(x+y)=0,$$

care reprezintă o parabolă cu vârful în O și trecând prin punctele A și B.

3°. Focarele unei conice sunt la intersecția axelor curbei și a iperbolei definită la ecuația

$$Bf(x, y)=\frac{1}{2}f'_x\frac{1}{2}f'_y,$$

care în cazul nostru se poate scrie

$$(1+\lambda)(P^2+2\lambda xy)=P^2+\lambda(x+y)P+\lambda^2xy,$$

unde $P=x+y-a$. Divizând cu λ, aceasta se mai scrie

$$(\lambda+2)xy-aP=0. \tag{6}$$

Ecuația axelor se descompune în

$$x-y=0, \quad (7) \quad 2P+\lambda(x+y)=0.$$

Prima reprezintă bisectoarea unghiului xOy, care face parte din locul focarelor. Eliminând pe λ între ecuațiile (7) și (6), obținem

$$x^2+y^2-a(x+y)=0,$$

care arată că locul focarelor este un cerc circumscris triunghiului OAB.

III. *Se consideră conicele* (C) *ce trec prin punctele* A$(a, 0)$, B$(0, a)$, P(p, a), *având ca normală în punctul* O *dreapta* OP. *Să se studieze natura conicei când* P *variază*. Considerând conicele reduse la dreptele (OA), (BP); (OB), (AP), ecuația generală a conicelor ce trec prin O, A, P, B, este

$$(y-a)y+\lambda x[ax-y(p-a)-a^2]=0, \quad \lambda ax^2-\lambda xy(p-a)+y^2-\lambda a^2x-ay=0.$$

Tangenta în origină este $\lambda a^2x+ay=0$, sau $\lambda ax+y=0$. Normala în O fiind OP, tangenta în O este perpendiculară pe OP, adică $-\lambda a=-\frac{p}{a}$, $\lambda=\frac{p}{a^2}$. Ecuația conicei este

$$\frac{p}{a}x^2-\frac{p}{a^2}(p-a)xy+y^2-px-ay=0.$$

Natura acestei conice depinde de

$$E\equiv\frac{p}{4a^4}[p(p-a)^2-4a^3],$$

al cărei semn stă în legătură cu realitatea rădăcinilor ecuații în p,

$$f(p)\equiv p(p-a)^2-4a^3=0.$$

Formând șirul lui Rolle pentru această ecuație, avem $f(-\infty)<0$, $f\left(\frac{a}{3}\right)<0$, $f(a)<0$, $f(\infty)>0$; deci o singură rădăcină reală pentru p, mai mare ca a.

Insemnând cu p_1 acea rădăcină, urmează că dacă $0<p<p_1$, E<0, elipsă; dacă $p<0$, sau $p>p_1$, E>0, iperbolă. Iperbolă echilateră este când $p=-a$, iar cerc în cazul $a=p$.

IV. *Să se scrie ecuaţia conicelor* (C) *care au trei puncte confundate în origină cu curba* $y=x^2-2xy+y^2$. *Să se afle locul centrelor iperbolelor echila-*

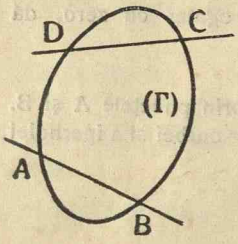


Fig. 118.

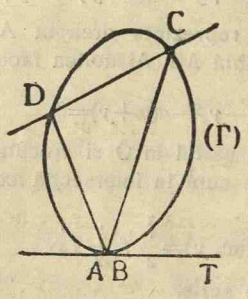


Fig. 119.

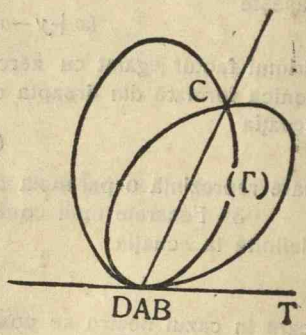


Fig. 120.

tere care fac parte din conicele (C). Să considerăm o conică ce trece prin intersecţia conicei (Γ) cu dreptele (AB), (CD) (Fig. 118). Dacă B se confundă cu A (Fig. 119), dreapta AB este tangenta în A la conica (Γ); astfel că conicele cu ecuaţia

$$(\Gamma)+\lambda(CD)(AT)=0$$

sunt tangente în A conicei (Γ). Dacă şi punctul D se confundă cu A (Fig. 120), atunci conicele

$$(\Gamma)+\lambda(AT)(AC)=0,$$

au trei puncte confundate în A cu conica (Γ).

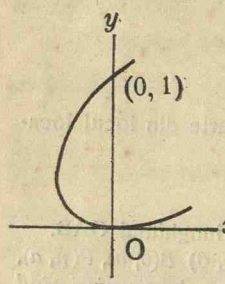


Fig. 121.

Revenind la problema noastră, urmează că

$$x^2-2xy+y^2-y+\mu y(y-\lambda x)=0$$

reprezintă conice care au trei puncte confundate în O (Fig. 121) cu conica $x^2-2xy+y^2-y=0$, care este o parabolă tangentă în origină axei Ox şi având bisectoarea întâi ca direcţie a axei.

Ca să fie iperbolă echilateră, trebue $1+(1+\mu)=0$, $\mu=-2$, iar ecuaţia iperbolelor echilatere cerute este

$$x^2-2xy(1-\lambda)-y^2-y=0.$$

Locul centrelor este cercul $2x^2+2y^2-y=0$.

V. *Se dă curba* $x^2+ay^2+2xy-y=0$ *şi* P (0, *p*). *Se duce prin* P (*Fig. 122*) *o dreaptă ce tae curba în* M′ *şi* M″. *Să se determine punctul* P *aşa ca oricare ar fi dreapta dusă prin acest punct unghiul* M′OM″ *să fie drept. Ce se întâmplă dacă conica dată este iperbolă echilateră.* In general, fiind date două curbe $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$, să găsim ecuaţia fascicolului de drepte ce unesc origina cu punctele de intersecţie ale acestor curbe (Fig. 123). Pentru aceasta, să considerăm un punct oarecare (x, y) pe o dreaptă ce uneşte origina cu

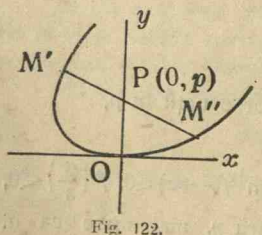


Fig. 122.

unul din punctele (x_1, y_1) de intersecție ale curbelor. Avem

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\lambda,$$

de unde $$x_1=\frac{x}{\lambda}, y_1=\frac{y}{\lambda}.$$

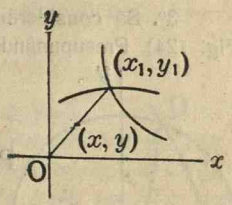


Fig. 123.

Dar coordonatele (x_1, y_1) verifică relațiile

$$f(x_1, y_1)=0,\ g(x_1, y_1)=0,$$

unde înlocuind pe x_1 și y_1 cu valorile lor, avem

$$f\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)=0, g\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)=0.$$

Gonind numitorii, ceea ce înseamnă a le face omogene cu ajutorul lui λ ecuațiile $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$, avem

$$F(x, y, \lambda)=0,\ G(x, y, \lambda)=0.$$

Eliminând între acestea pe λ, avem $R(x, y)=0$, care este relația dintre coordonatele (x, y) ale unui punct oarecare al fascicolului de drepte ce unesc origina cu punctele de intersecție ale curbelor $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$. Ecuația acestui fascicol este $R(x, y)=0$ și se obține făcând omogene funcțiunile $f(x, y)$, $g(x, y)$ cu ajutorul variabilei λ și apoi eliminând pe λ între ele.

In cazul nostru, curbele sunt

$$x^2+ay^2+2xy-y=0,\ \lambda x-y+p=0,$$

cea dată și o dreaptă oarecare ce trece prin P. Făcându-le omogene cu variabila t, avem

$$x^2+ay^2+2xy-ty=0,\ \lambda x-y+pt=0,$$

de unde eliminând pe t, obținem

$$px^2+xy(2p+\lambda)+y^2(ap-1)=0.$$

Ca unghiul M'OM'' să fie drept, trebue ca aceste drepte să fie perpendiculare, deci $p+ap-1=0$, $p=\frac{1}{a+1}$. Deci punctul $P(0, p)$ este găsit.

In general, se demonstrează teorema lui *Fregier*, *A fiind un punct al unei conicei, coardele* M'M'' *ale conicei, astfel ca unghiul* M'AM'' *să fie drepte trec printr'un punct fix, așezat pe normala în* A *la conică.* Demonstrația se face la fel, luând ca Ox tangenta în A și Oy perpendiculara în A (normala).

Când curba dată este iperbolă echilateră, atunci $a+1=0$ și deci punctul este la infinit pe Oy, secantele sunt paralele cu normala în O.

VI. *Se dau două axe perpendiculare și punctul* $A(0, a)$. *1°. Să se scrie ecuația iperbolelor echilatere* (H) *tangente în* O *la* Ox *și trecând prin punctul* A, *2°. Să se găsească locul centrelor acestor iperbole. 3°. Să se arate că luând o iperbolă oarecare* (H), *un cerc* (C) *tangent în* O *la* Ox *o tae în două puncte diferite de O. Să se găsească ecuația cercului* (C), *așa ca unul din aceste puncte să se confunde cu* O *și să se arate că acest cerc rămâne același pentru toate iperbolele* (H).

1°. Ecuația iperbolelor echilatere este

$$x^2+2\lambda xy-y^2+ay=0.$$

2°. Locul centrelor este $x^2+y^2-\frac{a}{2}y=0$.

3°. Să considerăm o conică particulară formată de Ox şi dreapta PQ (Fig. 124). Presupunând că P vine în origină, PQ devine OQ, deci conica

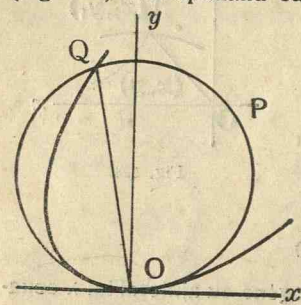


Fig. 124.

$$(H)+\mu(Ox)(OQ)=0$$

are cu conica dată trei puncte confundate în origină. Ecuaţia acestei conice este

$$x^2+2\lambda xy-y^2+ay+\mu y(y-kx)=0,$$

μ şi k fiind variabile. Ca să fie cerc, trebue

$$2\lambda-\mu k=0,\ 1=-1+\mu;\ \mu=2,\ k=\lambda.$$

Ecuaţia cercului este

$$x^2+y^2+ay=0,$$

independent de iperbolele considerate (independent de λ).

VII. *Se consideră parabolele* $(y-mx)^2+4dm^2y=0$, *m variabil.* 1°. *Să se găsească ecuaţia unui cerc* (C), *care să tae parabola în trei puncte confundate în origină şi să se arate că acest cerc rămâne fix când m variază.* 2°. *Să se arate că printr'un punct* $M_0(x_0, y_0)$ *trec două parabole. Să se indice poziţiile celor două parabole în cazul* $x_0=0$, $y_0=-4a$. 3°. *Să se arate că axele parabolelor care corespund unui punct al cercului* (C) *sunt perpendiculare.* 4°. *Să se găsească directoarea unei parabole şi să se arate că m variind, această dreaptă trece printr'un punct fix.*

1°. Ecuaţia conicelor ce au trei puncte confundate în origină cu parabola este

$$(y-mx)^2+4am^2y+\lambda y(y-\mu x)=0.$$

Ca să fie cerc, trebue $-2m-\lambda\mu=0$, $1+\lambda=m^2$; $\lambda=m^2-1$, $\mu=\dfrac{-2m}{m^2-1}$. Ecuaţia cercului este $x^2+y^2+4ay=0$.

2°. Prin $M_0(x_0, y_0)$ trec două parabole cărora le corespund valorile m' şi m'' date de

$$(y_0-mx_0)^2+4amy_0=0,\ m^2(x_0^2+4ay_0)-2mx_0y_0+y_0^2=0.$$

Când $x_0=0$, $y_0=-4a$, avem $m^2-1=0$, $m'=1$, $m''=-1$; parabolele sunt

$$(y-x)^2+4ay=0,\ (y+x)^2+4ay=0.$$

3°. Axa parabolei are direcţia m; deci cele două parabole ce trec prin $M_0(x_0, y_0)$ au axele de direcţiile m' şi m'', rădăcinile ecuaţii

$$m^2(x_0^2+4ay_0)-2mx_0y_0+y_0^2=0.$$

Ca să fie perpendiculare, trebue $m'm''+1=0$,

$$\frac{y_0^2}{x_0^2+4ay_0}+1=0,$$

deci punctul M_0 pe cercul $x_0^2+y_0^2+4ay_0=0$.

4°. Directoarea unei parabole se poate afla identificând ecuaţiile

$$m^2x^2-2mxy+y^2+4am^2y=S\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\frac{1}{m^2+1}(my+x+n)^2\right],$$

căci directoarea $my+x+n$ este perpendiculară pe direcţia axei. Identificând, avem $S=m^2+1$, $\alpha(m^2+1)+n=0$, $-\beta(m^2+1)-mn=2am^2$, $0=(\alpha^2+\beta^2)(m^2+1)-n^2$;

$\alpha=-\frac{n}{m^2+1}$, $\beta=-\frac{2am^2+mn}{m^2+1}$. Inlocuind în ultima, simplificând, $n=-am$. Ecuația directoarei este

$$my+x-am=0,$$

și trece prin punctul de intersecție al dreptelor $x=0$, $y=a$.

VIII. *Pe axele perpendiculare* Ox *și* Oy *se iau punctele* $A(a, 0)$, $B(0, b)$. *1°. Să se scrie ecuația iperbolelor echilatere așa în cât în triunghiul* OAB *fiecare latură să fie polara vârfului opus. 2°. Să se afle locul centrelor acestor iperbole. 3°. Fie* P *mijlocul distanței dintre punctele de intersecție ale uneia din iperbolele precedente cu* Ox, Q *punctul analog pe* Oy; *să se arate că dreapta* PQ *păstrează o direcție fixă când iperbola variază.*

1°. $x^2+2\lambda xy-y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$. Scriind că polara punctului A este Oy și polara lui B este Ox, avem

$$a\lambda+\beta=0,\ a\alpha+\gamma=0,\ b\lambda+\alpha=0,\ b\beta+\gamma=0;\ \alpha=-b\lambda,\ \beta=-a\lambda,\ \gamma=ab\lambda.$$

Ecuația iperbolelor este

$$x^2+2\lambda xy-y^2-2b\lambda x-2a\lambda y+ab\lambda=0.$$

2°. Locul centrelor este cercul $x^2+y^2-ax-by=0$.

3°. Abscisele punctelor de intersecție cu Ox sunt date de $x^2-2b\lambda x+ab\lambda=0$. Coordonatele lui P, mijlocul coardei determinată pe Ox, sunt $(b\lambda, 0)$. Acelea ale lui Q sunt $(0, -a\lambda)$. Coeficientul unghiular al dreptei PQ este $\frac{a\lambda}{b\lambda}=\frac{a}{b}=$ const.

IX. *In planul a două axe perpendiculare se dau un cerc cu centru în origină și raza* a *și o dreaptă* PQ *ce trece prin origină și are coeficientul unghiular* m. *1°. Să se scrie ecuația conicelor* (S) *ce trec prin punctele de intersecție ale dreptei cu cercul și tangente la cerc în unul din punctele de intersecție cu* Ox. *2°. Să se afle locul geometric al centrelor acestor conice. 3°. Acest loc este o conică* (C); *să se determine axele, centrul. 4°. Presupunând că* PQ *se învârtește în jurul lui* O, *să se afle locul polului dreptei* PQ *față de conica* (C), *locul punctului de intersecție al dreptei* PQ *cu asimptotele conicei* (C) (Fig. 125).

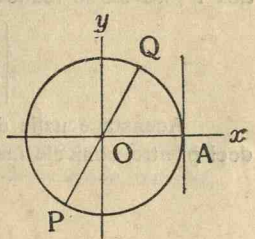


Fig. 125.

1°. Ecuația conicelor este $x^2+y^2-a^2+\lambda(y-mx)(x-a)=0$.

2°. Locul centrelor este $f(x, y)\equiv x^2-y^2+2mxy-ax-amy=0$.

3°. Centrul acestei conice este $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Axele sunt date de

$$m[(2x+2my-a)^2-(-2y+2mx-am)^2]=2(2x+2my-a)(-2y+2mx-am).$$

4°. Când m variază, locul polului (x_1, y_1) al dreptei PQ $(y=mx)$ față de conica (C), este dat de

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial z_1},$$
$$m \quad -1 \quad 0$$

$$(2x_1+2my_1-a)+m(-2y_1+2mx_1-am)=0,\ ax_1+amy_1=0.$$

Prima ecuație se scrie $(2x_1-a)(1+m^2)=0$, deci locul geometric este dreapta $x_1=\frac{a}{2}$.

Pentru a găsi locul punctelor de intersecție a dreptei PQ cu asimptotele conicei (C), vom elimina pe m între ecuația $y=mx$ și aceea a asimptotelor, $f(x, y)-\frac{\Delta}{\delta}=0$, sau $f(x, y)+\frac{a^2}{4}=0$ și se găsește cubica (curba de ordinul al treilea) $4(x^2+y^2)(x-a)+a^2x=0$.

X. *Ecuația conicelor înscrise într'un patrulater.* Fiind date conicele (Γ) și (Γ′) prin ecuațiile lor tangențiale,

$$F(u, v, w)\equiv au^2+buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0,$$
$$G(u, v, w)\equiv a'u^2+2b'uv+c'v+\ldots=0,$$

ele admit patru tangente comune, $ux+vy+wz=0$, ale căror valori pentru u, v, w se obțin rezolvând ecuațiile conicelor în raport cu u, v, w. Deci

$$F(u, v, w)+\lambda G(u, v, w)=0$$

reprezintă, când λ variază, toate conicele înscrise în patrulater format de tangentele comune la conicele $F=0$. $G=0$. Se zice că $F+\lambda G=0$ formează un *fascicol tangențial* de conice.

Se pot găsi valori pentru λ, pentru care ecuația $F+\lambda G=0$, să se reducă la doi factori de gradul întâi,

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)=0,$$

adică conica să se reducă la punctele

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0,\ \alpha' u+\beta' v+\gamma' w=0,$$

de coordonate (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. Pentru aceasta trebue ca forma cuadratică $F+\lambda G$ să se reducă la doi factori, adică discriminantul

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & d+\lambda d' \\ b+\lambda b' & c+\lambda c' & e+\lambda e' \\ d+\lambda d' & e+\lambda e' & f+\lambda f' \end{vmatrix}=0.$$

Această ecuație de gradul al treilea în λ, dă trei valori pentru λ, și deci printre conicele fascicolului tangențial sunt trei reduse la câte două puncte și anume vârfurile A, B; C, D; E, F (Fig. 126) ale patrulaterului format de cele patru tangente comune la conicele $F=0$, $G=0$.

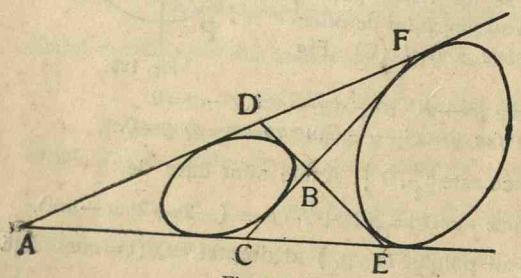


Fig. 126.

Deci, fiind date punctele $A_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i=1, 2, 3, 4$, ecuația generală a conicelor înscrise în patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este

$$(\alpha_1u+\beta_1v+\gamma_1w)(\alpha_2u+\beta_2v+\gamma_2w)+\lambda(\alpha_3u+\beta_3v+\gamma_3w)(\alpha_4u+\beta_4v+\gamma_4w)=0.$$

De asemenea,

$$F(u, v, w)+\lambda(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)=0$$

reprezintă conicele înscrise în patrulaterul format de tangentele duse din punctele (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ la conica $F(u, v, w)=0$.

XI. *Ecuația conicelor care au același focare cu o conică dată.* Am văzut că ecuația unei conice cu focarul (α, β) era

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,$$

sau

$$[y-\beta+i(x-\alpha)][y-\beta-i(x-\alpha)]=(lx+my+n)^2,\ i=\sqrt{-1}.$$

Se vede că dreptele izotrope ce trec prin punctul $F(\alpha, \beta)$,

$$y-\beta=\pm i(x-\alpha),$$

sunt tangente la conica noastră, căci punctele de intersecție, de ex., ale conicei cu dreapta $y-\beta=i(x-\alpha)$ sunt date de

$$(lx+my+n)^2=0,\ y-\beta=i(x-\alpha),$$

adică un punct dublu. Deci, putem da o nouă definiție a focarelor unei conice: *Focarele sunt punctele de unde se pot duce la o conică tangente izotrope.*

Dar, dreptele izotrope trec respectiv prin punctele *ciclice*, $I(1,i,0)$, $J(1,-i,0)$ și deci *tangentele duse la o conică prin punctele circulare se tae în focarele conicei* (Fig. 127). Așa dar, conica este înscrisă în patrulaterul format de tangentele duse din I și J la conică, astfel încât dacă o conică are focarele $F(\alpha,\beta,\gamma)$, $F'(\alpha',\beta',\gamma')$, ecuația generală a conicelor care admit focarele F și F', adică a conicelor înscrise în patrulaterul IJFF' (Fig. 127) este

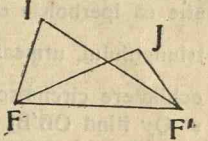


Fig. 127.

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)+$$

$$\lambda(u.1+v.i+w.0)(u.1-v.i+w.0)=0,$$

sau

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)+\lambda(u^2+v^2)=0.$$

Deci, ecuația unei conice fiind

$$f(u,v,w)=0,$$

ecuația conicelor omofocale cu aceasta este

$$f(u,v,w)+\lambda(u^2+v^2)=0.$$

Ca aplicație, să considerăm *locul punctelor al căror produs al distanțelor a două puncte* $F(\alpha,\beta,\gamma)$, $F'(\alpha'\beta'\gamma')$ *la o dreaptă* $ux+vy+wz=0$ *este constant*,

$$\frac{(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)}{u^2+v^2}=k,$$

sau

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w)=k(u^2+v^2),$$

care este o conică cu focarele F și F'. Deci, o nouă definiție a conicelor cu centru: *Infășurătoarea dreptelor astfel că produsul distanțelor la această dreaptă a două puncte să fie constant.*

XII. *Locul centrelor conicelor circumscrise unui patrulater.* Fie patrulaterul AA'BB' (Fig. 128). Să luăm ca axe Ox și Oy dreptele AA' și BB', care se tae în O. Fie C și D intersecțiile dreptelor AB, A'B' și AB', A'B. Insemnând cu $A(a,0)$, $A'(a,0)$, $B(0,b)$, $B'(0,b')$, ecuația conicelor circumscrise patrulaterului AA'BB' este

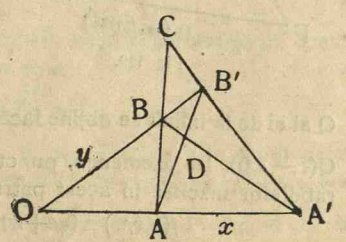


Fig. 128.

$$(8)\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)+\lambda xy=0.$$

Locul centrelor este

(9) $$\frac{x^2}{aa'}-\frac{y^2}{bb'}-\frac{a+a'}{2aa'}x+\frac{b+b'}{2bb'}y=0.$$

Această conică trece prin punctele C, D, O, centrele conicelor reduse respectiv la dreptele (AB) (A'B'), (A'B) (AB'), (AA') (BB'), trecând prin cele patru puncte date, A, A', B, B'. Dacă facem $y=0$, avem $x=0$, $x=\frac{a+a'}{2}$; deci locul centrelor trece prin mijlocul segmentului AA'. Trece de asemenea prin alte cinci puncte care sunt mijloacele dreptelor trecând prin cele patru puncte date. Deci această conică, locul centrelor, trece prin nouă puncte, mijloacele celor şase segmente formate de cele patru puncte şi prin cele trei puncte de intersecţie ale laturilor opuse ale patrulaterului considerat.

Să presupunem că considerăm iperbolele echilatere circumscrise unui triunghi, AA'B şi fie B' ortocentrul triunghiului (punctul de întâlnire al înălţimilor); atunci punctele O, D, C sunt respectiv picioarele înălţimilor din B, A, A'. Conicele (8) sunt circumscrise patrulaterului ABA'B' şi cum se ştie că iperbolele echilatere circumscrise unui triunghi trec prin ortocentrul triunghiului, urmează că ecuaţia (8), unde $\frac{1}{aa'}=\frac{-1}{bb'}$, reprezintă iperbolele echilatere circumscrise triunghiului AA'B (axe perpendiculare, Ox fiind AA' şi Oy fiind OB'B). Ecuaţia (9) se reduce în acest caz la un cerc, deci locul centrelor iperbolelor echilatere circumscrise unui triunghi AA'B trece prin nouă puncte, mijloacele laturilor AA', A'B, BA ale triunghiului; mijloacele segmentelor A'B', AB', BB', cuprinse între vârfurile A, A', B ale triunghiului şi ortocentru B'; picioarele O, C, D ale înălţimilor duse din B, A', A pe laturile opuse AA', AB, BA'. Cum acest loc este un cerc, urmează că *în orice triunghi, mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor, mijloacele segmentelor cuprinse între vârfurile triunghiului şi ortocentru, sunt nouă puncte aşezate pe un cerc, numit cercul celor nouă puncte (al lui Euler); acest cerc este locul centrelor iperbolelor echilatere circumscrise triunghiului considerat.*

XIII. *Locul focarelor parabolelor înscrise într'un triunghi.* Parabola fiind tangentă la dreapta de la infinit, ale cărei coordonate tangenţiale sunt $u=0$, $v=0$, $w\neq 0$, urmează că ecuaţia ei tangenţială nu va conţine termen cu w^2 (căci trebue să fie verificată de $u=0$, $v=0$). Luând ca axe Ox, dreapta BC (Fig. 129), ca Oy, perpendiculara din A, să însemnăm coordonatele A$(0,a)$, B$(b,0)$, C$(c,0)$. Să considerăm patrulaterul format de triunghi şi dreapta de la infinit ce tae în P şi Q dreptele AB şi AC. Parabola este înscrisă în patrulaterul BCQP. Ecuaţia dreptei AC fiind $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-z=0$, punctul

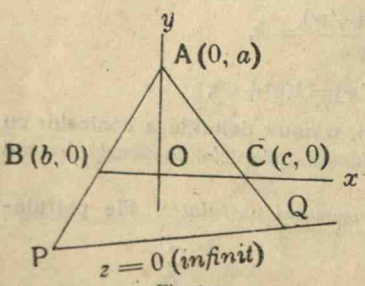


Fig 129.

Q al ei de la infinit se obţine făcând $z=0$; Q are deci coordonatele $\frac{x}{c}=\frac{y}{-a}=\frac{z}{0}$, Q$(c,-a,0)$. De asemenea, punctul P are coordonatele P$(b,-a,0)$. Ecuaţia parabolelor înscrise în acest patrulater este

$$f(u,v,w)\equiv(uc+w)(uc-av)+\lambda(bu+w)(bu-av)=0.$$

Să găsim locul focarelor acestor conice. Pentru aceasta, să ne adu-

cem aminte că focarul (x,y) al unei conice este un punct de unde se pot duce tangente izotrope. Ecuaţia unei drepte ce trece prin acel punct, este

$$Y-y=m(X-x),\ mX-Y+y-mx=0,$$

şi are coordonatele tangenţiale $(m, -1, y-mx)$. Scriind că această dreaptă este tangentă la conica

$$f(u,v,w)\equiv au^2+2\beta uv+\gamma v^2+2\delta uw+2\epsilon vw+\psi w^2=0,$$

avem

$$am^2-2\beta m+\gamma+2\delta m(y-mx)-2\epsilon(y-mx)+\psi(y-mx)^2=0,$$

$$m^2(a+\psi x^2-2\delta x)-2m(\beta-\delta y-\epsilon x+\psi xy)+\gamma-2\epsilon y+\psi y^2=0.$$

Punctul (x,y) va fi focar, dacă această ecuaţie are rădăcinile ecuaţii $m^2+1=0$, adică dacă

$$a+\psi x^2-2\delta x=\gamma-2\epsilon y+\psi y^2,\ \beta-\delta y-\epsilon x+\psi xy=0.$$

Deci, ecuaţiile care dau focarele (x,y) ale conicei în coordonate tangenţiale,

$$au^2+2\beta uv+\gamma v^2+2\delta uw+2\epsilon vw+\psi w^2=0,$$

sunt

$$(x^2-y^2)\psi-2\delta x+2\epsilon y+a-\gamma=0,\ xy\psi-\epsilon x-\delta y+\beta=0.$$

Aplicând acestea în cazul conicei

$$f(u,v,w)\equiv(uc+w)(cu-av)+\lambda(bu+w)(bu-av)=0,$$

$$f(u,v,w)\equiv(c^2+\lambda b^2)u^2+uw(c+\lambda b)-vw(a+\lambda a)-uv(ac+\lambda ab)=0,$$

avem

$$-(c+\lambda b)x-(a+\lambda a)y+c^2+\lambda b^2=0,\ -\frac{a+\lambda a}{2}x+\frac{c+\lambda b}{2}y-\frac{ac+\lambda ab}{2}=0.$$

De unde, eliminând pe λ, locul focarelor este cercul

$$(cx+ay-c^2)(ax-by+ab)=(bx+ay-b^2)(ax-cy+ac),$$

ce trece prin vârfurile triunghiului ABC.

Deci, *locul focarelor parabolelor înscrise într'un triunghi este cercul circumscris triunghiului;* sau, *focarul unei parabole înscrise într'un triunghi este pe cercul circumscris triunghiului.*

Ştim că este numai o parabolă înscrisă într'un patrulater. Deci, focarul ei este pe cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate de câte trei din laturile patrulaterului. Ajungem la teorema lui *Miquel: Cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate de câte trei din laturile unui patrulater, se tae în acelaş punct* (focarul parabolei înscrisă în patrulater).

XIV. *Locul centrelor conicelor înscrise într'un patrulater.* Pentru determinarea centrului unei conice, să ne reamintim că centrul este polul dreptei de la infinit. Trebue deci să ştim a găsi polul unei drepte (u_1,v_1,w_1) în raport cu conica $f(u,v,w)=0$.

Am văzut că fiind date dreptele (u_1,v_1,w_1), (u_2,v_2,w_2), condiţia ca aceste drepte să fie conjugate în raport cu conica este

$$u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}+v_2\frac{\partial f}{\partial v_1}+w_2\frac{\partial f}{\partial w_1}=0. \tag{10}$$

Dar, dacă două drepte sunt conjugate, una, (u_2,v_2,w_2), trece prin polul celeilalte; deci, din relaţia (10), care arată că dreapta $u_2x+v_2y+w_2z=0$ trece prin punctul $\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial v_1}, \frac{\partial f}{\partial w_1}\right)$, urmează că polul dreptei (u_1,v_1,w_1) în raport cu conica $f(u,v,w)=0$ are coordonatele omogene

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial v_1}, \frac{\partial f}{\partial w_1}.$$

Aşa fiind, ecuaţia tangenţială a polului unei drepte (u_1,v_1,w_1) este

$$u\frac{\partial f}{\partial u_1}+v\frac{\partial f}{\partial v_1}+w\frac{\partial f}{\partial w_1}=0, \text{ sau } u_1\frac{\partial f}{\partial u}+v_1\frac{\partial f}{\partial v}+w_1\frac{\partial f}{\partial w}=0.$$

Dacă (u_1,v_1,w_1) este dreapta de la infinit, atunci $u_1=0$, $v_1=0$, $w_1\neq 0$ şi deci ecuaţia polului este

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0.$$

Deci, fiind dată ecuaţia tangenţială a unei conice, $f(u,v,w)=0$, ecuaţia tangenţială a centrului este

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0.$$

Să revenim la conicele înscrise în patrulaterul ABCD, A$(a,0)$, B$(0,b)$ C$(c,0)$, D$(0,d)$. Ecuaţia tangenţială a conicelor este

$$f(u,v,w)\equiv(au+w)(cu+w)+\lambda(bv+w)(dv+w)=0.$$

Ecuaţia tangenţială a centrului este

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0,\ cu+w+au+w+\lambda(bu+w+dv+w)=0,$$

$$u(c+a)+v(b+d)\lambda+2w(1+\lambda)=0.$$

Coordonatele omogene punctuale ale centrului sunt

$$\rho x=c+a,\ \rho y=(b+d)\lambda,\ \rho z=2(1+\lambda),$$

de unde eliminând pe ρ şi λ, avem

$$\frac{x}{\frac{a+c}{2}}+\frac{y}{\frac{b+d}{2}}=1,$$

deci *locul centrelor conicelor înscrise într'un patrulater este o dreaptă ce trece prin mijloacele diagonalelor.* Cum între aceste conice înscrise în patrulater, sunt şi conicele reduse la câte două puncte (A,C), (B,D), (E,F), AC, BD, EF fiind cele trei diagonale ale patrulaterului complect şi cum centrele acestor conice sunt mijloacele acestor diagonale, rezultă că *mijloacele diagonalelor unui patrulater complect sunt colineare, această dreaptă fiind locul centrelor conicelor înscrise în patrulater.*

XV. *Altă definiţie a conicelor.* Să considerăm două fascicole de drepte trecând respectiv prin punctele P şi Q coeficienţii unghiulari m şi m' ai acestor drepte verificând relaţia omografică

(11) $$Amm'+Bm+Cm'+D=0.$$

Să găsim locul geometric al punctului M pe intersecţie a două raze omoloage, PM, QM. Luând PQ ca axă Ox şi perpendiculara în mijlocul ei ca axă Oy, coordonatele punctelor fiind P$(a,0)$, Q$(-a,0)$, ecuaţiile razelor omoloage sunt

$$y=m(x-a),\ y=m'(x+a).$$

Eliminând pe m şi m' între aceste ecuaţii şi (11), avem ecuaţia locului geometric

$$Ay^2+[B(x+a)+C(x-a)]y+D(x^2-a^2)=0,$$

sau

$$Dx^2+(B+C)xy+Ay^2+(B-C)ay-Da^2=0,$$

adică o conică care trece prin vârfurile P și Q ale fascicolelor. Fascicolele, între ai căror coeficienți unghiulari m și m' a două raze omoloage, avem relația omografică

$$Amm'+Bm+Cm'+D=0,$$

se zic *fascicole omografice*. Deci, *o conică este locul intersecții a două raze omoloage a două fascicole omografice*, direcțiile asimptotice fiind paralele cu razele

$$Am^2+(B+C)m+D=0.$$

XVI. *O ultimă definiție a conicelor.* Să aflăm înfășurătoarea dreptelor care unesc punctele omoloage a două diviziuni omografice pe dreptele date D și D'. Să luăm acele drepte ca Ox și Oy și fie $P(p, 0)$, $Q(0, q)$ câte un punct fix respectiv pe Ox și Oy și M', M'' variabile, astfel ca

$$a.\ PM'\,QM''+b.PM'+c.QM''+d=0. \tag{12}$$

Să considerăm o dreaptă variabilă, $ux+vy+wz=0$, ce taie axele în $\left(-\frac{w}{u}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{w}{v}\right)$. Presupunând că aceste puncte sunt tocmai M' și M'', vom înlocui în relația (12)

$$PM'=-\frac{w}{u}-p,\quad QM''=-\frac{w}{v}-q,$$

și avem

$$a\left(\frac{w}{u}+p\right)\left(\frac{w}{v}+q\right)-b\left(\frac{w}{u}+p\right)-c\left(\frac{w}{v}+q\right)+d=0,$$

$$a(w+up)(w+vq)-b(w+up)v-c(w+vq)u+duv=0.$$

Aceasta probează că înfășurătoarea dreptei M'M'' este o conică, tangentă la $Ox(y=0;\ u=0,\ w=0)$, $Oy(x=0;\ v=0,\ w=0)$, căci această ecuație este verificată de coordonatele tangențiale ale axei $Ox(u=0,\ w=0)$ și ale axei $Oy(v=0,\ w=0)$. Este o parabolă când $a=0$. Deci, *o conică este înfășurătoarea dreptelor care unesc două puncte omoloage a două diviziuni omografice pe două drepte date.*

XVII. *Conicele și diviziunile omografice.* Să considerăm dreptele $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$, care se tae în punctele 1, 2, 3, 4 (Fig. 130). Ecuația

$$\alpha\gamma=\beta\delta$$

reprezintă o conică (C) circumscrisă patrulaterului 1 2 3 4. Ecuațiile

$$\alpha=\lambda\beta,\quad \delta=\lambda\gamma \tag{13}$$

reprezintă două drepte care se tae într'un punct M al conicei (C). Când λ variază, prima ecuație reprezintă un fascicol de drepte cu vârful în punctul 2, iar a doua, un fascicol de drepte cu vârful în punctul 4. Cum raportele anarmonice a patru drepte a fiecărui fascicol depind numai de valorile lui λ, urmează că raportul anarmonic a patru drepte ce unesc punctul 2 cu patru puncte ale conicei este egal cu raportul anarmonic a patru drepte care unesc punctul 4 cu aceleași puncte.

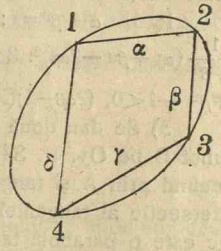


Fig. 130.

Considerând cele patru puncte ca fixe și punctele 2 și 4 ca variabile,

urmează că *fiind date patru puncte* A, B, C, D *pe o conică, raportul anarmonic al dreptelor* MA, MB. MC, MD *care unesc un punct* M *al conicei cu aceste patru puncte este constant.*

Făcând calcule analoage în coordonate tangențiale, rezultă că o *tangentă variabilă la o conică intercepteazâ pe patru taugente fixe patru puncte al căror raport anarmonic este constant.*

Deci, raportul anormonic a patru puncte ale unei conice este, sau raportul anarmonic al celor patru drepte ce unesc aceste patru puncte fixe cu un punct variabil al conicei, sau raportul anarmonic al celor patru puncte unde o tangentă variabilă la conică tae tangentele în cele patru puncte date ale conicei.

In general, să considerăm două fascicole omografice (punctuale sau tangențiale), definite prin ecuațiile

$$\alpha=\lambda\beta,\ \delta=\lambda'\gamma,\ A\lambda\lambda'+B\lambda+C\lambda'+D=0, \tag{14}$$

unde A, B, C, D sunt constante. Ecuațiile (13) corespund cazului $\lambda=\lambda'$. Eliminând pe λ, λ' între ecuațiile (14), se obține o ecuație de gradul al doilea. Deci, *punctul de intersecție a razelor corespunzătoare a două fascicole omografice de drepte descrie o conică trecând prin vârfurile celor două fascicole; dreapta care unește două puncte corespunzătoare a două diviziuni omografice pe două drepte rămâne tangentă la o conică tangentă la cele două drepte.*

Exerciții.

1) Să se determine b și c în funcțiune de a, astfel ca curbele $y^2+axy-bx^2+2cx=0$ să aibă dreapta $y-x-2=0$ ca asimptotă. Să se afle locul centrelor acestor conice, când a variază.

R. $y^2+axy-(a+1)x^2-2(a+2)x=0$. Locul centrelor este

$$(x-y)(x-y+2)=0.$$

2) Se consideră punctul $M'(\alpha, \beta)$ pe iperbola (I) $x^2-y^2-1=0$. Prin punctele unde normala în M' la iperbolă tae curba se duc conicele bitangente iperbolei. 1°. Să se găsească ecuația generală a lor. 2°. Printre aceste conice este una (C) ce trece prin centrul iperbolei; să se afle ecuația ei. 3°. Când M' se mișcă pe iperbola (I), natura conicei (C) variază; să se arate că iperbolele $2xy+1=0$, $2xy-1=0$ despart pe (I) regiunile pentru care (C) este elipsă de cele pentru care e iperbolă și că punctele lor comune cu (I) dau ca curbe (C) parabole.

R. 1°. $\alpha^2-\beta^2=1$; $x^2-y^2-1+\lambda(\alpha y+\beta x-2\alpha\beta)^2=0$. 2°. $x^2-y^2-1+\frac{1}{4\alpha^2\beta^2}(\alpha y+\beta x-2\alpha\beta)^2$. 3°. $B^2-AC=4\alpha^2\beta^2(4\alpha^2\beta^2+\beta^2-\alpha^2)=4\alpha^2\beta^2(4\alpha^2\beta^2-1)$; elipsă, $4\alpha^2\beta^2-1<0$, $(2\alpha\beta-1)(2\alpha\beta+1)<0$; se construește $2\alpha\beta-1=0$, $2\alpha\beta+1=0$, etc.

3) Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy, un punct A pe Ox, un punct B pe Oy. 1°. Să se formeze ecuația generală a iperbolelor echilatere trecând prin A și tangente în B la Oy. 2°. Să se afle locul punctului de intersecție al tangentei în A cu paralele la asimptote duse prin O. Acest loc este o parabolă tangentă în origină la Oy, cu axa paralelă cu AB.

R. $A(a, 0)$, $B(0, b)$; $x^2-2\lambda xy-y^2-\frac{a^2-b^2}{a}x+2by-b^2=0$. Locul cerut are ca ecuație $(bx+ay)^2-a(a^2+b^2)x=0$.

4). Fiind date punctele F și A, să se formeze ecuația conicelor cu focarul în F și cu un vârf al axei focale în A.

R. Luăm FA ca axa Ox, perpendiculara în F ca Oy; A$(a, 0)$. Ecuaţia conicelor este de forma $x^2+y^2=e^2(x-\lambda)^2$. Scriem că trecem prin A; $e^2=\frac{a^2}{(a-\lambda)^2}$, aşa că ecuaţia conicelor este $(a-\lambda)^2(x^2+y^2)-a^2(x-\lambda)^2=0$.

5). Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi punctele A$(a, 0)$. A$'(0, -a)$. 1°. Să se formeze ecuaţia iperbolelor echilatere circumscrise triunghiului OAA'. 2°. Locul punctelor de contact ale tangentelor la aceste curbe paralele cu dreapta $x+y=0$. 3°. Locul punctelor de întâlnire ale normalelor în A şi A'.

R. 1°. $x^2+2\lambda xy-y^2-a(x+y)=0$; 2°. $x^2+y^2-a(x-y)$; 3°. locul este parabola $(x+y)^2+a(x-y-2a)=0$; axa este $x+y=0$, tangenta la vârf $x-y-2a=0$.

6). Se consideră iperbolele echilatere care au ca vârf un punct dat O, care trec prin punctul dat A. 1°. Să se afle locul centrelor acestor curbe. 2°. Să se găsească înfăşurătoarea axelor netransverse ale iperbolelor considerate.

R. Luăm O origină, OA ca axă Ox, A$(2a, 0)$. Ecuaţia iperbolelor echilatere ce trec prin O şi A este $x^2+2Bxy-y^2-2ax+2Ey=0$. O va fi un vârf dacă diametrul conjugat tangentei în origină este perpendicular pe această tangentă. Ecuaţia conicelor considerate este $x^2+\frac{4a\lambda^2}{a^2-\lambda^2}xy-y^2-2ax-2\lambda y=0$. 1°. Locul centrelor $x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$. 2°. Axa netransversă trece prin centru şi este paralelă cu tangenta în O; are ecuaţia $y-\frac{\lambda(a^2-\lambda^2)}{a^2+\lambda^2}=-\frac{a}{\lambda}\left(x-\frac{a(a^2-\lambda^2)}{a^2+\lambda^2}\right)$, sau $ax+\lambda y+\lambda^2-a^2=0$. Înfăşurătoarea este parabola $y^2-4a(x-a)=0$.

7). Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi un punct A$(a, 0)$. Se consideră parabolele tangente în O la Oy şi care trec prin punctul A. 1°. Să se afle locul focarelor acestor parabole. 2°. Să se afle locul vârfurilor. 3°. Să se găsească înfăşurătoarea directoarelor.

R. $f(x,y)\equiv(y-mx)^2-am^2x=0$. 1°. Ecuaţiile care dau focarele sunt $f'^2_x-f'^2_y-4(m^2-1)f(x,y)=0$, $f'_xf'_y+4mf(x,y)=0$; $-4x+4my+am^2=0$, $y+mx=0$.

Eliminând pe m, locul focarelor este $4x(x^2+y^2)-ay^2=0$. 2°. Axa parabolei este $f'_x-\frac{1}{m}f'_y=0$, $2(m^2+1)(y-mx)+am^3=0$. Locul vârfurilor se obţine eliminând m între ecuaţia curbei, $f(x,y)=0$, şi aceea a axei. Coordonatele unui punct al locului sunt

$$x=\frac{am^4}{4(m^2+1)^2},\quad y=\frac{-am^3(m^2+2)}{4(m^2+1)^2},$$

în funcţiune de parametrul variabil m.

3°. Se poate considera directoarea ca locul punctelor de unde se poate duce la curbă tangente perpendiculare. Ecuaţia directoarei este atunci $f'^2_x+f'^2_y-4(m^2+1)f(x.y)=0$, $4x+4my+am^2=0$. Înfăşurătoarea acestei drepte este parabola $y^2-ax=0$.

8) Să se afle locul vârfurilor iperbolelor echilatere având acelaş centru şi un punct comun.

R. Luăm ca origină centrul fix, ca axă Ox dreapta care unește centrul cu punctul comun la toate iperbolele și fie a abscisa lui. Ecuația iperbolelor este $x^2-y^2+2\lambda xy-a^2=0$. Locul vârfurilor se obține eliminând λ între ecuația curbei și a axelor; are ecuația $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

9) Să se afle înfășurătoarea coardei unei conice văzută din focarul acestei conice sub un unghi drept.

R. Ecuația conicei fiind $x^2+y^2-e^2(x-a)^2=0$, să însemnăm cu $ux+vy-1=0$ ecuația unei coarde oarecare. Fascicolul de drepte obținut unind origina (focarul) cu punctele de intersecție a conicei și dreptei, se găsește făcând ecuațiile conicei și dreptei omogene cu ajutorul variabilei t și apoi eliminând pe t între ele; obținem

$$x^2(1-e^2)+y^2-2e^2ax(ux+vy)-e^2a^2(ux+vy)^2=0,$$

$$(1-e^2-2e^2au-e^2a^2u^2)x^2+\ldots+y^2(1-e^2a^2v^2)=0.$$

Ca aceste drepte să fi perpendiculare, trebue $(1-e^2-2e^2au-e^2a^2u^2)+(1-e^2a^2v^2)=0$. Deci, între coordonatele tangențiale (u,v,w) ale dreptei $ux+vy+wz=0$, avem relația $e^2a^2(u^2+v^2)+2e^2auw+(e^2-2)w^2=0$. Deci dreapta (coarda) înfășură conica a cărei ecuație tangențială este $e^2a^2(u^2+v^2)+2e^2auw+(e^2-2)w^2=0$. Revenind la ecuația punctuală, găsim că această înfășurătoare este $x^2+y^2-\frac{a^2}{2}(x-a)^2=0$.

10) Să se afle locul focarelor parabolelor tangente la o dreaptă dată într'un punct fix A și la a doua dreaptă dată într'un punct variabil B.

R. Fie OA, OB dreptele date; luăm OA ca Ox, perpendiculară în O ca Oy; $A(a,0)$, $(OB)\equiv y-mx=0$, $(AB)\equiv y-\mu(x-a)=0$. Ecuația conicelor bitangente la conica particulară formată de dreptele (OA), (OB) în punctele de intersecție cu (AB), este $y(y-mx)+\lambda[y-\mu(x-a)]^2=0$ Se scrie că este parabolă; $\lambda=\frac{m^2}{4\mu^2-4m\mu}$. Locul focarelor este cercul $x^2+y^2-ax+\frac{a}{m}=0$, trecând prin A și tangent în O la OB.

11) O parabolă de mărime constantă se deplasează rămânând tangentă la două axe perpendiculare Ox și Oy. Se cere: 1°. Înfășurătoarea coardei de contact AB. 2°. Înfășurătoarea axei. 3°. Locul punctului de întâlnire al lui AB cu directoarea. 4°. Locul punctului de întâlnire al axei cu directoarea. 5°. Locul vârfului. 6°. Locul focarului.

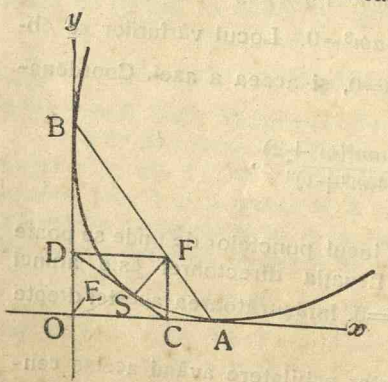


Fig. 131.

R. Se va arăta, mai întâi, că pentru parabola $y^2-2px=0$, cu focarul $F\left(\frac{p}{2}.0\right)$ și directoarea $(D)\equiv x+\frac{p}{2}=0$, $M\left(-\frac{p}{2},\lambda\right)$ fiind un punct al directoarei (D), dreapta MF este perpendiculară pe polara punctului M care trece prin focarul F. Revenind la problema noastră, pentrucă tangentele Ox, Oy (Fig. 131) sunt perpendiculare, directoarea uneia din parabole trece prin punctul O, și focarul F este piciorul perpendicularei coborâtă din O pe coarda de contact AB. Tangenta la vârf trece prin proecțiile C și D ale focarului pe tangentele

Ox şi Oy. Coborând FS perpendiculară pe CD, punctul S este vârful şi $FS=\frac{p}{2}$, p fiind parametrul constant al tuturor parabolelor. Să ducem OE perpendiculară pe CD şi fie α unghiul lui OE cu Ox. Avem $OE=FS=\frac{p}{2}$; deci ecuaţia dreptei CD este $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\frac{p}{2}=0$, iar coordonatele focarului sunt

$$x=\frac{p}{2\cos\alpha},\quad y=\frac{p}{2\sin\alpha}.$$

1°. Se obţine ecuaţia dreptei AB, observând că trece prin F şi e perpendiculară pe OF, are ecuaţia $x\sin\alpha+y\cos\alpha-\frac{p}{\sin 2\alpha}=0$. Pentru a-i găsi înfăşurătoarea, se înlocueşte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$ în funcţie de $tg\alpha=t$, $\sin\alpha=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin 2\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ şi pe urmă se elimină t între ecuaţia dreptei $2t(xt+y)-p(1+t^2)^{3/2}=0$ şi derivata în raport cu t.

2°. Axa este dreapta FS, $x\sin\alpha-y\cos\alpha+\operatorname{cotg}2\alpha=0$. Se înlocueşte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{cotg}2\alpha$ cu ajutorul lui $tg\alpha=t$ şi se procedează ca mai sus.

3°. Directoarea are ecuaţia $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$. Se elimină α între această ecuaţie şi aceea a lui AB şi se găseşte $4x^2y^2(x^2-y^2)^2-p^2(x^2+y^2)^3=0$; în coordonate polare, $\rho=\frac{2p}{\sin 4\omega}$.

4°. $4x^2y^2(x^2+y^2)-p^2(x^2-y^2)^2=0$; în coordonate polare, $\rho=p\operatorname{cotg}2\omega$.

5°. Coordonatele lui S, vârful, sunt $x=\frac{p\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$, $y=\frac{p\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$; eliminând pe α, $x^2y^2\left(x^2+y^2+\frac{3p^2}{4}\right)-\left(\frac{p}{2}\right)^6=0$.

6°. Coordonatele focarului sunt $x=\frac{p}{2\cos\alpha}$, $y=\frac{p}{2\sin\alpha}$; eliminând pe α, locul focarului este $4x^2y^2-p^2(x^2+y^2)=0$.

12). Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy, punctul $A(a, 0)$. Se consideră iperbolele având pe Oy ca asimptotă şi tangente în A la Ox. Să se afle locul focarelor şi înfăşurătoarea directoarelor.

R. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2=0$. Ca să fie asimptotă la Oy trebue ca făcând $x=0$, ecuaţia obţinută să aibă coeficientul lui y^2 şi y nuli; $1-m^2=0$, $-\beta-mn=0$. Luând $m=1$, ecuaţia conicelor este $x^2(1-l^2)-2lxy-2x(\alpha-l\beta)+\alpha^2=0$. Scriind că atinge pe Ox în A, trebue a scrie că ecuaţiile $x^2(1-l^2)-2x(\alpha-l\beta)+\alpha^2=0$ şi $(x-a)^2=0$ au aceleaşi rădăcini. Deci $\frac{1-l^2}{1}=\frac{\alpha-l\beta}{a}=\frac{\alpha^2}{a^2}$. Eliminând pe l între aceste două ecuaţii, avem (1) $\alpha(\alpha^2+\beta^2)-a(\alpha^2-\beta^2)=0$. Aceasta reprezintă locul focarelor.

Ecuaţia directoarei este $lx+y-\beta=0$. Punând în (1) $\beta=t\alpha$, avem $\alpha=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$, $\beta=\frac{at(1-t^2)}{1+t^2}$. Apoi, din relaţia $\frac{\alpha-l\beta}{a}=\frac{\alpha^2}{a^2}$, avem $l=\frac{2t}{1+t^2}$; deci directoarea are ecuaţia $2tx+y(1+t^2)-at(1-t^2)=0$. Înfăşurătoarea se obţine eliminând pe t între această ecuaţie şi derivata sa în raport cu t. Pentru uşurinţă, se de plasează axele paralel în mijlocul B al lui OA; ecuaţia directoarei devine-

$at^3+t^2y+2tx+y=0$; derivata în raport cu t este $3at^2+2ty+2x=0$. Eliminând pe t, locul geometric este $4y^2(y^2-x^2)-4ax(9y^2-8x^2)+27a^2y^2=0$.

Această problemă se face și altfel. Iperbolele asimptote la Oy și tangente în A la Ox, pot fi considerate ca conicele bitangente la conica formată de axele de coordonate, coarda de contact fiind paralela prin A la Oy, $(x-a)^2+2\lambda xy=0$. Focarele sunt date de $f'^2_x-f'^2_y=4(A-C)f(x,y)$, $f'_xf'_y=4Bf(x,y)$, sau $\lambda(y^2-x^2)-2ay=0$, $\lambda xy-a(x-a)=0$, de unde eliminând pe λ, găsim curba de mai sus, $x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$.

Pentru a găsi condiția ca dreapta $ux+vy+wz=0$ să fie directoare la conica $f(x,y)=0$, să observăm din ecuația focală $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+n)^2=0$. că conica noastră $f(x,y)=0$ este o conică bitangentă la cea formată de dreptele izotrope $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$ în punctele de intersecție cu directoarea, $lx+my+n=0$. Deci, directoarea este o dreaptă, $ux+vy+wz=0$, atunci când ea întâlnește conica în două puncte unde tangentele sunt izotrope. Trebue deci să existe o valoare k, astfel ca ecuația $f(x,y)+k(ux+vy+wz)^2=0$ să reprezinte două drepte izotrope, sau un cerc de rază nulă. Inlocuind $f(x,y)$ cu $(x-a)^2+2\lambda xy$, avem condițiile $1+ku^2=kv^2$, $\lambda+kuv=0$, $(-a+kuw)^2+k^2v^2w^2-kv^2(a^2+kw^2)=0$.

Eliminând pe λ și k între aceste ecuații, se obține ecuația tangențială a înfășurătoarei directoarei, $a^2u(u^2-v^2)+2auw(u^2-v^2)+vw^2=0$, sau $u(au+w)^2-av^2(au+2w)=0$. Punând $au+w=tav$, deducem $aut^2=au+2w$, de unde $u=\frac{2w}{a(t^2-1)}$ $v=\frac{(t^2+1)w}{at(t^2-1)}$, deci ecuația directoarei se scrie $2tx+(t^2+1)y-at(1-t^2)=0$ și pentru a-i găsi înfășurătoarea, procedăm ca în primul caz.

Construcția conicelor.

106. **Teorema lui Pascal.** *Fiind dat un exagon înscris într'o conică, dacă plecând de la un vârf și parcurgând exagonul într'un sens determinat, se notează laturile consecutive cu (1), (2), (3), (4), (5), (6), atunci punctele de intersecție ale laturilor opuse (1), (4); (2), (5); (3), (6) sunt colineare.* Conica (Σ), circumscrisă exagonului, este circumscrisă patrulaterului ABCD (Fig. 132); are deci o ecuație de forma

$$(1)(3)+\lambda(2)(AD)=0.$$

Deasemenea, (Σ) fiind circumscrisă patrulaterului ADEF, ecuația sa este de forma

$$(4)(6)+\mu(5)(AD)=0. \qquad (2)$$

Ecuațiile (1) și (2) reprezentând aceeaș conică, diferă cu un factor constant; deci

$$(1)(3)+\lambda(2)(AD)\equiv k[(4)(6)+\mu(5)(AD)].$$

De unde

$$[(1)(3)-k(4)(6)]\equiv(AD)[k\mu(5)-\lambda(2)].$$

Deci, curba reprezentată de ecuaţia

$$(1)(3)-k(4)(6)=0$$

este aceeaş cu curba reprezentată de ecuaţia

$$(AD)[k\mu(5)-\lambda(2)]=0.$$

Prima reprezintă o conică ce trece prin punctele de intersecţie al dreptelor (1) şi (4), adică P; (1) şi (6), adică A; (3) şi (4), adică D; (3) şi (6), adică R. Cealaltă se reduce la două drepte, una (AD) şi alta

$$k\mu(5)-\lambda(2)=0.$$

Dar (AD) trece prin punctele A şi D; deci, cealaltă dreaptă,

$$k\mu(5)-\lambda(2)=0$$

trebue să treacă prin punctele P şi R. Dar aceasta reprezintă o dreaptă ce trece prin intersecţia dreptelor (2) şi (5), adică punctul Q; deci rezultă că punctul Q se află pe dreapta PR, sau că punctele P, Q, R sunt colineare, adică punctele de intersecţie ale dreptelor (1), (4); (2), (5); (3), (6) sunt colineare.

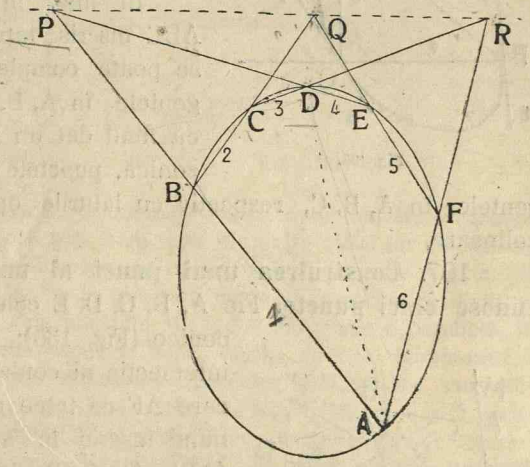


Fig. 132.

Observări. I. Când două puncte ale exagonului se confundă, atunci latura care uneşte acele puncte devine tangenta în acel punct şi atunci exagonul se reduce la un pentagon ABCDE (Fig. 133),

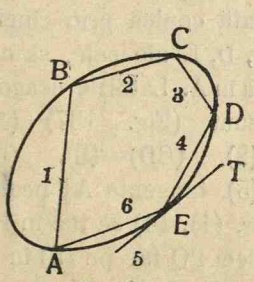


Fig. 133.

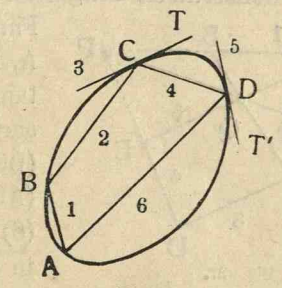


Fig. 134.

iar latura (5), de ex., se reduce la tangenta ET în E la conică. In acest caz, laturile (AB), (DE); (BC), (ET); (CD), (EA) se tae în trei puncte colineare.

In cazul unui patrulater înscris, ABCD (Fig. 134), exagonul este format de laturile (AB), (BC), tangenta (CT) în C, (CD), tangenta (DT') în D și (DA). Se obțin, astfel, trei puncte colineare la intersecția dreptelor (AB), (CD); (BC), (DT'); (CT), (DA).

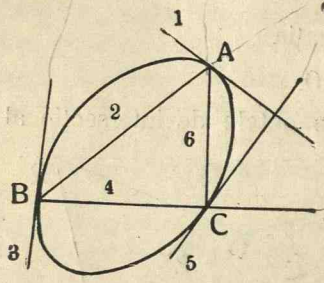


Fig. 135.

In fine, în cazul unui triunghi ABC înscris într'o conică (Fig. 135), se poate complecta exagonul cu tangentele în A, B, C la conică și astfel că fiind dat un triunghi înscris într'o conică, punctele de intersecție ale tangentelor în A, B, C, respectiv cu laturile opuse sunt trei puncte colineare.

107. **Construirea unui punct al unei conice căreia i se cunosc cinci puncte.** Fie A, B, C, D, E cele cinci puncte ale unei conice (Fig. 136); să găsim punctul de intersecție al conicei cu o dreaptă oarecare AF ce trece prin A. Laturile exagonului înscris în această conică pot fi (AB)≡(1), (BC)≡(2), (CD)≡(3), (DE)≡(4), (AF)≡(6). Dar (AB), (DE) se tae în P; (CD), (AF) în R; deci PR va tăia pe (BC) în punctul Q unde se întâlnesc (BC)≡(2) cu (QE)≡(5). Deci, a cincea latură a exagonului înscris în conică este (EQ), care se tae cu a șasea latură AR în punctul M, al șaselea vârf al exagonului înscris și deci punctul conicei situat pe dreapta AF este M.

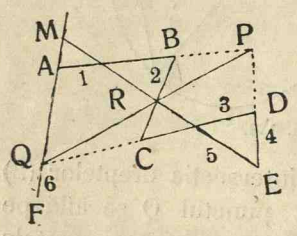


Fig. 136.

108. **Construirea tangentei într'un punct al unei conice.** Fiind dată conica prin cinci puncte A, B, C, D, E ale sale, să construim tangenta în A. Laturile exagonului înscris sunt (Fig. 137) (AB)≡(1), (BC)≡(2), (CD)≡(3), (DE)≡(4), (AE)≡(5), tangenta AT necunoscută, (6). Dar, (1), (4) se tae în P; (2), (5) în Q; deci PQ tae pe (3) în R, punctul pe unde trece (6), adică tangenta AT. Deci, tangenta în A este dreapta AR.

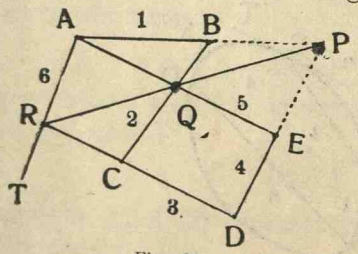


Fig. 137.

109. **Construirea punctelor discrete ale conicelor.** Am văzut mai sus că fiind dată o conică prin cinci puncte, se obține în mod *continuu* toate

punctele conicei, găsind punctul de intersecţie cu conica ale tuturor secantelor ce trec prin unul din punctele date. Se pot obţine puncte discrete ale conicei, dacă se dau un număr suficient de puncte şi o operaţie funcţională, care să aibă proprietate de grup, cu care putem trece de la un punct la altul.

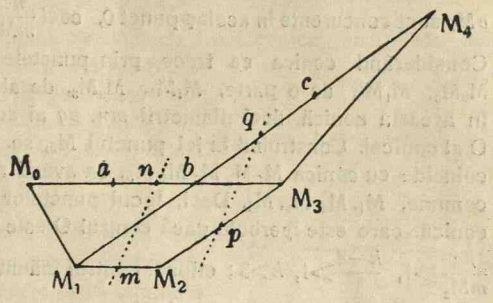


Fig. 138.

De ex., să presupunem că se dau trei puncte M_0, M_1, M_2 (Fig. 138) şi operaţia funcţională, că se duce din M_0 o paralelă M_0M_3 cu M_1M_2 şi de trei ori mai mare; apoi din M_1 o paralelă M_1M_4 cu M_2M_3 şi de trei ori mai mare, etc. Se obţin astfel un şir discret de puncte $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ Să vedem pe ce curbă se află aceste puncte. Fie a, b punctele ce divid pe M_0M_3 în trei părţi egale; b, c acelea ce divid pe M_1M_4 în trei părţi egale. Prin punctele M_0, M_1, M_2, M_3 trece o parabolă, în care fiind înscrise coardele paralele M_1M_2, M_0M_3, direcţia asimptotică a parabolei este mn, ce uneşte mijloacele coardelor M_1M_2, M_0M_3, sau mijloacele m, n ale dreptelor M_1M_2 şi ab. Prin $M_1M_2M_3M_4$ trece altă parabolă ce are ca direcţie asimptotică pq, dreaptă ce uneşte mijloacele coardelor M_2M_3, M_1M_4, sau mijloacele dreptelor M_2M_3, bc. Dar, mn este paralelă cu pq, căci ambele sunt paralele cu bM_2; deci direcţiile asimptotice ale celor două parabole sunt aceleaşi. Cum parabolele $M_0M_1M_2M_3$, $M_1M_2M_3M_4$ au trei puncte comune, M_1, M_2, M_3, şi aceleaşi direcţii asimptotice, ele sunt identice; deci locul punctelor $M_4, M_5, \ldots$ este parabola ce trece prin punctele M_0, M_1, M_2, M_3.

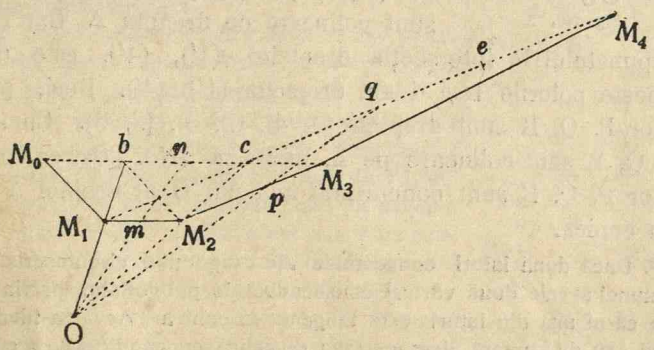


Fig. 139.

Să presupunem acum, de asemenea, că se dau trei puncte M_0, M_1, M_2 (Fig. 139), că se duce prin M_0 paralelă cu M_1M_2, dar că $M_0M_3 = k \cdot M_1M_2$. (În cazul precedent aveam $k=3$). Operând la fel cu punctul M_1, obţinem punctul M_4; etc. Să luăm $M_0b = cM_3 = M_1M_2$, $M_1c = eM_4 = M_2M_3$; fie m mijlocul lui M_1M_2, n mijlocul lui bc, p acela al lui M_2M_3, q mijlocul lui ce. Avem

$bc = M_0M_3 - 2M_1M_2 = (k-2)M_1M_2$; $ce = (k-2)M_2M_3$. Dreptele bM_1, nm, cM_2, qp, eM_3 sunt concurente în acelaş punct 0, căci $\frac{nc}{mM_2} = \frac{cq}{M_2p} = \frac{cO}{OM_2} = \frac{k-2}{1} = \text{const.}$ Considerând conica ce trece prin punctele M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, se vede că M_0M_3, M_1M_2, de o parte, M_1M_4, M_2M_3, de altă parte, sunt coarde paralele în această conică, deci diametrii mn, pq ai acestei conice se tae în centrul O al conicei. Construind la fel punctul M_5, se vede că conica $M_0M_1M_2M_3M_4$ coincide cu conica $M_1M_2M_3M_4M_5$, ca având acelaş centru O şi patru puncte comune, M_1, M_2, M_3, M_4. Deci, locul punctelor M_i, astfel construite, este o conică, care este iperbolă dacă centrul O este în afară de curba $M_0M_1M_2M_3M_4$, $\frac{nc}{mM_2} > 1$, $\frac{k-2}{1} > 1$, $k > 3$; elipsă, centrul înăuntru, dacă $k < 3$, parabolă (centrul O la infinit) dacă avem $k = 3$.

Aşa dar, fiind date trei puncte şi operaţia funcţională considerată, indicată de Dl *Pompeiu*, obţinem oricâte puncte discrete ale unei conice.

110. **Teorema lui Brianchon.** *Fiind dat un exagon circumscris la o conică, dacă plecând de la un vârf şi parcurgând exagonul într'un sens determinat, se notează vârfurile respective cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, dreptele care unesc punctele 1 şi 4; 2 şi 5; 3 şi 6 sunt concurente.* In adevăr, să considerăm exagonul înscris format de punctele de contact ale exagonului circumscris (Fig. 140). Notând cu (1′), (2′), (3′), (4′), (5′), (6′) laturile exagonului înscris ale căror poluri sunt punctele 1, 2, 3, 4, 5, 6, ştim că punctele de intersecţie P, Q, R ale dreptelor (1′), (4′)≡P; (2′), (5′)≡Q; (3′), (6′)≡R sunt colineare pe dreapta Δ. Dar ştim că polara punctului P, intersecţia dreptelor (1′), (4′), este dreapta care uneşte polurile 1 şi 4 ale dreptelor (1′), (4′). Deci, polarele punctelor P, Q, R sunt dreptele (1, 4), (2, 5), (3, 6). Cum punctele P, Q, R sunt colineare pe Δ, urmează (No. 90) ca polarele punctelor P, Q, R sunt concurente în polul O al dreptei Δ în raport cu conica.

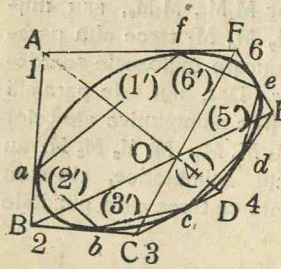


Fig. 140.

1°. Dacă două laturi consecutive ale exagonului circumscris se confundă, atunci şi cele două vârfuri consecutive ale poligonului înscris se confundă, a cărui una din laturi este tangentă la conică. Aceasta fiind polara punctului său de contact, demonstraţia se aplică cu condiţie de a considera ca punct de intersecţie a două laturi consecutive ale exagonului circumscris, punctul de contact a celor două laturi confundate. Teorema lui Brianchon este deci aplicabilă figurei formată de un pentagon circumscris şi punctul de contact al uneia din laturi.

2°. Considerând un patrulater circumscris unei conice, se poate aplica teorema exagonului format de acest patrulater şi de punctele de contact a două laturi opuse ale patrulaterului. Deci, avem teorema: *într'un patrulater*

circumscris la o conică, diagonalele și dreapta care unește punctele de contact a două laturi opuse sunt trei drepte concurente.

3°. Considerând un triunghi circumscris unei conice, se poate complecta exagonul cu punctele de contact A′, B′, C′ (Fig. 141) ale laturilor și deci *dreptele care unesc vârfurile unui triunghi cu punctele de contact ale laturilor opuse cu o conică înscrisă în triunghi sunt concurente* (Dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente).

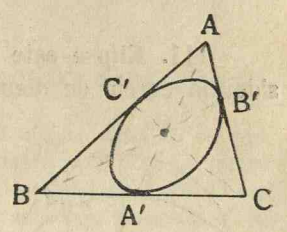


Fig. 141.

4°. *Construirea unei tangente la o conică când se cunosc cinci tangente la acea conică.* Să însemnăm cu (A), (B), (C), (D), (E) cele cinci tangente date (Fig. 142) și să ne propunem a construi tangenta (F) dusă dintr'un punct H situat pe (A). In exagonul circumscris format de (A), (B), (C), (D), (E), (F), latura (F) fiind necunoscută, cunoaștem dreapta (1, 4), dreapta (3, 6), care unește punctul 3 cu punctul confundat cu H; ele se tae în punctul ω al lui Brianchon. Dreapta (2, ω) tae latura (E) în punctul 5 și dreapta (H, 5) este tangenta căutată.

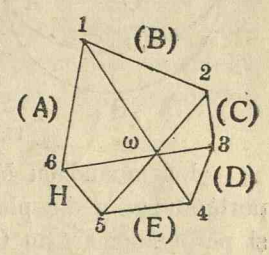


Fig. 142.

5°. *Determinarea punctului de contact a unei tangente la o conică definită prin cinci tangente.* Pentru a determina punctul de contact al tangentei (A), de ex. (Fig. 143), aplicăm teorema lui Brianchon exagonului format de pentagonul 12345 complectat cu punctul de contact căutat, 6. Dreptele (1, 4), (2, 5), se tae în ω; dreapta (3, ω) tae pe (A) în 6, care este punctul de contact al tangentei (A).

Se observă că construcțiile precedente se pot efectua numai cu rigla.

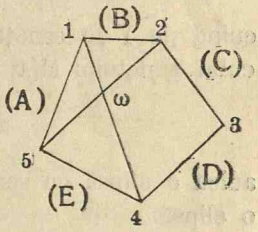


Fig 143.

6°. *Fiind cunoscute patru tangente la o parabolă, să se afle direcția asimptotică a parabolei.* Parabola este o conică tangentă dreptei de la infinit, căci aceasta tae parabola în două puncte confundate care corespund celor două direcții asimptotice confundate. Direcția asimptotică este deci direcția punctului de contact a parabolei cu dreapta de la infinit. Pentru a găsi acest punct de contact, aplicăm teorema lui Brianchon exagonului circumscris parabolei format de cele patru tangente date, dreapta de la infinit și de punctul de contact al dreptei de la infinit. Punctul 4 este la infinit în direcția tangentei (D) (Fig. 144); punctul 6 este la infinit în direcția tangentei (A); punctul 5 este de contact al dreptei de la infinit cu parabola. Dreapta (1, 4) este paralela dusă prin 1 paralelă cu (D); dreapta (3, 6) este paralela dusă prin 3 la (A); aceste paralele construite se tae în punctul ω al lui Brianchon. Dreapta (2, ω) tae dreapta de la infinit în punctul 5, deci direcția asimptotică a parabolei este (2, ω).

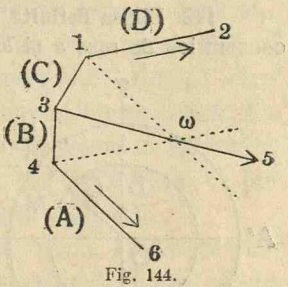


Fig. 144.

Proprietățile conicelor deduse din ecuațiile simplificate.

Elipsa.

111. Elipsa este proecția ortogonală a unui cerc. Să considerăm cercul de diametru $AA'=2a$ (Fig. 145), care face cu planul de proecție unghiul α, astfel că $\cos\alpha=\frac{b}{a}$. Raportând cercul, în planul său, la diametrul AA' ca Ox și la diametrul perpendicular ca OY, ecuația cercului este $x^2+Y^2=a^2$.

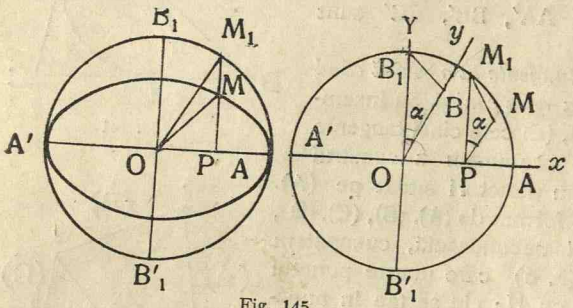


Fig. 145.

Insemnând cu M proecția unui punct M_1 al cercului și raportând figura din planul de proecție la diametrul AA' luat ca Ox, și perpendiculara în O ca Oy, între ordonatele $M_1P=Y$ și $MP=y$ ale punctelor $M_1(x, Y)$, $M(x, y)$, avem $MP=M_1P\cos\alpha$, $y=Y\frac{b}{a}$. Inlocuind pe Y în ecuația cercului cu valoarea sa, avem ecuația locului punctului $M(x, y)$

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

adică o elipsă cu semiaxele a și b. Deci proecția unui cerc este o elipsă.

Cercul de diametru AA' se zice *cercul principal* al elipsei.

112. Elipsa definită ca loc geometric. Să considerăm două cercuri concentrice de raze a și b. O secantă variabilă ce trece prin centru le tae în P și Q. Paralelele la axe prin P și Q se tae în M. Locul lui M este o elipsă de semiaxe a și b. Insemnând cu α unghiul secantei cu Ox (Fig. 146), coordonatele punctelor P și Q sunt $P(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$. Coordonatele lui M sunt

$$x=a\cos\alpha, \quad y=b\sin\alpha.$$

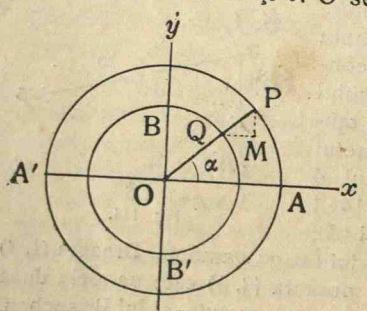


Fig. 146

Dă unde, eliminând pe α, avem

$$\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\alpha, \quad \frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

ceea ce probează că locul lui M este elipsa de semiaxe a și b.

Expresiunile $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$ dau *reprezentarea parametrică* a unui punct al elipsei. Punând $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, avem $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$, şi deci

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b\frac{2t}{1+t^2},$$

care dau coordonatele unui punct al elipsei (raportată la axele sale) în funcţiune raţională de un parametru variabil, t.

De aci rezultă un procedeu de construcţie al elipsei, când se cunosc axele ei în mărime şi poziţie. Pentru aceasta, vom descrie cercurile de centru O şi raze egale cu semiaxele OA, OB (Fig. 146). O secantă dusă prin O tae cercurile în P şi Q; paralelele la axe prin P şi Q se tae în punctul M al elipsei.

Se mai poate construi elipsa prin puncte, considerând-o ca proecţia ortogonală a unui cerc. Pentru aceasta, să descriem cercul de diametru AA′ (Fig. 147) şi fie B şi B′ proecţiile punctelor B_1, B'_1, extremităţile diametrului perpendicular pe AA′. Considerăm

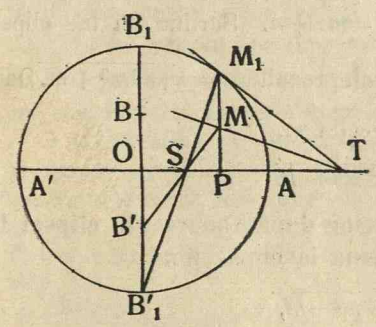


Fig. 147.

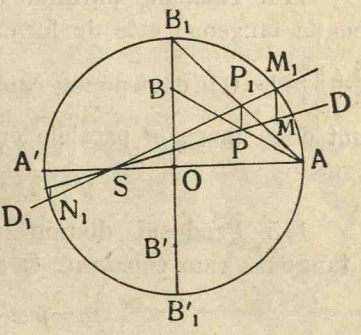


Fig. 148.

o ordonată M_1P a cercului şi fie S intersecţia lui $M_1B'_1$ cu AA′. Proecţia dreptei $M_1SB'_1$ este B′S, care va tăia ordonata lui M_1 în M, proecţia lui M_1, adică punctul elipsei de pe ordonata lui M_1.

Tangenta în punctul M se obţine ducând tangenta în M_1 la cerc, ce tae diametrul AA′ în T. Proecţia dreptei M_1T este MT care este tangenta în M la elipsă. In caz când punctul T este afară din cadrul figurei, însemnăm cu R_1 punctul unde tangenta în A la cerc tae tangenta în M_1 la cerc; dreapta $R_1B'_1$ tae pe AA′ în V, iar B′V tae pe AR_1 în R; tangenta în M la elipsă este MB.

Intersecţia unei drepte D cu o elipsă se obţine aflând în planul cercului dreapta D_1, a cărei proecţie pe planul elipsei să fie D. Fie S şi P punctele unde D tae (Fig. 148) pe AA′ şi AB. Ordonata lui P tae pe AB_1 în P_1; dreapta D_1 din spaţiu este SP_1. Ea tae cercul în M_1 şi N_1; perpendicularele din M_1 şi N_1 pe AA′ tae pe D în punctele M şi N unde D tae elipsa.

113. **Elipsa definită ca alt loc geometric.** *O dreaptă* QM *(Fig. 149) de lungime constantă a se sprijină cu o extremitate* Q *pe axa* Oy *și cu punctul fix* P *de pe ea, la distanța* PM=b, *pe axa* Ox. *Locul extremității* M *al dreptei* QM *când secanta* QM *variază este o elipsă.* Paralela din M la Oy tae pe Ox în R și paralela din O la QM și N. Avem

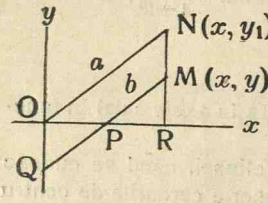


Fig. 149.

$$\frac{MR}{NR}=\frac{PM}{ON}=\frac{b}{a},\quad MR=\frac{b}{a}NR.$$

Dar N(x, y_1) descrie cercul de rază a,

$$x^2+y_1^2=a^2. \tag{1}$$

Abscisa punctului M este aceeaș ca a lui N, iar ordonata y a lui M este dată de $y=MR=\frac{b}{a}NR=\frac{b}{a}y_1$. Inlocuind pe y_1 în (1) cu valoarea sa $y_1=\frac{a}{b}y$, avem

$$x^2+\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ceea ce probează că locul lui M este o elipsă cu semiaxele a și b.

114. **Tangente paralele cu o direcție dată.** m fiind direcția, ecuația tangentei este de forma $y=mx+n$. Scriind că tae elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ în două puncte confundate, rezultă $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$. Deci sunt două tangente paralele cu direcția m,

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

115. **Produsul distanțelor celor două focare ale elipsei la o tangentă este constant.** O tangentă la elipsă fiind

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

produsul distanțelor focarelor F(c,0), F′($-c$,0) la tangentă este

$$\frac{(mc+\sqrt{a^2m^2+b^2})(-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2})}{1+m^2}=\frac{a^2m^2+b^2-c^2m^2}{1+m^2}=$$

$a^2-c^2=b^2$ ∴

$$\frac{(a^2-c^2)m^2+b^2}{1+m^2}=\frac{b^2m^2+b^2}{1+m^2}=b^2=\text{const.}$$

116. **Cercuri directoare. Elipsa definită ca alt loc geometric.** 1°. Cercurile descrise din focarele F și F′ ca centre și cu raze egale cu $2a$ se zic *cercurile directoare.* M fiind un punct al elipsei de focare F și F′ (Fig. 150), avem MF+MF′=$2a$. Prelungind pe F′M cu MP=MF, avem F′P=$2a$, deci locul lui P este cercul director cu centru în F′.

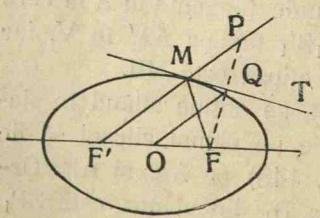


Fig. 150.

Distanța de la punctul M la cercul director fiind MP, măsu-

rată pe raza cercului ce trece prin acel punct, rezultă că punctul M este egal depărtat de cercul director și focarul F. Deci, *locul punctelor egal depărtate de cerc și de un punct interior cercului este o elipsă având ca focare centrul cercului și punctul interior cercului.*

2°. Am văzut, când am studiat conicele omofocale, ceea ce de altfel se poate stabili la fel aci, că tangenta în M la elipsă este bisectoarea unghiului exterior al razelor vectoare MF, MF'; adică tangenta MT este bisectoarea unghiului FMP (Fig. 150). Deci punctul P este simetricul focarului F în raport cu tangenta MT. Așa dar, *locul simetricelor focarului unei elipse în raport cu tangentele la elipsă este cercul director cu centrul în celalt focar.*

3°. Q fiind intersecția tangentei cu FP, Q este piciorul perpendicularei din F pe tangentă. Q fiind mijlocul lui FP, rezultă că $OQ=\frac{F'P}{2}=\frac{2a}{2}=a$. Deci, *locul picioarelor focarelor pe tangente la elipsă este cercul principal al elipsei.*

Locul proecțiilor unui punct F pe tangentele la o curbă (Γ) se zice *podara acelei curbe în raport cu punctul* F. *Cercul principal este podara elipsei în raport cu focarele ei.*

117. *Dreapta care unește unul din focare cu un punct* P *din plan este bisectoarea unghiului format de dreptele ce unesc acel focar cu punctele de contact ale tangentelor duse din* P *la elipsă.* Să raportăm elipsa la acel focar ca origină (Fig. 151) și la axa mare ca Ox. Ecuația elipsei este

$$x^2+y^2=e^2(x-a)^2,\ e=\frac{c}{a}.$$

Inpârțind cu $e^2(x-a)^2$, avem

$$\left[\frac{x}{e(x-a)}\right]^2+\left[\frac{y}{e(x-a)}\right]^2=1.$$

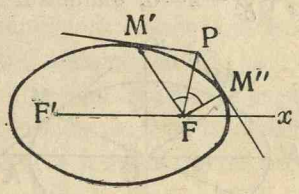


Fig. 151.

Deci, punând $x=e(x-a)\cos\alpha$, $y=e(x-a)\sin\alpha$, avem coordonatele unui punct (x, y) al elipsei în funcțiune de unghiul α; să observă că $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, adică unghiul format de Fx cu dreapta ce unește focarul cu punctul $M(x, y)$ este egal cu α.

Așa fiind, fie $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ pe elipsă și α', α'' unghiurile corespunzătoare ale dreptelor FM', FM'' cu Ox. Tangentele în M' și M'' la elipsă au ecuațiile

$$x'x+y'y-e^2(x-a)(x'-a)=0,\quad x''x+y''y-e^2(x-a)(x''-a)=0.$$

Inlocuind pe $x'=e(x'-a)\cos\alpha'$, $y'=e(x'-a)\sin\alpha'$, $x''=e(x''-a)\cos\alpha''$, $y''=e(x''-a)\sin\alpha''$, ecuațiile tangentelor devin, după simplificare,

$$x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-e(x-a)=0,\quad x\cos\alpha''+y\sin\alpha''-e(x-a)=0.$$

Ecuația dreptei ce unește origina cu punctul comun P al acestor tangente se obține scăzând ecuațiile lor și este

$$x(\cos\alpha'-\cos\alpha'')+y(\sin\alpha'-\sin\alpha'')=0.$$

Coeficientul unghiular al acestei drepte este

$$-\frac{\cos\alpha'-\cos\alpha''}{\sin\alpha'-\sin\alpha''}=-\frac{2\sin\frac{\alpha'+\alpha''}{2}\sin\frac{\alpha''-\alpha'}{2}}{2\sin\frac{\alpha'-\alpha''}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha''}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha'+\alpha''}{2}.$$

Însă dreptele FM' şi FM'' fac cu axa Ox unghiurile α' şi α''; deci dreapta FP, care face cu Ox unghiul $\frac{\alpha'+\alpha''}{2}$, este bisectoarea lor şi astfel proprietatea este demonstrată.

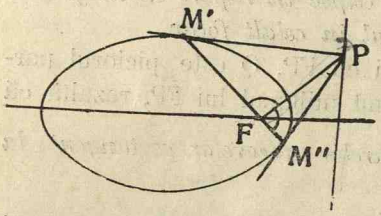


Fig. 152.

Să presupunem că punctul P se află pe directoarea corespunzătoare focarului F (Fig. 152). Se ştie că F este polul directoarei. Deci polara lui P, adică dreapta M'M'', trece prin F. Punctele M', F, M'' sunt colineare. Cum unghiurile M'FP= PFM'', urmează că sunt egale cu 90°, deci dreapta PF este perpendiculară pe polara lui P. Deci, *dreapta care uneşte un punct al directoarei cu focarul corespunzător este perpendiculară pe polara punctului considerat.*

118. **Diametrii.** Fiind dată elipsa raportată la axele sale, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, diametrul conjugat direcţii m are ecuaţia

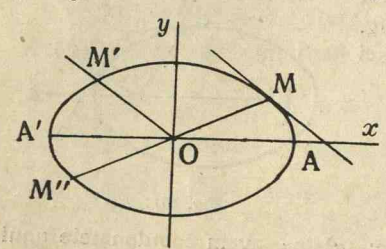


Fig. 153.

$$\frac{x}{a^2}+m\frac{y}{b^2}=0$$

care arată că trece prin centru. Orice dreaptă ce trece prin centru, $y=m'x$, poate fi considerată ca diametrul conjugat direcţii de coeficient unghiular $-\frac{b^2}{a^2m'}$.

1°. Orice diametru tae elipsa în două puncte M,M''; distanţa MM'' se zice lungimea diametrului, OM semidiametrul (Fig. 153). Să considerăm un diametru OM_1 şi fie $OM_1=\rho_1$, $\omega_1=xOM_1$. Coordonatele punctului M_1 sunt $x_1=\rho_1\cos\omega_1$, $y_1=\rho_1\sin\omega_1$. Scriind că punctul M_1 este pe elipsă avem

$$\frac{\rho_1^2\cos^2\omega_1}{a^2}+\frac{\rho_1^2\sin^2\omega_1}{b^2}=1,$$

de unde

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{\cos^2\omega_1}{a^2}+\frac{\sin^2\omega_1}{b^2}. \tag{2}$$

Considerând diametrul OM_2, perpendicular pe OM_1, însemnând cu

$OM_2=\rho_2$, $\omega_2=xOM_2=\omega_1+\frac{\pi}{2}$, avem, de asemenea,

$$\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{\sin^2\omega_1}{a^2}+\frac{\cos^2\omega_1}{b^2}. \tag{3}$$

Adunând relaţiile (2) şi (3), avem

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}. \tag{4}$$

Deci, *suma pătratelor inverselor a doi diametrii perpendiculari este constantă şi egală cu suma pătratelor inverselor axelor elipsei.*

2°. Să ducem OH perpendiculară pe M_1M_2 (Fig. 154). Din triunghiul dreptunghic OM_1M_2, avem

$$\frac{1}{\overline{OH}^2}=\frac{1}{\overline{OM_1}^2}+\frac{1}{\overline{OM_2}^2},$$

relaţie care probează, ţinând seamă de (4), că OH este constant. Deci, *coardele elipsei care sunt văzute din centrul elipsei sub un unghi drept sunt tangente la un cerc cu centrul în centrul elipsei.*

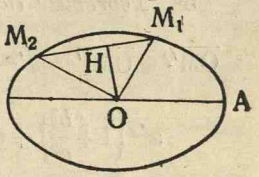


Fig. 154.

3°. Elipsa fiind proecţia ortogonală a unui cerc, o serie de coarde paralele în cerc se proectează după o serie de coarde paralele în elipsă şi diametrul cercului perpendicular pe coardele paralele în cerc, care este locul mijloacelor acestor coarde, se va proecta după o dreaptă care este locul mijloacelor coardelor paralele în elipsă, adică diametrul conjugat coardelor paralele în elipsă. Doi diametrii conjugaţi în elipsă sunt proecţiile a doi diametrii perpendiculari ai cercului.

Fiind dat un diametru OM, $y=mx$, diametrul conjugat OM' (Fig. 153) este dreapta dusă prin centrul elipsei paralel cu tangenta în M la elipsă şi are ecuaţia $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$. Între coeficienţi unghiulari m şi m' a doi diametrii conjugaţi avem relaţia $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

4° *Formulele lui Chasles.* Fie OM', OM'' doi diametrii conjugaţi, unde $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$. Ştim că între coeficienţi unghiulari $m'=\frac{y'}{x'}$, $m''=\frac{y''}{x''}$ avem relaţia

$$m'm''=-\frac{b^2}{a^2},\ \frac{y'y''}{x'x''}=-\frac{b^2}{a^2},\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\ \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1;$$

de unde

$$\frac{\frac{y''}{b}}{\frac{x'}{a}}=\frac{-\frac{x''}{a}}{\frac{y'}{b}}=\frac{\sqrt{\frac{y''^2}{b^2}+\frac{x''^2}{a^2}}}{\pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}}}=\pm 1.$$

Cele două semne $\pm$ corespund celor două extremități ale diametrului OM'' conjugat cu OM'. Luând, de ex., semnul $+$, avem

$$x''=-\frac{a}{b}y',\ y''=\frac{b}{a}x',$$

care sunt formulele lui Charles.

5⁰. *Teoremele lui Apollonius.* Avem

$$\overline{OM'}^2+\overline{OM''}^2=x'^2+y'^2+x''^2+y''^2=x'^2+y'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2+\frac{b^2}{a^2}x'^2=$$

$$x'^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+y'^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)(a^2+b^2)=a^2+b^2,$$

$$\overline{OM'}^2+\overline{OM''}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2,$$

adică, *suma pătratelor jumătăților a doi diametrii conjugați este constantă și egală cu suma pătratelor semiaxelor.*

Aria algebrică a triunghiului OM'M'' este

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x' & y' & 1\\ x'' & y'' & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x'y''-x''y')=\frac{1}{2}\left(x'\frac{b}{a}x'+y'\frac{a}{b}y'\right)=$$

$$\frac{1}{2}ab\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)=\frac{1}{2}ab,$$

de unde urmează că *aria paralelogramului construit cu doi semidiametrii conjugați ca laturi este constantă și egală cu aria dreptunghiului construit cu semiaxele.*

6⁰. *Poziția a doi diametrii conjugați.* m și m' fiind coeficienții unghiulari a doi diametrii conjugați, OM, OM', din relația $mm'=-\frac{b^2}{a^2}<0$, rezultă că acești coeficienți unghiulari m și m' sunt de semne contrarii; un diametru fiind în unghiul AOB, celalt este în unghiul A'OB (Fig. 153). Produsul mm'=const., arată că, dacă m crește, m' descrește, adică un diametru OM se apropie de axa mică OB, celalt OM' se apropie de OA'; deci, doi diametrii conjugați se deplasează în același sens.

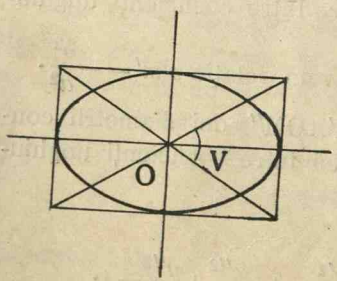


Fig. 155.

Unghiul lor V (Fig. 155) este dat de

$$\text{tgV}=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{m-m'}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{(m-m')a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{c^2}(m-m').$$

Dacă $m>0$, $m'<0$, deci $\text{tgV}>0$. Cu această formulă se consideră unghiul V a doi diametrii conjugaţi, adică unghiul care conţine axa mare a elipsei. Inlocuind pe m' cu valoarea sa $-\frac{b^2}{a^2m}$, avem

$$\text{tgV}=\frac{a^2}{c^2}\left(m+\frac{b^2}{a^2m}\right).$$

Derivata în raport cu m fiind

$$\frac{a^2}{c^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2m^2}\right),$$

se vede că se anulează pentru o singură valoare pozitivă $m=\frac{b}{a}$. Derivata este negativă pentru $0<m<\frac{b}{a}$, pozitivă pentru $m>\frac{b}{a}$ şi deci, tgV, şi prin urmare şi V, trece printr'un minimum pentru $m=\frac{b}{a}$, ceea ce dă pentru $m'=-\frac{b}{a}$. Când $m=0$, $m'=\infty$, $\text{tgV}=\infty$, $V=90^0$. Deci, unghiul (Fig. 155) ascuţit a doi diametrii conjugaţi are un minimum corespunzător cazului când cei doi diametrii sunt diagonalele dreptunghiului format de tangentele în vârfurile elipsei; ia toate valorile cuprinse între acest minimum şi un unghi drept când cei doi diametrii sunt axele elipsei. a' şi b' fiind lungimile a doi semidiametrii conjugaţi, avem $a'^2+b'^2=a^2+b^2$; când cei doi semidiametrii sunt egali, avem $2a'^2=a^2+b^2$, $a'^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. Considerând punctele de intersecţie ale elipsei cu dreptele $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$, care corespund la diametrii conjugaţi care fac unghiul cel mai mic, avem pentru coordonate, $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$ şi deci distanţa de la centru la unul din aceste puncte este $x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$; adică, semidiametrii conjugaţi egali sunt tocmai aceia ce fac unghiul minimum.

7°. *Coarde suplimentare* ale unei elipse sunt două coarde care unesc un punct M al elipsei cu extremităţile A şi A' ale unui diametru (Fig. 156). Două coarde suplimentare sunt paralele cu doi diametrii conjugaţi. In adevăr, fie P şi P' mijloacele coardelor suplimentare MA şi MA'. Dreapta OP' unind mijloacele laturilor AA' şi A'M, este paralelă cu AM şi cum OP este diametrul conjugat coardelor paralele cu MA, rezultă că OP şi OP' sunt doi diametrii conjugaţi paraleli cu coardele A'M, şi AM.

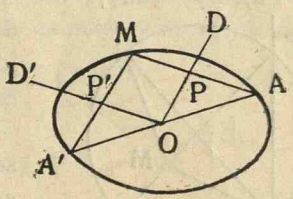


Fig. 156.

Mai mult, ducând prin extremităţile A şi A' ale unui diametru paralele respectiv cu doi diametrii conjugaţi, aceste drepte se tae pe elipsă. In adevăr, dacă AM este o coardă dusă prin A, atunci A'M, suplimentara lui

AM, este paralelă cu diametrul conjugat cu MA, este deci a doua coardă dusă prin A'.

119. **Construcţia axelor unei elipse când se cunosc în mărime şi poziţie doi diametrii conjugaţi.** I. *Ştim că un punct oarecare al unei drepte de mărime constantă ce se sprijină cu extremităţile pe două drepte perpendiculare* Ox *şi* Oy *descrie o elipsă.* Fie PQ o dreaptă de mărime constantă $(a+b)$, pe care să fixăm punctul M (Fig. 157), astfel ca $QM=a$, $PM=b$.

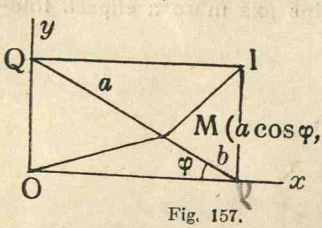


Fig. 157.

Notând cu φ unghiul OPQ, proiectând pe Ox, abscisa punctului M este $x=\text{pr}OM=\text{pr}OQ+\text{pr}QM=a\cos\varphi$; proiectând pe Oy, avem

$$y=\text{pr}OM=\text{pr}OP+\text{pr}PM=b\cos(PQ,Oy)=b\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=b\sin\varphi.$$

Deci, punctul $M(x,y)$ descrie o elipsă cu semiaxele a şi b şi îndreptate după Ox şi Oy.

II. Tangenta în M la această elipsă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, are ecuaţia $\frac{xa\cos\varphi}{a^2}+\frac{yb\sin\varphi}{b^2}=1$ şi are coeficientul unghiular $-\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi$. Normala în $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, fiind perpendiculară pe tangentă, are ecuaţia

$$y-b\sin\varphi=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi(x-a\cos\varphi).$$

Se vede că această ecuaţie este verificată pentru $x=(a+b)\cos\varphi$, $y=(a+b)\sin\varphi$. Dar acestea sunt coordonatele punctului I de intersecţie ale paralelelor la axe prin extremităţile dreptei PQ. Deci, *pentru o poziţie determinate a dreptei* PQ, *normala la elipsa descrisă de un punct oarecare* M *al acestei drepte trece prin punctul* I.

III. Avem $\overline{OM}^2+\overline{MI}^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+[(a+b)\cos\varphi-a\cos\varphi]^2+[(a+b)\sin\varphi-b\sin\varphi]^2$, $\overline{OM}^2+\overline{MI}^2=a^2+b^2$. Dar O fiind centrul elipsei descrisă de M şi OM un semidiametru conjugat (Fig. 157), urmează că *semidiametrul conjugat cu* OM *are mărimea* MI.

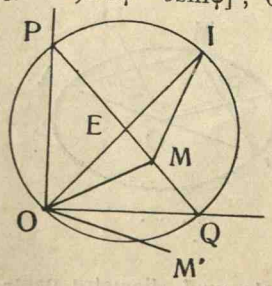


Fig. 158.

IV. Aşa fiind, să construim axele elipsei cunoscând poziţia a doi semidiametrii conjugaţi OM şi OM' (Fig. 158) Tangenta în M la elipsă este paralela din M la OM'. Normala în M este perpendiculara din M pe OM'. Să luăm pe această normală lungimea $MI=OM'$. Avem (Fig. 157) $OI=PQ$, ca diagonale ale dreptunghiu-

lui OPIQ. O diagonală fiind OI, cealaltă PQ este dreapta ce unește punctul M cu mijlocul E al lui OI. Cercul cu centrul E și raza EI taie pe ME în punctele P și Q. Direcțiile axelor elipsei sunt OP, OQ, iar semiaxele sunt $a=PM$, $b=MQ$.

Odată ce axele sunt determinate, se poate construi elipsa cu procedeul indicat.

Se poate construi însă direct elipsa, cunoscând diametrii conjugați AA', BB'. Descriem cercul de diametru AA' și ducem diametrul OB_1 (Fig. 159) perpendicular pe AA'. Observăm că B poate fi considerat ca proecția oblică făcută paralel cu direcția BB_1 a punctului B_1. Pentru a obține un punct oarecare al elipsei, luăm o ordonată oarecare NP a cercului și paralelele prin P și N respectiv la BB_1 și OB se taie în punctul M al elipsei.

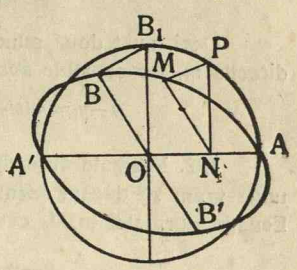


Fig. 159.

120. **Polara unui punct M_1 este paralelă cu diametrul conjugat cu diametrul OM_1.** In adevăr, polara punctului $M(x_1,y_1)$ este

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0$$

și are coeficientul unghiular $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Diametrul OM_1 (Fig. 160) având coeficientul unghiular $m=\frac{y_1}{x_1}$, al diametrului conjugat este $-\frac{b^2}{a^2m}=-\frac{b^2}{a^2\frac{y_1}{x_1}}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Deci acest diametru conjugat cu OM_1 este paralel cu polara punctului M_1.

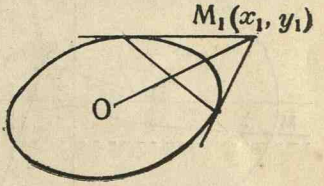


Fig. 160.

121. **Normale la elipsă paralele cu o direcție dată.** Coeficientul unghiular al tangentei într'un punct $M_0(x_0, y_0)$ al unei elipse fiind $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, coeficientul unghiular al normalei este $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$. Pentru ca normala în $M_0(x_0, y_0)$ să fie paralelă cu direcția de coeficient unghiular m, trebue

$$\frac{a^2y_0}{b^2x_0}=m. \tag{5}$$

Dar punctul $M_0(x_0, y_0)$ fiind pe elipsă, avem

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0. \tag{6}$$

Deci punctele $M_0(x_0, y_0)$ ale elipsei, în care normalele au coeficientul unghiular m, sunt date de ecuațiile (5) și (6). Avem din (5)

$$\frac{\frac{x_0}{a}}{a} = \frac{\frac{y_0}{b}}{mb} = \frac{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}}{\pm\sqrt{a^2+m^2b^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2m^2}},$$

de unde

$$x_0 = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+m^2b^2}},\quad y_0 = \frac{\pm mb^2}{\sqrt{a^2+m^2b^2}}.$$

Deci, sunt două puncte $M_0(x_0, y_0)$ în care normalele sunt paralele cu direcţia m, iar ecuaţiile acestor normale sunt

$$y-y_0=m(x-x_0),\quad y=mx\pm(a^2-b^2)\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}.$$

122. **Normale duse dintr'un punct exterior.** Fie $S(x_1, y_1)$ punctul de unde vrem să ducem normale la elipsă; fie $M_0(x_0, y_0)$ piciorul unei normale. Ecuaţia normalei în M_0 este

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0),\quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

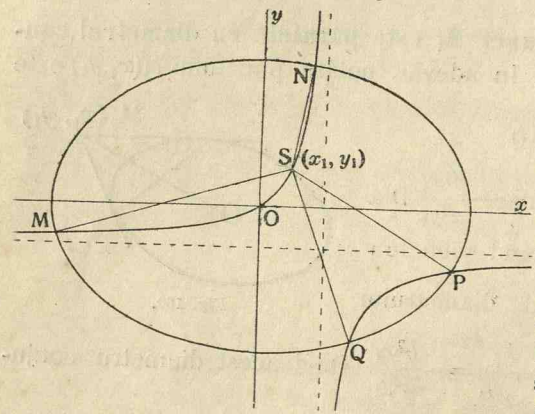


Fig. 161.

Ca să fie cea dusă din $S(x_1, y_1)$, trebue ca

(7) $$y_1-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x_1-x_0).$$

Deci, coordonatele (x_0, y_0) ale picioarelor normalelor duse din S la elipsă sunt la intersecţia elipsei cu iperbola (7),

$$(y_1-y_0)b^2x_0=a^2y_0(x_1-x_0),$$

care este echilateră, trece prin centrul elipsei, cu asimptotele paralele cu axele elipsei. Aceasta este *iperbola lui Apollonius* relativă la S şi la elipsa dată (Fig. 161).

Problema este rezolvată grafic. Ramura iperbolei ce trece prin centru tae neapărat elipsa în două puncte reale M şi N; cealaltă ramură a iperbolei, sau tae elipsa în două puncte reale, sau n'o tae, sau este tangentă. Deci, dintr'un punct se pot duce la elipsă, în general, patru normale, sau două.

Determinarea direcţiilor normalelor duse din $S(x_1, y_1)$. Ecuaţia unei normale de direcţie m fiind

$$y=mx\pm(a^2-b^2)\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}},$$

scriind că trece prin $S(x_1, y_1)$ avem

$$(y_1-mx_1)^2(a^2+b^2m^2)=m^2(a^2-b^2)^2,$$

ecuaţia de gradul al patrulea în m, care dă direcţiile normalelor duse din $S(x_1, y_1)$ la elipsă.

Scriind ecuaţia sub forma

$$f(m)\equiv(y_1-mx_1)^2\left(b^2+\frac{m^2}{a^2}\right)-(a^2-b^2)^2=0,$$

pentru a discuta realitatea rădăcinilor, să-i aplicăm teorema lui Rolle, în intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Avem

$$f'(m)=2(y_1-mx_1)x_1\left(b^2+\frac{a^2}{m^2}\right)+(y_1-mx_1)^2\left(-\frac{2a^2}{m^3}\right),$$

$$f'(m)=-2(y_1-mx_1)\left(b^2x_1+\frac{a^2y_1}{m^3}\right).$$

Rădăcinile derivatei sunt $m'=\frac{y_1}{x_1}$, $m''=-\sqrt[3]{\frac{a^2y_1}{b^2x_1}}$. Avem

$$f(m'')=\left(y_1+x_1\sqrt[3]{\frac{a^2y_1}{b^2x_1}}\right)^2\left(b^2+ab\sqrt[3]{\frac{bx_1^2}{ay_1^2}}\right)-(a^2-b^2)^2,$$

$$f(m'')=\left(\sqrt[3]{a^2x_1^2}+\sqrt[3]{b^2y_1^2}\right)^3\left(\sqrt[3]{\frac{y_1}{b^2}}\right)^2 b\sqrt[3]{\frac{b}{y_1^2}}-(a^2-b^2)^2=\left(\sqrt[3]{a^2x_1^2}+\sqrt[3]{b^2y_1^2}\right)^3-(a^2-b^2)^2.$$

Şirul lui Rolle este $\left(\frac{y_1}{x_1}>0\right)$

$f(-\infty)$		$f(m'')$		$f(-\epsilon)$	$f(-\epsilon)$	$f(m')$	$f(\infty)$
$+$	;	$\left(\sqrt[3]{a^2x_1^2}+\sqrt[3]{b^2y_1^2}\right)^3-(a^2-b^2)^2$	;	$+$	$+$	$-$	$+$

Ecuaţia are două rădăcini reale, una între 0 şi $\frac{y_1}{x_1}$, alta mai mare ca $\frac{y_1}{x_1}$. Pentru ca şi celelalte două să fie reale, trebue ca

$$\sqrt[3]{a^2x_1^2}+\sqrt[3]{b^2y_1^2}-\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}<0,$$

Să contsruim curba

$$\sqrt[3]{a^2x_1^2}+\sqrt[3]{b^2y_1^2}-\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}=0.$$

Rezolvând în raport cu y, avem

$$y=\pm\frac{1}{b}\left[(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Vom construi numai partea din unghiul xOy, căci pentru a afla toată curba, vom lua simetricele în raport cu axele şi origina. Pentru ca y să existe, trebue ca

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}<(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}},\quad x<\frac{a^2-b^2}{a}.$$

Avem

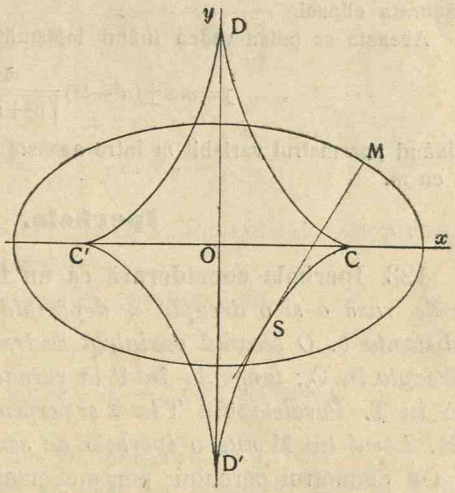


Fig. 162.

$$y'=-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b}\left[(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}};$$

deci $y'<0$ pentru $x>0$. Pentru $x=0$, $y=\frac{a^2-b^2}{b}$, $y'=\infty$; pentru $x=\frac{a^2-b^2}{a}$, $y=0$, $y'=0$. Deci, când x variază de la 0 la $\frac{a^2-b^2}{a}$, obţinem axul DC (Fig. 162),

tangent la Oy în D şi tangent la Ox în C. Curba (C) este formată din acest arc şi din simetricele C'D, C'D', D'C, în raport cu Oy, origina şi axa Ox. Punctele C, C', D, D' sunt puncte de întoarcere. Această curbă se zice *desfăşurata elipsei.*

Dacă punctul $S(x_1, y_1)$ este interior acestei curbe (adică de aceeaş parte cu origina), atunci $f(m'')<0$, se pot duce din acest punct patru normale la elipsă. Dacă $S(x_1, y_1)$ este exterior acestei curbe, $f(m'')>0$, sunt numai două rădăcini reale, se pot duce din acest punct numai două normale. Dacă punctul S este pe curbă, $f(m'')=0$, se pot duce trei normale, din care una poate fi considerată ca dublă.

Cele două normale confundate ce se duc din $S(x_1, y_1)$ au coeficientul unghiular $m''=\sqrt[3]{\frac{a^2y_1}{b^2x_1}}$. Dar coeficientul unghiular al tangentei (1) la curba (C) este dat de y', unde se înlocueşte x_1 şi y_1 cu coordonatele punctului curbei,

$$y_1=\frac{1}{b}\left[(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Avem

$$y_1'=-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b}x_1^{-\frac{1}{3}}\left[(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b}x_1^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{a^2y_1}{b\,x_1}}=m''.$$

Deci, cele două normale confundate sunt tangente în S la curba (C). Aşa dar, curba (C) este înfăşurătoarea normalelor elipsei, de aceea se zice desfăşurata elipsei.

Aceasta se putea vedea luând înfăşurătoarea normalelor la elipsă,

$$y=mx\pm(a^2-b^2)\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}},$$

eliminând parametrul variabil m între această ecuaţie şi derivata sa în raport cu m.

Iperbola.

123. **Iperbola considerată ca un loc geometric.** *Se dau un cerc de rază a şi o dreaptă* Δ *depărtată de centrul* O *al cercului cu distanţa b. O secantă variabilă cc trece prin* O *tae cercul în* P *şi dreapta în* Q*; tangenta în* P *la care tae diametrul perpendicular pe* Δ *în* T. *Paralela din* T *la* Δ *şi perpendiculara din* Q *pe* Δ *se tae în* M. *Locul lui* M *este o iperbolă de semiaxe a şi b.* Luând ca axe Ox, Oy diametrul cercului perpendicular pe Δ şi cel paralel cu Δ

(1) Tangenta într'un punct $M_1(x_1, y_1)$ al curbei $y=f(x)$ fiind limita dreptei (D) ce uneşte punctul (x_1, y_1) cu punctul infinit vecin $(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ al curbei, când Δx_1 tinde către zero, urmează că valoarea coeficientului unghiular al tangentei în $M_1(x_1, y_1)$ este limita coeficientului unghiular $\frac{(y_1+\Delta y_1)-y_1}{(x_1+\Delta x_1)-x_1}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ al dreptei (D), adică y_1', egală cu derivata funcţiunei y unde se înlocuesc x şi y cu coordonatele (x_1, y_1).

(Fig. 163), ecuaţiile cercului şi dreptei sunt

$$x^2+y^2=a^2, \quad x=b.$$

O secantă variabilă ce trece prin O, $y=x\,tg\alpha$, tae cercul şi dreapta în punctele P($a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$), Q($b, b\,tg\alpha$). Tangenta în P la cerc, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=a^2$, tae axa Ox în punctul $T\left(\frac{a}{\cos\alpha}, 0\right)$ şi deci coordonatele punctului M sunt

$$x=\frac{a}{\cos\alpha}, \quad y=b\,tg\alpha.$$

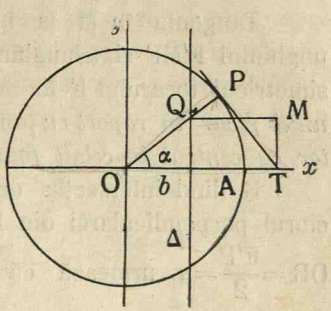


Fig. 163.

De unde

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

deci locul lui M este o iperbolă cu semiaxele a şi b.

Expresiunile $x=\frac{a}{\cos\alpha}$, $y=b\,tg\alpha$, dau reprezentarea parametrică a iperbolei. Inlocuind pe

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},$$

şi punând $tg\frac{\alpha}{2}=t$, avem

$$x=a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y=b\frac{2t}{1-t^2},$$

care ne dau coordonatele unui punct al iperbolei în funcţiune raţională de un parametru variabil t.

Se mai pot exprima şi altfel coordonatele,

$$x=a\,ch t, \quad y=b\,sh t,$$

$$ch t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad sh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \quad ch^2t-sh^2t=1,$$

$ch t$, $sh t$ fiind cosinusul şi sinusul iperbolic de t.

124. **Iperbola definită ca alt loc geometric.** F şi F′ fiind cele două focare ale iperbolei (Fig. 164) şi M un punct al ei, $MF'-MF=2a$, să luăm pe F′M punctul P, astfel ca PM = MF. De unde $F'P=F'M-MF=2a$, deci locul lui P este un cerc. Cercurile descrise din F şi F′ ca centre, cu razele $2a$, se zic

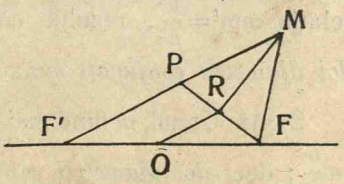


Fig. 164.

cercurile directoare ale iperbolei. Se vede că punctul M este egal depărtat de cerc și punctul F și deci *locul punctelor egal depărtate de un cerc și un punct exterior cercului este iperbolă cu focarele în centrul cercului și punctul exterior.*

Tangenta în M la iperbolă fiind bisectoarea interioară a unghiului F'MF și triunghiul PMF fiind isoscel, urmează că P este simetricul focarului F în raport cu tangenta în M. Deci, *simetricul unui focar în raport cu tangentele la iperbolă, sunt pe cercul director cu centrul în celalt focar.*

R fiind intersecția dreptei PF cu tangenta în M, R este piciorul perpendicularei din F pe tangentă. O fiind centrul iperbolei, $OR=\frac{F'P}{2}=a$, urmează că *locul proecțiilor focarelor pe tangentele la iperbolă este cercul descris pe axa transversă.*

125. **Tangente paralele cu o direcție** m (care nu este asimptotică). Acestea au ecuațiile

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

Problema e posibilă numai când $a^2m^2-b^2>0$, $m<-\frac{b}{a}, m>\frac{b}{a}$, adică dreapta dusă prin centrul iperbolei, paralelă cu direcția m, să fie exterioară unghiului asimptotelor care cuprinde curba.

126. **Diametrii.** 1°. Ecuația unui diametru fiind $y=mx$, diametrul conjugat are ecuația

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x$$

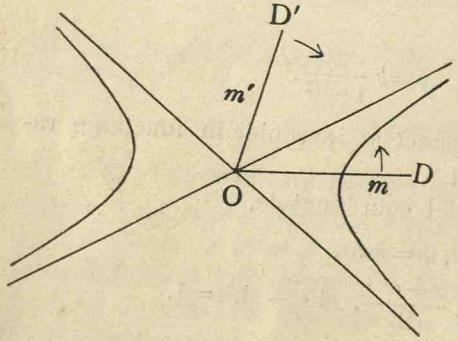


Fig. 165.

Deci, între coeficienții unghiulari, m și m', avem relația

$$mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

Se vede că dacă diametrul $y=mx$ tae curba (Fig. 165), celalt $y=\frac{b^2}{a^2m}x$ n'o mai tae. Din relația $mm'=\frac{b^2}{a^2}$, rezultă că m și m' sunt de același semn; deci *doi diametru conjugați sunt așezați în același unghi al axelor.*

2°. Apoi, unul, m fiind mai mic de cât $\frac{b}{a}$, celalt, m', este mai mare ca $\frac{b}{a}$; deci *doi diametrii conjugați sunt așezați în ungĥiuri diferite*

ale asimptotelor, de unde se vede din nou că unul este real, celal imaginar.

3°. In fine, m și m', luați în valoare absolută, se vede că unul crescând, celalt demește; deci, *doi diametrii conjugați se deplasează în sens contrar*. Unghiul lor descreşte de la un unghi drept la zero; unghiul a doi diametrii este drept în cazul axelor și egal cu zero, când cei doi diametrii conjugați se confundă cu o asimptotă.

4°. *Ecuația iperbolei raportată la doi diametrii conjugați* este

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

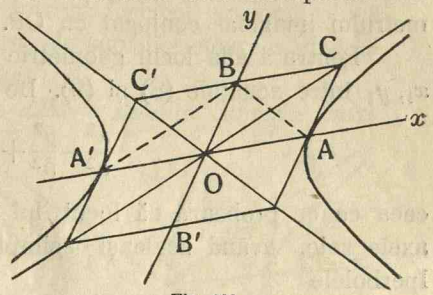


Fig. 166.

A și A′ fiind extremitățile diametrului real (Fig. 166), axa Ox, să ducem prin A și A′ tangentele care tae asimpitotele în C și C′; dreapta CC′ tae axa Oy, celalt diametru, în B. Avem $OA=a'$, $OB=AC=b'$, care sunt semidiametrii real și imaginar al iperbolei. Dreptele AB, A′B sunt paralele cu asimptotele, astfel că paralelele din capetele unui diametru la cele două asimptote, se tae în capetele diametrului imaginar, conjugat cu primul.

5°. *Iperbole conjugate. Locul extremităților diametrilor imaginari ai iperbolei este o altă iperbolă cu aceleași asimptote.* Fie $P(x_1,y_1)$, $P'(-x_1,-y_1)$ capetele unui diametru real al iperbolei (Fig. 167) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y_2}{b^2}=1$; deci

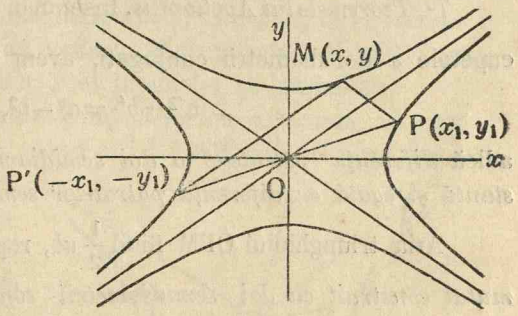


Fig. 167.

$$(8)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Paralelele prin P și P′ la asimptote,

$$y-y_1=\frac{-b}{a}(x-x_1),\quad y+y_1=\frac{b}{a}(x+x_1),$$

se tae în punctul M de coordonate

$$(9)\qquad x=\frac{a}{b}y_1,\quad y=\frac{b}{a}x_1.$$

Se vede că coeficienții unghiulari ai dreptelor OP și OM sunt

$$m=\frac{y_1}{x_1},\quad m'=\frac{y}{x}=\frac{\frac{b}{a}x_1}{\frac{a}{b}y_1}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}.$$

Deci, $mm'=\frac{y_1}{x_1}\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}=\frac{b^2}{a^2}$, aceea ce probează că OP şi OM sunt doi diametrii conjugaţi ai iperbolei, iar M este vârful diametrului imaginar conjugat cu OP.

Pentru a afla locul geometric al punctului M, vom elimina pe x_1, y_1 între ecuaţiile (8) şi (9). De unde

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0,$$

ceea ce ce probează că locul lui M este o iperbolă, raportată la axele sale, având aceleaşi asimptote ca iperbola dată (Fig. 167) Iperbolele

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0,$$

se zic iperbole conjugate.

6°. *Formulele lui Chasles* sunt formulele (9), care dau coordonatele capetelor diametrului imaginar, când se cunosc acelea ale unui diametru real conjugat.

7°. *Teoremete lui Apollonius.* Insemnând cu $P(x_1,y_1)$, $M\left(\frac{a}{b}y_1,\ \frac{b}{a}x_1\right)$ capetele a doi diametrii conjugaţi, avem $OP=a'$, $OM=b'$,

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,$$

adică *diferenţa pătratelor a doi semidiametrii conjugaţi este constantă şi egală cu diferenţa pătratelor semiaxelor.*

Aria triunghiului OPM fiind $\frac{1}{2}ab$, rezultă că *aria paralelogramului construit cu doi semidiametrii conjugaţi ca laturi este constantă şi egală cu aria dreptunghiului construit cu semiaxele ca laturi.* Demonstraţia este aceeaş ca în cazul elipsei.

8°. *Diametrii conjugaţi egali.* In acest caz avem $a'=b'$, $a^2-b^2=a'^2-b'^2=0$, deci $a=b$, adică numai în cazul iperbolei echilatere avem diametrii conjugaţi egali.

9°. *Doi diametrii conjugaţi sunt conjugaţi armonic în raport cu asimptotele.* În adevăr, ecuaţiile diametrilor şi asimptotelor sunt

$$y=mx,\ y=\frac{b^2}{a^2m}x,\quad y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x,$$

astfel că între coeficienții lor unghiulari, $m_1=m$, $m_2=\frac{b^2}{a^2m}$, $m_3=\frac{b}{a}$, $m_4=-\frac{b}{a}$, avem relația

$$(m_1+m_2)(m_3+m_4)=2(m_1m_2+m_3m_4).$$

10. *La iperbola echilateră doi diametrii conjugați sunt simetrici față de axe*, căci se știe că dacă într'un fascicol armonic două raze (asimptotele) sunt perpendiculare, ele sunt bisectoarele unghiului celorlalte două (diametrii conjugați).

127. **Asimptote.** 1°. *Porțiunile dintr'o secantă cuprinse între iperbolă și asimptote sunt egale.* In adevăr, fie P, P', M, M' intersecțiile unei secante cu asimptotele și iperbola (Fig. 168). Fie OD' o dreaptă paralelă cu PP'. Diametrul conjugat direcției PP' este OD, ce unește centrul O cu mijlocul μ al coardei MM'. Dar fascicolul OD', OP, OD, OP' este armonic; deci secanta PP', paralelă cu OD', este împărțită în două de OD. Așa dar, μP=μP'. Dar μ este mijlocul lui MM'; deci PM=P'M'.

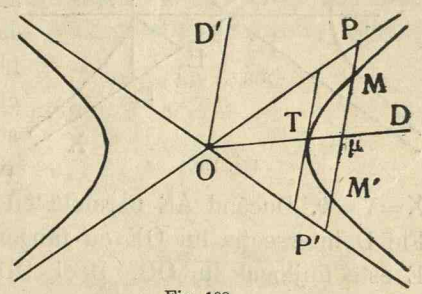


Fig. 168.

2°. *Porțiunea din tangentă la iperbolă, cuprinsă între asimptote are mijlocul în punctul de contact*, căci punctele M și M' se confundă cu punctul de contact T al tangentei la iperbolă.

3°. *Fie* P *și* P' *intersecțiile asimptotelor cu o secantă ce trece printr'un punct* M *al iperbolei. Produsul* MP.MP'=b'^2, b' *fiind semidiametrul conjugat direcției* PP'. Raportăm iperbola la doi diametrii conjugați, unul fiind paralel cu PP' (Fig. 169). Ecuația iperbolei este

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Ecuațiile asimptotelor sunt

$$y=\frac{b'}{a'}x,\quad y=-\frac{b'}{a'}x.$$

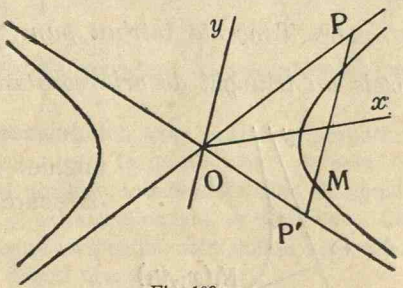


Fig. 169.

Fie $M(x_1,y_1)$ un punct al iperbolei, adică

$$\frac{x_1^2}{a'^2}-\frac{y_1^2}{b'^2}-1=0.$$

Coordonatele punctelor P și P′ sunt $P\left(x_1, \frac{b'}{a'}x_1\right)$, $P'\left(x_1, -\frac{b'}{a'}x_1\right)$. Deci

$$MP.P'M=\left(x_1\frac{b'}{a'}-y_1\right)\left(x_1\frac{b'}{a'}+y_1\right)=x_1^2\frac{b'^2}{a'^2}-y_1^2=b'^2\left(\frac{x_1^2}{a'^2}-\frac{y_1^2}{b'^2}\right)=b'^2.$$

4°. *Ecuația iperbolei raportată la asimptotele sale.* Grupul termenilor de gradul al doilea care dă asimptotele trebue să fie XY. Ecuația curbei este

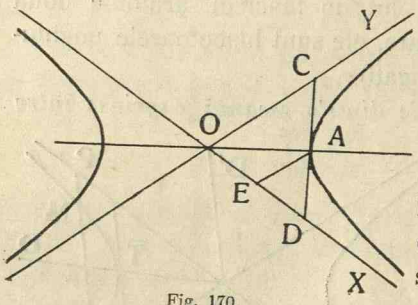


Fig. 170.

$$XY=k^2.$$

Fie $OA=a$, $AC=b$ (Fig. 170) semiaxele iperbolei. Bisectoarele axelor sunt chiar axele iperbolei. Ecuația bisectoarei înterioare fiind $X=Y$, coordonatele punctului A de intersecție a iperbolei cu axa mare, se obțin făcând $X=Y$, de unde $X=Y=k$. Ducând AE paralelă cu OY, avem $OE=X=k$, $EA=Y=k$. Fie D intersecția lui OX cu tangenta în A. A fiind mijlocul lui CD, E este mijlocul lui OD. Deci, $OD=2k$. In triunghiul OAD, avem $\overline{OA}^2+\overline{DA}^2=\overline{OD}^2$, $a^2+b^2=4k^2$, $k^2=\frac{a^2+b^2}{4}$, și deci ecuația iperbolei raportată la asimptotele sale este

$$XY=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Dacă este iperbolă echilateră,

$$XY=\frac{a^2}{2}.$$

5°. *Tangenta într'un punct al unei iperbole face cu asimptotele un triunghi de arie constantă.* Fie $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$ ecuația iperbolei raportată la asimptotele sale ce fac unghiul α (Fig. 171). PQ fiind o tangentă oarecare și M punctul ei de contact, avem

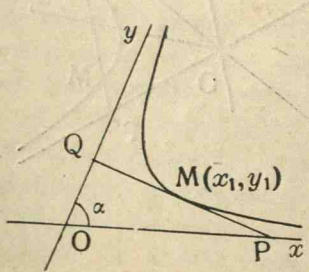


Fig. 171.

$$\text{aria } OPQ=\frac{1}{2}OP.OQ\sin\alpha.$$

$M(x_1,y_1)$ fiind coordonatele punctului de contact, avem

$$x_1y_1=\frac{a^2+b^2}{4},\quad OP=2x_1,\quad OQ=2y_1.$$

Deci

$$\text{aria } OPQ = \frac{1}{2} 2x_1 2y_1 \sin\alpha = 2x_1 y_1 \sin\alpha = \frac{a^2+b^2}{2}\sin\alpha = \frac{a^2+b^2}{2}\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dar, α fiind unghiul axelor, a și b semiaxele iperbolei, avem $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$ și deci

$$\text{aria } OPQ = \frac{a^2+b^2}{2}\,\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = ab = \text{const.}$$

6⁰. *Dacă un paralelogram are două vârfuri opuse pe iperbolă și laturile paralele cu asimptotele, o diagonală trece prin centru.* In

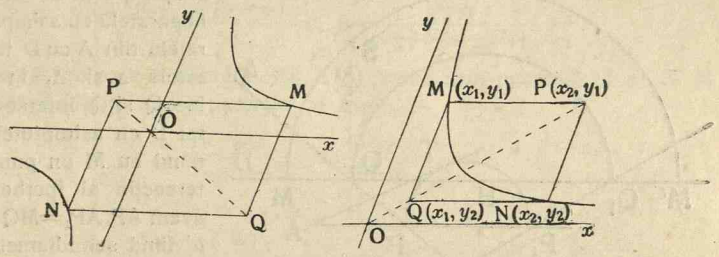


Fig. 172.

adevăr, fie $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ două puncte pe iperbolă (Fig. 172) raportată la asimptotele sale, adică

$$x_1 y_1 = \frac{a^2+b^2}{4}, \quad x_2 y_2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Deci $x_1 y_1 = x_2 y_2$, adică $\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$, ceea ce probează că dreapta care unește punctele $P(x_2, y_1)$, $Q(x_1, y_2)$, celelalte două vârfuri ale paralelogramului construit cu laturile paralele cu asimptotele, trece prin centru.

128. Construcții geometrice ale iperbolei. Vom considera iperbola definită prin asimptotele sale și un punct, căci în cazul când iperbola este dată prin axele sale în mărime și poziție, asimptotele sunt diagonalele dreptunghiului construit pe semiaxe și se mai cunoaște un vârf al său. Când se dau doi diametrii conjugați în mărime și poziție, asimptotele sunt diagonalele paralelogramului construit cu acești diametrii.

1⁰. *Să se construiască un punct al iperbolei și tangenta într'un punct* Fiind cunoscute asimptotele Δ și Δ_1 și punctul A (Fig. 173), o secantă ce trece prin A tae asimptotele în P și P_1. Se ia punctul M, astfel ca $P_1M = AP$ și M este un punct al iperbolei.

Tangenta în M (Fig. 174) se construește ducând prin M o dreaptă mărginită la asimptote, care să aibă mijlocul în M. Pentru aceasta, ducem

MP paralelă cu Δ şi fie P punctul unde tae pe Δ_1. Luăm pe Δ_1, PQ=OP şi tangenta este OM.

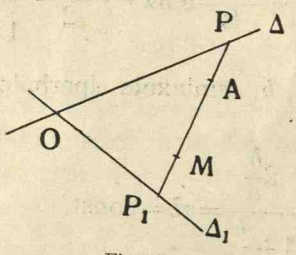


Fig. 173.

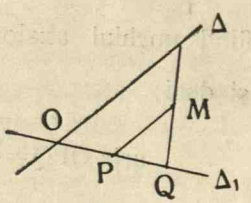


Fig. 174.

2°. *Intersecţia unei drepte cu o iperbolă.* Să considerăm iperbola definită prin asimptotele sale Δ, Δ_1 şi punctul A (Fig. 175) şi să căutăm intersecţia iperbolei cu dreapta D neparalelă cu asimptotele. Paralela din A cu D tae asimptotele Δ şi Δ_1 în P şi P_1. Fie Q şi Q_1 intersecţiile dreptei D cu asimptotele. Insemnând cu M un punct de intersecţie al iperbolei cu D, avem $AP.AP_1=MQ.MQ_1=b'^2$, b' fiind semidiametrul conjugat direcţii D. Ducând cercul de diametru PP_1 şi AT tangenta la acest cerc, avem $AP.AP_1=\overline{AT}^2$, deci $MQ\,MQ_1=AT^2$. Descriem deci pe QQ_1 ca diametru un cerc şi ducem în Q o perpendiculară pe QQ_1, pe care luăm lungimea QS=AT. Cercul cu centrul H în mijlocul lui QQ_1 şi cu raza HS tae pe D în punctele M şi M', punctele unde D tae iperbola.

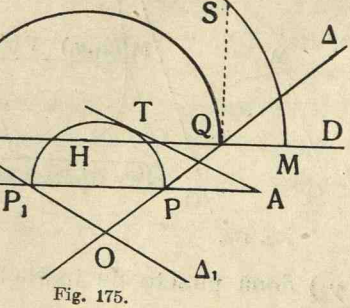


Fig. 175.

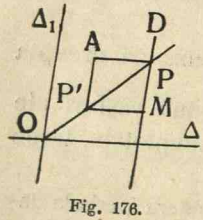


Fig. 176.

Dacă D este paralelă cu asimptota Δ_1 (Fig. 176), ducem prin punctul A al iperbolei o paralelă cu asimptota Δ, ce tae pe D în P. Paralela din A la Δ_1 tae pe OP în P'; paralela din P' la Δ tae pe D în M, punctul unde D tae iperbola, căci se ştie că paralelogramul APMP' ce are vârfurile opuse A şi M pe iperbolă, are diagonala PP' ce trece prin centrul O al iperbolei.

3°. *Construcţia iperbolei cu o trăsătură continuă.* Să presupunem că se dau focarele F şi F' şi lungimea axei mari, $2a$. Se ia o linie (riglă) de lungime mai mare ca FF' (Fig. 177) şi un fir de aţă egală cu diferenţa dintre lungimea liniei şi $2a$. Se aşează rigla cu un capăt în focarul F'. astfel ca să se poată învârti în jurul lui F'; firul îl legăm cu un capăt de focarul F şi cu celalt de capătul C al riglei. Intindem firul dealungul riglei şi facem să se mişte rigla în jurul lui F'; vârful M cu care întindem

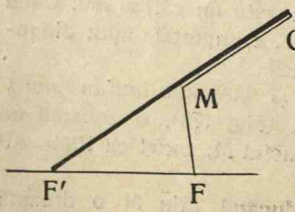


Fig. 177.

firul, descrie iperbola, căci MF′—MF=CF′—CM—MF=CF′—(CM+MF)=CF′—lungimea firului =CF′—(CF′—2a)=2a.

129. **Normale.** 1°. *Normale paralele cu o direcție.* Sunt două normale paralele cu direcția m,

$$y=mx\pm(a^2+b^2)\frac{m}{\sqrt{a^2-b^2m^2}},$$

care există dacă $m<\frac{a}{b}$, $\frac{1}{m}>\frac{b}{a}$. Aceasta exprimă că direcția dată trebue să fie cuprinsă în unghiul normalelor la asimptotele ce conțin în interior axa Ox.

2°. *Normele la iperbolă prinlr'un punct dat.* Ca și la elipsă, se arată că picioarele normalelor duse din punctul $S(x_1, y_1)$ la iperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

sunt la intersecția acestei iperbole cu iperbola lui Apollonius,

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x}+\frac{b^2(y-y_1)}{y}=0,\ y=\frac{b^2y_1x}{(a^2+b^2)x-a^2x_1}.$$

Această iperbolă echilateră (Fig. 178) trece prin punctele O și S și are asimptotele două drepte paralele cu axele,

$$x=\frac{a^2x_1}{a^2+b^2},\ y=\frac{b^2y_1}{a^2+b^2}.$$

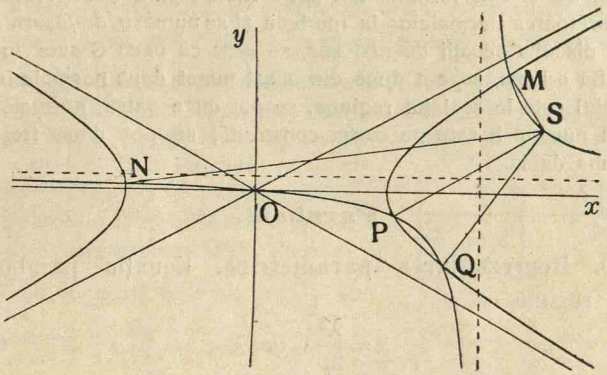


Fig. 178.

Se vede că întotdeauna se pot duce două normale reale, SM căci ramura ce trece prin centru tae iperbola dată în punctul N, iar ramura cealaltă neapărat tae iperbola în M. Ramura ce trece prin centru mai poate tăia iperbola dată în două puncte P, Q, sau nu o mai tae, sau e tangentă iperbolei date. Deci, în general, două normale reale, sau patru, sau trei, din care una poate fi considerată ca dublă.

Ecuația care dă coeficienții unghiulari ai normalelor duse din $S(x_1, y_1)$ este

$$(y_1-mx_1)^2(a^2-b^2m^2)-(a^2+b^2)^2m^2=0.$$

Se poate discuta, ca și la elipsă, această ecuație de gradul al patrulea. Construind curba (Fig. 179)

$$\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{(a^2+b^2)^2},$$

sau

$$y^2=\frac{\left[\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{(a^2+b^2)^2}\right]^3}{b^2},$$

se vede că este simetrică în raport cu Ox, Oy, O, şi are pe Ox punctele

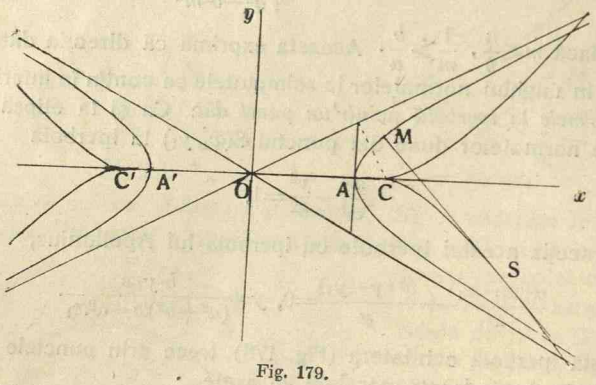


Fig. 179.

de întoarcere C şi C', de abscise $\pm\frac{a^2+b^2}{a}$, având ca tangente în aceste puncte axa Ox şi este formată din patru ramuri parabolice. Această curbă este înfăşurătoarea normalelor la iperbolă şi se numeşte *desfăşurata iperbolei*.

Din discuţia ecuaţii de mai sus, se vede că dacă S este în regiunea unde se află origina, se pot duce din acest punct două normale la iperbolă; dacă punctul este în cealaltă regiune, se pot duce patru normale la iperbolă; dacă punctul S este pe curba construită, se pot duce trei normale, din care una dublă.

Parabola.

130. **Reprezentarea parametrică.** Ecuaţia parabolei fiind $y^2=2px$, rezultă că

$$x=\frac{\lambda^2}{2p},\quad y=\lambda$$

dau coordonatele unui punct al parabolei raportată la axa sa şi tangenta la vârf în funcţiune de un parametru variabil λ.

131. **Tangenta într'un punct.** Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$ fiind

$$yy_0-p(x+x_0)=0,$$

rezultă că tangenta tae axa Ox în punctul $T(-x_0, 0)$ (Fig. 180), adică simetricul piciorului P al perpendicularei din M pe axă, în raport cu vârful. Segmentul PT se zice *subtangentă* şi deci la parabolă, *subtangenta are mijlocul în vârful parabolei.*

Fie F focarul, Q proecţia punctului M pe directoare, N intersecţia tangentei MT cu axa Oy, tangeta la vârf, D intersecţia

directoarei cu axa; avem $OD=OF$, $OT=OP$, $TF=DP=QM=MF$. Deci figura TFMQ este un romb, N este mijlocul lui QF și NM perpendiculara în N pe QF.

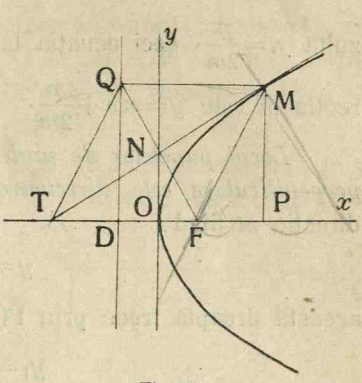


Fig. 180.

De aci rezultă un procedeu grafic pentru *construirea unui punct al parabolei și a tangentei în acest punct.* Pentru aceasta, să presupunem că se dau focarul F și directoarea, dreapta D. Unim un punct Q al directoarei cu focarul F, și fie N punctul unde această dreaptă tae tangenta la vârf. Paralela la axa parabolei prin Q și perpendiculara în N pe FQ se tae în punctul M al parabolei. Tangenta în M este MN.

Mai rezultă că *simetricele focarului față de tangentele la parabolă sunt pe directoare. Proecțiile facarului pe tangente este tangenta la vârf.* In fine, *tangenta la parabolă este bisectoarea unghiului* QMF *format de dreapta ce unește punctul de contact cu focarul și dreapta dusă prin acest punct perpendiculară pe directoare.*

132. **Alt mod de a construi parabola prin puncte.** *Se dă un triunghi* AOB *(Fig. 181) dreptunghic în* B. *O paralelă* MM′ *cu* OB *tae pe* AB *și* OA *în* M *și* M′. *Dreapta* OM *și paralela prin* M′ *la* BA *se tae în* P. *Locul lui* P *este o parabolă cu vârful în* O *și tangenta la vârf* OB. Luând pe OB ca Oy și perpendiculara în O ca Ox, fie $A(a, b)$ coordonatele punctul lui A și $x=\lambda$ ecuația dreptei MM′. Coordonatele punctului M′ sunt date de $y=\frac{b}{a}x$ și $x=\lambda$ și sunt $M'\left(\lambda, \frac{b}{a}\lambda\right)$. iar acelea ale lui $M(\lambda, b)$.

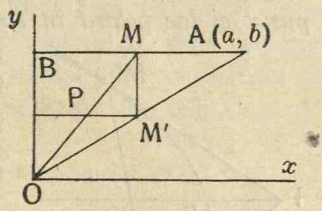


Fig. 181.

Ecuația dreptei OM este $y=\frac{b}{\lambda}x$, iar a paralelei din M′ la Ox este $y=\frac{b}{a}\lambda$. Eliminând pe λ între aceste ecuații, obținem $y^2=\frac{b^2}{a}x$, adică locul lui P este o parabolă cu vârful în O și tangentă axei Oy în O, trecând prin A.

De aci un nou mod de a construi o parabolă prin puncte, *cunoscând un punct* A, *vârful* O *și tangenta la vârf.* Pentru aceasta, ducem din A perpendiculara AB pe tangenta la vârf care o tae în B. O secantă variabilă OM tae pe AB în M. Paralela din M la OB tae pe OA în M′, iar paralela din M′ la AB tae pe OM în punctul P al parabolei.

133. **Tangentă paralelă cu o direcție dată.** Scriind că dreapta $y=mx+n$ tae parabola $y^2=2px$ în două puncte confundate, re-

zultă $n=\frac{p}{2m}$, deci ecuaţia tangentei la parabolă paralelă cu direcţia m este $y=mx+\frac{p}{2m}$.

Locul punctelor de unde se pot duce la o parabolă tangente perpendiculare este directoarea. In adevăr o tangentă paralelă cu direcţia m fiind

$$y=mx+\frac{p}{2m},$$

această dreaptă trece prin $P(x_1, y_1)$, dacă

$$y_1=mx_1+\frac{p}{2m}.$$

Deci, ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai tangentelor la parabolă duse prin $P(x_1, y_1)$ este

$$2m^2x_1-2my_1+p=0.$$

Valorile m' şi m'' ale rădăcinilor acestei ecuaţii corespund celor două tangente ce se pot duce la parabolă prin $P(x_1, y_1)$. Pentru ca să fie perpendiculare, trebue

$$m'm''+1=0,\ \frac{p}{2x_1}+1=0,\ x_1+\frac{p}{2}=0,$$

deci locul punctului $P(x, y)$ este directoarea parabolei.

134. **Intersecţia unei drepte cu o parabolă.** 1°. *Diametrul conjugat coardelor paralele cu polara unui punct trece prin acel punct şi tae polara în simetricul polului în raport cu punctul unde tae parabola.* Polara punctului $P(x_1, y_1)$ în raport cu parabola $y^2-2px=0$ este $yy_1-p(x+x_1)=0$ şi are coeficientul unghiular egal cu $\frac{p}{y_1}$. Diametrul conjugat coardelor paralele cu direcţia m fiind $y=\frac{p}{m}$, diametrul conjugat coardelor paralele cu polara lui P este $y=\frac{p}{\frac{p}{y_1}}=y_1$, adică trece prin punctul P.

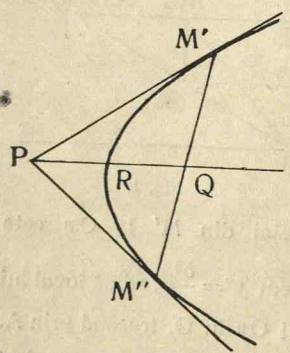


Fig. 182.

R fiind intersecţia diametrului cu parabola (Fig. 182), R este punctul de contact al tangentei paralelă cu polara. Insemnând cu Q intersecţia polarei cu diametrul, Q este mijlocul coardei $M'M''$ de contact şi cum P şi Q sunt conjugate armonic cu punctul R şi punctul de la infinit, căci PQ este diametru (paralel cu direcţia

asimptotică), urmează că PR=RQ. *Aceasta permite a construi polul unei drepte* M'M''. Prin mijlocul Q al lui M'M'' se duce o paralelă cu axa parabolei ce tae parabola în R; simetricul P al lui Q în raport cu R este polul dreptei M'M''.

2°. Ca aplicație a celor de mai sus, să aflăm *intersecțiile dreptei* D *cu parabola* definită de focarul F și directoarea Δ (Fig. 183). Pentru aceasta, să construim diametrul conjugat direcției D. Vom duce mai întâi la parabolă o tangentă paralelă cu D. Pentru aceasta, ducem prin focarul F o perpendiculară pe D, care tae tangenta la vârf în B și directoarea Δ în A. Perpendiculara în B pe FA este tangentă la parabolă în punctul M de intersecție al acestei drepte cu paralela din A la axă. Diametrul conjugat direcției D este dreapta AM. Fie N intersecția dreptei AM cu D. Știm că polul dreptei D este simetricul P al lui N față de M.

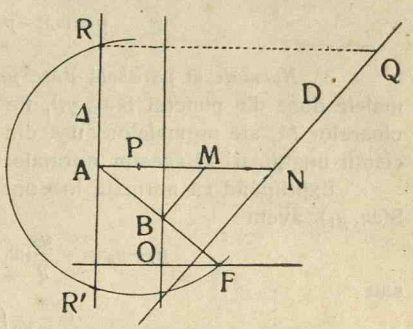


Fig. 183.

Fie Q un punct de intersecție al dreptei D cu parabola și R proecția ortogonală a lui Q pe directoare. Punctul Q al parabolei este egal depărtat de focarul F și directoare, deci FQ=QR și cum tangenta QP este bisectoarea unghiului format de RQ și QF, urmează că PF=PR. Deci, pentru a găsi punctul R vom descrie din P ca centru un cerc cu PF ca rază, ce tae directoarea Δ în R R'. Paralelele la axă prin R și R' tae pe D în punctele Q și Q' de intersecție ale ei cu parabola.

135. **Normale.** 1°. Ecuația tangentei într'un punct $M_0(x_0,y_0)$ fiind $yy_0-p(x+x_0)=0$, al cărei coeficient unghiular este $\frac{p}{y_0}$, aceea a normalei în M_0 este

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0).$$

Abscisa punctului N (Fig. 184) unde această normală tae axa este (x_0+p). Deci, proecția PN pe axă a segmentului M_0N din normală este egal cu p. Această proecție se zice subnormală. Deci, *subnormala la parabolă este constantă și egală cu parametrul parabolei.*

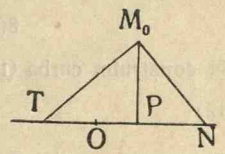


Fig. 184.

2°. *Normală paralelă cu o direcție* Coeficientul unghiular al normalei în punctul $M_0(x_0,y_0)$ fiind $-\frac{y_0}{p}$, să scriem că acest coeficient este egal cu m, adică

$$-\frac{y_0}{p}=m,\ y_0=-pm.$$

Ecuaţia normalei M_0 este

$$y-y_0=m(x-x_0),\ y_0^2=2px_0,$$

sau

$$y+pm=m\left(x-\frac{y_0^2}{2p}\right),\ y+pm=m\left(x-\frac{p^2m^2}{2p}\right),$$

$$y=mx-pm\left(1+\frac{m^2}{2}\right).$$

3°. *Normale la parabolă duse printr'un punct.* Se pot determina normalele duse din punctul $S(x_1, y_1)$, fie căutând coordonatele (x_0, y_0) ale picioarelor M_0 ale normalelor duse din S, sau căutând ecuaţia care dă coeficienţii unghiulari ai acestor normale.

Exprimând că normala în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al parabolei trece prin $S(x_1, y_1)$, avem

$$y_1-y_0=-\frac{y_0}{p}(x_1-x_0),\ y_0^2=2px_0,$$

sau

$$y_1-y_0+\frac{y_0}{p}\left(x_1-\frac{y_0^2}{2p}\right)=0,$$

(10)
$$y_0^3+2py_0(p-x_1)-2p^2y_1=0.$$

Această ecuaţie dă ordonatele picioarelor normalelor duse din $S(x_1, y_1)$ la parabolă.

Ecuaţia care dă coeficienţii unghiulari ai acestor normale, se obţine scriind că normala de direcţie m trece prin $S(x_1, y_1)$ şi avem

$$y_1=mx_1-pm\left(1+\frac{m^2}{2}\right),$$

sau

(11)
$$pm^3+2m(p-x_1)+2y_1=0.$$

Ecuaţiile (10) şi (11) fiind de gradul al treilea, se pot duce la parabolă dintr'un punct cel mult trei normale, dar cel puţin una.

Ecuaţia (11) putându-se reduce la (10) prin transformarea $y_0=-pm$, să discutăm ecuaţia (10). Aceasta are trei rădăcini reale, dacă

$$4[2p(p-x_1)]^3+27[-2p^2y_1]^2<0,$$

$$8(p-x_1)^3+27py_1^2<0,\ y_1^2<\frac{8}{27p}(x_1-p)^3.$$

Să construim curba (Γ),

(12)
$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

simetrică în raport cu Ox. Să construim numai ramura

$$y=\sqrt{\frac{8}{27p}(x-p)^3},$$

care există dacă $x>p$ (Fig. 185). Derivata $y'=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{1}{2}}$ fiind pozitivă pentru $x>p$, această ramură porneşte de la punctul $C(p, 0)$ al axei

Ox, la care este tangentă și are formă parabolică. Curba (Γ) este formată din această ramură și simetrica ei în raport cu Ox, având punctul C ca punct de întoarcere, în care tangenta este Ox.

Dacă punctul $S(x_1, y_1)$ este în regiunea unde este origina, atunci

$$8(p-x_1)^3+27py_1^2>0,$$

deci se poate duce numai o normală din acest punct. Dacă S este în cealaltă regiune a curbei (Γ), avem

$$8(p-x_1)^3+27py_1^2<0,$$

deci se pot duce trei normale din acest punct. Dacă punctul S este pe curba (Γ), se pot duce trei normale, din care una dublă.

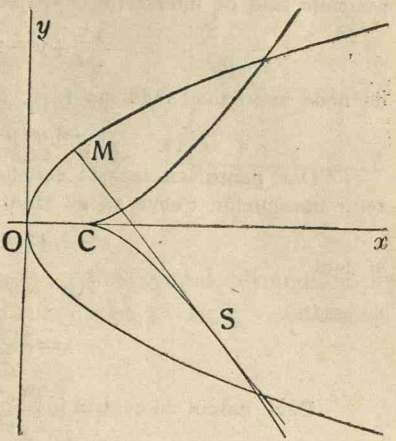


Fig. 185.

In acest caz, rădăcina dublă a ecuației (11) este

$$m=\frac{3y_1}{2(x_1-p)},$$

și repreziută coeficientul unghiular al normalelor confundate. Dar coeficientul unghiular al tangentei în S la curba (Γ) este

$$y_1'=\frac{3.8(x_1-p)^2}{2.27py_1}=\frac{3.8(x_1-p)^3}{2.27py_1(x_1-p)},$$

unde înlocuind pe $\frac{8}{27}(x_1-p)^3$ cu valoarea sa din (12), y_1^2, avem

$$y_1'=\frac{3}{2}\frac{y_1^2}{py_1(x_1-p)}=\frac{3y_1}{2(x_1-p)},$$

adică egal cu m. Deci normala la parabolă este tangentă la curba (Γ) în S, deci curba (Γ) este înfășurătoarea normalelor parabolei, sau, cum se mai zice, este *desfășurata parabolei.*

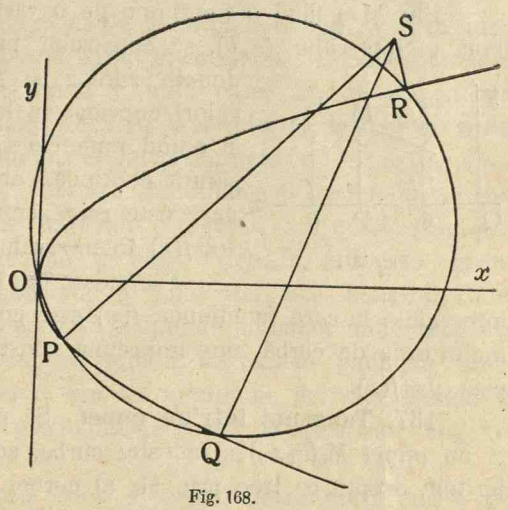


Fig. 168.

Observare. Se pot găsi în mod geometric picioarele normalelor duse din $S(x_1, y_1)$ la parabolă. In adevăr, să considerăm cercul ce trece prin picioarele normalelor. Ecuația unui cerc ce trece prin origină fiind

$$x^2+y^2-2\lambda x-2\mu y=0,$$

punctele sale de intersecție cu parabola $y^2=2px$ sunt date de ecuația

$$\frac{y^4}{4p^2}+y^2-2\lambda\frac{y^2}{2p}-2\mu y=0.$$

de unde suprimând rădăcina $y=0$, corespunzătoare vârfului O, avem

$$y^3+4py(p-\lambda)-8\mu p^2=0.$$

Dar, pentru ca această ecuație să aibă ca rădăcini ordonatele picioarelor normalelor, trebue să fie identică cu ecuația (10).

$$y^3+2py(p-x_1)-2p^2y_1=0,$$

și deci

$$2(p-\lambda)=p-x_1,\ 4\mu=y_1,$$

de unde

$$\lambda=\frac{x_1+p}{2},\ \mu=\frac{y_1}{4}.$$

Deci, cercul cu centrul în $\left(\frac{x_1+p}{2},\ \frac{y_1}{4}\right)$ și trecând prin vârful O, tae parabola în trei puncte P, Q, R (Fig. 186), picioarele normalelor duse din $S(x_1, y_1)$. Cercul acesta se zice cercul lui Ioachimsthal și înlocuește iperbola lui Apollonius în cazul elipsei și iperbolei.

Noțiuni asupra construcțiunei curbelor.

Curbele $y=f(x)$.

136. $f(x)$ fiind o funcțiune de o variabilă x, definită și continuă în intervalul (a, b), să construim punctul M ale cărui coordonate sunt x și $f(x)$. Făcând pe x să ia valori cuprinse în intervalul (a, b) (Fig. 187) și unind punctele corespunzătoare, cu o trăsătură continuă, obținem un arc de curbă, care este reprezentarea geometrică a ecuației $y=f(x)$ în intervalul (a, b).

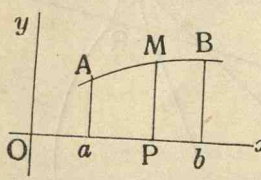


Fig. 187.

Făcând aceeaș construcțiune pentru toate intervalele în care funcțiunea $f(x)$ este continuă, se vor obține mai multe arce de curbă, care împreună constitue curba a cărei ecuație este $y=f(x)$.

137. **Tangenta într'un punct**. Să considerăm curba $y=f(x)$ și un punct $M_0(x_0,y_0)$ al acestei curbe, adică $y_0=f(x_0)$. Printre diferitele drepte ce trec prin M_0 al curbei este una care trece prin M_0 și punctul infinit vecin al acestei curbe, $M'_0(x_0+\Delta x_0,\ y_0+\Delta y_0)$. Ecuația acestei drepte este

$$y-y_0=\frac{y_0+\Delta y_0-y_0}{x_0+\Delta x_0-x_0}(x-x_0),\ y-y_0=\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}(x-x_0).$$

Dacă funcțiunea $f(x)$ are o derivată în M_0, la limită, când M'_0 tinde către M_0 (Fig. 188), dreapta $M_0M'_0$ tinde către tangenta

în M_0, a cărei ecuație este

$$y-y_0=y'_0(x-x_0),\ y'_0=f'(x_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

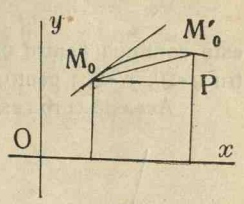


Fig. 188.

Tangenta în origină are coeficientul unghiular egal cu limita raportului $\frac{y}{x}$ când $x\to 0$.

In cazul curbei

$$y=ax^m+\ldots+bx^2+cx,$$

tangenta în origină are ecuația $y=cx$, adică grupul termenilor de gradul întâi din ecuația curbei. Pentru curba $y=\sin x$, coeficientul unghiular al tangentei în origină este

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

iar ecuația acestei tangente este $y=x$, bisectoarea întâi a axelor.

138. **Metodă pentru construirea curbei** $y=f(x)$. 1°. Se caută intervalele unde funcțiunea $f(x)$ există și este continuă. 2°. Se anulează derivata $f'(x)$ și se caută valorile pentru care derivata încetează de a fi definită sau continuă. 3°. Se caută valorile pentru care se anulează derivata. 4°. Se așează aceste valori în ordine de mărime crescătoare și se caută semnul derivatei $f'(x)$ în intervalele unde $f(x)$ și $f'(x)$ sunt finite și continue. 5°. Se caută valorile limită ale funcțiunei când x tinde către fiecare din aceste valori particulare. Așa fiind, dacă în intervalul (a,b) $f(x)$ nu e definită, curba n'are nici un punct între paralele la Oy, $x=a$, $x=b$.

In intervalele unde $f'(x)>0$, funcțiunea y (ordonata) crește, în toate punctele acestor intervale tangenta are coeficientul unghiular pozitiv. In intervalele în care $f'(x)<0$, ordonata curbei descrește, coeficientul unghiular al tangentei este negativ. Când derivata $f'(x)=0$, se anulează, corespunde un punct unde tangenta la curbă este paralelă cu Ox, cum e, de ex., în punctele unde funcțiunea este un maximum sau un minimum, derivata rămânând continuă. Când derivata este infinit de mare, în acest caz tangenta la curbă este paralelă cu Oy.

In fine, când, pentru $x=a$, y crește nemărginit, curba are un punct la infinit care se apropie de dreapta $x=a$, care se zice asimptotă la curbă.

139. **Exemple.** I. *Să se construiască curba* (chaînette=lănțișor)

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Funcțiunea y este definită și continuă pentru orice valoare a lui x. Derivata

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

este continuă pentru orice valoare a lui x şi se anulează pentru $x=0$. Pentru $x<0$, $y'<0$; pentru $x>0$, $y'>0$.

Această curbă este poziţia de echilibru a unui fir flexibil greu (Fig. 189)

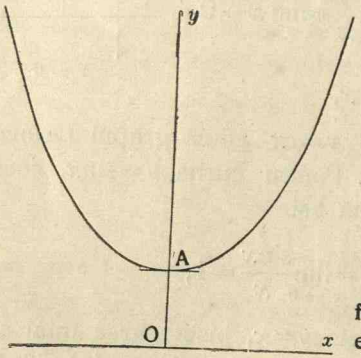


Fig. 189.

x	y'	y
$-\infty$		∞
	$-$	descr
0		a(min)
	$+$	creşte
∞		∞

fixat la cele două extremităţi. Curba este simetrică în raport cu Oy, căci punctele de abscisă x şi $-x$ au aceeaş ordonată.

II. *Să se construiască curba* $y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. Funcţiunea există dacă $\frac{a+x}{a-x}>0$, adică $-a<x<a$. Derivata fiind

$$y'=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+x\frac{2a}{2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}(a-x)^2}=\frac{-x^2+ax+a^2}{(a-x)^2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}},$$

valorile care o anulează sunt $-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. Avem tabloul şi curba alăturate (Fig. 190). Tangenta în origină este bisectoarea întâi, iar

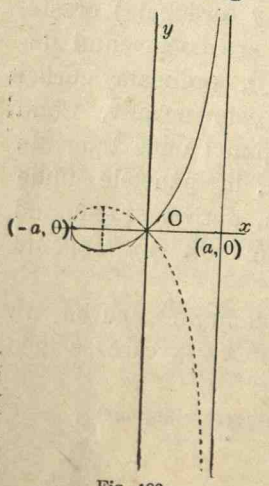


Fig. 190.

x	y'	y
$-a$	$-\infty$	0
	$-$	desc
$-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$	0	$-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}$(min)
	$+$	creşte
a		∞

tangenta în $(-a, 0)$ este perpendiculară pe Ox.

Ramura $y=-x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ este simetrica primei în raport cu Ox şi este reprezentată punctat. Ansamblul celor două ramuri,

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\quad y^2(a-x)=x^2(a+x),$$

este *strofoida dreaptă*.

Observare. Dacă ecuaţia curbei rămâne aceeaş

când schimbăm pe x cu $-x$ și y devine $-y$, curba este simetrică în raport cu origina. E destul deci, în aceste cazuri, de a da lui x valori numai între 0 și ∞ și pe urmă să construim simetrica ramurei obținute în raport cu Oy sau origina.

140. Poziția unei curbe față de tangentă. Concavitate. Fie

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

ecuația tangentei în $M_0(x_0,y_0)$ la curba $y=f(x)$. Ducând o paralelă cu Oy_0 (Fig. 191) care tae curba în P și tangenta în Q, să calculăm diferența

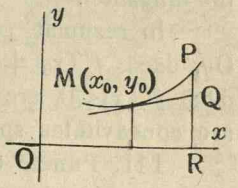


Fig 191.

$$QP=RP-RQ$$

dintre ordonatele punctelor P și Q, corespunzătoare la aceeaș abscisă x. Avem

$$u=QP=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)],\quad u=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Să studiem forma curbei în intervalul (a,b), care cuprinde punctul $M(x_0,y_0)$ Pentru aceasta, să studiem variația funcțiunei u. Avem

$$u'=f'(x)-f'(x_0),\quad u''=f''(x).$$

Avem două cazuri de considerat. Intâi, $f''(x)>0$; avem tabloul și forma curbei în intervalul (a,b) (Fig. 192). Funcțiunea u'' derivata lui u' este pozitivă în intervalul (a,b); deci u' crește în acest interval și cum se anulează pentru $x=x_0$, rezultă că intervalul (a,x_0) este negativă, iar în intervalul (x_0,b) este pozitivă. Derivata u' a funcțiunei u fund negativă în intervalul (a,x_0), u descrește în acest interval, iar u' fiind pozitivă în intervalul (x_0,b), u crește în acest interval. Cum u se anulează pentru $x=x_0$, urmează că intervalul (a,x_0) este pozitivă, descrește până la zero și apoi iar crește. Deci diferența dintre ordonatele unui punct al curbei și al tangentei, corespunzătoare la aceeaș valoare a lui x, este pozitivă,

u	u''	u'	u
a			
	+	−cr	descr.+
x_0		0	0
	+	+cr	crește+
b			

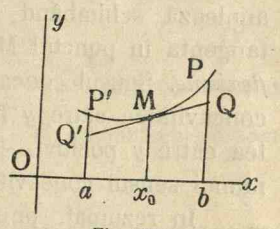


Fig. 192.

x	u''	u'	u
a			
	−	desc+	cr−
x_0		0	0
	−	desc−	desc−
b			

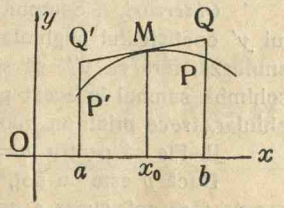


Fig. 193.

curba este deasupra tangentei, curba prezintă, cum se mai zice, concavitatea către y pozitivi.

In cazul $f''(x)<0$, avem tabloul și curba (Fig. 193). In acest caz, curba are concavitatea către y negativi, curba este dedesubtul tangentei.

In rezumat, când $f'(x)\neq\infty$, adică tangenta nu e paralelă cu Oy, dacă $f''(x_0)\neq 0$, curba este convexă în vecinătatea lui x_0; dacă $f''(x)<0$, are concavitatea spre y negativi; dacă $f''(x_0)>0$, are concavitatea spre y pozitivi.

141. **Puncte de inflexiune.** Am presupus că $f''(x)$ era diferit de zero în intervalul (a,b). Să presupunem acum că pentru o valoare x_0 în intervalul (a,b) avem $f''(x_0)=0$ și vrem să vedem ce formă are curba în vecinătatea acestui punct. Pentru aceasta, în studiul funcțiunei u, diferența dintre ordonatele unui punct al

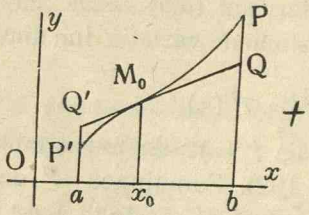


Fig. 194.

x	u'''	u''	u'	u
a				
	+	cr−	des+	crește−
x_0		0	0	0
	+	cr+	cr+	crește+
b				

curbei și a unui punct al tangentei, corespunzătoare aceleaș valori a lui x, să calculăm $u'''=f'''(x)$. Să presupunem că $f'''(x_0)\neq 0$ și că $f'''(x_0)>0$; avem tabloul și figura 194. Deci, dacă $f''(x_0)=0$, se anulează schimbând semnul trecând prin x_0, curba traversează tangenta în punctul M_0, avem, cum se mai zice, un *punct de inflexiune*. Sensul concavității îl dă $f''(x)$; între P' și M_0, $f''(x_0)<0$, concavitatea către y negativi; între M_0 și P, $f''(x)>0$, concavitatea către y pozitivi. Rezultate analoage am avea dacă $f'''(x_0)<0$, numai sensul concavității era schimbat la stânga și la dreapta lui M_0.

In rezumat, punctele de inflexiune sunt date de rădăcinile ecuații $f''(x)=0$, pentru care $f'''(x)\neq 0$ [care nu anulează pe $f'''(x)$] și pentru care $f''(x)$ se anulează schimbându-și semnul.

Observări. I. Semnul lui $f''(x)$, adică a lui y'', ne dă idee de variația lui y' coeficientul unghiular al tangentei la curba $y=f(x)$. Deci, când y'' se anulează, fără ca y''' să se anuleze, ceea ce revine a spune că y'' își schimbă semnul în acest punct, aceasta însemnează că y', coeficientul unghiular, trece printr'un maximum sau minimum.

II. Fie că pentru $x=x_0$, avem $f''(x_0)=0,\ldots f^{(p)}(x_0)=0$, $f^{(p+1)}(x_0)\neq 0$.

Dacă p este cu soț, curba are un punct de inflexiune în $x=x_0$. Dacă p este fără soț, curba e convexă în punctul x_0 și are concavitatea către y pozitivi sau negativi, după cum $f^{(p+1)}(x_0)>0$, sau $f^{(p+1)}(x_0)<0$.

Exemplu. *Să se construiască curba.*

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x^2-a^2)}{a}},\quad a>0.$$

Curba există dacă $x(x^2-a^2)>0$, $x(x-a)(x+a)>0$, adică $-a<x<0$, $x>a$ (Fig. 195). Avem

$$y'=\frac{3x^2-a^2}{4\sqrt{ax(x-a^2)}},\quad y''=\frac{3x^4-6a^2x^2-a^4}{8\sqrt{ax^3(x^2-a^2)^3}}.$$

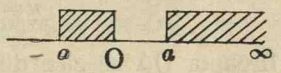


Fig. 195.

Derivata y' se anulează pentru $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, dar numai $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ este în intervalul unde funcțiunea este definită. y'' se anulează pentru valorile reale

$$x=\pm a\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

din care numai cea pozitivă trebue considerată. Avem tabloul şi curba ală-

x	y''	y'	y
$-a$		∞	0
	$-$	des+	cr
$-\frac{a}{\sqrt{3}}$		0	$\frac{a}{6}\sqrt[4]{12}$
	$-$	des−	des
		$-\infty$	0
0			
a			
		∞	0
	$-$	des +	cr
$a\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$			inflex
	+	cr+	cr
∞			∞

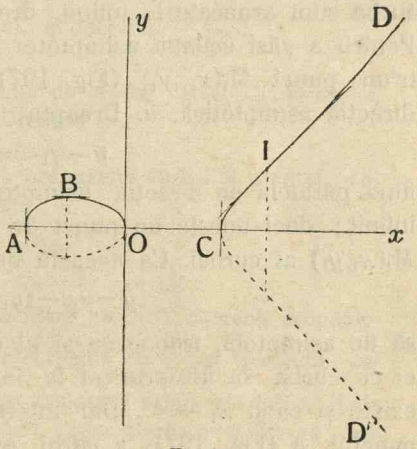


Fig. 196.

turate (Fig. 196). Tangentele în A(−a, 0), O, C(a, 0) sunt perpendiculare pe Ox, căci $y'=\infty$. y'' anulându-se pentru $a\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$ şi schimbându-şi semnul, în acest punct este o inflexiune.

Ramura $y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x^2-a^2)}{a}}$, reprezentată punctat, este simetrica primei.

142. **Ramuri infinite. Asimptote.** Când, pentru anumite valori ale lui x, corespund pentru curba $y=f(x)$ valori foarte mari pentru y curba are un punct la infinit, are ramuri infinite. Pentru a găsi direcția în care curba $y=f(x)$ are un punct la infinit, să considerăm dreapta care unește origina cu un punct oarecare $(x.y)$ al curbei, al cărei coeficient unghiular

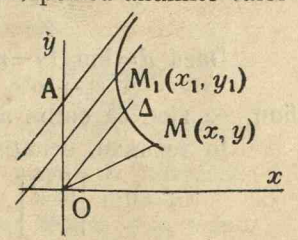


Fig. 197.

este raportul $\left(\frac{y}{x}\right)$. Când punctul $M(x,y)$ se depărtează la infinit pe curbă, dreapta OM (Fig. 197) tinde către o dreaptă $O\Delta$, al cărei coeficient unghiular este

$$u=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right].$$

Dreapta $O\Delta$ se zice direcție asimptotică a curbei $y=f(x)$, iar coeficientul unghiular al acestei direcții este dat de

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right).$$

După cum vedem, orice dreaptă paralelă cu această direcție asimptotică tae curba într'un punct aruncat la infinit.

Dacă două din punctele de intersecție ale unei drepte cu o curbă sunt aruncate la infinit, dreapta se zice asimptotă la curbă. Pentru a găsi ecuația asimptotei la curba $y=f(x)$, să ducem printr'un punct $M_1(x_1,y_1)$ (Fig. 197) al acestei curbe, o paralelă cu direcția asimptotică, u. Dreapta

$$y-y_1=u(x-x_1),$$

fiind paralelă cu disecția asimptotică, tae curba într'un punct la infinit; deci unește un punct de la infinit al curbei cu un punct $M_1(x_1,y_1)$ al curbei. Ca această dreaptă

$$y-ux-(y_1-ux_1)=0$$

să fie asimptotă, trebue ca și al doilea punct M_1 de intersecție al ei cu curba să fie aruncat la infinit, adică adeastă dreaptă să existe și când $x_1\to\infty$. Dar intersecția acestei drepte cu Oy este punctul A (Fig. 197), a cărui ordonată este (y_1-ux_1). Această dreaptă, adică asimptota, există, când

$$\lim_{x_1\to\infty}(y_1-ux_1)=\lim_{x_1\to\infty}[f(x_1)-ux_1]$$

există. Insemnând cu

$$d=\lim_{x\to\infty}(y-ux)=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ux],$$

ecuația asimptotei este

$$y=ux+d.$$

Dacă $d=\lim_{x\to\infty}(y-ux)\to\infty$, asimptota este aruncată la infinit, se zice că curba are o *ramură parabolică*.

In rezumat, ecuația asimptotelor este $y=ux+d$, unde

$$u=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right],\quad d=\lim_{x\to\infty}(y-ux)=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ux).$$

Observare. Asimptota dacă există, este tangentă în punctul de la infinit al curbei, căci ea tae curba în două puncte confundate la infinit.

Asimptote paralele cu Oy. Când pentru $x=a$, corespunde pentru curba $y=f(x)$ o valoare foarte mare pentru y, dreapta $x=a$ este o asimptotă a curbei. Deci, asimptotele paralele cu Oy, sunt date de valorile lui x pentru care $y \to \infty$.

143. Procedeu pentru găsirea directă a asimptotelor. Curbe asimptote. Să presupunem că ecuația unei curbe este de forma

$$y=\frac{f(x)}{g(x)},$$

$f(x)$ și $g(x)$ fiind două polinoame prime între ele, de gradele m și p. Dacă $m>p$, avem

$$y=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)},$$

gradul lui $R(x)$ fiind mai mic ca al lui $g(x)$, și deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{R(x)}{g(x)} \to 0$.

1°. Dacă $m \leqq p+1$, $Q(x)$ este cel mult de gradul întâi, $Q(x)=cx+d$, c și d fiind constante, care pot fi nule. Dreapta

$$y=cx+d$$

este asimptotă. In adevăr, diferența dintre ordonatele curbei și dreptei, corespunzătoare aceleaș valori ale lui x, este

$$cx+d+\frac{R(x)}{g(x)}-(cx+d)=\frac{R(x)}{g(x)},$$

și are ca limită zero pentru $x\to\infty$.

2°. Când $m>p$, construim curba auxiliară $y=Q(x)$; diferența ordonatelor punctelor curbelor $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ și $y=Q(x)$, corespunzătoare aceloraşi valori ale lui x, tinde către zero când $x\to\infty$. Curba $y=Q(x)$ se zice *curbă asimptotă* curbei date.

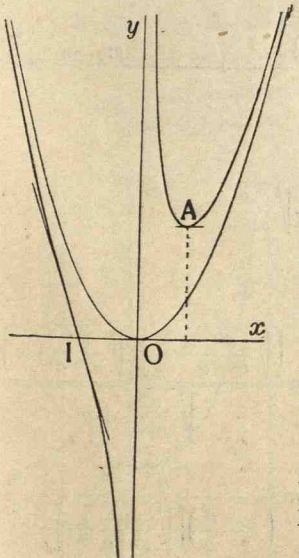


Fig. 198.

Exemplu. $y=\frac{x^3+a^3}{ax}$, $y=\frac{x^2}{a}+\frac{a^2}{x}$, are parabola $y=\frac{x^2}{a}$ curbă asimptotă (Fig. 198) și mai are asimptota $x=0$, adică axa Oy. Punctul $I(-a, 0)$, unde tae Ox, este un punct de inflexiune.

144. **Exemple. 1°.** *Să se construiască curba*

$$y=\frac{2a(x^2-ax+a^2)}{(x-a)^2}.$$

Avem

$$y'=\frac{-2(x+a)a^2}{(x-a)^3},\quad y''=\frac{4(x+2a)a^2}{(x-a)^4}.$$

Avem tabloul și curba (Fig. 199). In punctul $I(-2a, \frac{14}{9}a)$ este un punct de inflexiune; $A\left(-a, \frac{3}{2}a\right)$ un minimum; dreapta $x=a$, este o

asimptotă, iar dreapta $y=2a$ este asimptotă, căci $y=2a$, $x=\infty$.

x	y''	y'	y
$-\infty$		0	$2a$
	$-$	des$-$	des
$-2a$	0	$-\frac{2}{27}$	$\frac{14}{9}a$(inflex).
	$+$	cr$-$	des
$-a$		0	$\frac{3}{2}a$(min)
	$+$	cr$+$	cr
0		2	$2a$
	$+$	cr$+$	cr
a		∞	∞
		$-\infty$	∞
	$+$	cr$-$	des
∞		0	$2a$

2°. *Să se construiască curba.*

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}.$$

Avem

$$y'=\frac{2x-3a}{2}\sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}},\quad y''=\frac{3a^2}{2\sqrt{x(x-a)^5}}.$$

Curba există, dacă $x(x-a)>0$, $x<0$, $x>a$. Dreapta $x=a$ este asimptotă (Fig. 200). De oarece pentru $x=\pm\infty$, $y=\infty$, curba are alte ramuri infinite. Direcția asimptotică corespunzătoare pentru $x=\infty$, e dată de

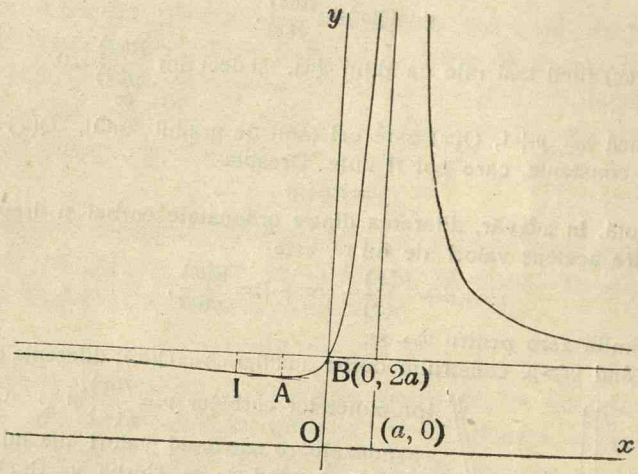


Fig. 199.

$$u=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-a}}\to 1.$$

Asimptota este dreapta

unde $$y=ux+d,\quad y=x+d,$$

$$d=\lim(y-ux)=\lim(y-x)=\lim\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x},$$

$$d=\lim\frac{\frac{x^3}{x-a}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x}=\lim\frac{ax^2}{(x-a)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x\right)}=\lim\frac{a}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-a}}+1\right)}=\frac{a}{2}.$$

Asimptota este $y=x+\frac{a}{2}$.

x	y''	y'	y
$-\infty$			∞
	$+$	$-$	des
0		0	0
a			∞
	$+$	$-$	des
$\frac{3a}{2}$		0	$\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ (min)
	$+$	$+$	cr
∞			∞

De asemenea, $y=\infty$, când $x=-a$. Făcând aceleaşi operaţiuni şi pentru $x=-\infty$, rezultă că cealaltă asimptotă este

$$y=-x-\frac{a}{2}.$$

Avem tabloul şi curba alăturată (Fig. 200).

Ramura $y=-\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ este trasă punctat. Origina este un punct pe unde trec două ramuri ale curbei $y^2=\frac{x^3}{x-a}$, este un punct dublu,

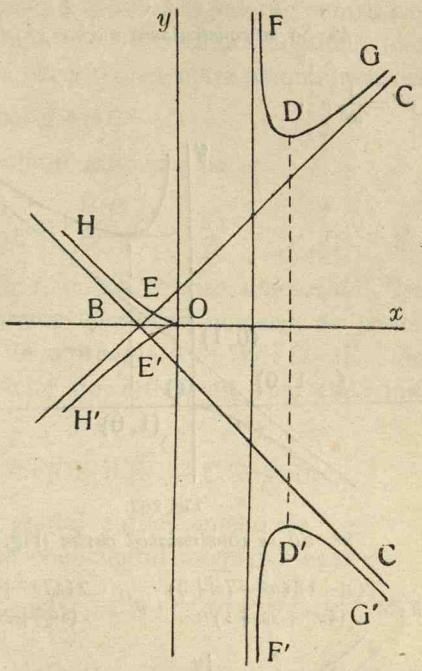


Fig. 200.

ramurile ce trec prin acest *punct de întoarcere* au ca tangentă pe Ox, căci pentru $x=0$, $y'=0$.

3⁰. *Să se construiască curbele* $y=\frac{3x^2-4}{(x-2)^2(x+1)}$ (Fig. 201); $y=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$ (Fig. 202). Avem respectiv

$$y'=\frac{-3x^2(x+2)}{(x-2)^3(x+1)^2};\quad y'=\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}},\quad y''=\frac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^5}}$$

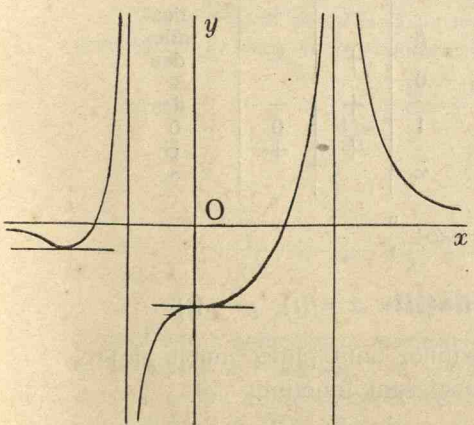


Fig. 201.

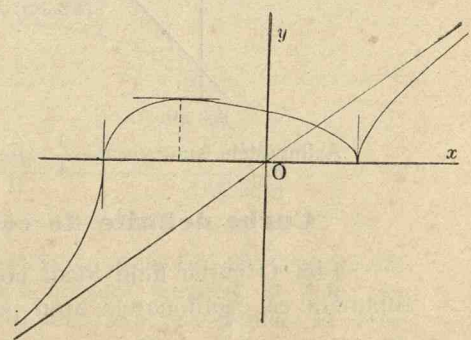
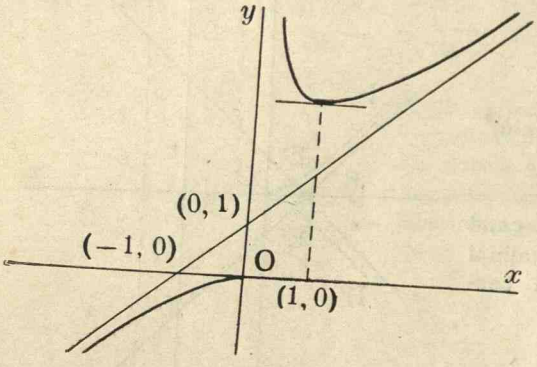


Fig. 202.

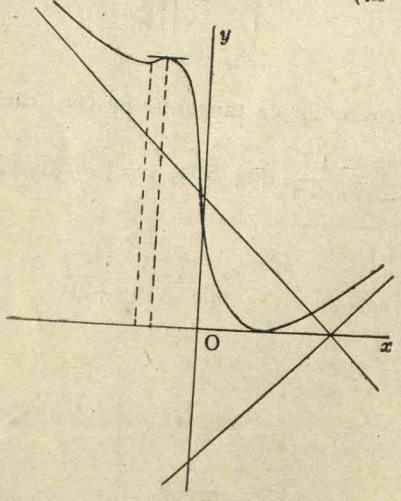
4°. *Să se construiască curba* $y=xe^{\frac{1}{x}}$ (Fig. 203). Avem $y'=e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x}$, $y''=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.



x	y''	y'	y
$-\infty$		1	$-\infty$
	−	+	cr
$-\epsilon$		0	0
$+\epsilon$		∞	∞
	+	−	des
1		0	min
	+	+	cr
∞		1	∞

Fig. 203.

5°. *Să se construiască curba* (Fig. 204) $y=\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$. Avem $y'=\frac{2(x-1)(4x^2+7x+3)}{(4x^2+2x+1)^{3/2}}$, $y''=\frac{2(47x^2+45x+5)}{(4x^2+2x+1)^{5/2}}=\frac{2.47(x-\alpha)(x-\beta)}{(4x^2+2x+1)^{5/2}}$.



x	y''	y'	y
			∞
$-\infty$			
	+	−	des
-1		0	$\frac{8}{3}$ (min)
	+	+	cr
α			inflex
	−	+	cr
$-\frac{3}{4}$		0	$\frac{7\sqrt{7}}{4}$ (Max)
	−	−	des
β			inflex
	+	−	des
0			2
	+	−	des
1		0	0
	+	+	cr
∞			∞

Fig. 204.

Asimptotele sunt $y=x-\frac{9}{4}$, $y=-x+\frac{9}{4}$.

Curbe definite de ecuațiile $x=f(t)$, $y=g(t)$.

145. O curbă fiind locul pozițiilor unui punct mobil, să presupunem că coordonatele unui punct sunt funcțiuni

$$x=f(t),\ y=g(t),$$

de un parametru variabil (t). Făcând pe t să ia valorile pentru care funcțiunile $f(t)$ și $g(t)$ există și unind cu o trăsătură continuă toate aceste puncte, avem o curbă a cărei reprezentare parametrică este

$$x=f(t),\ y=g(t).$$

Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sunt funcțiuni raționale de t,

$$x=\frac{F(t)}{G(t)},\ y=\frac{H(t)}{G(t)},$$

$F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ fiind polinoame de t, curba se zice *unicursală*. Gradul unei curbe unicursale se obține cercetând numărul de puncte în care această curbă e tăiată de o dreaptă $Ax+By+C=0$. Valorile lui t corespunzătoare punctelor de intersecție sunt rădăcinile ecuației în t,

$$A\frac{F(t)}{G(t)}+B\frac{H(t)}{G(t)}+C=0,\ A.F(t)+B.H(t)+C.G(t)=0.$$

Gradul acestei ecuații în t este gradul curbei unicursale.

Tangenta într'un punct are coeficientul unghiular egal cu

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Pentru a construi o curbă definită parametric, se studiază variațiile funcțiunilor $x=f(t)$, $y=g(t)$, în intervalele unde ambele există. Punctele unde $g'(t)=0$, $f'(t)\neq 0$, $m=0$, tangenta la curbă e paralelă cu Ox; unde $f'(t)=0$, $g'(t)\neq 0$, $m\to\infty$, tangenta la curbă e paralelă cu Oy.

Exemplu. Să se construiască cicloida, descrisă de un punct al unui cerc, care se rostogolește fără să alunece, pe o dreaptă fixă, ale cărei ecuații parametrice sunt

$$x=R(t-\sin t),\ y=R(1-\cos t).$$

Fie ω centrul cercului la un moment dat, A punctul de contact cu dreapta Ox pe care se rostogolește (Fig. 205). Fie M un punct însemnat al

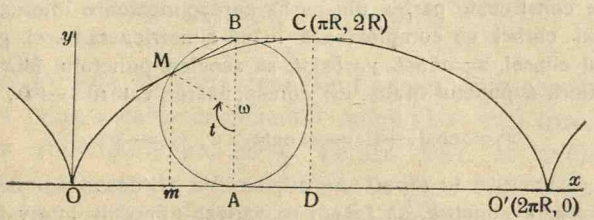


Fig 205.

cercului care a coincidat la momentul inițial cu punctul O; deci OA=arc AM. Să însemnăm cu t unghiul $A\omega M$, măsurat în sens retrograd. R fiind raza cercului, pentru a găsi coordonatele unui punct $M(x, y)$ al cicloidei, să proectăm conturul $OA\omega MO$ ortogonal pe Ox. Avem $prOM=prOA+prA\omega+pr\omega M$

Dar $\text{pr}_{OM}=x$, $\text{pr}_{OA}=OA=Rt$, $\text{pr}_{A\omega}=0$; $\text{pr}_{\omega M}=\omega M\cos(\omega M, Ox)=R\cos(\omega M, Ox)$. Insă, după teorema lui Chasles, avem $(\omega M, \omega A)+(\omega A, Ox)+(Ox, \omega M)=2\pi$; deci afară de un multiplu de 2π, avem $(\omega M, Ox)=(\omega M, \omega A)+(\omega A, Ox)=t+\frac{\pi}{2}$; deci, $\text{pr}_{\omega M}=R\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-R\sin t$. Aşa dar,

$$x=Rt-R\sin t,\quad x=R(t-\sin t).$$

Să proectăm ortogonal acelaş contur pe Oy. Avem $\text{pr}_{OM}=y$, $\text{pr}_{OA}=0$, $\text{pr}_{A\omega}=R$, $\text{pr}_{\omega M}=\omega M\cos(\omega M, Oy)=R\cos(\omega M, Oy)$. Dar, $(\omega M, Oy)=(\omega M, \omega A)+(\omega A, Oy)=t+\pi$, deci

$$y=R-R\cos t,\quad y=R(1-\cos t).$$

Aşa dar coordonatele unui punct al cicloidei sunt

$$x=R(t-\sin t),\quad y=R(1-\cos t).$$

Dacă se schimbă t în $(2\pi+t)$, y nu se schimbă, iar x se schimbă în $x+2R\pi$. Deci curba se compune dintr'o infinitate de arce egale, care se deduc unele din altele cu o translaţie paralelă cu Ox şi egală cu $2\pi R$ (Fig. 205).

Pentru a construi unul din aceste arce, acela de la O la O', vom face să varieze t de la 0 la 2π şi vom studia variaţiile lui x şi y. Avem

t	x'	x	y'	y
0	0	0	0	0
	+	cr	+	cr
π	2R	πR	0	2R
	+	cr	−	des
2π	0	2πR	0	0

$x'=R(1-\cos t)$, $y'=R\sin t$; $m=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$.

Ecuaţia tangentei într'un punct este

$$y-R(1-\cos t)=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}[x-R(t-\sin t)]$$

Se vede că trece prin punctul $B(Rt, 2R)$ şi deci, tangenta într'un punct al cicloidei trece prin punctul diametral opus punctului de contact corespunzător al cercului variabil cu dreapta fixă $y=2R$.

Observări asupra simetrii. Ecuaţiile curbei fiind $x=f(t)$, $y=g(t)$, dacă se poate asocia la fiecare valoare a parametrului t, o valoare t', astfel că $f(t')=-f(t)$, $g(t')=g(t)$, la orice punct $M(x, y)$ corespunde punctul $M(-x, y)$, curba e simetrică în raport cu Oy. Dacă $f(t')=f(t)$, $g(t')=-g(t)$, curba e simetrică în raport cu Ox. Dacă $f(t')=-f(t)$, $g(t')=-g(t)$, curba e simetrică în raport cu origina.

In toate aceste cazuri putem micşora intervalul în care trebue să varieze t şi se construeşte partea din curbă corespunzătoare intervalului micşorat; restul curbei se complectează luând simetrica ramurei găsite. De ex., în cazul elipsei, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, să asociem punctului $M(x, y)$ corespunzător valorii t, punctul $M_1(x_1, y_1)$ corespunzător valorii $(\pi+t)$; avem

$$x_1=a\cos(\pi+t)=-a\cos t=-x,\quad y_1=-y;$$

deci curba e simetrică în raport cu origina. Va fi de ajuns. deci, ţinând seama de această simetrie, să facem să varieze t într'un interval oarecare egal cu π. Să asociem punctului $M(x, y)$ corespunzător valorii t, punctul $M_2(x_2, y_2)$, valorii $-t$. Avem $x_2=a\cos(-t)=a\cos t=x$, $y_2=b\sin(-t)=-b\sin t=-y$. Deci, curba e simetrică în raport cu Ox şi prin urmare facem să varieze t de la 0 la $\frac{\pi}{2}$. In fine, să asociem punctului $M(x, y)$, corespunzător valorii t,

punctul $M_3(x_3, y_3)$, corespunzător valorii $(\pi - t)$; avem $x_3 = a\cos(\pi - t) = -x$, $y_3 = y$ şi curba e simetrică în rapot cu Oy. Dar aceasta nu permite a micşora intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, căci valorile t, $\pi - t$ nu pot fi plasate amândouă în acest interval. Rămâne, deci, că trebue a construi curba în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi pe urmă a lua simetricele acestei ramuri în raport cu Ox, Oy.

146. **Concavitate.** Dacă tangenta într'un punct M al unei curbe nu este paralelă cu Oy, se poate considera, în vecinătatea punctului M, ordonata punctului M funcţiune continuă de x In caz când curba are concavitatea către y pozitivi (Fig. 206), $y'' = m' > 0$, coeficientul unghiular m al tangentei creşte ca şi abscisa punctului, variază în acelaş sens ca şi abscisa punctului. Dacă curba are concavitatea spre y negativi, $y'' = m' < 0$, coeficientul unghiular m descreşte pe când abscisa creşte, deci variază în sens contrar cu abscisa punctului. Deci, în caz când tangenta nu este paralelă cu Oy, curba prezintă concavitatea către y pozitivi sau negativi, după cum coeficientul unghiular al tangentei, m, variază în acelaş sens sau în sens contrar cu abscisa punctului.

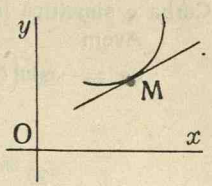


Fig. 206.

Variaţia coeficientului unghiular $m = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ este dată de $m'(t)$, iar aceea a abscisei $x = f(t)$, de $f'(t)$. Deci, dacă $m'(t)$ şi $f'(t)$ au acelaş semn, m şi x variază în acelaş sens, curba întoarce concavitatea către y pozitivi; dacă $m'(t)$ şi $f'(t)$ au semne contrare, m şi x variază în sens contrar, curba are concavitatea către y negativi.

Când tangenta este paralelă cu Oy, trebue căutat dacă curba întoarce concavitatea către Ox sau Ox'. In acest caz studiem semnul expresiilor $n'(t)$ şi $g'(t)$, deduse din

$$m(t) = \frac{x_t'}{y_t'}, \quad y(t) = g(t).$$

147. **Puncte de inflexiune** sunt acelea corespunzătoare valorilor lui t pentru care coeficientul unghiular $m(t)$ trece printr'un maximum sau minimum, adică pentru care se anulează $m'(t)$ schimbându-şi semnul. Punctele de inflexiune unde tangenta e paralelă cu Oy, se studiază la fel, schimbând rolul lui x cu al lui y, înlocuind pe $m = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ cu $n(t) = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ şi se văd valorile pentru care $n'(t)$ se anulează schimbând semnul.

Observare. Se poate ca pentru unele valori care anulează pe

$m'(t)$ să devie infinită una din coordonate, x sau y. Aceste valori nu trebue considerate, căci nu corespund la nici un punct la distanță finită a curbei.

Exemplu. Să se construiască curba $x=a\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$, $y=b\sin 2t$. Vom face pe t să varieze de la 0 la 2π. Shimbând pe t în $(\pi+t)$, avem punctul

$$x_1=a\cos\left(t+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-a\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=-x,\ y_1=y.$$

Curba e simetrică în raport cu Oy; vom face pe t să varieze de la 0 la π. Avem

$$x'=-a\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\ y'=2b\cos 2t,\ m(t)=\frac{y'}{x'}=\frac{-2b}{a}\frac{\cos 2t}{\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)},$$

$$m'(t)=\frac{2b}{a}\frac{2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\sin 2t+\cos 2t\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$\frac{b}{a}\frac{3\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Semnul acestei expresiuni e dat de

$$z=3\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right).$$

Derivata sa este

$$z'=-3\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\cos 2t,$$

si se anulează pentru valorile care anulează pe $\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos 2t$ adică, respectiv, $t+\frac{\pi}{3}=\pi$, $2t=\frac{\pi}{2}$, $2t=\frac{3\pi}{2}$, de unde $t_1=\frac{2\pi}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{4}$, $t_3=\frac{3\pi}{4}$.

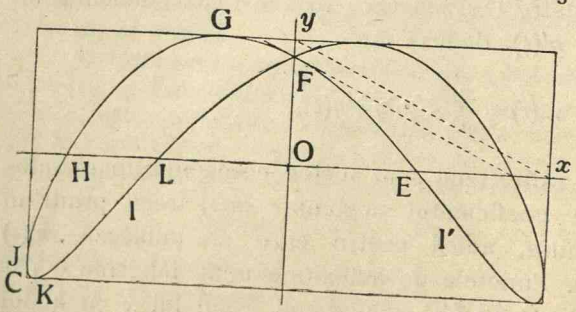


Fig. 207.

t	z'	z
0		1
	+	cr
$\frac{\pi}{4}$	0	
	−	des
$\frac{2\pi}{3}$	0	1
	+	cr
$\frac{3\pi}{4}$	0	
	−	des
π		−1

Calculând semnele lui z' în intervalele de mai sus, putem face tabloul alăturat și de oarece z este funcțiune continuă, rezultă că se anulează pentru o valoare α cuprinsă între $\frac{3\pi}{4}$ și π. Se vede de asemenea că z este

pozitiv în intervalul $(0, a)$, negativ de la a la π, că $m'(t)$ se anulează, schimbând semnul, pentru $t=a$, unde este punct de inflexiune.

Putem deci face tabloul alăturat. În intervalul $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, $x'<0$, $m'>0$

t	m'	x'	x	y'	y	Puncte
			$\frac{a}{2}$		0	E
0					cr	
	+	−	des	+		
$\frac{\pi}{6}$			0		$\frac{b\sqrt{3}}{2}$	F
	+	−	des	+	cr	
$\frac{\pi}{4}$			$-a\sin\frac{\pi}{12}$	0	b	G
	+	−	des	−	des	
$\frac{\pi}{2}$			$-\frac{a\sqrt{3}}{2}$		0	H
	+	−	des	−	des	
$\frac{2\pi}{3}$		0	$-a$		$-\frac{b\sqrt{3}}{2}$	J
	+	+	cr	−	des	
$\frac{3\pi}{4}$			$-a\cos\frac{\pi}{12}$	0	$-b$	K
	+	+	cr	+	cr	
a					inflex	I
	−	+	cr	+	cr	
π			$-\frac{a}{2}$		0	L

concavitatea către Oy'; în intervalul $\left(\frac{2\pi}{3}, a\right)$, concavitatea către Oy; între a şi π, concavitatatea către Oy'. Punctul de inflexiune este pentru $t=a$.

Avem curba alăturată (Fig. 207). Partea punctată corespunde valorilor lui t de la π la 2π. Punctul dublu este $F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

148. **Ramuri infinite. Asimptote.** Când pentru $t=t_1$ una din coordonate, de ex., y devine infinit, iar $x=a$, atunci $x=a$ este o asimptotă paralelă cu Oy. Astfel se determină asimptotele paralele cu axele.

Să presupunem că ambele coordonate tind către infinit pentru $t=t_1$. Coeficientul unghiular al asimptotei este dat de

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to t_1}\frac{g(t)}{f(t)}.$$

Dacă această limită este zero sau infinit, direcţia asimptotică este paralelă cu Ox sau Oy. Dar cum x şi y cresc amândouă la infinit, asimptota paralelă cu Ox sau Oy este aruncată la infinit, curba are o ramură parabolică în direcţia uneia din axe.

Să presupunem că $\lim\frac{g(t)}{f(t)}=u$; direcţia asimptotică are coe-

ficientul unghiular u. Ordonata d la origină a asimptotei

$$y=ux+d$$

e dată de

$$d=\lim_{x\to\infty}(y-ux)=\lim_{t\to t_1}[g(t)-uf(t)].$$

Poziţia curbei faţă de asimptotă o dă diferenţa

$$y-ux-d=g(t)-uf(t)=d,$$

când t tinde către t_1, care fac pe x şi y infiniţi.

Exemple. 1° *Să se construiască curba*

$$x=2a\frac{t^3}{(t-3)^2(t-1)},\quad y=a\frac{t^2}{t-1}.$$

Avem

$$x'=2a\frac{t^2(9-7t)}{(t-3)^3(t-1)^2},\quad y'=a\frac{t(t-2)}{(t-1)^2},$$

$$m=\frac{(t-2)(t-3)^3}{2t^2(9-7t)},\quad m'=\frac{-14t^3+20t^2+48t-54}{2t^2(9-7t)^2}.$$

Semnul lui m' depinde de $(t-1)(-7t^2+3t+27)=-7(t-1)(t-\alpha)(t-\beta)$,

$$\alpha=\frac{3-3\sqrt{85}}{14},\quad \beta=\frac{3+3\sqrt{85}}{14}.$$

Asimptota paralelă cu Oy corespunde lui $t=3$, de unde $x=\infty$, $y=\frac{9a}{2}$; cea paralelă cu Ox, corespunde lui $t=\infty$, când $y=\infty$, $x=2a$.

Pentru $t=1$, $x=\infty$, $y=\infty$. Avem $\lim_{t=1}\frac{y}{x}=\lim_{t=1}\frac{(t-3)^2}{2t}=2$;

$$\lim(y-2x)=\lim at^2\frac{(t-3)^2-4t}{(t-3)^2(t-1)}=\lim_{t=1}at^2\frac{t-9}{(t-3)^2}=-2a.$$

Ecuaţia asimptotei este $y=2x-2a$. Poziţia curbei faţă de asimptotă e dată de semnul expresiunei

$$y-2x+2a=\frac{at^2(t-9)}{(t-3)^2}+2a=\frac{a(t-1)(t^2-6t-18)}{(t-3)^2}.$$

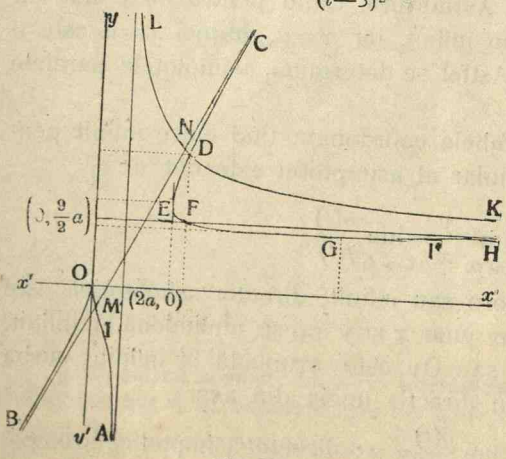


Fig. 208.

Când $t\to 1$, factorul $\frac{t^2-6t-18}{(t-3)^2}\to-\frac{23a}{4}$; diferenţa este de semn contrar lui $(t-1)$. Pentru $t>1$, este negativă, CE (Fig. 208) este dedesubt; pentru $t<1$, diferenţa este pozitivă, OB este deasupra asimptotei.

m' şi x' sunt de acelaş semn în intervalele $(\alpha, 1)$, $\left(\frac{9}{7}, \beta\right)$, $(3, \infty)$ şi de semn contrar în intervalele $(-\infty, \alpha)$, $\left(1, \frac{9}{7}\right)$, $(\beta, 3)$, când concavi-

tatea este respectiv către y negativi și y pozitivi. Puncte de inflexiune sunt $I(t=\alpha)$, $I'(t=\beta)$, unde m' se anulează schimbându-și semnul. Arcele AI, CE, I'H au concavitatea către Oy'; IO, OB, EHI', KL, către Oy.

$y-2x+2a$ se anulează pentru $t=3(1\pm\sqrt{3})$ care corespund punctelor de intersecție M și N ale curbei cu asimptota.

Punctul dublu este în punctul D unde se tae două ramuri ale curbei. Pentru a găsi punctele duble, să însemnăm cu t' și t'' valorile lui t pentru care corespunde același punct, adică

$$\frac{2t'^3}{(t'-3)^2(t'-1)}=\frac{2t''^3}{(t''-3)^2(t''-1)},\quad \frac{t'^2}{t'-1}=\frac{t''^2}{t''-1}.$$

Să găsim valorile lui t' și t'' care satisfac acestor ecuații. Aducându-le la forma întreagă, avem (înlăturând soluția $t'=t''$, deci presupunând $t'\neq t''$),

$$7t'^2t''^2-15t't''(t'+t'')+9(t'^2+t't''+t''^2)=0,$$
$$t't''=t'+t''.$$

Înlocuind $t't''$ cu $(t'+t'')$, avem

$$(t'+t'')^2-9(t'+t'')=0;$$
$$t't''=t'+t''=0,$$
$$t't''=t''+t''=9$$

Prima $t'=t''=0$, corespunde originei, unde cele două ramuri sunt tangente între ele; avem un punct de întoarcere. A doua, corespunde lui t dat de ecuația

t	m'	x'	x	y'	y	Puncte
$-\infty$			$2a$		∞	A
	$+$	$-$	des	$+$	cr	
α	0 inf					I
	$-$	$-$	des	$+$	cr	
0		0	0	0	0	O
	$-$	$-$	des	$-$	des	
1	0		$\frac{-\infty}{\infty}$		$\frac{-\infty}{\infty}$	B / C
	$+$	$-$	des	$-$	des	
$\frac{9}{7}$		0	$\frac{81}{16}a$		$\frac{81a}{14}$	E
	$+$	$+$	cr	$-$	des	
2			$16a$	0	$4a$	G
	$+$	$+$	cr	$+$	cr	
β	0 inf					I'
	$-$	$+$	cr	$+$	cr	
3			$\frac{\infty}{\infty}$		$\frac{9a}{2}$	H / K
	$-$	$-$	des	$+$	cr	
∞			$2a$		∞	L

(1) $$t^2-9t+9=0,\ t',t''=\frac{9\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

Coordonatele punctului dublu D se obțin înlocuind de t cu $\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$, ceeace se poate obține scriind ecuația (1) sub formele

$$(t-3)^2=3t,\ t^2=9(t-1),$$

de unde $x=2a\frac{1}{3}\ 9=6a,\ y=9a.$

2°. *Să se construiască curba* $x=\frac{t^3}{(t-1)(t+2)}, y=\frac{t^2-2t}{t-1}$. Avem

$$x'=\frac{t^2(t^2+2t-6)}{(t-1)^2(t+2)^2},\ y'=\frac{t^2-2t+2}{(t-1)^2},\ m=\frac{(t^2-2t+2)(t+2)^2}{(t^2+2t-6)t^2};$$

x' se anulează pentru t_1 și t_2. Asimptota paralelă cu Ox este dată de $t=-2$,

$x=\infty$, $y=-\frac{8}{3}$. Pentru $t=\pm\infty$, $y=x$, a doua asimptotă; pentru $t=1$, $y+3x=\frac{8}{3}$. Poziția față de asimptotă o dă diferența dintre ordonata curbei și asimptotei (Fig. 209),

$$y+3x-\frac{8}{3}=\frac{t^2-2t}{t-1}+3\frac{t^3}{(t-1)(t+2)}-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}(t-1)\frac{3t+4}{t+2}.$$

Semnul îl dă $(t-1)$, căci $\frac{3t+4}{t+2}\to\frac{7}{3}$. Când $t<1$, diferența este negativă, curba este dedesubt; când $t>1$, curba e deasupra. Curba tae asimptota când diferența este zero, adică $t=-\frac{4}{3}$ (*nu* și în cazul corespunzător asimptotei $t=1$).

Punctul dublu este pentru $t'=\sqrt{2}$, $t''=-\sqrt{2}$; $x=2$, $y=-2$. Valorile lui t pentru formarea tabloului sunt $-\infty$, t_1, -2, 0, 1, t_2, 2, ∞, pentru care x și y sunt respectiv, $-\infty$, cr, max, des, $\frac{-\infty}{\infty}$, des, 0, des, $\frac{-\infty}{\infty}$, des, min, cr, 2, cr, ∞; $-\infty$, cr, $-\frac{8}{3}$, 0, $\frac{\infty}{-\infty}$, cr, 0, ∞.

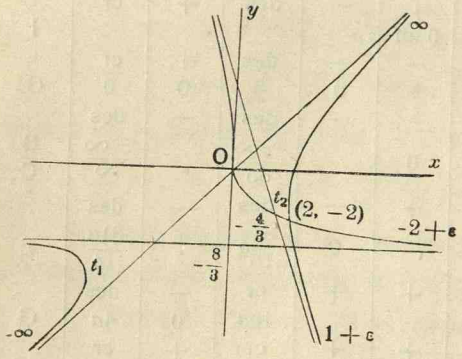


Fig. 209.

3°. *Să se construiască curba* (Fig. 210)

$$x=\frac{at^2}{t^2-2t+2},\quad y=\frac{at^3}{t^2-2t+2}.$$

Avem

$$x'=\frac{2at(2-t)}{(t^2-2t+2)^2},\quad y'=\frac{at^2(t^2-4t+6)}{(t^2-2t+2)^2},$$

$$m=\frac{t(t^2-4t+6)}{2(2-t)},\quad m'=\frac{-(t-3)(t^2-2t+2)}{(2-t)^2}.$$

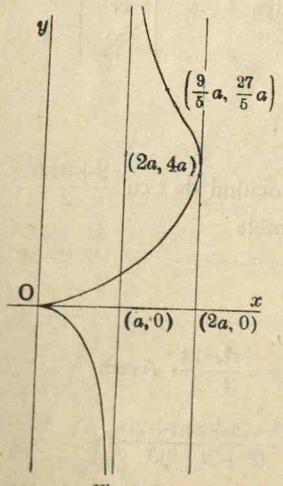


Fig. 210.

t	m'	x'	x	y'	y
$-\infty$			a		$-\infty$
	$+$	$-$	des	$+$	cr
0		0	0		0
	$+$	$+$	cr	$+$	cr
2		0	$2a$		$4a$
	$+$	$-$	des	$+$	cr
3	0		$\frac{9a}{5}$		$\frac{27a}{5}$
	$-$	$-$	des	$+$	cr
∞			a		∞

4°. *Să se construiască curba* (Fig. 211). $x=\frac{t}{(t-1)(t+1)}$, $y=\frac{t-2}{(t-1)(t+2)}$.

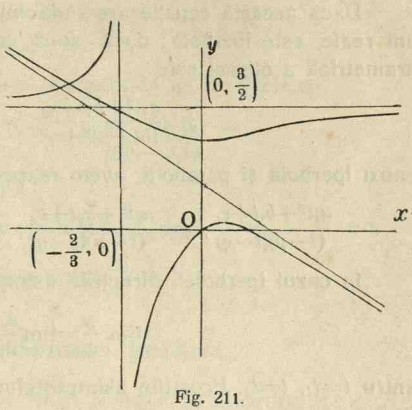


Fig. 211.

Asimptota este $y+\frac{2}{3}x=\frac{11}{18}$. Avem

$x'=\frac{-(t^2+1)}{(t-1)^2(t+1)^2}$, $y'=\frac{-t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2}$.

Puncte duble, $x=\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}$,

$y=\frac{-1}{3(t-1)}+\frac{4}{3(t+2)}$; $\frac{1}{t_1t_2-(t_1+t_2)+1}$

$+\frac{1}{t_1t_2+(t_1+t_2)+1}=0$, $\frac{4}{t_1t_2+2(t_1+t_2)+4}$

$-\frac{1}{t_1t_2-(t_1+t_2)+1}=0$; $t_1t_2+1=0$, $t_1+t_2=-\frac{1}{2}$; $t^2+\frac{1}{2}t-1=0$; $x=-\frac{2t}{t}=-2$,

$y=\frac{2(t-2)}{t-2}=2$.

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		4		∞
x'		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x	0	des	$-\frac{2}{3}$	des	$\frac{-\infty}{\infty}$	des	0	des	$\frac{-\infty}{\infty}$	des	$\frac{2}{3}$	des	$\frac{4}{15}$	des	0
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	des	$\frac{-\infty}{\infty}$	des	$\frac{2}{3}$	des	1	cr	$\frac{+\infty}{-\infty}$	cr	0	cr	$\frac{1}{9}$	des	0

149. Reprezentarea parametrică a conicelor. Să considerăm curba a cărei reprezentare parametrică este

$$x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{a_3t^2+b_3t+c_3},\quad y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{a_3t^2+b_3t+c_3}.$$

O dreaptă $Ax+By+C=0$ tae această curbă în punctele cărora le corespund valorile lui t date de ecuația

$$A\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{a_3t^2+b_3t+c_3}+B\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{a_3t^2+b_3t+c_3}+C=0,$$

sau

$$(Aa_1+Ba_2+Ca_3)t^2+(Ab_1+Bb_2+Cb_3)t+Ac_1+Bc_2+Cc_3=0.$$

Această ecuație fiind de gradul al doilea în t, ne dă două valori pentru t, deci două puncte de intersecție ale dreptei cu curba. Această curbă fiind tăiată de orice dreaptă în două puncte, este o conică. Aceasta este reprezentarea parametrică a conicelor.

1°. Presupunând $a_3\neq0$, $b_3\neq0$, direcțiile asimptotice sunt date de

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{a_1t^2+b_1t+c_1},$$

pentru valorile t_1 și t_2 ale lui t rădăcinile ecuației

$$a_3t^2+b_3t+c_3=0.$$

Dacă această ecuație are rădăcini imaginare, conica este elipsă; dacă sunt reale, este iperbolă; dacă sunt confundate, parabolă. Reprezentarea parametrică a elipsei este

$$x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{(at+\beta)^2+\gamma^2},\ y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{(at+\beta)^2+\gamma^2};$$

pentru iperbolă și parabolă, avem respectiv

$$x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{(t-p)(t-q)},\ y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{(t-p)(t-q)};\ x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{(mt+n)^2},\ y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{(mt+n)^2}.$$

In cazul iperbolei, direcțiile asimptotice u_1 u_2 sunt date, de limita

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{a_1t^2+b_1t+c_1},$$

pentru $t=t_1$, $t=t_2$. Ecuațiile asimptotelor sunt $y=u_1x+d_1$, $y=u_2x+d_2$, unde

$$d_1=\lim_{t=t_1}(y-u_1x)=\lim\frac{a_2t^2+b_2t+c_2-u_1(a_1t^2+b_1t+c_1)}{a_3t^2+b_3t+c_3},$$

$$d_1=\lim\frac{1}{a_3t^2+b_3t+c_3}\left[(a_2t^2+b_2t+c_2-\frac{a_2t_1^2+b_2t_1+c_2}{a_1t_1^2+b_1t_1+c_1}(a_1t^2+b_1t+c_1)\right],$$

$$d_1=\lim\frac{1}{a_3(t-t_1)(t-t_2)}\frac{(a_2b_1-b_2a_1)tt_1(t-t_1)+(a_2c_1-a_1c_2)(t+t_1)(t-t_1)+(b_2c_1-b_1c_2)(t-t_1)}{a_1t_1^2+b_1t_1+c_1},$$

$$d_1=\frac{(a_2b_1-a_1b_2)t_1^2+(a_2c_1-a_1c_2)2t_1+b_2c_1-b_1c_2}{a_3(t_1-t_2)(a_1t_1^2+b_1t_1+c_1)},$$

$$d_2=\frac{(a_2b_1-a_1b_2)t_2^2+2t_2(a_2c_1-a_1c_2)+b_2c_1-b_1c_2}{a_3(t_2-t_1)(a_1t_2^2+b_1t_2+c_1)}.$$

In cazul parabolei

$$x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{(t-t_0)^2},\ y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{(t-t_0)^2},$$

direcția asimptotică este

$$u=\frac{a_2t_0^2+b_2t_0+c_2}{a_1t_0^2+b_1t_0+c_1},$$

iar ordonata la origină a asimptotei este

$$d=\lim_{t=t_0}(y-ux)=\lim\frac{(a_2b_1-a_1b_2)t_0^2+2(a_2c_1-a_1c_2)t_0+(b_2c_1-b_1c_2)}{(t-t_0)(a_1t_0^2+b_1t_0+c_1)}\to\infty,$$

deci asimptota este aruncată la infinit.

2°. Când $a_3=0$, ecuațiile parametrice sunt

$$x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{t-a},\ y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{t-a}$$

și conica nu poate fi elipsă. Direcțiile asimptotice corespund lui $t\to\infty$ și $t=a$, și sunt egale cu

$$u_1=\frac{a_2}{a_1},\ u_2=\frac{a_2a^2+b_2a+c_2}{a_1a^2+b_1a+c_1},$$

iar ordonatele la origină ale asimptotelor sunt

$$a_1b_2-a_2b_1,\ \frac{(a_2b_1-b_2a_1)a^2+2(a_2c_1-a_1c_2)a+(b_2c_1-b_1c_2)}{a_1a^2+b_1a+c_1}.$$

Ca să fie parabolă, trebue ca direcţiile asimptotice să fie aceleaşi,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2a^2+b_2a+c_2}{a_1a^2+b_1a+c_1},\quad a=-\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}.$$

3°. Când ecuaţiile sunt de forma

$$x=a_1t^2+b_1t+c_1,\quad y=a_2t^2+b_2t+c_2,$$

curba este o parabolă cu direcţia asimptotică $\frac{a_2}{a_1}$.

Curbe în coordonate polare.

150. **Linia dreaptă.** Ecuaţia unei drepte în coordonate carteziene fiind $Ax+By+C=0$, iar relaţiile dintre coordonatele carteziene şi polare fiind (Fig. 212) $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, ecuaţia dreptei în coordonate polare este

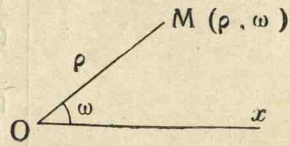


Fig. 212.

$$\rho(A\cos\omega+B\sin\omega)+C=0,$$

$$\frac{A}{C}\cos\omega+\frac{B}{C}\sin\omega+\frac{1}{\rho}=0,$$

$$\frac{1}{\rho}=a\cos\omega+b\sin\omega,$$

a şi b fiind două constante.

Când dreapta este paralelă cu axă polară, Ox, $A=0$, $a=0$, deci ecuaţia ei este

$$\frac{1}{\rho}=b\sin\omega,\quad \rho=\frac{p}{\sin\omega}.$$

Când este perpendiculară pe axa polară, ecuaţia ei este

$$\frac{1}{\rho}=a\cos\omega,\quad \rho=\frac{p}{\cos\omega}.$$

Când dreapta trece prin pol, ecuaţia ei este

$$\omega=\alpha=\text{const.}$$

Unghiul unei drepte cu axa polară. Fie dreapta Δ a cărei ecuaţie este (Fig. 213)

$$\frac{1}{\rho}=a\cos\omega+b\sin\omega,$$

M un punct al dreptei, căreia îi corespunde unghiul polar ω. Unghiul lui Ox cu dreapta este egal cu valoarea unghiului polar ω, pentru care OM este paralelă cu dreapta dată, adică punctul M de la infinit pe dreaptă

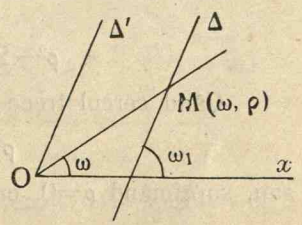


Fig. 213.

deci pentru care $\rho \to \infty$. Din ecuaţia dreptei rezultă că acest unghi e dat de

$$a\cos\omega_1 + b\sin\omega_1 = 0, \quad \operatorname{tg}\omega_1 = -\frac{a}{b}.$$

Dreaptă ce trece prin două puncte. Fie $M_1(\rho_1, \omega_1)$, $M_2(\rho_2, \omega_2)$ cele două puncte date. Ecuaţia unei drepte fiind

$$\frac{1}{\rho} = a\cos\omega + b\sin\omega,$$

scriind că trece prin punctele date, urmează

$$\frac{1}{\rho_1} = b\cos\omega_1 + b\sin\omega_1, \quad \frac{1}{\rho_2} = a\cos\omega_2 + b\sin\omega_2.$$

Eliminând dintre aceste trei ecuaţii pe a şi b, obţinem ecuaţia dreptei ce trece prin cele două puncte

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos\omega_2 & \sin\omega_2 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, presupunând $\sin(\omega_1 - \omega_2) \neq 0$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin(\omega_1 - \omega_2)} \left[\frac{1}{\rho_1} \sin(\omega - \omega_1) - \frac{1}{\rho_2} \sin(\omega - \omega_2) \right].$$

Când $\sin(\omega_1 - \omega_2) = 0$, $\omega_1 - \omega_2 = k\pi$, $\omega_1 = \omega_2 + k\pi$, punctele M_1 şi M_2 sunt situate pe aceeaş dreaptă ce trece prin pol, deci dreapta cerută este o dreaptă ce trece prin pol, cu ecuaţia $\omega = \alpha$.

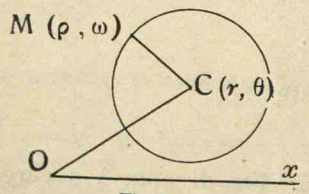


Fig. 214.

151. **Ecuaţia cercului.** Ecuaţia cercului în coordonate carteziene fiind (Fig. 214)

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

în coordonate polare este

$$\rho^2\cos^2\omega + \rho^2\sin^2\omega - 2a\rho\cos\omega + b\sin\omega + c = 0,$$

sau

$$\rho^2 - 2\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) + c = 0.$$

Când cercul trece prin pol, ecuaţia este

$$\rho^2 = 2\rho(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

sau, suprimând $\rho = 0$, care corespunde polului,

$$\rho = 2(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

sau, înlocuind pe $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, ecuația devine

$$\rho=2r\cos(\omega-\theta).$$

Când cercul este tangent în pol axei polare, în acest caz $\theta=\frac{\pi}{2}$, ecuația cercului devine $\rho=2r\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$, $\rho=2r\sin\omega$. Când cercul e tangent în pol la o perpendiculară pe axa polară, atunci $\theta=0$, ecuația devine $\rho=2r\cos\omega$.

152. **Ecuația conicelor având un focar în pol și axa focală pe axa polară.** Axele fiind perpendiculare, orice conică cu un focar în O și axa focală pe Ox, admite ca directoare o dreaptă perpendiculară pe Ox, a cărei ecuație este $x+k=0$. Ecuația conicei este

$$x^2+y^2-e^2(x+k)^2=0,$$

e fiind excentricitatea.

In coordonate polare, ecuația devine

$$\rho^2-e^2(\rho\cos\omega+k)^2=0,$$

care se descompune în

$$\rho=\frac{ek}{1-e\cos\omega},\quad \rho=-\frac{ek}{1+e\cos\omega},$$

care reprezintă aceeaș curbă, căci ele nu diferă de cât prin transformarea în același timp a lui ρ în $-\rho$ și ω în $(\pi+\omega)$.

Punând $ek=p$, ecuația generală căutată este

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\omega},$$

e fiind excentricitatea, iar p definind directoarea, ecuația ei fiind $x=-k$, sau $\rho\cos\omega=-k=-\frac{p}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}=-\frac{e}{p}\cos\omega$.

153. **Tangentă.** Fie $\rho=f(\omega)$ ecuația unei curbe. Poziția tangentei o definim prin unghiul ce-l face tangenta cu raza vectoare OM.

Să considerăm punctul $M_1(\rho_1,\omega_1)$ (Fig. 215) și să însemnăm cu V unghiul tangentei M_1T cu raza vectoare OM_1. Să luăm un sistem de axe perpendiculare, OX fiind OM_1 și OY perpendiculara în O pe OX. Un punct $M(\rho,\omega)$ al curbei $\rho=f(\omega)$ are coordonatele polare $\rho=OM$, $\omega=xOM$, iar în sistemul de axe OX, OY, avem $X=OM\cos XOM=\rho\cos(\omega-\omega_1)$, $Y=\rho\sin(\omega-\omega_1)$.

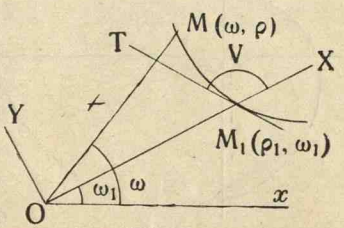


Fig. 215.

Coeficientul unghiular al tangentei în punctul M este $dY:dX$ și exprimând diferențialele dY și dX cu ajutorul derivatelor în raport cu ω, avem

$$(1) \qquad \frac{dY}{dX}=\frac{\rho\cos(\omega-\omega_1)+\rho'\sin(\omega-\omega_1)}{-\rho\sin(\omega-\omega_1)+\rho'\cos(\omega-\omega_1)}.$$

In special, coeficientul unghiular al tangentei în M_1 se obține căutând limita raportului (1) pentru $\omega\to\omega_1$; de unde

$$\operatorname{tg}V=\lim\frac{dY}{dX},\quad \operatorname{tg}V=\frac{\rho_1}{\rho'_1}=\frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)}.$$

Dar, unghiul V este tocmai unghiul format de tangentă cu raza vectoare și deci *unghiul V al tangentei la o curbă* $\rho=f(\omega)$ *cu raza vectoare a punctului de contact este dat de*

$$\operatorname{tg}V=\frac{\rho}{\rho'},$$

ρ fiind derivata lui ρ în raport cu ω și ω fiind unghiul razei vectoare în punctul considerat.

Tangenta în pol. Ecuația curbei fiind $\rho=f(\omega)$, fie ω_1 valoarea lui ω pentru care $f(\omega_1)=0$. Unghiul tangentei în pol cu axa polară este egal cu unghiul ω_1 (Fig. 216), căci tangenta este limita către care tinde secanta OM când $\rho=OM\to 0$, adică tocmai când $\omega\to\omega_1$. Deci, tangenta în pol face cu Ox unghiul ω_1 care anulează pe ρ (raza vectoare).

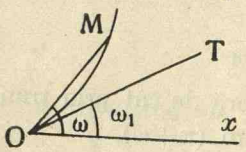


Fig. 216.

Exercițiu. Să se afle curbele care tae toate razele vectoare ale sale sub un unghi constant. Unghiul sub care o curbă tae raza vectoare OM a unui punct $M(\rho,\omega)$ al său este unghiul ce-l face tangenta în acest punct la curbă cu raza vectoare. Tangenta acestui unghi fiind $\frac{\rho}{\rho'}$, avem relația $\frac{\rho}{\rho'}=\text{const}$, de unde $\log\rho=\omega a-a_a$, $a=\text{const.}$, astfel că ecuația curbei în coordonate polare este $\rho=e^{a(\omega-\alpha)}$. Toate soluțiile problemei se obțin rotind una oarecare din curbele aflate (Fig. 217) de un unghi α în jurul polului. E destul deci de a construi curba $\rho=e^{a\omega}$, numită *spirala logaritmică*. Făcând să varieze ω, avem tabloul alăturat. Curba are o infinitate de spire, unele depărtându-se de pol, începând cu valorile lui ω dela 0 la ∞,

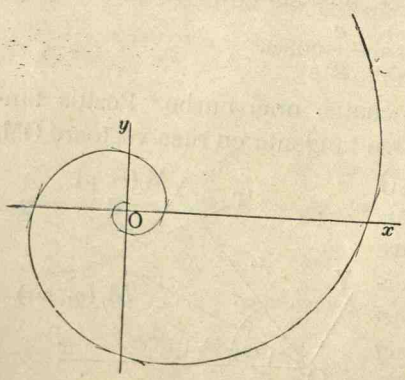


Fig. 217.

ω	$-\infty$	0	∞
ρ	0	1	∞

iar altele apropiindu-se de pol, care corespund valorilor lui ω de la 0 la $-\infty$.

Când unghiul făcut de tangentă cu raza vectoare este drept, tangenta lui este foarte mare, deci $\frac{\rho}{\rho'}=\infty$, $\rho'=0$, de unde $\rho=$const., aceste curbe se reduc la cercuri, care sunt deci cazuri particulare ale spiralei logaritmice.

154. **Concavitate. Puncte de inflexiune.** Fie $M_1(\rho_1,\omega_1)$ (Fig. 218) un punct al curbei $\rho=f(\omega)$. Luând ca axe OX și OY raza vectoare OM_1 și perpendiculara pe ea, un punct $M(\rho,\omega)$ al curbei are coordonatele carteziene $X=\rho\cos(\omega-\omega_1)$, $Y=\rho\sin(\omega-\omega_1)$.

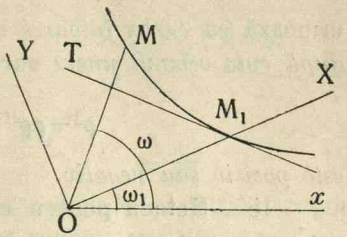


Fig. 218.

Știm (No. 146) că curba este concavă către OX sau în sens contrar, după cum inversul coeficientului unghiular al tangentei, $n=\frac{X'}{Y'}$, crește sau descrește când Y crește. Avem

$$n=\frac{X'}{Y'}=\frac{\rho'\cos(\omega-\omega_1)-\rho\sin(\omega-\omega_1)}{\rho'\sin(\omega-\omega_1)+\rho\cos(\omega-\omega_1)}.$$

Să căutăm, pentru $\omega\to\omega_1$, valorile derivatelor funcțiunilor Y și n. Avem

$$Y'=\rho\cos(\omega-\omega_1)+\rho'\sin(\omega-\omega_1),\quad \lim_{\omega\to\omega_1}Y'=\rho.$$

Punând $\omega-\omega_1=\alpha$ și luăm derivata în raport cu ω, obținem

$$n'=\frac{[\rho''\cos\alpha\cdot 2\rho'\sin\alpha-\rho\cos\alpha][\rho'\sin\alpha+\rho\cos\alpha]-[\rho''\sin\alpha+2\rho'\cos\alpha-\rho\sin\alpha][\rho'\cos\alpha-\rho\sin\alpha]}{[\rho'\sin(\omega-\omega_1)+\rho\cos(\omega-\omega_1)]^2};$$

$$\lim_{\omega\to\omega_1} n=\frac{(\rho''-\rho)\rho-2\rho'\rho'}{\rho^2}=\frac{1}{\rho^2}(\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2).$$

Trebue deci să studiem semnele expresiunilor

$$Y'(\omega_1)=\rho,\quad n'(\omega_1)=\frac{1}{\rho^2}(\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2).$$

Dacă $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2>0$, $\rho>0$, atunci n' și Y au același semn pentru $\omega=\omega_1$, curba întoarce concavitatea către OX, adică convexitatea către pol (Fig. 219). Dacă $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2>0$, $\rho<0$, n' și Y' sunt de semne contrare, curba întoarce concavitatea către OX', sau convexitatea către pol (Fig. 220). Deci, în cazul $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'>0$, curba are convexitatea către pol.

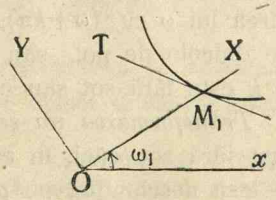


Fig. 219.

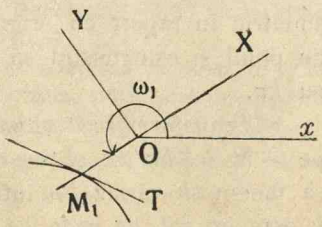


Fig. 220.

Se arată, la fel, că dacă $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2<0$, curba are concavitatea către

pol. In fine, când $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2=0$, curba are, în general, un *punct de inflexiune* în acest punct.

Concavitatea, după cum am văzut, depinde de semnul expresii $\rho\rho''-\rho^2-2\rho'^2$. De oarece avem

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]=\frac{\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2}{\rho^4},$$

urmează că *curba întoarce concavitatea sau convexitatea către pol, după cum semnul uneia oarecare din expresiunile*

$$\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2,\quad \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$$

este pozitiv sau negativ.

155. **Metodă pentru construcția curbei** $\rho=f(\omega)$. 1°. Se cercetează mai întâi în ce interval trebue să varieze ω, pentru ca punctul (ρ,ω) să descrie toată curba. Se vede apoi cum micşorăm acest interval, observând simetria față de pol sau axa polară. De ex., în cazul când în ecuația curbei ω întră altfel de cât prin linii trigonometrice,

$$\rho=e^{a\omega},\quad \rho=\omega-\sin\omega,$$

intervalul în care trebue să varieze ω este $(-\infty,\infty)$.

In cazul când ω întră prin linii trigonometrice, se căută un multiplu al lui 2π, adică $2k\pi$, care adăugat lui ω, să nu schimbe valoarea lui ρ; de ex., curbele

$$\rho=a\cos 2\omega+b\sin 2\omega,\quad \rho=a\sin\omega+b,$$

au ca interval $(0,\pi)$ pentru prima şi $(0,2\pi)$ pentru a doua.

2°. Intervalul fiind egal cu $2k\pi$, se face în ecuația curbei înlocuirea lui ω cu $(\omega+k\pi)$, ceea ce revine a prelungi o rază vectoare dincolo de pol, sau a considera însăşi raza vectoare, după cum k este fără soț sau cu soț. Se pot întâmpla mai multe cazuri.

Transformarea nu schimbă valoarea lui ρ. Atunci k este neapărat fără soț căci, în caz contrar cel mai mic multiplu de 2π, care lasă neschimbat pe ρ ar fi $k\pi$ şi nu după cum am presupus $2k\pi$. Deci, la fiecare punct M al curbei, corespunde un punct M' simetric în raport cu origina, deci curba este simetrică în raport cu polul şi este destul să facem să varieze ω într'un interval egal cu $k\pi$.

Transformarea schimbă pe ρ *în* $-\rho$. k fiind impar, schimbând pe ω în $\omega+k\pi$, se obține acelaş punct al curbei şi deci este destul să facem să variază ω într'un interval egal cu $k\pi$. Dacă numărul k este cu soț, se vede că curba e simetrică în raport cu polul şi

pe ω îl facem să varieze numai într'un interval cu $k\pi$.

3°. Acestea fiind hotărâte, *se cercetează dacă există o valoare* α, *astfel ca transformarea lui* ω *în* $(\alpha-\omega)$ *să nu schimbe valoarea absolută a lui* ρ. Fie Ox_1 dreapta ce face cu Ox unghiul α şi OD şi DE (Fig. 221) bisectoarele interioară şi exterioară a unghiului xOx_1. $M(\rho,\omega)$ fiind un punct al curbei, a înlocui pe ω cu $(\alpha-\omega)$ înseamnă a se considera razele OM şi OM_1 simetrice în raport cu OD. Deci, după această înlocuire, dacă ρ nu se schimbă, la orice punct M al curbei corespunde un punct M_1 simetric în raport cu OD; deci curba este simetrică în raport cu OD. Dacă ρ se schimbă în $-\rho$ se obţine punctul M_2, curba e simetrică în raport cu OE.

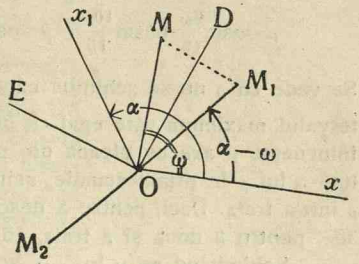


Fig 221.

Intervalul în care trebue să varieze ω fiind egal cu $k\pi$, se va lua acela care este cuprins între $\frac{\alpha}{2}-k\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\alpha}{2}+k\frac{\pi}{2}$, căci el este format din jumătăţile $\left(\frac{\alpha}{2}-k\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}+k\frac{\pi}{2}\right)$, astfel că se trece de la una la alta prin transformarea lui ω în $(\alpha-\omega)$. Va fi de ajuns, deci, ţinând seamă de simetria obţinută, de a face să varieze ω într'una din aceste jumătăţi, de ex, în $\left(\frac{\alpha}{2}-k\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$. Se observă că alegerea acestui interval depinde numai de natura transformării efectuate asupra lui ω şi nici de cum de axa de simetrie obţinută.

Exemple. Fie curbele $\rho=a\cos\omega+b$, $\rho=\frac{a\cos\omega+b}{\sin\omega}$, $\rho=a\sin\omega+b$, $\rho=\frac{a\sin\omega+b}{\cos\omega}$. Transformarea lui ω în $(\omega+2k\pi)$ nu schimbă pe ρ, iar aceea a lui ω în $(\omega+k\pi)$, schimbă pe ρ. Intervalul unde trebue să varieze ω pentru a obţine toate curbele este de lungime 2π.

Schimbând pe ω în $-\omega$, nu se schimbă ρ pentru prima, îl schimbă în $-\rho$ pentru a doua, alterează valoarea absolută pentru celelalte două. Deci, curba întâi este simetrică în raport cu Ox, a doua simetrică în raport cu Oy; deci, pentru aceste două curbe alegem intervalul $(-\pi, \pi)$ şi facem să varieze ω numai în una din jumătăţi, de ex., $(0, \pi)$.

De asemenea, schimbând ω în $(\pi-\omega)$, se alterează valoarea lui ρ pentru primele două, nu-l schimbă pe ρ pentru a treia, şi-l schimbă în $-\rho$ pentru a patra. A treia e simetrică în raport cu Oy, a patra în raport cu Ox, şi e destul a alege intervalul $\left(\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ şi a-l face să varieze ω într'una din jumătăţi, de. ex., $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

In cazul curbelor $\rho=a\sin\frac{3\omega}{5}+b\sin\frac{2\omega}{3}$, $\rho=a\sin\frac{3\omega}{5}+b\sin\frac{\omega}{3}$, $\rho=a\sin\frac{2\omega}{5}+b\sin\frac{2\omega}{3}$, ecuațiile se pot scrie

$$\rho=a\sin\frac{9\omega}{15}+b\sin\frac{10\omega}{15},\quad \rho=a\sin\frac{9\omega}{15}+b\sin\frac{5\omega}{15},\quad \rho=a\sin\frac{6\omega}{15}+b\sin\frac{10\omega}{15}.$$

Se vede că ρ nu se schimbă când mărim $\frac{\omega}{15}$ cu 2π, adică pe ω cu 30π; intervalul maximum este egal cu 30π. Transformând pe ω în $(\omega+15\pi)$, care înlocueşte o axă ce pleacă din pol cu axa opusă, alterează valoarea absolută a lui ρ în prima ecuație, schimbă pe ρ în $-\rho$ în a doua, nu schimbă pe ρ într'a treia. Deci, pentru a descrie toată curba, pentru întâia intervalul este 30π, pentru a doua şi a treia, 15π.

Schimbând pe ω în $-\omega$, se schimbă ρ în $-\rho$; sunt simetrice în raport cu Oy. Se face deci să varieze ω de la 0 la 15π pentru prima curbă, de la 0 la $15\frac{\pi}{2}$ pentru celelalte două.

4⁰ După ce s'a determinat intervalul în care trebue să varieze ω, se caută valorile din acest interval pentru care ρ încetează de a fi definit şi continuu.

5⁰. Se caută valorile lui ω pentru care $\rho=0$.

6⁰. Se calculează una din expresiunile

$$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'',\quad \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$$

şi se caută valorile lui ω pentru care una din ele este nulă.

7⁰ Se arangează în ordine de mărime crescătoare valorile lui ω şi se caută semnul lui ρ în intervalele unde ρ este finit şi nu se anulează; se mai caută ce devine ρ pentru extremitățile intervalelor. Valorile lui ω pentru care $\rho=0$, corespund ramurilor ce trec prin pol şi sunt egale cu unghiurile polare ale tangentelor în acest punct. Valorile lui ω care anulează pe $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ corespund în generalla punctele de inflexiune.

Exemple. I. *Să se afle locul geometric al proecției* M *a unui punct fix* O *pe o dreaptă* PQ$=2a$ *de mărime constantă care se reazămă cu capetele sale pe două axe perpendiculare* Ox, Oy. Luăm Ox ca axă polară şi POM$=\omega$, OM$=\rho$; avem (Fig. 222)

$$OM=OP\cos\omega=PQ\sin\omega\cos\omega,\quad \rho=2a\sin\omega\cos\omega,$$

astfel că ecuația curbei este

$$\rho=a\sin 2\omega.$$

Schimbând ω în $(\pi+\omega)$, ρ se reproduce; O este centru de simetrie, intervalul este egal cu π.

Schimbând pe ω în $-\omega$, ρ se schimbă în $-\rho$, deci Oy este axă simetric, intervalul este $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Schimbând pe 2ω cu $(\pi-2\omega)$, adică pe ω cu

$\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$, ρ nu se schimbă, deci prima bisectoare este o nouă axă de simetrie, putem micşora intervalul la $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. In acest interval ρ este finit, continuu, pozitiv şi se anulează pentru $\omega=0$. Avem $\rho'=2a\cos 2\omega>0$ şi este nul pentru $\omega=\frac{\pi}{4}$; în fine, $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=a^2\sin^2 2\omega+9a^2\cos^2 2\omega+4a^2\sin^2 2\omega>0$. Arcul de curbă OA este tangent axei polare în O, concavitatea este către pol. Se ia simetrica faţă de prima bisectoare şi avem o bucă, simetrica acesteia faţă de Oy dă o a doua buclă şi în fine simetricele acestora faţă de pol, dau cele patru bucle. Curba obţinută se zice *rosace à quatre branches.*

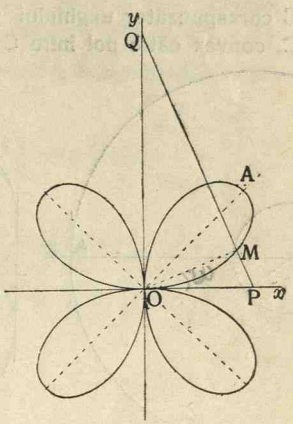


Fig. 222.

II. *Să se găsească locul geometric al punctelor obţinute prelungind cu o cantitate constantă k razele vectoare ale unui cerc de diametru a trecând prin pol.* Luând ca axă polară diametrul ce trece prin pol (Fig. 223), ecuaţia cercului este $\rho=a\cos\omega$, iar aceea a curbei este

$$\rho=a\cos\omega+k,$$

şi se zice *melcul lui Pascal.*

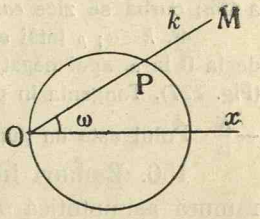


Fig. 223.

Schimbând pe ω în $-\omega$, ρ nu se schimbă; curba e simetrică în raport cu Ox, intervalul în care variază ω este $(0, \pi)$; ρ este finit şi continuu. Pentru $k>a$, ρ nu se anulează; când $k<a$, ρ se anulează pentru o valoare $\omega=\alpha$ $\left(\cos\alpha=-\frac{b}{a}\right)$, cuprinsă între 0 şi π; pentru $k=a$, $\rho=0$ când $\omega=\pi$.

Avem $\rho'=-a\sin\omega<0$ în interval, afară de valorile extreme 0 şi pentru care se anulează.

Avem $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=2a^2+3ak\cos\omega+k^2$. Valorile lui ω pentru care această expresie s'ar anula, sunt date de

$$\cos\omega=-\frac{2a^2+k^2}{3ak}.$$

In cazul $2a^2+k^2<3ak$, sau $k^2-3ak+2a^2<0$, $a<k<2a$, expresia se anulează pentru $\omega=\beta$, dat de ecuaţia

$$\cos\beta=-\frac{2a^2+k^2}{3ak},$$

iar în caz contrar, expresiunea considerată este totdeauna pozitivă. De aci, mai multe cazuri.

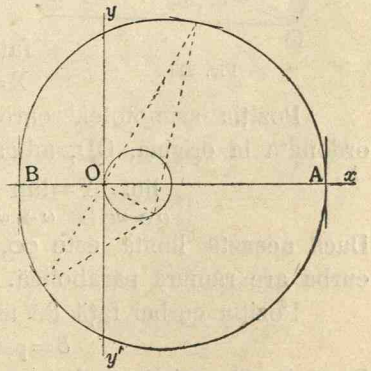


Fig. 224.

1°. $k>2a$; ρ este pozitiv, descreşte de la $(k+a)$ la $(k-a)$, când ω creşte de la 0 la π, avem arcul AB (Fig. 224), con-

cavitatea fiind către pol. Luând simetrica în raport cu axa polară, obținem toată curba.

2°. $a<k<2a$, arcul AB (Fig. 225) are un punct de inflexiune în punctul C corespunzător unghiului polar β; concavitatea este către pol între A și C, convex către pol între C și B.

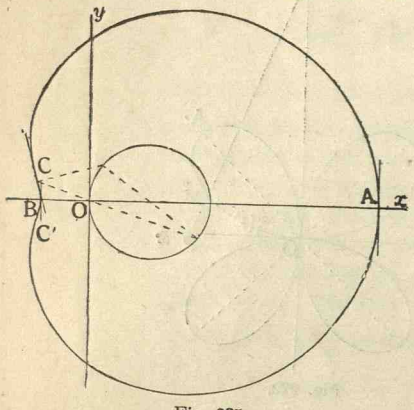


Fig. 225.

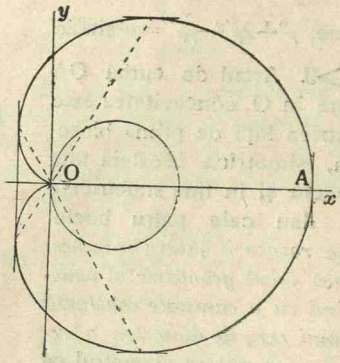


Fig. 226.

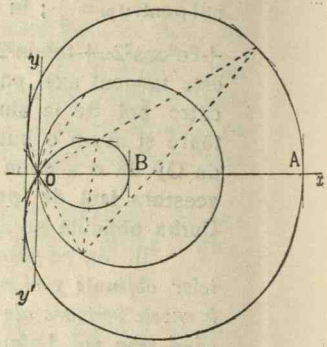


Fig. 227.

3°. $k=a$; ρ descreşte de la $2a$ la 0 (Fig. 226); arcul în O este tangent a Ox; curba se zice *cardioidă*.

4°. $k<a$; ρ întâi este pozitiv, descreşte de la $(a+k)$ la 0, când ω creşte de la 0 la α, apoi negativ, de la 0 la $(k-a)$, când ω creşte de la α la π (Fig. 227). Tangenta în pol face cu Ox unghiul α pentru care $\rho=0$, $\cos\alpha=-\frac{k}{a}$. Polul este un punct dublu.

156. **Ramuri infinite. Asimptote.** Curba $\rho=f(\omega)$ admite o ramură asimptotică atunci când $\rho=\infty$ pentru anumite valori determinate ale lui ω. Dacă pentru $\omega=\omega_1$, avem $\rho=f(\omega_1)=\infty$, ducem prin O dreapta OX ce face cu Ox unghiul ω_1 (Fig. 228) și perpendiculara OY pe ea. Direcția asimptotică este dată de unghiul ω_1.

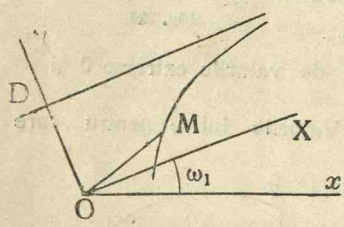


Fig. 228.

Coordonatele unui punct al curbei față de noile axe OX și OY sunt $X=\rho\cos(\omega-\omega_1)$, $Y=\rho\sin(\omega-\omega_1)$.

Poziția asimptotei, care este paralelă cu OX, este dată de ordonata la origină, OD, adică

$$\lim_{\omega\to\omega_1} Y=\lim_{\omega\to\omega_1}\rho\sin(\omega-\omega_1)=d,\quad OD=d.$$

Dacă această limită este ∞, asimptota este aruncată la infinit, curba are ramură parabolică.

Poziția curbei față de asimptotă este dată de diferența

$$\delta=\rho\sin(\omega-\omega_1)-d.$$

Dacă $\delta>0$, curba este deasupra, dacă $\delta<0$, dedesubtul asimptotei.

Exemplu. *Să se construiască curba* $\rho=a\frac{\sin\omega}{2\cos\omega-1}$. Intervalul este $(0,2\pi)$. Transformarea lui ω în $(\pi+\omega)$ alterează pe ρ; aceea a lui ω în $-\omega$, schimbă pe ρ în $-\rho$; curba e simetrică în raport cu Oy. Intervalul este $(0,\pi)$. ρ devine ∞ pentru $\omega=\frac{\pi}{3}$. Ducem OX (Fig. 229) ce face cu Ox unghiul $xOX=60^0$. Asimptota este dată de distanța

$$OP=\lim Y=\lim\rho\sin(\omega-\omega_1)=\lim a\frac{\sin\omega}{2\cos\omega-1}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=\lim\frac{a}{2}\sin\omega\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\omega-\frac{1}{2}},$$

$$\omega=\frac{\pi}{3}$$

$$OP=\lim\frac{a}{2}\sin\omega\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\omega-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\lim\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\lim\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{a}{2}.$$

ω	ρ	
0		punctul O
	+	
$\frac{\pi}{3}$	∞	punctul B
	$-\infty$	„ C
$\frac{\pi}{2}$	—	„ A
π	0	„ O

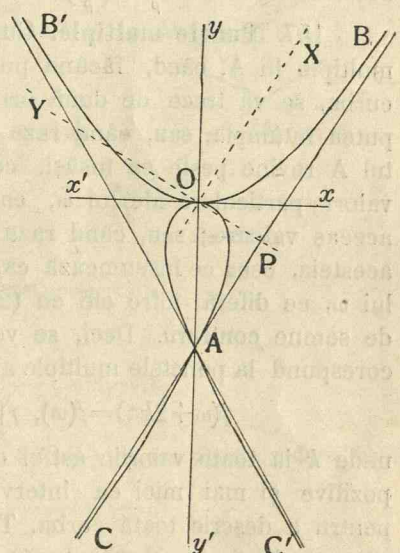


Fig. 229.

Poziția curbei față de asimptotă o dă

$$\delta=\rho\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{a}{2},$$

$$\delta=\frac{a\sin\omega}{2\cos\omega-1}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{a}{2}=$$

$$\frac{a}{2}\left[\frac{\sin\omega\sin\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\omega-\cos\frac{\pi}{3}}+1\right],$$

$$\delta=\frac{a}{2}\left[\frac{\sin\omega 2\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}+1\right],$$

$$\delta=\frac{a}{2}\left[\frac{-\sin\omega\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}+1\right]=\frac{a}{2}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\omega\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Dar $\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}=\omega-\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$: deci

$$\delta=\frac{a}{2}\frac{\sin\omega\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\omega\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\omega\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\delta=-\frac{a}{2}\frac{\cos\omega\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

In apropiere de $\omega=\frac{\pi}{3}$, factorul $\frac{a}{2}\frac{\cos\omega}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$ este pozitiv, deci semnul lui δ depinde de $\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\omega-\frac{\pi}{3}}{2}$. Dacă $\omega<\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\omega-\frac{\pi}{3}}{2}<0$, $\delta>0$. curba e deasupra asimptotei; dacă $\omega>\frac{\pi}{3}$, $\delta<0$, curba e dedesubtul asimptotei. Diferența δ se anulează din nou pentru $\omega=\frac{\pi}{2}$, când curba tae asimptota în A; apoi, din nou, ω variind până la π, $\delta>0$, deci curba e deasupra asimptotei.

Luând simetrica în raport cu Oy, avem toată curba. Punctele de inflexiune sunt date de $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''=0$.

157. **Puncte multiple.** Curba $\rho=f(\omega)$ va prezenta un punct multiplu în A, când, făcând pe ω să varieze ca să descrie toată curba, se va trece de două ori prin acelaș punct A. Acesta s'ar putea întâmpla, sau, când raza vectoare Oz pe care se află punctul A revine peste ea însăși, ceea ce însemnează că pentru două valori particulare ale lui ω, care diferă între ele cu $2k\pi$, ρ reia aceeaș valoare; sau, când raza vectoare Oz devine în poziția opusă acesteia, ceea ce însemnează că, pentru două valori particulare ale lui ω, ce diferă între ele cu $(2k+1)\pi$, ρ ia două valori egale și de semne contrarii. Deci, se vor avea toate valorile lui ω, care corespund la punctele multiple ale curbei, rezolvând separat ecuațiile

$$f(\omega+2k\pi)=f(\omega),\ f[\omega+(2k+1)\pi]=-f(\omega),$$

unde k ia toate valorile astfel ca creșterile $2k\pi$ și $(2k+1)\pi$ să fie pozitive și mai mici ca intervalul în care trebue să varieze ω pentru a descrie toată curba. Toate soluțiile acestor ecuații trebue grupate două câte două, două soluții ale aceleaș grupe corespunzând la un punct dublu. In particular, când curba este descrisă întreagă făcând pe ω să varieze într'un interval egal cu 2π, va fi destul a reznlva ecuația

$$f(\omega+\pi)=-f(\omega).$$

Exemple. 1°. $\rho=\frac{a\cos\omega+b\sin\omega+c}{a'\cos\omega+b'\sin\omega+c'}$. Se descrie toată curba făcând să varieze ω în intervalul egal cu 2π. Punctele duble sunt date de ecuația

$$\frac{a\cos(\omega+\pi)+b\sin(\omega+\pi)+c}{a'\cos(\omega+\pi)+b'\sin(\omega+\pi)+c'}=-\frac{a\cos\omega+b\sin\omega+c}{a'\cos\omega+b'\sin\omega+c'},$$

care se reduce la

$$(a\cos\omega+b\sin\omega)(a'\cos\omega+b'\sin\omega)-cc'=0,$$

sau, în fine, la o ecuație de gradul al doilea în $\operatorname{tg}\omega$. De unde obținem două valori pentru $\operatorname{tg}\omega$, fiecare corespunzând la două unghiuri care diferă între ele cu π și prin urmare corespund la un punct dublu. Curba dată are două puncte duble distincte de pol.

2°. In cazul considerat, $\rho=a\dfrac{\sin\omega}{2\cos\omega-1}$, avem

$$\frac{a\sin(\omega+\pi)}{2\cos(\omega+\pi)-1}=-\frac{a\sin\omega}{2\cos\omega-1};\ \sin\omega\cos\omega=0.$$

De unde, sau $\sin\omega=0$, $\omega=0$, π, $\rho=0$ și avem punctul dublu în polul O ; sau, $\cos\omega=0$, $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, $3\dfrac{\pi}{2}$, $\rho=\pm a$, când punctul dublu este punctul A pe Oy (Fig. 229).

158. **Aplicații.** I. *Ecuația tangentei în coordonate polare.* Ecuația curbei fiind $\rho=f(\omega)$, să considerăm punctul $M_1(\rho_1, \omega_1)$. Luând ca axe OX și OY dreptele OM_1 și perpendiculara pe ea, ecuația tangentei în $M_1(X_1, Y_1)$, $X_1=\rho_1=f(\omega_1)$, $Y_1=0$,

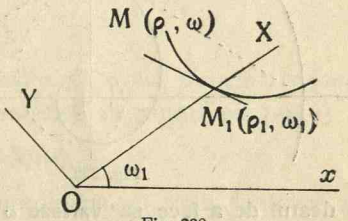


Fig. 230.

$$Y-Y_1=Y_1'(X-X_1),\ Y_1'=\operatorname{tg}V=\frac{\rho_1}{\rho_1'},$$

deci ecuația tangentei în M_1 (Fig. 230) este

$$Y=\frac{\rho_1}{\rho_1'}(X-\rho_1),$$

sau, revenind la coordonate polare,

$$\rho\sin(\omega-\omega_1)=\frac{\rho_1}{\rho_1'}[\rho\cos(\omega-\omega_1)-\rho_1],$$

de unde

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}\cos(\omega-\omega_1)+\frac{\rho_1'}{\rho_1^2}\sin(\omega-\omega_1).$$

II. *Ecuația normalei* fiind $Y=-\dfrac{\rho_1'}{\rho_1}(X-X_1)$, în coordonate polare este

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}\cos(\omega-\omega_1)+\frac{1}{\rho_1'}\sin(\omega-\omega_1).$$

III. *Subtangentă și subnormală polară.* M fiind un punct al curbei $\rho=f(\omega)$, să ducem dreapta perpendiculară pe OM (Fig. 231), ce tae tangenta și normala în M în punctele T și N. OT și ON se zic subtangenta și subnormala polară. Avem

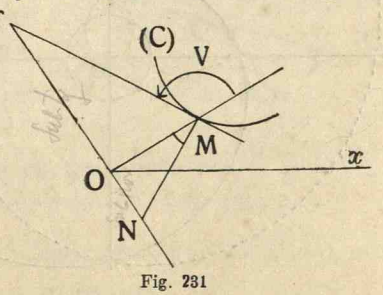


Fig. 231

$$OT=OM\operatorname{tg}OMT=\rho\left(-\frac{\rho}{\rho'}\right)=-\frac{\rho^2}{\rho'},$$

$$ON=OM\operatorname{tg}OMN=\rho\operatorname{tg}\left(V-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$-\operatorname{cotg}V=-\rho\frac{\rho'}{\rho}$$

și ținând seamă de sensul lui ON, care este contrar ca OT, avem $ON=\rho'$.

Aceastea se mai puteau obține înlocuind în ecuațiile tangentei și normalei pe ω cu $\left(\frac{\pi}{2}+\omega_1\right)$ și deci, avem respectiv

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\rho_1'}{\rho_1^2},\ \rho=-\frac{\rho_1^2}{\rho_1'},\ \text{OT}=-\frac{\rho_1^2}{\rho_1'};\ \frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1'},\ \rho=\rho_1',\ \text{ON}=\rho_1'.$$

IV. *Să se afle curba pentru care subtangenta polară e constantă.* Insemnând cu a această constantă, avem

$$\frac{-\rho^2}{\rho'}=a,\ \frac{-\rho'}{\rho^2}=\frac{1}{a},$$

de unde, integrând, $\frac{1}{\rho}=\frac{\omega-\alpha}{a}$, α=const. Problema admite o infinitate de soluții, care se deduc din una oarecare din ele, rotind-o de un unghi oarecare α în jurul polului. Trebue deci să construim una oarecare din ele

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\omega}{a},\ \rho=\frac{a}{\omega},$$

care se zice *spirala iperbolică* (Fig. 232). Schimbând pe ω în $-\omega$, se transformă ρ în $-\rho$, ceea ce arată că curba e simetrică în raport cu Oy și deci, ținând seamă de această simetrie, e destul de a face să varieze ω de la 0 la ∞. In aceste condiții, $\rho>0$ și descreşte de la ∞ la 0. Direcția asimptotică e dată de $\omega=0$, iar asimptota e paralelă cu Ox, depărtată de Ox cu distanța $d=\lim_{\omega=0}\rho\sin\omega=\lim_{\omega}\frac{a}{\omega}\sin\omega=a$.

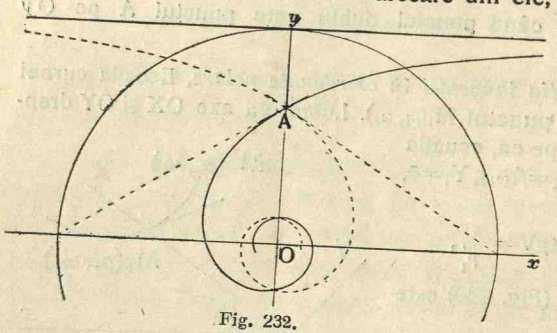


Fig. 232.

Curba, lăsând la o parte asimptota, are o infinitate de spire în juru polului, de care se apropie nemărginit (O este un punct asimptotic). Construind simetrica curbei în raport cu Oy, se vede că spirala iperbolică are o infinitate de puncte duble, cum este A, pe dreapta perpendiculară pe axa polară.

V. *Să se afle curba pentru care subnormala e constantă.* Insemnând cu a această constantă, avem $\rho'=a$, și integrând, $\rho=a(\omega-\alpha)$, α fiind o constantă oarecare. Sunt o infinitate de soluții, și e destul a studia pe una din ele, $\rho=a\omega$, numită *spirala lui Archimede* (Fig. 233). Aceasta curbă e simetrică în raport cu Oy, și făcând pe ω să varieze de la 0 la ∞, ρ crește de la 0 la ∞. Curba trece prin pol

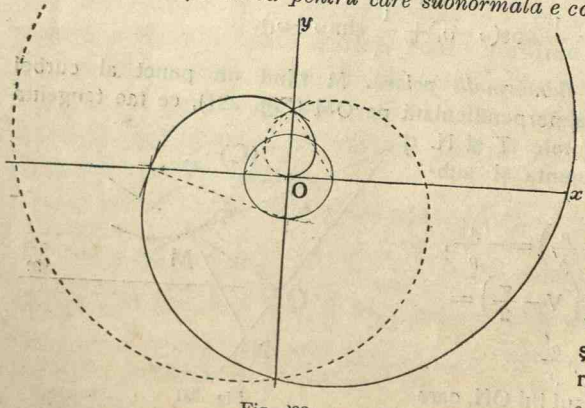


Fig. 233.

unde este tangentă Ox, descrie o infinitate de spire în jurul polului, de care se depărtează nemărginit. Luând simetrica în raport cu Oy, se vede că are o infinitate de puncte duble pe Oy.

159. **Curbe omotetice.** Fiind dată o curbă (C) (Fig. 234), să facem să corespundă la fiecare punct M al acestei curbe punctul M_1, astfel că O fiind un punct dat în plan, să avem

$$\frac{OM_1}{OM}=k,$$

k fiind o constantă. Locul punctelor M_1 este o curbă (C_1), care se zice omotetica curbei (C), O fiind centrul de omotetie și k raportul de omotetie.

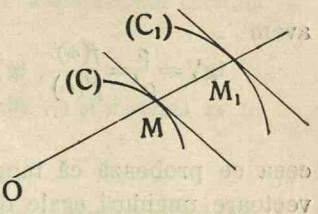


Fig. 234.

Ecuația curbei (C) fiind $\rho=f(\omega)$, aceea a curbei omotetice se obține observând că $OM_1=kOM$, $\rho_1=k\rho$, $\rho_1=kf(\omega)$, sau

$$\rho=kf(\omega).$$

Tangentele la două curbe omotetice, în două puncte omoloage, sunt paralele. Ecuațiile lor fiind (omotetice în raport cu polul)

$$\rho=f(\omega),\ \rho=kf(\omega),$$

unghiurile tangentelor în punctele omoloage cu raza vectoare comună sunt date de

$$\operatorname{tg}V=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{f(\omega)}{f'(\omega)},\ \operatorname{tg}V_1=\frac{kf(\omega)}{kf'(\omega)}=\operatorname{tg}V.$$

Aceste unghiuri fiind egale, tangentele în punctele omoloage sunt paralele.

160. **Curbe inverse** sunt acelea pentru care $OM.OM_1=k=$ const., O fiind polul (Fig. 235) și k puterea de inversiune. Ecuația curbei (C) fiind $\rho=f(\omega)$, a curbei inverse, (C_1), este

$$\rho_1=\frac{k}{OM}=\frac{k}{\rho}=\frac{k}{f(\omega)},\ \rho=\frac{k}{f(\omega)}.$$

Inversa liniei drepte $\frac{1}{\rho}=a\cos\omega+b\sin\omega$,

este $\rho=\frac{k}{f(\omega)}=k(a\cos\omega)+b\sin\omega)$,

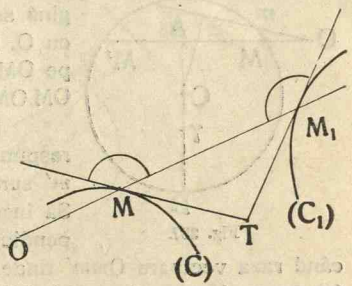


Fig. 235

$\rho=k(a\cos\omega+b\sin\omega)$, adică un cerc ce trece prin pol.

Inversa cercului $\rho^2-2\rho(a\cos\omega+b\sin\omega)+c=0$, este

$\frac{k}{\rho^2}-2\frac{k}{\rho}(a\cos\omega+b\sin\omega)+c=0$, $c\rho^2-2k\rho(a\cos\omega+b\sin\omega)+k^2=0$, adică tot un cerc.

Tangentele la două curbe inverse, în două puncte omoloage, fac cu raza vectoare un triunghi isoscel (unghiuri egale și de sensuri opuse). Ecuațiile curbelor (polul fiind polul de inversiune)

fiind $$\rho=f(\omega),\quad \rho=\frac{k}{f(\omega)},$$

avem $$\operatorname{tg}V=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{f(\omega)}{f'(\omega)},\quad \operatorname{tg}V_1=\frac{\frac{k}{f(\omega)}}{\left[\frac{k}{f(\omega)}\right]'},\quad =\frac{\frac{k}{f(\omega)}}{\frac{-kf'(\omega)}{f^2(\omega)}}=-\frac{f(\omega)}{f'(\omega)}=-\operatorname{tg}V,$$

ceea ce probează că tangentele MT și M_1T (Fig. 235) fac cu raza vectoare unghiuri egale dar de sens contrar.

Unghiul sub care se tae două curbe este egal cu unghiul sub care se tae inversele lor. În adevăr, fie (C) și (Γ) două curbe (Fig. 236) ce se tae în M și MT și MS tangentele lor în M. Inversele lor (C_1) și (Γ_1) se tae în M_1 pe raza vectoare OM, iar tangentele lor M_1T_1 și M_1S_1 fac cu OM_1 unghiuri egale și de sens contrar cu M_1MT, M_1MS; deci unghiul $S\,M_1T_1=MM_1T_1-MM_1S_1=M_1MT-M_1MS=SMT$, ceea ce probează că unghiul sub care se tae curbele (C_1) și (Γ_1) este egal cu al curbelor (C) și (Γ).

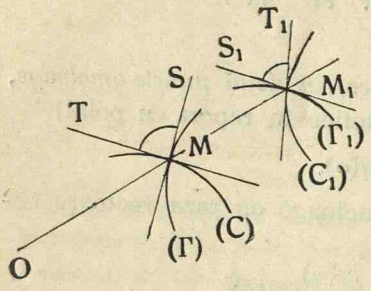


Fig. 236.

Deci, dacă două curbe sunt tangente și inversele lor sunt tangente; dacă două curbe sunt ortogonale și inversele lor sunt ortogonale.

161. Curbe analagmatice se zic acelea care au proprietatea că se transformă prin inversiune în ele înși-le printr'o alegere potrivită a originii și modulului (puterii) de transformare. Această origină se zice origină principală, pe care s'o notăm cu O. La un punct M al acestei curbe corespunde pe OM un punct M′ al aceleiaș curbe, astfel ca $OM.OM'=k$ (Fig. 237).

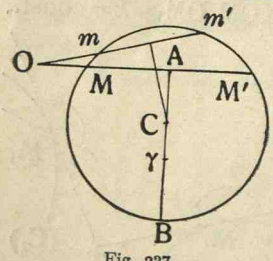


Fig. 237.

Dacă m și m' mai sunt alte două puncte corespunzătoare, atunci cele patru puncte M, M′, m, m' sunt pe acelaș cerc C, căci $OM.OM'=Om.Om'$. Să însemnăm cu (D) curba înfășurătoare a perpendicularelor duse pe mijloacele coardelor MM′; când raza vectoare Omm' tinde către OMM′, cercul C tinde către cercul (Γ) care atinge curba în M și M′ și având ca centru punctul γ unde perpendiculara AB atinge înfășurătoarea sa. Mai mult, cercul (Γ) tae ortogonal cercul descris din O ca centru cu $\sqrt{k}$ ca rază, căci puterea punctului O față de cercul (Γ) este k. Deci, *curbele analagmatice sunt înfășurătoarele unui cerc care tae ortogonal un cerc fix numit cerc principal și al cărui centru descrie o curbă* (D) *numită deferent.*

Origina principală fiind luată ca pol, ecuația cercului (Γ) este de forma

$$x^2+y^2-2ax-2by+k=0, \quad \rho^2-2\rho(a\cos\omega+b\sin\omega)+k=0.$$

Dar, coordonatele centrului fiind $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$, ecuația cercului este

$$\rho^2-2r\rho\cos(\omega-\alpha)+k=0.$$

Scriind că centrul descrie o curbă dată (D), $r=g(\alpha)$, avem ecuația cercului variabil

(1) $$\rho^2-2\rho g(\alpha)\cos(\omega-\alpha)+k=0.$$

Vom avea înfășurătoarea, eliminând pe α între ecuația (1) și derivata sa în raport cu α,

(2) $$g'(\alpha)\cos(\omega-\alpha)+g(\alpha)\sin(\omega-\alpha)=0.$$

Din (2) scoatem $\alpha=f(\omega)$ și atunci înlocuind în (1), ecuația analagmaticei este

(3) $$\rho^2-2\rho F(\omega)+k=0,$$

F fiind o funcțiune arbitrară.

Origina fiind polul, dacă ecuația analagmaticei este sub forma (3), vom avea deferentul, sau curba (D), căutând înfășurătoarea dreptelor

$$x\cos\omega+y\sin\omega-F(\omega)=0.$$

162. Curbe concoide. Curba concoidă a unei curbe $\rho=f(\omega)$ se obține mărind toate razele vectoare cu aceeaș cantitate a (Fig. 238), pozitivă sau negativă; ecuația ei este

$$\rho=f(\omega)+a.$$

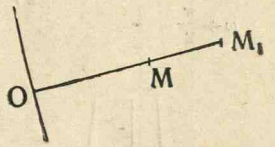


Fig. 238.

Melcul lui Pascal este concoida cercului.

1°. *Două curbe concoide au aceeaș subnormală*, căci, pentru ambele, avem (Fig. 239) $ON=\rho'=f'(\omega)$, $ON_1=\rho'_1=[f(\omega)+a]'=f'(\omega)=ON$.

Această observare ne permite să construim tangenta la curba concoidă a unei curbe (C), dacă se știe tangenta la curba dată (C). Pentru aceasta,

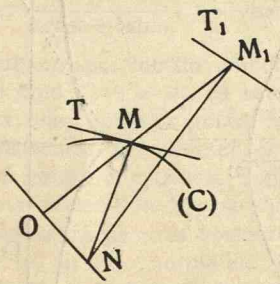


Fig. 239.

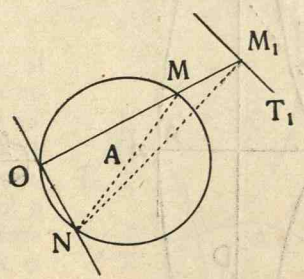


Fig. 240.

ducem (Fig. 239) normala în M la curba (C), ce tae în N perpendiculara în O pe OM; perpendiculara în M_1, omologul lui M, pe NM_1, este tangentă la concoidă în M_1.

La fel se procedează pentru a construi tangenta la melcul lui Pascal, ducând diametrul MAN (Fig. 240) al cercului; ON este subnormala. Perpendiculara în M_1 pe NM_1 este tangenta în M_1 la melcul iui Pascal.

2°. *Concoida lui Nicomede* este concoida unei linii drepte. Ecuația dreptei (Fig. 241) fiind $\frac{d}{\cos\omega}$, a concoidei este

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}+a.$$

Când schimbăm pe a în $-a$, se obține ecuația

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}-a,$$

care represintă aceeaș curbă, căci o putem deduce din prima schimbând pe ω în $(\pi+\omega)$ și ρ în $-\rho$, ceeace nu schimbă punctul $M(\rho,\omega)$. Deci,

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}+a$$

reprezintă curba compusă din două ramuri distincte, obținute, una mărind, alta micșorând raza vectoare a dreptei D cu aceeaș lungime a. Vom lua deci ecuația

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}-a,$$

unde a și d sunt pozitivi. Schimbând pe ω în $-\omega$, ρ nu se schimbă; deci curba e simetrică în raport cu Ox; e destul deci de a face să varieze ω de la 0 la π. ρ devine infinit pentru $\cos\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}$; asimptota paralelă cu Oy este dată de

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}} Y=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}}\rho\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{d}{\cos\omega}-a\right)(-\cos\omega)=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}}(-d+a\cos\omega)=-d.$$

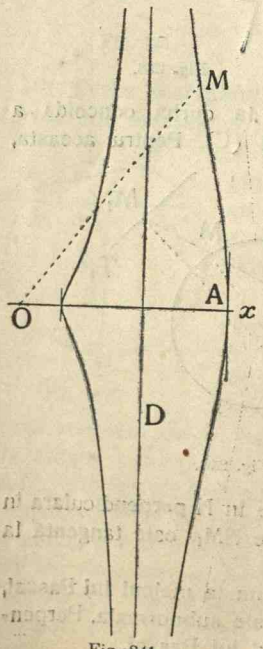


Fig. 241.

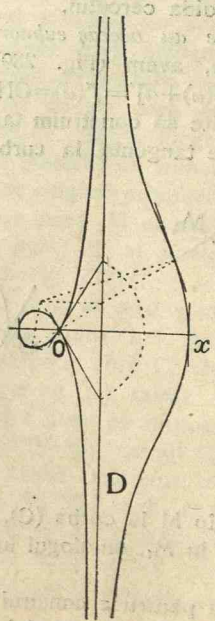


Fig. 242.

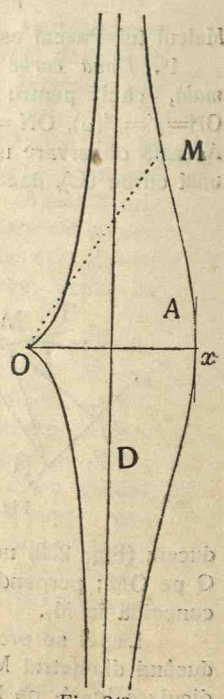


Fig. 243.

Asimptota este chiar dreapta D. Poziția curbei față de asimptotă este dată de diferența

$$\rho\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)-(-d)=a\cos\omega$$

și este pozitivă când $\omega<\frac{\pi}{2}$, negativă când $\omega>\frac{\pi}{2}$.

Avem mai multe cazuri de considerat.

1) $d>a$ (Fig. 241).

ω	0		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ	$(d-a)$	cr ∞	$-\infty$	cr	$-(d+a)$

2) $d<a$ (Fig. 242).

ω	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ	$-(a-d)$	cr 0 cr	∞		$-\infty$	cr	$-(d+a)$

O este punct dublu.

3) $d=a$ (Fig. 243).

ω	0		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ	0 cr	∞	$-\infty$	cr	$-2a$

O este punct de întoarcere.

163. **Cubice circulare unicursale.** Fiind dată o dreaptă (Δ), un cerc (C) și un punct O pe acest cerc, dacă se duce prin O o dreaptă variabilă ce tae pe Δ în M_1 (Fig. 244) și cercul în M_2, punctul M al dreptei variabile care verifică relația $\overline{OM}=\overline{M_2M_1}$ descrie o curbă numită *cubică circulară unicursală*.

O fiind polul, din relația $\overline{OM}=\overline{OM_1}-\overline{OM_2}$, rezultă că ecuația curbei este $\rho=\rho_1-\rho_2$, ρ_1 și ρ_2 însemnând razele vectoare ale lui (Δ) și ale lui (C), corespunzătoare aceluiaș unghi polar ω,

$$\rho_1=\frac{1}{a\cos\omega+b\sin\omega},\quad \rho_2=c\cos\omega+d\sin\omega.$$

Subnormala într'un punct oarecare al curbei fiind $\rho'=\rho'_1-\rho'_2$, ea este egală cu diferența subnormalelor polare în punctele corespunzătoare ale dreptei și ale cercului. De aci rezultă construcția următoare pentru *tangenta la curbă în* M: se duce prin pol o perpendiculară pe raza vectoare OM_1M_2, care tae în m_1 și m_2 normalele la dreaptă și cerc în M_1 și M_2; se ia pe această dreaptă segmentul $\overline{Om}=\overline{Om_1}-\overline{Om_2}=\overline{m_2m_1}$; perpendiculara în M pe Mm este tangenta în M. Se vede, de asemenea, că punctele cubicei unde tangenta este paralelă cu (Δ), corespund punctelor cercului unde tangenta este paralelă cu (Δ).

Raza vectoare ρ se anulează când $\rho_1=\rho_2$, adică când raza vectoare trece prin punctele

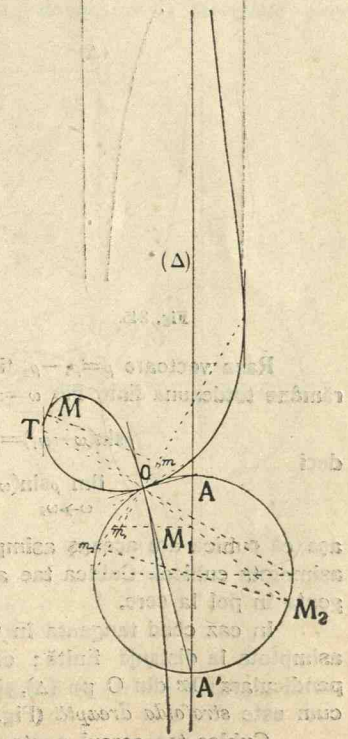


Fig. 244.

A şi A′ de intersecţie ale dreptei (Δ) cu cercul (C). Se ştie că aceste raze vectoare OA şi OA′ sunt tangente la curbă în pol; deci cubica are polul ca punct dublu cu tangentele OA şi OA′. Aceste tangente există dacă (Δ) tae cercul; dacă sunt perpendiculare, adică (Δ) este un diametru al cercului, cubica se zice *strofoidă*; dacă sunt confundate, adică (Δ) tangentă cercului (C), cubica se zice *cisoidă*, polul fiind un *punct de întoarcere*.

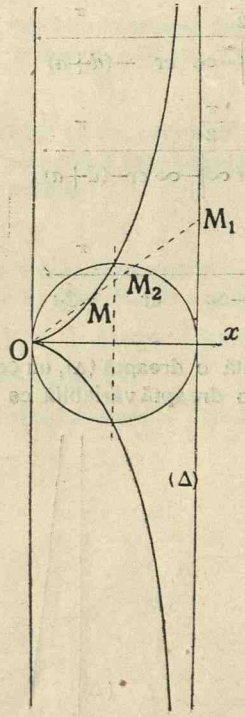


Fig. 245.

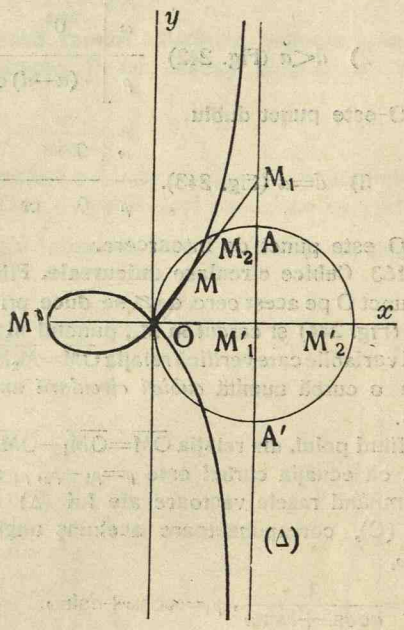


Fig. 246.

Raza vectoare $\rho=\rho_1-\rho_2$ tinde către infinit în acelaş timp cu ρ_1, căci ρ_2 rămâne totdeauna finit. Fie $\omega=\omega_1$ valoarea care face pe $\rho_1=\infty$; avem

$$\rho\sin(\omega-\omega_1)=\rho_1\sin(\omega-\omega_1)-\rho_2\sin(\omega-\omega_1);$$

deci

$$\lim_{\omega\to\omega_1}\rho\sin(\omega-\omega_1)=\lim\ \rho_1\sin(\omega-\omega_1),$$

aşa că cubica are aceeaş asimptotă ca şi dreapta (Δ), adică dreapta (Δ) este asimptota cubicei. Cubica tae asimptota când $\rho=\rho_1$, sau $\rho_2=0$, adică pe tangenta în pol la cerc.

In caz când tangenta în O la cerc este paralelă cu (Δ), curba nu tae asimptota la distanţă finită; cubica este atunci simetrică în raport cu perpendiculara Ox din O pe (Δ), în acest caz, cubica se zice *cubică dreaptă*, cum este *strofoida dreaptă* (Fig. 246) şi *cisoida* dreaptă Fig. (245).

Cubica tae cercul pentru $\rho=\rho_2$ sau $\rho_1-\rho_2=\rho_2$, $\rho_1=2\rho_2$, adică în aceleaşi

puncte ca paralela la (Δ) echidistanţă de O şi (Δ). Curba are unul sau trei puncte de infexiune, după cum trece sau nu prin pol.

Altă definiţie a strofoidei. Ştim că (Fig. 257) OM=PQ prin definiţie. Lum OA=OC, C fiind centrul cercului şi fie R intersecţia dreptei AM cu tangenta în O la cerc. Triunghiurile AOM şi CPQ an AO=CP, OM=PQ, $\widehat{CPQ}=\widehat{AOM}$, căci suplimentele lor $\widehat{CPO}=\widehat{COP}$ (CO=CP). Deci $\widehat{RMO}=\widehat{PQC}=\widehat{ROM}$; deci triunghiul ORM este isoscel, adică OR=RM. Aşa că noua definiţie este: *o secantă variabilă ce trece prin punctul fix* A *tae perpendiculara în* O *pe dreapta* OA *în punctul* R; *se ia pe* AR *punctul* M, *astfel ca* RM=OR; *locul lui* M *este o strofoidă dreaptă*. Notând cu A(−a, 0), secanta din A are ecuaţia $y=\lambda(x+a)$ şi tae pe Oy în punctul R(a, λa). Locul lui M este la intersecţia dreptei variabile cu cercul cu centru în R şi raza RO, $x^2+y^2-2\lambda a y=0$ şi se obţine eliminând pe λ,

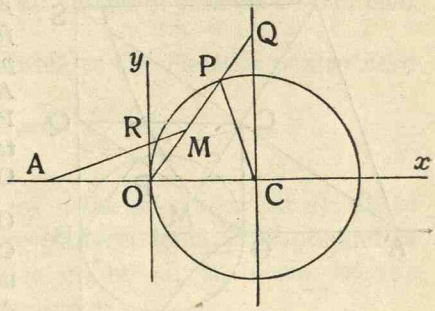


Fig. 247.

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

O proprietate a strofoidei. Strofoida dreaptă este podara unei parabole în raport cu piciorul directoarei, care este punct dublu, iar ca asimptotă perpendiculara din simetricul vârfului parabolei în raport cu piciorul directoarei. In adevăr, fie M un punct al strofoidei (Fig. 248), astfel că RM=OR. Fie E intersecţia perpendicularei în M pe OM cu tangenta în O la cerc; avem OR=RM=RE. Paralela din E la DM tae pe OD în F; avem FD=DO. Fie G intersecţia lui OE cu perpendiculara din F pe ME şi B intersecţia lui EM cu paralela din G la OD. Avem $\widehat{BEG}=\widehat{REM}=\widehat{RME}=\widehat{FEB}$; deci FE=EG, BF=BG. Deci B descrie o parabolă cu fo-

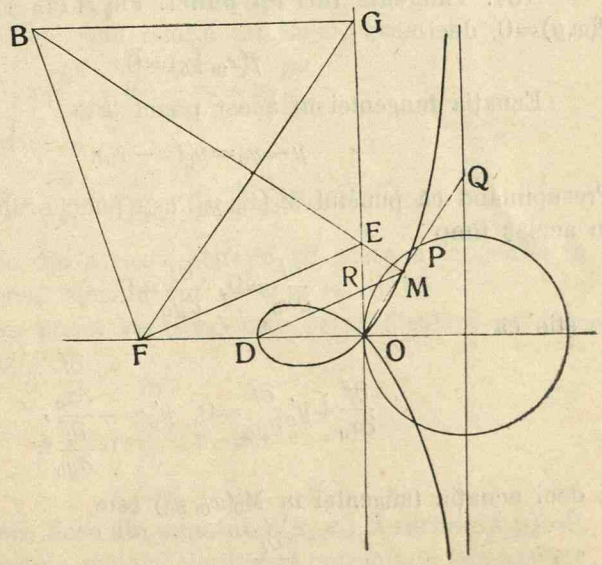
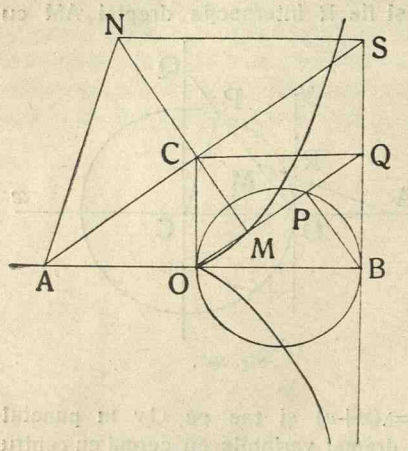


Fig. 248.

carul F, directoarea OG, iar BM este tangenta în B la această parabolă. M fiind piciorul perpendicularei din O pe tangenta la parabolă, rezultă că strofoida este podara parabolei în raport cu punctul O.



Fig

Altă definiție a cisoidei. Cisoida este podara unei parabole în raport cu vârful; vârful și directoarea parabolei sunt punctul de întoarcere și asimptota cisoidei. Avem, prin definiție (Fig. 249), OM=PQ. Perpendiculara în M pe OM tae în C tangenta în O la cerc. Triunghiurile OMC=PBQ, ca fiind dreptunghice și OM=PQ, $\widehat{OCM}=\widehat{PBQ}$. Deci OC=QB, CQ paralel și egal cu OB. Perpendiculara în C pe CM tae pe OB și BQ în A și S, iar paralela din S la OB tae pe CM în N. Avem CO paralelă și egală cu SQ. QB=CO, QB=QS, Q mijlocul lui SB, deci O mijlocul lui AB, AO=OB, AN=NS. N descrie o parabolă cu focarul A și directoare BS; tangenta în N este NM. Perpendiculara din O pe tangentă la parabolă ne dă punctul M al cisoidei, care este podara parabolei în raport cu vârful O.

Curbele $f(x, y)=0$.

164. **Tangenta într'un punct.** Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct al curbei $f(x,y)=0$, deci

$$f(x_0, y_0)=0.$$

Ecuația tangentei în acest punct este

$$y-y_0=y'_0(x-x_0).$$

Presupunând că punctul $M_0(x_0, y_0)$ este punct ordinar, adică nu avem în acelaș timp

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0,$$

se știe că

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}+y'_0\frac{\partial f}{\partial y_0}=0, \quad y'_0=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}},$$

și deci ecuația tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ este

$$(1) \qquad y-y_0=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}}(x-x_0), \quad f(x_0,y_0)=0,$$

sau

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}=0,\ f(x_0,y_0)=0.$$

Punctele pentru care $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$ au tangenta paralelă cu Ox; cele pentru care $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, au tangenta paralelă cu Oy. Punctele pentru care

$$f(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_0}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y_0}=0,$$

se zic *puncte singulare.*

Când funcțiunea $f(x,y)$ este un polinom, curba $f(x,y)=0$, se zice algebrică; în caz contrar, se zice transcendentă. Presupunând că $f(x,y)=0$ este o curbă algebrică, de gradul m, să facem ecuația omogenă cu ajutorul variabilei z și avem

$$z^m f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=F(x,y,z),$$

m fiind gradul polinomului omogen $F(x,y,z)$.

Pentru a găsi ecuația tangentei în punctul (x_0,y_0,z_0) al curbei $F(x,y,z)=0$, să înlocuim în (1) pe x, y, x_0, y_0 cu $\frac{x}{z},\frac{y}{z},\frac{x_0}{z_0},\frac{y_0}{z_0}$, și avem

$$x\frac{\partial F}{\partial x_0}+y\frac{\partial F}{\partial y_0}-\frac{z}{z_0}\left(x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+y\frac{\partial F}{\partial y_0}\right)=0.$$

Dar, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ și aplicând relația lui Euler, avem

$$x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+y_0\frac{\partial F}{\partial y_0}=-z_0\frac{\partial F}{\partial z_0}.$$

Ecuația tangentei devine

$$x\frac{\partial F}{\partial x_0}+y\frac{\partial F}{\partial y_0}+z\frac{\partial F}{\partial z_0}=0,\ F(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Pentru a obține din această ecuație pe aceea a tangentei în coordonate neomogene, vom înlocui pe z și z_0 cu 1.

Normala într'un punct $M_0(x_0,y_0)$ este perpendiculara pe tangentă și are ecuația

$$y-y_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_0}}{\frac{\partial f}{\partial x_0}}(x-x_0).$$

165. **Tangentele duse din punctul $M(x_1,y_1)$ la curba $f(x,y)=0$.** Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct de contact. Scriind că tangenta în acest punct,

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}=0,\ f(x_0,y_0)=0,$$

trece prin punctul $M_1(x_1,y_1)$, avem

$$(x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y_1-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}=0,\ f(x_0,y_0)=0,$$

astfel că coordonatele (x,y) ale punctelor de contact ale tangentelor din $M_1(x_1,y_1)$ la curba $f(x,y)=0$, sunt date de ecuaţiile

$$(x_1-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(y_1-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ f(x,y)=0.$$

166. **Tangente paralele cu o direcţie.** Punctele de contact se obţin ştiind că sunt pe curbă şi coeficientul unghiular al tangentei este egal cu al dirccţii date, a, adică rezolvând sistemul de ecuaţii

$$f(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}+a\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

167. **Concavitatea. Puncte de inflexiune.** Presupunând că studiem poziţia curbei $f(x,y)=0$ faţă de tangenta în punctul $M_0(x_0,y_0)$ ordinar, unde $\frac{\partial f}{\partial y_0}\neq 0$, adică tangenta nu e paralelă cu Oy, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}+y_0'\frac{\partial f}{\partial y_0}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2y_0'\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+y_0'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}+y_0''\frac{\partial f}{\partial y_0}=0;$$

de unde

$$y_0'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}},\quad y_0''=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{\partial f}{\partial y_0}+\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^3}.$$

Concavitatea e dată de semnul lui y_0'', care ne va da poziţia curbei faţă de tangentă. Presupunând că pentru punctul $M_0(x_0,y_0)$ avem $\frac{\partial f}{\partial y_0}\neq 0$, punctele de inflexiune sunt date de $y_0''=0$. Deci, coordonatele punctelor de inflexiune verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0. \tag{3}$$

Dacă se presupune $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, dar punctul $M_0(x_0,y_0)$ ordinar, adică nu putem avea $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, trebue presupus $\frac{\partial f}{\partial x_0}\neq 0$, punctele de inflexiune vor verifica ecuaţia $x''=0$, x'' fiind derivata a doua a lui x în raport cu y. Dar din această nouă condiţie se deduce tot ecuaţia (3), care este simetrică în raport cu x şi y. Această ecuaţie ne dă punctele de inflexiune în toate cazurile.

Primul membru al ecuaţii (3), afară de semn, se mai poate scrie

$$(4)\qquad D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Punctele de inflexiune căutate sunt deci printre punctele comune curbelor reprezentate de ecuaţiile $f(x, y)$, $D=0$. Să presupunem că vrem să găsim puuctele de inflexiune ale unei curbe algebrice de gradul m. Să punem

$$F(x, y, z)=z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Expresiunea (4) se poate scrie

$$D_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

şi devine egală cu D când $z=1$. Ele sunt nule în acelaş timp. Să adunăm la elementele coloanei a treia multiplicate cu $(m-1)$ pe acelea ale primelor două coloane, înmulţite respectiv cu $-x$ şi $-y$; obţinem

$$(m-1)D_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & (m-1)\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & (m-1)\frac{\partial F}{\partial y}-x\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & -x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Ţinând semă de identitatea lui Euler relativă la funcţiunile omogene, avem

$$(m-1)D_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}-mF \end{vmatrix}$$

Operând la fel cu liniile, avem

$$(m-1)^2D_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-m(m-1)F \end{vmatrix}.$$

Punând

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix},$$

avem

$$D_1(m-1)^2=H-m(m-1)F\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right].$$

Dar cum punctul (x, y, z) este pe curbă, adică $F(x, y, z)=0$, urmează

$$D_1(m-1)^2=H.$$

Dar, punctele de inflexiune sunt date de ecuația $D=0$, sau $D_1=0$, care sunt nule în acelaș timp, sau în fine de $H=0$. Așa dar, punctele de inflexiune sunt la intersecția curbelor

$$F(x, y, z)=0, \quad H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}=0.$$

Curba $H=0$ se zice *hesiana* curbei date. Această curbă e de ordinul $(3m-6)$. Să observă că avem $H=0$ pentru $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, căci în acest caz avem $D=0$. Deci hesiana trece prin punctele singulare ale curbei, adică prin acelea pentru care avem $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. In cele ce urmează, vom numi punct de inflexiune orice punct simplu al curbei care aparține hesienei.

Exemplu. $f(x, y)=2x^3-y^3+(y-x)^2=0$ Ecuația hesienei este

$$(y-x)^2(2x-y)=0.$$

Soluția $y-x=0$ corespunde originii, care nu este punct de inflexiune, căci în acest punct avem $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Soluții $2x-y=0$, corespunde din ecuația $f(x, y)=0$, întâi $x=0$, $y=0$, care e punct singular, și $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$, care e punct de inflexiune $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0, \frac{\partial f}{\partial y}\neq 0\right)$.

168. **Clasificarea punctelor multiple.** Am văzut că $M_0(x_0, y_0)$ este un punct singular al curbei $f(x,y)=0$, dacă

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0, \quad f(x_0, y_0)=0.$$

Să presupunem, în general, că toate derivatele parțiale ale funcțiunei $f(x,y)$ sunt nule până la cele de ordinul $(p-1)$ și că

cele de ordinul p sunt diferite de zero. Ecuația curbei se scrie

$$f(x,y)=f(x_0+x-x_0,\ y_0+y-y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]+$$

$$\frac{1}{1.2}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right]+\ldots+$$

$$\frac{1}{(p-1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(p-1)}+\frac{1}{p!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(p)}$$

$$+\ldots+\frac{1}{m!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(m)}.$$

In cazul considerat, ecuația curbei se reduce la

$$f(x,y)=\frac{1}{p!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(p)}+\ldots+$$

$$\frac{1}{m!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(m)}, \tag{5}$$

unde parantezele se desvoltă după formula binomului și unde se înlocuește $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^q$ prin $\frac{\partial^q f}{\partial x^q}$. Sau, se mai poate scrie

$$f(x,y)=\varphi_p(x-x_0,\ y-y_0)+\varphi_{p+1}(x-x_0,\ y-y_0)+\ldots+\varphi_m(x-x_0,\ y-y_0)=0,$$

φ_s fiind o funcțiune omogenă și de gradul s în raport cu $(x-x_0)$ și $(y-y_0)$.

O dreaptă oarecare ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ are ecuația

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\rho,$$

α și β fiind parametrii directori ai dreptei, iar ρ cantitatea ce definește poziția unui punct M pe această dreaptă. Coordonatele punctului $M(x, y)$ al acestei drepte sunt

$$x=x_0+\alpha\rho,\quad y=y_0+\beta\rho.$$

Punctele de intersecție ale acestei drepte cu curba $f(x, y)=0$ se obțin înlocuind în (5) pe $(x-x_0)$ cu $\alpha\rho$ și $(y-y_0)$ cu $\beta\rho$ și sunt date de ecuația

$$\frac{\rho^p}{p!}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^p+\ldots+\frac{\rho^m}{m!}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^{(m)}=0.$$

Această ecuație care dă valorile lui ρ corespunzătoare punctelor de intersecție ale curbei cu dreapta considerată, are p rădăcini egale cu zero, deci p puncte confundate cu M_0. Deci, o dreaptă ce trece prin acest punct tae curba în p puncte confundate în acest punct, care se zice *punct multiplu de ordinul p.*

Valorile lui ρ care corespund celorlalte $(m-p)$ puncte de intersecţie ale curbei cu dreapta de parametri directori α şi β, sunt date de

$$\frac{1}{p!}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^{(p)}+\frac{\rho}{(p+1)!}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^{(p+1)}+\ldots+$$
$$\frac{\rho^{m-p}}{m!}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^{(m)}=0.$$

Pentru ca dreapta de parametri directori α, β să mai tae curba încă într'un punct confundat cu M_0, ceea ce însemnează că să tae curba în $(p+1)$ confundate cu M_0, trebue să avem

$$\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^{(p)}=0, \tag{6}$$

sau

$$\sum\frac{p!}{q!\,s!}\alpha^p\beta^s\frac{\partial^p f}{\partial x_0^q\partial y_0^s}=0,\quad q+s=p.$$

Divizând cu α^p şi punând $\frac{\beta}{\alpha}=\mu$, coeficientul unghiular al dreptei ce trece prin M_0 multiplu de ordinul p şi care tae curba în $(p+1)$ puncte confundate cu M_0, adică al tangentei la curbă în M_0, este dat de ecuaţia

$$\frac{\partial^p f}{\partial y_0^p}\mu^p+\frac{p}{1}\frac{\partial^p f}{\partial y_0^{p-1}\partial x_0}\mu^{p-1}+\ldots+\frac{p}{1}\frac{\partial^p f}{\partial y_0\partial x_0^{p-1}}\mu+\frac{\partial^p f}{\partial x_0^p}=0.$$

Această ecuaţie fiind de gradul p în μ, rezultă că sunt p drepte care îndeplinesc condiţia că tae curba în $(p+1)$ puncte confundate cu M_0, sunt p tangente, adică sunt p ramuri ale curbei ce trec prin M_0; de aceea se zice punct multiplu de ordinul p.

Ecuaţia uneia din aceste tangente fiind

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta},$$

ecuaţia celor p tangente la ramurile ce trec prin M_0 se obţine înlocuind în (6) pe α şi β cu $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ şi este

$$\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(p)}=0, \tag{7}$$

unde se va înlocui $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^q\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^s$ prin $\frac{\partial^{q+s}f}{\partial x_0^q\partial y_0^s}$.

Deci, presupunând că am scris ecuaţia curbei sub forma (5), adică în vecinătatea punctului M_0, care este multiplu şi de ordinul p, ecuaţia tangentelor la cele p ramuri ce trec prin M_0 este dată de (7), grupul termenilor de gradul cel mai mic.

In particular, când curba trece prin origină, ecuaţia ei se poate scrie

$$\varphi_p(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0,$$

$\varphi_q(x,y)$ fiind o funcţiune omogenă şi de gradul q în raport cu x şi y. Curba admite origina ca punct multiplu de ordinul p, iar tangentele în origină sunt date de grupul termenilor de gradul cel mai mic,

$$\varphi_p(x,y)=0.$$

De ex., pentru curba $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, origina este un punct dublu, iar tangentele la cele două ramuri ce trec prin acest punct au ecuaţia $x^2-y^2=0$, adică sunt $x-y=0$, $x+y=0$, bisectoarele axelor.

Cazul punctului dublu. Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct al curbei, pentru care avem $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, derivatele parţiale de ordinul al doilea nefiind toate nule. Ecuaţia curbei în vecinătatea acestui punct se poate scrie

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right]+$$

$$\frac{1}{3!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}\right]^{(3)}+\ldots=0,$$

iar ecuaţia tangentelor este

$$(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0.$$

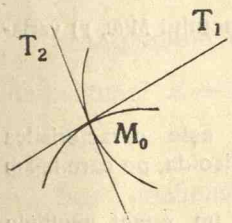


Fig. 250.

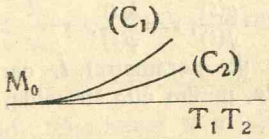


Fig. 251.

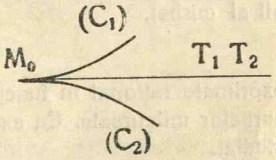


Fig. 252.

Dacă $R=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0$, sunt două tangente reale, avem un punct dublu real (Fig. 250). Dacă $R<0$, avem un punct dublu izolat.

Dacă $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0$, tangentele sunt confundate; cele

două ramuri ale curbei formează un *punct de întoarcere* (1) (Fig. 251, 252), cele două ramuri au aceeaş tangentă.

Studiul cazului acesta este foarte delicat şi prezintă o mare varietate de cazuri după cum se vede din exemplele următoare. Curba $y^2 = x^3$ prezintă în origină un punct de întoarcere de prima speţă (Fig. 252), cele două ramuri fiind tangente la Ox, de o parte şi de alta a axei. Curba $y^2-2x^2y+x^4-x^5=0$, care se mai poate scrie $y=x^2\pm x^{5/2}$, prezintă în origină un punct de întoarcere de speţa a doua (Fig. 251), ambele ramuri fiind tangente la Ox şi de aceeaş parte a lui Ox. Curba $x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$ prezintă două ramuri de curbă, neoferind nimic particular, tangente una şi alta la Ox, căci ecuaţia se scrie

$$y=\frac{3x^2\pm x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}$$

şi ramurile obţinute luând succesiv cele două semne n'au nici o singularitate în origină. Curba $y^2-2x^2y+x^4=0$ se compune din două ramuri confundate. Curba $y^2+x^4+y^4=0$ are origina ca punct dublu izolat.

Observări. I. *O curbă de ordinul al treilea nu poate să aibă mai mult de un punct dublu fără ca să se descompue.* In adevăr, dacă ar avea două puncte duble, A şi B, atunci dreapta AB ar tăia curba în patru puncte, două confundate cu A şi două confundate cu B. Aceasta este imposibil, căci curba este de ordinul al treilea, afară de cazul când dreapta AB nu face parte din curbă. In acest caz, curba de ordinul al treilea se descompune în dreapta AB şi o conică ce trece prin punctele A şi B.

II. *Orice curbă de ordinul al treilea ce are un punct dublu este unicursală.* Prin punctul dublu $A(a, b)$ să ducem o dreaptă $y-b=t(x-a)$, care mai tae curba $f(x, y)=0$ în punctul M. Ecuaţia care dă abscisele punctelor de intersecţie este

$$f[x, b+t(x-a)]=0,$$

care trebue să se divide cu $(x-a)^2$, corespunzătoare absciselor egale ale punctului dublu A. Divizând cu $(x-a)^2$, rămâne $g(t)-x\psi(t)=0$, ce dă abscisa punctului M,

$$x=\frac{g(t)}{\psi(t)}.$$

Inlocuind în $y-b=t(x-a)$ pe x, avem coordonatele punctului $M(x, y)$ variabil al curbei,

$$x=\frac{g(t)}{\psi(t)}, y=\frac{h(t)}{\psi(t)},$$

exprimate raţional în funcţiune de parametrul t, care este caracteristica curbelor unicursale. Ca exemple, putem cita strofoida, cisoida, pe care le-am studiat.

In general, orice curbă de gradul m, care admite un punct multiplu de ordinul $(m-1)$, este unicursală, adică se pot exprima coordonatele unui punct al curbei sub formă raţională

$$x=\frac{g(t)}{\psi(t)}, y=\frac{h(t)}{\psi(t)},$$

în funcţiune de un parametru t.

(1) Studiul aprofundat al acestei chestii se poate vedea în memoriul lui **Puiseux**, *Recherches sur les fonctions algebriques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, t. XV).

169. **Ramuri infinite. Asimptote.** *Asimptote paralele cu axele.* Pentru a determina asimptotele paralele cu Oy, să scriem ecuația curbei sub forma

$$y^p \varphi_0(x)+y^{p-1}\varphi_1(x)+\ldots=0,$$

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... fiind funcțiuni întregi de x. Scriind această ecuație sub forma

$$\varphi_0(x)+\frac{1}{y}\varphi_1(x)+\ldots=0,$$

rezultă că $y\to\infty$, sau $\frac{1}{y}=0$, când înlocuim pe x cu una din rădăcinile ecuației $\varphi_0(x)=0$. Deci $\varphi_0(x)=0$ este ecuația asimptotelor paralele cu Oy, care se obține egalând cu zero coeficientul lui y la puterea cea mai înaltă.

De asemenea, asimptotele paralele cu Ox se obțin egalând cu zero coeficientul lui x la puterea cea mai înaltă.

Asimptote oarecare. Scriind ecuația curbei sub forma

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots=0,$$

abscisele punctelor de intersecție ale curbei cu dreapta $y=ux+d$ sunt date de

$$\varphi_m(x,ux+d)+\varphi_{m-1}(x,ux+d)+\ldots=0,$$

sau

$$x^m\varphi_m\left(1,u+\frac{d}{x}\right)+x^{m-1}\varphi_{m-1}\left(1,u+\frac{d}{x}\right)+\ldots=0,$$

sau

$$\varphi_m\left(1,u+\frac{d}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(1,u+\frac{d}{x}\right)+\ldots=0. \tag{8}$$

Presupunând că această dreaptă tae curba într'un punct la infinit, atunci $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, deci urmează

$$\varphi_m(1,u)=0.$$

Deci, coeficienții unghiulari u ai direcțiilor asimptotice sunt dați de ecuația $\varphi_m(1,u)=0$, iar ecuația acestor direcții se obține înlocuind pe u cu $\frac{y}{x}$ și este

$$\varphi_m(x,y)=0,$$

adică grupul termenilor de gradul cel mai înalt din ecuația curbei (toți de același grad).

Dezvoltând expresia (8) cu formula lui Taylor, avem

$$\left[\varphi_m(1,u)+\frac{d}{x}\frac{\partial\varphi_m(1,u)}{\partial y}+\ldots\right]+\frac{1}{x}\left[\varphi_{m-1}(1,u)+\frac{d}{x}\frac{\partial\varphi_{m-1}(1,u)}{\partial x}+\ldots\right]$$
$$+\frac{1}{x^2}\left[\varphi_{m-2}(1,u)+\frac{d}{x}\frac{\partial\varphi_{m-2}(1,u)}{\partial y}+\ldots\right]+\ldots=0,$$

$$\varphi_m(1,u)+\frac{1}{x}\left[\varphi_{m-1}(1,u)+d\frac{\partial\varphi_m(1,u)}{\partial y}\right]+\frac{1}{x^2}(\ )+\ldots=0,$$

și de oarece $\varphi_m(1,u)=0$, rămâne

$$(9)\qquad \frac{1}{x}\left[\varphi_{m-1}(1,u)+d\frac{\partial\varphi_m(1,u)}{\partial y}\right]+\frac{1}{x^2}(\ )+\ldots=0.$$

Această ecuație care admite o soluție $\frac{1}{x}=0$, deci $x\to\infty$, mai admite încă o soluție $\frac{1}{x}=0$, deci $x\to\infty$, când

$$\varphi_{m-1}(1,u)+d\frac{\partial\varphi_m(1,u)}{\partial y}=0,$$

adică egalând cu zero coeficientul puterei celei mai mare a lui x. Din această ecuație se deduce valoarea lui d, pentru care dreapta $y=ux+d$ este asimptotă, adică tae curba în două puncte aruncate la infinit.

Deci, pentru găsirea asimptotelor, direcțiile asimptotice sunt date de grupul termenilor de gradul cel mai înalt din ecuația curbei, $\varphi_m(x,y)=0$, iar coeficienții unghiulari u, de ecuația

$$\varphi_m(1,u)=0.$$

Valorile lui d se obțin înlocuind în ecuația curbei pe y cu $ux+d$,

$$f(x,ux+d)=x^p\,\psi_0(d)+x^{p-1}\psi_1(d)+\ldots,$$

și scriind că coeficientul lui x la puterea cea mai înaltă este nul, adică $\psi_0(d)=0$. Această ecuație dă valoarea lui d, așa că asimptota are ecuația

$$y=ux+d.$$

Dacă ecuația $\psi_0(d)=0$ nu conține pe d, ceea ce însemnează că în această ecuație coeficientul lui d este nul, urmează că a avut o rădăcină $d\to\infty$, deci asimptota este aruncată la infinit, avem o ramură parabolică.

Exemplu. $x^3+y^3-3axy=0$. Grupul termenilor de gradul cel mai înalt este $x^3+y^3=0$, deci direcțiile asimptotice sunt date de $1+u^3=0$, care admite soluția $u=-1$. Asimptota este $y=-x+d$. Pentru a găsi pe d, înlocuim pe y cu $(-x+d)$ și avem

$$x^3+(-x+d)^3-3ax(-x+d)=0,\quad 3x^2(d+a)-3x(d^2+ad)+d^3=0.$$

Egalând cu zero coeficientul lui x^2, avem $d+a=0$, deci $d=-a$, iar ecuația asimptotei este

$$y=-x-a.$$

170. **Metodă pentru construcția curbelor** $f(x,y)=0$. Considerăm cazul când ecuația $f(x,y)=0$ nu se poate rezolva în raport cu x sau y, căci în acest caz, știm să construim curba. Dacă ecuația $f(x.y)=0$ nu se schimbă când înlocuim pe x cu $-x$ și y $-y$, curba e simetrică în raport cu origina; se studiază curba numai pentru valorile pozitive ale lui x. Dacă $f(x,y)=0$ și $f(x,-y)=0$, curba e simetrică în raport cu Ox; se studiază numai pentru valorile pozitive ale lui y. Dacă $f(x,y)=0$, $f(-x,y)=0$, curba e simetrică în raport cu Oy, se studiază numai pentru valorile pozitive ale lui x. Dacă $f(x,y)=0$, $f(y,x)=0$, curba e simetrică în raport cu bisectoarea întâi a axelor. Având în considerație simetria, se poate reduce intervalul în care construim curba.

Acestea fiind stabilite, se procedează astfel. 1°. Se caută valorile lui x, pentru care ecuația $f(x,y)=0$, considerată în y, admite rădăcini multiple; sau, dacă e favorabil, valorile lui y, pentru care ecuația $f(x,y)=0$, considerată în x, admite rădăcini multiple.

2°. Se caută valorile lui x, pentru care y devine infinit, adică valorile lui x care anulează coeficientul puterii celei mai mari a lui y din ecuația $f(x,y)=0$.

3°. Se caută valorile lui x pentru care care $y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$ se anulează sau este infinit. Se obțin, astfel, intervalele în care y variază în același sens. Se caută semnul diferitelor valori principale ale lui y. De asemenea, se caută valorile particulare ale lui x, pentru care ecuația $f(x,y)=0$ are una sau mai multe rădăcini nule, adică acelea care anulează termenul independent de y în ecuația $f(x,y)=0$.

4°. Se așează aceste valori ale lui x în ordine de mărime crescătoare și se obțin intervalele consecutive în care valorile lui y rămân distincte, continue, nu se anulează și deci păstrează un semn constant. In fiecare din aceste intervale, se caută, cu ajutorul teoremei lui Rolle, numărul acestor valori ale lui y și semnul lor. Fiecare din ele corespunde la un arc de curbă.

5°. Se caută, în fiecare interval, volorile limite ale lui y, când x tinde către extremitățile intervalului. Pentru aceasta, se rezolvă, în raport cu y, ecuația $f(x,y)=0$, după ce s'a dat valoarea limită lui x.

Exemple. I. *Să se construiască curba care este locul geometric al punctelor* M, *astfel ca produsul distanţelor la două puncte fixe* F *şi* F′ *să fie constant şi egal cu* a^2. Avem $MF.MF'=a^2$, sau (Fig. 253)

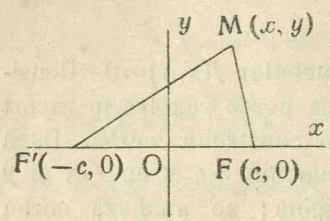


Fig. 253.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2,$$

astfel că ecuaţia curbei este

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2-a^4=0,$$

şi se zice *ovalele lui Cassini*. Dezvoltând, avem

$$y^4+2y^2(x^2+c^2)+(x^2-c^2)^2-a^4=0. \tag{10}$$

Ecuaţia conţine numai puteri cu soţ (perechi) ale lui x şi y, deci este simetrică în raport cu Ox şi Oy şi origina. Vom studia numai pentru valorile pozitive ale lui x şi y care verifică ecuaţia. Ecuaţia (10) fiind bipătrată, are rădăcini multiple, când

$$(x^2+c^2)^2-(x^2-c^2)^2+a^4=0,\quad (x^2-c^2)^2-a^4=0,$$

deci, când $4c^2x^2+a^4=0$, $x^2=c^2\pm a^2$. Prima nu e verificată; rămâne numai în cazurile $x=\sqrt{c^2+a^2}$, $x=\sqrt{c^2-a^2}$, $c>a$, când $y=0$. Ecuaţia (10) n'are rădăcini infinite pentru y, căci coeficientul lui y^4 fiind 1, nu poate fi nul. Ecuaţia (10) are rădăcini nule pentru y, când

$$(x^2-c^2)^2-a^4=0,\ x=\sqrt{c^2+a^2},\ x=\sqrt{c^2-a^2},\ c>a.$$

Avem

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2+y^2+c^2)};$$

y' poate fi infinit numai pentru $y=0$, ceea ce se întâmplă pentru $x=\sqrt{c^2+a^2}$, $x=\sqrt{c^2-a^2}$; $y'=0$, pentru $x=0$ şi $x^2+y^2-c^2=0$, adică pentru punctele de intersecţie ale curbei cu axa Oy, sau cu cercul $x^2+y^2-c^2=0$. Rezolvând ecuaţia curbei şi cercului, avem

$$x^2=\frac{4c^4-a^4}{4c^2},\ y^2=\frac{a^4}{4c^2},$$

sau

$$x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c},\ a\leqq c\sqrt{2},\ y=\frac{a^2}{2c}.$$

Distingem mai multe cazuri, după valorile lui c faţă de a. 1°. $a<c$ valorile principale pozitive ale lui x sunt $0, \sqrt{c^2-a^2}, \frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \sqrt{c^2+a^2}, \infty$.

Să cercetăm, în acest caz, când ecuaţia (10) are rădăcini reale în y. Fiind bipătrată, realizantul est $(x^2+c^2)^2-(x^2-c^2)^2+a^4=4c^2x^2+a^4>0$. Dar, fiind bipătrată, observăm că

$$y_1^2y_2^2=(x^2-c^2)^2-a^4=(x^2-c^2+a^2)(x^2-c^2-a^2),\ y_1^2+y_2^2=-2(x^2+c^2)<0.$$

$$\underset{+}{\overset{-\sqrt{a^2+c^2}}{|}}\ \underset{-}{\overset{-\sqrt{c^2-a^2}}{|}}\ \underset{+}{\overset{\sqrt{c^2-a^2}}{|}}\ \underset{-}{\overset{\sqrt{a^2+c^2}}{|}}\ \underset{+}{|}$$

Produsul este pozitiv când $-\sqrt{c^2-a^2}<x<\sqrt{c^2-a^2}$, $x>\sqrt{a^2+c^2}$, şi cum suma este negativă, y_1^2, y_2^2 sunt ambele negative, deci y_1, y_2 imaginare. Curba n'are ramuri pentru aceste

intervale. Pentru $\sqrt{c^2-a^2}<x<\sqrt{a^2+c^2}$, produsul este negativ, rădăcinile y_1^2, y_2^2 sunt de semne contrare; una fiind pozitivă, corespund două valori reale pentru y. Deci, intervalele unde poate varia x sunt $\left(\sqrt{c^2-a^2}, \frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \sqrt{c^2+a^2}\right)$, în care y este real şi pozitiv; y este nul pentru $x=\sqrt{c^2-a^2}$, $x=\sqrt{c^2+a^2}$, iar pentru $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, y este maximum şi egal cu $\frac{a^2}{2c}$.

Ca să vedem cum variază y în aceste intervale, să studiem semnul lui y'. Acest semn depinde de $(x^2+y^2-c^2)$ care se anulează pentru $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, adică la capetele intervalelor. Deci, în fiecare interval, y' are un semn constant şi deci y variază în acelaş sens. Se obţine un arc de curbă BDC (Fig. 254), y fiind maximum pentru $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, în punctul D, de coordonate

$$x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c},\quad y=\frac{a^2}{2c}.$$

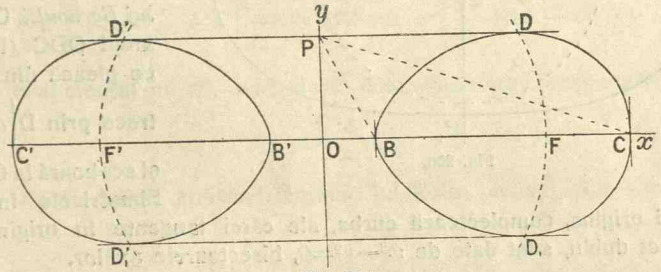


Fig. 254

Luând simetricele acestui arc, avem două bucle $BCDD_1$, $B'C'D'D_1$.

2°. $c<a<c\sqrt{2}$. Voalrile lui x în ordine crescătoare sunt 0, $\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$ $\sqrt{a^2+c^2}$, ∞. Valorile reale lui y (ca şi în cazul precedent) sunt numai în intervalele $\left(0, \frac{\sqrt{4c^2-a^4}}{2c}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \sqrt{a^2+c^2}\right)$, iar y este nul pentru $x=\sqrt{a^2+c^2}$.

Făcând în ecuaţia curbei $x=0$, y este dat de ecuaţia $y^4+2y^2c^2+c^4-a^4=0$, $y=\sqrt{a^2-c^2}$. Când $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, $y=\frac{a^2}{2c}$; când $x=\sqrt{a^2+c^2}$, $y=0$. Vedem că y' se anulează pentru $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$; deci în fiecare din intervale, y are un semn constant. Ordonata OE (Fig. 255) corespunzătoare lui $x=0$ fiind $\sqrt{a^2-c^2}$, mai mică de cât

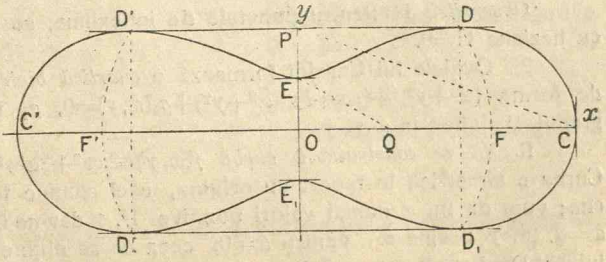


Fig. 255.

$\frac{a^2}{2c}$, ordonata corespunzătoare lui $x=\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$, urmează ca arcul ED pornește din $E(0, \sqrt{a^2-c^2})$, unde tangenta este paralelă cu Ox, urcându-se până în $D\left(\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \frac{a^2}{2c}\right)$, unde iarăși tangenta e paralelă cu Ox; apoi scade până la $C(\sqrt{c^2+a^2}, 0)$, unde tangenta este paralelă cu Oy. Se vede că între D și E avem un punct de inflexiune. Luând arcele simetrice în raport cu Ox și Oy, se obține toată curba.

3°. $a>c\sqrt{2}$. Valorile lui x sunt $0, \sqrt{c^2+a^2}, \infty$; y este real în intervalul $(0, \sqrt{a^2+c^2})$; y variază de la $\sqrt{a^2-c^2}$ la 0, descrescând; obținem arcul EC (Fig. 256). Se complectează curba luând simetricele.

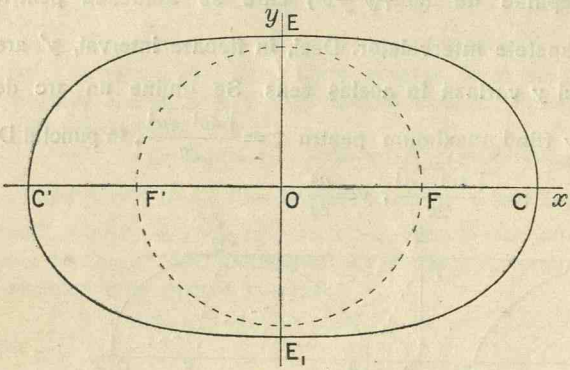


Fig. 256.

4°. $a=c$. Ecuația este în acest caz

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

și se zice *lemniscata lui Bernoulli*. Curba are arcul ODC (Fig. 257), ce pleacă din origină, trece prin $D\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$ și scoboară la $C(a\sqrt{2}, 0)$. Simetricele în raport cu Ox și origina, complectează curba, ale cărei tangente în origină, care este punct dublu, sunt date de $x^2-y^2=0$, bisectoarele axelor.

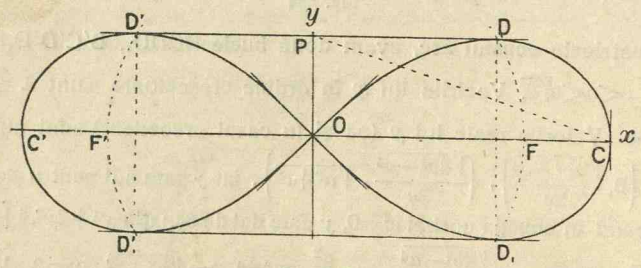


Fig. 257.

Observări. 1°. Pentru punctele de inflexiune, se poate lua intersecția cu heziana $H=0$.

2°. Ovalele lui Cassini formează o *cuartică bicirculară*, cu o ecuație de forma $(x^2+y^2)^2+(ax+by)(x^2+y^2)+g_2(x,y)=0$, g_2 fiind un polinom de gradul al doilea în x și y.

II. *Să se construiască curba* $f(x,y)\equiv 2xy^3+3x^2y^2-(x^2-a^2)^2=0$, $a>0$. Curba e simetrică în raport cu origina, căci conține termeni de grad pereche; vom da lui x numai valori pozitive. 1°. y devine 0, pentru $(x^2-a^2)^2=0$, $x=a$. 2°. y devine ∞, pentru $x=0$, ceea ce se obține anulând coeficientul lui y^3. Deci $x=0$ este o asimptotă, adică axa Oy este o asimptotă a curbei

3°. Asimptotele neparalele cu Oy au direcțiile asimptotice date de grupul termenilor de gradul cel mai înalt, $2xy^3+3x^2y^2-x^4=0$, iar coeficienții lor unghiulari sunt dați de $2u^3+3u^2-1=0$, care admite rădăcina $u_1=-1$ ca dublă și $u_3=\frac{1}{2}$. Asimptota de direcție $--1$, are ecuația $y=-x+d$; înlocuind în $f(x,y)=0$ pe y cu $(-x+d)$, avem $2x(-x+d)^3+3x^2(-x+d)^2-(x^2-a^2)^2=0$, sau $x^2(-3d^2+2a^2)+2d^3x-a^4=0$. Egalând cu zero coeficientul lui x^2, avem

$$-3d^2+2a=0,\quad d=\pm a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

și deci sunt două asimptote de această direcție

$$y=-x+a\sqrt{\frac{2}{3}},\quad y=-x-a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pentru a obține cealaltă asimptotă, corespunzătoare direcției $\frac{1}{2}$, înlocuim în ecuația curbei pe y cu $\left(\frac{x}{2}+d\right)$ și avem

$$2x\left(\frac{x}{2}+d\right)^3+3x^2\left(\frac{x}{2}+d\right)^2-(x^2-a^2)^2=0,\quad x^3\left(\frac{3d}{2}+3d\right)+x^2(\ )+\ldots=0.$$

Anulând coeficientul lui x^3, avem $d=0$, deci asimptota corespunzătoare este

$$y=\frac{x}{2}.$$

4°. Să discutăm, aplicând teorema lui Rolle, ecuației $f(x,y)=0$, considerată în y. Avem

$$f'_y=6xy^2+6x^2y=6xy(x+y).$$

Rădăcinile derivatei sunt date de $x=0$, $y=0$, $x+y=0$. Dar, pentru $x=0$, nu corespund valori pentru y; rădăcinile derivatei sunt $y=0$, $y=-x$ și șirul lui Rolle este

x	$f(-\infty)$	$f(-x)=a^2(2x^2-a^2)$	$f(0)=-(x^2-a^2)^2$	$f(\infty)$	y
					∞
0	$-$	$-$	$-$	$+$	una reală pentru y
$\frac{a}{\sqrt{2}}$		0			$-\frac{a}{\sqrt{2}}$, $-\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.
					A A B
	$-$	$+$	$-$	$+$	una pozitivă și două negative.
a			0		$-\frac{3a}{2}$, 0, 0.
					D C C
∞	$-$	$+$	$-$	$+$	una pozitivă și două negative.

Dacă $0<x<\frac{a}{\sqrt{2}}$, șirul lui Rolle dă o valoare reală pentru y, pozitivă; o paralelă cu Oy tae curba într'un singur punct deasupra lui Ox, deci o

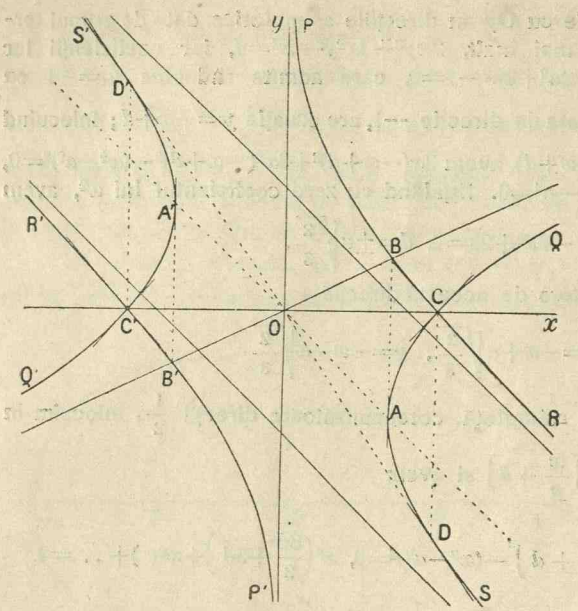


Fig. 258.

singură ramură (Fig. 258). Dacă $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, ecuația are o rădăcină dublă; două rădăcini pentru y sunt egale cu $-\frac{a}{\sqrt{2}}$, corespunzătoare punctului A $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, iar alta egală cu $\frac{a}{2\sqrt{2}}$, căreia îi corespunde punctul B $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$. Tangenta în A este paralelă cu Oy, căci avem $f'_y=0$. Când $\frac{a}{\sqrt{2}}<x<a$, șirul dă trei rădăcini reale, o paralelă cu Oy tae curba în trei puncte reale, deci trei ramuri, una pleacă din B, alte două din A. Când $x=a$, avem o rădăcină dublă $y=0$ și alta egală cu $-\frac{3a}{2}$, cărora le corespund respectiv punctele C$(a, 0)$ care este dublu și D $\left(a, -\frac{3a}{2}\right)$. În C vin deci două ramuri, cele care pleacă din B și A. Când $x>a$, șirul prezintă trei valori reale pentru y, deci trei ramuri, una pleacă din D și celelalte amândouă din C, una deasupra lui Ox, celelalte dedesubt, căci din șirul lui Rolle, se vede că două rădăcini sunt negative una pozitivă.

III. *Să se construiască curba*, $f(x, y)\equiv x^3+y^3-3axy-8a^3=0$. Ecuația în y este

$$y^3-3axy+x^3-8a^3=0.$$

y este nul pentru $x^3=8a^3$, $x=2a$. Derivata în y este

$$f'_y=3y^2-3ax=3(y^2-ax)=3(y-\sqrt{ax})(y+\sqrt{ax}).$$

Când $x>0$, șirul lui Rolle este

$f(-\infty)<0$; $f(-\sqrt{ax})=x^3+2ax\sqrt{ax}-8a^3$; $f(\sqrt{ax})=x^3-2ax\sqrt{ax}-8a^3$; $f(\infty)>0$.

Avem $f(-\sqrt{ax})>0$, când $x^3+2ax\sqrt{ax}-8a^3>0$. Punând $ax=z^2$, $z=\pm\sqrt{ax}$, trebue să avem $z^6+2a^3z^3-8a^6>0$; deci $z^3<-4a^3$, $z^3>2a^3$. De unde $z<-a\sqrt[3]{4}$, $z>a\sqrt[3]{2}$; $z^2<a^2.\sqrt[3]{16}$, $z^2>a^2.\sqrt[3]{4}$; $ax<a^2\sqrt[3]{16}$, $ax>a^2\sqrt[3]{4}$; $a\sqrt[3]{4}<x<2a\sqrt[3]{2}$. De asemenea, $f(\sqrt{ax})<0$, când $x^3-2ax\sqrt{ax}-8a^3<0$, $z^6-2a^3z^3-8a^6<0$, $-2a^3<z^3<4a^3$, $-a\sqrt[3]{2}<z<a\sqrt[3]{4}$, $a^2\sqrt[3]{4}<z^2<a^2\sqrt[3]{16}$, $a^2\sqrt[3]{4}<ax<a^2\sqrt[3]{16}$, $a\sqrt[3]{4}<x<2a\sqrt[3]{2}$. Deci, când

$0<x<a\sqrt[3]{4}$, sau $x>2a\sqrt[3]{2}$, ecuaţia are o rădăcină reală; când $a\sqrt[3]{4}<x<2a\sqrt[3]{2}$, trei reale. Pentru $a\sqrt[3]{4}$, $2a\sqrt[3]{2}$, avem câte o rădăcină dublă.

Dacă $x<0$, şirul lui Rolle este $f(-\infty)<0$, $f(\infty)>0$, are numai una reală. Deci combinând ambele cazuri, avem tabloul şi figura 259.

x	y
$-\infty$	∞
	o valoare pentru $y>0$, arcul PA.
$a\sqrt[3]{4}$	$-a\sqrt[3]{2}$, $-a\sqrt[3]{2}$, $2a\sqrt[3]{2}$. B B A
	două valori pentru $y<0$, BI, BD; una pozitivă, AC.
$2a$	$-a\sqrt{6}$, 0, $a\sqrt{6}$. D I C
	una negativă DE; două pozitive, CA', IA'.
$2a\sqrt[3]{2}$	$-2a\sqrt[3]{4}$, $a\sqrt[3]{4}$, $a\sqrt[3]{4}$. E A' A'
	una negativă, EP'.
∞	

Asimptote paralele cu Oy nu sunt. Celelalte asimptote au direcţiile date de $x^3+y^3=0$, $1+u^3=0$, $u=-1$. Asimptota este de forma $y=-x+d$. Pentru a găsi pe d înlocuim pe y în ecuaţia curbei cu $(-x+d)$ şi avem $x^3+(-x+d)^3-3ax(-x+d)-8a^3=0$, $x^2(3d+3a)+\ldots=0$. Anulând coeficientul lui x^2, avem $d=-a$, aşa că asimptota este $y=-x-a$.

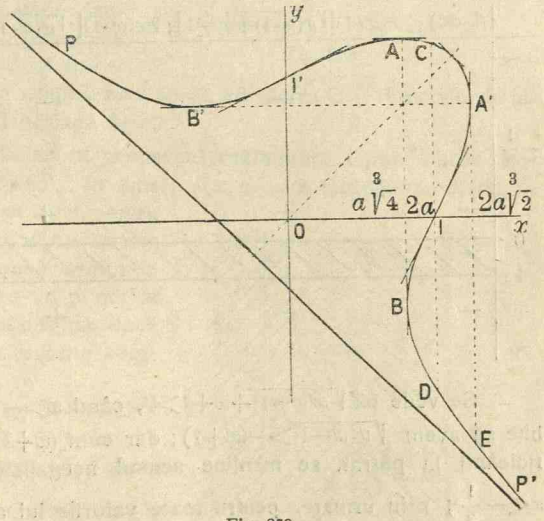


Fig. 259.

Curba e simetrică în raport cu bisectoarea întâia a axelor, căci rămâne neschimbată când înlocuim pe x şi y cu y şi x.

Coeficentul unghiular al tangentei este dat de $y'=-\frac{f_x'}{f_y'}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}$ $=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$. Tangenta e paralelă cu Ox, când $x^2=ay$. Rezolvând ecuaţia $f(x, y)=0$ şi $x^2=ay$, avem $x=-a\sqrt[3]{2}$ (punctul B'), $x=a\sqrt[3]{4}$ (punctul A). In mod analog se vede că sunt două puncte unde tangenta e paralelă cu Oy.

Pentru a găsi punctele de inflexiune, facem funcţiunea omogenă,

$$F(x, y, z)=x^3+y^3-3axyz-8a^3z^3$$

şi anulăm

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2x & a & y \\ a & -2y & x \\ y & x & 16a \end{vmatrix} = 0,$$

astfel că hesiana este $x^3+y^3+33xya-8a^3=0$. Rezolvând ecuaţia curbei şi hesianei, se obţine $xy=0$, deci $x=0$, $y=2a$, punctul I' pe Oy; $y=0$, $x=2a$, punctul I pe Ox.

IV. *Să se construiască curba* $f(x, y)\equiv 2x^3-3x^2y+y^3+3xy-2x=0$. Avem

$$f(x, y)=y^3-3x(x-1)y+2x(x^2-1)=0.$$

y devine nul pentru $x-0$, $x=\pm 1$. Avem

$$f'_y=3y^2-3x(x-1)=0, \quad y=\pm\sqrt{x(x-1)}.$$

Presupunând $x(x-1)>0$, $x>1$, $x<0$, şirul lui Rolle este

$$f\left[-\sqrt{x(x-1)}\right] \qquad f\left[\sqrt{x(x-1)}\right]$$

$$f(-\infty);\ 2x(x-1)\left[\sqrt{x(x-1)}+x+1\right];\ 2x(x-1)\left[-\sqrt{x(x-1)}+x+1\right];f(\infty) \qquad y$$

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	două negat., una pozitivă
$-\frac{1}{3}$					$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}$
	$-$	$+$	$+$	$+$	una reală negativă
0					
1					
	$-$	$+$	$+$	$+$	una reală negativă
∞					

Se vede că $\sqrt{x(x-1)}+x+1>0$, când $x>-1$; dacă $x<-1$, atunci trebue să avem $\sqrt{x(x-1)}>-(x+1)$; dar cum $(x+1)<0$, atunci $-(x+1)>0$ şi ridicând la pătrat, se menţine sensul neegalităţei; deci $x(x-1)>(x+1)^2$, $x<-\frac{1}{3}$; prin urmare, pentru toate valorile lui x avem $\sqrt{x(x-1)}+x+1>0$ şi cum $x(x-1)>0$, urmează că $f[-\sqrt{x(x-1)}]>0$. Raţionând analog pentru celalt termen al şirului, avem $-\sqrt{x(x-1)}+x+1<0$, când $x+1<0$; presupunând $x+1>0$, atunci $-\sqrt{x(x-1)}+x+1<0$, când $x+1<\sqrt{x(x-1)}$; ambii termeni ai neegalităţii având semnul $+$, ridicând la pătrat se menţine sensul şi deci $(x+1)^2<x(x-1)$, $x<-\frac{1}{3}$. Deci pentru $x<-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{x(x-1)}+x+1<0$, în caz contrar, pozitiv. Cum $x(x-1)>0$, urmează că dacă $x<-\frac{1}{3}$, avem $f[\sqrt{x(x-1)}]<0$; în caz contrar, pozitiv.

Presupunând $x(x-1)<0$, şirul lui Rolle devine $f(-\infty)<0$, $f(\infty)>0$,

deci o singură rădăcină reală pentru y; deci o paralelă la Oy, între 0 şi 1, o tae într'un singur punct.

Asimptotele au direcţiile date de $2x^3-3x^2y+y^3=0$, $u^2-3u+2=0$, $u_{1,2}=1$, $u_3=-2$. Inlocuind în ecuaţia curbei pe y cu $(-2x+d)$, şi anulând coeficientul lui x^2, avem $d=\frac{2}{3}$, iar asimptota este

$$y=-2x+\frac{2}{3}.$$

Direcţia $y=x$ este parabolică, căci înlocuind pe y cu $(x+d)$, avem $3x^2+x(\ )+\ldots=0$ şi nu se poate anula coeficientul lui x^2 de unde să se afle valoarea lui d.

Coeficientul unghiular este

$$y'=-\frac{6x^2-6xy+3y-2}{-3x^2+3y^2+3x}.$$

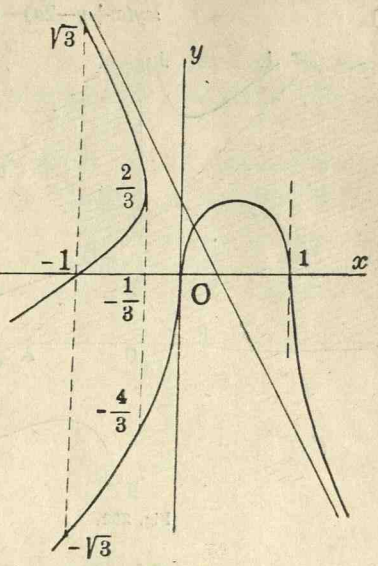


Fig. 260.

Pentru a găsi punctul unde tangenta este paralelă cu Ox, trebue să rezolvăm ecuaţia $f(x,y)=0$ şi $6x^2-6xy+3y-2=0$. Tangenta în origină este $x=0$, adică axa Oy. Punctele de inflexiune se obţin calculând hesiana $H=0$.

171. **Construcţia curbelor cu procedeul regiunilor.** Orice curbă împarte planul în regiuni (No. 63), în unele $f(x,y)$ este totdeauna pozitiv, în altele totdeauna negativ. Aşa fiind, pentru a rezolva neegalitatea $f(x,y)>0$, construim curba $f(x,y)=0$. Se determină regiunile şi semnul lui $f(x,y)$ pentru un punct al unei regiuni (de. ex,, pentru origină, dacă nu e pe curbă); în cealaltă regiune semnul este contrar.

Exemplu. $(a-x)[x^2(a-x)-y^2(a+x)]>0$. Construim curbele $x-a=0$, dreapta AT (Fig. 261) şi $x^2(a-x)-y^2(a+x)=0$, o stro-

	$a-x$	$x^2(a-x)-y^2(a+x)$	Produsul lor
I	+	−	−
II	+	+	+
III	+	−	−
IV	+	+	+

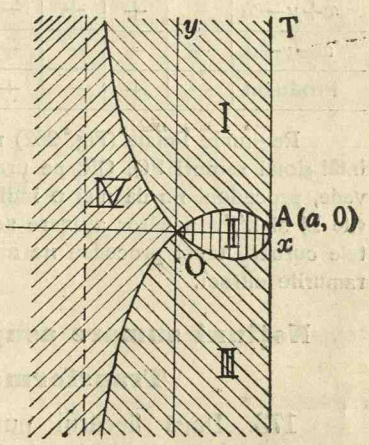


Fig. 261.

foidă dreaptă. Expresiunea $x^2(a-x)-y^2(a+x)$, pentru un punct al lui Oy, interior regiunei I, are valoarea $-ay^2<0$. Deci, pentru a îndeplini neegalitatea cerută, trebue ca punctul $M(x,y)$ să fie în regiunile II şi IV şi cea de la dreapta liniei AT.

Procedeul regiunilor. *Să se construiască curba*

(11) $$xy(x+y-2a)-k^2(x-y+a)=0,$$

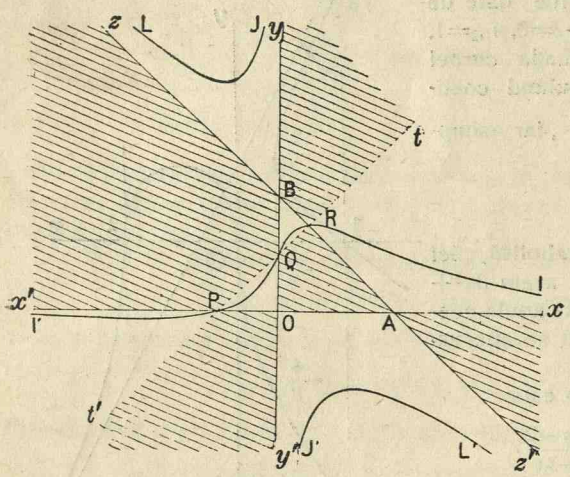


Fig. 262.

a și k fiind două lungimi date. Să construim liniile $x=0$, $y=0$, $x+y-2a=0$, $x-y+a=0$. Punctele lor de intersecție P, Q, R aparțin curbei, căci coordonatele lor verifică ecuația (11) (Fig. 262). Se caută regiunile pentru care $xy(x+y-2a)(x-y+a)>0$. In general, ecuația curbei de construit fiind

$$f_1f_2f_3\ldots=g_1g_2g_3\ldots,$$

se construesc curbele $f_1=0$, $f_2=0$, ..., $g_1=0$, $g_2=0$, ... și se caută regiunile pentru care $f_1f_2\ldots g_1g_2\ldots>0$. Punctele regiunilor unde acest produs este negativ, nu aparține curbei.

	$\|x'Qz\|$	zBy	yBt	QBR	tRx	xAz'	$z'Ay'$	$y'Ot'$	OPQ	OQA	$x'Pt'$
x	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	−
y	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	−
$x+y-2a$	−	+	+	−	+	+	−	−	−	−	−
$x-y+a$	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−
Produsul	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+

Regiunile liniate (Fig. 262) nu cuprind puncte ale curbei. Curba are întâi două ramuri PQ, QR, pe urmă arcele nelimitate RI, PI'. După cum se vede, procedeul nu dă nici o indicație asupra formei arcelor. Mai are ramurile LJ și L'J', a căror așezare se poate vedea determinând direct asimptotele curbei. Acest procedeu ne arată mai mult regiunile unde sunt cuprinse ramurile curbei.

Noțiuni sumare asupra transformărilor plane.

Transformări pe o dreaptă.

173. Dacă fiecărui punct $M(x)$ al unei drepte îi facem să corespundă un alt punct $M'(x')$ al dreptei, astfel ca să avem $x'=f(x)$, se zice că facem o transformare pe o dreaptă, sau că între punctele dreptei există o corespondență. Când unui punct M îi corespunde un singur punct M', iar punctul M' îi corespunde punctul M, se zice că această corespondență este biunivocă.

Vom considera mai întâi câteva din cele mai simple corespondențe.

174. **Translația.** $x'=x+a$ definește o translație de mărime a. Pe o dreaptă avem o simplă infinitate de translații, căci este un singur parametru a.

Translațiile formează un grup. Fie că pornind de la $M(x)$ (Fig. 263) cu translația $x'=x+a$, ajungem la punctul M'. Pornind de la M' cu translația $x''=x'+b$, ajungem la punctul $M''(x'')$. Se putea însă ajunge direct de la $M(x)$ la $M''(x'')$ cu translația $x''=x+(a+b)$, căci

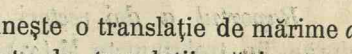


Fig. 263.

$$x'=x+a,\ x''=x'+b=x+a+b=x+(a+b),$$

adică cu translația $(a+b)$. Când, pornind dela un punct M, ajungem la punctul M' cu o operație $f(x)$ și de la M' la M'' cu o operație de același fel, dacă se poate trece direct de la M la M'' cu o operație analoagă, se zice că operația considerată formează un grup. Deci translațiile formează un grup.

Distanța dintre două puncte este un invariant în translație. Fie $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ și $M_1'(x_1')$, $M_2'(x_2')$ transformatele lor, $x_1'=x_1+a$, $x_2'=x_2+a$. Avem

$$x_2'-x_1'=x_2+a-(x_1+a)=x_2-x_1,\ \overline{M_1'M_2'}=\overline{M_1M_2},$$

ceea ce înseamnă că distanța dintre două puncte este un invariant.

175. **Asemănare.** Relația $x'=kx$, care face să corespundă punctului $M(x)$, un punct $M'(x')$, se zice că definește o asemănare, în raportul k.

Această transformare formează un grup. In adevăr, fie că plecând de la $M(x)$ ajungem, cu transformarea $x'=kx$, la punctul $M'(x')$, Aplicând punctului $M'(x')$ transformarea analoagă, $x''=k_1x'$, ajungem la punctul $M''(x'')$. Avem $x''=k_1x'=k_1kx=(kk_1)x$, adică, putem ajunge direct cu asemănarea în raportul kk_1 direct de la M la M''. Aceasta înseamnă că transformările considerate formează un grup.

Dacă aplicăm punctului $M(x)$ transformarea $x'=kx$, punctului obținut aceeași transformare, etc., obținem un șir de puncte $x'=kx$, $x''=k^2x$, $x'''=k^3x$..., în general distincte. Când $k=-1$, avem $x'=-x$, $x''=x$, $x'''=-x$,.., adică, după două transformări obținem puntul de la care am plecat. Asemănarea particulară $k=-1$, se zice *simetrie*.

O transformare care aplicată de două ori, succesiv face să

corespunză punctul de la care am plecat, se zice *involutivă*. Simetria este o involuţie particulară.

Raportul a doi vectori este invariant pentru asemănare. In adevăr, fie trei puncte $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$ şi transformatele lor cu relaţia $x'=kx$, $M_1'(x_1')$, $M_2'(x_2')$, $M_3'(x_3')$, $x_1'=kx_1$, $x_2'=kx_2$, $x_3'=kx_3$. Avem

$$\frac{x_2'-x_1'}{x_3'-x_1'}=\frac{k(x_2-x_1)}{k(x_3-x_1)}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},\quad \frac{\overline{M_1'M_2'}}{\overline{M_1'M_3'}}=\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}}.$$

176. **Transformare omogenă (afină).** Este dată de

$$x'=ax+b,$$

care pentru $a=0$ se reduce la o translaţie b, iar pentru $b=0$, la o asemănare a. Fie $M(x)$ şi $M'(x')$ punctul transformat. Avem $x'=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$. Punând $x_1=x+\frac{b}{a}$, fie $M_1(x_1)$ punctul obţinut din $M(x)$ cu această transformare. Această reprezintă o translaţie de mărime $\frac{b}{a}$. Să considerăm punctul $M'(x')$ obţinut din $M_1(x_1)$ cu transformarea $x'=ax$, adică aplicăm punctului $M_1(x_1)$ o transformare cu asemănare în raportul a. Deci punctul M' se obţine din M, cu o translaţie şi o asemănare. Proprietăţile acestor două transformări aparţin şi transformării omogene.

Transformările omogene formează un grup. Fie că de la punctul $M(x)$ cu transformarea $x'=ax+b$, am obţinut punctul $M'(x')$. Din punctul $M'(x')$, cu transformarea omogenă, $x''=px'+q$, am obţinut punctul $M''(x'')$. Avem

$$x''=px'+q=p(ax+b)+q=(pa)x+(pq+b),$$

adică se poate trece direct de la $M(x)$ la $M''(x'')$ cu transformarea omogenă $x''=(pa)x+(pb+q)$.

Raportul a doi vectori este un invariant. Fie $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$ şi omoloagele lor $M_1'(x_1')$, $M_2'(x_2')$, $M_3'(x_3')$, obţinută cu transformarea omogenă, $x'=ax+b$. Avem

$$\frac{\overline{M_1'M_2'}}{\overline{M_1'M_3'}}=\frac{x_2'-x_1'}{x_3'-x_1'}=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{ax_3+b-(ax_1+b)}=\frac{a(x_2-x_1)}{a(x_3-x_1)}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},\quad \frac{\overline{M_1'M_2'}}{\overline{M_1'M_3'}}=\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}},$$

177. **Inversiune.** Fie $M'(x')$ punctul obţinut din $M(x)$ cu transformarea $x'=\frac{1}{x}$; avem $OM'=\frac{1}{OM}$, adică am efectuat o înversiune. Efectuând asupra punctului $M'(x')$ din nou transformarea prin in-

versiune, $x''=\frac{1}{x'}$, avem $x''=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=x$, adică obţinem punctul $M(x)$.

Deci inversiunea este o operaţie involutivă şi nu formează un grup.

Raportul anarmonic a patru puncte este un invariant. Fie $M_1'(x_1')$, $M_2'(x_2')$, $M_3'(x_3')$, $M_4'(x_4')$ punctele obţinute cu ajutorul inversiunei din $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$. Avem $x_1'=\frac{1}{x_1}$, ... $x_4'=\frac{1}{x_4}$. De unde

$$\frac{\overline{M_1'M_3'}}{\overline{M_3'M_2'}}:\frac{\overline{M_1'M_4'}}{\overline{M_4'M_2'}}=\frac{(x_3'-x_1')(x_2'-x_4')}{(x_2'-x_3')(x_4'-x_1')}=\frac{\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_4}\right)}{\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_1}\right)}=\frac{(x_1-x_3)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_4)}=$$

$$\frac{(x_3-x_1)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_4-x_1)}=\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}}:\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_4M_2}},\ (M_1M_2M_3M_4)=(M_1'M_2'M_3'M_4'),$$

adică raportul anarmonic este un invariant pentru inversiune.

Omografie. Involuţie.

178. **Transformarea omografică (proectivă).** 1°. Relaţia

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d},\quad ad-bc\neq 0, \tag{1}$$

între abscisele x' şi x a două puncte omoloage $M'(x')$ şi $M(x)$, stabileşte o corespondenţă omografică sau proectivă. Punctele M şi M' se corespund omografic.

Relaţia dată se poate scrie

$$x'=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d},$$

care arată că se poate trece de la $M(x)$ la $M'(x')$ în modul următor. Cu asemănarea $x_1=cx$, obţinem din $M(x)$ punctul $M_1(x_1)$; cu translaţia $x_2=x_1+d$, obţinem pe $M_2'x_2)$ din $M_1(x_1)$; cu inversiunea $x_3=\frac{1}{x_2}$, obţinem din $M_2(x_2)$ pe $M_3(x_3)$; cu asemănarea $x_4=\left(b-\frac{ad}{c}\right)x_3$ obţinem din $M_3(x_3)$ punctul $M_4(x_4)$; cu translaţia $x'=x_3+\frac{a}{c}$ obţinem din $M_4(x_4)$ pe $M'(x')$.

Din relaţia omografică se vede că la o valoare dată lui x corespunde o valoare unică pentru x' şi reciproc; deci transformarea este biunică.

Dezvoltând relaţia (1), obţinem

$$cxx'+dx'-ax-b=0,$$

adică o expresiune de forma

$$Axx'+Bx+Cx'+D=0, \tag{2}$$

A,B,C,D fiind numere date. Această relație omografică conține patru coeficienți, A,B,C,D, dar de fapt sunt numai trei, căci se poate împărți cu unul din ei. De aci rezultă că o corespondență omografică este definită prin trei perechi de valori corespunzătoare. In adevăr, fie (a,a'), (b,b'), (c,c') trei perechi de valori ale lui x și x'. Avem

$$\begin{aligned} Aaa'+Ba+Ca'+D&=0,\\ Abb'+Bb+Cb'+D&=0,\\ Acc'+Bc+Cc'+C&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

trei ecuații de unde se pot deduce valori proporționale pentru A, B,C,D. Relația omografică se mai poate obține eliminând pe A,B, C,D între ecuațiile (2) și (3).

Să considerăm două drepte L și L′, pe care să luăm punctele O și O′ ca origini, de la care socotim pozițiile punctelor respective M și M′, definite de lungimile $OM=x$, $O'M'=x'$. Se vede că dacă x și x' sunt legate cu relația omografică (2), la un punct M al dreptei L corespunde un singur punct M′ al dreptei L′ și la orice punct al dreptei L′ corespunde un singur punct al dreptei L. Se zice că punctele M și M′ descriu pe dreptele L și L′ două *diviziuni omografice*, sau două *punctuale proective*.

2°. *Transformările omografice formează un grup.* Fie că plecând de la punctul $M(x)$, cu transformarea

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d},$$

obținem punctul $M'(x')$. Pornind de la punctul $M'(x')$, cu transformarea

$$x''=\frac{px'+q}{rx'+s},$$

ajungem la punctul $M''(x'')$. Avem

$$x''=\frac{px'+q}{rx'+s}=\frac{p\,\dfrac{ax+b}{cx+d}+q}{r\,\dfrac{ax+b}{cx+d}+s}=\frac{(pa+cq)x+(pb+qd)}{(ra+cs)x+(rb+ds)},$$

adică se poate trece direct de la M la M″ cu transformarea omografică

$$x''=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad \alpha=pa+cq,\ \beta=pb+qd,\ \gamma=ra+cs,\ \delta=rb+ds,$$

adică transformările omografice formează un grup.

3°. *Raportul anarmonic a patru puncte este un invariant pentru transformarea omografică.* Fie $M_i(x_i)$, $i=1,2,3,4$ patru puncte pe dreapta L și $M'_i(x'_i)$, $i=1,2,3,4$, punctele omoloage pe dreapta L', obținute cu transformarea

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Avem

$$\frac{\overline{M'_1M'_3}}{\overline{M'_3M'_2}}:\frac{\overline{M'_1M'_4}}{\overline{M'_4M'_2}}=\frac{(x'_3-x'_1)(x'_2-x'_4)}{(x'_2-x'_3)(x'_4-x'_1)}=\frac{\left(\frac{ax_3+b}{cx_3+d}-\frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right)\left(\frac{ax_2+b}{cx_2+d}-\frac{ax_4+b}{cx_4+d}\right)}{\left(\frac{ax_2+b}{cx_2+d}-\frac{ax_3+b}{cx_3+d}\right)\left(\frac{ax_4+b}{cx_4+b}-\frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right)}=$$

$$\frac{(ad-bc)(x_3-x_1)(ad-bc)(x_2-x_4)}{(ad-bc)(x_2-x_3)(ad-bc)(x_4-x_1)}.$$

De oarece am presupus $ad-bc\neq 0$, putem împărți cu $(ad-bc)$, și deci

$$\frac{\overline{M'_1M'_3}}{\overline{M'_3M'_2}}:\frac{\overline{M'_1M'_4}}{\overline{M'_4M'_2}}=\frac{(x_3-x_1)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_4-x_1)}=\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}}:\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_4M_2}},$$

ceea ce probează că raportul anarmonic a patru puncte rămâne același, este un invariant. Aceasta este proprietatea caracteristică a transformării omografice, care îi poate servi de definiție.

Când $ad-bc=0$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k$, avem $x'=\frac{k(cx+d)}{cx+d}=k$, adică omoloagele tuturor punctelor este unul și același punct de abscisă k.

4°. Relația omografică (2) se poate scrie

$$x'=-\frac{Bx+D}{Ax+C}.$$

Presupunând $A\neq 0$, să observăm că dacă $x=\infty$, atunci $x'=-\frac{B}{A}$; când $x'=\infty$, $x=-\frac{C}{A}$. Deci, punctului de la infinit al dreptei L corespunde pe dreapta L' punctul I' la distanța $-\frac{B}{A}$ de origina O', (Fig. 264); punctului de la infinit de pe L' corespunde pe L punctul I la distanța finită $-\frac{C}{A}$ de origina O.

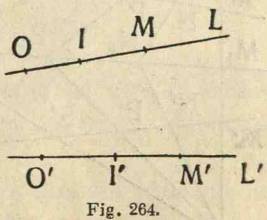


Fig. 264.

Să luăm ca origini, I pe L, I' pe L'. Atunci, trebue să înlocuim pe x și x' cu $x=-\frac{C}{A}+X$, $x'=-\frac{B}{A}+X'$. Relația omografică devine

$$A\left(X-\frac{C}{A}\right)\left(X'-\frac{B}{A}\right)+B\left(X-\frac{C}{A}\right)+C\left(X'-\frac{D}{A}\right)+D=0,$$

$AXX'+D-\frac{BC}{A}=0$, $XX'=\text{const.}=k$, $IM.I'M'=k$., astfel că relația omografică se simplifică când se iau ca origini punctele I și I' (Fig. 264), omoloage punctelor de la infinit.

5°. *Exemple.* 1) *Să considerăm punctele a, b, c; a', b', c' respectiv pe dreptele* L *și* L'. *La orice punct* M *al dreptei* L *să facem să corespundă un punct* M' *al dreptei* L', *astfel ca* $(abcM)=(a'b'c'M')$. Avem $\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{M'a'}{M'b'}=\frac{ca}{cb}:\frac{Ma}{Mb}$, $\frac{M'a'}{M'b'}=\frac{Ma}{Mb}\frac{c'a'}{c'b'}\frac{cb}{ca}$, relație care probează că la fiecare punct M al dreptei L corespunde un singur punct M' al dreptei L' și reciproc. Punctele (a, a'), (b, b'), (c, c') sunt trei perechi de puncte omoloage.

2) *Să considerăm în plan două drepte* L *și* L' *și un punct* P. *O secantă variabilă dusă prin* P *le tae în* M *și* M', *care se corespund omografic.* Omoloagele punctelor de la infinit, adică I și I', se obțin (Fig. 265) ducând prin P respectiv paralelă cu fiecare dreaptă. Punctul O de intersecție al dreptelor L și L' este propriul său omolog. Punctele M, N, ...; M', N', ... descriu două diviziuni omografice sau două punctuale proective. Diviziunile (O, M, N, ...), (O', M', N', ...), care sunt astfel ca dreptele MM', NN', ... ce unesc două puncte omoloage, sunt concurente în același punct P, se zic *diviziuni omologice.*

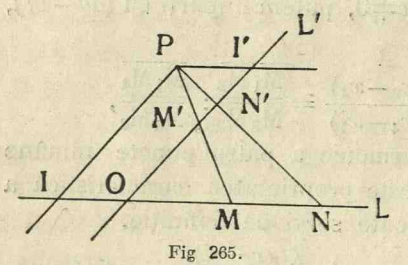


Fig. 265.

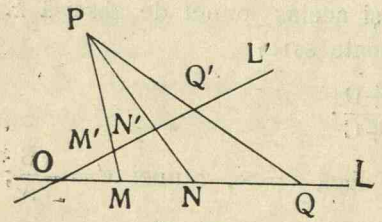


Fig. 266.

Fiind date două diviziuni omografice care au o pereche de puncte omoloage confundate, ele sunt omologice. Fie P punctul de intersecție al dreptelor MM', NN' (Fig. 266). Cu ajutorul lui P putem stabili o corespondență omografică, în care punctele O, M, N sunt omoloagele punctelor O, M', N'. Cele două diviziuni omografice, având trei perechi de puncte omoloage comune, ele sunt identice. Omografia se reduce la omologia da centru P.

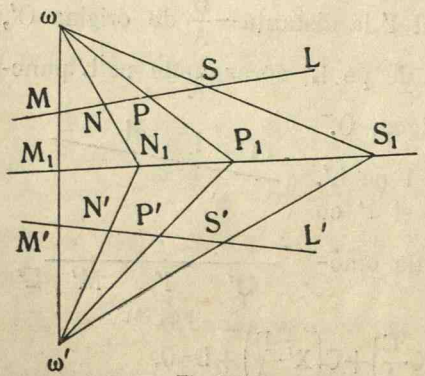


Fig. 267.

3) *Construcția a două diviziuni omografice când se dau trei perechi de puncte omoloage.* Fie M, N, P trei puncte de dreapta L (Fig. 267) și M', N', P' punctele omoloage pe dreapta L'. Fiind dat punctul S pe dreapta L, să construim omologul său S' pe dreapta L'. Pentru aceasta, să luăm pe dreapta MM' punctele ω și ω' și fie N_1, P_1 punctele de intersecție ale dreptelor $(\omega N, \omega' N')$, $(\omega P, \omega' P')$. Să însemnăm cu M_1 intersecția dreptelor N_1P_1 și MM' și S_1 intersecția dreptelor ωS

cu N_1P_1. Fie S' intersecția dreptelor $\omega'S_1$ cu L'. Avem

$$(MNPS)=(M_1N_1P_1S_1)=(M'N'P'S').$$

Să considerăm cazul când cele două diviziuni omografice sunt pe aceeaș dreaptă L (Fig. 268) și fie (M,M'), (N,N'), (P,P') trei perechi de puncte omoloage. Să ne propunem a găsi omologul Q' al punctului Q. Pentru aceasta, ducem prin M o dreaptă oarecare L' și fie n, p, q intersecțiile dreptei L' cu razele ωN, ωP, ωQ, ce se obțin unind un punct oarecare ω cu punctele N, P, Q. De oarece $(Mnpq)=(MNPQ)=(M'N'P'Q')$, rezultă că Q' este omologul lui q în omografia definită de perechile de puncte (M, M'), (n, N'), (p, P'), așezate pe două baze diferite L și L', construcție pe care știm s'o facem.

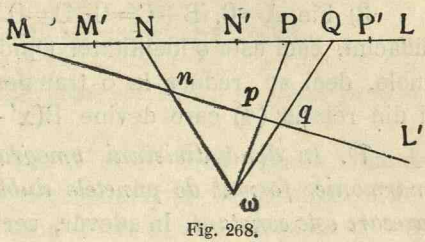


Fig. 268.

6°. *Diviziuni omografice pe aceeaș dreaptă.* M'(x'), M''(x'') fiind două puncte omoloage, relația omografică este

$$Ax'x+Bx'+Cx''+D=0. \tag{4}$$

Socotind abscisele x' și x'' de la aceeaș origină O, urmează că punctul M' se confundă cu M'', când $x'=x''$. Ecuația care dă abscisele acestor puncte este

$$Ax^2+(B+C)x+D=0. \tag{5}$$

care fiind de gradul al doilea, urmează că sunt două puncte P și Q pe dreapta considerată care coincid cu omoloagele lor. Punctele P și Q se zic *punctele duble* ale diviziunilor omografice.

Dacă $(B+C)^2-4AD>0$, punctele duble sunt reale și distincte, omografia se zice iperbolică. Dacă $(B+C)^2-4AD=0$, punctele duble sunt confundate, omografia se zice parabolică. Dacă $(B+C)^2-4AD<0$, punctele duble sunt imaginare, omografia se zice eliptică.

Vom considera câteva cazuri particulare. 1). Dacă, în (5) $A=0$, una din rădăcini este infinită, adică un punct dublu a, omografii este aruncat la infinit; corespondența (4) devine

$$Bx'+Cx''+D=0,$$

[unde $C\neq 0$, căci altfel n'ar mai fi corespondență] și este o corespondență afină [omogenă]. Deci, omografia cu un punct dublu la infinit este o transformare omogenă.

2). Dacă $A=0$, $B+C=0$, ecuația (5) are ambele rădăcini la infinit, omografia (4) are ambele puncte duble la infinit și devine

$$B(x'-x'')+D=0,\ x''=x+l.$$

Deci, omografia cu ambele puncte duble la infinit se reduce la o translaţie.

3) Fie $A=0$, $B+C=0$, $D=0$. Ecuaţia (5) are o infinitate de rădăcini, căci este o identitate. Omografia are o infinitate de puncte duble, deci se reduce la o transformare identitate, care se vede şi din relaţia (4) care devine $B(x'-x'')=0$, $x'=x''$.

7°. *In două diviziuni omografice pe aceeaş dreaptă raportul anarmonic format de punctele duble şi de două puncte omoloage oarecare este constant.* In adevăr, scriind relaţia omografică sub forma

$$x'=-\frac{Cx''+D}{Ax''+B},$$

să facem pe $x''\to\infty$, de unde rezultă $x'=-\frac{C}{A}$ $(A\neq 0)$. Luând ca origină a absciselor pe dreapta considerată punctul O' de abscisă $-\frac{C}{A}$, va trebui să înlocuim pe x' cu $-\frac{C}{A}+X'$, pe x'' cu $-\frac{C}{A}+X''$ şi relaţia omografică devine

$$A\left(X'-\frac{C}{A}\right)\left(X''-\frac{C}{A}\right)+B\left(X'-\frac{C}{A}\right)+C\left(X''-\frac{C}{A}\right)+D=0,$$

sau

$$AX'X''+(B-C)X'+\frac{AD-BC}{A}=0, \tag{6}$$

care dă abscisele X' şi X'' a două puncte omoloage M' şi M''.

Ecuaţia care dă punctele duble este

$$Ax^2+(B-C)x+\frac{AD-BC}{A}=0, \tag{7}$$

iar abscisele p şi q ale acestor puncte P şi Q, verifică relaţiile

$$p+q=-\frac{B-C}{A},\quad pq=\frac{AD-BC}{A}. \tag{8}$$

Raportul anarmonic al punctelor P, Q, M' şi M'' este

$$\rho=\frac{M'P}{M'Q}:\frac{M''P}{M''Q}=\frac{p-X'}{q-X'}:\frac{p-X''}{q-X''}=\frac{pq-qX'-pX''+X'X''}{pq-pX'-qX''+X'X''}.$$

Inlocuind pe pq din (8) şi pe $X'X''$ din (6), avem

$$\rho=\frac{\frac{AD-BC}{A^2}-qX'-pX''-\frac{AD-BC+(B-C)X'A}{A^2}}{\frac{AD-BC}{A^2}-pX'-qX''-\frac{AD-BC+(B-C)X'A}{A^2}}=\frac{qX'+pX''+\frac{B-C}{A}X'}{pX'+qX''+\frac{B-C}{A}X'}.$$

Inlocuind pe $\frac{B-C}{A}$ din (8), avem

$$\rho=\frac{qX'+pX''-(p+q)X'}{pX'+qX''-(p+q)X'}=\frac{p(X''-X')}{q(X''-X')}=\frac{p}{q}=\text{const.}$$

Deci, *raportul anarmonic format de punctele duble şi două puncte omoloage oarecare este constant.*

179. **Fascicole omografice.** Fie O' şi O'' două puncte situate în acelaş plan. Se zice că este o corespondenţă omografică între dreptele ce trec prin O' şi O'', când 1° la fiecare dreaptă Δ' ce trece prin O', corespunde numai o dreaptă Δ'' ce trece prin O''; 2° la fiecare dreaptă Δ'' ce trece prin O'', corespunde numai una Δ' ce trece prin O'; 3° între coeficienţii unghiulari m' şi m'' ai dreptelor Δ' şi Δ'' există relaţia omografică

$$Am'm''+Bm'+Cm''+D=0.$$

Insemnând cu M' şi M'' intersecţiile dreptelor Δ' şi Δ'' respectiv cu două drepte L' şi L'' date în plan, se vede că M' şi M'' descriu două diviziuni omografice.

Fascicole omografice cu acelaş vârf. Intre coeficienţii unghiulari m' şi m'' a două raze e moloage avem relaţia

$$Am'm''+Bm'+Cm''+D=0.$$

Razele duble ale celor două fascicole au coeficienţii unghiulari daţi de ecuaţia

$$Am^2+(B+C)m+D=0,$$

obţinută făcând $m'=m''=m$.

Intersecţiile razelor omoloage determină pe o dreaptă două diviziuni omografice având ca puncte duble intersecţiile razelor duble cu dreapta dată.

Exemplu. Un unghi de mărime constantă V, *care se învârteşte în jurul vârfului său.* Intre coeficienţii unghiulari ai laturilor unghiului, avem relaţia omografică

$$\frac{m'-m''}{1+m'm''}=\text{tgV},\quad m'm''\text{tgV}+m'-m''+\text{tgV}=0.$$

Razele duble sunt date de relaţia $m^2+1=0$, adică sunt dreptele izotrope, cu coeficienţii unghiulari, $\pm i$. In cazul unghiului drept, $1+m'm''=0$, raportul anarmonic al fascicolului format de două raze omoloage şi cele două raze duble, este

$$\frac{m'-i}{m'+i}:\frac{m''-i}{m''+i}=\frac{(m'-i)(m''+i)}{(m'+i)(m''-i)}=\frac{m'm''-im''+im'+1}{m'm''+im''-im'+1}=$$
$$\frac{-1+i(m'-m'')+1}{-1-i(m'-m'')+1}=\frac{i(m'-m'')}{-i(m'-m'')}=-1.$$

Deci, *două drepte perpendiculare oarecare sunt conjugate armonic cu dreptele izotrope ce trec prin punctul lor de intersecţie.*

Construcția razelor duble. Să considerăm fascicolele omografice care

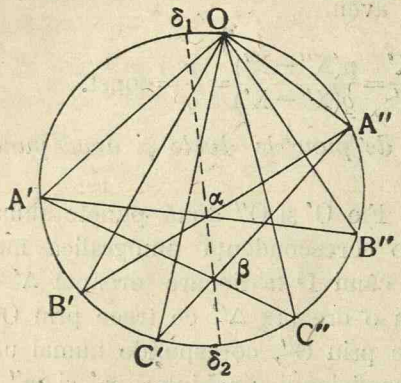


Fig. 269.

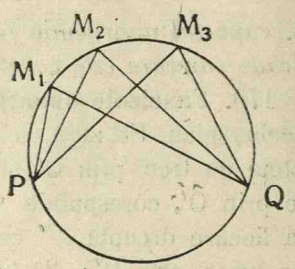


Fig. 270.

sunt definite de trei perechi de raze omoloage (OA', OA''), (OB', OB''), (OC', OC'') și să ne propunem a găsi razele duble (Fig. 269). Fie A', A'', B', B'', C', C'' intersecțiile razelor date cu un cerc oarecare ce trece prin O. Prin ipoteză tascicolele O(A', B', C', ...) și O(A'', B'', C'', ...) se corespund omografic, ceea ce se notează cu

$$O(A'B', C', \ldots) \overline{\wedge} O(A'', B'', C'', \ldots), \tag{9}$$

semnul $\overline{\wedge}$ citindu-se „*proectiv*".

Dar, fascicolele ce se formează unind două puncte fixe P și Q (Fig. 270) cu un punct mobil pe un cerc ce trece prin P și Q se corespund omografic, căci unghiul a două raze PM_1, PM_2 fiind egal cu unghiul razelor QM_1, QM_2, raportul anarmonic a patru raze din primul fascicol este egal cu raportul anarmonic al razelor omoloage, deci

$$P(M_1, M_2, M_3, \ldots) \overline{\wedge} Q(M_1, M_2, M_3, \ldots).$$

Din figura 269, avem deci

$$O(A', B', C', \ldots) \overline{\wedge} A''(A', B', C', \ldots), \quad O(A'', B'', C'', \ldots) \overline{\wedge} A'(A'', B'', C'', \ldots).$$

Omografiile formând un grup și având în vedere relația (9), deducem

$$A'(A''. B'', C'', \ldots) \overline{\wedge} A''(A', B', C', \ldots).$$

Dar aceste fascicole omografice având o rază comună A'A'', razele omoloage se tae în puncte colineare. Razele omoloage ale fascicolelor A'(A'', B'', C'', ...), A''(A', B', C', ...) se tae pe dreapta formată de punctele α și β de intersecție a dreptelor (A'B'', A''B'), (A'C'', A''C'). Fie γ un punct oarecare al dreptei $\alpha\beta$. Dreptele A'γ, A''γ tae cercul în D' și D'', iar OD' și OD'' sunt raze omoloage. Aceste raze se vor confunda când D' și D'' se vor confunda. Razele duble ale fascicolelor omografice date se obțin unind punctul O cu punctele δ_1 și δ_2 unde dreapta $\alpha\beta$ tae cercul; razele duble sunt $O\delta_1$, și $O\delta_2$.

180. **Involuție.** Să considerăm două diviziuni omografice pe aceeaș dreaptă L și fie M' și M'' două puncte omoloage, în prima și a doua diviziune. Considerând punctul M' ca aparținând diviziunii a doua, îi corespunde în prima diviziune un punct M''' care

este în general diferit de M''. Dacă punctului M', considerat că aparține ambelor diviziuni, îi corespunde pe rând în fiecare din cealaltă diviziune, același punct M''', atunci se zice că M' și M'' sunt în involuție pe dreapta L. Relația omografică fiind

$$Ax'x''+Bx'+Cx''+D=0,$$

să însemnăm cu α' și α'' abscisele punctelor M' și M''. Relația trebue deci să fie verificată de $x'=\alpha'$, $x''=\alpha''$; $x''=\alpha'$, $x'=\alpha''$; avem deci

$$A\alpha'\alpha''+B\alpha'+C\alpha''+D=0,\quad A\alpha'\alpha''+B\alpha''+C\alpha'+D=0.$$

De unde

$$(B-C)(\alpha'-\alpha'')=0,$$

și presupunând $\alpha'\neq\alpha''$, rezultă $C=B$. Relația involutivă este deci

$$Ax'x''+B(x'+x'')+D=0,$$

conține numai doi coeficienți necunoscute, deci *două perechi de puncte omoloage definesc o involuție.*

Punctul central O este punctul omolog punctului de la infinit al dreptei. Avem $x''=-\frac{Bx'+D}{Ax'+B}$, și când $x'\to\infty$, atunci $x''=-\frac{B}{A}$. Deci punctul O are abscisa $-\frac{B}{A}$. Luând acest punct ca nouă origină a absciselor X, trebue a înlocui pe x cu $-\frac{B}{A}+X$, și deci relația involutivă devine (Fig. 271)

$$A\left(X'-\frac{B}{A}\right)\left(X''-\frac{B}{A}\right)+B\left(X'+X''-\frac{2B}{A}\right)+D=0,$$

sau

$$AX'X''=\frac{B^2}{A}-D,\quad X'X''=\frac{B^2-AD}{A^2},\quad X'X''=\text{const.},\quad OM'.OM''=k.$$

Deci, într'o involuție, O fiind punctul central, M' și M'' două puncte omoloage, avem $OM'.OM''=k$.

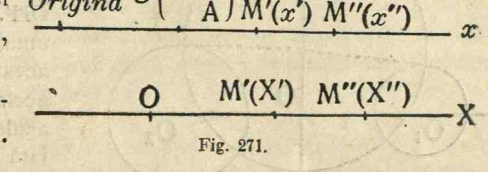


Fig. 271.

Punctele duble ale involuției se obțin făcând $x'=x''$. Avem

$$Ax^2+2Bx+D=0,$$

sau luând ca origină punctul O, ecuația devine

$$A\left(X-\frac{B}{A}\right)^2+2B\left(X-\frac{B}{A}\right)+D=0,\quad X^2=\frac{B^2-AD}{A^2}=k=\text{const.}$$

Fie P şi Q aceste puncte duble ale căror abscise sunt $\pm\sqrt{k}$. Raportul anarmonic format de două puncte omoloage M′ şi M″ şi cele două puncte duble, este

$$\frac{M'P}{M'Q}:\frac{M''P}{M''Q}=\frac{\sqrt{k}-x'}{-\sqrt{k}-x'}\cdot\frac{-\sqrt{k}-x''}{\sqrt{k}-x'}=\frac{-k+\sqrt{k}(x'-x'')+x'x''}{-k+\sqrt{k}(x''-x')+x'x''}$$

Dar, $x'x''=k$; deci raportul devine

$$\frac{-k+\sqrt{k}(x'-x'')+k}{-k+\sqrt{k}(x''-x')+k}=-1,$$

adică diviziunea este armonică. Deci, *într'o involuţie, două puncte omoloage sunt conjugate armonic cu punctele duble.*

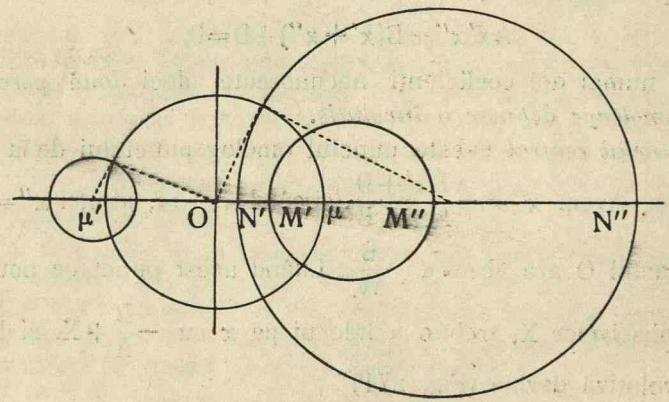


Fig. 272.

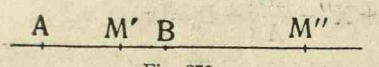


Fig. 273.

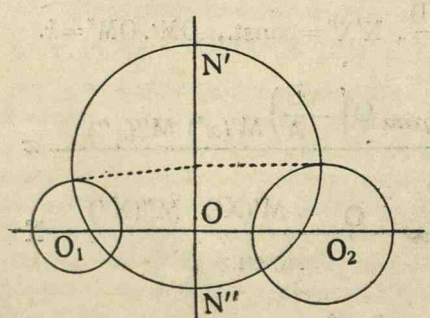


Fig. 274.

Exemple. 1°. *Cercurile ce au acelaş ax radical determină pe linia centrelor o involuţie.* In adevăr, O fiind intersecţia liniei centrelor (Fig. 272) cu axul lor radical, M′, M″ punctele de intersecţie ale unui cerc oarecare cu linia centrelor, avem $OM'.OM''=k$, k fiind puterea comună a punctului O faţă de toate aceste cercuri, căci cercurile având acelaş ax radical, orice punct al axului radical are aceeaş putere faţă de toate cercurile. Punctul O este punctul central. Punctele duble μ şi μ' sunt date de $\overline{OM}^2=k$ şi se obţin la intersecţia liniei centrelor cu cercul de rază $\sqrt{k}$, egală cu tangenta dusă din O la cercul de diametru M′M″, sau la cercul N′N″.

2°. *Punctele M′ şi M″ conjugate armonic în raport cu două puncte fixe* A *şi* B *ale dreptei, determină o involuţie cu punctele duble* A şi B (Fig. 273).

3°. *Cercurile care tae ortogonal două cercuri date* O_1 *şi* O_2 (*Fig. 274*) *determină o involuţie pe axul radical al celor două cercuri* O_1 *şi* O_2, *iar fascicolul de cercuri care au acelaş ax radical cu cercurile* O_1 *şi* O_2, *determină pe linia centrelor o involuţie cu acelaş punct central* O.

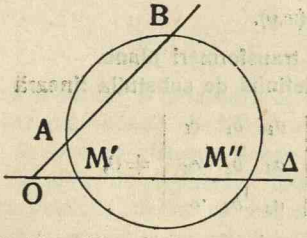


Fig. 275.

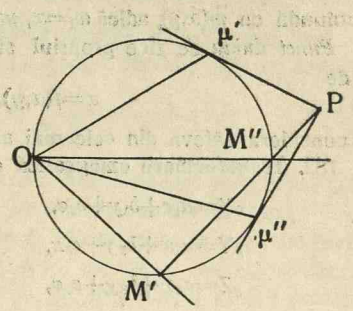


Fig. 276.

4°. *Cercurile care trec prin două puncte fixe* A *şi* B *determină pe o dreaptă o involuţie* (Fig. 275) ale cărei puncte duble sunt punctele de contact al dreptei Δ cu cele două cercuri ce trec prin A şi B şi sunt tangente dreptei Δ. Punctul central O este punctul de intersecţie al dreptei Δ cu dreapta AB, căci OM'.OM''=OA.OB=const.

Fascicole în involuţie. Între coeficienţii unghiulari m' şi m'' ai razelor omoloage avem

$$Am'm''+B(m'+m'')+D=0.$$

Razele duble sunt date de $Am^2+2Bm+D=0$ şi sunt conjugate armonic cu două raze omoloage.

Exemplu. Se dau un punct O (Fig. 276) pe un cerc şi un punct P exterior. O secantă dusă prin P tae cercul în M' şi M'', iar tangentele din P la cerc îl ating în μ' şi μ''. Razele OM' şi OM'' sunt razele omoloage al două fascicole în involuţie, iar razele duble sunt $O\mu'$ şi $O\mu''$.

Transformări plane.

181. A transforma o figură ϕ, însemnează a găsi altă figură F, astfe că la elementele figurei ϕ să corespunză elemente bine determinate ale figurei F şi reciproc. Deci, fiind cunoscută o proprietate a figurei ϕ, se poate deduce o proprietate corespunzătoare a figurei F.

O transformare se zice *punctuală*, când face să corespunză puncte la puncte; $m(x,y)$, M(X,Y) (Fig. 277) fiind două puncte omoloage ale figurilor ϕ şi F, transformarea punctuală cea mai generală este definită de formulele

$$X=f(x,y),\ Y=g(x,y),$$

f şi g fiind două funcţiuni continue de x şi y.

Transformarea se zice involutivă sau reciprocă, când omologul lui $m(x,y)$ fiind M(X,Y), adică

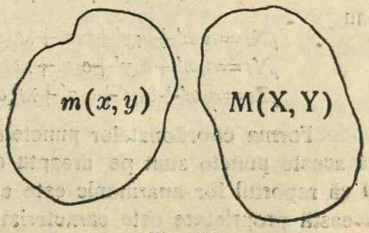


Fig. 277.

$$X=f(x,y),\quad Y=g(x,y),$$

omologul lui M(X,Y), dat de aceleași formule,

$$x_1=f(X,Y),\quad y_1=g(X,Y),$$

se confundă cu $m(x.y)$, adică $x_1=x$, $y_1=y$.

Punct dublu se zice propriul său omolog, iar coordonatele sale sunt date de

$$x=f(x,y),\quad y=g(x,y).$$

Vom considera câteva din cele mai simple transformări plane.

182. **Transformare omografică** este definită de substituția liniară

$$(10)\qquad \begin{aligned}\rho X&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ \rho Y&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ \rho Z&=a_3x+b_3y+c_3z,\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

(x,y,z), (X,Y,Z) fiind coordonatele omogene a două puncte omoloage m și M. In coordonate obișnuite, această transformare este reprezentată de

$$(11)\qquad X=\frac{a_1x+by+c_1}{a_3x+b_3y+c_3},\quad Y=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}.$$

1°. Transformarea (10) este *biunivocă*, adică punctului m îi corespunde un singur punct M și invers, lui M îi corespunde numai punctul m.

2°. *Transformata unei curba* $F(x,y,z)=0$ *de gradul m este tot o curbă de gradul m* $\phi(X,Y,Z)=0$, căci substituția (10) fiind liniară, gradul ecuației $F(x,y,z)=0$ nu se schimba, In particular, o linie dreaptă se transformă tot în linie dreaptă.

3°. *Transformarea omografică conservă raportul anarmonic.* In adevăr m_1,m_2,m_3,m_4, fiind patru puncte colineare pe dreapta definită de punctele (x',y',z'), (x'',y'',z''), coordonatele acestor puncte sunt

$$x'+\lambda_i x'',\quad y'+\lambda_i y'',\quad z'+\lambda_i z'',\quad i=1,2,3,4$$

Raportul anarmonic al acestor patru puncte este

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}:\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4}.$$

Inlocuind în (10) pe (x,y,z) respectiv cu coordonatele acestor patru puncte, se obțin punctele omoloage, ale căror coordonate sunt

$$\begin{aligned}\rho X_i&=a_1(x'+\lambda_i x'')+b_1(y'+\lambda_i y'')+c_1(z'+\lambda_i z''),\\ \rho Y_i&=a_2(x'+\lambda_i x'')+b_2(y'+\lambda_i y'')+c_2(z'+\lambda_i z''),\\ \rho Z_i&=a_3(x'+\lambda_i x'')+b_3(y'+\lambda_i y'')+c_3(z'+\lambda_i z''),\quad i=1,2,3,4,\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}\rho X_i&=a_1x'+b_1y'+c_1z'+\lambda_i(a_1x''+b_1y''+c_1z'')=X'+\lambda_i X'',\\ \rho Y_i&=a_2x'+b_2y'+c_2z'+\lambda_i(a_2x''+b_2y''+c_2z'')=Y'+\lambda_i Y'',\\ \rho Z_i&=a_3x'+b_3y'+c_3z'+\lambda_i(a_3x''+b_3y''+c_3z'')=Z'+\lambda_i Z'',\quad i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

Forma coordonatelor punctelor omoloage $M_i(X_i,Y_i,Z_i)$, $i=1,2,3,4$, arată că aceste puncte sunt pe dreapta ce unește punctele (X,'Y',Z'), (X'',Y'',Z'') și că raportul lor anarmonic este egal cu al punctelor $m_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3,4$. Această proprietate este caracteristică transformării omografice, și servește uneori ca definiție.

4°. *Transformarea omografică plană cea mai generală*, (10), depinde în mod aparent de 9 parametrii $a_1, \ldots c_3$. Dar poziția punctului M(X,Y,Z) depinde de rapoartele $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$, și deci se poate divide cu unul din acești coeficienți, astfel că de fapt transformarea omografică *depinde de opt parametrii*. Când se dau omoloagele $m_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_1(X_1,Y_1,Z_1)$, cu relațiile (10) se obțin două relații

$$\frac{X_1}{Z_1}=\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1}{a_3x_1+b_3y_1+c_1z_1},\quad \frac{Y_1}{Z_1}=\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1}{a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1},$$

lineare între cei 8 parametrii $a_1 \ldots c_3$ și deci *transformarea omografică (10) este complect determinată când se dau patru perechi de puncte omoloage.*

Trebue ca sistemul linear cu cele 8 necunoscute la care am fost conduși, să aibă determinantul diferit de zero, pentru ca soluția să fie unică. Pentru aceasta, trebue ca punctele să nu fie în anumite poziții particulare, care aduc sistemul imposibil sau nedeterminat.

5°. *Există totdeauna cel puțin o transformare omografică plană, care permite să facă să corespunză n puncte date ale figurei a doua la n puncte ale primei figuri, cu condiție ca $n \leqq 4$ și ca pentru punctele considerate care au o configurație particulară, proprietățile fundamentale (numite proective) de conservare de drepte, ale raportului anarmonic, să fie respectate.* Această proprietate permite să simplifice figurile, transformându-le omografic, astfel ca unele din punctele figurii să ocupe, după transformare, poziții convenabile. Se poate astfel, să se arunce unul sau două puncte la infinit și în particular, o dreaptă să fie aruncată la infinit. Se poate de asemenea face ca două puncte să devie punctele circulare I și J, astfel că conicele ce ar trece prin cele două puncte să devie cercuri în figura a doua. Dacă se transformă în drepte izotrope tangentele la o conică dusă într'un punct m, punctul M transformat al lui m devine un focar al conicei celei noi.

6°. *Transformările omografice formează un grup.* In adevăr, fie că pornind de la punctul $m(x, y\, z)$ obținem omologul $m'(x', y', z')$,

$$\rho x'=a_1x+b_1y+c_1z,\ \rho y'=a_2x+b_2y+c_2z,\ \rho z'=a_3x+b_3y+c_3z.$$

Din $m'(x', y', z')$ obținem punctul $m''(x'', y'', z'')$ cu transformarea omografică

$$\lambda x''=\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1z',\ \lambda y''=\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2z',\ \lambda z''=\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3z'.$$

Inlocuind pe (x', y', z') cu valorile lor, obținem

$$\lambda x''=\rho\alpha_1(a_1x+b_1y+c_1z)+\rho\beta_1(a_2x+b_2y+c_2z)+\rho\gamma_1(a_3x+\beta_3y+\gamma_3z),$$
$$\mu x''=A_1x+B_1y+C_1z,\ \mu y''=A_2x+B_2y+C_2z,\ \mu z''=A_3x+B_3y+C_3z,$$

ceea ce probează că se poate trece direct de la $m(x', y', z')$ la $m''(x'', y'', z'')$, direct, cu o transformare omografică, fără a mai trece prin $m'(x', y', z)$, ceea ce probează că transformările omografice formează un grup.

7°. *Puncte duble* sunt propriile lor omoloage în ambele figuri; $m(x, y, z)$, M(X, Y, Z), fiind două puncte omoloage. pentru ca un punct să fie dublu, trebue ca m și M să fie confundate, să aibă aceleași coordonate omogene, adică să fie proporționale coordonatele lor omogene,

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=S,$$

S fiind un factor diferit de 0. De unde

$$X=xS,\ Y=yS,\ Z=zS,$$

şi înlocuind pe X, Y, Z cu valorile lor din (10), coordonatele (x, y, z) ale unui punct dublu verifică ecuaţiile

$$\begin{aligned}(a_1-S)x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+(b_2-S)y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+(c_3-S)z&=0.\end{aligned}\tag{12}$$

Pentru ca acest sistem de ecuaţii omogene să aibă soluţii nu toate nule pentru x, y, z, trebue să avem

$$F(S)\equiv\begin{vmatrix} a_1-S & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2-S & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3-S\end{vmatrix}=0.\tag{13}$$

Aceasta este ecuaţia în S a transformării. La fiecare rădăcină a acestei ecuaţii, primele două ecuaţii (12) ne dau valori determinate pentru $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, deci un punct dublu. Cum ecuaţia (13) este de gradul al treilea în S, rezultă că *transformarea omografică, are, în general, trei puncte duble.*

8°. *Drepte duble* sunt acelea care sunt propriile lor omoloage. Ecuaţia unei drepte fiind $uX+vY+wZ=0$, ecuaţia dreptei transformate este

$$u(a_1x+b_1y+c_1z)+v(a_2x+b_2y+c_2z)+w(a_3x+b_3y+c_3z)=0,$$

$$x(a_1u+a_2v+a_3w)+y(b_1u+b_2v+b_3w)+z(c_1u+c_2v+c_3w)=0.$$

Pentru ca dreapta $uX+vY+wZ=0$, ale cărei coordonate tangenţiale sunt u, v, w, să fie dublă, trebue să se confunde cu transformata ei, de coordonate tangenţiale

$$a_1u+a_2v+a_3w,\ b_1u+b_2v+b_3w,\ c_1u+c_2v+c_3w,$$

adică coordonatele lor tangenţiale să fie proporţionale,

$$\frac{a_1u+a_2v+a_3w}{u}=\frac{b_1u+b_2v+b_3w}{v}=\frac{c_1u+c_2v+c_3w}{w}=\rho,$$

astfel că coordonatele tangenţiale ale unei drepte duble sunt date de ecuaţiile

$$\begin{aligned}(a_1-\rho)u+a_2v+a_3w&=0,\\ b_1u+(b_2-\rho)v+b_3w&=0,\\ c_1u+c_2v+(c_3-\rho)w&=0.\end{aligned}\tag{14}$$

Pentru ca sistemul să admită soluţii nu toate nule pentru (u, v, w), trebue

$$\begin{vmatrix} a_1-\rho & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2-\rho & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3-\rho\end{vmatrix}=0.$$

Această ecuaţie care dă valorile lui ρ corespunzătoare dreptelor duble este identică cu ecuaţia F(S)=0, şi deci, în general, *într'o transformare omografică sunt trei drepte duble*, ale căror coordonate tangenţiale (u, v, w) sunt date de primele două ecuaţii (14), unde se înlocueşte ρ cu cele trei rădăcini ale ecuaţii (13).

Observare. Insemnând cu A_1, A_2, A_3 cele trei puncte duble, dreptele A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sunt cele trei drepte duble, căci dreapta A_1A_2, de ex., unind punctele duble A_1, A_2, omoloaga ei este tot A_1A_2, căci va trebui să unească omoloagele punctelor A_1, A_2, care sunt tot aceste puncte.

Aceasta se poate vedea şi prin calcul. In adevăr, să considerăm două rădăcini distincte S_1, S_2 ale ecuaţii (13), căror le corespunde respectiv un punct dublu (x_1, y_1, z_1) dat de ecuaţiile (12) şi o dreaptă dublă (u_2, v_2, w_2) date de ecuaţiile (14),

$$(a_1-S_1)x_1+b_1y_1+c_1z_1=0, \qquad (a_1-S_2)u_2+a_2v_2+a_3w_2=0,$$
$$a_2x_1+(b_2-S_1)y_1+c_2z_1=0, \qquad b_1u_2+(b_2-S_2)v_2+b_3w_2=0,$$
$$a_3x_1+b_3y_1+(c_3-S_1)z_1=0, \qquad c_1u_2+c_2v_2+(c_3-S_2)w_2=0,$$

Facem suma primelor înmulţite cu u_2, v_2, w_2 şi suma celorlalte înmulţite cu $x_1 y_1 z_1$; făcând diferenţa rezultatelor, avem

$$(S_1-S_2)(u_2x_1+v_2y_1+w_2z_1)=0,$$

şi fiindcă $S_1 \neq S_2$, rezultă că

$$u_2x_1+v_2y_1+w_2z_1=0;$$

ceea ce probează că punctul dublu (x_1, y_1, z_1), corespunzător rădăcinii S_1, este pe dreapta dublă corespunzătoare rădăcinii S_2, cu alte cuvinte că punctele duble sunt vârfurile triunghiului format de dreptele duble.

9°. *Omologia.* Să scriem că ecuaţiile (12) se reduc la una singură. Avem

$$\frac{a_1-S}{a_2}=\frac{b_1}{b_2-S}=\frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2-S}{b_3}=\frac{c_2}{c_3-S}.$$

Aceste patru ecuaţii se reduc numai la trei distincte; în adevăr, în virtutea primelor două, ecuaţia (13) este verificată pentru valoarea considerată a lui S, pentrucă pentru această valoare determinantul (13) are nuli toţi minorii corespunzători linii a treia; acelaş lucru îl putem spune şi despre ultimele două ecuaţii şi deci una din ultimele două ecuaţii este una din primele două ecuaţii. Din primele două, avem

$$S=a_1-\frac{a_2c_1}{c_2}=b_2-\frac{b_1c_2}{c_1},$$

iar din ultimele două

$$S=b_1-\frac{b_3a_2}{a_3}=c_3-\frac{c_2a_3}{a_2}.$$

Vom avea, de asemenea, din rapoartele evidente

$$\frac{a_1-S}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3-S},$$

condiţiile

$$S=a_1-\frac{a_3b_1}{b_3}=c_3-\frac{c_1b_3}{b_1}.$$

şi cele trei condiţii care definesc transformarea considerată se pot scrie simetric

$$(15) \qquad a_1-\frac{a_3b_1}{b_1}=b_2-\frac{b_1c_2}{c_1}=c_3-\frac{c_2a_3}{a_2}, \quad a_3b_1c_2-a_2b_3c_1=0.$$

Transformarea (10) considerată depinde în acest caz numai de 5 parametrii variabili.

Valoarea lui S găsită, pentru care ecuațiile (12) se reduc numai la una, este o rădăcină dublă a ecuației (13), căci derivata ei în raport cu S este

$$\begin{vmatrix} b_2-S & c_2 \\ b_3 & c_3-S \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1-S & c_1 \\ a_3 & c_3-S \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1-S & b_1 \\ a_2 & b_2-S \end{vmatrix} = 0,$$

ecuație verificată pentru valoarea S_1 considerată a lui S, căci fiecare din minorii din primul membru este nul.

Ecuațiile (12) se reduc la prima, ale cărei toate punctele sunt duble. Înlocuind pe S în prima cu valoarea sa $S_1=a_1-\frac{a_3b_1}{b_3}$, ecuația acestei drepte Δ este

$$\frac{a_3b_1}{b_3}x+b_1y+c_1z=0. \tag{16}$$

ceea ce însemnează că sunt o infinitate de puncte duble așezate pe dreapta Δ.

Scriind că ecuațiile (14) se reduc la una singură, se obțin aceleași condiții (15) și aceeaș valoare a lui S, rădăcina dublă a ecuației (13). Înlocuind pe S cu această valoare în prima ecuație (14), avem

$$\frac{a_3b_1}{b_3}u+a_2v+a_3w=0,$$

ceea ce probează că sunt o infinitate de drepte duble, care trec prin punctul dublu O de coordonate omogene

$$\frac{a_3b_1}{b_3},\ a_2,\ a_3. \tag{17}$$

Transformarea considerată se zice *omologie*, punctul O *centru*, iar dreapta Δ *axă de omologie*.

Ecuația F(S)=0 a avut în acest caz o rădăcină dublă $S=S_1$; înlocuind în ecuațiile (12) pe S cu a treia rădăcină a ecuației F(S)=0, și rezolvând aceste ecuații în raport cu x, y, z, vom găsi un punct dublu, care este punctul O.

Se poate arăta că în această transformare, în omologie, *două drepte omoloage se tae pe axa de omologie și că dreptele care unesc două puncte omoloage trec prin centrul de omologie.* În adevăr, ecuația axei de omologie fiind (16),

$$a_3b_1x+b_1b_3y+c_1b_3z=0,$$

a unei drepte oarecare,

$$ux+vy+wz=0,$$

iar a dreptei omoloage,

$$(a_1u+a_2v+a_3w)x+(b_1u+b_2v+b_3w)y+(c_1u+c_2v+c_3w)z=0,$$

ca dreptele omoloage să se tae pe axa de omologie, trebue ca

$$\begin{vmatrix} a_3b_1 & b_1b_3 & b_3c_1 \\ u & v & w \\ a_1u+a_2v+a_3w & b_1u+b_2v+b_3w & c_1u+c_2v+c_3w \end{vmatrix} = 0,$$

care este verificată, ordonând determinantul după puterile și produsele lui u, v, w și observând relațiile (15).

Pentru ca dreapta ce unește un punct (x, y, z) și omologul său

$$a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z,\ a_3x+b_3y+c_3z,$$

să treacă prin $O(a_3b_1, a_2b_3, a_3b_3)$, trebue să avem

$$\begin{vmatrix} a_3b_1 & a_2b_3 & a_3b_3 \\ x & y & z \\ a_1x+b_1y+c_1z & a_2x+b_2y+c_2z & a_3x+b_3y+c_3z \end{vmatrix} = 0,$$

relație care este verificată, dezvoltând după puterile și produsele lui x, y, z și observând (15).

Omologia este definită când se dau centrul O, axa de omologie Δ și o pereche de puncte omoloage A și A' (Fig. 278). In adevăr, pentru a găsi omologul M' al punctului M, să observăm că dreapta AM are două puncte cărora li se cunosc omoloagele lor, punctul A și punctul N de intersecție al dreptei AM cu axa Δ, care este propriul său omolog. Deci, omologul M' al lui M este intersecția dreptelor OM și A'N. Insemnând cu α și μ intersecțiile axei Δ cu OA și OM, tăind fascicolul $(N.O_\alpha A'A)$ cu secantele OA și OM, avem $(O_\alpha A'A)=(O_\mu M'M)$ și deci, între punctele omoloage M și M' avem relația

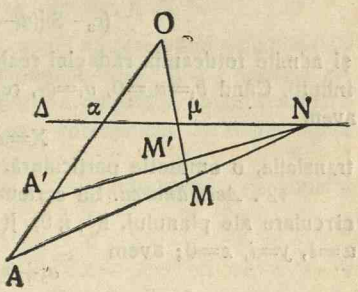


Fig. 278.

$$\frac{M'O}{MO}:\frac{M'\mu}{M\mu}=\frac{A'O}{AO}:\frac{A'\alpha}{A\alpha}=k=\text{const},$$

k zicându-se constanta de omologie. Această relație poate servi pentru a găsi formulele de transformare ale omologii considerate.

10°. *Omotetia.* Să presupunem că ecuațiile (12) se reduc la una singură, $z=0$, adică avem o infinitate de puncte duble aruncate la infinit, adică axa de omologie este aruncată la infinit. Urmează atunci

$$a_1-S=0,\ b_1=0;\ a_2=0,\ b_2-S=0,\ a_3=b_3=0;$$

deci

$$S=a_1=b_2,\ b_1=a_2=a_3=b_3=0.$$

Formulele de transformare devin

$$\rho X=Sx+c_1z,\ \rho Y=Sy+c_2z,\ \rho Z=(c_3-S)z,$$

și deci, în coordonate obișnuite,

$$X=\frac{S}{c_3-S}x+\frac{c_1}{c_3-S},\ Y=\frac{S}{c_3-S}y+\frac{c_2}{c_3-S}.$$

Sau,

$$X=kx+a-ka,\ Y=ky+b-kb,$$

de unde

$$\frac{X-a}{x-a}=k,\ \frac{Y-b}{y-b}=k,$$

ceea ce probează că dreapta care unește punctele omoloage $m(x, y)$, $M(X, Y)$ trece prin punctul $O(a, b)$, iar raportul $OM: Om=k$.

Transformarea se zice omotetie, O centru și k raportul de omotetie. Cunoscând ecuația $f(x, y)=0$ a unei curbe, ecuația curbei omotetice, în raport cu centrul (a, b) și raportul k, este

$$f\left(\frac{X-a+ka}{k},\ \frac{Y-b+kb}{k}\right)=0.$$

11°. *Transformare afină.* Transformarea (10), în care $a_3=b_3=0$, are forma

$$X=a_1x+b_1y+c_1z,\ Y=a_2x+b_2y+c_2z,\ Z=c_3z,$$

și are proprietatea conservării a dreptei de la infinit ($Z=0$, $z=0$). Aceasta

se zice transformare afină (omogenă) şi în coordonatele obişnuite este de forma ($c_3=1$),

$$X=a_1x+b_1y+c_1,\quad Y=a_2x+b_2y+c_2.$$

Ecuaţia $F(S)=0$, care dă punctele duble, (13), devine

$$(c_3-S)[(a_1-S)(b_2-S)-a_2b_1]=0,$$

şi admite totdeauna rădăcini reale, deci trei puncte duble (din care două la infinit). Când $b_1=a_2=0$, $a_1=b_2$, regăsim omotetia. Când $a_1=b_2=c_3$, $b_1=a_2=0$, avem

$$X=x+\alpha,\quad Y=y+\beta,$$

translaţia, o omotetie particulară.

12°. *Asemănarea.* Să scriem că două din punctele duble sunt punctele circulare ale planului, $I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$. Să facem în ultima ecuaţie (12) $x=1$, $y=i$, $z=0$; avem

$$a_3+b_3i=0,\quad a_3=b_3=0.$$

Primele două ne dau, făcând $z=0$,

$$(a_1-S)x+b_1y=0,\quad a_2x+(b_2-S)y=0,$$

de unde, eliminând pe S, avem

$$\frac{a_1x+b_1y}{x}=\frac{a_2x+b_2y}{y},$$

unde înlocuind pe x cu 1 şi y cu i, avem

$$\frac{a_1+b_1i}{1}=\frac{a_2+b_2i}{i}.\quad a_1i-b_1=a_2+b_2i,$$

$$(a_1-b_2)i-(a_2+b_1)=0,\quad a_2=-b_1,\quad a_1=b_2,$$

iar formulele de transformare devin

$$X=a_1x+b_1y+c_1z,\quad Y=-b_1x+a_1y+c_2z,\quad Z=c_3z.$$

Luând $c_3=1$, în coordonate obişnuite, avem

$$X=a_1x+b_1y+a,\quad Y=-b_1x+a_1y+b$$

sau

(18) $$X=a+k(x\cos\alpha-y\sin\alpha),\quad Y=b+k(x\sin\alpha+y\cos\alpha).$$

Punctul dublu $I(\xi, \eta)$ la distanţă finită este dat de

(19) $$\xi=a+k(\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha),\quad \eta=b+k(\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha).$$

Scăzând (18) şi (19), avem

$$\xi-X=k[(\xi-x)\cos\alpha-(\eta-y)\sin\alpha],$$
$$\eta-Y=k[(\xi-x)\sin\alpha+(\eta-y)\cos\alpha],$$
$$(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2=k^2[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2],$$

adică

$$\overline{OM}^2=k^2\cdot\overline{Om}^2.$$

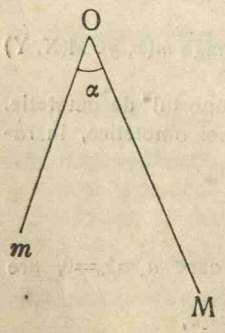


Fig. 279.

Deci, se trece de la un punct m la punctul $M(X, Y)$ (Fig. 279) al figurei corespunzătoare, rotind Om în jurul lui O de unghiul α şi apoi amplificând segmentul obţinut în raportul k. Figurile sunt asemenea în raportul k.

In cazul $k=1$, avem

$$X=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a,\quad Y=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b,$$

adică schimbarea axelor de coordonate. Figura trans-

formată rămâne egală în mărime cu figura dată, numai ca poziție se schimbă (avem mișcarea unei figuri plane în planul său).

183. **Transformări cuadratice.** $m(x, y, z)$, M(X, Y, Z) fiind două puncte omoloage, transformarea cuadratică cea mai generală este dată de

$$\rho X = f(x, y, z),\ \rho Y = g(x, y, z),\ \rho Z = h(x, y, z), \tag{20}$$

f, g, h fiind funcțiuni cuadratice în (x, y, z), astfel că rezolvând ecuațiile (20) în raport cu x, y, z, să se obție o soluție rațională în X, Y, Z. Aceasta înseamnă că fiind date X, Y, Z, ecuațiile (20) să admită o singură valoare pentru (x, y, z), deci punctului M(X, Y, Z) să-i corespundă un singur punct $m(x, y, z)$.

Fiind date formele cuadratice f, g, h la întâmplare, și punctul M(X, Y, Z) din plan, conicele

$$\frac{f(x, y, z)}{h(x, y, z)} = \frac{X}{Z},\quad \frac{g(x, y, z)}{h(x, y, z)} = \frac{Y}{Z},$$

se tae în patru puncte, astfel că unui punct M(X, Y, Z) i-ar corespunde patru puncte $m(x, y, z)$. Pentru ca unui punct M(X, Y, Z) să-i corespundă numai un punct $m(x, y, z)$, trebue ca trei din punctele de intersecție ale acestor conice să fie fixe, sau că aceste conice să treacă prin trei puncte fixe a, b, c. Aceste puncte a, b, c se zic *fundamentale*.

Insemnând cu

$$\Delta_1 \equiv u_1x + v_1y + w_1z = 0,\ \Delta_2 \equiv u_2x + v_2y + w_2z = 0,\ \Delta_3 \equiv u_3x + v_3y + w_3z = 0,$$

ecuațiile laturilor triunghiului abc, ecuațiile conicelor f, g, h sunt de forma

$$l_1\Delta_2\Delta_3 + l_2\Delta_3\Delta_1 + l_3\Delta_1\Delta_2 = 0,\ m_1\Delta_2\Delta_3 + m_2\Delta_3\Delta_1 + m_3\Delta_1\Delta_2 = 0,\ n_1\Delta_2\Delta_3 + n_2\Delta_3\Delta_2 + n_3\Delta_1\Delta_2 = 0.$$

Deci transformarea cuadratică birațională este

$$\begin{aligned} X &= l_1\Delta_2\Delta_3 + l_2\Delta_3\Delta_1 + l_3\Delta_1\Delta_2, \\ Y &= m_1\Delta_2\Delta_3 + m_2\Delta_3\Delta_1 + m_3\Delta_1\Delta_2, \\ Z &= n_1\Delta_2\Delta_3 + n_2\Delta_3\Delta_1 + n_3\Delta_1\Delta_2, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{21}$$

fără de care X, Y, Z ar fi legați cu o relație lineară.

Rezolvând ecuațiile (21) în raport cu $\Delta_1\Delta_2, \Delta_2\Delta_3, \Delta_3\Delta_1$, avem

$$\Delta_1\Delta_3 = p_3X + q_2Y + r_3Z,\ \Delta_2\Delta_3 = p_1X + q_1Y + r_1z,\ \Delta_3\Delta_1 = p_2X + q_2Y + r_2Z,$$

de unde

$$(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)\Delta_1 = (p_2X + q_2Y + r_2Z)(p_3X + q_3Y + r_3Z).$$

Deci, afară de factorul $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, valorile proporționale ale lui $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sunt

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (p_2X + q_2Y + r_2Z)(p_3X + q_3Y + r_3Z), \\ \Delta_2 &= (p_3X + q_3Y + r_3Z)(p_1X + q_1Y + r_1Z), \\ \Delta_3 &= (p_1X + q_1Y + r_1Z)(p_2X + q_2Y + r_2Z). \end{aligned}$$

Deci, iarăși, afară de un factor,

$$\Delta_1(p_1X + q_1Y + r_1Z) = k_1,\ \Delta_2(p_2X + q_2Y + r_2Z) = k_2,\ \Delta_3(p_3X + q_3Y + r_3Z) = k_3,$$

$$\begin{aligned} (u_1x + v_1y + w_1z)(p_1X + q_1Y + r_1Z) &= k_1, \\ (u_2x + v_2y + w_2z)(p_2X + q_2X + r_2Z) &= k_2, \\ (u_3x + v_3y + w_3z)(p_3X + q_3Y + r_3Z) &= k_3, \end{aligned}$$

de unde se vede că x, y, z se exprimă în funcțiune omogenă și de gradul al doilea în raport cu X, Y, Z,

$$x=\alpha_1(p_2X+q_2Y+r_2Z)(p_3X+q_3Y+r_3Z)+\alpha_2(p_3X+q_3Y+r_3Z)(p_1X+q_1Y+r_1Z)+\alpha_3(p_1X+q_1Y+r_1Z)(p_2X+q_2Y+r_2Z),$$

$$y=\beta_1(p_2X+q_2Y+r_2Z)(p_3X+q_3Y+r_3Z)+\beta_2(p_3X+q_3Y+r_3Z)(p_1X+q_1Y+r_1Z)+\beta_3(p_1X+q_1Y+r_1Z)(p_2X+q_2Y+r_2Z),$$

$$z=\gamma_1(p_2X+q_2Y+r_2Z)(p_3X+q_3Y+r_3Z)+\gamma_2(p_3X+q_3Y+r_3Z)(p_1X+q_1Y+r_1Z)+\gamma_3(p_1X+q_1Y+r_1Z)(p_2X+q_2Y+r_2Z).$$

Rezultă că funcţiunile F, G, H, care definesc transformarea inversă,

$$x=F(X,Y,Z),\ y=G(X,Y,Z),\ z=H(X,Y,Z),$$

reprezintă conice ce trec prin vârfurile A, B, C ale triunghiului fundamental cu laturile

$$p_1X+q_1Y+r_1Z=0,\ p_2X+q_2Y+r_2Z=0,\ p_3X+q_3Y+r_3Z=0.$$

Se poate vedea că în transformarea cuadratică birațională, *unei drepte ce trece prin vârful a al triunghiului fundamental abc, îi corespunde o dreaptă ce trece prin vârful* A *al triunghiului fundamental ABC.*

Unei drepte oarecare ce nu trece printr'un vârf al triunghiului fundamental abc, îi corespunde o conică circumscrisă triunghiului fundamental ABC.

O transformare cuadratică se zice de *ordinul al doilea*, când triunghiurile fundamentale sunt confundate, adică

$$X=l_1\Delta_2\Delta_3+l_2\Delta_3\Delta_1+l_3\Delta_1\Delta_2, \qquad \Delta_1=u_1x+v_1y+w_1z,$$
$$Y=m_1\Delta_2\Delta_3+m_2\Delta_3\Delta_1+m_3\Delta_1\Delta_2, \qquad \Delta_2=u_2x+v_2y+w_2z,$$
$$Z=n_1\Delta_2\Delta_3+n_2\Delta_3\Delta_1+n_3\Delta_1\Delta_2, \qquad \Delta_3=u_3x+v_3y+w_3z,$$
$$x=\alpha_1\delta_2\delta_3+\alpha_2\delta_3\delta_1+\alpha_3\delta_1\delta_2, \qquad \delta_1=u_1X+v_1Y+w_1Z,$$
$$y=\beta_1\delta_2\delta_3+\beta_2\delta_3\delta_1+\beta_3\delta_1\delta_2, \qquad \delta_2=u_2X+v_2Y+w_2Z,$$
$$z=\gamma_1\delta_2\delta_3+\gamma_2\delta_3\delta_1+\gamma_3\delta_1\delta_2, \qquad \delta_3=u_3X+v_3Y+w_3Z.$$

Inversiunea este o transformare de ordinul al doilea, admiţând ca puncte fundamentale punctele circulare I şi J şi un alt punct O. Conicele f, g, h trecând prin I şi J reprezintă cercuri; luând origina în punctul O formulele sunt de forma

$$X=\alpha_1(x^2+y^2)-2a_1xz-2b_1yz,$$
$$Y=\alpha_2(x^2+y^2)-2a_2xz-2b_2yz,$$
$$Z=\alpha_3(x^2+y^2)-2a_3xz-2b_3yz.$$

Rezolvând ecuaţiile în raport cu x, y, z, ceea ce se obţine scăzându-le două câte două, şi exprimând că valorile lui x, y, z, egalate cu zero, reprezintă cercuri, se obţin formulele generale ale inversiunei

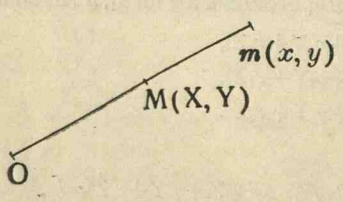


Fig. 280.

$$(22)\qquad X=\frac{kx}{x^2+y^2},\ Y=\frac{ky}{x^2+y^2},$$

de unde se vede că $OM.Om=k$ (Fig. 280). Punctul O se zice origina sau polul de inversiune, iar k puterea de inversiune.

Se poate vedea că inversa unei linii drepte $Ax+By+C=0$, este un cerc ce trece prin origină (polul de inversiune). In adevăr, rezolvând ecuaţiile (22) în raport cu x şi y, avem

$$x=\frac{KX}{X^2+Y^2},\ y=\frac{KY}{X^2+Y^2}$$

aşa că dreapta $Ax+By+C=0$ devine

$$A\frac{KX}{X^2+Y^2}+B\frac{KY}{X^2+Y^2}+C=0,\quad C(X^2+Y^2)+K(AX+AY)=0,$$

adică un cerc ce trece prin origină. De asemenea, se vede că figura inversă a unui cerc oarecare este un cerc.

Polul de inversiune fiind punctul (a, b), formulele de transformare sunt

$$X=\frac{K(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2},\quad Y=\frac{K(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

184. **Transformări corelative.** Unui punct $m(x, y, z)$ să facem să-i corespundă dreapta $D(u, v, w)$, cu relaţiile lineare

$$\rho u=a_1x+b_1y+c_1z,\quad \rho v=a_2x+b_2y+c_2z,\quad \rho w=a_3x+b_3y+c_3z.$$

Aceasta este o transformare corelativă. Dacă m descrie o dreaptă, dreapta D trece printr'un punct fix. Dacă m descrie o curbă (C), D înfăşură o curbă (C').

Un exemplu este următorul. Punctului $m(x, y, z)$ să-i facem să-i corespundă polara sa

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

în raport cu o conică $f(x, y, z)=0$, numită conică directoare. Coordonatele tangenţiale ale polarei fiind

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z},$$

avem transformarea corelativă

$$\rho u=\frac{\partial f}{\partial x},\ \rho v=\frac{\partial f}{\partial y},\ \rho w=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Aceasta este *transformarea prin polare reciproce*. Cu această transformare, unei figuri F, compusă din puncte, îi corespunde o figură F' compusă din drepte. Mai general, unei figuri F compusă din puncte şi drepte, îi corespunde o figură F' compusă din drepte şi puncte. Figurile F şi F' se zic *figuri polare reciproce* în raport cu conica $f(x, y, z)=0$, sau, că fiecare dintre ele este transformata prin polare reciproce a celeilalte.

Din proprietăţile polarelor se deduc următoarele consecinţe. Punctului de întâlnire a două drepte D_1 şi D_2 corespunde dreapta ce uneşte punctele m_1 şi m_2 corespunzătoare dreptelor D_1 şi D_2 şi reciproc, la dreapta care uneşte două puncte m' şi m'' corespunde punctul de întâlnire al dreptelor D' şi D'' polarele punctelor m' şi m''. La puncte situate pe o dreaptă D corespund drepte ce trec prin polul dreptei D şi invers, la drepte ce trec printr'un punct corespund puncte situate pe dreapta care este polara punctului considerat. Mai clar, să considerăm o curbă (C) şi să luăm, în raport cu conica directoare, polurile $a', b', \ldots$, ale tangentelor A, B, ... (Fig. 281) la curba (C). Locul acestor poluri $a', b', \ldots$ este o altă curbă (C'). Voim să arătăm că, reciproc, (C) este locul polurilor tangentelor la curba (C'). Pentru aceasta, fie a, b punctele de contact ale tangentelor A şi B cu curba (C); dreapta $a'b'$ este polara punctului M de întâlnire al tangentelor

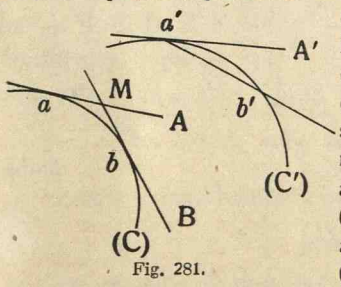


Fig. 281.

A şi B. Dacă tangenta B se apropie nemărginit de tangenta A, punctul M are ca limită punctul a; dar şi b' se apropie indefinit de a' şi deci $a'b'$ tinde către tangnnta în a' la curba (C'). Aşa dar, tangenta A' în a' la curba (C') este polara punctului a, adica curba (C) este locul polurilor tangentelor la curba (C'). Curbele (C) şi (C') sunt două curbe polare reciproce în raport cu conica directoare.

Aşa fiind, să presupunem că am stabilit o proprietate proectivă pentru o figură (F). Fie (F') figura obţinută transformând figura (F) prin polare reciproce în raport cu o conică directoare. Putem obţine imediat o proprietate pentru figura (F'), schimbând, în enunţul proprietăţii pentru figura (F), cuvintele *puncte* şi *drepte*, cu *drepte* şi *puncte*. Acesta este *principiul dualităţii* descoperit de Gergonne.

Un exemplu tipic, este teorema lui Brianchon, dedusă din teorema lui Pascal, anume, că dreptele cere unesc perechile de vârfuri opuse ale unui exagon circumscris la o conică se întâlnesc în acelaş punct.

Observare. Când punctul $m(x, y, z)$ descrie conica $f(x, y, z)=0$, avem transformarea corelativă

$$\rho u=\frac{\partial f}{\partial x}, \rho v=\frac{\partial f}{\partial y}, \rho w=\frac{\partial f}{\partial z},$$

iar tangenta în m este dreapta care corespunde punctului m. Curba pe care o înfăşură dreapta (u, v, w) este chiar curba $f(x, y, z)=0$, ecuaţia ei $F(u, v, w)=0$, este ecuaţia tangenţială a conicei $f(x, y, z)=0$.

Geometria în spaţiu.

Reprezentarea liniilor şi suprafeţelor.

185. **Proecţiuni.** Fie $x'x$ o axă de proecţiune şi un plan (P) neparalel cu axa (Fig. 282). Proecţia pe axa $x'x$ a unui punct A, paralel cu planul (P), este intersecţia a a axei $x'x$ cu planul dus prin A paralel cu planul (P). Proecţia pe axa $x'x$ a dreptei AB, paralel cu planul (P), este dreapta ab, care uneşte proecţiunile a şi b pe $x'x$ a extemităţilor A şi B a dreptei AB, paralel cu planul (P). Dacă planul (P) este perpendicular pe axa $x'x$, proecţia se zice ortogonală.

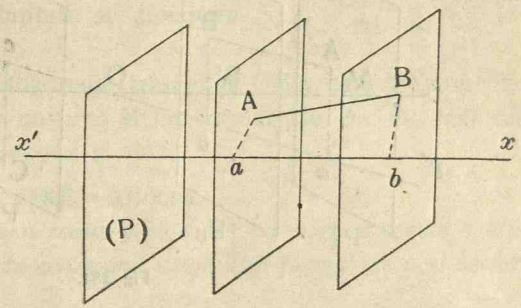


Fig. 282.

Proecţia unui contur poligonal deschis pe o axă este egală cu proecţie rezultantei acelui contur (a linii care închide acel contur, adică aceea care uneşte origina cu extremitatea). Insemnând cu a, b, c, d, e, f (Fig. 283) proecţiile, paralel cu planul (P), ale vârfurilor A, B, C, D, E, F ale conturului, ştim că punctele a, b, c, d, e, f fiind pe axa $x'x$, avem

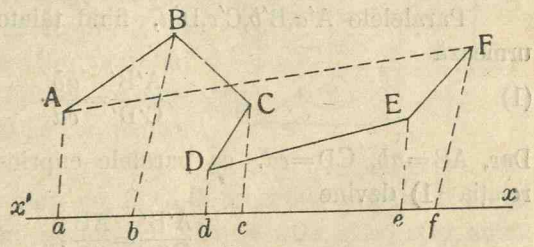


Fig. 283.

$$ab+bc+cd+de+ef=af,$$

adică

$$\text{prAB}+\text{prBC}+\text{prCD}+\text{prDE}+\text{prEF}=\text{prAF},$$

$$\text{prABCDEF}=\text{prAF},$$

sau că proecţia conturului ABCDEF este egală cu proecţia linii AF (Fig. 283), care închide acest contur poligonal.

Mai urmează că

$$\text{prABCDEF}+\text{prFA}=\text{prAF}+\text{prFA}=0,$$

sau că proecţia conturului poligonal închis ABCDEFA este nulă.

Două contururi cu aceeaşi origină şi extremitate au aceleaşi proecţii pe o axă.

186. **Măsura proecţii unui vector pe o axă.** Să considerăm vectorul AB, planul (P) şi axa de proecţie $x'x$. Să luăm un vector CD paralel cu AB şi o dreaptă $y'y$, dusă printr'un punct O al axei $x'x$, paralel cu vectorii AB, CD (Fig. 284).

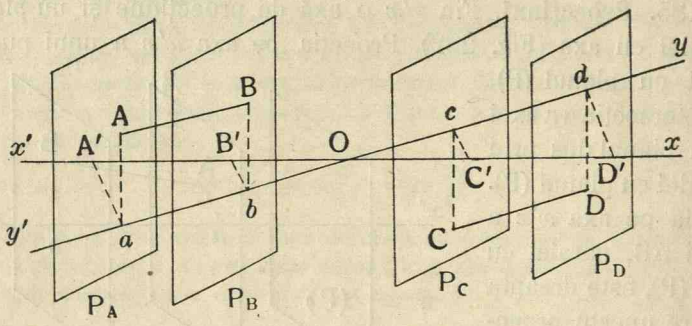


Fig 284.

Planele P_A, P_B, P_C, P_D, duse prin A, B, C, D, paralel cu planul (P), tae axele $x'x$ şi $y'y$, respectiv în punctele A',B',C',D', a,b,c,d; A'B', C'D' sunt proecţiunile vectorilor AB şi CD pe axa $x'x$. Dreptele $A'a, B'b, C'c, D'd$ sunt paralele ca fiind intersecţiile planului format de axele xOx', yOy', cu planele paralele P_A, P_B, P_C, P_D.

Paralelele $A'a, B'b, C'c, D'd$, fiind tăiate de secantele $x'x$, $y'y$, urmează

$$\text{(1)} \qquad \frac{A'B'}{C'D'}=\frac{ab}{cd}.$$

Dar, $AB=ab$, $CD=cd$, ca paralele cuprinse între paralele şi deci relaţia (1) devine

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD},$$

sau

$$\text{(2)} \qquad \frac{\text{prAB}}{\text{prCD}}=\frac{AB}{CD},$$

adică, *raportul proecţiilor a doi vectori paraleli este egal cu raportul acelor doi vectori.*

Relaţia (2) se poate scrie

$$\text{(3)} \qquad \text{prAB}=\frac{\text{prCD}}{CD}\cdot AB.$$

Dacă luăm vectorul CD egal cu unitatea, relaţia (3) devine

$$\text{pr}AB = AB.\text{pr}CD,$$

adică, *măsura proecţii unui vector pe o axă este egală cu produsul măsurii acelui vector cu măsura proecţii vectorului unitate pe aceeaş axă.*

In cazul vectorului AB (Fig. 285), se duce printr'un punct O al axei $x'x$ un vector OM paralel cu AB şi egal cu unitatea; însemnând cu m proecţia punctului M pe axa $x'x$, proecţia vectorului unitate este Om, iar aceea a vectorului AB, este $\text{pr}AB = AB.Om$. Proecţia Om a vectorului unitate se zice *parametru de proecţie.*

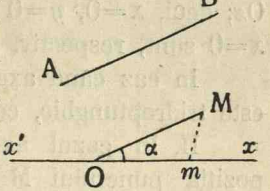


Fig. 285.

In cazul proecţii ortogonale, triunghiul OMm este dreptunghic în m şi însemnând cu α unghiul MOx, format de Ox cu vectorul AB, avem $Om = OM\cos\alpha = \cos\alpha$ şi deci

$$\text{pr}AB = AB\cos\alpha,$$

adică, *proecţia ortogonală a unui vector* AB *pe axa* $x'x$ *este egală cu produsul acelui vector cu cosinusul unghiului format de acel vector cu axa de proecţie.*

187. **Determinarea unui punct în spaţiu.** I. Fie trei axe Ox, Oy, Oz, care formează un triedru. Presupunând că planul xOy este orizontal şi că Oz este deasupra acestui plan, se zice că triedrul $Oxyz$ este direct (Fig. 286), când un observator, şezând cu picioarele în O, capul înspre Z şi privind în faţă porţiunea xOy, va trebui să mişte în sens direct (invers ca mersul acelor unui ceasornic) pe Ox, pentru a-l aduce peste Oy.

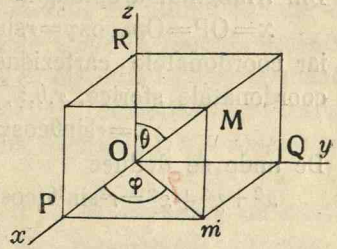


Fig. 286.

Aşa fiind, să însemnăm cu P, Q, R proecţiile punctului M pe axele Ox, Oy, Oz, respectiv paralel cu planele yOz, zOx, xOy, adică intersecţiile acestor axe cu planele duse prin M paralele cu aceste plane. Cantităţile $x = OP$, $y = OQ$, $z = OR$ se zic coordonatele punctului M (şi sunt abscisa, ordonata, cota). La orice punct M corespunde un singur sistem de valori (x,y,z) şi invers. Fiind date cantităţile (a,b,c), pentru a găsi punctul corespunzător, luăm pe Ox, $OP = a$; pe paralela din P la Oy, $Pm = b$; pe paralela din m la Oz, $mM = c$. Se obţine astfel punctul cerut M şi se vede că OM este linia care închide conturul $OPmM$, format de coordonatele acestui punct, numit şi conturul coordonatelor.

Se mai vede că x,y,z, coordonatele punctului M, sunt respectiv proecțiile pe Ox,Oy,Oz ale vectorului OM.

Dacă $z=0$, punctul M este în planul xOy; $z=0$ se zice ecuația planului xOy; $x=0$, $y=0$ sunt, respectiv, ecuațiile planelor yOz, xOz. De asemenea, puntul care are $x=0$, $y=0$, este pe axa Oz; deci, $x=0$, $y=0$ sunt ecuațiile axei Oz; $y=0$, $z=0$ și $z=0$ $x=0$ sunt, respectiv, ecuațiile axelor Ox și Oy.

In caz când axele $Oxyz$ sunt perpendiculare, triedrul $Oxyz$ este tridreptunghic, coordonatele se zic perpendiculare.

II. In cazul axelor perpendiculare, se mai poate determina poziția punctului M în spațiu, cunoscând coordonatele polare, $\varphi=(Ox,Om)$, $\rho=Om$, ale proecții ortogonale m a punctului M pe planul xOy și cota $OR=mM=z$. Cantitățile φ,ρ,z formează un sistem de *coordonate cilindrice* ale lui M.

III. De asemenea, poziția lui M este cunoscută (Fig. 286) (axe perpendiculare), când se dau lungimea $OM=r$, totdeauna pozitivă, unghiul geometric, $zOM=\theta(0<\theta<\pi)$ și unghiul algebric, $\varphi=(Ox,OM)$. Cantitățile r,θ,φ se zic *coordonatele sferice* ale punctului M. Însemnând cu (x,y,z) coordonatele carteziene perpendiculare ale punctului M, din triunghiul dreptunghic OMm, deducem

$$Om=OM\cos MOm=r\sin\theta,\quad z=Mm\sin MOm=r\cos\theta.$$

Din triunghiul dreptunghic OPm, avem

$$x=OP=Om.\cos\varphi=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=Pm=Om\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi,$$

iar coordonatele carteziene perpeneiculare (x,y,z) sunt legate de coordonatele sferice, r,θ,φ, cu relațiile

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

De unde se deduce

$$x^2+y^2+z^2=r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

188. **Determinarea unei direcții. Direcții paralele.** Direcția unei drepte D este cunoscută, dacă se dă paralela Δ dusă la D prin origina O a axelor de coordonate. Dar, o dreaptă OM, dusă prin origina axelor, este cunoscută, sau dacă se dau coordonatele unui punct oarecare M al acestei drepte, sau unghiurile α,β,γ pe care OM le face cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz.

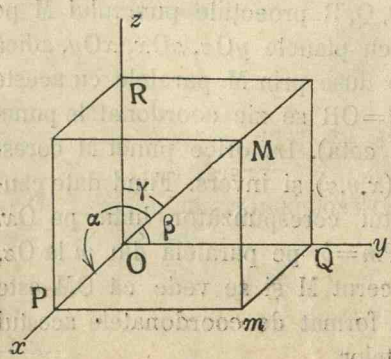


Fig. 287.

I. Dacă ne interesează numai

direcția dreptei OM, și nu sensul, este destul a cunoaște coordonatele (a, b, c) ale unui punct oarecare M al acestei drepte (Fig. 287), care sunt tocmai proecțiile paralel cu planele de cordonate, ale vectorului OM pe cele trei axe. Dacă însemnăm cu (a', b', c') coordonatele unui punct M′ al dreptei OM, a', b', c' sunt de asemenea proecțiile vectorului OM′ pe aceleași axe.

Dar vectorii OM și OM′ fiind pe aceeaș axă, pot fi considerați ca paraleli și deci raportul vectorilor este egal cu acela al proecțiilor; așa dar

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{prOM}{prOM'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Coordonatele (a', b', c') ale unui punct oarecare al dreptei OM, paralelă cu D, formează un sistem de *parametrii directori* ai direcții D. Sunt, deci, o infinitate de sisteme de parametrii directori ai unei direcții date și *există proporționalitate între două sisteme de parametrii directori ai unei aceleaș direcții sau a două direcții paralele.* Deci, două direcții definite prin parametrii lor directori, (a, b, c), (a', b', c'), sunt paralele, când parametrii lor directori sunt proporționali,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

II. *Dacă ne interesează și sensul direcții* D, atunci trebue să cunoaștem unghiurile α, β, γ pe care axele $Oxyz$ le face cu dreapta orientată OM, dusă prin origină, paralel cu direcția D. Presupunând că am luat pe OM vectorul $O\delta = 1$, proecțiile ortogonale ale acestui vector unitate pe axele Ox, Oy, Oz sunt $O\delta\cos(Ox, OM) = O\delta\cos\alpha = \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Cantitățile $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ permit să se cunoască de odată direcția și sensul dreptei D și se numesc *cosinusurile directoare* ale direcții D.

1°. *In cazul axelor perpendiculare,* însemnând cu M un punct oarecare al paralelei cu D dusă prin origină, P, Q, R, proecțiile sale ortogonale pe cele trei axe avem

$$OP = OM\cos\alpha,\ OQ = OM\cos\beta,\ OR = OM\cos\gamma.$$

De unde

$$(4) \qquad \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = \overline{OM}^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Dar, se știe că, într'un paralelipiped dreptunghic, pătratul diagonalei este egal cu suma pătratelor muchilor și deci

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2.$$

Inlocuind în (4), obţinem

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma=1, \tag{5}$$

relaţia dintre cosinsurile directoare ale unei drepte. Deci, fiind date unghiurile α şi β ale unei drepte cu axele Ox şi Oy, unghiul γ al acelei drepte cu axa Oz este dat de relaţia (5).

Să însemnăm cu (a, b, c) parametrii directori ai unei drepte D, ce face cu axele de coordonate unghiurile (α, β, γ). Fie P, Q, R proecţiile pe cele trei axe ale punctului M de coordonate (a, b, c). Avem $a=OP$, $b=OQ$, $c=OR$,

$$OP=OM\cos\alpha,\ a=OM\cos\alpha,\ b=OM\cos\beta,\ c=OM\cos\gamma,$$

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}$$

şi aplicând o proprietate a rapoartelor egale.

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

de unde

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{6}$$

Deci, fiind cunoscuţi parametrii directori (a, b, c) ai unei direcţii D, relaţiunile (6) ne dau cosinusurile directoare ale acelei direcţii D şi se vede că dacă dreapta D nu este orientată, avem pe ea două sensuri, după cum luăm înaintea radicalului semnul + sau −.

2°. *In cazul axelor oblice* (Fig. 288), să însemnăm cu λ, μ, ν unghiurile yOz, zOx, xOy ale acestor axe. Fie α, β, γ unghiurile axelor Ox, Oy, Oz cu semidreapta OA; x, y, z coordonatele unui punct M luat pe această dreaptă; l lungimea lui OM. Proectând ortogonal conturul OPQM al coordonatelor şi rezultanta sa OM, pe cele trei axe şi OA, avem

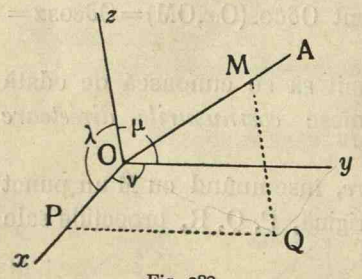


Fig. 288.

$$\begin{aligned} &x+y\cos\nu+z\cos\mu=l\cos\alpha,\\ &x\cos\nu+y+z\cos\lambda=l\cos\beta,\\ &x\cos\mu+y\cos\lambda+z=l\cos\gamma,\\ &x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=l. \end{aligned} \tag{7}$$

Cantităţile x, y, z, l nefiind toate nule, căci punctul M este diferit de O, putem elimina între aceste relaţii pe x, y, z, l, şi obţinem

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Aceasta este relaţia între cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ale dreptei OA în cazul general şi este de forma

$$F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) - \omega^2 = 0, \tag{8}$$

F fiind o funcţiune omogenă şi de gradul al doilea în raport cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, iar

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu. \tag{9}$$

Pentru a găsi dreapta ale cărei cosinusuri directoare, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sunt proporţionale cu a, b, c, va trebui să considerăm ecuaţiile

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$$

şi (8). Insemnând cu k valoarea comună a acestor rapoarte, avem $\cos\alpha = ka$, $\cos\beta = kb$, $\cos\gamma = kc$ şi înlocuind în (8), obţinem $\omega^2 - k^2 F(a, b, c) = 0$, de unde

$$k = \epsilon \frac{\omega}{\sqrt{F(a, b, c)}}, \quad \cos\alpha = \epsilon \frac{\omega a}{\sqrt{F(a, b, c)}}, \ldots; \quad \epsilon = \pm 1. \tag{10}$$

Când axele sunt perpendiculare, $\lambda = \mu = \nu = 90^0$, iar relaţia (8) este $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

189. **Consinusul unghiului a două direcţii. Direcţii perpendiculare.** I. *Axe perpendiculare.* Fie α, β, γ; α', β', γ' unghiurile axelor $Oxyz$ cu direcţiile D şi D'. Să ducem prin O dreptele $O\delta$ şi $O\delta'$ (fig. 289) paralele cu direcţiile D şi D'. Unghiul dreptelor $O\delta$ şi $O\delta'$ este egal cu unghiul V al direcţiilor D şi D'. Axele de coordonate fac cu dreptele $O\delta$ şi $O\delta'$ unghiurile α, β, γ; α', β', γ'. Să luăm pe $O\delta$ un vector $O\delta = +1$ şi fie $OQP\delta$ conturul coordonatelor perpendiculare ale punctului δ. Avem $OQ = O\delta\cos\alpha = \cos\alpha$, $QP = \cos\beta$, $P\delta = \cos\gamma$.

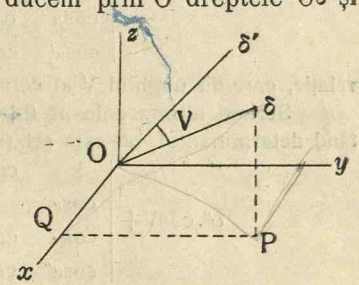


Fig. 289.

Să proectăm ortogonal pe axa $O\delta'$ rezultanta $O\delta$ şi conturul $OQP\delta$; obţinem

$$O\delta\cos(O\delta', O\delta) = OQ\cos(O\delta', OQ) + QP\cos(O\delta', QP) + P\delta\cos(O\delta', P\delta),$$

$$\cos V = \cos\alpha\cos(O\delta', Ox) + \cos\beta\cos(O\delta', Oy) + \cos\gamma\cos(O\delta', Oz),$$

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

relaţiune ce dă în cazul axelor perpendiculare cosinusul unghiului a două direcţii în funcţiune de cosinusurile directoare ale acestor direcţii.

Dacă se unesc parametrii directori (a, b, c), (a', b', c') ai celor două direcţii, avem

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \ldots\quad \cos\alpha'=\frac{a'}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},\ \ldots$$

și deci înlocuind, cosinusul unghiului celor două direcții e dat de

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+cc'}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Direcțiile D *și* D′ *fiind perpendiculare*, atunci $V=90^0$, $\cos V=0$, și deci condiția de perpendicularitate, în cazul axelor perpendiculare, a două direcții este ca între cosinusurile directoare, sau parametrii directori să avem relațiile

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0,\ \text{sau}\ aa'+bb'+cc'=0.$$

II. In cazul *axelor oblice*, ce fac unghiurile $yOz=\lambda$, $zOx=\mu$, $xOy=\nu$, să proectăm ortogonal conturul OQPδ și rezultanta Oδ pe axele $Oxyz$ și dreapta Oδ′. Insemnând cu $\alpha,\beta,\gamma,\ \alpha',\beta',\gamma'$ unghiurile axelor cu Oδ și Oδ′, și V unghiul dreptelor Oδ și Oδ′, avem

$$\begin{aligned}
x+y\cos\nu+z\cos\mu&=\cos\alpha,\\
x\cos\nu+y+z\cos\lambda&=\cos\beta,\\
x\cos\mu+y\cos\lambda+z&=\cos\gamma,\\
x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma'&=\cos V.
\end{aligned}$$

Eliminând pe x, y, z între aceste ecuații, obținem

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma\\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & \cos V \end{vmatrix}=0,$$

relație, care dă unghiul V al celor două direcții.

Scriind ultima coloană $0+\cos\alpha$, $0+\cos\beta$, $0+\cos\gamma$, $\cos V+0$, și desvoltând determinantul, această relație se scrie

$$\omega^2.\cos V+\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma\\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ω^2 fiind dat de (9), de unde se obține condiția de perpendicularitate ($V=90^0$, $\cos V=0$) a doua direcții în cazul axelor oblice.

190. **Determinarea poziției unui vector. Distanța dintre două puncte.** Un vector este cunoscut, sau prin coordonatele originii și extremității vectorului (6 cantități) sau dacă se cunosc coordonatele originei vectorului (3 cantități), unghiurile α, β, γ ale axelor de, coordonate cu vectorul [cu relația (8), deci numai 2 cantități] și în fine lungimea vectorului (tot 6 cantități).

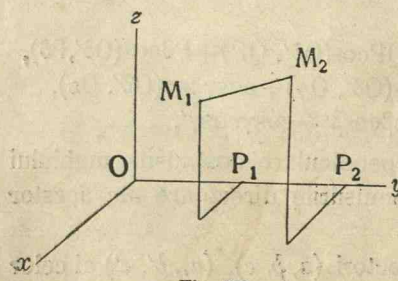


Fig. 290.

Să considerăm vectorul M_1M_2, definit prin punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ (Fig. 290). Să ducem prin M_1 și M_2 plane paralele cu xOz și fie P_1 și P_2 intersecțiile lui Oy cu aceste plane. Avem

$$\operatorname{pr}_{Oy} M_1M_2 = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = y_2 - y_1,$$

adică proecția unui vector M_1M_2 pe Oy este egală cu diferența dintre ordonatele (y-urile) extremității și originii vectorului. Așa dar, proecțiile vectorului M_1M_2 pe Ox, Oy, Oz sunt egale cu

$$X = x_2 - x_1,\quad Y = y_2 - y_1,\quad Z = z_2 - z_1.$$

Însemnând cu α,β,γ unghiurile axelor Ox, Oy, Oz cu vectorul M_1M_2, avem

$$X = x_2 - x_1 = M_1M_2\cos\alpha,\quad Y = M_1M_2\cos\beta,\quad Z = M_1M_2\cos\gamma.$$

I. În cazul *axelor perpendiculare*,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \overline{M_1M_2}^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Dar, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ și deci

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

adică în cazul axelor perpendiculare, *distanța dintre două puncte este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor diferențelor coordonatelor de același fel.*

II. In cazul *axelor oblice*, pentru a afla distanța $OM = l$ de la origină la punctul $M(x, y, z)$, să înmulțim relațiile (7) (No. 188), respectiv cu x, y, z, l și adunând, avem

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu = l^2, \tag{11}$$

relație care dă distanța l.

Distanța M_1M_2 dintre punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ se calculează, deplasând axele paralele cu ele în punctul M_1; coordonatele lui M_2 față de noile axe sunt proecțiile lui M_1M_2 pe aceste axe, adică $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$.

Distanța M_1M_2 este distanța de la $M_2(X, Y, Z)$ la noua origină M_1, dată de relația (11), și are expresia

$$\overline{M_1M_2}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu,$$

unde $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$.

III. *Aplicații.* 1°. Distanța unui punct $M(x,y,z)$ la origină $O(0,0,0)$ a axelor perpendiculare este $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2°. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ este în cazul axelor perpeniculare, ecuația unei sfere cu centru în origină și raza R; iar $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ este ecuația unei sfere cu centru (a,b,c) și raza R.

3°. Putem găsi altă formă a expresiunii unghiului V a două direcții OM și OM', M(x,y,z), M'(x',y',z'), OM=l, OM'=l'. In adevăr, să înmulțim în (7) (No. 188) primele trei relații cu x', y', z'; le adunăm apoi și ținem seamă de $x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma=l'\cos V$, care se obține proectând ortogonal pe OM rezultanta OM' și conturul OP'Q'M' al punctului M'; avem

$$xx'+yy'+zz'+(yz'+zy')\cos\lambda+(zx'+xz')\cos\mu+(xy'+yx')\cos\nu=ll'\cos V.$$

191. **Determinarea poziției unui punct pe un vector dat.** I. Să considerăm cazul când vectorul e definit prin originea $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și extremitatea sa $M_2(x_2,y_2,z_2)$ (Fig. 291). Un punct oarecare $M(x,y,z)$ de pe dreapta M_1M_2 este cunoscut, dacă se știe raportul $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, în care acest punct împarte segmentul M_1M_2. Fie P_1,P,P_2 proecțiile punctelor M_1, M,M_2 pe Oy. Avem

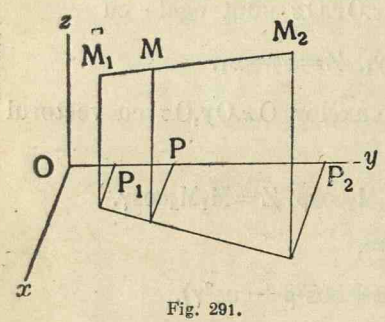


Fig. 291.

$$\frac{\mathrm{pr}M_1M}{\mathrm{pr}MM_2}=\frac{M_1M}{MM_2},\ \frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

Dar, $P_1P=y-y_1$, $PP_2=y_2-y$, așa că relația precedentă devine

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda,$$

de unde

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

și, în mod analog,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Acestea sunt coordonatele unui punct $M(x,y,z)$ ce împarte segmentul M_1M_2, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, în raportul $M_1M:MM_2=\lambda$.

Aceste formule n'au sens pentru $\lambda=-1$, când punctul M se depărtează la infinit pe dreapta M_1M_2. Pentru $\lambda=1$, M este mijlocul segmentului M_1M_2, iar coordonatele sale sunt

$$\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Fiind cunoscut punctul M pe segmentul M_1M_2, prin raportul $M_1M:MM_2=\lambda$, conjugatul armonic N al punctului M față de M_1M_2 e definit de

$$\frac{MM_1}{MM_2}=-\frac{NM_1}{NM_2},\ \frac{M_1N}{NM_2}=-\frac{M_1M}{MM_2}=-\lambda,$$

și deci coordonatele lui N sunt

$$\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}, \frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}.$$

Se regăsește, în cazul $\lambda=1$, că punctul de la infinit este conjugatul anarmonic al mijlocului unui segment în raport cu extremitățile segmentului.

Mai clar, punctele

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \ldots; \frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu}, \ldots,$$

sunt conjugate armonic, când $\lambda+\mu=0$.

II. Să trecem acum la cazul când dreapta D pe care se află punctul M, este definită de punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și parametrii săi directori (a,b,c). Aceasta însemnează că dreapta D este paralelă cu dreapta ce unește origina cu punctul $P(a,b,c)$.

Un punct $M(x,y,z)$ pe dreapta D (Fig. 292) este cunoscut, dacă se știe raportul $\frac{M_0M}{OP}=\rho$.

Proectând vectorii paraleli M_0M și OP pe Ox, avem

$$\frac{\text{pr}M_0M}{\text{pr}OP}=\frac{M_0M}{OP}=\rho;\ \text{pr}M_0M=x-x_0,\ \text{pr}OP=a,$$

deci

$$\frac{x-x_0}{a}=\rho,\ x=x_0+a\rho.$$

In mod analog, $y=y_0+b\rho$, $z=z_0+c\rho$.

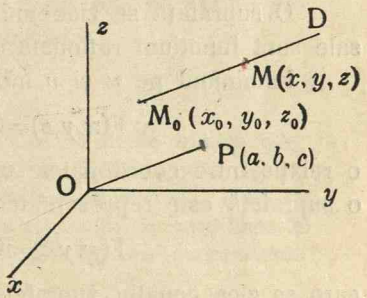


Fig. 292.

Deci, coordonatele unui punct variabil pe dreapta D definită prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și parametrii săi directori (a,b,c), sunt de forma

$$x=x_0+a\rho,\ y=y_0+b\rho,\ z=z_0+c\rho,\ \rho=\frac{M_0M}{OP},\ P(a,b,c).$$

In cazul axelor perpendiculare, când se cunosc cosinusurile directoare, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, atunci $OP=1$, $\rho=M_0M$ și deci coordonatele unui punct variabil pe dreapta D sunt

$$x=x_0+\rho\cos\alpha,\ y=y_0+\rho\cos\beta,\ z=z_0+\rho\cos\gamma.$$

192. **Reprezentarea analitică a liniilor și suprafețelor.** *O curbă* în spațiu poate fi considerată ca locul pozițiilor unui punct variabil, care se mișcă după anumită lege. Deci, coordonatele unui punct sunt funcțiuni date de același parametru variabil t,

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t).$$

La fiecare valoare a parametrului t corespunde un punct pe pe curbă, astfel că, dacă t variază, ecuaţiile definesc o curbă în spaţiu.

O curbă se zice unicursală când coordonatele punctelor sale sunt funcţiuni raţionale de un parametru t.

O suprafaţă poate fi considerată ca locul poziţiilor în spaţiu ale unei curbe mobile. Ecuaţiile unei curbe în spaţiu fiind de forma

$$x=f(u),\ y=g(u),\ z=h(u),$$

unde u este un parametru variabil, pentru a obţine o suprafaţă cu ajutorul acestei curbe, este destul a o face să varieze în spaţiu după o lege anumită, adică, funcţiunile f, g, h să mai depindă încă de un parametru variabil, v. Aşa fiind, la fiecare valoare a lui v corespunde o curbă, iar când v variază, locul poziţiilor curbelor obţinute este o suprafaţă. Deci, coordonatele unui punct al unei suprafeţe depinde de doi parametrii variabili u şi v, şi deci sunt de forma

$$x=f(u,v),\ y=g(u,v),\ z=h(u,v), \tag{12}$$

u şi v fiind doi parametrii variabili.

O suprafaţă se zice unicursală, când coordonatele punctelor sale sunt funcţiuni raţionale de doi parametrii independenţi.

Eliminând pe u şi v între ecuaţiile (12), se obţine

$$F(x,y,z)=0, \text{ sau } z=\Phi(x,y),$$

o relaţie între coordonatele unui punct variabil al suprafeţei. Deci o suprafaţă este reprezentată de o ecuaţie

$$F(x,y,z)=0, \text{ sau } z=\Phi(x,y),$$

care se zice ecuaţia suprafeţei.

Se mai poate şi altfel defini o curbă în spaţiu. Pentru aceasta, să observăm că un punct al curbei este de forma

$$x=f(u),\ y=g(u),\ z=h(u).$$

Să eliminăm pe u între prima şi a doua şi între prima şi a treia. Se obţin ecuaţii de forma

$$\Phi(x,y)=0,\ \Psi(x,z)=0,$$

care arată că un punct (x, y, z) al curbei considerate verifică ecuaţiile $\Phi(x, y)=0$, $\Psi(x,z)=0$, a două suprafeţe, sau că o curbă în spaţiu poate fi considerată ca intersecţia a două suprafeţe. Ecuaţiile a două suprafeţe fiind

$$f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0,$$

curba lor de intersecție se zice că e reprezentată de ecuațiile $f(x,y,z)=0$ și $g(x,y,z)=0$.

Să considerăm curba (C) intersecția suprafețelor

$$(13) \qquad (S_1)\ f(x,y,z)=0,\ (S_2)\ g(x,y,z)=0.$$

Orice ecuație, care este o consecință a ecuațiilor (13), reprezintă o suprafață ce trece prin curba (C). In particular, egalând valorile lui z, deduse din ecuațiile (13), sau, cum se mai zice, eliminând pe z între aceste ecuații, se obține

$$(14) \qquad R(x,y)=0,$$

care este ecuația unei suprafețe (S), ce trece prin curba (C). Dar, la o soluție $x=a$, $y=b$ a ecuației (14), corespunde o paralelă la Oz, ale cărui toate punctele sunt pe (S). Suprafața (S) este deci un cilindru, ale cărui generatoare sunt paralele cu Oz și care trece prin (C). Cu alte cuvinte, ecuația (14) reprezintă în planul xOy proecția curbei (C) pe acest plan.

Urmează, deci, că fiind date ecuațiile unei curbe în spațiu

$$f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0,$$

ecuația proecții acelei curbe pe planul xOy, de ex., se obține eliminând pe z între cele două ecuații ale curbei.

Exerciții.

1) Se dau punctele $A(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, \ldots m$. Se divide dreapta A_1A_2, prin punctul B_1 în două părți egale; se consideră pe B_1A_3, punctul B_2, astfel ca $B_1B_2 : B_2B_3=1:2$; pe dreapta B_2A_4 se consideră punctul B_3, astfel ca $B_2B_3:B_3A_4=1:3$; etc. Să se arate că coordonatele punctului G, care împarte segmentul $B_{m-2}A_m$ în raportul $B_{m-2}G : GA_m=1:(m-1)$, are coordonatele

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m},\ldots$$

R. G se zice centrul de greutate a m masse egale, aplicate în punctele date și care se mai zice și centrul mediilor distanțe.

2) Să se demonstreze că dreptele care unesc mijloacele laturilor unui patrulater strâmb, se tae în mijlocul lor.

R. $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$. Punctul lor de intersecție are coordonatele $\frac{\Sigma x_1}{4}, \ldots$, este centrul de greutate al tetraedrului.

3) Fie $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A_2'A'_3A'_4$ două tetraedre cu centrele de greutate G și G'. Pe dreptele $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ se iau punctele $B_1, \ldots B_4$, care le împart în același raport λ. Să se arate că centrul de greutate al tetraedrului $B_1B_2B_3B_4$ este punctul ce împarte pe GG' în raportul λ.

R. $B_1\left(\frac{x_1+\lambda x'_1}{1+\lambda}, \ldots\right)$.

4) Fiind date punctele $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, \ldots p$, se ia pe A_1A_2 punctul C_1, astfel ca $A_1C_1 : C_1A_2 = m_2 : m_1$. Pe C_1A_3 se ia punctul C_2, astfel ca $C_1C_2 : C_2A_3 = m_3 : (m_1+m_2)$; pe C_2A_4, se ia punctul C_3, astfel ca $C_2C_3 : C_3A_4 = m_4 : (m_1+m_2+m_3)$ şi aşa mai departe. Să se afle coordonatele ultimului punct P.

R. $x = \dfrac{m_1x_1+\ldots+m_px_p}{m_1+\ldots+m_p}$, $y = \dfrac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$, $z = \dfrac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}$.

Punctul P se zice centrul distanţelor proporţionale, sau centrul de greutate al maselor $m_1, \ldots m_p$, aplicate respectiv în $A_1, \ldots A_p$.

5) Să se găsească un punct egal depărtat de punctele (0,0,0), (0,2,0), (1,0,0), (0,0,3).

R. $x^2+y^2+z^2 = x^2+(y-2)^2+z^2 = (x-1)^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(z-3)^2$;

$$x = \frac{1}{2},\ y = 1,\ z = \frac{3}{2}.$$

Schimbarea sistemului de referinţe.

193. **Trecerea de la un triedru la altul.** Să presupunem că se cunosc ecuaţiile unei suprafeţe sau ale unei curbe în raport cu un sistem de referinţe, trei axe perpendiculare, Ox, Oy, Oz, şi voim a găsi ecuaţiile aceloraşi suprafeţe sau curbe în raport cu un nou sistem de referinţe, un triedru tridreptunghic, $O_1x_1y_1z_1$, a cărui poziţie e cunoscută faţă de vechiul triedru $Oxyz$ (Fig. 293).

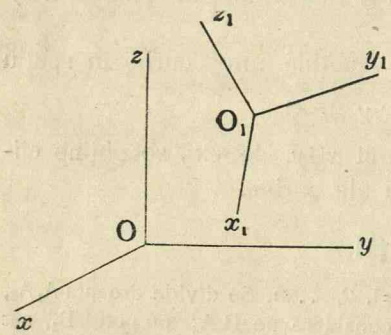


Fig. 293.

Dacă triedrele $Oxyz$ şi $O_1x_1y_1z_1$ sunt de acelaş sens (direct, de ex.) se poate aduce triedrul $Oxyz$ să coincidă cu $O_1x_1y_1z_1$, printr'o translaţie, urmată de o rotaţie. În adevăr, să dăm triedrului $Oxyz$ o translaţie dealungul liniei OO_1, egală cu OO_1. Axele Ox, Oy, Oz devin O_1X, O_1Y, O_1Z, paralele cu cele

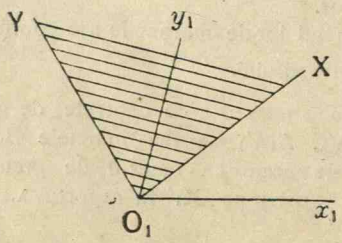


Fig. 294.

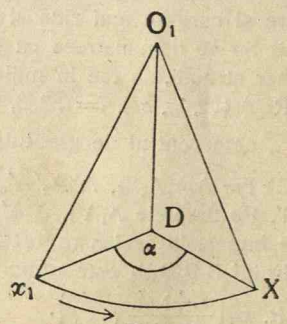


Fig. 295.

vechi. Rămâne acum a aduce planul XO_1Y peste $x_1O_1y_1$, astfel ca O_1X să vie peste O_1x_1.

Însă, pentru a aduce o dreaptă O_1X peste O_1x_1, va fi de ajuns a roti dreapta O_1X cu un unghi α în jurul unei drepte O_1D (Fig. 295) (O_1D ar putea fi considerată ca axa unui con cu generatoarele O_1x_1, O_1X) situată în planul P perpendicular pe planul x_1O_1X, dus prin bisectoarea interioară a unghiului x_1O_1X.

Deci, putem aduce unghiul drept XO_1Y peste $x_1O_1y_1$ (Fig. 294) cu o rotaţie ca mai sus, în jurul unei axe ce este intersecţia planelor P şi Q, perpendiculare respectiv pe x_1O_1X, y_1O_1Y şi prin bisectoarele unghiurilor x_1O_1X, y_1O_1Y.

Odată ce planele $x_1O_1y_1$ şi XO_1Y sunt aşternute, unul peste altul, axa Oz vine peste Oz_1, căci triedrele au acelaş sens.

Când triedrele $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ au sensuri contrarii, al doilea are aceeaş orientare cu simetricul primului în raport cu punctul O. În rezumat, se poate aduce triedrul $Oxyz$ peste $O_1x_1y_1z_1$ printr'o translaţie urmată de o rotaţie.

191. **Relaţiunile dintre cosinusurile directoare ale celor două triedre.** In cele ce urmează vom presupune că triedrele tridreptunghice $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ au acelaş sens. Poziţia triedrului $O_1x_1y_1z$ este cunoscută faţă de triedrul $Oxyz$, dacă se cunosc coordonatele (x_0,y_0,z_0) ale punctului O_1 în raport cu $Oxyz$ şi unghiurile $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ se le fac O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, respectiv cu Ox,Oy,Oz. Insemnând cu $a_1=\cos\alpha_1$, $b_1=\cos\beta_1$, $c_1=\cos\gamma_1$, $a_2=\cos\alpha_2$, ... $c_3=\cos\gamma_3$, cosinusurile directoare ale dreptelor O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, în raport cu Ox, Oy, Oz, avem

	Ox	Oy	Oz
O_1x_1	a_1	b_1	c_1
O_1y_1	a_2	b_2	c_2
O_1z_1	a_3	b_3	c_3

$$(1)\quad \begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1, \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1, \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1. \end{cases}$$

Exprimând că O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 sunt perpendiculare două câte două, avem

$$(2)\quad \begin{cases} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0, \\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0, \\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0. \end{cases}$$

Aceste nouă cosinusuri directoare, $a_1,\ldots b_3$, c_3, nu sunt independente, ci sunt legate cu aceste 6 relatii, care sunt distincte.

Mai putem găsi alte 6 relaţii între aceste cosinusuri direc-

toare. Prima și ultima din relațiile (2), rezolvate în raport cu $\frac{a_1}{c_1}, \frac{b_1}{c_1}$, dau

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}, \quad \frac{b_1}{c_1}=\frac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2},$$

de unde

$$\frac{a_1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{b_1}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{c_1}{a_2b_3-a_3b_2}, \tag{3}$$

și aplicând o proprietate a rapoartelor egale, avem

$$\frac{a_1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{b_1}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{c_1}{a_2b_3-a_2b_3}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\pm\sqrt{(b_2c_3-b_3c_2)^2+(c_2a_3-c_3a_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2}}.$$

Ținând seamă de identitatea Lagrange,

$$(b_2c_3-b_3c_2)^2+(c_2a_3-c_3a_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)-(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)^2,$$

și de relațiile (1) și (2), cantitatea de sub radicalul numitorului este egală cu 1, ca și cea de la numărător. Deci, valoarea comună a rapoartelor (3) este $\varepsilon=\pm 1$.

Se mai poate obține un raport egal cu aceste rapoarte, înmulțind în (3), ambii termeni ai primului raport cu a_1 la al doilea cu b_1 la al treilea cu c_1, și aducând numărătorii și numitorii, adică

$$\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)}=\varepsilon,$$

și cum numărătorul este egal cu 1, rezultă că

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=\varepsilon. \tag{4}$$

Egalând raportul (3) cu ε, rezultă

$$a_1=\varepsilon(b_2c_3-b_3c_2),\ b_2=\varepsilon(c_2a_3-c_3a_2),\ c_1=\varepsilon(a_2b_3-a_3b_2). \tag{5}$$

și considerând alte două ecuații din (2), obținem relații analoage, deduse, de altfel, din (5), prin permutări circulare,

$$\begin{aligned} &a_2=\varepsilon(b_3c_1-b_1c_3),\ b_2=\varepsilon(c_3a_1-c_1a_3),\ c_2=\varepsilon(a_3b_1-a_1b_3),\\ &a_3=\varepsilon(b_1c_2-b_2c_1),\ b_3=\varepsilon(c_1a_2-c_2a_1),\ c_3=\varepsilon(a_1b_2-a_2b_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Așa fiind, să înmulțim primele din relațiile (5) și (6) cu a_1, a_2, a_3; avem

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=\varepsilon[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]=\\ &\varepsilon[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(a_3c_2-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)]; \end{aligned}$$

dar paranteza cea mare este tocmai ε, după cum se vede din (4). Deci

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\varepsilon^2=1,\quad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1.$$

Analog, arătăm că

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,\quad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1. \tag{7}$$

De asemenea, înmulțind prima relație din (5) cu b_1, primele relații din (6) cu b_2 și b_3, avem, adunând

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\varepsilon[b_1(b_2c_3-b_3c_1)+b_2(b_3c_1-b_1c_2)+b_3(b_1c_2-b_2c_1)]=0,$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

In mod analog, obținem

$$b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,\quad c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0. \tag{8}$$

Prin urmare, între cele 9 cosinusuri directoare ale triedrului $O_1x_1y_1z_1$, între care au fost relațiile (1) și (2),

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0,\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2&=1, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3&=0,\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2&=1, & a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1&=0, \end{aligned}$$

există relațiile (7) și (8)

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1, & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=0,\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1, & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=0,\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1, & c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3&=0, \end{aligned} \tag{9}$$

Aceste relațiuni se pot obține fără calcul, deoarece exprimă condițiile de perpendicularitate ale laturilor triedrului $Oxyz$, ale cărui muchii au, față de triedrul $O_1x_1y_1z$, cosinusurile directoare $Ox(a_1,a_2,a_3)$, $Oy(b_1,b_2,b_3)$, $Oz(c_1,c_2,c_3)$.

Observare. Am văzut că între cosinusurile directoare $(a_1,b_1,\ldots c_3)$ ale muchilor triedrului $O_1x_1y_1z_1$ există 6 relații distincte, (1) și (2); deci, sunt numai trei dintre aceste 9 cosinusuri directoare suficiente, pentru a determina poziția unchilor triedrului $O_1x_1y_1z_1$. Acesta se mai poate vedea și astfel. Pentru determinarea poziții axei O_1x_1, trebue numai a_1 și b_1, căci c_1 este dat de relația $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$. Pentru determinarea lui O_1y_1, ar trebui tot două cantități; dar, cum este perpendiculară pe O_1x_1, există o relație între (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), anume $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$; rămâne că numai una din cantitățile (a_2,b_2,c_2) trebue dată pentru a determina pe O_1y_1. Cum O_1z_1 este perpendiculară pe planul $O_1x_1y_1$. poziția sa este determinată în spațiu.

In rezumat, *pentru determinarea unui triedru în spațiu,*

$O_1x_1y_1z_1$, *trebue 6 cantităţi,* trei care definesc poziţia punctului O_1 în spaţiu şi trei care definesc poziţia axelor O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 faţă de vechile axe.

195. **Formulele de transformare.** In cazul axelor perpendiculare, poziţia noului triedru $O_1x_1y_1z_1$ este cunoscută faţă de triedru $Oxyz$, dându-se coordonatele (x_0,y_0,z_0) ale vârfului O_1 şi cosinusurile directoare (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) ale axelor O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 faţă de triedrul $Oxyz$ (de fapt trebue date numai trei din aceste 9 cosinusuri).

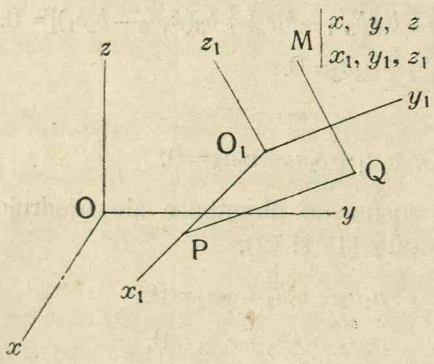


Fig. 296.

Să însemnăm (x, y, z) coordonatele unui punct M faţă de primul triedru şi (x_1,y_1,z_1) coordonatele aceluiaş punct faţă de triedrul $O_1x_1y_1z_1$ (Fig. 296). Fie O_1PQM conturul coordonatelor lui M în triedrul $O_1x_1y_1z_1$, adică $O_1P=x_1$, $PQ=y_1$, $QM=z_1$. Să proectăm conturul OO_1PQM pe Ox. Avem

$$\text{pr}OM=\text{pr}OO_1+\text{pr}O_1P+\text{pr}PQ+\text{pr}QM,$$

$$x=x_0+O_1P\cos(O_1P,Ox)+PQ\cos(PQ,Ox)+QM\cos(QM,Ox)=$$

$$x_0+x_1\cos(O_1x_1,Ox)+y_1\cos(O_1y_1,Ox)+z_1\cos(O_1z_1,Ox),$$

$$x=x_0+a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1. \tag{10}$$

Proectând pe Oy, Oz, obţinem

$$y=y_0+b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1,\quad z=z_0+c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1. \tag{11}$$

Relaţiunile (10) şi (11) ne permit a calcula coordonatele (x,y,z) ale unui punct în raport cu sistemul $Oxyz$, în funcţiune de coordonatele (x_1,y_1,z_1) ale aceluiaş punct faţă de axele $O_1x_1y_1z_1$ şi invers.

Inmulţind primele relaţii (10) şi (11) respectiv cu a_1,b_1,c_1 şi adunând avem

$$a_1x+b_1y+c_1z=a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+(a_1^2+b_1^2+c_1^2)x_1+$$
$$(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)y_1+(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)z,$$

şi ţinând seamă de relaţiile (7) şi (8), avem

$$x_1=-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0)+a_1x+b_1y+c_1z,$$
$$y_1=-(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0)+a_2x+b_2y+c_2z,$$
$$z_1=-(a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0)+a_3x+b_3y+c_3z.$$

Se vede că m fiind gradul ecuaţii $f(x,y,z)=0$, făcând transformarea dată de formulele schimbării axelor de coordonate, se obţine o ecuaţie $F(x_1,y_1,z_1)$ de acelaş grad m în x_1,y_1,z_1.

Cazuri particulare. 1°. *In cazul translaţii,* adică triedrele $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ au muchile paralele, unghiurile ce le fac axele O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 cu Ox,Oy,Oz, sunt respectiv egale cu (0,90°,90°), (90°,0,90°), (90°,90°,0), astfel că valorile cosinusurilor directoare sunt (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), iar formulele de transformare (10) şi (11) devin

$$x=x_0+x_1,\quad y=y_0+y_1,\quad z=z_0+z_1.$$

2°. *In cazul rotaţii,* O_1 este în O, $x_0=y_0=z_0=0$, iar formulele de transformare sunt

$$(12)\qquad \begin{aligned} x&=a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1,\\ y&=b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1,\\ z&=c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1. \end{aligned}$$

Inmulţind aceste ecuaţii respectiv cu a_1,b_1,c_1; a_2,b_2,c_2; a_3,b_3,c_3 şi ţinând seamă de (9), avem

$$\begin{aligned} x_1&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ y_1&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ z_1&=a_3x+b_3y+c_3z, \end{aligned}$$

formule care permit să se calculeze coordonatele (x_1,y_1,z_1) cu ajutorul lui (x,y,z).

196. **Interpretarea formulelor de transformare.** Să considerăm un punct $M(x,y,z)$ al unei figuri variabile (deformabile) (un lichid, un gaz, etc.) care ocupă la un moment dat o porţiune a spaţiului. După un timp oarecare, figura va ocupa o nouă regiune a spaţiului, F_1, iar punctul M ocupă o nouă poziţie M_1, de coordonate (x_1,y_1,z_1) în figura F_1 (Fig. 297). Cantităţile x_1, y_1, z_1 sunt funcţiuni de x, y, z,

$$x_1=f(x,y,z),\quad y_1=g(x,y,z),\quad z_1=h(x,y,z),$$

f, g, h fiind funcţiuni continue de x, y, z, iar coeficienţii lui x, y, z funcţiuni continue de timpul t. Presupunând că t are o valoare determinată, aceste formule permit să arate prin ce operaţiuni geometrice se poate trece de la orice punct M al figurei F la punctul M_1 al figurei F_1, transformata lui F.

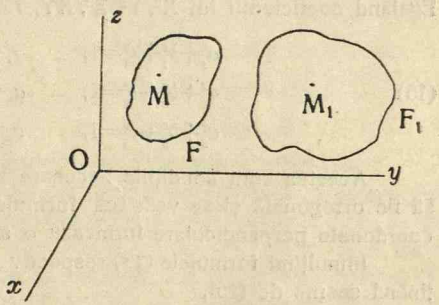


Fig. 297.

In cazul când formulele de transformare sunt lineare,

$$\begin{aligned} x_1&=x_0+p_1x+q_1y+r_1z,\\ y_1&=y_0+p_2x+q_2y+r_2z,\\ z_1&=z_0+p_3x+q_3y+r_3z, \end{aligned}$$

unde $x_0, y_0, z_0, p_1, \ldots, r_3$ sunt funcţiuni de timpul t. se zice că avem o *deformare omogenă*. Un exemplu simplu, este cazul figurei invariabile, care variază numai ca poziţie şi nu ca formă şi unde $p_1, q_1, \ldots r_3$ sunt cosinusuri directoare iar formulele de transformare sunt cele de transformare a axelor de coordonate, cum este în cazul nostru.

107. Expresiuni metrice. I. Se zice expresiune metrică o expresiune $F(x_1, y_1, z_1; \ldots z_n)$, care depinde de coordonatele $(x_1, y_1, z_1), \ldots (x_n, y_n, z)$ ale punctelor $M_1, \ldots M_n$ şi care îşi păstrează forma după o schimbare a exelor de coordonate perpendiculare,

$$x = x_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z,$$
$$y = y_0 + b_1X + b_2Y + b_3Z,$$
$$z = z_0 + c_1X + c_2Y + c_3Z,$$

adică

$$F(x_1, y_1, z_1; \ldots x_n, y_n, z_n) \equiv F(X_1, Y_1, Z_1; \ldots X, Y_n, Z_n).$$

II. *Substituţe ortogonală.* Să facem în expresiunea $x^2+y^2+z^2$ substituţia lineară

$$\begin{aligned} x &= a_1X + a_2Y + a_3Z, \\ y &= b_1X + b_2Y + b_3Z, \\ z &= c_1X + c_2Y + c_3Z. \end{aligned} \tag{13}$$

Avem

$$x^2+y^2+z^2 = (a_1^2+b_1^2+c_1^2)X^2 + (a_2^2+b_2^2+c_2^2)Y^2 + (a_3^2+b_3^2+c_3^2)Z^2 + 2XY(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) + 2YZ(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3) + 2ZX(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1).$$

Substituţia (13) se zice *ortogonală*, dacă

$$x^2+y^2+z^2 \equiv X^2+Y^2+Z^2. \tag{14}$$

Trebue deci să avem

$$X^2+Y^2+Z^2 \equiv X^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2) + Y^2(a_2^2+b_2^2+c_2^2) + Z^2(a_3^2+b_3^2+c_3^2) + \ldots$$

Egalând coeficienţii lui $X^2, Y^2, Z^2, XY, YZ, ZX$, avem

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2 &= 1, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 &= 0, \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 &= 1, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 &= 0, \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 &= 1, & a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Acestea sunt condiţiile necesare şi suficiente ca transformarea (13) să fie ortogonală şi se vede că formulele de transformare ale axelor de coordonate perpendiculare formează o substituţie ortogonală.

Inmulţind formulele (13) respectiv cu a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3, avem, ţinând seamă de (15),

$$X = a_1x + b_1y + c_1z, \quad Y = a_2x + b_2y + c_2z, \quad Z = a_3x + b_3y + c_3z, \tag{16}$$

care se zice *substituţia inversă* a substituţii ortogonale (13).

Printre proprietăţile substituţii ortogonale sunt următoarele.

1°. Determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

este ortogonal, adică avem relaţiile (15) şi anume *suma pătratelor elemente-*

lor unei coloane este egal cu 1 și suma produselor elementelor a două coloane este nulă.

2°. Avem $\Delta=\pm 1$. In adevăr, efectuând produsul $\Delta.\Delta$, după regula înmulțirei determinanților, și ținând seamă de relațiile (15), avem

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Ambele semne + și — sunt posibile, căci dacă avem o substituție ortogonală pentru care $\Delta=1$, se pot schimba semnele elementelor primei linii și substituția este ortogonală, pe când Δ se schimbă de semn.

3°. Să presupunem, pentru a fixa ideile, $\Delta=1$. *Fiecare element al lui* Δ *este egal cu minorul său corespunzător în dezvoltarea lui* Δ. In adevăr, rezolvând ecuațiile (13) în raport cu X, Y, Z, avem

$$\Delta X=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}z.$$

Comparând cu prima din relațiile (16), și observând că $\Delta=1$, avem identificând coeficienții lui x, y, z,

$$a_1=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, b_1=\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, c_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

și deci proprietatea este învederată. Acestea sunt tocmai relațiile (5) și (6) ale transformării axelor de coordonate.

4°. *Substituția inversă este ortogonală.* In adevăr, ridicând la pătrat în (16), adunând avem

$$X^2+Y^2+Z^2=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)x^2+\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)y^2+\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)z^2$$
$$+2xy(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+2yz(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+2zx(c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3).$$

Ținând seamă de (14), trebue să avem

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0, \\ &b_1^2+b_2^2+b_3^2=1, \quad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0, \\ &c_1^2+c_2^2+c_3^2=1, \quad c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0, \end{aligned} \tag{17}$$

relații care probează că substituția inversă (16) este ortogonală.

Observare. Rotația axelor de coordonate perpendiculare este o substituție ortogonală. Am văzut că determinantul Δ avea valoarea ± 1. Se poate arăta că acest determinant are valoarea $+1$ sau -1, după cum triedrele $Oxyz$, OXYZ sunt sau nu de același sens. In adevăr, să presupunem că deplasăm triedrul tridreptunghic OXYZ în jurul lui O; cantitățile $a_1, b_1, \ldots c_3$ și deci și Δ variază în mod continuu. Dar cum Δ nu poate avea de cât valoarea ± 1, el este constant. Să facem să coincidă OX cu Ox, OY cu Oy; dacă triedrele au același sens, OZ coincide cu Oz. In acest caz elementele diagonalei lui Δ sunt toate egale cu 1 și celelalte nule; deci $\Delta=1$. Dacă cele două triedre nu sunt de același sens, după ce am adus pe OX și OY peste Ox și Oy, OZ este opus cu Oz. Elementele determinantului Δ au aceleași valori ca în cazul precedent, afară de c_3, care este egal cu -1; deci, în acest caz, $\Delta=-1$.

III. *Exemple de invarianți față de rotația axelor perpendiculare* 1°. $x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$. Interpretarea geometrică este următoarea. Aceste expresii sunt egale căci reprezintă respectiv pătratul distanței, $\overline{OM}^2$, de la origina axelor la punctul M, față de axele $Oxyz$ și OXYZ.

2°. $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$. Avem

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=(a_1X_1+a_2Y_1+a_2Z_1)(a_1X_2+a_2Y_2+a_3Z_2)+$$
$$(b_1X_1+b_2Y_1+b_3Z_1)(b_1X_2+b_2Y_2+b_3Z_2)+(c_1X_1+c_2Y_1+c_3Z_1)(c_1X_2+c_2Y_2+c_3Z_2)$$

și ținând seamă de relațiile (15) și (17), avem

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Pentru a interpreta geometric acest invariant, să scriem expresia sub forma

$$E=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=OM_1.OM_2\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{OM_1\,OM_2}=$$

$$OM_1.OM_2\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},\quad E=OM_1.OM_2\cos(OM_1, OM_2).$$

Această expresie este un invariant față de rotația axelor, fiindcă nu depinde de cât de punctul O și se numește produsul geometric al vectorilor OM_1, OM_2 (Fig. 298).

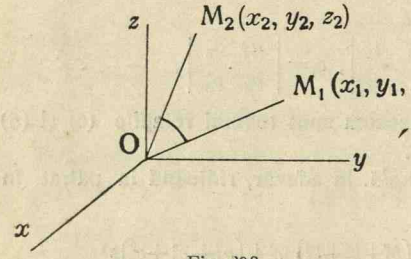


Fig. 298.

IV. *Exemple de expresii metrice.* 1°. $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$. Această expresie nu se schimbă față de o translație a axelor,

$$x=a+x',\ y=b+y',\ z=c+z',$$

căci

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=[(a+x_1')-(a+x_2')]^2+[(b+y_1')-(b+y_2')]^2+$$
$$[(c+z_1')-(c+z_2')]^2=(x_1'-x_2')+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2.$$

Relația dată se poate scrie

$$E=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2).$$

Cum fiecare din paranteze sunt invarianți față de rotația axelor, după cum am văzut, rezultă că întreaga expresie este invariant față de rotația axelor

Expresia dată este deci o expresie metrică, ca rămânând aceeași față de rotație și translație. Ea reprezintă distanța dintre două puncte.

2°. $E\equiv(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)+(z_1-z_2)(z_3-z_4)$. Dezvoltând se poate arăta, pe cale algebrică, că este o relație metrică. Pentru a interpreta geometric rezultatul, să considerăm punctele $M_i(x_i, y, z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$. Expresia dată se poate scrie

$$E\equiv M_1M_2.M_3M_4\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)+(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{M_1M_2.M_3M_4}=$$
$$M_1M_2.M_3M_4\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)+(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2}}.$$

Dar, considerând vectorul M_1M_2, proiecțiile sale pe axe sunt

$(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$, care sunt parametrii săi directori, iar cosinusurile sale directoare sunt respectiv

$$\frac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}},\quad \frac{y_1-y_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}},$$

$$\frac{z_1-z_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}.$$

Deci, expresia E devine

$$E\equiv M_1M_2\cdot M_3M_4\cos(M_1M_2,\ M_3M_4),$$

se vede că este independentă de origina axelor (translația axelor) și de rotația axelor, depinde numai de punctele date, este o relație metrică între cele patru puncte date și se numește produsul geometric al vectorilor M_1M_2, M_3M_4. Cum E este un invariant, rezultă că și $\cos(M_1M_2, M_3M_4)$ este un invariant, adică *unghiurile se păstrează* în această transformare.

198. **Formulele lui Euler.** Am văzut că formulele de transformare, în cazul rotației axelor, având 9 parametrii variabili, între care există 6 relații distincte, mai rămân numai *trei parametrii variabili* Se poate arăta direct că poziția noului sistem față de primul depinde de trei parametrii. In adevăr, fie două triedre tridreptunghice $Oxyz$, OXYZ, de același sens (sensul direct). Vom arăta că putem aduce întâiul să coincidă cu al doilea cu ajutorul a trei rotații potrivit alese (Fig. 299).

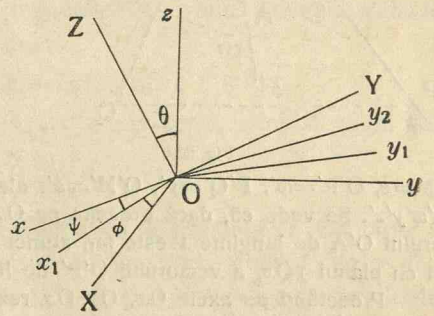


Fig. 299.

Planele xOy, XOY se taie după dreapta Δ, pe care alegem semidreapta Ox_1, astfel că făcând să se învârtească Oz în jurul lui Ox_1, în sensul direct, Oz să vie peste OZ, după o rotație de un unghiu inferior lui π.

1°. Așa fiind, să dăm o rotație triedului $Oxyz$ în jurul lui Oz, în sensul direct, până Ox coincide cu Ox_1; Oy va lua atunci poziția Oy_1. Fie ψ acest unghi de rotație, cuprins între 0 și 2π. Formulele de transformare sunt

$$x=x_1\cos\psi-y_1\sin\psi,\quad y=x_1\sin\psi+y_1\cos\psi,\quad z=z. \tag{18}$$

2°. Să dăm o rotație triedului Ox_1y_1z, în jurul lui Ox_1, în sensul direct, astfel ca Oz să se aplice peste OZ și fie Oy_2 noua poziție a lui Oy_1. Să însemnăm cu θ acest unghi de rotație cuprins între 0 și π, după cele ce preced. Formulele de transformare de la triedrul Ox_1y_1z, la triedrul Ox_1y_1Z, sunt

$$x_1=x_1,\quad y_1=y_2\cos\theta-Z\sin\theta,\quad z=y_2\sin\theta+Z\cos\theta. \tag{19}$$

3°. In fine, să dăm o rotație triedului Ox_1y_2Z în jurul lui OZ, în sensul direct, astfel ca Ox_1 să vie peste OX; Oy_2 vine să coincidă cu OY, căci cele două triedre sunt de același sens. Fie ϕ acest unghi de rotație, cuprins între 0 și 2π. Formulele de transformare de la triedrul Ox_1y_2Z la OXYZ sunt

$$x_1=X\cos\phi-Y\sin\phi,\quad y_2=X\sin\phi+Y\cos\phi,\quad Z=Z. \tag{20}$$

Eliminând pe x_1, y_1, y_2 între relaţiile (18), (19), (20), se obţine

$$x=(X\cos\phi-Y\sin\phi)\cos\psi-[(X\sin\phi+Y\cos\phi)\cos\theta-Z\sin\theta]\sin\psi,$$
$$y=(X\cos\phi-Y\sin\phi)\sin\psi+[(X\sin\phi+Y\cos\phi)\cos\theta-Z\sin\theta]\cos\psi,$$
$$z=(X\sin\phi+Y\cos\phi)\sin\theta+Z\cos\theta,$$

sau

$$x=X(\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi\cos\theta)-Y(\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi\cos\theta)+Z\sin\theta\sin\psi,$$
$$y=X(\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\cos\psi\cos\theta)-Y(\sin\phi\sin\psi-\cos\phi\cos\psi\cos\theta)-Z\sin\theta\cos\psi,$$
$$z=X\sin\phi\sin\theta+Y\cos\phi\sin\theta+Z\cos\theta.$$

Acestea sunt *formulele lui Euler.*

199. **Formulele de transformare în cazul axelor oblice.** I. Fiind dat triedrul $Oxyz$, să însemnăm, în raport cu axele $Oxyz$, cu $O'(x_0, y_0, z_0)$ (Fig. 300) origina noului triedru $O'x'y'z'$ şi fie (m_1, n_1, p_1), (m_2, n_2, p_2), (m_3, n_3, p_3) parametrii directori ai axelor $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, în raport cu axele $Oxyz$; m_1, n_1, p_1, de ex., sunt proecţiile pe Ox, Oy, Oz, respectiv paralel cu planele yOz, zOx, xOy, ale vectorului $O'A$ aşezat pe $O'x'$ şi de lungime egal cu 1; etc. Fie $OPQM$, $O'P'Q'M$ contururile coordonatelor, $OP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, $O'P'=x'$, $P'Q'=y'$, $Q'M'=z'$, ale punctului M faţă de axele $Oxyz$, $O'x'y'z'$. Se vede că, dacă proecţia pe Ox, paralel cu planul yOz, a vectorului $O'A$ de lungime 1 este m_1, atunci proecţia pe aceeaş axă, tot paralel cu planul yOz, a vectorului $O'P'$ de lungime x', este m_1x'.

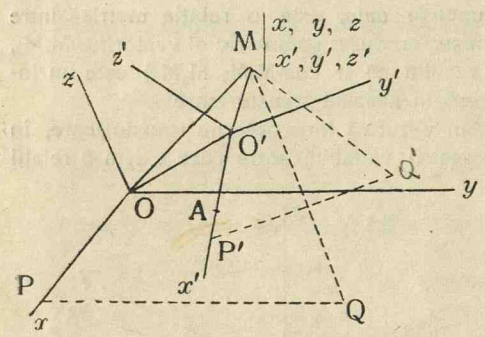


Fig 300.

Proectând pe axele Ox, Oy, Oz, rezultanta OM şi conturul $OO'P'Q'M$, respectiv paralel cu planele yOz, zOx, xOy, avem

$$x=x_0+m_1x'+m_2y'+m_3z',$$
$$y=y_0+n_1x'+n_2y'+n_3z',$$
$$z=z_0+p_1x'+p_2y'+p_3z',$$

care sunt formulele de transformare ale schimbării axelor în general.

II. Să presupunem că O' este în O (facem numai rotaţia axelor $x_0=y_0=z_0=0$) şi să însemnăm cu λ, μ, ν unghiurile yOz, zOx, xOy ale axelor $Oxyz$; fie (x, y, z), (x', y', z') coordonatele punctului M în raport cu axele $Oxyz$, $Ox'y'z'$ şi (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) cosinusurile (1) directoare ale axelor Ox', Oy', Oz', faţă de axele $Oxyz$[a_1, de ex, este $\cos(Ox, Ox')$]. Proectând ortogonal pe Ox, Oy, Oz contururile $OPQM$, $OP'Q'M$ ale punctului M în raport cu axele $Oxyz$, $Ox'y'z'$, obţinem

$$\begin{aligned} x+y\cos\nu+z\cos\mu&=a_1x'+a_2y'+a_3z',\\ x\cos\nu+y+z\cos\lambda&=b_1x'+b_2y'+b_3z',\\ x\cos\mu+y\cos\lambda+z&=c_1x'+c_2y'+c_3z', \end{aligned} \tag{21}$$

care sunt formulele de transformare ale schimbării direcţiunei axelor oblice.

(1) $(a_1, b_1, c_1), \ldots$ sunt coordonatele perpendiculare, în raport cu axele $Oxyz$, ale extremităţilor A, B, C ale vectorilor OA, OB, OC, egali cu unitatea luaţi pe Ox', Oy', Oz'.

Clasificarea suprafețelor și liniilor curbe.

200. O suprafață se zice *algebrică,* când ecuația ei poate fi pusă sub forma

$$f(x, y, z)=0,$$

unde $f(x, y, z)$ este un polinom; în caz contrar se zice transcendentă.

I. *Condiția necesară și suficientă ca două ecuații ireductibile algebrice și întregi, să reprezinte aceeaș suprafață este ca ele să fie de acelaș grad și coeficienții termenilor asemenea să fie proporționali.* Condiția este evident suficientă. Să arătăm că este necesară. Să presupunem că ecuațiile $f(x,y,z)=0$, $\varphi(x,y,z)=0$ reprezintă aceeaș suprafață, f și φ fiind două polinoame. Să tăem suprafețele prin aceeaș paralelă cu Oz, ale cărei toate punctele au aceeaș abscisă x_0 și aceeaș ordonată y_0. Această dreaptă tae suprafața în punctele ale căror cote sunt date de ecuațiile $f(x_0,y_0,z)=0$, $\varphi(x_0,y_0,z)=0$. Aceste ecuații, cu o singură necunoscută, având aceleași rădăcini, au coeficienții proporționali; deci

$$f(x_0,y_0,z)\equiv\lambda\varphi(x_0\,y_0,z),$$

λ fiind independent de z, ceea ce putem scrie, căci x_0 și y_0 sunt arbitrari,

$$f(x,y,z)\equiv\lambda\varphi(x,y,z).$$

Tăind de asemenea suprafețele cu o paralelă la Oy, apoi cu o paralelă la Ox, se va vedea că λ este independent de y și x. Prin urmare λ este o constantă și deci proprietatea estă învederată.

II. *O suprafață algebrică de gradul m este tăiată de o dreaptă în m puncte cel mult.* Să luăm dreapta ca axă Ox și fie $f(x,y,z)=0$ ecuația suprafeței. Abscisele punctelor de intersecție ale acestei suprafețe cu Ox sunt rădăcinile ecuații $f(x,0,0)=0$. Gradul acestei ecuații este cel mult egal cu gradul polinomului $f(x,y,z)$.

III. *O suprafață algebrică de gradul m este tăiată de un plan după o curbă algebrică de gradul m cel mult.* Să luăm ca plan xOy acest plan și fie $f(x,y,z)=0$ ecuația suprafeței. Secțiunea acestei suprafețe cu planul xOy are ca ecuație în raport cu axele Ox, Oy, $f(x,y,0)=0$. Această curbă algebrică e de un grad cel mult egal cu al polinomului $f(x,y,z)$.

IV. Se zice că o curbă strâmbă este algebrică, când putem face să treacă prin această curbă două suprafețe algebrice. Se pot prezenta două cazuri. 1°. Curba constitue toată intersecția celor două suprafețe; m și p însemnând gradele suprafețelor, un plan oarecare le tae după curbe plane de gradele m și p, care se tae în $m.p$ puncte. Deci, orice plan tae curba strâmbă în $m.p$ puncte;

se zice că gradul acestei curbe este $m.p.$ 2^0. Dacă această curbă strâmbă este numai o parte a intersecţii acelor două suprafeţe, un plan oarecare o tae în mai puţin de $m.p$ puncte. Dacă numărul punctelor de intersecţie r este constant, oricare ar fi planul, se zice că această curbă este de gradul r.

Planul şi dreapta.

201. **Ecuaţia planului.** Un plan în spaţiu este definit dacă se cunoaşte perpendiculara OP, dusă din origină la plan, în mărime şi direcţie. In adevăr, dacă se cunosc unghiurile α, β, γ ale axelor $Oxyz$ cu perpendiculara din origină la plan şi lungimea p a acestei perpendiculare, putem construi punctul P şi ducem în P (Fig. 301) planul perpendicular pe OP. Să găsim ecuaţia acestui plan. Fie $M(x,y,z)$ un punct al acestui plan şi ORQM conturul coordonatelor, adică

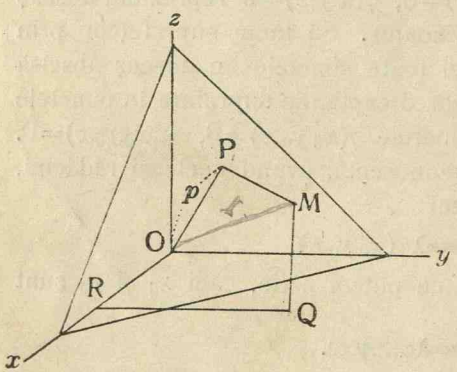


Fig. 301.

$OR=x$, $RQ=y$, $QM=z$. Să proectăm ortogonal conturul ORQMP pe OP. Avem

$$\text{prOR}+\text{prRQ}+\text{prQM}+\text{prMP}=\text{prOP},$$

$$\text{OR}\cos(\text{OR, OP})+\text{RQ}\cos(\text{RQ, OP})+\text{QM}\cos(\text{QM, OP})+\text{prMP}=\text{prOP},$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

căci $\text{prMP}=0$, ca fiind perpendiculară pe OP, iar $\text{prOP}=p$.

Deci

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{1}$$

este ecuaţia unui plan a cărui perpendiculară din origină la plan, adică normala la plan, este astfel că axele $Oxyz$ fac cu această normală unghiurile α, β, γ şi a cărui distanţă de la origină la plan este egală cu p.

Vedem, deci, că un plan este reprezentat printr'o ecuaţie de de gradul întâi în raport cu x, y, z. Invers, să arătăm că orice ecuaţie de gradul întâi,

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

reprezintă un plan. Pentru aceasta, va trebui să arătăm că această

ecuație se poate pune sub forma (1), adică se pot determina cantitățile α, β, γ și p în funcțiune de A, B, C, D.

Scriind că ecuațiile (1) și (2) reprezintă aceeaș suprafață, urmează

$$(3) \qquad \frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-p}{D}.$$

In cazul axelor perpendiculare, aplicând o proprietate cunoscută a rapoartelor egale, avem

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-p}{D}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

de unde

$$(4) \qquad \cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad -p=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

In cazul axelor oblice, însemnând cu k valoarea comună a rapoartelor (3), avem

$$\cos\alpha=kA,\ \cos\beta=kB,\ \cos\gamma=kC,\ -p=kD,$$

și observând relațiile (10) (No. 188), avem

$$(5) \qquad k=\frac{\omega}{\pm\sqrt{F(A,B,C)}},\ \cos\alpha=\frac{\omega A}{\pm\sqrt{F(A,B,C)}},\ \ldots -p=\frac{\omega D}{\pm\sqrt{F(A,B,C)}}.$$

Se ia semnul + sau −, astfel ca p să fie pozitiv.

Deci, punctele ale căror coordonate verifică ecuația (2), sunt în planul a cărui perpendiculară din origină pe el este astfel că axele $Oyxz$ fac cu această perpendiculară unghiurile α, β, γ, iar distanța dela origină la plan este egală cu p.

Așa dar, orice ecuație,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

reprezintă un plan. In cazul axelor perpendiculare, normala la plan (perpendiculara pe acest plan) are cosinusurile directoare egale cu

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

iar parametrii directori ai normalei la plan sunt proporționali cu A, B, C.

De ex., ecuația $2x+3y+z-\lambda=0$ reprezintă un plan perpendicular pe dreapta ai cărei parametri directori sunt 2, 3, 1. Ecuația $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$ reprezintă un plan ce determină pe axe lungimile a, b, c.

In particular, $x=a$, $y=b$, $z=c$, reprezintă respectiv plane pa-

ralele cu yOz, zOx, xOy. Ecuaţiile $x=0$, $y=0$, $z=0$ reprezintă respectiv planele yOz, zOx, xOy.

Normalele la planele $Ax+By+Cz+D=0, A'x+B'y+C'z+D'=0$ fac cu axele $Oxyz$ unghiuri ale căror cosinusuri date de relaţiile (4) sau (5) sunt proporţionale cu A, B, C şi A', B', C'. Planele sunt paralele, când aceste normale sunt paralele. In cazul axelor perpendiculare, parametrii directori ai acestor normale fiind proporţionali cu (A, B, C), (A', B', C'), sunt paralele când (No. 188, I)

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

In cazul axelor oblice, trebue $\cos\alpha=\cos\alpha',\ldots$ şi ţinând seamă de (4), avem

$$\frac{\omega A}{\pm\sqrt{F(A,B,C)}}=\frac{\omega A'}{\pm\sqrt{F(A',B',C')}},\ldots,$$

deci obţinem aceleaşi condiţii

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

In cazul axelor perpendiculare, două plane sunt perpendiculare, când

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

202. **Ecuaţiile dreptei.** I. O dreaptă e definită de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi direcţia sa, adică parametrii săi directori, a, b, c. Un punct $M(x, y, z)$ al acestei drepte are coordonate de forma (No. 191, II)

$$x=x_0+a\rho,\ y=y_0+b\rho,\ z=z_0+c\rho,$$

de unde se obţine

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\rho.$$

Aşa dar, coordonatele unui punct oarecare al acestei drepte verifică ecuaţiile

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{6}$$

care se zic ecuaţiile dreptei date.

Egalând primele două rapoarte cu ultimul, se obţine

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c},\quad \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

astfel că ecuaţiile dreptei se mai pot scrie.

$$x=\alpha z+\beta,\ y=\gamma z+\delta. \tag{7}$$

De aci se vede că ecuaţiile unei drepte depind de patru parametrii variabili, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ecuaţiile (6) sunt *ecuaţiile generale ale unei drepte ce trece prin punctul* (x_0,y_0,z_0), *paralelă cu direcţia* (a,b,c).

Relaţiile (7) probează că *orice dreaptă este reprezentată prin două ecuaţii lineare în raport cu* x,y,z, *sau că o dreaptă este intersecţia a două plane.*

II. Invers, ecuaţiile

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

reprezintă o linie dreaptă. Pentru aceasta, va trebui se dovedim că fiind date cantităţile A,B,C,D, A',B',C',D', adică ecuaţiile (8), se pot determina coordonatele (x_0,y_0,z_0), pe unde trece dreapta, şi parametrii directori (a,b,c) ai direcţii cu care dreapta este paralelă.

1°. Presupunând $AB'-BA'\neq 0$, din ecuaţiile (8) deducem

$$x=\frac{(BC'-CB')z+BD'-B'D}{AB'-BA'},\quad y=\frac{(A'C-AC')z+A'D-AD'}{A'B-BA'},$$

de unde

$$\frac{x-\dfrac{BD'-B'D}{AB'-AB'}}{BC'-CB'}=\frac{y-\dfrac{A'D-AD'}{AB'-BA'}}{A'C-AC'}=\frac{z-0}{AB'-BA'},$$

care sunt de forma

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

unde

$$x_0=\frac{BD'-B'D}{AB'-BA'},\quad y=\frac{A'D-AD'}{AB'-BA'},\quad z_0=0$$

un punct în planul xOy; iar, a,b,c proporţionali cu

$$BC'-CB',\quad A'C-AC',\quad AB'-BA'.$$

Cantităţile (x_0,y_0,z_0), (a,b,c) fiind aflate, rezultă că ecuaţiilor (8) le corespunde o dreaptă, sau că ecuaţiile (8) reprezintă o dreaptă.

2°. Dacă $AB'-BA'=0$, dar $BC'-CB'\neq 0$, rezolvăm ecuaţiile (8) în raport cu y şi z, şi avem

$$\frac{x}{BC'-CB'}=\frac{y-\dfrac{CD'-DC'}{BC'-CB'}}{CA'-AC'}=\frac{z-\dfrac{B'D-BD'}{BC'-CB'}}{AB'-BA'},$$

sau

$$\frac{x}{BC'-CB'}=\frac{y-\dfrac{CD'-DC'}{BC'-CB'}}{CA'-AC'}=\frac{z-\dfrac{B'D-BD'}{BC'-CB'}}{0},$$

relaţii, care probează că ecuaţiilor (8) le corespund, în acest caz, un punct $\left(0,\dfrac{CD'-DC'}{BC'-CB'},\dfrac{B'D-BD'}{BC'-CB'}\right)$ din planul yOz şi direcţia cu parametrii directori

$$BC'-CB',\ CA'-AC',\ 0,$$

care se vede că este paralelă cu xOy (căci proecția pe Oz, paralel cu xOy, a dreptei cu această direcție este 0). Deci, și în acest caz ecuațiile (8) reprezintă o linie dreaptă.

3°. Dacă $AB'-BA'=0$, $BC'-CB'=0$, adică

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

ecuațiile (8) sunt de forma

$$Ax+By+Cz+D=0,\ Ax+By+Cz+E=0,$$

adică reprezintă două plane paralele, care se tae după o dreaptă aruncată la infinit.

Deci, în general, ecuațiile

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0$$

reprezintă o linie dreaptă. In cazul ecuațiilor

$$x=\alpha z+\beta,\ y=\gamma z+\delta,$$

ecuațiile dreptei se pot scrie

$$\frac{x-\beta}{\alpha}=\frac{y-\delta}{\gamma}=\frac{z}{1}.$$

Exerciţiu. Să se afle cosinusul unghiului dreptelor (axe perpendiculare)

$$x=p,\ y=q;\ x=az+b,\ y=cz+d.$$

Ecuațiile dreptelor se pot scrie

$$\frac{x-p}{0}=\frac{y-q}{0}=\frac{z-0}{1};\ \frac{x-b}{a}=\frac{y-d}{c}=\frac{z}{1}.$$

Cosinusurile lor directoare sunt

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=1;\ \cos\alpha'=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+c^2+1}},\ \cos\beta'=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+c^2+1}},$$

$$\cos\gamma'=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+c^2+1}}.$$

Deci

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+c^2+1}}.$$

203. **Drepte paralele. Drepte perpendiculare.** Dreptele

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

sunt paralele, când au aceeaș direcție, adică parametrii directori proporționali

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Dreptele sunt perpendiculare, în cazul axelor perpendiculare, când

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

204. **Ecuațiile dreptei ce trece prin două puncte.** Ecuațiile dreptei ce trece prin punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ sunt

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}, \tag{9}$$

a,b,c fiind necunoscuți. Scriind că această dreaptă trece și prin $M_2(x_2,y_2,z_2)$, urmează

$$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=\frac{z_2-z_1}{c},$$

adică parametrii directori ai dreptei ce trece prin două puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, sunt proporționali cu x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. Ecuațiile (9) ale dreptei M_1M_2 devin

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

In particular, ecuațiile dreptei ce trece prin origină (0, 0, 0) și punctul (p, q, r) sunt

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}.$$

Condiția ca trei puncte M_1,M_2,M_3 *să fie colineare*, este ca punctul M_3 să fie pe dreapta M_1M_2, adică

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

205. **Distanța de la un punct la o dreaptă.** Pentru a calcula distanța de la punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la dreapta D (axe perpendiculare)

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},$$

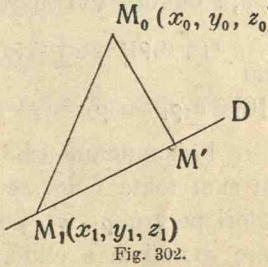


Fig. 302.

să însemnăm cu $M'(x',y',z')$ piciorul perpendicularei din M_0 la D (Fig. 302) distanța cerută este M_0M'. Punctul M' fiind pe dreapta D, are coordonate de forma

$$x'=x_1+a\rho,\ y'=y_1+b\rho,\ z'=z_1+c\rho,$$

ρ fiind variabil. Pentru a determina valoarea lui ρ, ce corespunde piciorului perpendicularei, să observăm că parametrii directori ai dreptei M_0M' sunt

$$x'-x_0=x_1+a\rho-x_0,\ y'-y_0=y_1+b\rho-y_0,\ z'-z_0=z_1+c\rho-z_0.$$

Scriind că M_0M' este perpendiculară pe D, urmează

$$(x'-x_0)a+(y'-y_0)b+(z'-z_0)c=0,$$

sau $$(x_1+a\rho-x_0)a+(y_1+b\rho-y_0)b+(z_1+c\rho-z_0)c=0,$$

de unde $$\rho=\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)}{a^2+b^2+c^2}$$

Pătratul distanței de la punctul M_0 la dreapta D este deci

$$d^2=(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(z_0-z')^2,$$

$$d^2=(x_0-x_1-a\rho)^2+(y_0-y_1-b\rho)^2+(z_0-z_1-c\rho)^2,$$

$$d^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-2\rho[a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)]+\rho^2(a^2+b^2+c^2).$$

Inlocuind pe ρ cu valoarea sa, obținem

$$d^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-\frac{[a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)]^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$d^2=\frac{[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2](a^2+b^2+c^2)-[a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)]^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ținând seamă de identitatea lui Lagrange, expresiunea pătratului distanței se mai poate scrie

$$d^2=\frac{[(y_0-y_1)c-(z_0-z_1)b]^2+[(z_0-z_1)a-(x_0-x_1)c]^2+[(x_0-x_1)b-(y_0-y_1)a]^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

106. **Condiția ca două drepte să fie în același plan** se obține scriind că acele drepte, sau au un punct comun la distanță finită, sau sunt paralele. Ecuațiile celor două drepte fiind

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2},$$

coordonatele punctului lor comun verifică deodată aceste ecuații. Insemnând cu ρ_1 și ρ_2 valorile rapoartelor și egalând valorile lui x, y, z deduse din aceste ecuații, urmează

$$x_1+a_1\rho_1=x_2+a_2\rho_2,\ y_1+b_1\rho_1=y_2+b_2\rho_2,\ z_1+c_1\rho_1=z_2+c_2\rho_2,$$

sau

$$(10)\quad a_1\rho_1-a_2\rho_2=x_2-x_1,\ b_1\rho_1-b_2\rho_2=y_2-y_1,\ c_1\rho_1-c_2\rho_2=z_2-z_1.$$

Presupunând că expresiile $b_1c_2-c_1b_2$, $c_1a_2-a_1c_2$, $a_1b_2-b_1a_2$ nu sunt toate nule, se va putea obține din două din ecuațiile (10) valori pentru ρ_1, ρ_2, pe care introducându-le în a treia [operație care se mai zice eliminarea lui ρ_1, ρ_2 între ecuațiile (10)], obținem condiția

$$(11)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_1-x_2 \\ b_1 & b_2 & y_1-y_2 \\ c_1 & c_2 & z_1-z_2 \end{vmatrix}=0,$$

care exprimă că dreptele sunt concurente.

Dacă $b_1c_2-c_1b_2=0$, $c_1a_2-a_1c_2=0$, $a_1b_2-b_1a_2=0$, adică dacă parametrii directori sunt proporționali,

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

dreptele sunt paralele, și condiția (11) este verificată. Deci, în toate cazurile, relația (11) este condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele date să fie în același plan.

Exerciții. **1)** Dreptele $2x-z-8=0$, $x+2z-4=0$; $3y-z=9$, $y+3z=3$ se tae în punctul (4, 3, 0).

2). Să se afle condiția ca dreptele $z=r$, $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$; $x=az+p$, $y=bz+q$ **să fie concurente.**

R. $\frac{ar+p}{p}+\frac{br+q}{q}=1$.

207. **Ecuația planelor ce trece printr'un punct dat** $M_0(x_0,y_0,z_0)$, se obține scriind că ecuația generală a planelor

$$Ax+By+Cz+D=0$$

este verificată de coordonatele punctului M_0, adică

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Scăzând aceste ecuații, se obține

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

care este ecuația generală a planelor ce trec prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Aplicații. **1) Ecuația planului ce trece prin origină și perpendicular pe dreapta**

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},$$

este

$$ax+by+cz=0.$$

2) Ecuația planului ce trece prin $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **și paralel cu planul** $Ax+By+Cz+D=0$ **este**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

3) Să se ducă prin origină și punctul (x_1,y_1,z_1), **un plan perpendicular pe planul** $ax+by+cz+d=0$.

R. $Ax+By+Cz=0$, $Ax_1+By_1+Cz_1=0$, $Aa+Bb+Cc=0$,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0.$$

208. **Ecuația planului ce trece prin trei puncte,** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, se obține scriind că ecuația generală a planelor,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

este verificată de coordonatele acestor puncte. Deci

$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$, $Ax_3+By_2+Cz_3+D=0$

Scriind că aceste patru ecuații lineare nu pot avea pentru necunoscutele A,B,C,D, valori toate nule, urmează că

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este ecuația planului căutat.

209. **Condiția ca punctele** $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3,4$, **să fie în același plan** se obține scriind că punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ se află în planul $M_2M_3M_4$, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicație. Fie P,Q,R,S *intersecțiile unui patrulater strâmb* ABCD *cu un plan. Să se demonstreze relația*

$$\frac{PA}{PB}\frac{QB}{QC}\frac{RC}{RD}\frac{SD}{SA}=1.$$

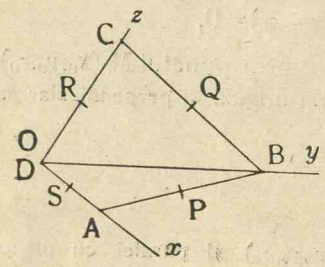


Fig. 303.

Să luăm ca axe de coordonate oblice (fiindcă nu este vorba de perpendicularitate și distanțe) pe DA ca Ox, DB ca Oy, DC ca Oz (Fig. 303). Să notăm cu $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ coordonatele punctelor A,B,C. Însemnând cu

$$\lambda_1=\frac{AP}{PB},\ \lambda_2=\frac{BQ}{QC},\ \lambda_3=\frac{CR}{RD},\ \lambda_4=\frac{DS}{SA},$$

coordonatele punctelor P,Q,R,S sunt

$$P\left(\frac{a}{1+\lambda_1}, \frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1}\right),\ Q\left(0, \frac{b}{1+\lambda_2}, \frac{b\lambda_2}{1+\lambda_2}\right),\ R\left(0,0, \frac{c}{1+\lambda_3}\right),\ S\left(\frac{\lambda_4 a}{1+\lambda_4}, 0,0\right).$$

Scriind că punctele P,Q,R,S sunt în același plan, avem

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{1+\lambda_1} & \frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{1+\lambda_2} & \frac{b\lambda_2}{1+\lambda_2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c}{1+\lambda_3} & 1 \\ \frac{\lambda_4 a}{1+\lambda_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând acest determinant, se obține

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=1,$$

sau $(-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3)(-\lambda_4)=1$, $\frac{PA}{PB}\frac{QB}{QC}\frac{RC}{RD}\frac{SD}{SA}=1$.

210. **Intersecția a două plane.** Fiind date planele

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

dacă cantitățile

$$AB'-BA',\ BC'-CB',\ CA'-AC',$$

nu sunt toate nule, atunci putem rezolva ecuațiile date în raport cu două din necunoscute și vom avea, de ex., când $AB'-BA'\neq 0$.

$$\frac{x-\frac{BD'-B'D}{AB'-BA'}}{BC'-CB'}=\frac{y-\frac{A'D-AD'}{AB'-BA'}}{A'C-AC'}=\frac{z-0}{AB'-BA'}.$$

De aci se vede că intersecția acestor plane este o dreaptă, a cărei parametri directori sunt

$$BC'-CB',\ CA'-AC',\ AB'-BA'.$$

Când $AB'-BA'=0$, $BC'-CB'=0$, sau

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

planele sunt paralele, intersecția lor este o dreaptă aruncată la infinit.

In fine când

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'},$$

planele sunt confundate și orice dreaptă a unui plan aparține și celuilalt. In toate celelalte cazuri, două plane se tae după o dreaptă

211. **Plane trecând prin intersecția a două plane. Fascicol de plane.** Fiind date planele

$$(P)\equiv Ax+By+Cz+D=0,\ (P')\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

ecuația

(12) $$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

reprezintă, oricare ar fi α și β, un plan ce trece prin intersecția planelor (P) și (P'), căci un punct al intersecții acestor plane are coordonate ce verifică ecuațiile planelor (P) și (P') și deci și o transformare a lor, adică ecuația (12).

Reciproc, se pot găsi valori pentru α și β, astfel ca ecuația (12) să reprezinte un plan dat oarecare ce trece prin intersecția planelor (P) și (P'). Un asemenea plan e definit prin intersecția planelor (P) și (P') și încă un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Scriind că planul (12) trece prin acest punct, avem

$$\alpha(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+\beta(A'x_0+B'y_0+C'z_0+D')=0.$$

Va fi destul a lua

$$\alpha=A'x_0+B'y_0+C'z_0+D',\ \beta=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D),$$

pentru ca ecuaţia (12) să reprezinte planul definit de $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi de intersecţia planelor (P) şi (P').

Dacă planele (P) (P') sunt paralele, ecuaţia (12) reprezintă toate planele paralele cu direcţia lor comună. In fine, dacă planele (P) şi (P') sunt confundate, planul (12) se confundă el însuşi cu aceste plane.

Afară de acest ultim caz, se zice că ecuaţia (12) reprezintă un *fascicol linear de plane*. Această ecuaţie nu conţine de cât un singur parametru $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ şi se poate scrie

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0.$$

In general, când ecuaţia unui plan are coeficienţii săi funcţiuni liniare de un parametru variabil λ,

$$(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')z+D+\lambda D'=0,$$

înseamnă că planul reprezentat de această ecuaţie trece printr'o dreaptă fixă, intersecţia planelor

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

sau rămâne paralel la un plan fix.

212. **Ecuaţia planului paralel cu două drepte.** Pentru ca planul

(13) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

să fie paralel cu dreptele de parametrii directori (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), trebue ca normala la plan să fie perpendiculară pe ambele drepte adică

(14) $$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,\ Aa_2+Bb_2+Cc_2=0.$$

Dacă dreptele nu sunt paralele, adică dacă parametrii directori nu sunt proporţionali, din ecuaţiile (14) se pot deduce valori proporţionale pentru A, B, C,

$$\frac{A}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{B}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{C}{a_1b_2-b_1a_2},$$

astfel că parametrii directori ai normalei la planul cerut sunt $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2-c_2a_1$, $a_1b_2-a_2b_1$. Ecuaţia planului căutat este

$$(b_1c_2-c_1b_2)(x-x_0)+(c_1a_2-a_1c_2)(y-y_0)+(a_1b_2-b_1a_2)(z-z_0)=0,$$

sau, sub formă de determinant, eliminând pe A, B, C între ecuaţiile, (13) şi (14),

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

213. **Intersecţia a trei plane.** Fiind date planele

(15) $$(P)\equiv Ax+By+Cz+D=0,\ (P')\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$(P'')\ A''x+B''y+C''z+D''=0,$$

pentru o vedea dacă au unul sau mai multe puncte de intersecţie, trebue să discutăm sistemul (15) în raport cu x, y, z.

1°. Dacă determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

sistemul (15) are o soluţie unică, cele trei plane au un singur punct de intersecţie.

2°. Dacă $\Delta=0$, să presupunem că este cel puţin un minor de primul ordin diferit de zero, de ex.,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pe aceasta îl putem lua ca determinant principal al sistemului. Rezolvând primele două ecuaţii în raport cu x şi y, şi înlocuind în a treia, trebue să avem determinantul caracteristic,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $\Delta_1=0$, sistemul este compatibil, ecuaţia a treia este o consecinţă a primelor două. Planele trec prin aceeaş dreaptă D de intersecţie a planelor (P) şi (P'). Dacă $\Delta_1 \neq 0$, sistemul nu e compatibil, nici un punct al dreptei D nu este în planul (P''), dreapta D este paralelă cu planul (P''), cele trei plane sunt paralele cu aceeaş dreaptă.

3°. Toţi minorii lui Δ sunt nuli. Să presupunem $A \neq 0$. Scoţând pe x din prima ecuaţie şi înlocuind în celelalte, obţinem determinanţii caracteristici,

$$\delta' = \begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix}, \qquad \delta'' = \begin{vmatrix} A & D \\ A'' & D'' \end{vmatrix}.$$

Dacă $\delta'=0$, $\delta''=0$, sistemul e compatibil, ecuațiile se reduc la una singură, planele sunt confundate.

Dacă n'avem în acelaș timp $\delta'=0$, $\delta''=0$, orice sistem de soluții ale primei ecuații nu verifică cel puțin una din celelalte; planele date sunt paralele între ele.

Deci, trei plane pot avea următoarele poziții; pot avea un punct comun (fac un triedru); pot fi paralele cu o dreaptă (fac o prizmă); trec prin aceeaș dreaptă; sunt paralele; confundate.

Condiția necesară și suficientă ca trei plane $P=0, P'=0, P''=0$ *să treacă prin aceeaș dreaptă este ca să existe trei coeficienți* $\lambda, \lambda', \lambda''$, *astfel în cât să avem identic*

$$\lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''\equiv 0.$$

Condiția este necesară, căci, dacă planul P'' trece prin intersecția planelor P și P', ecuația planului P'' se poate pune sub forma $\alpha P+\beta P'=0$, și atunci rezultă identitatea

$$\alpha P+\beta P'\equiv\gamma P'',\ \lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''\equiv 0.$$

Condiția este suficientă, căci dacă avem identitatea $\lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''\equiv 0$, atunci, presupunând $\lambda''\neq 0$, avem

$$P''\equiv -\frac{\lambda}{\lambda''}P-\frac{\lambda'}{\lambda''}P'\equiv\alpha P+\beta P',$$

α, β fiind constante. Deci, al treilea plan având ca ecuație $\alpha P+\beta P'=0$, trece prin intersecția planelor P și P'.

214. **Ecuația planelor ce trec prin intersecția a trei plane. Rețea liniară de plane.** Fiind date planele $P=0$, $P'=0$, $P''=0$, ecuația

$$\lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''=0,$$

unde $\lambda, \lambda', \lambda''$ sunt constante arbitrare, reprezintă un plan ce trece prin intersecția planelor P, P', P'', căci această ecuație este verificată de coordonatele punctelor comune planelor P, P', P''.

Invers, orice plan Π, ce trece prin intersecția planelor P, P', P'', poate fi reprezentat printr'o ecuație de forma $\lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''=0$. In adevăr, dacă planele se tae într'un punct S, un plan ce trece prin intersecția planelor P, P', P'' este cunoscut, dacă mai trece încă prin două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2 y_2 z_2)$, nu în linie dreaptă cu S, adică

$$\lambda P_1+\lambda' P_1'+\lambda'' P_1''=0,\ \lambda P_2+\lambda' P_2'+\lambda'' P_2''=0,$$

unde $P_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D, \ldots P_2''=A''x_2+B''y_2+C''z_2+D''$.

Din aceste ecuații se pot deduce valori proporționale pentru $\lambda, \lambda', \lambda''$,

$$\frac{\lambda}{P_1'P_2''-P_2'P_1''}=\frac{\lambda'}{P_1''P_2-P_2''P_1}=\frac{\lambda''}{P_1'P_2-P_1'P_2},$$

afară de cazul când vreunul sau toți numitorii sunt nuli, adică

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{P_1'}{P_2'}=\frac{P_1''}{P_2''}.$$

Dacă am avea, de ex., numai

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{P_1'}{P_2'},\quad P_1=\frac{P_1'}{P_2'}P_2,$$

aceasta ar însemna că punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ se găsesc pe dreapta comună a planelor $P=0$, $P'=0$, ceea ce nu are loc, căci am spus că punctele M_1, M_2 nu sunt în linie dreaptă cu S.

Dacă am avea în fine de odată

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{P_1'}{P_2'},\quad \frac{P_1}{P_2}=\frac{P_1''}{P_2''},$$

atunci înseamnă că punctele M_1 și M_2 se găsesc pe dreapta comună planelor P și P', de o parte, P și P'' de alta, sau, că planele P, P', P'' au o dreaptă comună.

Așa dar, dacă planele P, P', P'' n'au o dreaptă comună, orice plan ce trece prin intersecția lor se poate reprezenta cu o ecuație de forma

$$\lambda P+\lambda' P'+\lambda'' P''=0,$$

care, se zice, că reprezintă o *rețea liniară de plane*. Dacă planele P, P', P'' au o dreaptă comună, rețeaua de plane se reduce la un fascicol de plane

Aplicații. 1) Să se cerceteze așezarea planelor

$$2x+y-z=5,\quad -x+3y+2z=1,\quad 3x+5y=11.$$

R. Trec prin aceeaș dreaptă, căci

$$2(2x+y-z-5)+(-x+3y+2z-1)-(3x+5y-11)=0.$$

2) Se consideră pe Ox, Oy, Oz respectiv punctele A, B, C, astfel că

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=\frac{1}{a}=\text{const.}$$

Să se arate că planul ABC trece printr'un punct fix.

R. $OA=\lambda$, $OB=\mu$, $OC=\nu$, $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{a}$, $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}-1=0$;

$\frac{1}{\lambda}(x-z)+\frac{1}{\mu}(y-z)+\frac{z}{a}-1=0$, $a\mu(x-z)+a\lambda(y-z)+\lambda\mu(z-a)=0$; trec prin intersecția planelor $x-z=0$, $y-z=0$, $z-a=0$, punctul $x=y=z=a$.

215. **Condiția ca patru plane să fie concurente.** Insemnând cu (x,y,z) coordonatele punctului comun planelor

$$A_i x+B_i y+C_i z+D_i=0,\ i=1,2,3,4,$$

condiția ca aceste plane să fie concurente, se obține scriind că aceste patru ecuații sunt verificate de aceleași valori ale lui x,y,z; deci

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

Condiția ca planele $P_i=0$, $i=1,2,3,4$, să fie concurente, se poate exprima și altfel. In adevăr, dacă planele P_1,P_2,P_3,P_4 sunt concurente, urmează că ecuația planului P_4 este de forma

$$\lambda P_1+\mu P_2+\nu P_3=0,$$

adică $$\lambda P_1+\mu P_2+\nu P_3\equiv kP_4,$$

sau $$\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\lambda_3 P_3+\lambda_4 P_4\equiv 0.$$

Deci, dacă patru plane P_1, P_2, P_3, P_4 sunt concurente, urmează că există patru numere $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, astfel ca identitatea precedentă să fi verificată.

Această condiție este și suficientă. In adevăr, coordonatele punctului comun planelor P_1, P_2, P_3 verifică ecuațiile acestor plane și de oarece avem identitatea $\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\lambda_3 P_3+\lambda_4 P_4\equiv 0$, urmează că și $P_4=0$, adică și planul P_4 trece prin punctul de intersecție al planelor P_1, P_2, P_3 sau că planele P_1, P_2, P_3, P_4 sunt concurente.

Aplicații. 1) *Să se arate că planele duse prin mijlocul fiecărei muchii ale unui tetraedru și perpendiculare pe aceste muchii, sunt concurente.* Insemnând cu $A_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$, ecuațiile planelor duse perpendicular pe mijlocul lui A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, sunt

$$P_1\equiv(2x-x_1-x_2)(x_1-x_2)+(2y-y_1-y_2)(y_1-y_2)+(2z-z_1-z_2)(z_1-z_2)=0,$$

. . . . . .

$$P_4\equiv(2x-x_4-x_1)(x_4-x_1)+(2y-y_4-y_1)(y_4-y_1)+(2z-z_4-z_1)(z_4-z_1)=0.$$

Se vede că $P_1+P_2+P_3+P_4\equiv 0$,

2). *Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctele* (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) *și prin punctul de intersecție al planelor* $L=0$, $M=0$, $N=0$. Insemnând cu L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2 ceeace devin primii membri ai ecuațiilor planelor când se înlocuesc (x, y, z) cu (x_1, y_1, x_1), (x_2, y_2, z_2), avem

$$\lambda L+\mu M+\nu N=0,$$
$$\lambda L_1+\mu M_1+\nu N_1=0,$$
$$\lambda L_2+\mu M_2+\nu N_2=0,$$

deci ecuația planului se obține eliminând λ, μ, ν, adică

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}=0.$$

216. **Perpendiculara comună la două drepte** (Axe perpendiculare). Fie D_1 și D_2

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

Dacă, prin punctul (x_1,y_1,z_1) al dreptei D_1 se duce o dreaptă paralelă cu D_2, se obține planul P, a cărui normală are parametrii directori

$$b_1c_2-b_2c_1,\ c_1a_2-c_2a_1,\ a_1b_2-a_2b_1.$$

Se știe că perpendiculara comună a dreptelor D_1 și D_2 se obține la intersecția planelor duse prin D_1 și D_2, respectiv perpendiculare pe planul P. Să scriem ecuațiile acestor plane. Un plan

ce trece prin D_1, conţine întâi punctul (x_1, y_1, z_1), are deci o ecuaţie de forma

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{16}$$

Pentru a exprima că conţine pe D_1, cum deja am scris că conţine un punct al lui D_1, e destul a scrie că normala la plan este perpendiculară pe D_1, adică

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0. \tag{17}$$

Să scriem că planul este perpendicular pe P; deci

$$A(b_1c_2-b_2c_1)+B(c_1a_2-c_2a_1)+C(a_1b_2-a_2b_1)=0. \tag{18}$$

Eliminând pe A, B, C între ecuaţiile (16), (17), (18), ecuaţia planului dus prin D_1, perpendicular pe P, este

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

In mod analog, ecuaţia planului dus prin D_2, perpendicular pe P, este

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}=0. \tag{20}$$

Ecuaţiile (19) şi (20) sunt ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor D_1 şi D_2.

Exemplu. Să se afle ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c};\ x=0,\ y=mz+p.$$

Parametrii directori ai acestor drepte sunt (a, b, c), $(0, m, 1)$. Observând că (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) sunt respectiv $(0, 0, 0)$ şi $(0, p, 0)$, ecuaţiile (19) şi (20) ale perpendicularei comune sunt

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ b-mc & -a & am \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x & y-p & z \\ 0 & m & 1 \\ b-mc & -a & am \end{vmatrix}=0.$$

217. **Raportul anarmonic al unui fascicol de patru plane.** Fiind date patru plane, care trec prin aceeaş dreaptă, se zice raportul anarmonic al acestor patru plane raportul anarmonic format de punctele de intersecţie al acestor plane cu o dreaptă oarecare. Ecuaţiile planelor fiind

$$P+\lambda_iP'=0,\ i=1, 2, 3, 4,$$

iar dreapta fiind definită de punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$, coor-

donatele punctelor N_i de intersecţie ale acestor plane cu această dreaptă sunt

$$(N_i)\ \frac{x_1+\mu_i x_2}{1+\mu_i},\ \frac{y_1+\mu_i y_2}{1+\mu_i},\ \frac{z_1+\mu_i z_2}{1+\mu_i},\ \mu_i=-\frac{P_1+\lambda_i P_1'}{P_2+\lambda_i P_2'},\ i=1,2,3,4,$$

$$P_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D,\ P_1'=A'x_1+B'y_1+C'z_1+D,\ \ldots$$

Raportul anarmonic al acestor patru puncte este dat de

$$\frac{N_1N_3}{N_1N_4}:\frac{N_2N_3}{N_2N_4}$$

şi înlocuind expresiunile acestor vectori în funcţiune de coordonatele extremităţilor, avem pentru acest raport

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_4-\mu_1}:\frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_4-\mu_2}=\text{const}$$

Deci, raportul anarmonic al fascicolului format de patru plane este constant.

Când planele formează un fascicol armonic, avem

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_4-\mu_1}:\frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_4-\mu_2}=-1.$$

In particular fiind date planele $P=0$, $P'=0$, planele $P+\lambda P'=0$, $P-\lambda P'=0$, sunt conjugate armonic în raport cu primele plane.

218. **Distanţa de la un punct la un plan** I. Fiind dat un plan

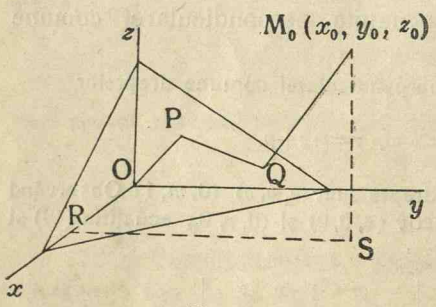


Fig. 304.

$$(21)\quad Ax+By+Cz+D=0,$$

am văzut (No 201) că ecuaţia acestui plan se poate pune sub forma

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

p fiind lungimea perpendicularei OP din origină la plan şi α,β,γ unghiurile acestei drepte cu axele Ox, Oy, Oz, date în cazul axelor perpendiculare, de relaţiile (4) (No. 201).

$$(22)\quad \cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$-p=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

iar în cazul axelor oblice de relaţiile (5) (No. 201).

Să ne propunem a afla distanţa de la punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la planul (21). Insemnând cu Q piciorul perpendicularei din M_0 la

plan (Fig. 304), distanța de la M_0 la plan este măsurată cu lungimea $QM_0=d$. Fie $ORSM_0$ conturul coordonatelor lui M_0. Avem

$$\text{prOP}+\text{prPQ}+\text{prQM}_0=\text{prOR}+\text{prRS}+\text{prSM}_0.$$

Proectând ortogonal pe axa OP, obținem

$$p+d=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma,$$

de unde

$$d=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p.$$

In cazul axelor perpendiculare, înlocuind pe $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $-p$ cu valorile lor (22), distanța este dată de relația

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

și se va lua semnul + sau −, după cum expresiunea $Ax_0+By_0+Cz_0+D$ este pozitivă sau negativă.

II. *Semnul expresiunei* $Ax+By+Cz+D$. Fiind date punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ și planul (P),

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

să considerăm punctul M de intersecție al planului (P) cu dreapta M_1M_2 (Fig. 305). Coordonatele unui punct al dreptei M_1M_2 fiind de forma

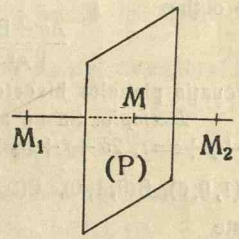


Fig. 305.

$$(23)\qquad \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\ \lambda=\frac{M_1M}{MM_2},$$

Dacă acest punct este în planul (P), rezultă

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}+D=0,$$

de unde

$$(24)\qquad \lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D},$$

expresiune care dă raportul în care planul (P) împarte segmentul M_1M_2.

Dacă dreapta M_1M_2 este paralelă cu planul (P), atunci punctul M de intersecție al acestei drepte cu planul este aruncat la infinit, una din coordonatele sale (23) este infinită, ceea ce are loc când $\lambda=-1$. Dar, când punctul M este la infinit pe M_1M_2, atunci $M_1M:MM_2=-1$. Deci, expresiunea (24) dă, în toate cazurile, raportul în care planul (P) împarte segmentul M_1M_2.

Dacă punctele M_1 și M_2 sunt de aceeași parte a planului (P), raportul $M_1M:MM_2=\lambda$ este negativ, și deci, din (24), rezultă că

$$\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}>0,$$

adică expresiunile $Ax_1+By_1+Cz_1+D$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ au acelaș semn. Dacă M_1 și M_2 sunt de o parte și de alta a planului (P), $\lambda=M_1M:MM_2$ este pozitiv și deci, din (24)

$$\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}<0,$$

adică $Ax_1+By_1+Cz_1+D$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ au semne contrarii.

Prin urmare, planul $Ax+By+Cz+D=0$, împarte spațiul în două regiuni, într'una expresiunea $Ax+By+Cz+D$ are un semn, în cealaltă regiune, semn contrar (pe plan expresiunea este zero). Semnul acestei expresii în regiunea unde este origina axelor, se stabilește înlocuind coordonatele originii în ecuația planului.

III. *Aplicații.* 1°. Să se afle distanța de la origină la planul $2x-3y-z=6$ (axe perpendiculare).

R. $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

2°. *Plane bisectoare.* Fiind date planele (axe perpendiculare)

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

exprimând că distanțele de la punctul (x, y, z) la aceste plane sunt egale, se obține

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

ecuația planelor bisectoare ale unghiului format de cele două plane date.

Exemplu. Să se afle bisectorul interior al unghiului format de planele $x+y+z=1$, $2x+y+z=1$. Construind aceste plane, ele tae axele în punctele A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1); $D\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, B, C. Ecuația planelor bisectoare este

$$\frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2x+y+z-1}{\sqrt{6}},$$

sau

$$\sqrt{2}(x+y+z-1)\pm(2x+y+z-1)=0.$$

Pentru a determina semnul care corespunde bisectorului interior, să observăm că acest plan tae axa Ox între A și D, deci, rezultatele substituirii în primul membru al ecuații primului bisector a coordonatelor punctelor A și D, trebue să fie de semne contrare. Substituind coordonatele punctelor A(1,0,0), $D\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, rezultatele sunt respectiv ±1, $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)<0$. Deci, trebue a lua semnul + înaintea radicalului, pentru ca rezultatele să fie de semne contrarii, iar ecuația bisectorului interior este

$$\sqrt{2}(x+y+z-1)+2x+y+z-1=0.$$

3°. Să se afle distanțele de la origină la planele proectante ale dreptei (axe perpendiculare)

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}.$$

R. Ecuațiile planelor sunt $\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}$, $\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$, $\frac{z-c}{r}=\frac{x-a}{p}$. Distanțele sunt respectiv $\frac{pc-ar}{\sqrt{p^2+q^2}}$, ...

4º. Să se afle locul punctelor egal depărtate de două puncte date (axe perpendiculare).

R. (a, b, c), $(-a, -b, -c)$. Ecuația locului este planul $ax+by+cz=0$.

5º. Fiind date punctele $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$, să se afle coordonatele unui punct al planului definit de aceste trei puncte.

R. Se scriu coordonatele unui punct P ce împarte A_2A_3 în raportul λ, apoi coordonatele lui M ce împarte pe A_1P în raportul μ și sunt de forma

$$\frac{x_1(1+\lambda)+\mu x_2+x_3\mu\lambda}{(1+\lambda)+\mu+(\mu\lambda)}, \ldots; \frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \ldots,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fiind trei parametrii variabili.

6). Să se afle cea mai scurtă distanță (axe perpendiculare) a dreptelor $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$; $x=0$, $y=mz+p$.

R. Este distanța de la origină la planul dus prin dreapta de parametrii directori $(0, m, 1)$ și paralel cu dreapta de parametrii directori (a, b, c). Ecuația acestui plan fiind $(b-mc)x-ay+amz+ap=0$, cea mai scurtă distanță este

$$\frac{ap}{\sqrt{(b-mc)^2+a^2(1+m^2)}}.$$

7). Fiind dat un plan $Ax+By+Cz+D=0$, și un punct $M(x_0, y_0, z_0)$, să se afle coordonatele punctului $M'(x', y', z')$ simetricul lui M în raport cu planul P (axe perpendiculare).

R. Se va scrie că MM' este perpendiculară pe plan și că mijlocul lui MM' este în planul P.

$$\frac{x'-x_0}{A}=\frac{y'-y_0}{B}=\frac{z'-z_0}{C}=\rho. \quad A\frac{x'+x_0}{2}+B\frac{y'+y_0}{2}+C\frac{z'+z_0}{2}+D=0;$$

$x'=x_0+A\rho$, $y'=y_0+B\rho$, $z'=z_0+C\rho$ și introducându-le în a doua ecuație,

$$\rho=-\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \quad x'=x_0-A\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \ldots$$

8). Să se afle coordonatele simetricului $M'(x', y', z')$ ale punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu dreapta (axe perpendiculare)

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}.$$

R. M_0M' perpendiculară pe dreaptă și mijlocul ei pe dreapta dată

$$a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c(z'-z_0)=0, \quad \frac{\frac{x'+x_0}{2}-p}{a}=\frac{\frac{y'+y_0}{2}-q}{b}=\frac{\frac{z'+z_0}{2}-r}{c}=\rho,$$

$$\rho=\frac{a(x_0-p)+b(y_0-q)+c(z_0-r)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad x'=-x_0+2p+2a\rho, \ldots$$

9). Se consideră sistemul (S) de plane, reprezentate de ecuația $\mu^3+3\mu^2x+3\mu y+z=0$, unde μ este un parametru variabil. Fie (M) planul acestui sistem, pentru care parametrul μ are valoarea particulară m; prin fiecare punct A al planului (M) trec alte două plane (M') și (M'') ale sistemului (S), altele de cât planul (M); fie μ' și μ'' valorile parametrului μ relative la aceste două plane. Să se afle, în planul (M), locul punctelor A, astfel ca planele (M') și (M'') să fie perpendiculare (axe perpendiculare).

R. Ecuația planului (M) este (1) $m^3+3m^2x+3my+z=0$. Divizând pe $(\mu^3+3\mu^2x+3\mu y+z)$ cu $(\mu-m)$, ecuația ce dă valorile lui μ' și μ'', este

$$\mu^2+\mu(3x-m)+3y+3mx+m^2=0,\quad \mu'+\mu''=-(3x+m),\quad \mu'\mu''=3y+3mx+m^2.$$

Planele (M') și (M'') sunt perpendiculare, când $1+3\mu'.3\mu''+3\mu'^2.3\mu''^2=0$. Locul lui A$(x, y, z)$ este reprezentat de ecuațiile (1) și $1+9(3y+3mx+m^2)+9(3y+3mx+m^2)=0$. Sau, ținând seamă de (1), avem $3y+3mx+m^2=-\frac{z}{m}$, și locul lui A sunt dreptele $m^3+3m^2x+3my+z=0$, $9z^2-9mz+m^2=0$.

219. **Volumul unui tetraedru.** *Orientarea unui triedru.* Să considerăm triedrul $OM_1M_2M_3$ obținut unind origina O cu punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, în ordinea indicată (Fig. 306). Acest triedru este de același sens cu un alt triedru $OM_1'M_2M_3$, după cum punctele M_1 și $M_1'(x_1',y_1',z_1')$ sunt de aceeași parte a feței OM_2M_3, sau de o parte și de alta.

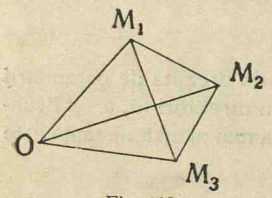


Fig. 306.

Ecuația planului OM_2M_3, fiind

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$x(y_2z_3-z_2y_3)+y(z_2x_3-z_3x_2)+z(x_2y_3-x_3y_2)=0,$$

punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_1'(x_1',y_1',z_1')$ sunt de aceeași parte a feței OM_2M_3, sau de o parte și de alta, după cum rezultatele substituirei a lui (x,y,z) cu (x_1,y_1,z_1), (x_1',y_1',z_1'), adică

$$\omega_{M_1M_2M_3}=x_1(y_2z_3-z_2y_3)+y_1(z_2x_3-z_3x_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$\omega_{M_1'M_2M_3}=x_1'(y_2z_3-z_2y_3)+y_1'(z_2x_3-z_3x_2)+z_1'(x_2y_3-x_3y_2)=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

au același semn, sau semne contrarii. Deci, triedrele $OM_1M_2M_3$ și $OM_1'M_2M_3$ sunt de același sens, dacă expresiunile $\omega_{M_1M_2M_3}$, $\omega_{M_1'M_2M_3}$ au același semn.

In mod analog, triedrele $O_{M_1'M_2'M_3'}$ și $\omega_{M_1'M_2'M_3'}$ au același sens, dacă expresiunile

$$\omega_{M_1'M_2'M_3'} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \omega_{M_1'M_2'M_3'} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

au același semn.

In fine, triedrele $OM_1'M_2'M_3$ și $OM_1'M_2'M_3'$ au același sens, dacă expresiunile $\omega M_1'M_2'M_3$,

$$\omega M_1'M_2'M_3' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}$$

au același semn.

Să luăm pentru $M_1'M_2'M_3'$ punctele așezate pe axele Ox, Oy, Oz, la unitatea de distanță; atunci coordonatele acestor puncte sunt (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) și deci $\omega_{M_1'M_2'M_3'} = 1$.

Deci pentruca triedrul $OM_1M_2M_3$ să fie de același sens cu acel al axelor $Oxyz$(sens direct), trebue și e de ajuns ca expresiunea

$$\omega M_1M_2M_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

să fie pozitivă.

Observare. Am văzut la schimbarea sistemului de referințe (No. 194) că dacă triedrul nou este $O_1x_1y_1z_1$ și dacă axele sale perpendiculare au cosinusurile directoare (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_3,b_3,c_3), atunci avem [formula (4), No. 194]

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = \varepsilon.$$

Dar, primul membru al acestei expresii este tocmai câtimea $\omega_{M_1M_2M_3}$, unde $M_1(a_1,b_1,c_1)$, $M_2(a_2,b_2,c_2)$, $M_3(a_3b_3c_3)$, $O_1M_1 = O_1M_2 = O_1M_3 = 1$. Deci, această expresie are semnul + sau —, după cum triedrul $O_1M_1M_2M_3$, sau $O_1x_1y_1z_1$ are același sens cu triedrul direct $Oxyz$, sau au sensuri contrarii. Așa dar, câtimea ε, cu care este egală această expresie, are în formulele de transformare (No. 194) valoarea +1 sau —1 ($\varepsilon^2 = 1$), după cum triedrul $O_1x_1y_1z_1$ are același sens direct ca și $Oxyz$, sau sens contrar.

Volumul unei tetraedru (axe perpendiculare). Vom numi valoarea algebrică a volumului tetraedrului $OM_1M_2M_3$ numărul a cărui valoare absolută măsoară volumul și al cărui semn este + sau —, după cum triedrul $OM_1M_2M_3$ este de același sens cu triedrul $Oxyz$ sau de sensuri contrarii.

Să considerăm mai întâi tetraedrul $OM_1M_2M_3$, $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$. Volumele algebrice ale tetraedrelor $OM_1M_2M_3$, $OM_1'M_2M_3$, stau între ele ca distanțele algebrice ale punctelor M_1 și M_1' la baza comună OM_2M_3. Planul OM_2M_3 având ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

distanțele punctelor $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_1'(x_1', y_1', z_1')$ la acest plan, sunt respectiv

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{(y_2z_3 - z_2y_3)^2 + (z_2x_3 - x_2z_3)^2 + (x_2y_3 - y_2x_3)^2}} = \frac{\omega M_1M_2M_3}{\pm\sqrt{(y_2z_3 - y_3z_2)^2 + (z_2x_3 - z_3x_2)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2}},$$

$$\frac{\omega M_1'M_2M_3}{\pm\sqrt{(y_2z_3 - y_3z_2)^2 + (z_2x_3 - z_3x_2)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2}}.$$

Deci

$$\frac{\text{vol alg } OM_1M_2M_3}{\text{vol alg } OM_1'M_2M_3} = \frac{\omega M_1M_2M_3}{\omega M_1'M_2M_3}.$$

În mod analog

$$\frac{\text{vol alg } OM_1'M_2M_3}{\text{vol alg } OM_1'M_2'M_3} = \frac{\omega M_1'M_2M_3}{\omega M_1'M_2'M_3}, \quad \frac{\text{vol alg } OM_1'M_2'M_3}{\text{vol alg } OM_1'M_2'M_3'} = \frac{\omega M_1'M_2'M_3}{\omega M_1'M_2'M_3'}.$$

De unde, prin înmulțire,

$$\frac{\text{vol alg } OM_1M_2M_3}{\text{vol alg } OM_1'M_2'M_3'} = \frac{\omega M_1M_2M_3}{\omega M_1'M_2'M_3'} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}}.$$

Să luăm M_1' pe Ox, M_2' pe Oy, M_3' pe Oz, astfel ca $OM_1' = OM_2' = OM_3' = 1$. Atunci $\text{vol alg } OM_1'M_2'M_3' = \frac{1}{6}$, iar

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} = 1$$

și deci

$$\text{vol alg } OM_1M_2M_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Să considerăm acum un tetraedru oarecare $M_1M_2M_3M_4$, $M_i(x, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$. Pentru a calcula volumul acestui tetraedru, să dăm o translație axelor, luând noua origine O' în M_1; atunci coordonatele punctelor M_2, M_3, M_4 devin $M_2(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $M_3(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, $M_4(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$.

Am văzut că valoarea algebrică a tetraedrului $O'M_2M_3M_4$, sau $M_1M_2M_3M_4$, este determinantul

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

care, după proprietăți cunoscute, se poate pune sub forma

$$\Delta = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Volumul tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$ este valoarea absolută a determinantului Δ. Volumul algebric al acestui tetraedru este un număr a cărui valoare absolută măsoară volumul său și al cărui semn este $+$ sau $-$, după cum triedrul M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, este de același sens cu triedrul $Oxyz$ sau de sens contrar.

220. **Suprafața unui triunghi** (axe perpendiculare). Să considerăm triunghiul $M_1M_2M_3$, $M'(x, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$, a cărui proecție pe planul xOy este $M'_1M'_2M'_3$, $M'_i(x_i, y_i, 0)$ $i=1, 2, 3$. Să numim arie algebrică a triunghiului $M_1M_2M_3$, un număr a cărui valoare absolută este măsura suprafeței sale, având semnul $+$ sau $-$, după cum triedrul $OM_1M_2M_3$ este direct sau nu.

Aria algebrică a proecții $M'_1M'_2M'_3$, a triunghiului $M_1M_2M_3$ pe planul xOy, este

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

In mod analog se găsesc ariile proecțiilor pe planele yOz, zOx, ale triunghiului din spațiu $M_1M_2M_3$.

Să găsim acum *relația dintre ariile unui triunghi* ABC *din spațiu și a proecții* ABC′ (Fig. 307) *a acestui triunghi pe un plan ce face cu acela al triunghiului* ABC *unghiul* α. Ducând înălțimea CH a triunghiului ABC, se vede, după teorema celor trei perpendiculare, că C′H este perpendiculară pe AB, iar unghiul C′HC este egal cu α. Avem

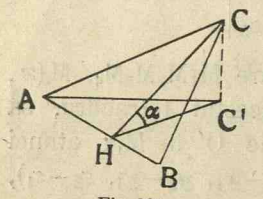


Fig. 307.

$$\text{aria } ABC' = \frac{1}{2}AB.C'H = \frac{1}{2}AB.CH\cos\alpha = (\text{aria } ABC)\cos\alpha.$$

Deci aria proecții pe un plan P a unui triunghi ABC, ce are o latură AB paralelă cu planul de proecție P, este egală cu produsul dintre aria triunghiului din spațiu și cosinusul unghiului ce-l face planul triunghiului din spațiu cu planul de proecție.

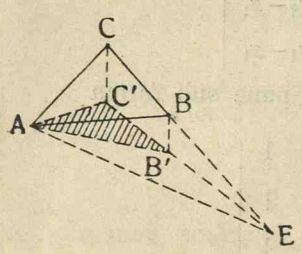


Fig. 308.

Să considerăm acum un triunghi oarecare în spațiu ABC și fie AB′C′ proecția lui pe un plan ce trece prin A și face cu acela al triunghiului ABC unghiul α (Fig. 308). Fie AE intersecția planelor ABC, AB′C′, E intersecția dreptelor B′C′ și BC. Avem

$$\text{aria } AB'C' = \text{aria } AEC' - \text{aria } AEB',$$

$$\text{aria } AB'C' = (\text{aria } AEC)\cos\alpha - (\text{aria } AEB)\cos\alpha = (\text{aria } AEC - \text{aria } AEB)\cos\alpha,$$

$$\text{aria } AB'C' = (\text{aria } ABC)\cos\alpha.$$

Deci, *aria proecții unui triunghi pe un plan este egală cu produsul arii triunghiului din spațiu prin cosinusul unghiului format de planul triunghiului din spațiu cu planul de proecțiune.*

Așa fiind, să însemnăm cu S S_x, S_y, S_z ariile triunghiului din spațiu și ale proecțiunilor acestui triunghi pe planele yOz, zOx, xOy. Fie $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, cosinusurile directoare ale normalei la planul triunghiului din spațiu. Unghiul axei Oz cu normala la planul triunghiului din spațiu este tocmai unghiul format de planul xOy cu planul triunghiului din spațiu. Deci

$$S_z = S\cos\gamma.$$

In mod analog,

$$S_x = S\cos\alpha,\quad S_y = S\cos\beta.$$

De unde

$$S_x^2+S_y^2+S_z^2 = S^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma),$$

$$S^2 = S_x^2+S_y^2+S_z^2,$$

adică, *pătratul ariei unui triunghiu din spațiu este egal cu suma pătratelor ariilor proecțiunilor triunghiului dat pe cele trei plane de coordonate.*

Să considerăm acum triunghiul M_1,M_2,M_3, $M_i'x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$; ariile proecțiilor acestui triunghi pe planele xOy, yOz, zOx, sunt respectiv

$$S_z=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix},\quad S_x=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix},\quad S_y=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1\\ z_2 & x_2 & 1\\ z_3 & x_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Deci, înlocuind în relația de mai sus, avem

$$4S^2=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1\\ z_2 & x_2 & 1\\ z_3 & x_3 & 1\end{vmatrix}^2,$$

relație care dă suprafața unui triunghi în funcțiune de coordonatele vârfurilor.

Observare. Obțineam aceleași rezultate, dacă defineam suprafața triunghiului $M_1M_2M_3$ ca jumătatea produsului dintre lungimea segmentului M_2M_3 și distanța de la M_1 la M_2M_3.

Exerciții.

1) Ce reprezintă ecuația $2x+3y+\lambda z+1=0$?

R. Un fascicol de plane ce trec prin dreapta $2x+3y+1=0$, $z=0$.

2) Să se scrie ecuația planului ce trece prin origină și intersecția planelor $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$.

R. $(AD'-A'D)x+(BD'-B'D)y+(CD'-C'D)z=0$.

3) Să se scrie ecuația planului dus prin punctul (x_1,y_1,z_1) și intersecția planelor $(P)\equiv Ax+By+Cz+D=0$, $(P')\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$.

R. $\frac{P}{P'}=\frac{P_1}{P_1'}$, $P_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$, $P_1'=A'x_1+B'y_1+C'z_1+D'$.

4) Să se scrie ecuațiile planelor duse prin intersecția a două plane și respectiv perpendiculare pe fiecare din ele.

R. $(A-\lambda A')A+(B-\lambda B')B+(C-\lambda C')C=0$, $(A-\lambda A')A'+(B-\lambda B')B'+(C-\lambda C')C'=0$.

Ecuațiile planelor sunt

$$(Ax+By+Cz+D)(AA'+BB'+CC')=(A^2+B^2+C^2)(A'x+B'y+C'z+D'),$$
$$(Ax+By+Cz+D)(A'^2+B'^2+C'^2)=(AA'+BB'+CC')(A'x+B'y+C'z+D').$$

5) Care e condiția ca planele

$$x-cy-bz=0,\ y-az-cx=0,\ z-bx-ay=0$$

să treacă prin aceeaș dreaptă.

R. Se scrie că ecuațiile $x-cy-bz+\lambda(y-az-cx)=0$, $z-bx-ay=0$ reprezintă același plan; se obține

$$\frac{1-c\lambda}{b}=\frac{-c+\lambda}{-a}=\frac{-a\lambda}{1};\ a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

6) Să se scrie ecuația planului dus prin punctul $(1, 2, -1)$ și dreapta $2x-z+1=0$, $3y+2z-2=0$.

R. Planul căutat e de forma $2x-z+1+\lambda(3y+2z-2)=0$. Se scrie că trece prin punctul $(1, 2, -1)$; $\lambda=-2$, ecuația planului este $2x-6y-5z+5=0$.

7) Să se afle ecuația planului dus prin Ox, paralel cu dreapta $x-az-p=0$, $y-bz-q=0$.

R. Planul e de forma $y-\lambda z=0$. Scriind că normala la plan $(0, 1, -\lambda)$ este perpendiculară pe dreapta $\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z}{1}$, avem $0.a+1.b-\lambda.1=0$, $\lambda=b$, $y=bz$.

Elemente de la infinit. Coordonate omogene.

221. **Coordonatele omogene ale unui punct.** $M(x,y,z)$ fiind un punct din spațiu, sistemul de valori X,Y,Z,T, care verifică ecuațiile

$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T},$$

se zic coordonatele omogene ale lui M.

Coordonatele omogene ale punctului

$$x=x_0+a\rho,\ y=y_0+b\rho,\ z=z_0+c\rho,$$

al dreptei de parametrii directori a,b,c, pot fi

$$X=\frac{x_0+a\rho}{\rho},\quad Y=\frac{y_0+b\rho}{\rho},\quad Z=\frac{z_0+c\rho}{\rho},\quad T=\frac{1}{\rho},$$

astfel că, dacă punctul se depărtează la infinit pe dreapta (D), are coordonatele omogene

$$(a, b, c, 0).$$

Ecuația planului în coordonate omogene este

$$AX+BY+CZ+DT=0,$$

iar $T=0$ reprezintă, în coordonate omogene, planul de la infinit. Ecuațiile

$$AX+BY+CZ=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0,\ T=0,$$

reprezintă o dreaptă; o numim dreapta de la infinit a planului $AX+BY+CZ+DT=0$.

Cu ajutorul acestor noi noţiuni, enunţurile relative la intersecţiile dreptelor şi planelor se extind şi în cazul când sunt paralele. De ex, planele paralele

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad Ax+By+Cz+D'=0,\quad D\neq D',$$

au, în coordonate omogene, ecuaţiile

$$AX+BY+CZ+DT=0,\quad AX+BY+CZ+D'T=0.$$

Aceste plane au comună dreapta de la infinit a planului

$$AX+BY+CZ=0.$$

În cazul a trei plane, ele au un punct comun, sau o dreaptă comună, sau, în fine, sunt confundate şi anume: 1°. planele formează un triedru, au un punct comun la distanţă finită; 2° formează o prizmă triunghiulară, punctul comun la infinit pe muchii; 3° planele trec prin aceeaş dreaptă la distanţă finită; 4° planele sunt paralele, au o dreaptă comună la infinit; 5° planele sunt confundate.

222. **Coordonatele unui punct care divide un segment într'un raport dat** Fie $M(x,y,z)$ coordonatele carteziene ale unui punct M, ce împarte segmentul M_1M_2, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, în raportul $M_1M:MM_2=\lambda$. Am văzut că aceste coordonate sunt

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Fie acum (X_1,Y_1,Z_1,T_1), (X_2,Y_2,Z_2,T_2), (X,Y,Z,T) coordonatele omogene ale punctelor M_1,M_2,M_3; avem

$$x=\frac{\frac{X_1}{T_1}+\lambda\frac{X_2}{T_2}}{1+\lambda}=\frac{X_1+\lambda\frac{T_1}{T_2}X_2}{T_1+\lambda\frac{T_1}{T_2}T_2}.$$

Punând $\lambda\frac{T_1}{T_2}=\mu$, avem

$$x=\frac{X_1+\mu X_2}{T_1+\mu T_2},\quad y=\frac{Y_1+\mu Y_2}{T_1+\mu T_2},\quad z=\frac{Z_1+\mu Z_2}{T_1+\mu T_2},$$

de unde urmează că un sistem de coordonate omogene ale punctului M sunt

$$X_1+\mu X_2,\ Y_1+\mu Y_2,\ Z_1+\mu Z_2,\ T_1+\mu T_2.$$

Coordonatele conjugatului armonic N al lui M, în raport cu M_1 şi M_2, sunt

$$X_1-\mu X_2,\ Y_1-\mu Y_2,\ Z_1-\mu Z_2,\ T_1-\mu T_2.$$

Punctele

$$X_1+\mu X_2,\ Y_1+\mu Y_2,\ Z_1+\mu Z_2,\ T_1+\mu T_2,$$

$$X_1+\mu' X_2,\ Y_1+\mu' Y_2,\ Z_1+\mu' Z_2,\ T_1+\mu' T_2,$$

sunt conjugate armonic, în raport cu punctele M_1 și M_2, când $\mu+\mu'=0$.

Importanța întrebuințării coordonatelor omogene s'a văzut când am studiat geometria plană.

Elemente imaginare.

223. După cum am văzut că sunt puncte imaginare ca intersecția a două curbe, tot astfel, sunt curbe imaginare ca intersecția a două suprafețe. De ex., sfera cu centrul în origină și raza R, are ecuația $x^2+y^2+z^2=R^2$; planul $z=2R$ nu tae sfera după o curbă reală, totuși ecuațiile

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z=2R,$$

sau

$$x^2+y^2=-R^2,\ z=2R,$$

reprezintă o curbă, pe care o vom numi curbă imaginară. Spre a ne convinge de neexistența ei, e destul a observa că ecuația $x^2+y^2=-R^2$ este absurdă, căci nu se poate ca o sumă de două pătrate să fie negativă, fără ca x și y să fie cantități complexe.

Prin analogie, o curbă sau o suprafață o vom numi imaginară, când în ecuațiile lor intră cantități complexe.

224 **Elemente izotrope.** Distanța dintre două puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ fiind $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$, vom zice că distanța dintre aceste două puncte este nulă, când parametrii directori, $a=x_1-x_2$, $b=y_1-y_2$, $c=z_1-z_2$, ai dreptei ce unește cele două puncte, verifică relația

$$a^2+b^2+c^2=0.$$

O astfel de direcțiune se zice izotropă și se obsearvă, că după o schimabre de coordonate rectangulare, din cauza conservărei formei distanței, ea va rămâne tot izotropă. Intre noii parametri directori (a_1, b_1, c_1) vom avea aceeaș relație $a_1^2+b_1^2+c_1^2=0$.

Prin fiecare punct al spațiului trec o infinitate de drepte izotrope; cele care trec prin origină au ecuațiile

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\ a^2+b^2+c^2=0;$$

coordonatele unui punct (x, y, z) al uneia din aceste drepte verifică relația

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

iar conul format de aceste drepte, reprezentat de ecuația precedentă, se zice *con izotrop*.

Ecuația unei sfere fiind

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

făcând-o omogenă, avem

$$x^2+y^2+z^2-2t(ax+by+cz)+(a^2+b^2+c^2-R^2)t^2=0.$$

Luând intersecția acestei sfere cu planul de la infinit, $t=0$, se obține un cerc,

$$x^2+y^2+z^2=0,\ t=0,$$

care este și intersecția conului izotrop $x^2+y^2+z^2=0$, cu planul de la infinit $t=0$ Acest cerc, prin care trec toate sferele din spațiu, se zice *cercul imaginar de la infinit*. Acest cerc mai este și intersecția planului de la infinit cu sfera cu centrul în origină și raza zero, $x^2+y^2+z^2=0$.

225. **Elemente reale în legătură cu elemente imaginare și imaginar conjugate.** 1°. Să considerăm două puncte imaginar conjugate, M și M', ale căror coordonate sunt $M(a_1+ia_2,\ b_1+ib_2,\ c_1+ic_2)$, $M'(a_1-ia_2,\ b_1-ib_2,\ c_1-ic_2)$. Dreapta care unește aceste puncte are ecuațiile

$$\frac{x-a_1-ia_2}{a_1+ia_2-(a_1-ia_2)}=\frac{y-b_1-ib_2}{b_1+ib_2-(b_1-ib_2)}=\frac{z-c_1-ic_2}{c_1+ic_2-(c_1-ic_2)},$$

sau

$$\frac{x-a_1-ia_2}{a_2}=\frac{y-b_1-ib_2}{b_2}=\frac{z-c_1-ic_2}{c_2}.$$

Egalând primele rapoarte și ultimele două, apoi adăogând *i* fiecărui raport, avem după simplificări $(x-a_1)b_2=(y-b_1)a_2$, $(y-b_1)c_2=(z-c_1)b_2$,

sau

$$\frac{x-a_1}{a_2}=\frac{y-b_1}{b_2}=\frac{z-c_1}{c_2},$$

ceea ce probează că *dreapta ce unește două puncte imaginar conjugate este reală*. Se vede că această dreaptă trece prin punctul (a_1, b_1, c_1) și este paralelă cu direcția (a_2, b_2, c_2).

2°. *Dacă un punct imaginar* $(a+ia', b+ib', c+ic')$ *este pe o curbă sau suprafață algebrică, reprezentată de ecuații cu coeficienți reali, atunci și punctul imaginar conjugat* $(a-ia', b-ib', c-ic')$ *se află pe aceeaș curbă sau suprafață*. Demonstrația este analoagă ca în geometria plană.

Dacă, din contră, punctul M descrie o linie sau o suprafață ale căror ecuații conțin coeficienți imaginari, punctul M', imaginar conjugat, descrie o linie sau o suprafață, zisă imaginar conjugată cu prima. Astfel, dacă punctul M este în planul imaginar

$$AX+BY+CZ+DT=0,$$

punctul M' se află în planul

$$A'X+B'Z+C'Z+D'T=0,$$

ai cărui coeficienți sunt conjugați corespondenților săi din prima ecuație. Acest plan se zice imaginar conjugat cu primul.

3°. Considerând fascicolul linear determinat de cele două plane precedente,

$$(A+\lambda A')X+(B+\lambda B')Y+(C+\lambda C')Z+(D+\lambda D')T=0,$$

se vede că conține două plane reale corespunzătoare valorilor $\lambda=1, \lambda=-1$. Astfel că *dreapta de intersecție a două plane imaginar conjugate este reală.*

Coordonate tetraedrice.

226. Să considerăm patru funcțiuni lineare și omogene X, Y, Z. T de coordonatele carteziene omogene x, y, z, t, ale unui punct,

$$\begin{aligned} X&=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t,\\ Y&=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t,\\ Z&=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t,\\ T&=a_4x+b_4y+c_4z+d_4t, \end{aligned} \tag{1}$$

pe care să le presupunem linear independente, adică între care nu există o relație de gradul întâi, de forma $\lambda_1X+\lambda_2Y+\lambda_3Z+\lambda_4T=0$, λi fiind constante. Dacă se cunosc valorile expresiunilor X, Y, Z, T pentru un punct $M(x,y,z,t)$, formulele precedente ne dau valori pentru coordonatele omogene x, y, z, t ale punctului M

$$\begin{aligned} x&=A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1T,\\ y&=A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2T,\\ z&=A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3T,\\ t&=A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4T. \end{aligned} \tag{2}$$

Se pot deci considera X, Y, Z, T ca un sistem de coordonate omogene, proprii pentru a determina un punct în spațiu.

Funcțiunile X. Y, Z, T fiind linear independente, ecuațiile

$$X=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0,\quad Y=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0,$$
$$Z=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0,\quad T=a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=0$$

reprezintă patru plane, neavând toate nici un punct comun, care formează deci un tetraedru. Acest tetraedru se zice tetraedru de referință. Cantitățile X, Y, Z, T, corespunzătoare unui punct M, se zic coordonatele tetraedrice ale punctului M și sunt funcțiuni lineare de coordonatele omogene ale punctului M. Cum x, y, z, t sunt cunoscute afară de un factor constant, coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T sunt cunoscute afară de un factor constant.

Tetraedrul de referință poate avea unul sau mai multe vârfuri la infinit. De ex., dacă tetraedrul de referință este format de planele de coordonate yOz, zOx, xOy și planul de la infinit, ecuațiile acestor fețe sunt respectiv $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$; cum în membrii al doilea ai ecuațiilor (1) sunt primii membri ai ecuațiilor acestor plane, formulele (1) devin $X=x$ $Y=y$, $Z=z$, $T=t$, unde x, y, z, t sunt coordonatele carteziene omogene ale punctului considerat. După cum se vede, sistemul de coordonate carteziene este un caz foarte particular al sistemului de coordonate tetraedrice, când tetraedrul de referință are trei din vârfurile sale aruncate la infinit.

Din expresiunile (1), se vede că X, Y, Z, T, coordonatele tetraedrice ale unui punct M, sunt proporționale respectiv cu distanțele punctului M la fețele tetraedrului de referință.

Cunoaşterea tetraedrului de referinţă nu este suficientă pentru definirea coordonatelor tetraedrice. In adevăr, din relaţiile (1) se vede că fiind dat tetraedrul de referinţă, adică ecuaţiile feţelor sale, $a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0$. $a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0$, $a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=0$, coordonatele tetraedrice pot fi X, Y, Z, T, sau aX, bY, cZ, dT, a, b, c, d fiind factori constanţi, căci, dacă ecuaţiile feţelor tetraedrului de referinţă sunt $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $T=0$, aceste feţe pot avea şi ecuaţiile $aX=0$, $bY=0$, $cZ=0$, $dT=0$, de oarece a, b, c, d sunt diferiţi de zero. Deci, dacă un sistem de coordonate tetraedrice sunt X, Y, Z, T, atunci luând sistemul de coordonate tetraedrice aX, bY, cZ, dT, a, b, c, d fiind constante, tetraedrul de referinţă rămâne acelaş.

Observând relaţiile (2), se vede că (A_1, A_2, A_3, A_4) sunt coordonatele, omogene ale vârfului $Y=Z=T=0$ al tetraedrului de referinţă; de asemenea (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4), (D_1, D_2, D_3, D_4) sunt coordonatele omogene respectiv ale vârfurilor tetraedrului de referinţă $X=Z=T=0$, $X=Y=T=0$ $X=Y=Z=0$.

Presupunând că toate aceste vârfuri sunt la distanţă finită şi punând

$$A_4X=\alpha,\quad B_4Y=\beta,\quad C_4Z=\gamma,\quad D_4T=\delta, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A_1}{A_4}=x_1,\quad \dfrac{B_1}{B_4}=x_2,\quad \dfrac{C_1}{C_4}=x_3,\quad \dfrac{D_1}{D_4}=x_4, \\ \dfrac{A_2}{A_4}=y_1,\quad \dfrac{B_2}{B_4}=y_2,\quad \dfrac{C_2}{C_4}=y_3,\quad \dfrac{D_2}{D_4}=y_4, \\ \dfrac{A_3}{A_4}=z_1,\quad \dfrac{B_3}{B_4}=z_2,\quad \dfrac{C_3}{C_4}=z_3,\quad \dfrac{D_3}{D_4}=z_4, \end{array}\right. \tag{4}$$

formulele (2) devin

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{t}=\dfrac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \\ \dfrac{y}{t}=\dfrac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3+\delta y_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \\ \dfrac{z}{t}=\dfrac{\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3+\delta z_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Aceste expresiuni definesc coordonatele carteziene ale centrului de greutate a patru masse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aşezate respectiv în vârfurile (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) ale tetraedrului de referinţă. Deci, punctul de coordonate tetraedrice (X, Y, Z, T) este centrul de greutate a patru masse A_4X, B_4Y, C_4Z, D_4T, aşezate respectiv în vârfurile tetraedrului de referinţă.

Făcând în formulele (3) $A_4=B_4=C_4=D_4$, coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T devin coordonatele $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, numite *coordonatele baricentrice* ale lui *Möbius* (1827).

Ecuaţia planului de la infinit în coordonate tetraedrice este $t=0$, adică

$$A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4T=0.$$

O ecuaţie omogenă şi de gradul m în raport cu coordonatele omogene carteziene x, y, z, t reprezentând o suprafaţă de ordinul m, să înlocuim pe x, y, z, t cu valorile lor (2) în funcţie de coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T, Se obţine o ecuaţie omogenă şi de gradul m în raport cu X,Y,Z,T, care reprezintă deci, o suprafaţă de ordinul m în coordonate tetraedrice.

Aplicație. Fiind date punctele A, B, C, D, *se consideră respectiv pe* AB, DC, BC, AD, *punctele* P, Q, R, S *astfel ca* AP:PB=DQ:QC=λ, AS:SD=BR:RC=μ. *Să se arate că dreptele* PQ și SR *se tae în* M, *astfel ca* PM:MQ=λ, SM:MR=μ. In adevăr, să luăm tetraedrul ABCD de referință, A(1,0,0,0), B(0,1,0.0), C(0,0,1,0), D(0,0,0,1), coordonatele punctelor sunt P(1,λ,0,0), Q(0,0,λ,1), R(0,1,μ,0), S(1,0,0,μ). Un punct M al dreptei PQ, astfel ca PM:MQ=α, are coordonatele M(1,λ,$\lambda\alpha$,α); un punct N al dreptei SR, astfel ca SN:NR=β, are coordonatele N(1,β,$\beta\mu$,μ). Pentru ca dreptele PQ și SR să se tae, trebue ca să existe valori pentru α și β, astfel ca punctele M și N să se confunde, adică să aibă coordonatele proporționale,

$$\frac{1}{1}=\frac{\lambda}{\beta}=\frac{\lambda\alpha}{\beta\mu}=\frac{\alpha}{\mu},$$

de unde $\lambda=\beta$, $\alpha=\mu$. Deci, dreptele PQ și SR se tae în M, astfel ca AP:PB=DQ:QC=SM:MR=λ, AS:SD=BR:RC=PM:MQ=μ.

Sfera.

227. **Ecuația sferei** (Axe perpendiculare). Am văzut că

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

reprezintă o sferă cu centrul în punctul (a, b, c,) și raza R. Ecuația sferei este de forma

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0,$$

și este cea mai simplă dintre ecuațiile suprafețelor de ordinul al doilea,

$$f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

Pentru ca această ecuație să reprezinte deci o sferă, trebue ca

$$A=A'=A'',\ B=B'=B''=0.$$

Ecuația generală devine

$$A(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

care se poate scrie

$$x^2+y^2+z^2+2\frac{C}{A}x+2\frac{C'}{A}y+2\frac{C''}{A}z+\frac{D}{A}=0,$$

de unde se deduce pentru coordonatele centrului sferei și a razei,

$$\left(-\frac{C}{A},-\frac{C'}{A},-\frac{C''}{A}\right),\ R^2=\frac{C^2}{A^2}+\frac{C'^2}{A^2}+\frac{C''^2}{A^2}-\frac{D}{A}.$$

Dacă $C^2+C'^2+C''^2-AD<0$, sfera se zice imaginară.

Ecuația generală a sferei este deci

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

228. **Secţiunea plană a unei sfere.** Să luăm ca plan xOy planul dat şi ca axă Oz, dreapta dusă prin centrul sferei perpendiculară pe acest plan. Ecuaţia sferei este

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2,$$

d fiind distanţa centrului sferei la planul secant. Ecuaţia secţiunei cu planul xOy, raportată la Ox şi Oy, este

$$x^2+y^2=R^2-d^2,$$

reprezintă un cerc real, imaginar, sau de rază nulă, după cum $d<R$, $d>R$, $d=R$.

229. **Intersecţia a două sfere.** Ecuaţiile sferelor fiind

$$(1)\qquad (S_1)\equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0,$$
$$(S_2)\equiv x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0,$$

punctele de intersecţie au coordonate ce verifică aceste două ecuaţii, sau prima şi diferenţa lor,

$$(2)\qquad 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)z+d_2-d_1=0.$$

Deci, o parte a curbei de intersecţie a sferelor este cercul obţinut la intersecţia uneia din sfere cu planul (2). Luând cu origină centrul celei mai mari din cele două sfere şi ca axă Ox linia centrelor, se vede (ca la geometria plană) că cercul de intersecţie este real numai dacă distanţa centrelor este cuprinsă între diferenţa şi suma razelor.

Aceste sfere mai au în comun şi cercul imaginar de la infinit (No. 224).

230. **Puterea unui punct faţă de o sferă.** Ecuaţia unei sfere fiind

$$f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,$$

să ducem prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ dreapta de cosinusuri directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; un punct al acestei drepte are coordonatele

$$x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\cos\beta,\ z_0+\rho\cos\gamma,\ \rho=M_0M.$$

Valorile lui ρ, corespunzătoare punctelor de intersecţie ale sferei cu această dreaptă, sunt date de

$$f(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\cos\beta,\ z_0+\rho\cos\gamma)=0,$$

sau, după reduceri, de

$$\rho^2+2\rho[(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma]+f(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Deci, o dreaptă tae în general o sferă în două puncte. Însemnând cu M' şi M'' aceste puncte, avem

$$M_0M'.M_0M''=\rho'\rho''=f(x_0,y_0,z_0)=\text{const.},$$

și care nu depinde de direcția dreptei dusă prin M_0. Acest produs constant se zice puterea punctului $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în raport cu sfera și este egal cu rezultatul înlocuirei în ecuația sferei a coordonatelor curente (x,y,z) cu acelea ale punctului $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

231. **Planul radical a două sfere** este locul punctelor care au puteri egale față de cele două sfere și are ecuația

$$x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2,$$

sau $$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)z+d_2-d_1=0,$$

care se obține scăzând ecuațiile celor două sfere. Planul radical conține cercul comun al sferelor.

232. **Axul radical al trei sfere** este locul punctelor ce au puteri egale față de cele trei sfere și are ecuațiile $S_1=S_2=S_3$, $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ fiind ecuațiile celor trei sfere. Se vede că acest loc este o dreaptă, care este intersecția planelor radicale $S_1=S_2$, $S_2=S_3$, $S_3=S_1$, ale celor trei sfere, luate două câte două. Această dreaptă se zice axul radical al celor trei sfere. Se vede că planele radicale a trei sfere, luate două câte două, trec prin aceeaș dreaptă, axul radical al celor trei sfere.

233. **Centru radical a patru sfere** este punctul care are puteri egale față de cele patru sfere și coordonatele sale sunt date de următoarele trei ecuații $S_1=S_2=S_3=S_4$. Acest punct este intersecția a axelor radicale ale celor patru sfere, luate câte trei.

234. **Inversiune.** O fiind un punct fix și M un punct variabil, dacă se ia pe dreapta OM punctul M', astfel ca $OM.OM'=k$, k fiind o constantă, se zice că figura descrisă de M' este inversa figurei descrisă de M, în raport cu O care se zice pol de inversiune și k ca putere de inversiune.

Dacă se iau trei axe perpendiculare ce trec prin O, și se notează cu (x,y,z), (x',y',z') coordonatele punctelor M și M', avem

$$\frac{x}{x_1}=\frac{OM}{OM'}=\frac{k}{\overline{OM'}^2}=\frac{k}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad x=\frac{kx'}{x'^2+y'^2+z'^2},$$

deci

$$x=\frac{kx'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y=\frac{ky'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z=\frac{kz'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Deci, dacă punctul $M(x,y,z)$ descrie suprafața $f(x,y,z)=0$, locul punctului M' va fi o suprafață a cărei ecuație este

$$f\left(\frac{kx}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{ky}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{kz}{x^2+y^2+z^2}\right)=0.$$

Deci, dacă M descrie o linie, intersecția a două suprafețe, M′ va descrie de asemenea o linie, intersecția a două suprafețe, inversele primelor.

Inversa unui plan este o sferă ce trece prin polul de inversiune și reciproc. In adevăr, ecuația planului fiind

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

suprafața inversă a planului are ecuația

$$\frac{Akx}{x^2+y^2+z^2}+\frac{Bky}{x^2+y^2+z^2}+\frac{Ckz}{x^2+y^2+z^2}+D=0,$$

adică o sferă ce trece prin origină,

$$D(x^2+y^2+z^2)+k(Ax+By+Cz)=0.$$

In mod analog se vede că inversa unei sfere oarecare ce nu trece prin pol este o sferă. Un cerc fiind intersecția a două sfere, inversa unui cerc este un cerc.

Noțiuni introductive asupra curbelor și suprafețelor.

235. **Locuri geometrice.** Se zice loc geometric o reunire de mai multe puncte care se bucură de aceeaș proprietate. Acest loc este în general o linie sau o suprafață și sunt unele cazuri când ecuațiile acestor linii sau suprafețe se obțin, exprimând analitic proprietatea geometrică a locului, cum a fost, de ex.; cazul sferei, sau axului radical a trei sfere.

In general, punctele locului sunt definite ca punctele comune la mai multe suprafețe sau linii variabile. Se pot prezenta două cazuri; sau se caută locul punctelor comune la trei suprafețe, sau la o suprafață și o linie, sau locul punctelor comune la două suprafețe.

I. *Locul punctelor comune a trei suprafețe sau o linie și o suprafață.* Cordonatele x,y,z, ale unui punct al locului sunt determinate de cele trei ecuații (A) ale suprafețelor, conținând un număr oarecare de parametri, acești parametri fiind legați cu relațiile (B).

Dacă ecuațiile (A) conțin un singur parametru λ, atunci x,y,z sunt funcțiuni de un singur parametru, și deci acest loc este o linie. Se poate scoate valoarea lui λ dintr'una din ecuații și înlocuind-o în celelalte două, se obțin ecuațiile locului. Dacă se rezolvă ecuațiile (A) în raport cu x,y,z, avem cordonatele unui punct al locului în funcțiune de un parametru λ.

Dacă ecuațiile (A) conțin n parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, legați cu $(n-1)$ relații (B), aceste relații dau parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, de ex., în funcțiune de λ_n, ecuațiile (A) definesc atunci pe x,y,z ca funcțiuni de un singur parametru λ_n, și locul geometric este o linie, ale cărei ecuații se obțin eliminând pe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ între ecuațiile (A),(B)

Să presupunem acum că ecuațiile (A) conțin doi parametri variabili independenți; x,y,z sunt atunci funcțiuni de doi parametri, locul este o suprafață, a cărei ecuație se obține eliminând cei doi parametri între cele trei ecuații (A).

Se vede, de asemenea, că dacă ecuațiile (A) conțin n parametrii, legați cu $(n-2)$ relații (B), se pot obține din aceste relații valorile a $(n-2)$ parametrii în funcțiune de ceilalți doi parametrii, și atunci, x,y,z, fiind funcțiuni de doi parametri variabili, locul este o suprafață.

Nu este loc geometric dacă ecuațiile (A) conțin mai mult de doi parametri independenți, sau ele conțin n parametrii, legați cu mai puțin de $(n-2)$ relații; în adevăr, în acest caz, se pot determina parametrii astfel ca ecuațiile (A) să fie verificate de orice punct al spațiului.

II *Locul punctelor comune la două suprafețe variabile.* Două suprafețe tăindu-se după o linie, trebue deci căutat locul geometric al unei linii variabile și deci acest loc este o suprafață. Ecuațiile acestei linii trebue să conție numai un parametru variabil, căci dacă ar conține mai mulți parametrii, se vor putea determina acești parametrii, astfel ca ecuațiile să fie verificate de coordonatele unui punct oarecare al spațiului.

Dacă ecuațiile conțin numai un parametru, se obține ecuația locului, eliminând acest parametru între ecuațiile linii. Dacă ecuațiile linii conțin n parametri, acești parametri trebue să fie legați cu $(n-1)$ relații (B); ecuația suprafeței născută de această linie, se obține eliminând acești parametri între ecuațiile linii și relațiile (B).

236. **Tangenta într'un punct al unei curbe** Fiind dată curba

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t),$$

unde funcțiunile f, φ, ψ admit derivate, tangenta într'un punct se definește ca limita dreptei care unește acest punct M cu punctul infinit vecin. Insemnând cu t_0 valoarea lui t corespunzătoare punctului M, coordonatele acestui punct sunt $x_0=f(t_0)$, $y=\varphi(t_0)$, $z=\psi(t_0)$. Fie t_0+h valoarea lui t corespunzătoare punctului vecin M', ale cărui coordonate sunt $f(t_0+h)$, $\varphi(t_0+h)$, $\psi(t_0+h)$.

Parametrii directori ai dreptei MM' sunt

$$f(t_0+h)-f(t_0),\ \varphi(t_0+h)-\varphi(t_0),\ \psi(t_0+h)-\psi(t_0),$$

sau

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h},\ \frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h},\ \frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h}.$$

Când M' tinde către M, h tinde către zero și deci parametrii

directori ai tangentei în M sunt $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Ecuaţiile tangentei în $M(x_0,y_0,z_0)$ sunt

$$\frac{x-x_0}{f'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(t_0)}.$$

237. **Normală şi plan normal la o curbă strâmbă.** Normală într'un punct este o perpendiculară pe tangentă în acel punct. Sunt o infinitate de normale, care sunt situate în acelaş plan, numit planul normal la curbă în acel punct.

Dacă $M(x_0,y_0,z_0)$ este un punct al curbei

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t),$$

ecuaţia planului normal la curbă în punctul M este

$$(x-x_0)f'(t_0)+(y-y_0)\varphi'(t_0)+(z-z)\psi'(t_0)=0.$$

238. **Elicea circulară.** Dacă se înfăşoară un plan pe un cilindru de rotaţie, o dreaptă D din acest plan se transformă într'o linie situată pe cilindru şi care se zice elice circulară. Generatoarele sau secţiunile drepte ale cilindrului sunt cazuri particulare ale elicelor, corespunzătoare cazurilor când dreapta D este paralelă sau perpendiculară la generatoarele cilindrului.

Să luăm trei axe perpendiculare, Oz fiind axa cilindrului, Ox şi Oy, fiind doi diametrii perpendiculari ai unei secţiuni drepte (Fig. 309). Vom presupune că planul care se înfăşoară este planul yOz şi că generatoarea Az', după care acest plan tae cilindrul, este fixă când se înfăşoară planul. Să presupunem că dreapta D pleacă din punctul A şi face cu Oy unghiul θ.

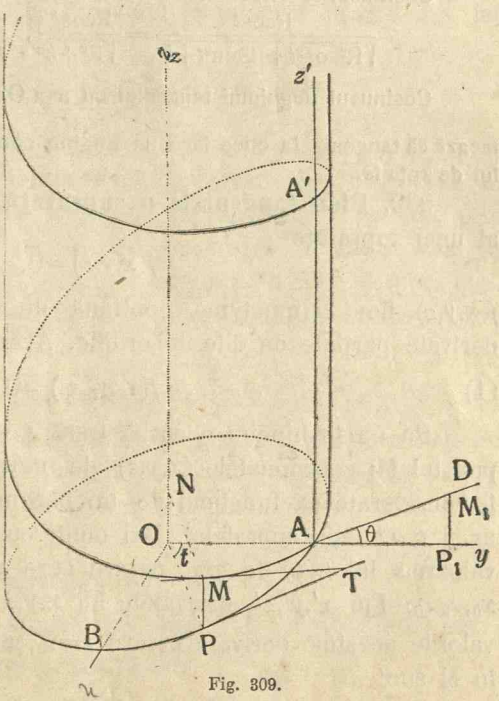


Fig. 309.

Vom exprima coordonatele x, y, z ale unui punct M al elicei, situat pe generatoarea PM, în funcţiune de un parametru variabil, unghiul $AOP=t$. Fie M_1 punctul dreptei D, care corespunde punctului M. Rezultă, din definiţie, că arc $AP=AP_1$, $PM=P_1M_1=AP_1\operatorname{tg}\theta=$ arc$AP\operatorname{tg}\theta$. Deci, *cota* PM *a unui punct al elicei este proporţională cu arcul* AP, numit şi abscisa curbilinie a punctului M.

Insemnând cu R raza cilindrului, avem arc $AP=Rt$, şi deci coordonatele punctului M sunt

$$x=R\sin t,\ y=R\cos t,\ z=Rtg\theta.t=kt,\ k=Rtg\theta,$$

iar ecuaţiile parametrice ale elicei sunt

$$x=R\sin t,\ y=R\cos t,\ z=kt.$$

Punctul M', corespunzător valorii $t+T$ a parametrului t, are coordonatele

$$x'=R\sin(t+T),\ y=R\cos(t+T),\ z=k(t+T).$$

Pe acesta îl deducem din punctul M, învârtind punctul M în jurul lui Oz de un unghiu T şi deplasând apoi acest punct de o lungime kT paralel cu Oz. Această dublă deplasare imprimată punctului M se zice *deplasare elicoidală*; aceasta are de efect să facă să alunece elicea dealungul ei însăşi. In particular, pentru $T=2\pi$, avem

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=z+2k\pi=z+h,$$

punând $h=2k\pi$. Lungimea h se zice *pasul elicei*.

Rezultă de aci că elicea este compusă dintr'o infinitate de arce, care se obţin dând unuia din ele o translaţie paralelă cu axa cilindrului şi egală cu un multiplu de h; fiecare din aceste arce este o *spiră* a elicei,

Ecuaţiile tangentei într'un punct oarecare al elicei sunt

$$\frac{x-R\sin t}{R\cos t}=\frac{y-R\cos t}{-R\sin t}=\frac{z-kt}{k}.$$

Cosinusurile directoare ale tangentei sunt

$$\frac{R\cos t}{\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t+k^2}}=\frac{R\cos t}{\sqrt{R^2+k^2}},\ \frac{-R\sin t}{\sqrt{R^2+k^2}},\ \frac{k}{\sqrt{R^2+k^2}}.$$

Cosinusul unghiului tangentei cu axa Oz, fiind $\frac{k}{\sqrt{R^2+k^2}}=$ const., urmează că tangenta la elice face un unghiu constant cu axa Oz, axa cilindrului de rotaţie.

239. **Plan tangent la o suprafaţă.** Fie $M(x_0,y_0,z_0)$ un punct al unei suprafeţe

$$f(x,y,z)=0,$$

$f(x,y,z)$ fiind o funcţiune continuă de variabilele x,y,z, admiţând derivate parţiale de diferite ordine. Avem

$$f(x_0,y_0,z_0)=0. \tag{1}$$

Să ne închipuim o curbă trasă pe suprafaţă şi trecând prin punctul M; coordonatele (x,y,z) ale unui punct al acestei curbe pot fi considerate ca funcţiuni de un parametru t, şi verifică, oricare ar fi t, ecuaţia suprafeţei. Mai mult, curba trecând prin M, este o valoare a lui t, t_0 de ex., pentru care x,y,z iau respectiv valorile x_0,y_0,z_0. Fie x',y',z' derivatele lui x,y,z în raport cu t şi x'_0,y'_0,z'_0 valorile acestor derivate pentru $t=t_0$; ecuaţiile tangentei la curbă în M sunt

$$\frac{x-x_0}{x'_0}=\frac{y-y_0}{y'_0}=\frac{z-z_0}{z'_0}. \tag{2}$$

Dar $f(x,y,z)=0$ oricare ar fi t, derivata sa în raport cu t este nulă pentru toate valorile lui t și avem

$$x'f'_x+y'f'_y+z'f'_z=0.$$

Pentru $t=t_0$, avem

$$x'_0f'_{x_0}+y'_0f'_{y_0}+z'_0f'_{z_0}=0. \tag{3}$$

Dar, prin punctul M trec o infinitate de curbe trase pe suprafață și fiecare are în M o tangentă, ai căror parametri directori, x'_0, y'_0, z'_0, verifică relația (3). Eliminând pe x'_0, y'_0, z'_0 între ecuațiile (2) și (3) ceea ce se obține înlocuind în (3) pe x'_0, y'_0, z'_0 cu valorile lor proporționale $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, avem

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+(z-z_0)f'_{z_0}=0.$$

Această ecuație, în raport cu x,y,z, fiind de gradul întâi, reprezintă un plan. Și cum (x,y,z) este un punct oarecare al tangentei la una oarecare din curbele trase pe suprafață ce trec prin punctul M, rezultă că tangentele în $M(x_0,y_0,z_0)$ la toate curbele trase pe suprafață ce trec prin punctul M, sunt în același plan. Acesta este planul tangent la suprafață în punctul $M(x_0,y_0,z_0)$, iar ecuația sa este

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+(z-z_0)f'_{z_0}=0.$$

Rezultatul obținut nu mai are loc dacă $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ sunt nule în același timp. Se demonstrează că, în acest caz, tangentele în punctul M la toate curbele trase pe suprafață și care trec prin acest punct, sunt situate pe un con cu vârful în M. Se zice că acest punct este un punct conic sau un punct singular al suprafeței.

Plan tangent în origină. Ecuația unei suprafețe ce trece prin origină se poate pune sub forma

$$f(x,y,z)\equiv Ax+By+Cz+\varphi_2(x,y,z)+\varphi_3(x,y,z)+\ldots=0,$$

unde $\varphi_p(x,y,z)$ este grupul termenilor de gradul p. In derivatele lui $f(x,y,z)$, φ_2 dă termeni de primul grad care se anulează pentru $x=y=z=0$; de asemenea cu φ_3 și așa mai departe. Deci, avem pentru $x_0=y_0=z_0=0$,

$$f'_{x_0}=A,\ f'_{y_0}=B,\ f'_{z_0}=C,$$

astfel că ecuația planului tangent în origină ($x_0=y_0=z_0=0$) este

$$Ax+By+Cz=0,$$

adică se obține egalând cu zero grupul termenilor de gradul întâi din ecuația suprafeței.

Normala într'un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al unei suprafețe $f(x,y,z)=0$, este perpendiculara in M pe planul tangent la suprafață și are ecuațiile

$$\frac{x-x_0}{f'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{f'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{f'_{z_0}}.$$

240. **Aplicații.** I. *Printr'un punct dat să se ducă plane tangente la o suprafață dată.* Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și suprafata (S), a cărei ccuație este $f(x, y, z)=0$. Să însemnăm cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ punctul de contact al unui plan tangent dus din M_0 la suprafață; avem

(4) $$f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

Pentru ca acest punct să corespunză problemei, trebue să scrim că planul tangent în acest punct,

$$(x-x_1)f'_{x_1}+(y-y_1)f'_{y_1}+(z-z_1)f'_{z_1}=0,$$

trece prin M_0, adică

(5) $$(x_0-x_1)f'_{x_1}+(y_0-y_1)f'_{y_1}+(z_0-z_1)f'_{z_1}=0$$

Deci, coordonatele punctelor de contact $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ale planelor tangente ce trec prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ verifică ecuațiile (4) și (5), adică aparțin curbei (C) de intersecție a suprafeței $f(x, y, z)=0$ și suprafeței

$$(x_0-x)f'_x+(y_0-y)f'_y+(z_0-z)f'_z=0.$$

Planul tangent la suprafață în orice punct al acestei curbe răspunde chestiunei. Aceste plane rămân tangente la conul cu vârful în M_0 și cu directoarea curba (C).

II. *Să se ducă la o suprafață plane tangente paralele cu o dreaptă dată.* Sunt o infinitate de plane tangente la suprafața $f(x, y, z)=0$, paralele cu dreapta de parametrii directori (p, q, r), ale căror puncte de contact (x, y, z) sunt pe curba (C) obținută luând intersecția suprafeței date cu suprafața

$$pf'_x+qf'_y+rf'_z=0.$$

Aceste plane sunt tangente la cilindrul cu directoarea curba (C) și cu generatoarele paralele cu direcția dată.

241. **Curbă definită ca intersecția a două suprafețe.** Tangenta într'un punct $M(x_1, y_1, z_1)$ al curbei (C), care este intersecția suprafețelor

$$f(x, y, z)=0,\ g(x, y, z)=0,$$

este în planele tangente în M la fiecare suprafață. Ecuațiile planelor tangente în M la cele două suprafețe fiind

$(x-x_1)f'_{x_1}+(y-y_1)f'_{y_1}+(z-z_1)f'_{z_1}=0$, $(x-x_1)g'_{x_1}+(y-y_1)g'_{y_1}+(z-z_1)g'_{z_1}=0$,

acestea sunt ecuațiile tangentei în M la curba considerată. Aceste ecuații se mai pot scrie sub forma

$$\frac{x-x_1}{f'_{y_1}g'_{z_1}-f'_{z_1}g'_{y_1}}=\frac{y-y_1}{f'_{z_1}g'_{x_1}-f'_{x_1}g'_{z_1}}=\frac{z-z_1}{f'_{x_1}g'_{y_1}-f'_{y_1}g'_{x_1}}.$$

In particular, tangenta într'un punct M al secțiunei plane a unei suprafețe cu un plan (P) este intersecția planului (P) cu planul tangent în M la suprafață.

Generarea suprafețelor.

242. O suprafață poate fi definită prin mișcarea unei linii numită *generatoare*, supusă la anumite condițiuni. Dacă ecuațiile acestei generatoare sunt

$$(1) \qquad f(x, y, z, \lambda)=0, \quad g(x, y, z\, \lambda)=0,$$

λ fiind un parametru variabil, se obține ecuația suprafeței, locul pozițiilor generatoarei, eliminând pe λ între ecuațiile (1).

De multe ori generatoarea trebue a întâlni una sau mai multe linii, numite *directoare*. Dacă generatoarea

$$(2) \qquad f(x, y, z, \lambda, \mu)=0, \quad g(x, y, z, \lambda, \mu)=0$$

care depinde de doi parametrii variabili λ și μ, trebue să întâlnească directoarea

$$(3) \qquad F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0,$$

se elimină x, y, z între ecuațiile (2) și (3) și se obține condiția

$$(4) \qquad \varphi(\lambda, \mu)=0.$$

Pentru a obține ecuația suprafeței, se elimină λ și μ între ecuațiile (2) și (4).

243. **Suprafețe riglate.** Când generatoarea variabilă care naște suprafața, este o dreaptă, suprafața se zice riglată De ex., planul, conul, cilindrul, sunt suprafețe riglate.

Se vede că planul tangent într'un punct M al unei suprafețe riglate conține generatoarea (G) ce trece prin acest punct, căci tangenta în M la (G) se confundă cu această dreaptă și se găsește în planul tangent.

Ecuațiile unei drepte oarecare depinzând de patru parametri variabili, această dreaptă pentru a naște o suprafață, trebue să fie supuse la trei condițiuni, de ex., să întâlnească trei directoare fixe.

Exemple. I. *Suprafață născută de o dreaptă mobilă, care întâlnește trei drepte fixe neparalele cu acelaș plan.* Fie trei drepte (D_1), (D_2), (D_3) neparalele cu acelaș plan. Planele duse prin fiecare din ele, paralele cu fiecare din celelalte două, sunt două câte două paralele și formează un paralelipiped, ale cărui muchii sunt parale cu (D_1), (D_2). (D_3). Să luăm ca origină a coordonatelor centrul O al acestui paralelipiped și ca axe Ox, Oy, Oz, paralelele la (D_1), (D_2), (D_3) (Fig. 310).

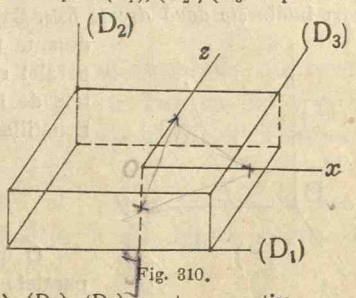


Fig. 310.

Fie $2a$, $2b$, $2c$ lungimile muchilor acestui paralelipiped. Ecuațiile dreptelor (D_1), (D_2), (D_3) sunt respectiv

$$(D_1)\begin{cases} y=b, \\ z=-c, \end{cases} \quad (D_2)\begin{cases} z=c, \\ x=-a; \end{cases} \quad (D_3)\begin{cases} x=a, \\ y=-b. \end{cases}$$

O dreaptă oarecare care întâlneşte directoarele (D_2) şi (D_3), este la intersecţia a două plane duse, unul prin (D_2), altul prin (D_3); ecuaţiile acestei drepte sunt deci

(1) $$x+a+\lambda(z-c)=0, \quad x-a+\mu(y+b)=0,$$

λ şi μ fiind doi parametri variabili. Condiţia care exprimă că această dreaptă întâlneşte şi directoarea (D_1), se obţine eliminând pe x, y, z între ecuaţiile (1) şi ale dreptei (D_1), şi este

(2) $$a-\lambda c-\mu b=0.$$

Ecuaţia suprafeţei căutate se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (1) şi (2) şi este

$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

Suprafaţa deci este de ordinul al doilea.

II. *Suprafaţa născută de o dreaptă mobilă ce întâlneşte trei drepte fixe paralele cu acelaş plan.* Fie (D_1), (D_2), (D_3) cele trei drepte fixe paralele cu acelaş plan (P). Să luăm ca axă Oz o poziţie a dreptei mobile ce întâlneşte aceste trei drepte (Fig. 311), ca axă Ox, dreapta (D_1) şi ca Oy o paralelă din origina O la dreapta (D_2). Dreapta (D_3) este deci paralelă cu planul xOy, iar ecuaţiile dreptelor (D_1), (D_2), (D_3) sunt

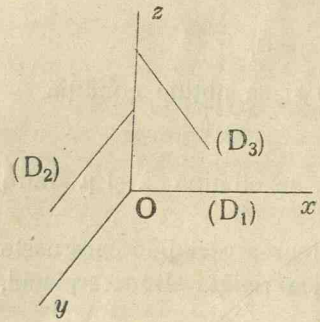


Fig. 311.

$$(D_1)\begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases} \quad (D_2)\begin{cases} x=0, \\ z=b; \end{cases} \quad (D_3)\begin{cases} y=mx, \\ z=c, \end{cases}$$

b, c, m fiind constante date.

Ecuaţiile unei drepte oarecare, ce întâlneşte pe (D_2) şi (D_3), sunt

(3) $$x+\lambda(z-b)=0, \quad y-mx+\mu(z-c)=0,$$

unde λ şi μ sunt doi parametri variabili. Condiţia ca să întâlnească dreapta (D_1) este

(4) $$mb\lambda+\mu c=0.$$

Eliminând pc λ şi μ între ecuaţiile (3) şi (4), se obţine ecuaţia suprafeţei căutate

$$zcy+zxm(b-c)-bcy=0,$$

şi este de ordinul al doilea.

III. *Suprafaţă născută de o dreaptă mobilă, paralelă cu un plan fix şi care întâlneşte două drepte fixe.* Să luăm ca plan xOy planul (P), ca axă Oz dreapta fixă (D_1), ca plan xOz planul dus prin (D_1) paralel cu (D_2), ca axă Oy dreapta ce uneşte punctele de intersecţie ale planului (P) cu (D_1) şi (D_2). Ecuaţiile dreptelor (D_1) şi (D_2) sunt (Fig. 312)

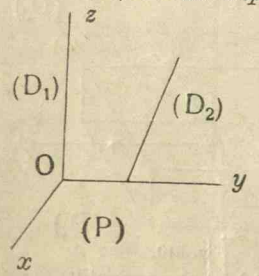


Fig. 312.

$$(D_1)\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \quad (D_2)\begin{cases} y=a, \\ z=mx. \end{cases}$$

O dreaptă mobilă ce întâlneşte pe (D_2) şi e paralelă cu xOy, este la intersecţia a două plane, unul ce trece prin (D_2), şi altul paralel cu xOy;

ecuațiile dreptei sunt de forma

(5) $$z-mx+\lambda(y-a)=0,\ z=\mu,$$

λ și μ fiind arbitrare. Condiția ca să întâlnească dreapta (D_t) este

(6) $$\mu-\lambda a=0.$$

Eliminând λ și μ între ecuațiile (5) și (6), se găsește ecuația suprafeței căutate

$$yz-amx=0,$$

care este de ordinul al doilea.

244. **Cilindre.** I. Un cilindru este o suprafață născută de o dreaptă variabilă, care rămâne paralelă cu o direcție dată și care mai este supusă la altă condiție, cum ar fi, de ex., să întâlnească o directoare dată, sau să rămâe tangentă la o suprafață dată.

Să presupunem că direcția dată este definită prin intersecția planelor $P=0$, $Q=0$. Planele

(7) $$P=\lambda,\ Q=\mu,$$

definesc, când λ și μ variază, o paralelă la direcția dată. Exprimând că această dreaptă variabilă este supusă la o condiție dată, se găsesc relația

(8) $$f(\lambda,\ \mu)=0.$$

De ex., când această generatoare trebue să întâlnească o directoare fixă,

(9) $$F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0,$$

se va forma condiția (8), eliminând x,y,z între ecuațiile (7) și (9).

Pentru a avea ecuația cilindrului, se elimină λ și μ între ecuațiile (7) și (8), și se obține

(10) $$f(P,\ Q)=0.$$

Reciproc, să considerăm o ecuație de forma (10), adică o relație între două funcțiuni lineare P și Q, astfel cu planele $P=0$, $Q=0$ să nu fie paralele; vom arăta că această ecuație reprezintă un cilindru. In adevăr se obține ecuația (10) eliminând λ și μ între ecuațiile

$$P=\lambda,\ Q=\mu,\ f(\lambda,\mu)=0.$$

Suprafața este deci născută de o dreaptă variabilă, ale cărei ecuații sunt $P=\lambda$, $Q=\mu$, care este paralelă cu dreapta fixă $P=0$, $Q=0$ și care mai este supusă la condiția $f(\lambda,\mu)=0$. Această suprafață este deci un cilindru, conform definiției.

II. *Să se afle ecuația unui cilindru ale cărui generatoare sunt paralele cu dreapta de parametrii directori* $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, *iar ca directoare curba*

$$f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0.$$

Pentru ca o dreaptă să aparţină la un cilindru, trebue să fie paralelă cu direcţia dată şi să întâlnească directoarea. Un punct oarecare al acestei drepte are cooordonatele $x+\alpha\rho$, $y+\beta\rho$, $z+\gamma\rho$; acest punct va fi pe directoare dacă avem ecuaţiile

$$f(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho)=0,\quad g(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho)=0.$$

Vom avea deci ecuaţia cilindrului, eliminând pe ρ între aceste ecuaţii.

Exemplu. Să se afle ecuaţia cilindrului a cărui directoare este curba $f(x,y)=0$ în planul xOy, iar generatoarele paralele cu dreapta $x=mz$, $y=nz$. Ecuaţiile generatoarei sunt

(11) $$x=mz+\lambda,\quad y=nz+\mu.$$

Această dreaptă tae planul xOy în punctul (λ,μ) şi deci întâlneşte directoarea, dacă

(12) $$f(\lambda,\mu)=0.$$

Eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (11) şi (12), avem ecuaţia cilindrului

$$f(x-mz,\ y-nz)=0.$$

III. *Planul tangent la cilindru într'un punct este acelaş în toate puuctele generatoarei punctului de contact.* Să luăm ca axă Oz o paralelă la generatoare; atunci ecuaţia cilindrului este

$$f(x,y)=0,$$

iar ecuaţia planului tangent într'un punct $M(x_0,y_0,z_0)$ este

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}=0$$

Se vede că dacă M se deplasează pe generatoarea $x=x_0$, $y=y_0$, ecuaţia planului tangent nu se schimbă.

IV. *Ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare suut paralele cu direcţia* (α,β,γ) *circumscris suprafeţei* $f(x,y,z)=0$. (x,y,z) fiind un punct al unei generatoare, un punct oarecare al acestei generatoare (Fig. 313) are coordonatele

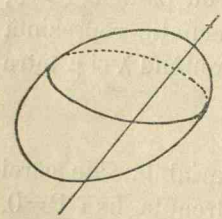


Fig. 313.

$$x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho.$$

Punctele de intersecţie ale acestei drepte cu suprafaţa sunt date de

(13) $$f(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho)=0.$$

Ca dreapta să fie tangentă la suprafaţă, trebue ca ecuaţia (13) să aibă o rădăcină dublă în ρ, adică ecuaţia (13) şi

(14) $$\frac{\partial f}{\partial\rho}=0$$

să aibă o rădăcină comună. Eliminând pe ρ între ecuaţiile (13) şi (14) se obţine ecuaţia cilindrului.

245. **Con.** I. Un con este o suprafață născută de o dreaptă care trece printr'un punct fix, numit vârf și care mai este supusă la altă condiție. Dacă vârful S al conului este la intersecția planelor $P=0$, $Q=0$, $R=0$, care au un singur punct comun, planele

$$P=\lambda R,\quad Q=\mu R, \tag{15}$$

care trec prin S, definesc, când λ și μ sunt arbitrari, o dreaptă oarecare ce trece prin S. Exprimând că această dreaptă mai este supusă la altă condiție, se găsește relația

$$f(\lambda, \mu)=0. \tag{16}$$

Ecuația conului se obține eliminând pe λ și μ între ecuațiile (15) și (16) și avem

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right)=0, \tag{17}$$

care este o relație omogenă $F(P, Q, R)=0$, între P, Q, R.

Reciproc, fie $F(P, Q, R)=0$ o ecuație omogenă între trei funcțiuni lineare, P, Q, R, astfel că planele $P=0$, $Q=0$, $R=0$, să se tae în același punct și unul singur. Vom arăta că această ecuație reprezintă un con. In adevăr, orice ecuație omogenă poate fi pusă sub forma (17) și o obținem eliminând λ și μ între ecuațiile

$$P=\lambda R \quad Q=\mu R, \quad f(\lambda, \mu)=0.$$

Suprafața este deci născută de o dreaptă variabilă, $P=\lambda R$, $Q=\mu R$, care trece necontenit prin punctul de intersecție al celor trei plane, $P=0$, $Q=0$, $R=0$, și care mai este supusă la condiția $f(\lambda, \mu)=0$. Această suprafață este deci un con.

Observare. Dacă vârful conului este punctul (x_0, y_0, z_0), ecuațiile planelor P, Q, R, care trec prin vârful conului, pot fi $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, astfel că ecuația conului este de forma

$$f(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0.$$

In particular, o ecuație

$$f(x, y, z)=0,$$

omogenă în raport cu x, y, z, reprezintă un con cu vârful în origină.

II *Ecuația unui con cu vârful în origină și trecând prin curba de intersecție a două suprafețe.* Să considerăm curba (C), intersecția suprafețelor

$$f(x, y, z)=0,\ g(x, y, z)=0.$$

Un punct (x_1, y_1, z_1) al acestei curbe verifică ecuațiile

$$f x_1, y_1, z_1)=0,\ g(x_1, y_1, z_1)=0. \tag{18}$$

Un punct oarecare (x, y, z) al dreptei care unește origina cu punctul (x_1, y_1, z_1) are coordonate ce verifică ecuațiile

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = t$$

Inlocuind în (18) pe x_1, y_1, z_1 cu valorile lor deduse din aceste ecuații,

$$x_1 = \frac{x}{t}, \quad y_1 = \frac{y}{t}, \quad z_1 = \frac{z}{t},$$

se obține

$$f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0, \quad g\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0,$$

de unde eliminând pe t, avem ecuația conului.

Deci, ecuația acestui con se obține făcând ecuațiile curbei (18) omogene cu ajutorul variabilei t și apoi eliminând pe t între aceste două ecuații.

Exemplu. Să presupunem că cele două suprafețe sunt sfera $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ și cilindrul $x^2+y^2-ax=0$. Făcând aceste ecuații omogene, devin

$$x^2+y^2+z^2-2axt=0, \quad x^2+y^2-axt=0,$$

de unde eliminând pe t, se obține ecuația conului

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

3°. *Ecuația conului cu vârful într'un punct dat* $S(x_0, y_0, z_0)$ *și tangent suprafeței* $f(x, y, z)=0$. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare al unei generatoare a conului; un punct oarecare al dreptei MS are coordonate de forma

$$\frac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}, \quad \frac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}, \quad \frac{z_0+\lambda z}{1+\lambda}.$$

Punctele de intersecție ale dreptei MS cu suprafața sunt date de

$$f\left(\frac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}, \frac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}, \frac{z_0+\lambda z}{1+\lambda}\right) = 0.$$

care este de forma

$$F(\lambda)=0. \tag{19}$$

Ca dreapta MS să fie tangentă la con, trebue ca ecuația (19) să aibă o rădăcină dublă în λ, adică ecuațiile (19) și

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \tag{20}$$

să aibă o rădăcină comună. Eliminând pe λ între ecuațiile (19) și (20) se obține ecuația conului.

Exemplu. Dacă suprafața $f(x, y, z)=0$ este sfera $x^2+y^2+z^2-2az=0$, avem

$$(x_0+\lambda x)^2+(y_0+\lambda y)^2+(z_0+\lambda z)^2-2a(z_0+\lambda z)(1+\lambda)=0.$$

Scriind că această ecuație de gradul al doilea în λ admite o rădăcină dublă, avem ecuația conului

$$(x^2+y^2+z^2-2az)(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2az_0)-[xx_0+yy_0+zz_0-a(z+z_0)]^2=0.$$

4°. *Planul tangent într'un punct al unui con este același în toate punctele generatoarei punctului de contact.* Să luăm origina ca vârf al conului; ecuația conului este $f(x, y, z)=0$, f fiind o funcțiune omogenă în raport cu x, y, z. Ecuația planului tangent în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+(z-z_0)f'_{z_0}=0.$$

Dar f fiind omogenă şi de gradul m, de ex., avem după teorema lui Euler, $x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}=mf(x_0, y_0, z_0)=0$, aşa că ecuaţia planului tangent la con în (x_0, y_0, z_0) este $xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0$.

Funcţiunea f fiind omogenă şi de gradul m, se ştie că derivatele sale parţiale, f'_x, f'_y, f'_z sunt omogene şi de gradul $(m-1)$; ecuaţia planului tangent nu se va schimba deci când se va deplasa punctul M pe generatoarea OM, căci coordonatele x_0, y_0, z_0 variază proporţional şi tot proporţionale sunt şi funcţiunile omogene şi de acelaş grad $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$.

246. **Conoizi.** Se numeşte conoid suprafaţa născută de o dreaptă variabilă paralelă cu un plan fix numit plan director, care întâlneşte o dreaptă fixă şi supusă de altfel la altă condiţia. Fie $P=0$, ecuaţia planului director şi $Q=0$, $R=0$ ecuaţiile dreptei fixe. Planele

$$P=\lambda,\quad Q=\mu R, \tag{21}$$

definesc, când λ şi μ variază, o dreaptă paralelă cu planul director şi care întâlneşte directoarea fixă. Exprimând că dreapta variabilă este supusă şi la altă condiţie dată, se găseşte relaţia

$$f(\lambda,\mu)=0. \tag{22}$$

Eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (21) şi (22), se obţine ecuaţia conoidului

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right)=0. \tag{23}$$

Reciproc, se stabileşte, ca şi pentru cilindru şi con, că orice ecuaţie de forma (23) reprezintă un conoid.

In particular, când se ia ca directoare rectilinie Oz, şi planul xOy ca plan director, ecuaţia (23) este de forma

$$f\left(z, \frac{y}{x}\right)=0.$$

Un exemplu de astfel de suprafaţă am întâlnit, când am determinat ecuaţia suprafeţei născute de o dreapţă paralelă cu un plan fix şi care întâlneşte două drepte fixe.

Un alt exemplu de suprafaţă conoid este *elicoidul cu plan director*. Fiind dată o elice pe un cilindru de rotaţie, se zice elicoid cu plan director, conoidul născut de o dreaptă care întâlneşte elicea şi axa cilindrului şi care rămâne perpendiculară pe axă. Ecuaţiile elicei fiind

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt, \tag{24}$$

ecuaţiile unei drepte paralele cu planul xOy şi care întâlneşte pe Oz, sunt

$$z=\lambda,\ y=\mu x. \tag{25}$$

Scriind că această dreaptă întâlneşte elicea, avem, pentru aceeaş valoare a lui t,

$$kt=\lambda,\ \sin t=\mu\cos t,$$

de unde eliminând pe t,

$$\mu=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{k}. \tag{26}$$

Ecuaţia conoidului se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (25) şi (26), de unde

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{k}.$$

Să observăm că această ecuaţie este independentă de raza R a cilindrului, şi deci suprafaţa rămâne aceeaş dacă se substitue elicei date altă elice, de acelaş pas, $h=2\pi k$, trase pe cilindrii de rotaţie în jurul lui Oz. Cu alte cuvinte, intersecţia elicoidului cu un cilindru oarecare de rotaţie în jurul lui Oz este o elice.

247. **Suprafeţe de rotaţie** (axe perpendiculare). I. Se zice suprafaţă de rotaţie suprafaţa născută prin rotaţia unei curbe în jurul unei axe de care este invariabil legată. Fiecare punct M al curbei generatoare (G) descrie un cerc, al cărui plan este perpendicular pe axa (Δ) şi al cărui centru este pe (Δ); acest cerc este un paralel al suprafeţei. Dacă se tae suprafaţa prin plane ce trec prin axă, secţiunile sunt egale între ele şi se numesc meridianele suprafeţei.

Putem, de asemenea, considera suprafaţa de rotaţie ca născută de un cerc variabil, al cărui centru descrie o dreaptă fixă (Δ), al cărui plan rămâne perpendicular pe (Δ), şi care mai întâlneşte generatoarea dată (G), sau, în general, supusă la altă condiţie.

Să definim axa suprafeţei de rotaţie prin punctul $A(a,b,c)$ şi parametrii săi directori (p,q,r). Orice paralel al suprafeţei poate fi considerat la intersecţia unei sfere variabile cu centrul în A şi a unui plan perpendicular pe axă. Ecuaţiile paralelului sunt deci de forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\lambda,\ px+qy+rz=\mu, \tag{27}$$

λ şi μ fiind doi parametrii variabili. Exprimând că acest paralel întâlneşte generatoarea (G), se găseşte relaţia

$$f(\lambda,\mu)=0. \tag{28}$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie se obţine eliminând λ şi μ între ecuaţiile (27) şi (28) şi este

$$f[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,\ px+qy+rz]=0. \tag{29}$$

Reciproc, să considerăm o ecuaţie de forma $F(S,P)=0$, adică o relaţie între două funcţiuni S şi P, $S=0$ fiind ecuaţia unei sfere şi $P=0$ ecuaţia unui plan; această ecuaţie reprezintă o suprafaţă

de rotaţie, căci, punând în evidenţă centrul (a,b,c) al sferei, avem

$$S \equiv (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-k,\quad P \equiv px+qy+rz+h,$$

şi această ecuaţie devine

$$F[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-k,\ px+qy+rz+h]=0,$$

şi este de forma (29). Raţionând ca şi pentru cilindru şi con, se vede că este o suprafaţă de rotaţie.

Exemple. 1°. *Cilindru de rotaţie.* Un cilindru de rotaţie este născut de o dreaptă care se învârteşte în jurul unei axe paralelă, distanţa între dreaptă şi axă rămânând aceeaş care de altfel este raza cilindrului. Însemnând cu R raza cilindrului şi cu

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$

ecuaţiile axei, pentru a exprima că punctul $M(x,y,z)$ este pe cilindru, este destul a scrie că distanţa sa la axă este egală cu R. Se găseşte ecuaţia cilindrului.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\frac{[p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)]^2}{p^2+q^2+r^2}-R^2=0.$$

Un cilindru de rotaţie este deci o suprafaţă de ordinul al doilea.

2°. *Con de rotaţie.* Un con de rotaţie e definit prin jumătatea unghiului de la vârf, α, vârful său $S(a,b,c)$ şi axa sa de parametrii directori p, q, r. Pentru a exprima că punctul $M(x,y,z)$ este pe con, este destul a scrie că unghiul dreptelor MS şi Δ este egal cu α. Se găseşte astfel ecuaţia conului

$$\cos\alpha=\pm\frac{p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)\,[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}}$$

şi ridicând la pătrat şi ordonând,

$$(p^2+q^2+r^2)\cos^2\alpha[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]-[p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)]^2=0.$$

Se vede că un con de rotaţie este o suprafaţă de ordinul al doilea.

II. *Suprafeţe de rotaţie în jurul axei* Oz. 1°. Axa suprafeţei fiind Oz, ecuaţiile paralelului sunt

$$x^2+y^2+z^2=\rho,\quad z=\mu,$$

sau

$$x^2+y^2=\lambda,\quad z=\mu.$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie în jurul lui Oz este deci de forma

$$f(x^2+y^2,\ z)=0,$$

sau

$$x^2+y^2=\varphi(z),\quad z=\psi(x^2+y^2).$$

Exemplu. Suprafaţa strâmbă de rotaţie este născută de o dreaptă care se învârteşte în jurul unei axe de care este invariabil legată. Fie (D) o poziţie oarecare a dreptei; să luăm ca axe perpendiculare (Fig. 314), axa de rotaţie ca axă Oz şi Ox perpendiculara comună lui Oz şi (D). Ecuaţiile dreptei (D), intersecţia a două plane, unul perpendicular pe Ox, celalt trecând prin Ox, sunt

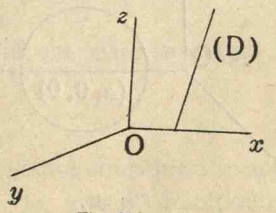


Fig. 314.

(30) $\qquad x=a,\ y=mz.$

Un paralel al suprafeței este definit de ecuațiile

$$x^2+y^2=\lambda,\quad z=\mu. \tag{31}$$

Pentru a exprima că acest paralel întâlnește dreapta (D), vom elimina pe x, y, z între ecuațiile (30) și (31), obținem deci

$$a^2+m^2\mu^2=\lambda. \tag{32}$$

Ecuația suprafeței strâmbe de rotație se obține eliminând pe λ și μ între ecuațiile (31) și (32) și este

$$x^2+y^2-m^2z^2=a^2. \tag{33}$$

Tăind-o cu planul xz ($y=0$), se obține ecuația meridianei

$$x^2-m^2z^2=a^2,$$

care este o iperbolă, având Oz ca axă netransversă. Se poate deci considera suprafața ca născută prin învârtirea acestei iperbole în jurul axei netransverse și se mai numește *iperboloid de rotație cu o pânză.*

2°. *Să se găsească ecuația unei suprafețe de rotație în jurul lui* Oz, *cunoscând meridiana.* Insemnând cu

$$F(x, z)=0 \tag{34}$$

ecuația meridianei în planul xOz, un paralel oarecare are ecuațiile

$$x^2+y^2=\lambda,\quad z=\mu. \tag{35}$$

Acest paralel tae planul xz în punctele de coordonate $x=\pm\sqrt{\lambda}$, $y=0$, $z=\mu$; paralelul va tăia meridianul, dacă

$$F[\pm\sqrt{\lambda},\ \mu]=0. \tag{36}$$

Eliminând pe λ și μ între ecuațiile (35) și (36), se obține ecuația suprafeței

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

care se obține, înlocuind ecuația meridianei x cu $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Exemplu. Torul este o suprafață născută de un cerc ce se învârtește în jurul unei axe situate în planul său (Fig. 315). Să luăm ca axă Oz, axa de rotație, ca Ox perpendiculara din centrul cercului pe Oz. R fiind raza cercului și a abscisa, ecuațiile cercului din planul xOz sunt

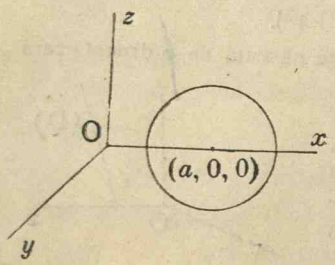


Fig. 315.

$$y=0,\ (x-a)^2+z^2=R^2.$$

Ecuația torului se obține înlocuind pe x cu $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ și este

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=R^2,$$

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0,$$

de unde se vede că torul este o suprafață de ordinul al patrulea.

III. *Planul tangent la o suprafață de rotație într'un punct este perpendicular pe planul meridian ce trece prin acel punct.* Fie M un punct al unei suprafețe de rotație în jurul lui Oz; tangenta MT la paralelul ce trece prin M este perpendiculară pe raza CM a paralelului (Fig. 316) și la axa Oz a suprafeței (pentru că această axă este perpendiculară pe planul paralelului). Tangenta MT este deci perpendiculară pe planul MCz, adică pe planul meridian al lui M; deci planul tangent, care trece prin tangenta MT, este deasemenea perpendicular pe acest plan meridian.

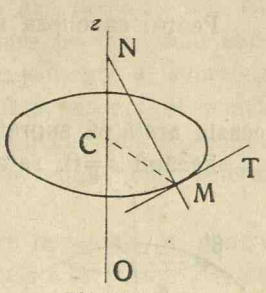


Fig. 316.

III. *Normala la suprafața de rotație întâlnește axa și normalele în toate punctele unui paralel întâlnesc axa în același punct.* Oz fiind axa, ecuația suprafeței este

$$x^2+y^2-g(z)=0.$$

Ecuațiile normalei în (x_0,y_0,z_0) sunt

$$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=\frac{z-z_0}{-g'(z_0)}.$$

Făcând $x=y=0$, avem, din ambele ecuații, $z=z_0+\frac{1}{2}g'(z_0)$, de unde se vede că această normală întâlnește axa. Punctul de întâlnire N având coordonatele $0,0,z_0+\frac{1}{2}g'(z_0)$, se vede că depinde numai de z_0 și deci rămâne același când $M(x_0,y_0,z_0)$ descrie paralelul său.

Suprafețe de ordinul al doilea. Cuadrice.

248. Suprafețele de ordinul al doilea sunt reprezentate de ecuația

(1) $f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$

Aceste suprafețe se numesc cuadrice.

Inainte de a studia ecuația generală, vom studia câteva cazuri simple ale acestei ecuații

249. **Elipsoidul.** Să considerăm ecuația

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

și pentru a vedea natura acestei suprafețe, o vom tăia cu plane paralele cu unul din planele de coordonate.

Tăind suprafața cu planul $z=z_0$, paralel cu xOy, se obține

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2},$$

ecuație care reprezintă ecuația secțiunei în planul considerat $z=z_0$. Această curbă estă o elipsă, cu centrul pe Oz, având direcțiunile axelor de coordonate Ox, Oy, iar mărimile lor sunt (Fig. 317).

$$\alpha\alpha'=2a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}},\ \beta\beta'=2b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Pentru ca elipsa să fie reală trebue ca

$$1-\frac{z_0^2}{c^2}>0,\ -c<z_0<c.$$

Aceasta arată că suprafaţa este cuprinsă între planele $z=c$, $z=-c$.

Făcând $z=0$, se obţine intersecţia cu planul xOy, adică elipsa

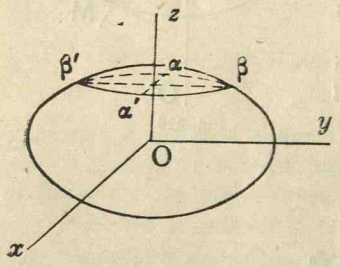


Fig. 317.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Dacă z_0 creşte axele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ale elipsei de secţiune descresc, astfel că pentru planul $z=c$, elipsa se reduce la un punct,

Intersecţia suprafeţei cu planul xOz este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{4}$$

Elipsa $\alpha\alpha'\beta\beta'$ întâlneşte necontenit această curbă şi suprafaţa poate fi definită de elipsa de secţiune $\alpha\alpha'\beta\beta'$, care se mişcă paralel rămânând asemenea cu ea însăşi şi sprijinindu-se pe elipsa (4).

In mod analog, se vede că suprafaţa este cuprinsă între planele $x=a$, $x=-a$, şi $y=b$, $y=-b$. Această suprafaţă închisă se numeşte elipsoid (Fig. 318).

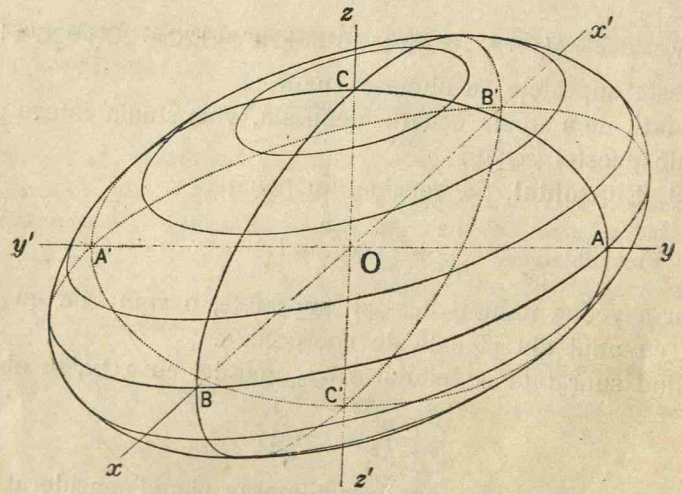


Fig. 318.

Suprafaţa este simetrică în raport cu planele de coordonate; în adevăr, schimbând pe z în $-z$, ecuaţia elipsoidului este verificată,

deci, suprafaţa este simetrică în raport cu planul xOy. Deci, planele de coordonate sunt plane de simetrie. Axele de coordonate sunt axe de simetrie. De ex., axa Ox este axă de simetrie, căci secţiunile suprafeţei cu planele perpendiculare pe Ox, sunt elipse cu centrele pe Ox. Origina este centrul de simetrie al suprafeţei, căci dacă punctul (x, y, z) este pe suprafaţă, atunci şi punctul $(-x, -y, -z)$ verifică ecuaţia suprafeţei, aparţine deci elipsoidului. Mărimile axelor de simetrie, adică lungimile segmentelor determinate pe cele trei axe, sunt $2a$, $2b$, $2c$.

Dacă $a \neq b \neq c$, elipsoidul se zice cu axe neegale şi se pune de obicei $a > b > c$. Dacă $a = b \neq c$, secţiunile paralele cu planul xOy sunt cercuri, cu centrele pe Oz; ecuaţia suprafeţei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

şi este un elipsoid de rotaţie în jurul lui Oz. Dacă $a = b = c$, elipsoidul se reduce la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

250. **Iperboloidul cu o pânză.** Sa considerăm suprafaţa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Tăind-o cu plane $z = z_0$, paralele cu xOy, se obţine elipsa.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}, \tag{5}$$

cu centrul pe Oz, cu axele paralele cu Ox şi Oy. Cea mai mică din aceste elipse este aceea care corespunde lui $z = 0$, adică elipsa din planul xOy. Când planul de secţiune se deplasează, elipsa de secţiune creşte necontenit şi devine infinit de mare pentru $z_0 = \infty$ (Fig. 319).

Tăind suprafaţa cu planul $xOz (y = o)$, se obţine iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{6}$$

având pe Ox ca axă transversă. Suprafaţa poate fi născută de elipsa (5), care se deplasează paralel, rămânând asemenea cu ea însăşi şi rezemându-se pe iperbola (6). Suprafaţa se întinde la infinit şi in sus şi în jos, formând o singură pânză şi se zice iperboloid cu o pânză.

Se vede că planele de coordonate sunt plane de simetrie, axele de coordonate, axe de simetrie; iar origina, centrul de simetrie al suprafeţei.

Elipsa din planul xOy se zice *elipsa colier* a suprafeţei (Fig. 320).

Tăind conul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

și iperboloidul cu planul $z=z_0$, avem elipsele

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}.$$

Diferența dintre axele mari ale acestor elipse este

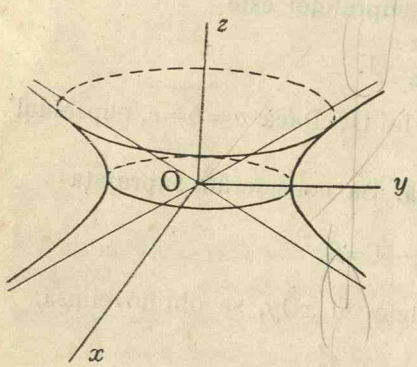


Fig. 319.

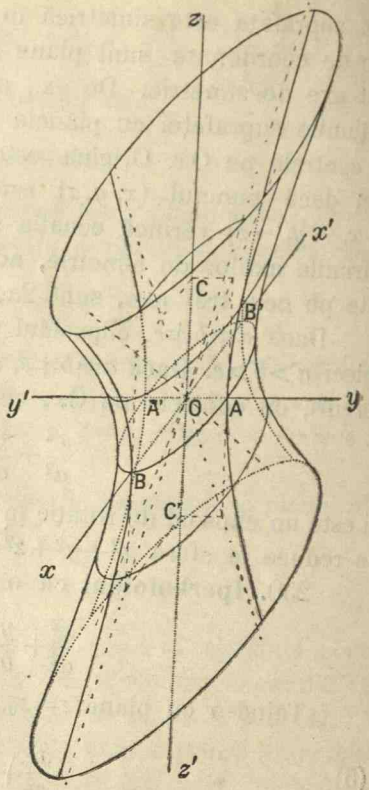


Fig. 320.

$$a\left(\sqrt{1+\frac{z_0^2}{c^2}}-\frac{z_0}{c}\right)=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{z_0^2}{c^2}}+\frac{z_0}{c}},$$

iar când $z_0\to\infty$, această diferență tinde către zero. Tot astfel se vede că diferența dintre axele mici ale acestor elipse tinde către zero, când $z_0\to\infty$. Deci, când $z_0\to\infty$, elipsele de secțiune ale conului și iperboloidului se confundă.

Deci, conul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

se bucură de proprietatea că la infinit, ramurile sale se confundă cu ale iperboloidului, de aceea se numește con asimptotic al suprafeței.

251. **Iperboloidul cu două pânze.** Să considerăm suprafața

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Tăind-o cu plane $x=x_0$, paralele cu yOz, se obţine elipsa (Fig. 321) de secţiune, (E),

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-1,$$

care este reală dacă $\frac{x_0^2}{a^2}-1>0$, $-a>x_0>a$. Deci, suprafaţa nu există în regiunea limitată de planele $x=a$, $x=-a$.

Tăind suprafaţa cu planul xOz, se obţine iperbola (I),

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Suprafaţa poate fi născută de elipsa (E), care se deplasează paralel şi asemeneă cu ea însăşi, rezemându-se pe iperbola (I). Se obţin, astfel, două pânze, iar suprafaţa se zice iperboloidul cu două pânze.

Axa Ox este transversă, celelalte Oy, Oz (Fig 321), sunt axe netransverse; O este centrul de simetrie.

Conul

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

este con asimptotic al suprafeţei, care se găseşte în interiorul acestui con Fig. 322).

Iperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

se găseşte în exteriorul conului asimptotic, pe când iperboloidul cu două pânze în interior. Aceşti doi iperboloizi se zic iperboloizi conjugaţi.

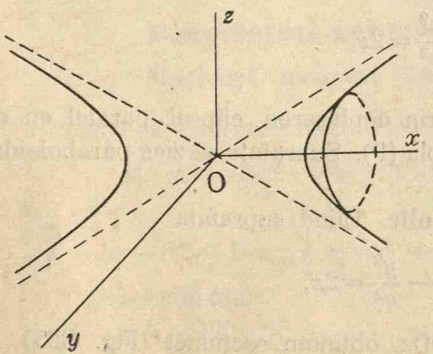


Fig. 321.

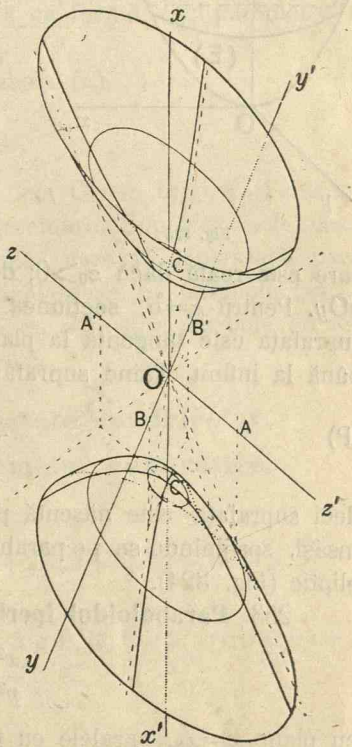


Fig. 322.

252. **Paraboloidul eliptic.** Tăind suprafața

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$$

cu plane $z=z_0$, paralele cu xOy, se obțin elipse (Fig. 323)

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z_0$$

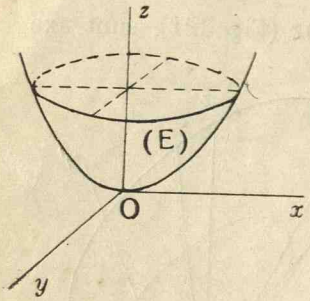


Fig. 323

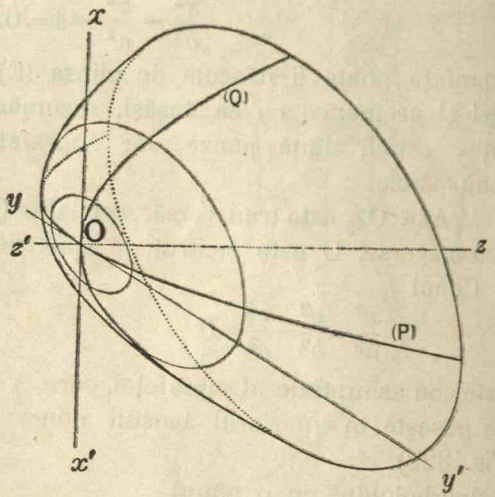


Fig. 324.

care este reală dacă $z_0>0$; deci suprafața este deasupra planului xOy. Pentru $z=0$, secțiunea se reduce la un singur punct, deci suprafața este tangentă la planul xOy. Când z_0 crește, elipsa crește până la infinit. Tăind suprafața cu planul xOz, se obține parabola

(P) $$\frac{x^2}{p^2}=2z,$$

deci suprafața este născută prin deplasarea elipsei, paralel cu ea însăși, sprijinindu-se pe parabola (P). Suprafața se zice paraboloidul eliptic (Fig. 324).

253. **Paraboloidul iperbolic.** Tăind suprafața

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z,$$

cu plane $x=x_0$, paralele cu yOz, obținem secțiunea (Fig. 325)

$$\frac{y^2}{q^2}=-2\left(z-\frac{x_0^2}{2p^2}\right),$$

care este o parabolă cu axa, dreapta MP, paralelă cu Oz, al cărei vârf se găsește pe această dreaptă la distanța $MP=\frac{x_0^2}{2p^2}$ de axa Ox, așezată în jos (Fig. 325), înspre partea negativă a axei Oz, căci semnul din membrul al doilea este $-$. Când x_0 variază, această parabolă variază paralel cu ea însăși, dar rămâne invariabilă ca formă, căci parametrul său este egal cu q^2, independent de x_0.

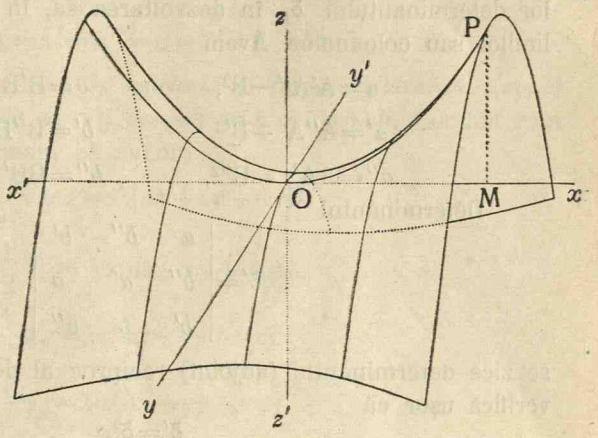


Fig. 325.

Făcând $y=0$, se găsește parabola (π),

$$\frac{x^2}{p^2}=2z,$$

situată în planul xOz, tangentă la axa Ox în origină și deasupra ei. Această parabolă este curba directoare. Suprafața este născută de o parabolă de mărime invariabilă, care se deplasează paralel cu ea însăși, iar vârful său P se deplasează pe parabola (π).

Secțiunile prin plane paralele cu xOy sunt iperbole de aceea suprafața se zice paraboloid iperbolic.

Proprietăți generale ale cuadricelor. Noțiuni asupra formelor cuadratice.

254. Fie forma cuadratică

$$\varphi(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy,$$

și

$$\frac{1}{2}\varphi'_x=Ax+B''y+B'z,\quad \frac{1}{2}\varphi'_y=B''x+A'y+Bz,\quad \frac{1}{2}\varphi'_z=B'x+By+A''z.$$

Determinantul

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2$$

se zice discriminantul formei cuadratice $\varphi(x,y,z)$.

Să notăm cu a,a',a'',b,b',b'' minorii corespunzători elementelor determinantului δ, în dezvoltarea sa, în raport cu elementele liniilor sau coloanelor. Avem

$$a=A'A''-B^2, \qquad b=B'B''-AB,$$
$$a'=A''A-B'^2, \qquad b'=B''B-A'B',$$
$$a''=AA'-B''^2, \qquad b''=BB'-A''B'',$$

Determinantul

$$\delta'=\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

se zice determinantul (adjoint) reciproc al determinantului δ și se verifică ușor că

$$\delta'=\delta^2,$$

că minorii lui δ' sunt legați de elementele lui δ prin formulele următoare

$$(1)\quad \begin{cases} a'a''-b^2=A\delta, & b'b''-ab=B\delta, \\ a''a-b'^2=A'\delta, & b''b-a'b'=B'\delta, \\ aa'-b''^2=A''\delta, & bb'-a''b''=B''\delta. \end{cases}$$

255. *Dacă avem în același timp*

$$\delta=0,\ a+a'+a''=0,$$

toți minorii lui δ *sunt nuli.* In adevăr, dacă $\delta=0$, formulele (1) dau

$$a'a''-b^2=0,\ a''a-b'^2=0,\ aa'-b''^2=0.$$

Ridicând la pătrat relațiunea $a+a'+a''=0$, avem

$$a^2+a'^2+a''^2+2a'a''+2a''a+2aa'=0.$$

Inlocuind pe $a'a''$, $a''a$, aa' cu b^2, b'^2, b''^2, obținem

$$a^2+a'^2+a''^2+2b^2+2b'^2+2b''^2=0,$$

de unde se deduc

$$a=a'=a''=b=b'=b''=0.$$

Deci, dacă toți minorii lui δ nu sunt nuli, este atunci cel puțin un minor dintre a,a',a'' (minorii principali) diferit de zero.

256. *Dacă toți minorii lui* δ *sunt nuli și avem și* $A+A'+A''=0$, *toate elementele lui* δ *snnt nule.* Avem, prin ipoteză,

$$A'A''-B^2=0,\ A''A-B'^2=0,\ AA'-B''^2=0.$$

Ridicând la pătrat pe $A+A'+A''=0$, înlocuind pe $A'A''$, $A''A$, AA' cu B^2, B'^2, B''^2, obținem

$$A^2+A'^2+A''^2+2B^2+2B'^2+2B''^2=0,$$

de unde urmează

$$A=A'=A''=B=B'=B''=0.$$

257. *Condiția necesară și suficientă ca forma cuadratică* $\varphi(x,y,z)$ *să fie pătrat perfect este ca toți minorii lui* δ *să fie nuli.* Condiția este necesară. Să presupunem că avem

$$\varphi(x,y\,z)\equiv\lambda(ux+vy+wz)^2,$$

de unde

$$\frac{1}{2}\varphi'_x=\lambda u(ux+vy+wz),$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_y=\lambda v(ux+vy+wz),$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_z=\lambda w(ux+vy+wz).$$

Derivatele parțiale $\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z$ având coeficienții lor proporționali, toți minorii de ordinul întâi ai lui δ sunt nuli.

Condiția este suficientă. Dacă toți minorii lui δ sunt nuli, derivatele parțiale $\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z$ au coeficienții proporționali și avem

$$\varphi'_x=\alpha P,\quad \varphi'_y=\beta P,\quad \varphi'_z=\gamma P,\ P=ux+vy+wz.$$

Formula lui Euler dă

$$2\varphi(x,y,z)=x\varphi'_x+y\varphi'_y+z\varphi'_z=(\alpha x+\beta y+\gamma z)P,$$

$$2\varphi(x,y,z)=P.Q,\ Q=\alpha x+\beta y+\gamma z.$$

De unde $$2\varphi'_x=\alpha P+uQ,$$

unde, înlocuind pe φ'_x cu αP, rezultă

$$\alpha P\equiv uQ,\ Q\equiv\frac{\alpha}{u}P,$$

deci $$2\varphi(x,y,z)\equiv\frac{\alpha}{u}P^2,$$

deci φ este un pătrat perfect.

Am presupus $u\neq 0$. Dacă $u=0$, derivăm pe $2\varphi(x,y,z)=P.Q$ în raport cu y sau z.

258. *Condiția necesară și suficientă ca* $\varphi(x,y,z)$ *să se descompue într'o sumă algebrică de două pătrate a două forme lineare independente este ca* δ *să fie nul și că unul cel puțin din minorii săi să fie diferit de zero.* Condiția este necesară. Să presupunem că

$$\varphi(x,y,z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2,\ P=ux+vy+wz,\ Q=px+qy+rz,$$

P și Q fiind două forme lineare independente. Luând derivatele parțiale a celor doi membrii, în raport cu x,y,z, avem

$$\frac{1}{2}\varphi'_x = \alpha u P + \beta p Q, \quad \frac{1}{2}\varphi'_y = \alpha v P + \beta q Q, \quad \frac{1}{2}\varphi'_z = \alpha w P + \beta r Q.$$

Dar există valori nu toate nule ale lui x,y,z care anulează P şi Q şi deci şi pe $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$ de unde $\delta = 0$.

Mai mult, formele P,Q sunt distincte, unul cel puţin din determinanţii

$$\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v & w \\ q & r \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w & u \\ r & p \end{vmatrix}$$

este diferit de zero şi fie

$$\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0.$$

In acest caz, ecuaţiile $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$ nu pot fi verificate decât de valorile care anulează $P=0$, $Q=0$. Dar, cum acestea n'au de cât un singur sistem de soluţii, va fi de asemenea şi despre ecuaţiile $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$, şi prin urmare, există cel puţin un minor de primul ordin al lui δ care nu este nul.

Condiţia este suficientă. Să presupunem că $\delta = 0$ şi unul din minorii de primul ordin ai lui δ diferit de zero. Există atunci, conform propoziţii stabilite mai sus (No 255), un minor principal ne nul, de ex., $a = A'A'' - B^2 \neq 0$. Avem

$$\varphi(x+\lambda,\ y+\mu,\ z+\nu) \equiv \varphi(x,y,z) + x\varphi'_\lambda + y\varphi'_\mu + z\varphi'_\nu + \varphi(\lambda,\mu,\nu).$$

Dacă λ,μ,ν verifică ecuaţiile

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi'_\lambda = A\lambda + B''\mu + B'\nu = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_\mu = B''\lambda + A'\mu + B\nu = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_\nu = B'\lambda + B\mu + A''\nu = 0, \end{cases}$$

avem, după formula lui Euler,

$$2\varphi(\lambda,\mu,\nu) = \lambda\varphi'_\lambda + \mu\varphi'_\mu + \nu\varphi'_\nu = 0$$

şi avem

$$(3) \quad \varphi(x,y,z) \equiv \varphi(x+\lambda,\ y+\mu,\ z+\nu).$$

Cum avem $\delta = 0$, $A'A'' - B^2 \neq 0$, se poate rezolva sistemul (2) dând lui λ o valoare arbitrară şi se rezolvă ultimele două ecuaţii în raport cu μ şi ν. Se obţin soluţii de forma $\mu = m\lambda$, $\nu = n\lambda$ şi înlocuind în (3), avem

$$\varphi(x,y,z) \equiv \varphi(x+\lambda,\ y+\mu,\ z+\nu),$$

identitate care are loc oricare ar fi x, y, z, λ. Inlocuind λ cu $-x$, avem

$$\varphi(x,y,z)\equiv\varphi(0,\ y-mx,\ z-nx)=$$
$$A'(y-mx)^2+2B(y-mx)(z-nx)+A''(z-nx)^2,$$
$$\varphi(x,y,z)\equiv A'u^2+2Buv+A''v^2,\ u=y-mx,\ v=z-nx.$$

Dacă A' și A'' nu sunt nuli în același timp, să presupunem $A'\neq 0$; atunci putem scrie

$$\varphi(x,y,z)\equiv\frac{1}{A'}(A'u+Bv)^2-\frac{B'v^2}{A'}+A''v^2,$$

sau

$$\varphi(x,y,z)\equiv\frac{1}{A'}(A'u+Bv)^2+\frac{av^2}{A''},$$

și se vede că cele două forme $A'u+Bv$ și v, sunt distincte.

Dacă $A'=0$, $A''=0$, presupunem $B\neq 0$ și

$$\varphi(x,y,z)\equiv 2Buv\equiv\frac{B}{2}(u+v)^2-\frac{B}{2}(u-v)^2,$$

și deci propoziția este demonstrată.

259. *Condiția necesară și suficientă ca forma cuadratică $\varphi(x,y,z)$ să se descompue într'o sumă de trei pătrate independente este ca discriminantul δ să fie diferit de zero.* Condiția este necesară. In adevăr, să presupunem că avem

$$\varphi(x,y,z)=\alpha_1P_1^2+\alpha_2P_2^2+\alpha_3P_3^2,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\neq 0,$$

unde

$$\begin{aligned}P_1&=u_1x+v_1y+w_1z,\\ P_2&=u_2x+v_2y+w_2z,\\ P_3&=u_3x+v_3y+w_3z,\end{aligned}\qquad \delta_1=\begin{vmatrix}u_1&v_1&w_1\\ u_2&v_2&w_2\\ u_3&v_3&w_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Avem

$$(4)\qquad\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi'_x=\alpha_1u_1P_1+\alpha_2u_2P_2+\alpha_3u_3P_3,\\ \frac{1}{2}\varphi'_y=\alpha_1v_1P_1+\alpha_2v_2P_2+\alpha_3v_3P_3,\\ \frac{1}{2}\varphi'_z=\alpha_1w_1P_1+\alpha_2w_2P_2+\alpha_3w_3P_3.\end{cases}$$

Determinantul format cu coeficienții lui P_1,P_2,P_3 în aceste ecuații este egal cu $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_1\neq 0$; deci formele $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$, sunt distincte în același timp ca și formele P_1,P_2,P_3. Dar fiindcă $\delta_1\neq 0$, ecuațiile $P_1=0$, $P_2=0$, $P_3=0$ nu sunt verificate decât pentru $x=y=z=0$ și deci și ecuațiile (4) $\varphi'_x=0$, $\varphi'_y=0$, $\varphi'_z=0$ și prin urmare $\delta\neq 0$.

Condiția este suficientă. Să presupunem $\delta\neq 0$. Vom descompune forma cuadratică $\varphi(x,y,z)$ într'o sumă algebrică de pătrate.

1°. Vom presupune mai întâi că cei trei coeficienți A, A', A'' nu sunt nuli în același timp; fie, de ex., $A \neq 0$. Putem scrie

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2 - \frac{(B''y+B'z)^2}{A} + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz,$$

sau

$$A\varphi(x,y,z) \equiv (Ax+B''y+B'z)^2 + a''y^2 + a'z^2 - 2byz. \tag{5}$$

Dacă a' și a'' nu sunt nule în același timp, de ex., $a' \neq 0$, avem

$$A\varphi(x,y,z) \equiv (Ax+B''y+B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y-bz)^2 - \frac{b^2z^2}{a''} + a'z^2,$$

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2 + \frac{1}{Aa''}(a''y-bz)^2 + \frac{\delta}{a''}z^2,$$

căci $a'a''-b^2=A\delta$.

Am descompus astfel pe $\varphi(x,y,z)$ într'o sumă de trei pătrate ale funcțiunilor

$$Ax+B''y+B'z,\ a''y-b'z,\ z,$$

care sunt independente, căci determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ 0 & a'' & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = Aa'' \neq 0.$$

Dacă cele două numere, a' și a'' sunt nule, b este diferit de zero, căci $a'a''-b^2=A\delta$. Identitatea (5) se mai poate scrie

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2 - \frac{2b}{A}yz,$$

sau

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2 - \frac{b}{2A}(y+z)^2 + \frac{b}{2A}(y-z)^2.$$

Formele sunt distincte, căci determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2A \neq 0.$$

2°. Să presupunem că $A=A'=A''=0$. Avem

$$\varphi(x,y,z) \equiv 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

și cum $\delta = 2BB'B''$ nici unul din numerile B, B'B'' nu poate fi nul. Avem deci

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{2}{B''}(B''x+Bz)(B''y+B'z) - \frac{2BB'}{B''}z^2,$$

$$\varphi(x,y,z)\equiv\frac{1}{2B''}\left[B''x+Bz+B''y+B'z\right]^2-\frac{1}{2B''}\left[B''x-B''y+(B-B')z\right]^2-\frac{2BB'}{B''}z^2.$$

Formele sunt distincte, căci determinantul coeficienţilor

$$\begin{vmatrix} B'' & B'' & B+B' \\ B'' & -B'' & B-B' \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2B''^2\neq 0.$$

Direcţiunile asimptotice ale suprafeţelor de ordinul al doilea.

260. Fie

$$f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

ecuaţia unei cuadrice.

Făcând ecuaţia omogenă, cu ajutorul variabilei t, avem

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cxt+2C'yt+2C''tz+Dt^2=0.$$

Punctele de la infinit ale acestei cuadrice se obţin făcând $t=0$ şi sunt date de ecuaţiile $t=0$ şi

$$(1)\qquad \varphi(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy,$$

a doua reprezentând un con cu vârful în origină, care este conu direcţiilor asimptotice.

I. Să presupunem $\delta\neq 0$. In acest caz, $\varphi(x,y,z)$ se descompune într'o sumă de trei pătrate

$$\varphi(x,y,z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2,$$

α,β,γ fiind numere, iar P, Q, R forme lineare independente, adică determinantul coeficienţilor lui x,y,z în aceste funcţiuni nu este nul.

Această însemnează a spune că planele $P=0$, $Q=0$, $R=0$ au un singur punct comun, origina.

Dacă α,β,γ au acelaş semn, ecuaţia $\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2=0$ n'are de cât soluţia $x=y=z=0$. In acest caz, suprafaţa n'are direcţie asimptotică reală; se zice că acest con este imaginar.

Dacă α,β,γ nu au acelaş semn, conul $\varphi(x,y,z)=0$ este real. Luând ca noi plane de coordonate $P=0$, $Q=0$, $R=0$, ecuaţia conului devine, de ex.,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0.$$

Tăindu-l cu planul $z'=c$, se obţine elipsa (E),

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Conul direcţiilor asimptotice este cu vârful în origină şi cu directoarea elipsa (E); conul este real.

II. Să presupunem că $\delta=0$ şi că unul cel puţin din minorii de ordinul întâi este diferit de zero. Atunci $\varphi(x,y,z)$ se descompune într'o sumă de două pătrate independente

$$\varphi(x,y,z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2.$$

Conul direcţiilor asimptotice se descompune în două plane reale sau imaginare, după cum α şi β au semne contrarii sau acelaş semn.

Dacă cele două plane sunt reale, direcţiunile asimptotice ale suprafeţei sunt toate direcţiile paralele cu aceste două plane. Dacă cele două plane sunt imaginare, suprafaţa are o singură direcţie asimptotică reală, care este paralelă cu intersecţia planelor.

III. Să presupunem acum că toţi minorii lui δ sunt nuli. În acest caz, forma cuadratică $\varphi(x,y,z)$ este pătratul unei funcţiuni lineare, conul direcţiilor asimptotice se reduce la un plan dublu. Toate direcţiile asimptotice ale suprafeţei sunt direcţiile paralele cu acest plan.

Rezultă de aci, 1°. $\delta\neq0$, direcţiile asimptotice formează un con real sau imaginar; 2°. $\delta=0$ şi cel puţin un minor de primul ordin diferit de zero; conul direcţiilor asimptotice se descompune în două plane reale sau imaginare conjugate; 3°. toţi minorii de primul ordin ai lui δ sunt nuli; conul direcţiilor asimptotice se reduce la un plan dublu.

Plane tangente la cuadrice.

261. Planul tangent în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ al cuadricei $f(x,y,z)=0$ este reprezentat de ecuaţia

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+(z-z_0)f'_{z_0}=0,$$

sau

$$(1)\qquad xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}-\left(x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}\right)=0.$$

Făcând funcţiunea $f(x,y,z)$ omogenă cu variabila t, ecuaţia cuadricei devine

$$F(x,y,z,t)=0,$$

şi cum punctul este pe suprafaţă, avem

$$F(x_0,y_0,z_0,t_0)=0,$$

deci

$$x_0F'_{x_0}+y_0F'_{y_0}+z_0F'_{z_0}+t_0F'_{t_0}=2F(x_0,y_0,z_0,t_0)=0;$$

$$x_0F'_{x_0}+y_0F'_{y_0}+z_0F'_{z_0}=-t_0F'_{t_0}.$$

Ecuaţia (1) a planului tangent devine în coordonate omogene

$$\frac{x}{t}\frac{F'_{x_0}}{t_0}+\frac{y}{t}\frac{F'_{y_0}}{t_0}+\frac{z}{t}\frac{F'_{z_0}}{t_0}-\left(\frac{x_0}{t_0}\frac{F'_{x_0}}{t_0}+\ldots\right)=0,$$

$$xF'_{x_0}+yF'_{y_0}+zF'_{z_0}+tF'_{t_0}=0,$$

şi care se reduce la ecuaţia (1) făcând $t=t_0=1$.

Ecuaţia acestui plan tangent se mai scrie

$$x_0F'_x+y_0F'_y+z_0F'_z+t_0F'_t=0$$

şi rezultă că, dacă punctul este la infinit, $t_0=0$, în direcţia (L), ai cărei parametrii directori sunt x_0,y_0,z_0, planul tangent în acel punct este

$$x_0F'_x+y_0F'_y+z_0F'_z=0,$$

şi este un plan tangent la infinit suprafeţei, sau un plan asimptotic relativ la direcţia asimptotică (L).

Observare. Am presupus că F'_{x_0}, F'_{y_0}, F'_{z_0} nu sunt nule în acelaş timp. Dacă sunt nule, din relaţia lui Euler,

$$2F(x_0,y_0,z_0,t_0)=x_0F'_{x_0}+y_0F'_{y_0}+z_0F'_{z_0}+t_0F'_{t_0}=0,$$

rezultă $F'_{t_0}=0$ şi deci punctul (x_0,y_0,z_0,t_0) are coordonate ce verifică ecuaţiile

$$F'_{x_0}=0,\ F'_{y_0}=0,\ F'_{z_0}=0,\ F'_{t_0}=0, \tag{2}$$

şi se zice punct singular.

Să vedem dacă cuadricele au puncte singulare. Fie M_0 un astfel de punct şi M_1 un punct oarecare al spaţiului. Un punct al dreptei M_0M_1 are coordonate de forma

$$x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1,\ t_0+\lambda t_1,$$

şi valorile lui λ corespunzătoare punctelor de intersecţie ale cuadricei cu dreapta sunt date de ecuaţia

$$F(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1,\ t_0+\lambda t_1)=0,$$

$$F(x_0,y_0,z_0,t_0)+\lambda[x_1F'_{x_0}+y_1F'_{y_0}+z_1F'_{z_0}+t_1F'_{t_0}]+\lambda^2F(x_1,y_1,z_1,t_1)=0$$

şi cum avem relaţiile (2), urmează

$$\lambda^2F(x_1,y_1,z_1,t_1)=0,$$

deci cele două valori ale lui λ sunt nule, ambele puncte de intersecţie se confundă cu M_0.

Aşa fiind, să considerăm un punct A pe o suprafaţă de ordinul al doilea, care are un punct dublu M_0; rezultă că dreapta

M_0A tae suprafaţa în trei puncte, deci este în întregime situată pe suprafaţă. Cuadrica se reduce deci la un con. Deci, dintre cuadrice, conul de ordinul al doilea este singura suprafaţă care are un punct singular şi anume vârful său.

262. *Planul tangent într'un punct al cuadricei tae suprafaţa după două drepte reale sau imaginare, distincte sau confundate, trecând prin punctul de contact.* Să luăm origina în punctul de contact şi planul tangent ca planul xOy. Ecuaţia cuadricei este

$$\varphi(x,y,z)+2c''z=0.$$

Planul $z=0$ tae suprafaţa după curba ce are, în raport cu axele Ox, Oy, ecuaţia $\varphi(x,y,0)=0$, sau

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy=0,$$

care reprezintă două drepte ce trec prin origină, reale, imaginare sau confundate.

263. **Ecuaţia tangenţială a unei cuadrice.** Să exprimăm că planul

$$ux+vy+wz+pt=0$$

este tangent la suprafaţa $f(x,y,z,t)=0$. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca ecuaţia să poată fi identificată cu ecuaţia generală a unui plan tangent. De unde

$$\frac{f'_{x_1}}{u}=\frac{f'_{y_1}}{v}=\frac{f'_{z_1}}{w}=\frac{f'_{t_1}}{p}=\rho,$$

sau

$$\begin{aligned}
Ax_1+B''y_1+B'z_1+Ct_1&=\rho u,\\
B''x_1+A'y_1+Bz_1+C't_1&=\rho v,\\
B'x_1+By_1+A''z_1+C''t_1&=\rho w,\\
Cx_1+C'y_1+C''z_1+Dt_1&=\rho p.
\end{aligned}$$

Adăugând şi relaţia

$$ux_1+vy_1+wz_1+pt_1=0,$$

care exprimă că punctul de contact este în planul dat, obţinem cinci relaţiuni, din care eliminând pe x_1,y_1,z_1,t_1, obţinem

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & C & u\\
B'' & A' & B & C' & v\\
B' & B & A'' & C'' & w\\
C & C' & C'' & D & p\\
u & v & w & p & 0
\end{vmatrix}=0,$$

care este ecuaţia tangenţială a cuadricei.

Clasificarea cuadricelor.

Cuadrice cu centru unic.

264. Ecuația generală a unei cuadrice este

$$f(x,y,z)\equiv\varphi(x,y,z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

unde

$$\varphi(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

Să deplasăm axele paralel cu ele înșiși-le în punctul (x_0,y_0,z_0); avem formulele

$$x=x_0+x',\ y=y_0+y',\ z=z_0+z'$$

iar ecuația suprafeței devine

$$f(x_0+x',y_0+y',z_0+z')=f(x_0,y_0,z_0)+x'f'_{x_0}+y'f'_{y_0}+z'f'_{z_0}+\varphi(x',y',z')=0.$$

Ca această ecuație să nu conție termeni lineari în x',y',z', trebue și e de ajuns ca punctul (x_0,y_0,z_0) să fie dat de ecuațiile

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_{x_0}=Ax_0+B''y_0+B'z_0+C=0,\\ \frac{1}{2}f'_{y_0}=B''x_0+A'y_0+Bz_0+C'=0,\\ \frac{1}{2}f'_{z_0}=B'x_0+By_0+A''z_0+C''=0 \end{cases}$$

Acest sistem admite-o soluție unică, numai dacă

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B'\\ B'' & A' & B\\ B' & B & A'' \end{vmatrix}\neq 0.$$

Vom considera mai întâi cazul $\delta\neq 0$. Transportând origina în punctul (x_0,y_0,z_0) dat de ecuațiile (1), ecuația cuadricei devine

$$(2)\qquad \varphi(x',y',z')+f(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Se vede că dacă punctul $M(x',y',z')$ aparține suprafeței atunci și punctul $M'(-x',-y',-z')$ se află pe suprafață, adică punctele M și M', care sunt pe suprafață, sunt simetrice față de noua origină a axelor, care este centru de simetrie. Punctul (x_0,y_0,z_0) este așa dar centrul suprafeței.

Deci, dacă $\delta\neq 0$, *suprafața admite un centru unic, dat de ecuațiile* (1) iar transportând axele în acest punct, suprafața ia forma (2). Acesta este singurul punct care se bucură de această ultimă proprietate.

Pentru determinarea termenului $f(x_0,y_0,z_0)$, observăm că

$$f(x_0,y_0,z_0)\equiv x_0(Ax_0+B''y_0+B'z_0+C)+y_0(B''x_0+A'y_0+Bz_0+C)$$
$$+z_0(B'x_0+By_0+A''z_0+C'')+Cx_0+C'y_0+C''z_0+D.$$

Ţinând seamă că punctul (x_0,y_0,z_0) e dat de ecuaţiile (1), avem

$$f(x_0,y_0,z_0)=Cx_0+C'y_0+C''z_0+D. \tag{3}$$

Eliminând pe x_0,y_0,z_0, între ecuaţiile (1) şi (3), avem

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D-f(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}=0,$$

de unde

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{\Delta}{\delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Deci, *coordonatele centrului unei cuadrice sunt date de ecuaţiile*

$$f'_x=0,\ f'_y=0,\ f'_z=0,$$

şi transportând origina în acest punct, ecuaţia cuadricei devine

$$\varphi(x',y',z')+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Dacă $\Delta=0$, cuadrica este un con, centrul (x_0,y_0,z_0) al acestei cuadrice fiind vârful conului, ecuaţia conului faţă de vechile axe $Oxyz$ fiind $\varphi(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$.

265. **Axele cuadricei.** I. Se poate reduce mai mult ecuaţia cuadricei, făcând rotaţia

$$\left\{\begin{aligned} x&=\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z,\\ y&=\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z,\\ z&=\alpha_3X+\beta_3Y+\gamma_3Z, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

sau

$$\left\{\begin{aligned} X&=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z,\\ Y&=\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z,\\ Z&=\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

unde $\alpha_1,\ldots,\gamma_3$ verifică relaţiile de ortogonalitate şi care fac să avem

$$x^2+y^2+z^2\equiv X^2+Y^2+Z^2.$$

Să găsim aceea substituţie ortogonală, pentru care avem

$$\varphi(x,y,z)\equiv S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2, \tag{7}$$

$$x^2+y^2+z^2\equiv X^2+Y^2+Z^2. \tag{8}$$

Din acestə două condiţii, obţinem

$$(9)\quad \varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)\equiv(S_1-S)X^2+(S_2-S)Y^2+(S_3-S)Z^2.$$

Să observăm că determinantul formei cuadratice din membrul întâi este

$$\Delta(S)=\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix},$$

iar acela al formei din membrul al doilea,

$$\begin{vmatrix} S_1-S & 0 & 0 \\ 0 & S_2-S & 0 \\ 0 & 0 & S_3-S \end{vmatrix}=(S_1-S)(S_2-S)(S_3-S).$$

Dar, modulul unei substituţii lineare fiind d, se ştie că între discriminanţii D_1 şi D_2, ai formei date şi celei transformate, avem relaţia

$$D_2=d^2D_1.$$

In cazul substituţii ortogonale, modulul d fiind egal cu 1 (No 197, II, 2°), avem

$$\Delta(S)=\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}=(S_1-S)(S_2-S)(S_3-S).$$

Această relaţie probează că coeficienţii S_1,S_2,S_3 din relaţia (7) sunt rădăcinile ecuaţii $\Delta(S)=0$, numită *ecuaţia în* S,

$$(10)\qquad \Delta(S)=\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}=0.$$

II. Vom demonstra că *această ecuaţie are toate rădăcinile reale.* (Kronecker). Membrul întâi al ecuaţii (10) este discriminantul conicei a cărei ecuaţie omogenă este

$$\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)=0.$$

In caz când S_1 este o rădăcină a ecuaţiei în S, acest discriminant este nul, deci conica se reduce la un sistem de două drepte (No 104), iar expresiunea de mai sus, pentru $S=S_1$ este un produs de doi factori lineari, P şi Q.

Dacă S_1 ar fi un număr complex, $S_1=\alpha+i\beta$, atunci coeficienţii din P şi Q, ar putea fi şi ei complexi; am avea

$$(11)\quad \varphi(x,y,z)-S_1(x^2+y^2+z^2)\equiv(P'+iP'')(Q'+iQ''),\ i=\sqrt{-1}.$$

Dar această egalitate este imposibilă. În adevăr, să considerăm ecuaţiile $P''=0$, $Q''=0$. Putem găsi o infinitate de valori pentru x,y,z, care să verifice aceste două relaţii, fiindcă două ecuaţii omogene cu trei necunoscute admit totdeauna o infinitate de soluţii. Fie x_1,y_1,z_1 un asemenea sistem de soluţii, diferit de soluţia identic nulă. Pentru acestea, identitatea (11) devine

$$\varphi(x_1,y_1,z_1)-\alpha(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-i\beta(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=P'_1Q'_1.$$

Membrul al doilea este o cantitate reală, deci şi membrul întâi este o cantitate reală; deci

$$\beta(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=0,$$

de unde rezultă $\beta=0$ şi deci rădăcina S_1 este reală.

Rădăcinile ecuaţii în S *sunt toate diferite de zero*, căci produsul lor este egal cu $-\delta\neq 0$.

Coeficienţii ecuaţii în S *sunt invarianţi*, adică forma lor rămâne aceeaş faţă de orice sistem de axe ortogonale. Intr'adevăr, când trecem de la un sistem de axe ortogonale la altul, translaţia nu alterează coeficienţii formei $\varphi(x,y.z)$, iar o rotaţie dă loc la identitatea

$$\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)\equiv\varphi_1(x_1,y_1,z_1)-S(x_1^2+y_1^2+z_1^2).$$

Dar în virtutea proprietăţii discriminantului, avem identitatea

$$\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_1-S & B_1'' & B_1' \\ B_1'' & A_1'-S & B_1 \\ B_1' & B_1 & A_1''-S \end{vmatrix},$$

oricare ar fi S. Aceasta arată că coeficienţii termenilor în S ai acestei expresiuni sunt invarianţi.

III. 1^0. Acestea fiind stabilite, să facem în identitatea

(12) $\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)\equiv(S_1-S)X^2+(S_2-S)Y^2+(S_3-S)Z^2$,

pe $S_1=S$; avem

(13) $\varphi(x,y,z)-S_1(x^2+y^2+z^2)\equiv(S_2-S_1)Y^2+(S_3-S_1)Z^2$.

Descompunând expresiunea din membrul al doilea într'un produs de doi factori lineari, acei factori sunt identici cu

$$\sqrt{S_2-S_1}\,Y\pm\sqrt{S_1-S_3}\,Z=0,$$

care reprezintă două plane ce trec prin OX, a căror intersecţie este OX.

Rezultă, deci, că ecuaţiile axei OX se obţin descompunând în factori lineari expresiunea

$$\varphi(x,y,z)-S_1(x^2+y^2+z^2).$$

Mai putem găsi ecuaţia axei OX şi altfel. Pentru aceasta, să derivăm relaţia (13) în raport cu x,y,z şi să ţinem seamă de (5). Avem astfel

$$\frac{1}{2}(\varphi'_x - 2S_1x) = (S_2 - S_1)\beta_1 Y + (S_3 - S_1)\gamma_1 Z,$$

$$\frac{1}{2}(\varphi'_y - 2S_1y) = (S_2 - S_1)\beta_2 Y + (S_3 - S_1)\gamma_2 Z,$$

$$\frac{1}{2}(\varphi'_z - 2S_1z) = (S_2 - S_1)\beta_3 Y + (S_3 - S_1)\gamma_3 Z.$$

De aci se vede că ecuaţiile

$$\varphi'_x - 2S_1x = 0,\ \varphi'_y - 2S_1y = 0,\ \varphi'_z - 2S_1z = 0$$

reprezintă trei plane ce trec prin axa OX, definită de ecuaţiile $Y=0$, $Z=0$. *Axa* OX *se obţine deci prin două oarecare din ecuaţiile*

$$\varphi'_x - 2S_1x = 0,\ \varphi'_y - 2S_1y = 0,\ \varphi'_z - 2S_1z = 0.$$

Prin acelaş raţionament, se vede că *axele* OY *şi* OZ *se obţin cu aceleaşi ecuaţii, înlocuind pe* S *cu* S_2 *şi* S_3.

Axele noi fiind determinate, ecuaţia cuadricei are forma

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + S_3Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

2°. *Discuţie.* Cele trei axe OX, OY, OZ formează un sistem de axe ortogonale între ele, în virtutea relaţii (12) din care au fost deduse. In adevăr, această identitate lineară în S, fiind verificată pentru trei valori S_1, S_2, S_3, diferite între ele, va fi o identitate în S, adică va fi adevărată oricare ar fi S. Deci substituţia definită prin noile axe dă loc la ambele identităţi (7) şi (8), şi în baza identităţii (8), este ortogonală.

Raţionamentul precedent presupune rădăcinile S_1, S_2, S_3 diferite între ele. Să examinăm cazul când două sau toate aceste rădăcini sunt egale între ele.

Cazul rădăcinei duble. Fie $S_1 = S_2 \neq S_3$. Dacă facem $S = S_3$, obţinem o axă definită de planele

$$\varphi'_x - 2S_3x = 0,\ \varphi'_y - 2S_3y = 0,\ \varphi'_z - 2S_3z = 0.$$

Dacă facem în relaţia (12) $S = S_1$, avem

$$\varphi(x,y,z) - S_1(x^2 + y^2 + z^2) = (S_3 - S_1)Z^2.$$

adică se reduce la un singur termen. Pentru ca această relaţie să fie verificată; este de ajuns ca axa corespunzătoare rădăcinii S_1 să verifice ecuaţia

$$Z = 0,$$

adică să se găsească în acest plan. In acest caz, este de ajuns, deci, să ne alegem două axe OX, OY, perpendiculare între ele, situate în acest plan, pentru ca identitatea (12) să fie verificată când $S=S_1$.

Axele fiind astfel alese, identitatea (12) este verificată pentru două valori distincte ale lui S, deci se desparte în identitățile (7) și (8), adică corespunde problemei noastre.

Prin urmare, când ecuația în S admite o rădăcină dublă, problema găsirei noilor axe este nedeterminată; există o infinitate de sisteme perpendiculare care răspund problemei. Toate acestea au însă una din axe invariabilă, adică se obțin, unul din altul, printr'o rotație în jurul axei fixe. Ecuația cuadricei devine în acest caz

$$S_1(X^2+Y^2)+S_3Z^2+\frac{\Delta}{\delta}=0,$$

care arată că suprafața este de rotație în jurul lui OZ.

Axa suprafeței fiind perpendiculară pe planul $Z=0$, ecuația ei se obține descompunând în factori expresiunea

$$\varphi(x,y,z)-S_1(x^2+y^2+z^2)$$

care, în cazul nostru, este un pătrat perfect. Acest factor se obține luând derivata ei în raport cu oricare din variabile, căci, în acest caz, toate aceste derivate reprezintă același plan.

Deci, când ecuația în S admite o rădăcină dublă, S_1, cuadrica este de rotație; axa acestei suprafețe este perpendiculară pe planul

$$\varphi'_x-2S_1x=0.$$

IV. *In rezumat*, când $\delta\neq 0$, ecuația generală de ordinul al doilea reprezintă elipsoid, iperbolid sau con. Pentru a obține axele unei cuadrice cu centru, unic, se rezolvă ecuația în S,

$$\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}=0.$$

Dacă $S_1\neq S_2\neq S_3$ sunt rădăcinile acestei ecuații, axele cuadricei sunt date de două oricare din planele

$$\varphi'_x-2Sx=0,\ \varphi'_y-2Sy=0,\ \varphi'_z-2Sz=0,$$

iar care înlocuim pe S respectiv cu S_1,S_2,S_3.

Ecuația cuadricei este

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Această ecuație ne arată că noile plane de coordonate sunt plane de simetrie ale suprafeței și că prin urmare noile axe sunt de asemenea axe de simetrie.

V. *Exemplu.* $f(x,y,z)\equiv x^2+3y^2+4yz-6x+8y+8=0$. Coordonatele centrului sunt date de

$$f'_x=0,\ f'_y=0,\ f'_z=0,$$

și sunt (3, 0, —2). Avem

$$f(x_0,y_0,z_0)=-3x_0+4y_0+8=-1.$$

Ecuația cuadricei raportată la axele transportate în centru este

$$x'^2+3y'^2+4y'z'-1=0.$$

Ecuația în S este

$$\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 \\ 0 & 3-S & 2 \\ 0 & 0 & -S \end{vmatrix}=(S-1)(S+1)(S-4)=0,$$

și are rădăcinile $S_1=1$, $S_2=-1$, $S_3=4$.

Ecuația redusă a cuadricei este

$$X^2-Y^2+4Z^2=1.$$

Axele sunt date de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\varphi'_x-Sx=0,\ x-Sx=x(1-S),\ x(1-S)=0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_y-Sy=0,\ 3y+2z-Sy=(3-S)y+2z,\ (3-S)y+2z=0,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_z-Sz=0,\ 2y-Sz=0.$$

Pentru S=1, prima ecuație se reduce la o identitate, iar celelalte două devin

$$y+z=0,\ 2y-z=0,$$

sau $y=0$, $z=0$. Deci OX coincide cu Ox.

Pentru S=—1, ecuațiile devin $x=0$, $2y+z=0$.

Pentru S=4, devin $x=0$, $y-2z=0$.

Deci, axa OX coincide cu Ox, iar axele OY și OZ se găsesc în planul YOZ, reprezentate respectiv de ecuațiile $2y+z=0$, $y-2z=0$. Se observă că noile axe sunt perpendiculare între ele. Cuadrica este cu centru, iperboloid cu o pânză, centrul în (3, 0, —2), axele fiind Ox, și dreptele situate în planul yOz, cu ecuațiile $2y+z=0$, $y-2z=0$.

Clasificarea cuadricelor. Genul paraboloid.

266. Să studiem cazul $\delta=0$, când centrul cuadricei este aruncat la infinit sau nedeterminat. Pentru a reduce ecuația cuadricei, să facem o rotație a axelor, așa că φ să transformă, cum am văzut, în

$$\varphi(x,y,z)\equiv S_1x'^2+S_2y'^2+S_3z'^2.$$

In cazul de faţă, însă, cel puţin una din rădăcinile ecuaţii în S este nulă, fiindcă

$$\delta = -S_1S_2S_3 = 0.$$

Deci, după o rotaţie, expresiunea redusă a formei $\varphi(x,y,z)$ va fi

$$\text{I. } S_1x'^2+S_2y'^2, \text{ sau II. } S_1x'^2.$$

I. Făcând rotaţia, ca şi în cazul cuadricei cu centru, noua ecuaţie a cuadricei va fi

$$S_1x'^2+S_2y'^2+2C_1x'+2C_1'y'+2C_1''z'+D_1=0.$$

Această ecuaţie se mai poate scrie

$$(14)\quad S_1\left(x'+\frac{C_1}{S_1}\right)^2+S_2\left(y'+\frac{C_1'}{S_2}\right)^2+2C_1''\left[z'+\frac{1}{2C_1''}\left(D_1-\frac{C_1^2}{S_1}-\frac{C_1'^2}{S_2}\right)\right]=0.$$

Dacă $C_1''\neq 0$, să facem translaţia

$$X=x'+\frac{C_1}{S_1},\quad Y=y'+\frac{C_1'}{S_2},\quad Z=z'+\frac{1}{2C_1''}\left(D_1-\frac{C_1^2}{S_1}-\frac{C_1'^2}{S_2}\right),$$

şi ecuaţia cuadricei devine

$$S_1X^2+S_2Y^2=2C_1''Z,$$

care arată că este *paraboloid.*

Dacă $C_1''=0$, ecuaţia (14) are numai termeni în X şi Y. Ea reprezintă deci un *cilindru*, cu generatoarele paralele cu OZ cu directoarea în planul XOY, conica cu centru

$$S_1\left(x'+\frac{C_1}{S_1}\right)^2+S_2\left(y'+\frac{C_1'}{S_2}\right)^2+D_1-\frac{C_1^2}{S_1}-\frac{C_1'^2}{S_2}=0.$$

Acest cilindru se reduce la două plane, dacă

$$D_1=\frac{C_1^2}{S_1}+\frac{C_1'^2}{S_2}.$$

II. In acest caz, ecuaţia cuadricei după rotaţie, devine

$$S_1x'^2+2C_1x'+2C_1'y'+2C_1''z'+D_1=0,$$

$$S_1\left(x'+\frac{C_1}{S_1}\right)^2+2C_1'y'+2C_1''z'+D_1-\frac{C_1^2}{S_1}=0.$$

Făcând substituţia

$$X=x'+\frac{C_1}{S_1},\quad Y=\frac{C_1'y'+C_1''z'}{\sqrt{C_1'^2+C_1''^2}}=\frac{C_1'y'+C_1''z'}{R},$$

$$Z=\frac{-C_1''y'+C_1'z'}{\sqrt{C_1'^2+C_1''^2}}=\frac{-C_1''y'+C_1'z'}{R},$$

ecuația devine

$$S_1X^2+2RY+T=0,$$

care reprezintă un cilindru cu generatoarele paralele cu OZ și a cărui bază este situată în planul $Z=0$, sau $-C_1''y'+C_1'z'=0$ și este o parabolă.

Acest cilindru se reduce la două plane paralele când $C_1'=C_1''=0$.

Deci, *când* $\delta=0$, *cuadrica este un paraboloid, cilindru, sau două plane.*

III. *In general, ecuația de ordinul al doilea,*

$f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$

reprezintă numai elipsoid, iperboloid, con, cilindru, sau două plane, în rezumat *cuadrice.*

IV. *Exemplu.* $f(x,y,z)\equiv 2y^2+4xy-8xz-4yz+6x-5=0$. Avem $\delta=0$

Ecuația în S este

$$\begin{vmatrix} -S & 2 & -4 \\ 2 & 2-S & -2 \\ -4 & -2 & -S \end{vmatrix}=0,\ S^3-2S^2-24S-0,\ S_1=0,\ S_2=-4,\ S_3=6,$$

cuadrica este un paraboloid.

Noile axe sunt determinate de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\varphi_x'-Sx=0,\ \frac{1}{2}\varphi_y'-Sy=0,\ \frac{1}{2}\varphi_z'-Sz=0,$$

în care înlocuim pe S cu S_1, S_2, S_3. Obținem

$$Ox',\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1};\ Oy',\ \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1};\ Oz',\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},$$

trei drepte ortogonale între ele două câte două. Cosinusurile directoare ale axelor sunt $Ox'\left(a_1=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ b_1=\frac{-2}{\sqrt{6}},\ c_1=\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$, $Oy'\left(a_2=\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b_2=0,\ c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Oz'\left(a_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\ b_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\ c_3=\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$. Rotația e definită de

$$x=a_1x'+a_2y'+a_3z',\ y=b_1x'+b_2y'+b_3z',\ z=c_1x'+c\,y'+c_3z',$$

$$x=\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}},\ y=-\frac{2x'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}},\ z=-\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}.$$

Ecuația devine

$$-4y'^2+6z'^2+6\left(\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)-5=0,$$

care se mai poate scrie

$$-4\left(y'-\frac{6}{8\sqrt{2}}\right)^2+6\left(z'+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\sqrt{6}x'-\frac{45}{8}=0.$$

Să facem translația

$$X=x'-\frac{45}{8\sqrt{6}},\ Y=y'-\frac{6}{8\sqrt{2}},\ Z=z'+\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

şi ecuaţia devine $-4Y^2+6Z^2+\sqrt{6}X=0$. Cuadrica este un paraboloid iperbolic, cu vârful $\left(\frac{45}{3\sqrt{6}}, \frac{6}{8\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, iar ca axă direcţia $(Ox')(1,-2,-1)$.

Exerciţii.

1). Să se cerceteze natura cuadricei $7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy=6$.

R. Ecuaţia în S este $S^3-18S^2+99S-162=0$; ecuaţia transformată este $X^2+2Y^2+3Z^2=2$; elipsoid.

2) Să se cerceteze natura cuadricei $11x^2+10y^2+6z^2-12xy-8yz+4zx=12$.

R. $S^3-27S^2+180S-324=0$; $X^2+2Y^2+6Z^2=4$; elipsoid.

3). Să se cerceteze natura cuadricei $7x^2-13y^2+6z^2+24xy+12yz-12zx=\pm 84$.

R. $S^3-343S-2058=0$; $X^2+2Y^2-3Z^2=\pm 12$; iperboloid cu una sau două pânze după semnul membrului al doilea.

4). Să se cerceteze natura cuadricei $2x^2+3y^2+4z^2+6xy+4yz+8zx=8$.

R. $S^3-9S^2-3S+20=0$; după teorema lui Descartes, această ecuaţie are două rădăcini pozitive şi una negativă, suprafaţa este un iperboloid cu o pânză.

5). Să se cerceteze natura cuadricei $5x^2-y^2+z^2+6zx+4xy+2x+4y+6z=8$.

R. $S^3-5S^2-14S=0$; rădăcinile 0, 7, -2; $7X^2-2Y^2=\frac{8Z}{\sqrt{14}}$; paraboloid iperbolic.

6). Să se discute natura suprafeţei $(3y+z)(x-y)+(x+y)^2=0$.

R. Un con.

7). Să se discute natura cuadricei $x^2+(\lambda+1)y^2+\lambda z^2-2yz+2xy+2x+2z+4=0$, λ fiind un parametru variabil.

R. Ecuaţia în S este (1) $S^3-2(\lambda+1)S^2+(\lambda^2+3\lambda-1)S-(\lambda^2-1)=0$. 1^0. $\lambda^2-1\neq 0$, ecuaţia are trei rădăcini ne nule, S_1,S_2,S_3, suprafaţa are centru unic, iar ecuaţia redusă este $S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+\frac{3\lambda+1}{\lambda+1}=0$. Cum ecuaţia în S are toate rădăcinile reale, numărul rădăcinilor pozitive este egal cu numărul variaţiilor; deci vom studia semnele coeficienţilor ecuaţii (1), după valorile lui λ în raport cu ± 1, $-\frac{1}{3}$ şi rădăcinile α, β ale termenului $\lambda^2+3\lambda-1$.

λ	Semne coef.	Semnele răd.
$-\infty$	$+++-$	$+--$
α	$++--$	$+--$
-1	$+---+$	$++-$
β	$+-++$	$++-$
1	$+-+-$	$+++$
∞		

Avem tabloul alăturat. Deci dacă $\lambda<-1$, semnele coeficienţilor ecuaţii reduse sunt $+---+$; suprafaţa este iperboloid cu o pânză. Dacă $-1<\lambda<-\frac{1}{3}$, avem semnele $++--$, iperboloid cu o pânză Dacă $\lambda=-\frac{1}{3}$, $++-0$, con real. Dacă $-\frac{1}{3}<\lambda<1$, $++-+$, iperboloid cu două pânze $\lambda>1$, $++++$, elipsoid imaginar

2°. $\lambda=-1$; ecuația în S, $S^3-3S=0$; suprafața este un paraboloid iperbolic, sau un cilindru iperbolic (care se poate reduce la două plane). Reducând ca la ex., IV (No. 266), se vede că este un paraboloid iperbolic. Sau, se poate vedea și cu planele ce dau centrul, $\frac{1}{2}f'_x=x+y+1=0$, $\frac{1}{2}f'_y=(\lambda+1)y-z+x=0$, $\frac{1}{2}f'_z=\lambda z-y+1=0$; pentru $\lambda=-1$, aceste plane sunt paralele cu aceeaș dreaptă (se tae două câte două după drepte paralele), suprafața este un paraboloid iperbolic.

3°. $\lambda=1$, $S^3-4S^2+3S=0$, o rădăcină zero, două pozitive, paraboloid eliptic, cilindru eliptic (real, imaginar, sau redus la două plane). Operând ca la ex., IV (No. 266), se vede că reprezintă un cilindru eliptic imaginar. Sau, se vede că planele centrelor trec prin aceeaș dreaptă $x+z+2=0$, $y-z-1=0$.

Pol și plane polare.

267. **Plan polar.** Să ducem printr'un punct M_1 o secantă variabilă, care tae o cuadrică în punctele M' și M''; să însemnăm cu M conjugatul armonic al lui M_1 în raport cu $M'M''$. Locul punctului M, când secanta se învârtește în jurul lui M_1, este un plan, care se zice planul polar al punctului M_1.

Să însemnăm cu (x_1,y_1,z_1,t_1), (x,y,z,t) coordonatele punctelor M_1 și M. Un punct oarecare al dreptei M_1M are coordonate de forma

$$x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z,\ t_1+\lambda t,$$

iar valorile lui λ corespunzătoare punctelor de intersecție ale cuadricei $f(x,y,z,t)=0$ cu dreapta M_1M sunt date de

$$f(x_1+\lambda x,\ y_1+\lambda y,\ z_1+\lambda z,\ t_1+\lambda t)=\lambda^2 f(x,y,z,t)$$
$$+\lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}+t\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)+f(x_1,y_1,z_1,t_1)=0.$$

Pentru ca punctele de intersecție M' și M'', cărora le corespund rădăcinile λ' și λ'' ale acestei ecuații, să fie conjugate armonic în raport cu M_1 și M, trebue ca $\lambda'+\lambda''=0$, adică

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}+t\frac{\partial f}{\partial t_1}=0,$$

ceea ce arată că locul punctelor M este un plan. Această ecuație se mai poate scrie

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Observări. 1. Planul polar este nedeterminat când $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial t_1}=0$, adică dacă punctul M_1 este un punct dublu al suprafeței, cum ar fi vârful unui con.

II. Planul polar este aruncat la infinit, se reduce la $t=0$, când $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial t_1}\neq 0$, adică punctul M_1 este centrul suprafeței.

III. Dacă punctul M_1 este la infinit, $t_1=0$, în direcția de parametrii directori x_1, y_1, z_1, planul polar se reduce la

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Punctele M sunt în acest caz mijloacele coardelor paralele cu aceeaș direcție, și planul lor este planul diametral conjugat acestei direcții.

268. **Polul unui plan**, se zice punctul $M_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$, al cărui plan polar este tocmai planul dat $ux+vy+wz+pt=0$. Ecuația planului polar a punctului M_1 fiind

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}+t\frac{\partial f}{\partial t_1}=0,$$

scriind că ambele ecuații reprezintă același plan, avem

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{u}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{w}=\frac{\frac{\partial f}{\partial t_1}}{p}.$$

Egalând valoarea acestor rapoarte cu 2λ, ecuațiile care dau coordonatele polului sunt

$$\begin{aligned}
&Ax_1+B''y_1+B'z_1+Ct_1-\lambda u=0,\\
&B''x_1+A'y_1+Bz_1+C't_1-\lambda v=0,\\
&B'x_1+By_1+A''z_1+C''t_1-\lambda w=0,\\
&Cx_1+C'y_1+C''z_1+Dt_1-\lambda p=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Presupunând determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C\\ B'' & A' & B & C'\\ B' & B & A'' & C''\\ C & C' & C'' & D\end{vmatrix}\neq 0,$$

suprafața n'are puncte duble, este un elipsoid, iperboloid, sau paraboloid. Se pot rezolva ecuațiile (1) în raport cu x_0,y_0,z_0,t_0 și planului îi corespunde un pol unic.

Dacă $\Delta=0$, vom discuta problema geometric, presupunând că suprafața este un con. Fie S vârful conului și (C) o directoare oarecare, secțiunea suprafeței cu un plan (P) (Fig. 326). Planul polar al unui punct M_1, în raport cu acest con, trece prin generatoarele de contact ale planelor tangente duse la con prin punctul M_1. Pentru a construi aceste generatoare, să însemnăm cu T punctul unde dreapta

SM_1 înţeapă planul (P) şi din acest punct să ducem tangentele TA şi TB la conica (C). Generatoarele de contact sunt SA şi SB, iar planul polar al punctului M_1 este planul ASB.

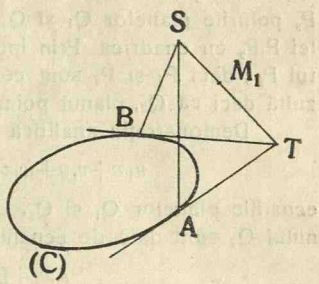


Fig. 326.

Acest plan polar este determinat deci de vârful S şi polara AB a punctului T în raport cu conica (C); acest plan rămâne acelaş când punctul M_1 se mişcă pe dreapta ST.

Coordonatele punctului S verificând relaţiile $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$, $f'_t=0$, planul său polar este nedeterminat, un plan oarecare al spaţiului.

Să determinăm acum polul unui plan (Q). Dacă planul (Q) nu trece prin S, polul său este punctul S. Dacă planul (Q) trece prin punctul S, să însemnăm cu (Δ) urma acestui plan pe planul (P) al directoarei (C) a conului şi fie T polul acestei drepte în raport cu conica (C). In acest caz, planul (Q) admite ca pol toate punctele dreptei ST.

Se poate face o discuţie geometrică analoagă în cazul când suprafaţa este un cilindru sau un ansamblu de două plane.

269. **Puncte conjugate.** *Dacă planul polar al unui punct* P_1, *trece printr'un punct* P_2, *invers, planul polar al punctului* P_2 *trece prin* P_1. Fie M' şi M'' punctele de întâlnire ale suprafeţei cu dreapta P_1P_2. Pentrucă planul polar al lui P_1 trece prin P_2, P_2 este conjugatul armonic al lui P_1 în raport cu M' şi M'', deci şi P_1 este conjugatul armonic al lui P_2 în raport cu M' şi M'' şi prin urmare planul polar al lui P_2 trece prin P_1.

Aceasta se poate arăta şi analitic, în modul următor. Fie $P_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2,t_2)$ punctele date. Planul polar al lui P_1 având ecuaţia

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}+t\frac{\partial f}{\partial t_1}=0,$$

ca să treacă prin P_2, urmează

$$x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}+t_2\frac{\partial f}{\partial t_1}=0.$$

Această relaţie se mai poate scrie

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}+t_1\frac{\partial f}{\partial t_2}=0,$$

care probează că planul polar al lui P_2 trece prin P_1.

Punctele P_1 şi P_2 se zic puncte conjugate în raport cu cuadrica; planul polar al unuia trece prin celalt punct, sau dreapta P_1P_2 tae cuadrica în două puncte conjugate armonic în raport cu P_1 şt P_2.

Condiţia analitică ca două puncte (x_1,y_1,z_1,t_1), (x_2,y_2,z_2,t_2) să fie conjugate armonic în raport cu cuadrica $f(x,y,z,t)=0$ este

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f}{\partial z_2}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}+t_1\frac{\partial f}{\partial t_2}=0.$$

270. **Plane conjugate.** *Dacă planul* Q_1 *trece prin polul* P_2 *al planului* Q_2, *invers, planul* Q_2 *trece prin polul* P_1 *al planului* Q_1. In adevăr, fie P_1 şi P_2 polurile planelor Q_1 şi Q_2 şi M' şi M'' punctele de intersecţie ale dreptei P_1P_2 cu cuadrica. Prin ipoteză, planul polar Q_1 al lui P_1 trece prin punctul P_2; deci P_1 şi P_2 sunt conjugate armonic în raport cu M' şi M''. Rezultă deci că Q_2, planul polar al lui P_2, trece prin P_1.

Demonstraţia analitică este următoarea. Fie

$$u_1x+v_1y+w_1z+p_1t=0,\quad u_2x+v_2y+w_2z+p_2t=0$$

ecuaţiile planelor Q_1 şi Q_2. Coordonatele (x_2,y_2,z_2,t_2) ale polului P_2 al planului Q_2 sunt date de ecuaţiile (1)

$$\begin{aligned}
&Ax_2+B''y_2+B'z_2+Ct_2-\lambda u_2=0,\\
&B''x_2+A'y_2+Bz_2+C't_2-\lambda v_2=0,\\
&B'x_2+By_2+A''z_2+C''t_2-\lambda w_2=0,\\
&Cx_2+C'y_2+C''z_2+Dt_2-\lambda p_2=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

Scriind că acest punct este în planul Q_1 avem

$$u_1x_2+v_1y_2+w_1z_2+p_1t_2=0.\tag{3}$$

Eliminând pe x_2, y_2, z_2, t_2 între ecuaţiile (2) şi (3), urmează

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & C & u_2\\
B'' & A' & B & C' & v_2\\
B' & B & A'' & C'' & w_2\\
C & C' & C'' & D & p_2\\
u_1 & v_1 & w_1 & p_1 & 0
\end{vmatrix}=0,\tag{4}$$

care este relaţia care probează că şi planul Q_1 trece prin polul P_2 al planului Q_2.

Dar acest determinant nu se schimbă dacă schimbăm liniile în coloane şi coloanele în linii, sau ceea ce revine a spune, că dacă se permută indicii 1 şi 2 ai literilor u, v, w, p. De aci rezultă că condiţia (4) exprimă de asemenea că planul Q_2 trece prin polul planului Q_1.

Se zice, în acest caz, că planele Q_1 şi Q_2 sunt conjugate în raport cu cuadrica, iar relaţia (4) este expresia analitică a acestei condiţii geometrice.

271. **Drepte conjugate.** I. *Planele polare ale tuturor punctelor unei drepte* D, *trec prin aceeaş dreaptă* D' *şi invers, planele polare ale tuturor punctelor dreptei* D' *trec prin dreapta* D. In adevăr, fie $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ două puncte fixe ale dreptei D. Un punct oarecare M al acestei drepte are coordonatele $x_1+\lambda x_2$, $y_1+\lambda y_2$, $z_1+\lambda z_2$, $t_1+\lambda t_2$. Planul polar al acestui punct are ecuaţia

$$(x_1+\lambda x_2)\frac{\partial f}{\partial x}+(y_1+\lambda y_2)\frac{\partial f}{\partial y}+(z_1+\lambda z_2)\frac{\partial f}{\partial z}+(t_1+\lambda t_2)\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

de unde urmează că aceste plane trec prin dreapţa D' de intersecţie a planelor

$$\begin{aligned}
&x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}=0,\\
&x_2\frac{\partial f}{\partial x}+y_2\frac{\partial f}{\partial y}+z_2\frac{\partial f}{\partial z}+t_2\frac{\partial f}{\partial t}=0.
\end{aligned}\tag{D'}$$

(1) Presupunem că se consideră plane care au un pol unic.

Un punct oarecare al acestei drepte D' are coordonatele (x',y',z',t'), date de ecuațiile

$$(5)\quad x_1\frac{\partial f}{\partial x'}+y_1\frac{\partial f}{\partial y'}+z_1\frac{\partial f}{\partial z'}+t_1\frac{\partial f}{\partial t'}=0,\quad x_2\frac{\partial f}{\partial x'}+y_2\frac{\partial f}{\partial y'}+z_2\frac{\partial f}{\partial z'}+t_2\frac{\partial f}{\partial t'}=0.$$

Planul polar al punctului (x', y', z', t') are ecuația

$$x\frac{\partial f}{\partial x'}+y\frac{\partial f}{\partial y'}+z\frac{\partial f}{\partial z'}+t\frac{\partial f}{\partial t'}=0.$$

Dar, relațiile (5) probează că acest plan trece prin punctele $M_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2,t_2)$, adică prin dreapta D, care conține aceste puncte.

II. Dreptele D și D' se zic drepte conjugate în raport cu cuadrica. Pentru a construi dreapta D', conjugata unei drepte D, va fi de ajuns să unim polurile a două plane oarecare, ce trec prin dreapta D. In particular, dacă se consideră planele tangente ce trec prin această dreaptă, polurile acestor plane sunt punctele de contact. Rezultă că dreapta D' conjugata unei drepte D trece prin punctele de contact ale planelor tangente duse la cuadrică prin dreapta D.

Aceasta o putem dovedi și analitic. In adevăr, punctele de contact ale planelor tangente duse la suprafața $f(x,y,z,t)=0$ prin dreapta

$$(D)\qquad \frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z-r}{\gamma}$$

sunt la intersecția suprafeței cu dreapta D', definită de ecuațiile

$$p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}+r\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,\quad \alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

prima reprezentând condiția ca planul tangent în (x,y,z,t) să treacă prin punctul (p,q,r) al dreptei, a doua, condiția ca același plan tangent să treacă prin punctul dela infinit al dreptei, în direcția α, β, γ.

Dar, x, y, z fiind coordonatele curente, prima mai reprezintă planul polar al punctului (p,q,r) al dreptei, și a doua, ecuația planului polar al punctului de la infinit al dreptei, în direcția α, β, γ. Rezultă deci că dreapta D', care unește punctele de contact ale planelor tangente duse prin dreapta D, este conjugată cu dreapta D.

Mai putem da o altă interpretare dreptei D' conjugată cu D. In adevăr, să ducem prin dreapta D un plan P ce tae suprafața după conica (C) și fie M polul dreptei D în raport cu această conică. Planul polar al lui M trece necontenit prin D, deci acest punct aparține dreptei D' conjugata dreptei D. Deci, dreapta conjugată unei drepte este locul polurilor acestei drepte în raport cu conicele de secțiune ale cuadricei cu planele ce trec prin această dreaptă.

272. **Tetraedre conjugate**, sunt acelea când fiecare vârf este polul feței opuse în raport cu cuadrica. Sunt o infinitate de tetraedre conjugate cu o cuadrică. In adevăr, fie A (Fig. 327) un punct oarecare al spațiului și Q planul său polar. Să luăm în acest plan un punct oarecare B. Planul polar al lui B trece prin A și tae planul Q după o dreaptă Δ. Fie C un punct oarecare al acestei drepte; planul polar al lui C trece prin A și B și tae dreapta Δ în punctul D. Zicem că tetraedrul ABCD este conjugat în raport cu cuadrica. In adevăr, prin construcție, se vede

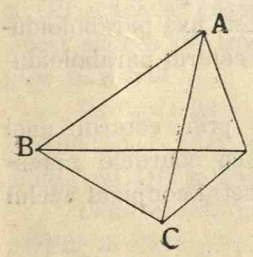


Fig. 327.

că punctele A, B, C au respectiv ca plane polare feţele opuse. De altă parte, fiindcă aceste plane polare trec prin D, invers, planul polar al lui D trece prin punctele A, B, C, este deci planul ABC.

Plane diametrale. Diametrii.

273. **Plan diametral.** Fiind date într'o cuadrică o serie de coarde paralele cu o direcţie, locul mijloacelor acestor coarde este un plan, care se zice planul diametral conjugat direcţii coardelor.

Fie $f(x,y,z)=0$, ecuaţia cuadricei, α,β,γ parametrii directori ai direcţii date, şi (x,y,z) coordonatele mijlocului uneia dintre coarde. Coordonatele unui punct oarecare al unei coarde ce trece prin (x,y,z) sunt $x+\alpha\rho$, $y+\beta\rho$, $z+\gamma\rho$, iar valorile lui ρ corespunzătoare punctelor de intersecţie M' şi M'' ale cuadricei cu această coardă sunt date de ecuaţia $f(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho)=0$, sau

$$(1)\qquad f(x,y,z)+\rho(\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z)+\rho^2\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Să presupunem că $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$, adică direcţia dată nu este asimptotică. Pentru ca M să fie mijlocul acestei coarde M'M'', trebue ca această ecuaţie să aibă rădăcinile egale şi de semne contrare, adică

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,\ \text{sau}\ \alpha\varphi'_x+\beta\varphi'_y+\gamma\varphi'_z+2C\alpha+2C'\beta+2C''\gamma=0.$$

Aceasta probează că locul punctului M este un plan, care se zice planul diametral conjugat direcţii date. Acest plan tae suprafaţa după conica de contact a cilindrului circumscris paralel cu direcţia considerată.

274. **Proprietăţi.** I. *La cuadricele cu centru, toate planele diametrale trec prin centru.* In adevăr, ecuaţia planului diametral este verificată de coordonatele centrului date de $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$, oricare ar fi α,β,γ.

II. *Toate planele diametrale ale unui paraboloid sunt paralele cu axa paraboloidului.* In adevăr, ecuaţia planului diametral conjugat direcţii (α,β,γ), în paraboloidul $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, este $\frac{\alpha x}{p}+\frac{\beta y}{q}-\gamma=0$, care reprezintă un plan paralel cu axa Oz, care este axa paraboloidului. Aceasta se putea observa direct, văzând că centrul paraboloidului este aruncat la infinit.

275. **Diametrii.** Orice dreaptă ce trece prin centrul unei cuadrice este un diametru. Diametrul paralel cu coardele corespunzătoare unui plan diametral, se numeşte diametru conjugat acelui plan diametral.

Fiind dat un plan,

$$ux+vy+wz+pt=0,$$

ecuaţiile diametrului său conjugat sunt

$$\frac{f'_x}{u}=\frac{f'_y}{v}=\frac{f'_z}{w}.$$

In adevăr, această dreaptă este un diametru, căci trece prin centru. Pe de altă parte, este paralelă cu dreapta ale cărei ecuaţii

$$\frac{\varphi'_x}{u}=\frac{\varphi'_y}{v}=\frac{\varphi'_z}{w},$$

se obţin din ecuaţiile de mai sus, suprimând termenii constanţi. Fie (α, β, γ) parametrii directori ai acestei drepte ; (coordonatele unui punct oarecare al acestei drepte ce trece prin origină) avem

$$\frac{\varphi'_\alpha}{u}=\frac{\varphi'_\beta}{v}=\frac{\varphi'_\gamma}{w}. \tag{2}$$

Dar, planul diametral conjugat direcţii (α, β, γ) este paralel cu planul dat, căci ecuaţia planului diametral

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0$$

se mai poate scrie

$$x\varphi'_\alpha+y\varphi'_\beta+z\varphi'_\gamma+2C\alpha+2C'\beta+2C''\gamma=0,$$

iar relaţia (2) exprimă că sunt paralele.

276. **Diametrii conjugaţi** sunt aceia, când coardele paralele unuia sunt împărţite în părţi egale de celalt. Toţi diametrii conjugaţi unui diametru se găsesc în planul său diametral, după însăşi definiţia planului diametral.

277. **Tripleu de diametrii conjugaţi.** Să considerăm un diametru oarecare OA şi planul său diametral. Să luăm un diametru arbitrar OB în acest plan diametral. Planul său diametral trece prin OA, în virtutea definiţii diametrilor conjugaţi şi va tăia planul diametral al lui OA după diametrul OC, care va fi conjugat cu OA şi OB, căci se găseşte în planele diametrale ale fiecăruia din ele. Acest sistem de trei diametrii, conjugaţi doi câte doi, se zice *tripleu diametral.*

Intr'un tripleu, fiecare diametru este conjugat planului format de celelalte două, căci planul diametral al lui OA, de ex., trebue să conţie pe OB şi OC, deci coincide cu OBC.

Orice coardă paralelă cu unul din diametrii unui tripleu este împărţită în două părţi egale de planul celorlalte două, după însăşi definiţia planului diametral.

Sunt o infinitate de tripleuri diametrale, căci diametrul OA a fost ales arbitrar şi OB de asemenea arbitrar in planul diametral al lui OA.

278. **Ecuaţia unei cuadrice raportată la un tripleu diametral.** I. Fie

$$(5)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

ecuaţia unei cuadrice raportată la axe oblice. Dacă aceste axe formează un tripleu diametral, coardele paralele cu Oz sunt împărţite în două părţi egale de planul xOy; deci ecuaţia (5) trebue să aibă două rădăcini în z egale şi de semne contrare, oricare ar fi x şi y, ceea ce dă condiţia

$$By+B'x+C''=0,$$

de unde

$$B=B'=C''=0.$$

Operând analog şi pentru celelalte axe Ox şi Oy, urmează

$$B=0,\ C=0,\ C'=0,$$

iar ecuaţia cuadricei raportată la un tripleu diametral, are deci forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+D=0,$$

care este analoagă cu a cuadricei raportată la axele sale.

Aplicând şi pentru cazul axelor oblice, acelaş raţionament ca la studiul cuadricelor cu centru, se vede că ecuaţiile

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0,\quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1,\quad \frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1$$

reprezintă, ca şi în cazul axelor perpendiculare, elipsoidul şi cei doi iperboloizi.

Cantităţile a', b', c' ne dau lungimile semidiametrilor conjugaţi, ai tripleului considerat. Axele unei cuadrice formează un tripleu de diametrii conjugaţi, perpendiculari între ei.

II. Raportând cuadrica la un tripleu de diametrii, putem stabili următoarele proprietăţi :

1°. *Secţiunile făcute într'o cuadrică prin plane paralele între ele sunt conice asemenea, având axele paralele, iar centrele lor sunt pe diametrul conjugat planului secţiunilor.* In adevăr, să alegem planul $x'Oy'$ paralel cu planul de secţiune şi să luăm ca axe Ox', Oy' doi diametrii conjugaţi în acest plan, iar ca Oz' diametrul conjugat planului $x'Oy'$; ecuaţia suprafeţei este

$$\frac{x'^2}{a'}+\frac{y'^2}{b'}+\frac{z'^2}{c'}=1.$$

Secțiunile paralele cu $x'Oy'$ se obțin făcând $z'=k$; proecțiile lor pe planul $x'Oy'$ au ecuația

$$\frac{x'^2}{a'}+\frac{y'^2}{b'}=1-\frac{k^2}{c'},$$

care sunt conice omotetice, cu centrele pe Oz'.

2°. *Planul tangent la o cuadrică la extremitatea* A *a unui diametru* OA *este paralel cu planul diametral conjugat diametrului* OA, căci secțiunea dusă prin A, paralel cu planul diametral considerat se reduce la un punct sau la un sistem de două drepte.

Deci, dacă se duc planele tangente la extremitățile diametrilor unui tripleu, acestea formează un paralelipiped ale cărui muchii sunt paralele cu diametrii tripleului. El se zice paralelipipedul conjugat tripleului.

Altă metodă pentru a recunoaște natura cuadricelor.

279. Am văzut că în cazul cuadricelor cu centru unic, o cuadrică raportată la un tripleu de diametrii, are o ecuație de aceeaș formă ca și în cazul axelor perpendiculare; deci, dacă descompunem într'o sumă de pătrate independente ecuația unei cuadrice, vom putea cunoaște natura cuadricei după această ecuație redusă.

Exemple. 1° $x^2+y^2+2z^2-4xz+2xy+1=0$. Centrul este în origină. Să descompunem forma cuadratică într'o sumă de pătrate. Avem

$$(x+y-2z)^2-(y-2z)^2+y^2+2z^2+1=0,$$
$$(x+y-2z)^2-2(y-z)^2+2y^2+1=0,\quad -(x+y-2z)^2+2(y-z)^2-2y^2-1=0,$$

cuadrica este un iperboloid cu două pânze.

2°. $xy+yz-3xz-8=0$. Avem

$$2(x+z)(y-3z)+6z^2-16=0,\quad (x+y-2z)^2-(x-y+4z)^2+12z^2-32=0,$$

cuadrica este iperboloid cu o pânză.

3°. $x^2+4y^2+5z^2+4xz-6=0$. Avem

$$(x+2z)^2+4y^2+z^2-6=0,$$

un elipsoid.

4°. $x^2-2y^2+3z^2+4zx-2xy+2y+\lambda=0$. Avem

$$(x-y+2z)^2-3y^2+4yz-z^2+2y+\lambda=0,$$
$$(x-y+2z)^2-\frac{1}{3}(-3y+2z+1)^2+\frac{(2z+1)^2}{3}-z^2+\lambda=0,$$
$$3(x-y+2z)^2-(-3y+2z+1)^2+(z+2)^2+3(\lambda-1)=0.$$

Dacă $\lambda<1$, un iperboloid cu o pânză; dacă $\lambda>1$, iperboloid cu două pânze; dacă $\lambda=1$, suprafața este un con real.

5°. $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2-1=0$. Planele $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$ trecând prin aceeaș dreaptă, funcțiunile $x-y$, $y-z$, $z-x$ nu sunt independente. Vom dezvolta primul membru al ecuației, $2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy-1=0$ și avem $\frac{1}{2}(2x-y-z)^2-\frac{(y+z)^2}{2}+2y^2+2z^2-2yz-1=0$, $(2x-y-z)^2+3(y-z)^2-2=0$, un cilindru eliptic real.

6°. Să se discute natura cuadricei $x^2+(\lambda+1)y^2+\lambda z^2-2yz+2xy+2x+2z+4=0$, λ fiind un parametru variabil. Avem

$$(x+y+1)^2-(y+1)^2+(\lambda+1)y^2+\lambda z^2-2yz+2z+4=0,$$

(1) $$(x+y+1)^2+\lambda y^2-2yz+\lambda z^2-2y+2z+3=0;$$

$$\lambda\neq 0,\ (x+y+1)^2+\frac{1}{\lambda}(\lambda y-z-1)^2-\frac{(z+1)^2}{\lambda}+\lambda z^2+2z+3=0,$$

(2) $$\lambda(x+y+1)^2+(\lambda y-z-1)^2+(\lambda^2-1)z^2+2(\lambda-1)z+3\lambda-1=0.$$

Presupunând $\lambda^2-1\neq 0$, putem scrie

$$\lambda(x+y+1)^2+(\lambda y-z-1)^2+\frac{1}{\lambda^2-1}[(\lambda^2-1)z+\lambda-1]^2-\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2-1}+3\lambda-1=0,$$

(3) $$\lambda(x+y+1)^2+(\lambda y-z-1)^2+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}[(\lambda+1)z+1]^2+\frac{\lambda(3\lambda+1)}{\lambda+1}=0.$$

Avem valorile principale ale lui λ, -1, $-\frac{1}{3}$, 0, 1, indicate de coeficienţii pătratelor şi termenul liber. Dacă $\lambda<-1$, avem semnele $-\ +\ +\ -$, suprafaţa este un iperboloid cu o pânză;

$-1<\lambda<-\frac{1}{3}$, $-\ +\ -\ +$, iperboloid cu o pânză;

$\lambda=-\frac{1}{3}$, $-\ +\ -\ 0$, con real;

$-\frac{1}{3}<\lambda<1$, $-\ +\ -\ -$, iperboloid cu două pânze;

$0<\lambda<1$, $+\ +\ -\ +$, iperboloid cu două pânze.

$1<\lambda$, $+\ +\ +\ +$, elipsoid imaginar.

Să considerăm cazurile $\lambda=0$ şi $\lambda^2-1=0$. Dacă $\lambda=0$, ecuaţia (1) devine

$$(x+y+1)^2-2yz-2y+2z+3=0,$$

$$(x+y+1)^2-2(y-1)(z+1)+1=0,\ (x+y+1)^2-2\left(\frac{y-1+z+1}{2}\right)^2+2\left[\frac{y-1-(z+1)}{2}\right]^2+1=0,$$

reprezintă un iperboloid cu două pânze.

In cazul $\lambda=1$, ecuaţia (2) devine

$$(x+y+1)^2+\left(\frac{y-1+z+1}{2}\right)^2+2=0,$$

care reprezintă un cilindru eliptic imaginar.

Când $\lambda=-1$, ecuaţia (2) devine

$$-(x+y+1)^2+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-4z-4=0,$$

care reprezintă un paraboloid iperbolic.

Avem deci rezultatul următor: $\lambda<-1$, iperboloid cu o pânză; $\lambda=-1$, paraboloid iperbolic; $-1<\lambda<-\frac{1}{3}$, iperboloid cu o pânză; $\lambda=-\frac{1}{3}$, con real; $-\frac{1}{3}<\lambda<1$, iperboloid cu două pânze; $\lambda=1$, cilindru eliptic imaginar; $\lambda>1$, elipsoid imaginar.

7°. Să se discute $-x^2+(\lambda-1)z^2+2(\lambda+1)yz-2zx+2xy+2x+2(\lambda-1)y-4z+\lambda=0$. Avem $\lambda<\frac{-1}{\sqrt{2}}$, ip. două pânze; $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, con real; $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<0$,

ip. o pânză; $\lambda=0$, par. ip.; $0<\lambda<\frac{1}{\sqrt{2}}$, ip. o pânză; $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$, con real; $\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<1$, ip. două pânze; $\lambda=1$, cilindru iperbolic; $1<\lambda<\infty$, iperboloid cu o pânză.

Focare. Cuadrice omofocale.

280 **Focare.** Un punct $F(\alpha,\beta,\gamma)$ se zice focar pentru o cuadrică, dacă expresiunea distanței unui punct oarecare $M(x,y,z)$ al cuadricei la punctul F se poate descompune într'un produs de doi factori lineari. Insă, cum un produs de doi factori se poate descompune într'o sumă algebrică de două pătrate, un punct $F(\alpha,\beta,\gamma)$ este focar pentru cuadrica $f(x,y,z)=0$, când avem

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=lP^2+mQ^2,$$

unde (x,y,z) este un punct oarecare al cuadricei $f(x,y,z)=0$, iar P și Q doi factori lineari în raport cu x,y,z.

Ecuația (1) trebuind se fie verificată de coordonatele tuturor punctelor cuadricei $f(x,y,z=0$, este chiar ecuația cuadricei. Coordonatele (α,β,γ) se obțin scriind că ecuația (1) și $f(x,y,z)=0$ reprezintă aceeaș cuadrică, adică identificând

$$f(x,y,z)\equiv S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-lP^2-mQ^2],$$

de unde

$$(2)\qquad f(x,y,z)-S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]\equiv -Sl P^2-Sm Q^2.$$

Presupunând că ecuația

$$(3)\qquad f(x,y,z)-S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=0$$

reprezintă o cuadrică, se vede, din relația (2), că ecuația se descompune într'o sumă de două pătrate; deci (No. 258) determinantul δ al ecuației (3) trebue să fie nul, adică (No. 266)

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}=0.$$

Valorile lui S care verifică identitatea (2) sunt deci rădăcinile ecuației în S. Inlocuind pe S cu aceste trei rădăcini, și făcând identificarea (2), se găsesc valorile lui $\alpha.\beta\gamma$, precum și l,m,P,Q. Dreapta reprezentată de ecuațiile $P=0$, $Q=0$ se zice directoarea corespunzătoare focarului (α,β,γ).

I. *In cazul elipsoidului,*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

avem

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=-S(lP^2+mQ^2).$$

Ecuaţia (4) este

$$\left(\frac{1}{a^2}-S\right)\left(\frac{1}{b^2}-S\right)\left(\frac{1}{c^2}-S\right)=0,$$

deci S trebue să fie înlocuit cu $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$.

Să considerăm mai întâi $S_3=\frac{1}{c^2}$. In acest caz avem

$$(6)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-S_3(x^2+y^2+z^2)=x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).$$

De aci urmează că ecuaţiile planelor P şi Q sunt de forma $P=x+p$, $Q=y+q$. Identitatea (5) devine

$$(7)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{1}{c^2}[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-c)^2]$$
$$\equiv\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x+p)^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(y+q)^2.$$

Ţinând seamă de identitatea (6), termenii de gradul al doilea se reduc; rămâne deci să avem din identificarea (7),

$$(8)\ \gamma=0,\ \frac{2\alpha}{c^2}=2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)p,\ \frac{2\beta}{c^2}=2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)q,$$
$$-1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}=p^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+q^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).$$

De unde

$$p=\frac{a^2}{c^2-a^2}\alpha,\ q=\frac{b^2}{c^2-b^2}\beta,$$

pe care înlocuindu-le în ultima relaţie (8), obţinem

$$(9)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2-c^2}+\frac{\beta^2}{b^2-c^2}-1=0.$$

Sunt deci o infinitate de puncte $F(\alpha,\beta,\gamma)$ situate în planul $x0y$ (de oarece $\gamma=0$), care sunt aşezate pe conica

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0.$$

Inlocuind pe S cu $\frac{1}{a^2}$ şi $\frac{1}{b^2}$, obţinem următoarele rezultate. Focarele elipsoidului sunt situate pe trei conice aşezate în planele principale ale elipsoidului, reprezentate de ecuaţiile

$$(10)\qquad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0,\ z=0,$$

$$(11)\qquad \frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}-1=0,\ x=0,$$

$$(12)\qquad \frac{z^2}{c^2-b^2}+\frac{x^2}{a^2-b^2}-1=0,\ y=0.$$

Presupunând $a>b>c$, elipsa (11) este imaginară. Singurele focare reale sunt cele situate în planele principale $z=0$ şi $y=0$.

Intersecţia planelor P=0, Q=0 este directoarea corespunzătoare fo-

carului considerat. In cazul $S=\frac{1}{c^2}$, ecuaţiile $x+p=0$, $y+q=0$ ale acestor plane sunt

$$x=\frac{a^2}{a^2-c^2}\alpha, \quad y=\frac{b^2}{b^2-c^2}\beta. \tag{13}$$

Directoarea este o dreaptă perpendiculară pe planul conicei focale (10). Locul acestor directoare se obţine eliminând pe α şi β între ecuaţiile (9) şi (13) şi este cilindrul

$$\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^4}+\frac{(b^2-c^2)y^2}{b^4}-1=0.$$

Focala (10), locul focarelor din planul $z=0$, este o elipsă; focala (12) este o iperbolă.

Proprietăţile focale ale elipsoidului. 1°. *Orice plan care trece printr'un focar* F *şi directoarea* D *corespunzătoare, tae elipsoidul după o conică având focarul* F *şi directoarea* D. In adevăr, să luăm ca plan xOy planul format de F şi D, origina fiind în F, iar ecuaţia directoarei D, $d=0$.

Ecuaţia focală (1) devine în acest caz

$$x^2+y^2+z^2=lP^2+mQ^2. \tag{14}$$

Dar, planele P şi Q trecând prin D, ecuaţiile lor sunt de forma

$$d+\lambda z=0, \quad d+\mu z=0.$$

Ecuaţia cuadricei este

$$x^2+y^2+z^2=l(d+\lambda z)^2+m(d+\mu z)^2.$$

Luând intersecţia cuadricei cu planul xOy, adică făcând $z=0$, avem

$$x^2+y^2=(l+m)d^2,$$

o conică cu focarul în origină (în F) şi directoarea $d=0$, dreapta D.

2°. *Planul polar al unui focar trece prin directoarea corespunzătoare.* In adevăr, ecuaţia cuadricei fiind (14), planul polar al punctului (x_1, y_1, z_1) este

$$xx_1+yy_1+zz_1=lPP_1+mQQ_1.$$

Planul polar al focarului (originii) este de forma

$$\lambda P+\mu Q=0,$$

adică trece prin directoarea D, intersecţia planelor P şi Q.

3°. *Planul polar în raport cu cuadrica a unui punct* M *situat pe o directoare este perpendicular pe dreapta care uneşte punctul* M *cu focarul corespunzător.* In adevăr, cuadrica fiind reprezentată de ecuaţia (14), fie $M(x_1, y_1, z_1)$ un punct situat pe o directoare perpendiculară pe planul xOy. Ecuaţia planului său polar este

$$xx_1+yy_1+zz_1=lPP_1+mQQ_1$$

Punctul fiind pe directoare, avem

$$P_1=0, \quad Q_1=0,$$

deci ecuaţia planului polar este

$$xx_1+yy_1+zz_1=0.$$

Parametrii directori ai normalei la acest plan sunt (x_1, y_1, z_1) adică ai dreptei MF, ce uneşte focarul F (origina) cu punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ şi deci acest plan polar este perpendicular pe dreapta ce uneşte punctul M cu focarul corespunzător directoarei D.

II. *Iperboloizi.* In cazul iperboloidului cu o pânză,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

sunt două conice focale reale, situate în planele $y=0$, $z=0$. Ecuația elipsei focale este

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}-1=0,\ z=0,$$

iar a iperbolei focale,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}-1=0,\ y=0.$$

Aceste două plane focale trec prin axa transversă cea mai mare.
În cazul iperboloidului cu două pânze,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

sunt două conice focale reale, iperbola

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0,\ z=0,$$

și elipsa

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}-1=0,\ y=0.$$

Cele două plane focale sunt planele principale ce trec prin axa transversă.

III. *Con.* În cazul conului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

curbele focale se obțin suprimând, în cazul iperboloidului cu o pânză, termenul constant; se obțin dreptele reale

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{b^2+c^2}=0,\ z=0;\quad \frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{a^2+c^2}=0,\ x=0.$$

Aceste patru drepte se zic dreptele focale ale conului.

IV. *Paraboloizi.* Identificând ecuația paraboloizilor

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

cu ecuația focală $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=lP^2+mQ^2$, trebue să avem

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=2z-S(lP^2+mQ^2). \tag{15}$$

Luând numai termenii de gradul al doilea, trebue să avem

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-S(x^2+y^2+z^2)=-S(lP_0^2+mQ_0^2).$$

Ecuația (4) devine în acest caz $\left(\frac{1}{p}-S\right)\left(\frac{1}{q}-S\right)(-S)=0$. Va trebui deci a lua $S_1=\frac{1}{p}$, $S_2=\frac{1}{q}$.

Considerând mai întâi cazul $S_1=\frac{1}{p}$, se vede că avem

(16) $$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-S_1(x^2+y^2+z^2)=y^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{z^2}{p},$$

de unde urmează că expresiunile P şi Q sunt de forma

$$P=y-\lambda,\ Q=z-\mu$$

Inlocuind în (15), avem, observând (16),

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-\frac{1}{p}[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]\equiv 2z-\left[\frac{p-q}{pq}(y-\lambda)^2-\frac{1}{p}(z-\mu)^2\right].$$

Făcând identificarea, termenii de gradul al doilea se reduc în virtutea relaţii (16) şi urmează

(17) $$\alpha=0,\ \frac{\beta}{p}=\frac{p-q}{pq}\lambda,\ \frac{\gamma}{p}=1+\frac{\mu}{p},\ \frac{\beta^2+\gamma^2}{p}=\frac{p-q}{pq}\lambda^2-\frac{\mu^2}{p}.$$

De unde

$$\lambda=\frac{q}{p-q}\beta,\ \mu=\gamma-p,$$

pe care înlocuindu-le în ultima ecuaţie (17), avem

$$\beta^2=(p-q)(2\gamma-p).$$

In cazul $S_2=\frac{1}{q}$, va fi de ajuns a schimba pe x cu y, p cu q şi α cu β, aşa că focarele sunt date de ecuaţiile

$$\beta=0,\ \alpha^2=(-p+q)(2\gamma-q).$$

Deci, paraboloizii au focarele situate pe conicele focale

$$x^2=(q-p)(2z-p),\ y=0;\ y^2=(p-q)(2z-q),\ x=0,$$

aşezate în planele principale care se tae după axă.

281. **Cuadrice omofocale.** I. Fiind dată o cuadrică cu centru,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\epsilon b^2}+\frac{z^2}{\epsilon' c^2}-1=0,\ \epsilon=\pm 1,\ \epsilon'=\pm 1,$$

se zic suprafeţe omofocale cu acestea, suprafeţele reprezentate de ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{\epsilon b^2+\lambda}+\frac{z^2}{\epsilon' c^2+\lambda}-1=0,$$

λ fiind un parametru variabil.

1°. *Toate suprafeţele omofocale au aceleaşi conice focale*, căci în ecuaţiile conicelor focale figurează numai diferenţele pătratelor de la numitor, care sunt deci independente de λ.

2°. In cazul ecuaţii

(18) $$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,\ a>b>c,$$

dacă $-\infty<\lambda<-a^2$, toţi numitorii sunt negativi, suprafaţa este imaginară; $-a^2<\lambda<-b^2$, numai un numitor e pozitiv, este iperboloid cu două pânze; $-b^2<\lambda<-c^2$, doi numitori pozitivi, iperboloid cu o pânză; $-c^2<\lambda<\infty$, toţi numitorii pozitivi, cuadrica este elipsoid real. Pentru $\lambda=-a^2$, $\lambda=-b^2$, $\lambda=-c^2$, suprafaţa se reduce la curbe, care sunt tocmai conicele focale.

3°. *Coordonate eliptice. Prin fiecare punct al spaţiului trec numai trei suprafeţe ale unei familii de cuadrice omofocale, un elipsoid, un iperboloid cu*

o pânză şi un iperboloid cu două pânze. In adevăr, exprimând că cuadrica (18) trece prin punctul (x_1,y_1,z_1), avem

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

Se vede că această ecuaţie de gradul al treilea în λ are trei rădăcini reale, cuprinse în intervalele $(-a^2, -b^2)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-c^2,\infty)$. Rădăcinilor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale acestei ecuaţii le corespund respectiv, un iperboloid cu două pânze, un iperboloid cu o pânză şi un elipsoid şi deci proprietatea este învederată.

Fiecare punct al spaţiului poate fi deci caracterizat prin aceste valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, care se numesc, pentru acest motiv, un *sistem de coordonate eliptice ale spaţiului.* Există o infinitate de asemenea sisteme, fiindcă putem alege oricum pe a, b, c.

Coordonatele (x_1, y_1, z_1) ale unui punct se pot exprima în funcţiune de valorile $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ corespunzătoare în modul următor. Avem identitatea

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}-1\equiv\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Inmulţind cu $a^2+\lambda$ în ambii membrii şi pe urmă făcând $\lambda=-a^2$, avem

$$x_1^2=-\frac{(\lambda_1+a^2)(\lambda_2+a^2)(\lambda_3+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}.$$

In mod analog, avem

$$y_1^2=\frac{-(\lambda_1+b^2)(\lambda_2+b^2)(\lambda_3+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},\quad z_1^2=\frac{-(\lambda_1+c^2)(\lambda_2+c^2)(\lambda_3+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

De aci urmează că formulele generale care leagă coordonatele carteziene (x,y,z) cu coordonatele eliptice corespunzătoare (λ,μ,ν) sunt

$$x^2=\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+c^2)}{(c^2-b^2)(b^2-a^2)},\quad z^2=\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}.$$

II. In mod analog, suprafeţele omofocale cu paraboloidul

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

sunt reprezentate de ecuaţia

$$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}=2z+\lambda.$$

Generatoare Rectilinii.

In afară de con şi cilindru, dintre cuadrice, iperboloidul cu o pânză şi paraboloidul iperbolic au generatoare rectilinii.

282. **Iperboloidul cu o pânză.** Să scriem ecuaţia iperboloidului sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Să tăem suprafaţa cu planele

(1) $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

şi înlocuind în ecuaţia suprafeţei, obţinem

(2) $$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Punctele comune planelor (1) şi (2) sunt aşezate pe suprafaţă. Dar aceste plane, când λ variază, se tae după o dreaptă, aşezată pe suprafaţă. Deci, ecuaţiile (1) şi (2) reprezintă un sistem de generatoare rectilinii, (λ), aşezate pe iperboloidul cu o pânză.

In mod analog, se vede că

(3) $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

când μ variază, reprezintă al doilea sistem de generatoare (μ), ale iperboloidului cu o pânză.

1°. *Prin fiecare punct al suprafeţei trece câte o generatoare din fiecare sistem şi numai câte una.* In adevăr, pentru a găsi generatoarea (λ) care trece prin punctul (x_0,y_0,z_0), e destul de a rezolva în raport cu λ una din ecuaţiile (1) sau (2) şi cum aceste ecuaţii sunt de gradul întâi în raport cu λ, se vede că trece o singură generatoare prin acest punct.

2°. *Două generatoare de acelaş sistem nu se întâlnesc niciodată,* căci dacă s'ar întâlni într'un punct, ar urma că prin acel punct trec două generatoare din acelaş sistem, ceea ce este imposibil.

3°. *Două generatoare de sisteme diferite se întâlnesc totdeauna într'un punct al suprafeţei.* Pentru a arăta aceasta, va trebui a proba că ecuaţiile a două generatoare (λ) şi (μ),

$$(\lambda)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{y}{b}\right);\end{cases}\qquad (\mu)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}$$

admit o soluţie comună în raport cu x, y, z, care este punctul comun al acestor două drepte. In adevăr din prima şi a treia, deducem

$$\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

de unde

$$\frac{y}{b}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}.$$

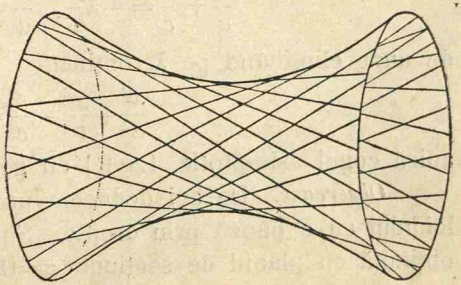


Fig. 328.

Inlocuind pe $\frac{y}{b}$ cu această valoare în a doua și a treia și rezolvând în raport $\frac{x}{a}$ și $\frac{z}{c}$, avem

$$\frac{x}{a}=\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu},\quad \frac{z}{c}=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda+\mu}.$$

Inlocuind aceste valori în ecuația a patra, obținem identitatea

$$\frac{2}{\lambda+\mu}=\frac{2}{\lambda+\mu}$$

deci, aceste generatoare se tae în punctul de coordonate

$$(4)\qquad \frac{x}{a}=\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu},\quad \frac{y}{b}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu},\quad \frac{z}{c}=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda+\mu}.$$

Prin fiecare punct al suprafeței trecând o generatoare (λ) și una (μ), urmează că formulele (4) dau coordonatele fiecărui punct al suprafeței în funcțiune de parametrii λ și μ.

4°. *Generatoarele care trec printr'un punct determină planul tangent în acel punct,* căci planul tangent la suprafață în acel punct, conține tangentele la curbele trase pe suprafață prin acel punct, adică cele două generatoare rectilinii ce trec prin acel punct.

5°. *Generatoarele* (λ) *și* (μ) *sunt singurele drepte situate pe suprafață.* In adevăr, dacă ar mai exista o altă dreaptă, să considerăm un punct M pe ea și să ducem cele două generatoare (λ) și (μ) care trec prin acel punct. Ar trece prin punctul M trei generatoare rectilinii distincte, ceeace este imposibil, căci aceste trei drepte trebuind să fie în planul tangent la suprafață în M, ar rezulta că planul tangent tae suprafața de ordinul al doilea după trei drepte, pe când noi am văzut că o tae după două drepte distincte.

6°. *Dreptele duse prin centrul suprafeței paralele cu generatoarele sale rectilinii, se găsesc pe conul asimptotic.* In adevăr, ecuațiile acestor paralele sunt

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=-\lambda\frac{y}{b},\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{y}{\lambda b},$$

de unde eliminând pe λ, obținem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

adică conul asimptotic. La fel cu generatoarele (μ).

Observare. De aci deducem un mijloc de generare a iperboloidului cu o pânză prin drepte. Să considerăm elipsa colierului, obținută cu planul de secțiune $z=0$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Planul tangent la suprafață, într'un punct $(x_1, y_1, 0)$ al acestei elipse este

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

și se vede că este paralel cu Oz. Dar, acest plan tangent este format de cele două generatoare (λ) și (μ) ce trec prin acel punct. Insă, generatoarele conului, paralele cu acestea, determină un plan diametral (căci știm că planul tangent în M la capătul diametrului OM este paralel cu planul diametral conjugat cu OM) conjugat cu OM. De aci rezultă următoarea generare a iperboloidului cu o pânză. Ducem un plan oarecare prin axa conului, care-l tae după două generatoare OP și OQ, iar elipsa colierului după diametrul NN'. Fie MM' diametrul conjugat cu NN' în elipsa colierului. Paralelele duse la OP și OQ prin punctele M și M' sunt generatoarele suprafeței ce trec prin M și M', iar când planul se rotește în jurul axei, aceste drepte nasc iperboloidul.

7°. Trei generatoare din același sistem nu pot fi paralele cu același plan. In adevăr, paralelele duse prin centrul suprafeței sunt pe conul asimptotic și nu sunt într'un plan, căci un asemenea plan tae conul asimptotic după cel mult două generatoare.

Din această proprietate, rezultă o altă generare a iperboloidului. Pentru aceasta, să considerăm trei drepte D_1, D_2, D_3 neparalele cu același plan. Există o infinitate de drepte D, care întâlnesc deodată cele trei drepte (No. 243, I). Dreptele D formează un sistem de generatoare, iar dreptele D_1, D_2, D_3 fac parte din celalt sistem de generatoare. Iperboloidul născut trece prin toate vârfurile paralelipipedului, iar toate muchile sale sunt generatoare, sunt situate în întregime pe iperboloid.

283. **Paraboloidul iperbolic.** Scriind ecuația paraboloidului sub forma

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)\left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right) = 2z,$$

se vede că sunt două sisteme de generatoare

$$(\lambda)\begin{cases} \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = \lambda z, \\ \dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = \dfrac{2}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(\mu)\begin{cases} \dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = \mu z, \\ \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = \dfrac{2}{\mu}. \end{cases}$$

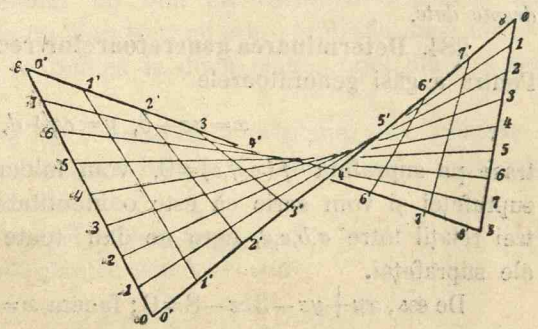


Fig. 329.

1°. *Prin fiecare punct al suprafeţei trec câte o generatoare din fiecare sistem.*

2°. *Două generatoare din acelaş sistem nu se întâlnesc nici odată.*

3°. *Două generatoare de sisteme diferite se tae totdeauna într'un punct al suprafeţei.* Un punct oarecare al suprafeţei se reprezintă parametric

$$\frac{x}{p}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu},\quad \frac{y}{q}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu},\quad z=\frac{2}{\lambda\mu},$$

λ şi μ fiind doi parametrii variabili.

4°. *Generatoarele ce trec printr'un punct al suprafeţei determină planul tangent în acel punct.*

5°. *Generatoarele* (λ) *şi* (μ) *sunt singurele situate pe paraboloid.*

6°. *Generatoarele din fiecare sistem sunt paralele cu un plan fix.* In adevăr, din ecuaţiile generatoarei (λ), se vede că sunt paralele cu planul

$$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0, \tag{5}$$

iar generatoarele (μ) sunt paralele cu planul

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=0. \tag{6}$$

Aceste două plane se zic *planele directoare* ale paraboloidului. Ecuaţiile planelor directoare ne arată că aceste plane trec prin axa paraboloidului şi că sunt simetrice faţă de planele principale care determină acea axă.

De aci rezultă un nou sistem de generare a paraboloidului. Să considerăm două generatoare dintr'un sistem; fiecare generatoare din celalt sistem întâlneşte aceste două generatoare şi este paralelă cu planul director corespunzător. Deci, *paraboloidul poate fi născut de o dreaptă variabilă paralelă cu un plan fix şi care întâlneşte două drepte date.*

284. **Determinarea generatoarelor rectilinii în cazul general.** Pentru a găsi generatoarele

$$x=az+b,\quad y=cz+d,$$

trase pe suprafaţa $f(x,y,z)=0$, vom înlocui pe x şi y în ecuaţia suprafeţei şi vom scrie că este o identitate în z. Obţinem, astfel, trei relaţii între a,b,c,d, care ne dau toate generatoarele rectilinii ale suprafeţei.

De ex., $xy+yz-3xz-8=0$; facem $x=az+b$, $y=cz+d$ şi avem

$$acz^2+(ad+bc)z+bd+cz^2-3az^2-3bz-8\equiv 0.$$

De unde

$$ac+c-3a=0,\ ad+bc+d-3b=0,\ bd=8;$$

$$c=\frac{3a}{a+1},\quad d^2=\frac{24}{(a+1)^2},\quad b^2=\frac{8(a+1)^2}{3}.$$

Cele două sisteme de generatoare sunt reprezentate de ecuaţiile

$$x=az\pm\frac{2\sqrt{2}(a+1)}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{3az}{a+1}\pm\frac{2\sqrt{6}}{a+1}.$$

Suprafaţa este un paraboloid iperbolic.

Secţiunile circulare ale cuadricelor.

Dacă tăem suprafeţele de rotaţie cu plane perpendiculare pe axa lor, secţiunile plane sunt cercuri. Să cercetăm dacă celelalte cuadrice admit secţiuni circulare. Vom face acest studiu pe ecuaţiile lor reduse.

285. **Cuadrice cu centru.** Ştim că secţiunile făcute într'o cuadrică prin plane paralele sunt conice omotetice. De aceea, va fi de ajuns, a vedea, dacă sunt plane care să treacă prin centru şi pentru care să avem secţiuni circulare.

Să presupunem că există un plan (P), dus prin origină şi care tae cuadrica

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1 a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon_2 b^2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3 c^2}-1=0,\ a>b>c,$$

după un cerc de raza r. Acest cerc este situat pe sfera de centrul O şi raza r,

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0.$$

Scăzând din ecuaţia cuadricei pe a sferei, înpărţită cu r^2, avem

$$x^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2 b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3 c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0.$$

Această ecuaţie reprezintă un con cu vârful în origină şi cum vedem că este tăiat de un plan trecând prin vârful său după un cerc rezultă că trebue să se reducă la două plane, unul din ele fiind chiar planul cercului.

Dar, pentru ca să se reducă la două plane, este necesar şi suficient ca unul din pătrate să lipsească. Deci, raza r a cercului trebue să aibă una din valorile

$$r^2=\varepsilon_1 a^2,\ r^2=\varepsilon_2 b^2,\ r^2=\varepsilon_3 c^2,$$

iar ecuaţiile celor două plane respective sunt

$$(1)\qquad y^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2 b^2}-\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3 c^2}-\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}\right)=0,$$

$$(2) \qquad z^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3 c^2}-\frac{1}{\varepsilon_2 b^2}\right)+x^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}-\frac{1}{\varepsilon_2 b^2}\right)=0$$

$$(3) \qquad x^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}-\frac{1}{\varepsilon_3 c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2 b^2}-\frac{1}{\varepsilon_3 c^2}\right)=0.$$

Dacă suprafaţa este *elipsoid*, avem $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, iar ecuaţia planelor reale este

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0,$$

celelalte plane fiind imaginare. Ambele aceste plane tae elipsoidul după un cerc de rază b. In adevăr, tăind elipsoidul cu o sferă de rază b, ecuaţia (2) arată că curba de secţiune se descompune în două curbe plane, care fiind situate pe sferă, în plane trecând prin centrul ei, sunt cercuri de rază b. Deci elipsoidul are două sisteme de plane circulare, paralele respectiv cu planele

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0,$$

care sunt paralele cu axa mijlocie Oy şi egal înclinate pe planele principale.

Dacă suprafaţa este *iperboloid cu o pânză*, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=-1$, avem numai următoarele plane reale

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0.$$

Deci şi aci avem două serii de plane circulare, respectiv paralele cu planele

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0,$$

perpendiculare pe planul xOy.

In cazul *iperboloidului cu două pânze*, sunt iarăşi două serii de plane circulare, paralele cu planele

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0,$$

paralele cu Oy.

Până acum am presupus $a>b>c$. In cazul *suprafeţelor de rotaţie*,

$$\frac{x^2+y^2}{\varepsilon_1 a^2}+\frac{z^2}{\varepsilon_2 c^2}-1=0,$$

planele circulare (1), (2), (3) se reduc numai la $z^2=0$, $x^2+y^2=0$, deci, singurele plane circulare reale sunt cele paralele cu $z=0$, adică perpendiculare pe axa suprafeţei de rotaţie (afară de sferă).

286. **Paraboloizi.** Ecuația paraboloizilor fiind

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

dacă tăem cu sfera

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda z=0,$$

curba de intersecție este pe conul

$$x^2\left(\frac{\lambda}{p}-1\right)+y^2\left(\frac{\lambda}{q}-1\right)-z^2=0,$$

Pentru $\lambda=p$, $\lambda=q$, acest con se reduce respectiv la planele

$$x\left(\frac{p}{q}-1\right)-z^2=0,\ y^2\left(\frac{p}{q}-1\right)-z^2=0.$$

Dacă p și q sunt de semne diferite, adică paraboloid iperbolic, ambele serii de plane sunt imaginare. Deci *paraboloidul iperbolic n'are secțiuni circulare.*

Dacă p și q sunt pozitivi, $p>q$, singurele plane reale sunt

$$y\sqrt{\frac{p}{q}-1}\pm z=0.$$

Deci paraboloidul eliptic are două sisteme de plane circulare paralele cu tangenta la vârf la parabola principală cea mare.

287. **Puncte circulare.** Extremitățile diametrilor conjugați planelor circulare se zic puncte circulare. Cuadricele cu centru au deci patru puncte circulare, simetrice două câte două față de centrul cuadricei.

288. **Determinarea secțiunilor circulare în general.** Fie $f(x,y,z)=0$ ecuația cuadricei și

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

ecuația unei sfere Σ. Ecuația generală a cuadricelor ce trec prin intersecția cuadricei cu sfera este

$$f(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d)=0.$$

Valorile lui S pentru care această cuadrică se reduce la două plane vor fi aceleași ca și pentru expresia

$$\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)=0, \tag{4}$$

să se reducă la două plane. Rezultă deci că S trebue să fie o rădăcină a ecuații în S. Descompunând în factori lineari expresiunea (4), obținem direcțiile planelor circulare.

De oarece

$$\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)=(S_1-S)x'^2+(S_2-S)y'^2+(S_3-S)z'^2,$$

Ox', Oy', Oz' fiind axele cuadricei, se vede că avem plane reale numai dacă înlocuim pe S cu rădăcina mijlocie a ecuaţii în S.

Cazul paraboloizilor este cuprins în acesta, observând că una din rădăcinile ecuaţii în S este zero.

De ex., $x^2+3yz-z^2+2x=0$. Ecuaţia în S este

$$\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 \\ 0 & -S & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1-S \end{vmatrix} = 0,\ (1-S)\left(S^2+S-\frac{9}{4}\right)=0;\ 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}.$$

Direcţiunile planelor circulare sunt date de ecuaţia

$$x^2+3yz-z^2-(x^2+y^2+z^2)=3yz-2z^2-y^2,\ (y-2z)(y-z)=0.$$

Planele circulare sunt deci paralele cu planele

$$y-2z=0,\ y-z=0.$$

Determinarea cuadricelor prin condiţii iniţiale.

289. Ecuaţia generală a cuadricelor deşi conţine 10 parametrii variabili, împărţind cu unul din ei, rămân numai 9 coeficienţi arbitrari. Deci, pentru ca o cuadrică să fie determinată, trebuesc în general, *nouă condiţii simple* (condiţia simplă fiind dată de o singură relaţie între coeficienţi).

Un punct fiind o condiţie simplă, o cuadrică e determinată în general prin *nouă* puncte. Un *plan tangent* revine de asemenea la o condiţie simplă, fiindcă pentru ca un plan să fie tangent la o cuadrică, e necesar şi suficient ca intersecţia lor să fie o conică redusă (degenerată), ceea ce dă o singură relaţie. Un *plan tangent şi punctul de contact* reprezintă trei condiţii, căci identificând ecuaţia unui plan cu a unui plan tangent într'un punct dat, se obţin trei condiţii. *Centrul* fiind dat, înseamnă că sunt trei condiţii simple, fiindcă este dat de trei relaţii. In mod analog, se vede că cunoaşterea unui *plan remarcabil* (plan principal, plan circular trecând printr'un punct circular, plan tangent într'un vârf), echivalează cu *trei* condiţii, fiindcă identificând, obţinem trei relaţii. De asemenea, o *dreaptă remarcabilă* (axă), echivalează cu patru condiţii, fiindcă o dreaptă depinde de patru parametrii. O *conică* situată pe suprafaţă reprezintă *cinci* condiţii, căci ea revine la cinci puncte aşezate pe suprafaţă.

O generatoare rectilinie echivalează cu *trei* condiţii, căci, pentru ca o dreaptă să fie situată pe suprafaţă, e necesar şi suficient ca trei din punctele sale să fie pe suprafaţă, ceea ce revine la trei condiţii. *Două generatoare din acelaş sistem* reprezintă deci *şase* con-

diţii, iar *trei generatoare* din acelaş sistem, *nouă* condiţii. Dacă sunt de sisteme diferite, ele se întâlnesc, deci avem o relaţie între ele, deci o condiţie mai puţin. *O conică şi o dreaptă* reprezintă numai şapte condiţii în loc de nouă. *Două conice* echivalează cu *opt* condiţii, căci au două puncte comune.

In general, fiind date anumite condiţii geometrice, se exprimă analitic şi se va vedea câte relaţii sunt între coeficienţi.

290. **Intersecţia a două cuadrice.** 1°. *Intersecţia a două cuadrice este o curbă strâmbă de ordinul al patrulea*, căci un plan oarecare tae fiecare cuadrică după câte o conică, care se vor tăia în patru puncte, astfel că un plan oarecare tae această curbă în patru puncte.

2°. *Dacă două cuadrice au o dreaptă comună, restul intersecţii se reduce la o curbă strâmbă de ordinul al treilea.*

3°. *Dacă două cuadrice au o conică comună, restul intersecţii este tot o conică.* In adevăr, să alegem ca plan xOy planul conicei comune şi fie $f(x,y)=0$ ecuaţia acestei conice. Ecuaţiile celor două cuadrice sunt de forma

$$f(x,y)+zP=0,\ f(x,y)+zQ=0,$$

P şi Q fiind funcţiuni liniare de x,y,z. Scăzând ecuaţiile cuadricelor avem

$$z(P-Q)=0.$$

Punctele de intersecţie a celor două cuadrice verifică deci, sau $z=0$, adică sunt pe conica din planul xOy, sau $P-Q=0$, care arată că cealaltă parte a intersecţii este în planul $P-Q=0$, care tae cuadricele tot după o conică.

291. **Ecuaţiile generale ale cuadricelor ce îndeplinesc condiţii date.** 1°. *Ecuaţia cuadricelor ce trec prin intersecţia a două cuadrice* $f(x,y,z)=0$ şi $g(x,y,z)=0$ este de forma

$$f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=0,$$

λ fiind un parametru variabil. Se zice că aceste cuadrice formează un *fascicol punctual de cuadrice.*

2°. *Ecuaţia cuadricelor care tae o cuadrică după două conice date.* Fie $P=0$, $Q=0$ ecuaţiilor planelor celor două conice situate pe cuadrica $f(x,y,z)=0$. Ecuaţia

$$f(x,y,z)+\lambda PQ=0,$$

este ecuaţia generală a cuadricelor căutate.

3°. *Ecuaţia generală a cuadricelor tangente unei cuadrice dealungul unei conice date* este

$$f(x,y,z)+\lambda P^2=0,$$

$P=0$ fiind ecuaţia planului unde e situată conica.

4°. *Ecuația cuadricelor ce trec printr'o dreaptă dată* este de forma

$$PP_1+\lambda QQ_1=0,$$

P,P_1,Q,Q_1 fiind funcțiuni lineare de x,y,z, iar $P=0$, $Q=0$ ecuațiile dreptei date.

5°. *Ecuația cuadricelor ce trec prin două drepte date* (nesituate în acelaș plan). Fie $P=0$, $Q=0$ și $P_1=0$, $Q_1=0$ ecuațiile celor două drepte. Ecuația cuadricelor este

$$\alpha PP_1+\beta PQ_1+\gamma QP_1+\delta QQ_1=0,$$

care se mai poate pune sub formele

$$P(\alpha P_1+\beta Q_1)+Q(\gamma P_1+\delta Q_1)=0,\ P_1(\alpha P+\gamma Q)+Q_1(\beta P+\delta Q)=0.$$

Proprietăți speciale ale cuadricelor.

292. **Con.** I. Vârful este un centru de simetrie al suprafeței și este singurul. Deci conul aparține categorii de suprafețe de ordinul al doilea, cu centru unic. Ecuația redusă a suprafețelor de ordinul al doilea cu centru unic fiind

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+\frac{\Delta}{\delta}=0,$$

condiția ca să reprezintă un con este $\Delta=0$, $\delta\neq 0$.

II. *Con echilater.* Se zice con echilater acela pentru care $A+A'+A''=0$, A,A',A'' fiind coeficienții lui x^2,y^2,z^2 din ecuația sa.

Pe un asemenea con se poate așeza o infinitate de triedre tridreptunghice. In adevăr, să luăm o generatoare oarecare a sa ca axă Oz și să ducem prin vârful O al conului un plan perpendicular pe Oz și să alegem ca Ox o generatoare oarecare a conului situată în acest plan, iar ca Oy o dreaptă perpendiculară pe aceasta, tot în acest plan.

Ecuația generală a conurilor cu vârful în origină este

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

Trebuind să conție generatoarea $Oz(x=0,\ y=0)$ urmează $A''=0$; tot așa cu axa $Ox(z=0, y=0)$, $A=0$. De oarece avem $A+A'+A''=0$, oricare ar fi axele de coordonate (căci $A+A'+A''=S_1+S_2+S_3$, suma rădăcinilor ecuații în S, ai cărei coeficienți sunt invarianți față de rotația axelor perpendiculare), trebue ca $A''=0$. Deci ecuația conului devine

$$Byz+B'zx+B''xy=0,$$

ceea ce arată că și axa Oy se află pe acest con Deci de la orice generatoare am porni, obținem un triedru tridreptunghic, situat pe con.

Se poate zice că un con echilater este capabil de o infinitate de triedre tridreptunghice.

III. *Conuri suplimentare.* Locul dreptelor duse prin vârful unui con, perpendicular pe planele tangente ale conului formează *conul suplimentar* al conului dat. Fie

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0$$

ecuaţia unui con cu vârful în origină.

Ecuaţiile perpendicularei în vârful conului pe planul tangent dealungul generatoarei ce trece prin punctul (x_1,y_1,z_1), sunt

$$\frac{x}{Ax_1+B''y_1+B'z_1}=\frac{y}{B''x_1+A'y_1+Bz_1}=\frac{z}{B'x_1+By_1+A''z_1},$$

sau

$$\begin{aligned} Ax_1+B''y_1+B'z_1&=\lambda x,\\ B''x_1+A'y_1+Bz_1&=\lambda y,\\ B'x_1+By_1+Az_1''&=\lambda z. \end{aligned}$$

Rezolvând aceste ecuaţii în raport cu x_1,y_1,z_1 şi scriind că aceste valori verifică ecuaţia conului (1), obţinem ecuaţia

$$(2)\quad ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=0,$$

în care fiecare coeficient reprezintă minorul corespunzător literilor mari din determinantul δ.

Proprietatea conului suplimentar este reciprocă. Fiind date două conuri suplimentare, fiecare este suplimentarul celuilalt. In adevăr determinantul conului (2) este reciprocul determinantului δ. Dacă aplicăm regula precedentă conului (2) şi ştim că minorii determinantului reciproc sunt proporţionali cu termenii corespunzători ai lui δ, avem ca ecuaţie a conului suplimentar iarăşi ecuaţia (1).

293. **Elipsoid. Iperboloizi.** *Formulele de transformare în schimbarea direcţiunei axelor de coordonate.* Se vede din formulele (21) (No. 199), că în caz când triedrul $Oxyz$ este tridreptunghic ($\lambda=\mu=\nu=90^0$), formulele de transformare de la un triedru tridreptunghic $Oxyz$ la unul oarecare $Oxyz$, sunt

$$(3)\quad \begin{aligned} x&=a_1x'+a_2y'+a_3z',\\ y&=b_1x'+b_2y'+b_3z',\\ z&=c_1x'+c_2y'+c_2z'. \end{aligned}$$

Modulul de transformare al acestei substituţii este

$$(4)\quad V=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

unde cosinusurile directoare (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) (a_3,b_3,c_3) sunt respectiv coordonatele perpendiculare față de triedrul tridreptunghic $Oxyz$, ale extremităților A, B, C ale vectorilor OA, OB, OC egali cu unitatea, luați pe axele Ox',Oy',Oz'. Dar $\frac{1}{6}V$ este volumul tetraedrului OABC; deci V *este volumul paralelipipedului construit pe unitățile* OA,OB,OC *ca muchii.*

II. *Teoremele lui Apollonius.* Să considerăm o cuadrică cu centru și un tripleu de diametrii OA,OB,OC, de lungimile $2a',2b',2c'$. Să notăm cu λ,μ,ν unghiurile $B'OC'$, $C'OA'$, $A'OB'$. Ecuația cuadricei raportată la acest tripleu este

$$\frac{x'^2}{\varepsilon_1 a'^2}+\frac{y'^2}{\varepsilon_2 b'^2}+\frac{z'^2}{\varepsilon_1 c'^2}-1=0,$$

iar la axele sale, ecuația cuadricei este

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1 a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon_2 b^2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3 c^2}-1=0,$$

unitățile $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ fiind aceleași în ambele ecuații, căci aceste ecuații reprezintă aceași cuadrică, iar unitățile depind numai de genul cuadricei.

Dacă considerăm expresiunea

$$E\equiv\frac{x^2}{\varepsilon_1 a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon_2 b^2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3 c^2}-S(x^2+y^2+z^2),$$

și facem schimbarea axelor de coordonate, prin care trecem de la axele perpendiculare la cele oblice $Ox'y'z'$, cu formulele (3), această expresiune devine

$$E'\equiv\frac{x'^2}{\varepsilon_1 a'^2}+\frac{y'^2}{\varepsilon_2 b'^2}+\frac{z'^2}{\varepsilon_3 c'^2}-S(x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu)$$

Avem deci identitatea $E\equiv E'$, oricare ar fi S. Aplicând teorema discriminantului a două forme cuadratice, avem

$$V^2\begin{vmatrix}\frac{1}{\varepsilon_1 a^2}-S & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_2 b^2}-S & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3 c^2}-S\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\frac{1}{\varepsilon_1 a'^2}-S & -S\cos\nu & -S\cos\mu\\ -S\cos\nu & \frac{1}{\varepsilon_2 b'^2}-S & -S\cos\lambda\\ -S\cos\mu & -S\cos\lambda & \frac{1}{\varepsilon_3 c'^2}-S\end{vmatrix},$$

ținând seamă că modulul de transformare este volumul V al paralelipipedului, (4), construit pe cele trei unități ale axelor oblice OA', OB', OC'.

Aceasta relaţie, adevărată oricare ar fi S, este o identitate în S. Egalând coeficienţii lui S din ambii membrii, obţinem

$$V^2=1+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu, \tag{5}$$

$$V^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2a^2b^2}+\frac{1}{\varepsilon_2\varepsilon_3b^2c^2}+\frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_1a^2c^2}\right)=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2a'^2b'^2}+\frac{1}{\varepsilon_2\varepsilon_3b'^2c'^2}+\frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_1c'^2a'^2}, \tag{6}$$

$$V^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1a^2}+\frac{1}{\varepsilon_2b^2}+\frac{1}{\varepsilon_3c^2}\right)=\frac{\sin^2\lambda}{\varepsilon_1a'^2}+\frac{\sin^2\mu}{\varepsilon_2b'^2}+\frac{\sin^2\nu}{\varepsilon_3c'^2}, \tag{7}$$

$$\frac{V^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3a^2b^2c^2}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3a'^2b'^2c'^2}. \tag{8}$$

Prima relaţiune dă expresia volumului paralelipipedului format de trei unităţi oblice şi este independent de tripleul considerat.

Ultima se poate scrie $abc=a'b'c'V$, $2a.2b.2c=2a'.2b'.2c'V$. Insă $2a'2b'2c'V$ reprezintă volumul paralelipipedului corespunzător tripleului considerat, dar $2a.2a.2c$ volumul paralelipipedului corespunzător axelor Deci, *volumul paralelipipedului lui Apollonius este acelaş pentru orice tripleu diametral;* el este egal cu volumul paralelipipedului construit pe axele cuadricei.

Din relaţia (5), după ce simplificăm şi ţinem seamă de (8), avem

$$\varepsilon_1a^2+\varepsilon_2b^2+\varepsilon_3c^2=\varepsilon_2a'^2+\varepsilon_2b'^2+\varepsilon_3c'^2,$$

deci, suma algebrică a pătratelor muchiilor din paralelipipedul lui Apollonius este constantă şi egală cu suma algebrică a pătratelor axelor cuadricei. Pentru elipsoid, avem $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3$, $a^2+b^2+c^2$; pentru elipsoidul cu o pânză, $a^2+b^2-c^2$, pentru cel cu două pânze, $a^2-b^2-c^2$.

Din relaţia (7), avem

$$\varepsilon_1b'^2c'^2\sin^2\lambda+\varepsilon_2c'^2a'^2\sin^2\mu+\varepsilon_3a'^2b'^2\sin^2\nu=\varepsilon_1b^2c^2+\varepsilon_2c^2a^2+\varepsilon_3a^2b^2.$$

Dar $b'c'\sin\lambda$ este aria paralelogramului format de OB', OC'; deci, *suma algebrică a pătratelor ariilor feţelor din paralelipipedul lui Apollonius este constantă şi egală cu*

$$\varepsilon_1b^2c^2+\varepsilon_2c^2a^2+\varepsilon_3c^2a^2,$$

unităţile ε_1, ε_2, ε_3 fiind aceleaşi ca mai sus.

Aceste proprietăţi sunt teoremele lui Apollonius în spaţiu.

III. *Locul vârfurilor triedrelor tridreptunghice circumscrise la un elipsoid.* Un plan

$$ux+vy+wz+p=0, \tag{9}$$

este tangent la elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

când există un punct (x_1,y_1,z_1) al elipsoidului, unde planul tangent

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0$$

se confundă cu planul (9). Trebue deci să avem

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{u}=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{v}=\frac{\frac{z_1}{c^2}}{w}=\frac{-1}{p}.$$

De unde

$$x_1=-\frac{a^2u}{p},\quad y_1=-\frac{b^2v}{p},\quad z_1=-\frac{c^2w}{p},$$

și scriind că punctul (x_1,y_1,z_1) este pe elipsoid, rezultă

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0,\quad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-p^2=0.$$

Ecuația (9) a unui plan tangent la elipsoid este deci

$$ux+vy+wz\pm\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=0.$$

Așa fiind, să însemnăm cu

$$\begin{aligned}
u_1x+v_1y+w_1z&=\varepsilon_1\sqrt{a^2u_1^2+b^2v_1^2+c^2w_1^2},\\
u_2x+v_2y+w_2z&=\varepsilon_2\sqrt{a^2u_2^2+b^2v_2^2+c^2w_2^2},\\
u_3x+v_3y+w_3z&=\varepsilon_3\sqrt{a^2u_3^2+b^2v_3^2+c^2w_3^2},
\end{aligned}\tag{10}$$

ecuațiile a trei plane tangente perpendiculare două câte două. Putem presupune că în fiecare din aceste ecuații, coeficienții lui x, y, z sunt cosinusurile directoare ale normalei la planul constant. Deci (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) fiind cosinusurile directoare a trei drepte perpendiculare două câte două, verifică relațiile de ortogonalitate de la schimbarea axelor perpendiculare [No. 194, formulele (1) și (2)].

Ridicând la pătrat ecuațiile (10) și adunând, avem deci

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$$

relație care arată că locul vârfurilor triedrelor tridreptunghice circumscrise la un elipsoid este o sferă, numită sfera lui Monge.

294. **Paraboloizi.** *Direcțiunile asimptotice.* In cazul paraboloidului eliptic,

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2}=2z,$$

conul direcțiilor asimptotice se reduce la

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=0,$$

două plane imaginare conjugate. Deci suprafața are o singură direcție asimptotică, reală, $x=0$, $y=0$, care este direcția axei paraboloidului.

In cazul paraboloidului iperbolic,

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z,$$

conul direcțiilor asiptotice se reduce la planele

$$\frac{x^2}{p_2}-\frac{y^2}{q^2}=0,\quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=0,\quad \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0,$$

care sunt planele directoare ale paraboloidului iperbolic. Ori ce direcție paralelă cu unul din aceste plane, este direcție asimptotică. Intersecția acestor plane este axa paraboloidului; este direcția asimptotică principală.

Făcând ecuația paraboloidului iperbolic omogenă cu variabila t, se vede că intersecția suprafeței cu planul de la infinit, $t=0$, se compune din dreptele $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=0$, $t=0$, deci paraboloidul iperbolic este tangent planului de la infinit.

In mod analog se arată că și paraboloidul eliptic este tangent planului de la infinit.

Când ecuația paraboloidului iperbolic este de forma

$$x^2-y^2=2pz,$$

adică planele directoare sunt perpendiculare, paraboloidul se zice echilater.

II. Planul tangent la paraboloidul

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{\varepsilon q^2}=2z,\quad \varepsilon=\pm 1,$$

în punctul (x_1,y_1,z_1) este

$$\frac{xx_1}{p^2}+\frac{yy_1}{\varepsilon q^2}-(z+z_1)=0.$$

Scriind (ca la elipsoid) că planul $ux+vy+wz+r=0$ este tangent la paraboloid, se găsește $r=\frac{p^2u^2+\varepsilon q^2v^2}{2w}$, așa că ecuația unui plan tangent la paraboloid este

$$ux+vy+wz+\frac{p^2u^2+\varepsilon q^2v^2}{2w}=0.$$

Considerând trei plane tangente,

$$u_1x+v_1y+w_1z+\frac{p^2u_1^2+\varepsilon q^2v_1^2}{2w_1}=0,$$

(11) $$u_2x+v_2y+w_2z+\frac{p^2u_2^2+\varepsilon q^2v_2^2}{2w_2}=0,$$
$$u_3x+v_3y+w_3z+\frac{p^2u_3^2+\varepsilon q^2v_3^2}{2w_3}=0,$$

perpendiculare două câte două, se vede că (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) sunt cosinusurile directoare ale normalelor la aceste plane, care formează un triedru tridreptunghic.

Inmulțind relațiile (11) respectiv cu w_1, w_2, w_3 și adunând, avem, ținând seamă de relațiile (1), (2) de la 194,

$$z+\frac{p^2+\varepsilon q^2}{2}=0,$$

de unde se deduce că *locul vârfurilor a triedrelor tridreptunghice circumscrise la un paraboloid este un plan perpendicular pe axă, numit planul lui Monge.*

III. Planul diametral conjugat direcții (α,β,γ) are ecuația

$$\frac{\alpha x}{p^2}+\frac{\beta y}{\varepsilon q^2}-\gamma=0$$

și este paralel cu axa (paralel cu Oz).

Exerciții[1].

1) Se consideră planele definite de ecuația

$$\frac{x}{\lambda-a}+\frac{y}{\lambda-b}+\frac{z}{\lambda-c}-1=0$$

λ fiind un parametru variabil, iar a, b, c cantități constante diferite. 1°. Să se arate că există trei plane din familia considerată care trec printr'un punct oarecare M al spațiului și să se calculeze coordonatele punctului M în funcțiune de valoriile $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale parametrului λ, corespunzătoare acestor trei plane; 2°. Să se afle locul punctelor M pentru ca două din aceste trei plane să fie confundate. 3. Unde trebue să se afle punctul M pentru ca cele trei plane să fie confundate.

R. 1°. Ecuația este de gradul al treilea în λ; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fiind rădăcinile, avem identitatea $\frac{x}{\lambda-a}+\frac{y}{\lambda-b}+\frac{z}{\lambda-c}-1\equiv\frac{-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)}$. Inmulțim ambii membrii cu $\lambda-a$ și apoi facem $\lambda=a$; avem

$$x=-\frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)},\quad y=-\frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-c)(b-a)},\quad z=-\frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)},$$

care sunt coordonatele punctului M.

---

[1] Este folositor a se consulta următoarele culegeri de probleme: *A. Remond*, Exercices élémentaires de Géométrie Analytique (2 vol.); *E. Monat*, Problèmes de Géométrie Analitique (3 vol.); *Aubert, Papelier*, Exercices de Géométrie Analitique (3 vol.); *Koehler*, Exercices de Géométrie Analitique et de Géométrie supérieure (2 vol.); *Michel* et *Potron*.

2°. Dacă ecuația are o rădăcină dublă $\lambda_1=\lambda_2=u$, și dacă punem $\lambda_3=v$, coordonatele punctului M sunt funcțiuni raționale de doi parametri u și v,

$$x=-\frac{(a-u)^2(a-v)}{(a-b)(a-c)},\quad y=-\frac{(b-u)^2(b-v)}{(b-c)(b-a)},\quad z=-\frac{(c-u)^2(c-v)}{(c-a)(c-b)},$$

care este o suprafață unicursală de ordinul al patrulea, căci o dreaptă o tae în patru puncte.

3°. Dacă $t_1=t_2=t_3=t$, coordonatele punctului M sunt funcțiuni de un parametru, $x=-\frac{(a-t)^3}{(a-b)(a-c)}$, $y=-\frac{(b-t)^3}{(b-c)(b-a)}$, $z=-\frac{(c-t)^3}{(c-a)(c-b)}$, deci locul lui M este o cubică strâmbă.

2). Să se afle locul punctelor a căror diferență a pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

R. $A(a,b,c)$, $A'(a'(a',b',c')$; $\overline{MA}^2-\overline{MA'}^2=k^2$: $(a'-a)x+(b'-b)y+(c'-c)z+\frac{a^2+b^2+c^2-(a'^2+b'^2+c'^2)-k^2}{2}=0$, un plan perpendicular pe AA'.

3). Locul mijlocului unui segment de lungime constantă ce se sprijină pe două drepte perpendiculare nesituate în același plan.

R. Să luăm ca axă Ox perpendiculara comună a dreptelor D și Δ și fie A și B picioarele lor; origina O, mijlocul lui AB; planul zOx, planul format de D și AB; planul xOy conține pe Δ, care este prin ipoteză perpendiculară pe D; $OA=OB=a$, MN o poziție a segmentului; $M(a,0,\lambda)$, $N(-a,\mu,0)$; $\overline{MN}^2=d^2=4a^2+\mu^2+\lambda^2$. Coordonatele mijlocului P al lui MN sunt $x=\frac{a-a}{2}=0$, $y=\frac{\mu}{2}$, $z=\frac{\lambda}{2}$. Locul lui P se obține eliminând λ și μ între ecuația $4a^2+\mu^2+\lambda^2=d^2$ și coordonatele lui P. Se obține $x=0$, $y^2+z^2+a^2-\frac{d^2}{4}=0$, un cerc în planul zOy.

4). Să se afle locul centrelor sferelor trecând printr'un punct dat și tangente la un plan dat.

R. Luăm punctul dat ca origină a coordonatelor și axa Oz perpendiculară pe plan, a cărui ecuație este $z=a$. Ecuația sferei este $x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\mu y-2\nu z=0$; este tangentă la plan, când distanța centrului (λ,μ,ν) la plan este egală cu raza, $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(\nu-a)^2=0$; paraboloid eliptic.

5). Ecuația conului cu vârful în (α,β,γ) și ca directoare parabola $z=0$, $y^2-2px=0$.

R. Coordonatele unui punct al unei drepte ce pornește din (α,β,γ) sunt $\frac{\alpha+\lambda x}{1+\lambda}$, $\frac{\beta+\lambda y}{1+\lambda}$, $\frac{\gamma+\lambda z}{1+\lambda}$. Scriind că punctul acesta este pe directoare, avem $\gamma+\lambda z=0$, $(\beta+\lambda y)^2-2p(\alpha+\lambda x)(1+\lambda)=0$, de unde eliminând pe λ, se obține ecuația conului $(\beta z-\gamma y)^2-2p(\alpha z-\gamma x)(z-\gamma)=0$.

6). Se dă un elipsoid E și un plan P și se cere locul vârfului conului circumscris elipsoidului și care să fie tăiat de planul P după un cerc.

R. Ducem prin centrul elipsoidului un plan Q paralel cu planul P; acest plan tae elipsoidul după elipsa E'. Luăm ca Ox și Oy axele elipsei E' și ca axă Oz diametrul conjugat planului Q în raport cu elipsoidul E. Q coincide cu planul xOy, axele Ox, Oy sunt perpendiculare, elipsoidul are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

(x_0,y_0,z_0) fiind un punct al locului, conul cu vârful în acest punct, circumscris elipsoidului, are ecuaţia

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)=0.$$

E destul a scrie că acest con este tăiat de planul xOy după un cerc. Locul se compune din conicele $\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, y=0; \frac{y^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, x=0,$ o elipsă şi o iperbolă,

7). Se dau trei axe perpendiculare şi o sferă (S) având centrul pe Ox. Să se formeze ecuaţia conoidului născut de o dreaptă ce întâlneşte pe Oz, paralelă cu xOy şi tangentă sferei.

R. $(x-a)^2+y^2+z^2-R^2=0$; se exprimă că dreapta $z=\lambda, y=\mu x$ tae sfera în două puncte confundate, $\lambda^2\mu^2+\lambda^2-\mu^2(a^2-R^2)-R^2=0$. Ecuaţia conoidului este $z^2(x^2+y^2)+y^2(a^2-R^2)-R^2x^2=0$.

8). Se dau trei axe perpendiculare şi în planul xOy o dreaptă (D) paralelă cu Oy de abscisă a. Se consideră dreptele (G) care se sprijină pe Oz şi (D) şi care fac cu Oz un unghi dat Q. 1°. Să se găsească ecuaţia suprafeţei descrisă de (G); 2°. Să se arate că această suprafaţă este tăiată după o iperbolă (H) de orice plan paralel cu yOz. 3°. Să se afle locul asimptotelor acestei iperbole, când planul său variază; 4°. Locul focarelor.

R. 1°. $(x-a)^2(x^2+y^2)-x^2z^2\operatorname{tg}^2\theta=0$: 3° doi paraboloizi iperbolici, $(x-a)y\pm xz\operatorname{tg}\theta=0$; 4° locul este o iperbolă $y=0, z^2=x^2+(x-a)^2\operatorname{cotg}^2\theta$.

9). Se dau conul $x^2+y^2-z^2=0$ şi dreptele (D) $x+1=0, y-2=0$, (Δ) $x-2=0, z-1=0$ şi se cere: 1°. Să se vază dacă dreptele se întâlnesc; 2° ecuaţia suprafeţei născută de o dreaptă care se sprijină pe dreptele (D) şi (Δ) şi care este tangentă conului.

R. 1°. Dreptele sunt situate în plane paralele, $x+1=0, x-2=0$, 2°. Ecuaţiile unei drepte ce se sprijină pe dreptele date, sunt $x+1+\lambda(y-2)=0$, $x-2+\mu(z-1)=0$, care se mai pot scrie $\frac{x-2-\mu}{\lambda\mu}=\frac{y-\frac{2\lambda-\mu-3}{\lambda}}{-\mu}=\frac{z}{\lambda}$. Se înlocueşte x şi y, în funcţiune de z, în ecuaţia conului, se scrie că are o rădăcină dublă în z, se obţine $g(\lambda,\mu)=0$. Se elimină λ şi μ între ecuaţiile dreptei şi $g(\lambda,\mu)=0$.

10). Să se afle condiţiile pentru ca ecuaţia generală de gradul al doilea să reprezinte o suprafaţă de rotaţie.

R. $f(x,y,z)\equiv g(x,y,z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$, $g(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0$.

Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia $f(x,y,z)=0$ să reprezintă o suprafaţă de rotaţie este ca să existe un număr S diferit de zero, astfel ca forma cuadratică $g(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)$ să fie pătratul unei funcţiuni lineare Condiţia este necesară. Ecuaţia suprafeţei este de forma $\Sigma+\alpha P^2+\beta P+\gamma=0$. unde $\Sigma\equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d$, $P\equiv ux+vy+wz+1$. Dacă $f(x,y,z)=0$ reprezintă o suprafaţă de rotaţie, avem $f(x,y,z)\equiv S(\Sigma+\alpha P^2+\beta P+\gamma)$. Conservând numai termeni de gradul al doilea, avem $g(x,y,z)\equiv S[x^2+y^2+z^2+\alpha(ux+vy+wz)^2]$, $g(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)\equiv S\alpha(ux+vy+wz)^2$, ceeace arată că condiţia este necesară.

Condiţia este suficientă. Dacă avem $g(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)\equiv\lambda(ux+vy+wz)^2$, urmează $g(x,y,z)\equiv\lambda(ux+vy+wz)^2+S(x^2+y^2+z^2)$, $f(x,y,z)\equiv\lambda(ux+vy+wz)^2$

$+S(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+D$, $f(x,y,z)\equiv\lambda P^2+z$, $P\equiv ux+vy+wz$, $\Sigma\equiv S(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+D$. Se deduce că $f(x,y,z)=0$ este o suprafață de rotație.

Axa de rotație este perpendiculara din centrul sferei Σ pe planul P; ecuațiile acestei axe sunt deci

$$\frac{x+\frac{C}{S}}{u}=\frac{y+\frac{C'}{S}}{v}=\frac{z+\frac{C''}{S}}{w}.$$

Să găsim acum relațiile între coeficienți, ca $g(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)$ să fie pătrat perfect. Pentru aceasta trebue (No. 257) ca toți minorii de primul ordin ai discriminantului acestei forme cuadratice să fie nuli. Discriminantul este

$$\begin{bmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{bmatrix}$$

Deci (1) $(A'-S)(A''-S)-B^2=0$, (2) $(A''-S)(A-S)-B'^2=0$, (3) $(A-S)(A'-S)-B''^2=0$, (4) $B'B''-B(A-S)=0$, (5) $B''B-B'(A'-S)=0$, $B'B-B''(A''-S)=0$ Pentru ca suprafața $f(x,y,z)=0$ să fie de rotație, trebue să fie o valoare a lui S, diferită de zero, care verifică aceste șase ecuații Aceasta revine la o spune că ecuația în S are o rădăcină dublă diferită de zero.

1°. $BB'B''\neq 0$ Rezolvând ecuațiile (4), (5), (6) în raport cu S avem

$$S=A-\frac{B'B''}{B},\quad S=A'-\frac{B''B}{B'},\quad S=A''-\frac{BB'}{B''}. \tag{7}$$

Deci

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}\neq 0.$$

Acestea sunt condițiile necesare; ele sunt și suficiente. In adevăr, dacă sunt îndeplinite, valoarea lui S dată de ecuațiile (7) verifică ecuațiile (1), (2), (3), ceea ce se vede, înlocuind pe A—S cu $\frac{B'B''}{B}$, $A'-S$ cu $\frac{B''B}{B}$, $A''-S$ cu $\frac{BB'}{B''}$. Numerile $A-\frac{B'B''}{B}$, $A'-\frac{B''B}{B'}$, $A''-\frac{BB'}{B''}$ se zic numerile lui *Jacobi*.

Pentru a găsi axa suprafeței, să ducem din centrul sferei $\Sigma\equiv S(x^2+y^2+z^2)+2cx+2c'y+2c''z+D=0$ o perpendiculară pe planul $P\equiv ux+vy+wz=0$, $ux+vy+wz$ fiind rădăcina patrată a formei cuadratice $g(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)$. Dar această rădăcină este proporțională cu o derivată parțială oarecare, de ex, $(A-S)x+B''y+B'z$, unde înlocuind pe $(A-S)$ cu $\frac{B'B''}{B}$, divizând cu produsul $B'B''$, se obține $\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}$. Deci ecuația planului (P) se poate scrie $\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}=0$, așa că ecuațiile axei sunt $B\left(x+\frac{C}{S}\right)=B'\left(y+\frac{C'}{S}\right)=B''\left(z+\frac{C''}{S}\right)$, S fiind egal cu numerile lui Jacobi.

2°. Unul din numerile B, B', B'' este nul, de ex., $B''=0$. Ecuația (6) dă $B=0$, sau $B'=0$. Să luăm mai întâi $B'=0$, $B\neq 0$. Ecuația (5) este identic verificată, iar din (4), $S=A$. Această valoare a lui S verifică (2), (3) și înlo-

cuind-o în (1), avem condiția $(A'-A)(A-A'')-B^2=0$, $A\neq 0$. Această condiție fiind îndeplinită, se găsesc pentru ecuațiile axei $x+\frac{C}{A}=0$, $\frac{y+\frac{C'}{A}}{A'-A}=\frac{z+\frac{C''}{A}}{B}$.

Dacă $B=0$, $B'\neq 0$, avem condiția $(A''-A')(A-A')-B'^2=0$, $A'\neq 0$; în cazul $B=0$, $B'=0$, $B''\neq 0$, trebue să avem $(A-A'')(A'-A'')-B''^2=0$, $A''\neq 0$.

3°. $B=B'=B''=0$. Trebue ca două din numerile A, A', A'' să fie egale (fără a fi nule). Dacă $A=A'$, ecuațiile axei sunt $x+\frac{C}{A}=0$, $y+\frac{C'}{A}=0$.

11). Se dau trei axe perpendiculare Ox, Oy, Oz și se consideră bisectoarea unghiului xOy. Se cere ecuația conului de rotație născut de Ox învârtindu-se în jurul acestei drepte.

R. Suprafața este născută de un cerc cu planul perpendicular pe dreapta $x-y=0$, $z=0$, cu centrul pe această dreaptă și sprijinindu-se pe axa Ox, $z=0$, $y=0$. Ecuațiile cercului sunt $x^2+y^2+z^2=\lambda$ $x+y=\mu$, cu condiția $\mu^2=\lambda$. Ecuația conului este $(x+y)^2-(x^2+y^2+z^2)=0$.

12) Se dă dreapta $x=y=z$ și în planul xy dreapta $x-y=a$. Să se găsească ecuația iperboloidului de rotație născut prin învârtirea dreptei a doua în jurul celei dintâi.

R. $x^2+y^2+z^2=\lambda$, $x+y+z=\mu$; se elimină x, y, z între aceste ecuații și al generatoarei, $z=0$, $x-y=a$; se obține $\mu^2+a^2-2\lambda=0$; ecuația suprafeței este $(x+y+z)^2-2(x^2+y^2+z^2)+a^2=0$.

13) Locul vârfurilor conurilor de rotație circumscrise la un elipsoid.

R. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. Dacă (x_0,y_0,z_0) este un punct din spațiu ecuația conului cu vârful în acest punct, circumscris elipsoidului este $\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2=0$. Să punem $E=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$. Avem mai multe cazuri de studiat. 1°. $BB'B''\neq 0$, $A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}$. Dar $B=-\frac{y_0z_0}{b^2c^2}$, $B'=-\frac{z_0x_0}{c^2a^2}$, $B''=-\frac{x_0y_0}{a^2b^2}$, $\frac{BB'B''}{B^2}=-\frac{x_0^2}{a^4},\ldots$; $A-\frac{B'B''}{B}=\frac{E}{a^2}$. Trebue să avem $\frac{E}{a^2}=\frac{E}{b^2}=\frac{E}{c^2}$, adică $E=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0$. Locul vârfului S este însuși elipsoidul, în care caz conul circumscris se reduce la planul tangent dus prin acest punct.

2°. Dacă $x_0=0$, sau $y_0=0$, sau $z_0=0$, ne servim de relațiile $(A'-AA''-A)-B^2=0,\ldots$ Avem în cazul $x_0=0$, $E=0$ (soluție discutată mai sus) și $\frac{y_0^2}{b^2-a^2}+\frac{x_0^2}{c^2-a^2}-1=0$, elipsă imaginară $(a>b>c)$.

Dacă $y_0=0$, $E=0$ și $\frac{z_0^2}{c^2-b^2}+\frac{x_0^2}{a^2-b^2}-1=0$, iperbolă; $z_0=0$, $E=0$ și $\frac{x_0^2}{a^2-c^2}+\frac{y_0^2}{b^2-c^2}-1=0$, elipsă reală.

Se obțin deci conicele focale ale elipsoidului.

14) Să se găsească locul axelor suprafețelor de rotație, reprezentate de ecuația

$$x^2+\lambda y^2+2z^2+2\mu zx-2\lambda x+1=0.$$

R. 1°. $\mu\neq 0$, suprafața este de rotație când (8) $\lambda-1-\mu^2=0$. Ecuațiile axei sunt (9) $x-\lambda=0$, $\mu y-(\lambda-1)z=0$. Eliminând λ și μ între ecuațiile (8) și (9), avem $y^2(1-x)+z^2(x-1)^2=0$, care se descompune în $x-1=0$ și $z^2(x-1)-y^2=0$.

2°. $\mu=0$, suprafața este de rotație când $\lambda=2$ sau $\lambda=1$. In prima ipoteză, ecuațiile axei sunt $y=0$, $z=0$, axa de rotație este axa Ox; etc.

15) Dreptele A'OA, B'OB, C'OC sunt trei axe de coordonate perpendiculare; se presupune $OA'=OA=a$, $OB'=OB=b$, $OC'=OC=c$. Să se determine locul axelor de rotație ale suprafețelor de rotație de ordinul al doilea care trec prin punctele A, A', B, B', C, C'.

R. Ecuația generală a suprafețelor ce trec prin cele șase puncte date este (10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\lambda yz+2\mu zx+2\nu xy-1=0$, suprimând conurile cu vârful în origină.

1°. $\lambda\mu\nu\neq 0$. Suprafața este de rotație dacă (11) $\frac{1}{a^2}-\frac{\mu\nu}{\lambda}=\frac{1}{b^2}-\frac{\lambda\nu}{\mu}=\frac{1}{c^2}-\frac{\lambda\mu}{\nu}=S$; ecuațiile axei sunt (12) $\lambda x=\mu y=\nu z$. Numind cu θ valoarea comună a acestor trei cantități, urmează (13) $\lambda=\frac{\theta}{x}$, $\mu=\frac{\theta}{y}$, $\nu=\frac{\theta}{z}$. Ecuațiile (11) devin (14) $\frac{1}{a^2}-\frac{\theta x}{yz}=\frac{1}{b^2}-\frac{\theta y}{zx}=\frac{1}{c^2}-\frac{\theta z}{xy}=S$. Locul se obține eliminând pe θ și S între aceste trei ecuații, care se pot scrie $Sxy+\theta x-\frac{yz}{a^2}=0$, $Sz+\theta y-\frac{zx}{b^2}=0$, $Sxy+\theta z-\frac{xy}{c^2}=0$. Ecuația căutată este

$$\begin{vmatrix} yz & x & -\frac{yz}{a^2} \\ zx & y & -\frac{xz}{b^2} \\ xy & z & -\frac{xy}{c^2} \end{vmatrix}=0;$$

$$yz\left(\frac{z^2x}{b^2}-\frac{xy^2}{c^2}\right)-2x\left(\frac{yz^2}{a^2}-\frac{x^2y}{c^2}\right)+xy\left(\frac{zy^2}{a^2}-\frac{zx^2}{b^2}\right)=0,$$

$$xyz=0,\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0,$$

trei plane și un con de ordinul al doilea.

2°. $\mu=0$, $\nu=0$; ecuația devine $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\lambda yz-1=0$; e de rotație când $\lambda^2=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)$. Ecuațiile axei sunt $\frac{x}{a^2}=0$, $\lambda\frac{y}{a^2}-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{z}{a}=0$. Se elimină λ și se obține ecuațiile axelor care sunt situate în planul yOz,

16) Să se afle locul vârfurilor paraboloizilor de rotație care trec prin ellpsa dată în planul xy.

R. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$ ecuațiile elipsei, $a>b$, $a^2-b^2=c^2$. Ecuația ge-

nerală a cuadricelor ce trece prin elipsă trebue să fie astfel ca făcând $z=0$ să obținem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Deci ecuația suprafețelor este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+A''z^2+2Byz+2B'zx+2C''z=0$. Ca să fie paraboloid, trebue ca discriminantul formei cuadratice $g(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+A''z^2+2Byz+2B'zx$ să fie nul; $A''=a^2B'^2+b^2B^2$. Ecuația paraboloizilor este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+(B^2b^2+B'^2a^2)z^2+2Byz+2B'zx+2C''z-1=0$.

Se scrie că e suprafață de rotație; mărginindu-ne la valorile reale ale lui B și B', avem $B=0$, $B'=\pm\frac{c}{a^2b}$. Se va elimina apoi parametrul C'' între ecuațiile suprafeței și axei. Se obțin iperbolele $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{2byz}{a^2c}-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}z-1=0$.

17). Se dau trei axe perpendiculare și o elipsă (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$. Se duce prin axa Oy un plan variabil $z=mx$ și să considerăm în acest plan cercul (C), care are ca diametru axa mică a elipsei. 1°. Să se afle ecuația cuadricei de rotație (S), ce trece prin conicele (E) și (C). 2°. Să se afle, când m variază, locul focarelor și locul vârfurilor meridianelor situate în planul zOx.

R. 1°. $(S)\equiv x^2+y^2+z^2-b^2-\frac{c^2}{a^2m^2}(z-mx)^2=0$, $(c^2=a^2-b^2)$. Locul focarelor se compune din iperbolele $\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$; locul vârfurilor, cercul $x^2+z^2=b^2$ și $(x^2+z^2)(b^2x^2-c^2z^2)-a^2b^2x^2=0$.

18). Se consideră două drepte D și D', nesituate în același plan și se consideră o dreaptă mobilă Δ, care se sprijină pe dreptele D și D'. Să se afle locul piciorului perpendicularei pe Δ dintr'un punct.

R. Se ia ca axă Oz perpendiculara comună a dreptelor D și D', ca origină mijlocul acestei perpendiculare și ca axe Ox și Oy bisectoarele unghiului format de paralelele la D și D' duse prin O. Ecuațiile dreptelor D și D' sunt $y-mx=0$, $z-h=0$,; $y+mx=0$, $z+h=0$. O dreaptă Δ are ecuațiile $y-mx+\lambda(z-h)=0$, $y+mx+\mu(z+h)=0$, cu parametrii directori, $\lambda-\mu$, $-m(\lambda+\mu)$, $2m$. Ecuația planului ce trece prin punctul dat $A(a,b,c)$ și perpendicular pe Δ, este $(\lambda-\mu)(x-a)-m(\lambda+\mu)(y-b)+2m(z-c)=0$. Se obține locul eliminând pe λ și μ între ecuațiile dreptei și planului.

19) Se dau trei axe perpendiculare, un cerc în planul xOy, $z=0$, $x^2+y^2+R^2=0$ și dreptele $y=0$, $z=x-R$; $x=0$, $z=-y+R$. Să se arate că locul dreptelor ce întâlnesc dreptele date și cercul în puncte diferite este iperboloidul cu o pânză, $x^2+y^2+z^2+2yz-2zx-R=0$.

20) Se dau trei axe perpendiculare, un cerc (C) în planul xOy tangent în O la Oy, un cerc (C') în planul yOz, tangent în O la Oy. Se notează cu a abscisa centrului cercului (C), cu b cota centrului (C'), $a>0$, $b>0$, $a>b$. 1°. Să se formeze ecuația generală a cuadricelor trecând prin aceste două cercuri. 2° Sa se afle locul centrelor acestor cuadrice. 3°. Să se studieze natura cuadricelor.

R. 1°. Ecuația cercurilor (C) $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$; (C') $y^2+z^2-2bz=0$, $x=0$. Ecuația cuadricei ce conține cercul (C) este (1) $x^2+y^2-2ax+z(ux+vy+wz+h)=0$. Pentru a scrie că conține cercul (C'), facem în (15) $x=0$ și

rezultatul $y^2+z(vy+wz+h)=0$, exprimă că reprezintă aceeaş curbă ca ecuaţia $y^2+z^2-2bz=0$. Avem $v=0$, $w=1$, $h=-2c$. Inlocuind în (15) şi punând $u=2\lambda$, ecuaţia cuadricelor este (16) $x^2+y^2+z^2+2\lambda zx-2ax-2bz=0$.

2°. Locul centrelor se obţine eliminând λ între ecuaţiile $\frac{1}{2}f'_x\equiv x-a+\lambda z=0$, $\frac{1}{2}f'_y\equiv y=0$, $\frac{1}{2}f'_z\equiv z-b+\lambda x=0$. Avem iperbola echilateră $x(x-a)-z(z-b)=0$, $y=0$.

3°. $\lambda<-1$, iperboloid cu două pânze; $\lambda=-1$, paraboloid eliptic; $-1<\lambda<1$, elipsoid real; $\lambda=1$, paraboloid eliptic; $1<\lambda<\frac{a^2+b^2}{2ab}$, iperboloid cu două pânze; $\lambda=\frac{a^2+b^2}{2ab}$, con real; $\lambda>\frac{a^2+b^2}{2ab}$, iperboloid cu o pânză.

21) Se dau trei axe perpendiculare si punctele A(2a,0,0), B(0,2b,0), C(0,0,2c), $a>0$, $b>0$, $c>0$. 1°. Să se formeze ecuaţia generală a cuadricelor care trec prin punctele O, A, B, C, care tae planul xOy după un cerc şi planele yOz, zOx după iperbolele echilatere. 2°. Să se afle locul centrelor acestor cuadrice.

R. 1°. $x^2+y^2-z^2+2\lambda yz+2\mu zx-2ax-2by+2cz=0$; 2°. locul centrelor; sfera $x(x-a)+y(y-b)+z(z-c))=0$.

22) Să se studieze natura cuadricelor care trec prin două drepte nesituate în acelaş plan.

R. Fie (D) şi (Δ) cele două drepte. Să luăm ca axă Oz o dreaptă oarecare ce tae pe (D) în A şi (Δ) în B, ca origină mijlocul lui AB, ca axă Ox o paralelă la (Δ). Ecuaţiile dreptelor sunt (D) $y=0$, $z=h$, (Δ) $x=0$, $z+h=0$, iar ecuaţia generală a cuadricelor care trec prin aceste două drepte este (No. 291) $y[\alpha x+\beta(z+h)]+(z+h)[\gamma x+\delta(z+h)]=0$, α, β, γ, δ fiind numere oarecare. Pentru a studia natura cuadricei, sau se descompune într'o sumă de pătrate, sau cu metoda ecuaţii in S. Vom discuta, considerând ecuaţiile ce au centrul, $\alpha y+\gamma(z-h)=0$, $\alpha x+\beta(z+h)=0$, $\beta y+\gamma x+2\delta z=0$. I. $\alpha\neq 0$. Din ecuaţiile (1), deducem $y=-\frac{\gamma(z-h)}{\alpha}$, $x=-\frac{\beta(z+h)}{\alpha}$, $z(\alpha\delta-\beta\gamma)=0$. 1°. $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$; (18) $z=0$, $y=\frac{\gamma h}{\alpha}$, $x=-\frac{\beta h}{\alpha}$. Suprafaţa are centru unic, situat în planul xOy, paralel cu drcptele date. Cum suprafaţa conţine două drepte nesituate în acelaş plan, este un iperboloid cu o pânză. 2°. $\alpha\delta-\beta\gamma=0$; sistemul (18) se reduce la primele două ecuaţii; planele centrelor trec prin aceeaş dreaptă. Cum suprafaţa nu poate fi un cilindru, se descompune în două plane secante reale, trecând unul prin (D), celalalt prin (Δ). Inlocuind în ecuaţie pe δ cu $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, se reduce la $[\alpha x+\beta(z+\gamma)][\alpha y+\gamma(z-h)]=0$.

II. $\alpha=0$. 1°, $\beta\neq 0$; sistemul (17) reprezintă trei plane paralele cu aceeaş dreaptă; suprafaţa este un paraboloid iperbolic. 2°. $\beta\neq 0$, $\gamma=0$; planele centrelor trec prin aceeaş dreaptă, $z+h=0$, $\beta y+2\delta z=0$; suprafaţa se descompune în două plane reale, secante. Aceeaş concluzie $\beta=0$, $\gamma\neq 0$. 3°. $\beta=0$, $\gamma=0$; planele centrelor confundate; suprafaţa se reduce la două plane paralele $z^2-h^2=0$.

23) Se dau dreptele (D) $y=0$, $z-h=0$, (Δ) $x=0$, $z+h=0$, axele fiind perpendiculare. Să se găsească locul vârfurilor paraboloizilor ce trec prin aceste două drepte.

R. $y[\alpha x+\beta(z+h)]+(z-h)[\gamma x+\delta(z+h)]=0$. Se poate vedea că $\alpha=0$. Dar aceasta se poate arăta şi altfel. Paraboloidul conţinând dreptele (D) şi (Δ), unul din planele directoare este Oxy, $z=0$, căci aceste două drepte sunt paralele cu acest plan. Deci, ansamblul termenilor de gradul al doilea al ecuaţii, trebue să fie divizibil cu z, de unde urmează $\alpha=0$. Ecuaţia paraboloizilor este (19) $z(\gamma x+\beta y+\delta z)-h\gamma x+h\beta y-\delta h^2=0$.

Vârful paraboloidului este la intersecţia sa cu axa. Direcţia axei este paralelă cu intersecţia planelor directoare (la care se descompune conul direcţiilor asimptotice). Aceasta este direcţia asimptotică principală, paralelă de asemenea cu direcţia cu care sunt paralele planele ce dau centrul. Axa însăşi este diametrul conjugat direcţii planului perpendicular la direcţia asimptotică principală. Direcţia asimptotică este la intersecţia planelor directoare, $z=0$, $\gamma x+\beta y+\delta z=0$, sau $z=0$, $\gamma x+\beta y=0$. Parametrii directori sunt β, γ, 0; planul perpendicular are ecuaţia $\beta x-\gamma y=0$, iar diametrul conjugat al acestui plan, adică axa, este definit de $\frac{f'_x}{\beta}=\frac{f'_y}{-\gamma}$, $f'_z=0$, sau $\frac{\gamma(z-h)}{\beta}=\frac{\beta(z+h)}{-\gamma}$, $\gamma x+\beta y+2\delta z=0$. Eliminând β, γ, δ între aceste ecuaţii şi acea a paraboloidului, se obţine ecuaţia locului vârfurilor. Avem $\frac{\beta^2}{\gamma^2}=-\frac{z-h}{z+h}$, $\delta=-\frac{\gamma x+\beta y}{2z}$, înlocuind în ecuaţia (19), avem $\frac{\beta}{\gamma}=-\frac{x(z-h)^2}{y(z+h)^2}$. Locul este suprafaţa $x^2(z-h)^3+y^2(z+h)^3=0$. Este un conoid cu axa Oz, cu planul director paralel cu xOy.

Tabla de materii

Pagini

Introducere 1

Geometria pe o dreaptă.

Vector. Axă orientată. Poziţia unui punct pe o axă. Mărimea unui vector pe o axă. Aplicaţii 2
Exerciţii 5

Geometria plană.

Determinarea unui punct în plan. Coordonate carteziene. Alt mod de a determina un punct în plan. Coordonate polare. Trecerea de la coordonate carteziene perpendiculare la cele polare. Determinarea direcţii unei drepte. Coeficient unghiular. Direcţii paralele. Unghiul a două direcţii. Direcţii perpendiculare. Determinarea poziţii unui vector. Distanţa dintre două puncte Determinarea poziţii unui punct pe o dreaptă dată. Aplicaţii 6
Exerciţii 17
Reprezentarea analitică a curbelor. Reprezentarea curbelor prin ecuaţii 18
Schimbarea sistemului de referinţe. Transformarea coordonatelor. Proecţiuni. Translaţia axelor. Rotaţia axelor perpendiculare. Formulele de transformare generale în cazul axelor perpendiculare. Formulele de transformare generale în cazul axelor oblice. Expresiuni metrice. Substituţie ortogonală 19
Exerciţii 28
Curbele de ordinul întâi. Linia dreaptă. Curbele de ordinul întâi sunt linii drepte. Construcţia dreptei $Ax+By+C=0$. Reprezentarea parametrică a linii drepte. Altă formă a ecuaţii linii drepte. Condiţiile ca ecuaţiile $Ax+By+C=0$. $A'x+B'y+C'=0$ să reprezinte aceeaş dreaptă. Condiţia ca două drepte să fie paralele. Unghiul a două drepte. Drepte perpendiculare. Intersecţia a două drepte. Fascicol linear de drepte. Ecuaţia dreptelor ce trec printr'un punct dat. Ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte. Aplicaţii. Condiţia ca trei puncte să fie colineare. Condiţia ca trei drepte să fie concurente. Aplicaţii 29
Exerciţii 42
Distanţa de la un punct la o dreaptă. Raportul în care o dreaptă împarte un segment A_1A_2. Separarea planului în regiuni de dreapta $Ax+By+C=0$. Exemple. Altă formă a ecuaţii linii drepte. Ecuaţia normală a linii drepte. Distanţa de la un punct la o dreaptă. Exemplu.

Ecuaţiile bisectoarelor a două drepte. Exemplu. Aria unui triunghi. Aplicaţii 44
Exerciţii 55
Elemente de la infinit. Elemente imaginare. Coordonate omogene. Elemente imaginare 56
Coordonate trilatere. Aplicaţii 63
Fascicole de drepte. Generalităţi. Fascicol de drepte ce trec prin origină. Aplicaţii. Polara unui punct faţă de un unghi. Fascicol armonic. Aplicaţii. Fascicol anarmonic. Proectivitatea raportului anarmonic. Aplicaţii. Proprietăţile raportului anarmonic. Aplicaţie. Curbe de ordinul al doilea care se reduc la două drepte 68
Exerciţii 84
Cercul. Ecuaţia cercului. Determinarea unui cerc în plan. Reprezentarea parametrică a cercului. Aplicaţii. Intersecţia unei drepte cu un cerc. Puterea unui punct faţă de cerc. Ecuaţia tangentei într'un punct. Intersecţia a două cercuri. Polara unui punct faţă de un cerc. Tangente paralele cu o direcţie dată. Tangente duse dintr'un punct. Aplicaţie. Axul radical a două cercuri. Centru radical a trei cercuri. Condiţia ca două cercuri să fie ortogonale. Fascicol linear de cercuri. Involuţie. Cercuri ortogonale la două cercuri. Cerc ortogonal la trei cercuri 85
Exerciţii 100
Locuri geometrice. Aplicaţii 102
Exerciţii 108
Studiul curbelor de ordinul al doilea. Conicele. Elipsa. Iperbola. Parabola 111
Reducerea ecuaţii de gradul al doilea. Centre. Conice cu centru. Conice de genul parabolă. Aplicaţii 117
Exerciţii 130
Proprietăţile generale ale conicelor. Tangente. Intersecţia unei drepte cu o conică. Exemple. Tangenta într'un punct al unei conice. Exemple. Tangente duse dintr'un punct exterior. Exemple. Ecuaţia tangenţială a unei conice. Noţiuni de coordonate tangenţiale. Aplicaţie. Noţiuni asupra curbelor înfăşurătoare 133
Pol şi polară. Polara unui punct. Polul unei drepte. Proprietăţi. Drepte conjugate în raport cu o conică. Triunghi conjugat 144
Asimptote. Aplicaţii 150
Diametrii. Axe. Aplicaţii 155
Focare. O nouă definiţie a conicelor. Aplicaţie la secţiunea plană a unui con de rotaţie. Ecuaţia conicelor având un focar şi o directoare dată. Căutarea focarelor unei conice. Aplicaţii. Proprietăţi focale ale conicelor. Determinarea ecuaţiilor care dau coordonatele focarelor în cazul general. Aplicaţii. Conice omofocale. Proprietăţi . . 160
Determinarea conicelor prin condiţii iniţiale. Generalităţi. Intersecţia a două conice. Aplicaţii 172
Exerciţii 190
Construcţia conicelor. Teorema lui Pascal. Construirea unui punct al unei conice căreia i se cunosc cinci puncte. Construirea tangentei într'un punct al unei conice. Construirea punctelor discrete ale co-

nicelor. Teorema lui Brianchon. Aplicații 194

Proprietățile conicelor deduse din ecuațiile simplificate. Elipsa. Elipsa este proecția ortogonală a unui cerc. Elipsa definită ca loc geometric. Construcția elipsei prin puncte. Tangenta într'un punct. Intersecția cu o dreaptă. Elipsa definită ca alt loc geometric. Tangente paralele cu o direcție dată. Produsul distanțelor celor două focare ale elipsei la o tangentă este constant. Cercuri directoare. Elipsa definită ca alt loc geometric. Proprietăți. Diametrii. Formulele lui Chasles. Teoremele lui Apollonius. Proprietăți. Construcția axelor când se cunosc doi diametrii conjugați. Proprietăți. Polara unui punct. Normale paralele cu o direcție. Normale dintr'un punct. Desfășurată 200

Iperbola. Iperbola definită ca locuri geometrice. Tangente paralele cu o direcție. Diametrii. Proprietăți. Asimptote. Proprietăți. Construcții geometrice. Normale. Desfășurată 212

Parabola. Reprezentare parametrică. Tangenta într'un punct. Construirea unui punct și a tangentei într'un punct. Alt mod de a construi parabola prin puncte. Tangentă paralelă cu o direcție. Intersecția unei drepte cu o parabolă. Normale. Desfășurată 222

Noțiuni asupra construcțiunii curbelor.

Curbele $y = f(x)$. Tangenta într'un punct. Metodă pentru construirea curbei. Exemple. Poziția curbei față de tangentă. Concavitate. Puncte de inflexiune. Exemplu. Ramuri infinite. Asimptote. Procedeu pentru găsirea directă a asimptotelor. Curbe asimptote. Exemple . . 228

Curbe definite de ecuațiile $x=f(t)$, $y=g(t)$. Tangente. Exemplu. Cicloida. Observări asupra simetrii. Concavitate. Puncte de inflexiune. Exemplu. Asimptote. Exemple. Reprezentarea parametrică a conicelor 238

Curbe în coordonate polare. Linia dreaptă. Cercul. Conicele având focarul în pol și axa focală pe axa polară. Tangentă. Exemplu. Concavitate. Puncte de inflexiune. Metodă pentru construirea curbei $\rho = (f\omega)$. Exemple. Asimptote. Puncte multiple. Exemple. Aplicații. Curbe omotetice. Curbe inverse. Curbe analagmatice. Curbe concoide. Exemple. Cubice circulare unicursale. Strofoida. Cisoida 249

Curbele $f(x,y) = 0$. Tangenta într'un punct. Tangente dintr'un punct. Tangente paralele cu o direcție. Concavitate. Puncte de inflexiune. Hessiana. Clasificarea punctelor multiple. Cazul punctului dublu. Asimptote. Metodă pentru construirea curbelor $f(x,y)=0$. Exemple. Metoda regiunilor 270

Noțiuni sumare asupra transformărilor plane.

Transformări pe o dreaptă. Translația. Asemănare. Transformare omogenă (afină). Inversiune 290

Omografie. Involuție. Transformare omografică (proectivă). Proprietăți. Aplicații. Fascicole omografice. Involuție. Proprietăți 293

Transformări plane. Generalități. Transformare omografică. Proprietăți. Omologia. Omotetia. Transformare afină. Asemănare. Transformări cuadratice. Inversiunea. Transformări corelative. Transformări prin polare reciproce 303

Geometria în spaţiu.

Reprezentarea liniilor şi suprafeţelor. Proecţiuni. Măsura proecţii unui vector pe o axă. Determinarea unui punct în spaţiu. Coordonate carteziene, cilindrice, sferice. Determinarea unei direcţii. Direcţii paralele. Cosinusul unghiului a două direcţii. Direcţii perpendiculare. Determinarea poziţii unui vector. Distanţa dintre două puncte. Determinarea poziţii unui punct pe un vector. Reprezentarea analitică a liniilor şi suprafeţelor 315
Exerciţii 327
Schimbarea sistemului de referinţe. Trecerea de la un triedru la altul. Relaţiunile dintre cosinusurile directoare a două triedre tridreptunghice. Formulele de transformare. Interpretarea formulelor de transformare Expresiuni metrice. Substituţii ortogonale. Formulele lui Euler 328
Clasificarea suprafeţelor şi liniilor curbe 339
Planul şi dreapta. Ecuaţia planului. Ecuaţiile dreptei. Drepte paralele. Drepte perpendiculare. Ecuaţiile dreptei ce trece prin două puncte. Distanţa de la un punct la o dreaptă. Condiţia ca două drepte să fie în acelaş plan. Ecuaţia planelor ce trec printr'un punct dat. Ecuaţia planului ce trece prin trei puncte. Condiţia ca patru puncte să fie în acelaş plan. Intersecţia a două plane. Fascicol de plane. Ecuaţia planului paralel cu două drepte. Intersecţia a trei plane. Ecuaţia planelor ce trec prin intersecţia a trei plane. Reţea lineară de plane. Aplicaţii. Condiţia ca patru plane să fie concurente. Aplicaţii. Perpendiculara comună la două drepre. Raportul anarmonic al unui fascicol de patru plane. Distanţa de la un punct la un plan. Aplicaţii. Volumul unui tetraedru. Suprafaţa unui triunghi 340
Exerciţii 365
Elemente de la infinit. Coordonate omogene 366
Elemente imaginare. Elemente izotrope 368
Coordonate tetraedrice 370
Sfera. Secţiunea plană a unei sfere. Intersecţia a două sfere. Puterea unui punct faţă de o sferă. Planul radical a două sfere. Axul radical a trei sfere. Centru radical a patru sfere. Inversiune 372
Noţiuni introductive asupra curbelor şi suprafeţelor. Locuri geometrice. Tangentă într'un punct al unei curbe. Plan normal la o curbă strâmbă. Elicea circulară. Plan tangent la o suprafaţă. Aplicaţii Curbă definită ca intersecţia a două suprafeţe 375
Generarea suprafeţelor. Generalităţi. Suprafeţe riglate. Exemple. Cilindre. Conuri. Conoizi. Suprafeţe de rotaţie Exemple 381
Suprafeţe de ordinul al doilea. Cuadrice. Elipsoidul. Iperboloizi. Paraboloizi 391
Proprietăţi generale ale cuadricelor. Noţiuni asupra formelor cuadratice 397
Direcţiunile asimptotice ale suprafeţelor de ordinul al doilea . . 403
Plane tangente la cuadrice. Ecuaţia tangenţială a unei cuatrice . 404
Clasificarea cuadricelor. Cuadrice cu centru unic. Axele cuadricei. Ecuaţia în S. Exemple 407
Clasificarea cuadricelor. Genul paraboloid 413
Exerciţii 416

Pol şi plane polare. Plan polar. Polul unui plan. Puncte conjugate. Plane conjugate. Drepte conjugate. Tetraedre conjugate 417
Plane diametrale. Diametrii. Plan diametral. Diametrii. Diametrii conjugaţi. Tripleu de diametrii conjugaţi. Ecuaţia cuadricei raportată la un tripleu diametral. Proprietăţi 422
Altă metodă pentru a cunoaşte natura cuadricelor. Exemple . . 425
Focare. Cuadrice omofocale. Focare. Proprietăţi. Cuadrice omofocale. Proprietăţi. Coordonate eliptice 427
Generatoare rectilinii. Iperboloidul cu o pânză. Paraboloidul iperbolic. Determinarea generatoarelor rectilinii în cazul general 432
Secţiunile circulare ale cuadricelor. Cuadrice cu centru. Paraboloizi. Puncte circulare. Determinarea secţiunilor circulare în cazul general 437
Determinarea cuadricelor prin condiţii iniţiale. Generalităţi. Intersecţia a două cuadrice. Ecuaţiile generale ale cuadricelor ce îndeplinesc condiţii date 440
Proprietăţi speciale ale cuadricelor. Con. Elipsoid. Iperboloizi. Paraboloizi 442
Exerciţii 448

INTRODUCERE ELEMENTARĂ
IN
STUDIUL ANALITIC
AL
GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE.

Generalităţi. Istoric.

Nemuritorului *Euclide* îi revine gloria de a fi fixat definitiv principiile Geometriei uzuale într'o lucrare care şi astăzi se bucură de o celebritate, pe care nici o carte de ştiinţă n'a putut să o ajungă.

Datorită experienţei, geometrii vechi, ajutaţi de un număr oarecare de noţiuni primitive, de axiome, sau de postulate fundamentale, au pus bazele Geometriei uzuale. Poate că predecesorii lui Euclide au admis un număr supraabondent de postulate, dar Euclide este acela care a redus numărul lor la minimul necesar, iar toate celelalte sunt consecinţe ale celor dintâi.

Postulatele lui Euclide sunt absolut riguroase, şi în practică experienţa noastră nu poate să contrazică nici una din consecinţele lor. Dar, cu vremea, s'a pus întrebarea, ce ar rezulta, dacă vreunul din aceste postulate n'ar fi adevărat, sau ar fi înlocuit cu altul mai general.

In special, postulatul paralelor pare mai puţin evident ca celelalte, şi, din antichititate, s'au căutat demonstraţiuni care să înlăture orice fel de îndoială în ce priveşte Geometria Euclidiană. Astfel de încercări au fost făcute de *Posidonius* (I secol înainte de Crist), *Ptolemeu* (II secol după Cr.), *Prochus* (V secol); apoi la Arabi, *Al-Nirizi* (IX secol), *Nassiredin* (XIII secol); începând cu Renaşterea, *Commandin* (1509—1575), *Clavius* (1537—1612), *Cataldi* (1548—1626), *Borelli* (1608—1679), *Giordane Vitale* (1633—1711), *Wallis* 1616—1713).

Percusorii Geometriei neeuclidiene sunt *Sacherri* (1667—1733), *Lambert* (1728—1777), *Legendre* (1752—1833).

Printre fondatorii Geometriei neeuclidiene sunt *Gauss* (1777—1855), *Schweikart* (1780—1859), *Taurinus* (1794—1874). Dar primul care pune bazele unei noi geometrii, este *Lobatchefsky* (1793—1856), care expune principiile în 1829, şi trei ani mai târziu, *Bolyai* (1802—1860), expune într'o formă extrem de condensată *Geometria Lobatchefskiană*, care se mai zice şi Geometria neeuclidiană.

După Euclide, suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte; în Geometria Lobatchefskiană această sumă este înferioară la două drepte şi cu atât mai mică cu cât aria triunghiului este mai mare, astfel că într'un triunghi ale cărui vârfuri sunt la distanţă înfinită, suma unghiurilor este zero. În Geometria Euclidiană, printr'un punct se poate duce o singură paralelă la o dreaptă; în Gemetria Lobatchefskiană, printr'un punct se pot duce două paralele la o dreaptă, adică două linii care să taie această dreaptă deoparte şi de alta în puncte infinit depărtate, o infinitate de secante şi o infinitate de nesecante. Dreptele trecând prin acelaş punct interior şi situat între cele două paralele nu tae dreapta dată. În aceasta Geometrie Lobatchefskiană i se atribue linii drepte două puncte la infinit, de aceea se mai zice şi iperbolică.

Fondatorii Geometrii iperbolice nu întrezăriră posibilitatea altor geometrii, diferite de Geometria Euclidiană. Numai *Riemann* (1825—1866), în anul 1854, indică fundamentele unei alte geometrii, numită *Geometria Riemaniană*, sau eliptică. În această geometrie două drepte din acelaş plan au totdeauna un punct comun, adică nu există paralele, iar suma unghiurilor unui triunghi este superioară la două drepte. In rezumat, o dreaptă în această geometrie este o linie închisă care revine asupra ei însăşi, n'are nici un punct la infinit, de aceea se zice geometrie eliptică.

In Geometria Euclidiană o dreaptă are două puncte la infinit care coincid, de aceea se zice geometrie parabolică.

Cercetări ulterioare au arătat că se pot concepe atâtea geometrii, câte sisteme de postulate există şi care să nu fie supuse la contraziceri. S'a studiat alături de Geometria eliptică şi iperbolică şi alte geometrii, dar aceste două geometrii sunt independente de postulatul paralelor şi de infinitatea dreptei şi se aseamănă mai mult cu Geometria euclidiană.

S'a căutat să se dea pentru aceste două geometrii reprezentări în spaţiul euclidian. Astfel, Geometria plană a lui Riemann este

analoagă cu Geometria pe o sferă (sau mai general pe suprafeţe cu curbură constantă pozitivă), în care cercurile mari ale sferei sunt asimilate cu dreptele; cum toate cercurile mari pe sferă se întâlnesc, rezultă că în această Geometrie toate dreptele se întâlnesc, deci nu sunt paralele. *Beltrami* în 1868, arată că Geometria plană Lobatchefskiană este realizată pe o suprafaţă numită pseudosfera (sau mai general pe suprafeţe cu curbură constantă negativă); drumul cel mai scurt pe această suprafaţă între două puncte ale suprafeţei este o curbă numită geodezică, analoagă cu linia dreaptă din plan şi cu cercul mare tras pe o sferă; aceste geodezice au proprietatea că printr'un punct se pot duce mai multe geodezice ce nu tae o geodezică dată, ceea ce însemnează că printr'un punct se pot duce mai multe paralele la o dreaptă.

In cele ce urmează, vom face o întroducere elementară în studiul analitic al acestor două geometrii neeuclidiene, expunând principiile Geometriei concepute de marele geometru *Cayley* (1821—1895) şi arătând cum geometriile Euclidiană, Lobatchefskiană şi Riemaniană sunt cazuri particulare ale *Geometrii Caylayene.*(1)

---

1) Pentru alte cercetări asupra Geometriilor neeuclidiene, se pot consulta:

Klein, [*Mathematische Annalen*, Bd. 4(1871), p. 577]; *Sur la Géométrie dite non euclidienne* (*Bulletin des Sciences mathémaliques et astronomiques*, 1-e série, t. II, 1871, p. 341);

P. Mansion, *Premiers principes de la métagéométrie ou géométrie générale* (Paris, 1896); *Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann* (*Mathesis*, 2-e série, t. 5, supplément; 1895);

Gérard, *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3-e série, t. 12; 1893);

Barbarin, *La géométrie non euclidienne* (Paris, Scientia; 1902);

Bonola, *Geometria non euclidea* (Bologna, Zanichelli; 1906);

Sommerville, *The elements of non euclidian geometry* (London; 1914);

Liebmann, *Nicht euklidische geometrie* (Berlin, Sammlung Schubert; 1912);

Sommerville, *The elements of non euclidian geometry* (London; 1914);

Turc, *Introduction élémentaire à la Géometrie Lobatschewskienne* (Genève, Librairie Kündig; 1914);

Carslaw, *The elements of non euclidan plane geometry and trigonometry* (London; 1916);

Darboux, *Principes de Géométrie analitique* (Paris, 1917; pag. 290);

Mac Leod, *Introduction à la Géométrie non euclidienne* (Paris, Hermann; 1922);

G. Bouligand, *Leçons de Géométrie Vectorielle* (Paris, Vuibert, 1924; pag. 333);

E. Cartan, *La Géométrie des espaces de Riemann* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. IX; Paris, Gauthier-Villars; 1925);

P. Appel, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. V (Paris, Gauthier-Villars, 1926; pag. 171).

Noţiuni introductive.

1. Raportul anarmonic a patru puncte ale unei drepte. Să însemnăm cu $M(x,y,z,t)$ coordonatele omogene [1] ale unui punct şi cu (X,Y,Z,T),

$$(1)\qquad \begin{aligned} X&=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t,\\ Y&=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t,\\ Z&=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t,\\ T&=a_4x+b_4y+z_4c+d_4t, \end{aligned}$$

coordonatele tetraedrice ale aceluiaş punct în raport cu tetraedrul de referinţă, ale cărui feţe sunt reprezentate de ecuaţiile $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $T=0$, relaţiile (1) fiind linear independente.

Insemnând cu (x_1,y_1,z_1,t_1), (x_2,y_2,z_2,t_2), (X_1,Y_1,Z_1,T_1), (X_2,Y_2,Z_2,T_2) coordonatele omogene carteziene şi tetraedrice a două puncte A şi B, coordonatele omogene ale unui punct $M(x,y,z,t)$ al dreptei AB sunt

$$x=x_1+\lambda x_2,\ y=y_1+\lambda y_2,\ z=z_1+\lambda z_2,\ t=t_1+\lambda t_2,\ \lambda=\frac{AM}{MB}\frac{t_1}{t_2}.$$

Din formulele (1) deducem

$$X=a_1(x_1+\lambda x_2)+b_1(y_1+\lambda y_2)+c_1(z_1+\lambda z_2)+d_1(t_1+\lambda t_2),$$

. . . . . .

sau $$X=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1t_1+\lambda(a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1t_2),$$

. . . . . .

şi notând cu

$$X_1=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1t_1,\ ...,$$

$$X_2=a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1t_2,\ ...,$$

coordonatele tetraedrice ale punctelor A şi B, urmează că

$$X_1+\lambda X_2,\ Y_1+\lambda Y_2,\ Z_1+\lambda Z_2,\ T_1+\lambda T_2$$

sunt coordonatele tetraedrice ale unui punct oarecare al dreptei AB.

Considerând două puncte M' şi M'' de coordonate tetraedrice

$$X_1+\lambda'X_2,\ Y_1+\lambda'Y_2,\ Z_1+\lambda'Z_2,\ T_1+\lambda'T_2,\ \lambda'=\frac{AM'}{M'B}\frac{t_1}{t_2},$$

---

[1] A se vedea, *Leciiuni de Geometrie Analitică*, (226).

$$X_1+\lambda''X_2,\ Y_1+\lambda''Y_2,\ Z_1+\lambda''Z_2,\ T_1+\lambda''T_2,\ \lambda''=\frac{AM''}{M''B}\frac{t_1}{t_2},$$

raportul anarmonic al punctelor A, B, M', M'' este

$$R(A,B,M',M'')=\frac{M'A}{M'B}:\frac{M''A}{M''B}=\frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Deci, punctele M', M'' sunt conjugate armonic în raport cu A și B, când $R(A,B,M',M'')=-1$, adică $\lambda'+\lambda''=0$.

Să considerăm acum patru puncte colineare M, ale căror coordonate tetraedrice sunt

$X_i=X'+\lambda_iX''$, $Y_i=Y'+\lambda_iY''$, Z_i $Z'+\lambda_iZ''$, $T_i=T'+\lambda_iT''$, $i=1,2,3,4$.

Avem, de ex., $X_1=X'+\lambda_1X''$, $X_2=X'+\lambda_2X''$, $X_3=X'+\lambda_3X''$, $X_4=X'+\lambda_4X''$. Eliminând între primele trei pe X', X'' urmează

$$\begin{vmatrix} X_i & 1 & \lambda_1 \\ X_2 & 1 & \lambda_2 \\ X_3 & 1 & \lambda_3 \end{vmatrix}=0,$$

de unde

$$X_3=\frac{X_1(\lambda_3-\lambda_2)-X_2(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

De asemenea

$$X_4=\frac{X_1(\lambda_4-\lambda_2)-X_2(\lambda_4-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Putem deci scrie coordonatele punctelor M_i, $i=1,2,3,4$,

(M_1) X_1, Y_1, Z_1, T_1,

(M_2) X_2, Y_2, Z_2, T_2,

(M_3) $X_1-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}X_2$, $Y_1-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}Y_2$, $Z_1-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}Z_2$, $T_1-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}T_2$,

(M_4) $X_1-\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}X_2$, $Y_1-\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}Y_2$, $Z_1-\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}Z_2$, $T_1-\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}T_2$.

Deci, raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 este

$$R(M_1,M_2,M_3,M_4)=\left(-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}\right):\left(-\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}\right),$$

$$R(M_1,M_2,M_3\,M_4)=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}.$$

2. Raportul anarmonic al unui fascicol de patru plane. Să considerăm patru plane $P+\lambda_iQ=0$, $i=1,3,3,4$, ce trec prin dreapta $P=0$, $Q=0$ și fie $X'+\mu X''$, $Y'+\mu Y''$, $Z'+\mu Z''$, $T'+\mu T''$

coordonatele unui punct al dreptei ce trece prin punctele (X', Y', Z', T'), (X'', Y'', Z'', T''). Insemnând cu P', Q', P'', Q'' rezultatele substituirilor în P și Q ale coordonutelor (X', Y', Z', T'), (X'', Y'', Z'', T''), coordonatele punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 de intersecție ale acestor plane cu dreapta considerată sunt

$$X'+\mu_i X'',\ Y'+\mu_i Y'',\ Z'+\mu_i Z'',\ T'+\mu_i T'',\ i=1,2,3,4,$$

de unde

$$\mu_i=-\frac{P'+\lambda Q'}{P''+\lambda_i Q''},\quad i=1,2,3,4.$$

Raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 este

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2}:\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2}=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}=\text{const.}$$

Deci, cu orice secantă vom tăia cele patru plane ale fasciculului considerat, raportul anarmonic al punctelor de intersecție este constant și egal cu

$$\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2},$$

și se numește raportul anarmonic al celor patru plane $P+\lambda_i Q=0$, $i=1,2,3,4$. Se vede că planele $P=0$, $Q=0$, $P+\lambda Q=0$, $P-\lambda Q=0$ formează un fascicol armonic.

Tăind cu un plan fascicolul de plane, se obține un fascicol de patru drepte, al cărui raport anarmonic este egal cu acela al fascicolului de plane.

3. Ecuația unei cuadrice conjugată în raport cu tetraedrul de referință. Să considerăm o cuadrică

$$f(X,Y,Z,T)=AX^2+A'Y^2+A''Z^2+A'''T^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY+$$
$$+2CXT+2C'YT+2C''ZT=0$$

și punctul $M_1(X_1,Y_1,Z_1,T_1)$. Dacă $M(X,Y,Z,T)$ este un punct al spațiului, un punct al dreptei M_1M are coordonate de forma

$$X_1+\lambda X,\ Y_1+\lambda Y,\ Z_1+\lambda Z,\ T_1+\lambda T.$$

Valorile lui λ corespunzătoare punctelor M' și M'' de intersecție ale acestei drepte cu cuadrica sunt date de ecuația

$$f(X_1+\lambda X,\ldots T_1+\lambda T)=\lambda^2 f(X,Y,Z,T)+\lambda\left(X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}\right)$$
$$+f(X_1,Y_1,Z_1,T_1)=0.$$

Pentru ca punctele M și M_1 să fie conjugate armonic în raport cu M' și M'', urmează că rădăcinile λ' și λ'' ale acestei ecuații să verifice relația $\lambda'+\lambda''=0$, adică

$$X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}=0.$$

Deci locul punctelor M, conjugate armonic cu M_1 în raport cu punctele de intersecţie ale cuadricei cu o dreaptă variabilă ce trece prin $M_1(X_1,Y_1,Z_1,T_1)$ este un plan

$$X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}=0$$

sau

$$X_1\frac{\partial f}{\partial X}+Y_1\frac{\partial f}{\partial Y}+Z_1\frac{\partial f}{\partial Z}+T_1\frac{\partial f}{\partial T}=0,$$

care este planul polar al punctului M_1 în raport cu cuadrica.

Vârful $Y_1=Z_1=T_1=0$ al tetraedrului de referinţă are ca plan polar

$$X_1\frac{\partial f}{\partial X}=0,\ AX+B''Y+B'Z+CT=0.$$

Pentru ca acest plan să fie tocmai faţa opusă vârfului considerat, adică planul a cărui ecuaţie este $X=0$, urmează $B''=B'=C=0$. Scriind că fiecare vârf este polul feţei opuse a tetraedrului de referinţă, urmează $B=C'=C''=0$. Deci, cuadrica, ce se bucură de proprietatea că fiecare vârf al tetraedrului de referinţă este polul feţei opuse, adică, cuadrica ce este conjugată cu tetraedrul de referinţă, are o ecuaţie de forma

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+A'''T^2=0.$$

Dar tetraedrul de referinţă nu se schimbă dacă înlocuim X cu pX, Y cu qY, Z cu rZ, T cu sT. Se înlocuesc deci coordonatele tetraedice cu altele care se raportează la acelaş tetraedru de referinţă, astfel că ecuaţia cuadricei raportată la tetraedrul de referinţă,

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+A'''T^2=0,$$

devine

$$p^2AX^2+q^2A'Y^2+r^2A''Z^2+s^2A'''T^2=0.$$

Dacă alegem pe p,q,r,s, astfel ca $p^2A, q^2A', r^2A'', s^2A'''$ să fie egale cu 1 în valoare absolută, ecuaţia cuadricei conjugată cu tetraedrul de referinţă devine

$$\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2+\varepsilon T^2=0,$$

coeficienţii $\lambda,\mu,\nu,\varepsilon$ având modulele egale cu unitatea.

4. **Coordonate tangenţiale.** Insemnând cu

$$ux+vy+wz+pt=0$$

ecuaţia unui plan, u, v, w, p sunt coordonatele tangenţiale (1) ale

(1) A se vedea, *Lecţiuni de Geometrie Analitică*, (No. 86 şi 263).

planului. Paralelismul între coordonatele tangențiale și punctuale, ne permite a enunța următoarele rezultate. Ecuația

$$au+bv+cw+dp=0$$

reprezintă un punct, ale cărui coordonate omogene sunt (a,b,c,d). Ecuațiile

$$au+bv+cw+dp=0,\ a'u+b'v+c'w+d'p=0$$

reprezintă planele ce trec prin două puncte, adică dreapta ce trece prin punctele (a,b,c,d), (a',b',c',d'). Trei ecuații de gradul întâi definesc planul ce trece prin cele trei puncte.

Dacă (u,v,w,p), (u',v',w',p'), sunt coordonatele tangențiale a două plane, (P) și (P'), atunci

$$u+\lambda u',\ v+\lambda v',\ w+\lambda w',\ p+\lambda p'$$

sunt coordonatele tangențiale ale unui plan ce trece prin intersecția planelor (P) și (P') și raportul anarmonic al planelor $u+\lambda_i u, \ldots p+\lambda_i p$, $i=1,2,3,4$, este egal cu acela al celor patru valori λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ale lui λ.

Dacă (u,v,w,p), (u',v',w',p'), (u'',v'',w'',p'') sunt coordonatele tangențiale a trei plane (P), (P'), (P''), netrecând prin aceeași dreaptă, atunci

$$\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'',\ \lambda v+\lambda' v'+\lambda'' v'',\ \lambda w+\lambda' w'+\lambda'' w'',\ \lambda p+\lambda' p'+\lambda'' p''$$

sunt coordonatele unui plan oarecare ce trece prin intersecția planelor (P), (P'), (P''), după cum

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'',\ \lambda y+\lambda' y'+\lambda'' y'',\ \lambda z+\lambda' z'+\lambda'' z'',\ \lambda t+\lambda' t'+\lambda'' t''$$

sunt coordonatele unui punct din planul format de punctele (x,y,z,t), (x',y',z',t'), (x'',y'',z'',t'').

Dacă $(u_i v_i w_i p_i)$, $i=1,2,3,4$, sunt coordonatele tangențiale a patru plane P_i, $i=1,2,3,4$, care n'au un punct comun, atunci

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+\lambda_4 u_4, \ldots, \lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\lambda_3 p_3+\lambda_4 p_4$$

sunt coordonatele tangențiale ale unui plan oarecare al spațiului, după cum

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4, \ldots, \lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2+\lambda_3 t_3+\lambda_4 t_4$$

sunt coordonatele punctuale ale unui punct al spațiului în care se dau punctele (x_i,y_i,z_i,t_i), $i=1,2,3,4$.

In mod analog ca la plan, se vede că o ecuație de gradul al doilea și omogenă, $\varphi(u,v,w,p)=0$, reprezintă o cuadrică, ale cărei plane tangente au coordonatele tangențiale (u,v,w,p).

Dacă (u_1,v_1,w_1,p_1), (u,v,w,p) sunt coordonatele tangențiale a două plane, atunci

$$\varphi(u_1+\lambda u,\ v_1+\lambda v,\ w_1+\lambda w,\ p_1+\lambda p)=0 \tag{2}$$

este ecuația care dă valorile lui λ corespunzătoare celor două plane tangente ce se pot duce la cuadrica $\varphi(u,v,w,p)=0$ prin dreapta de intersecție a celor două plane (u_1v_1,w_1,p_1), (u,v,w,p).

Dezvoltând ecuația (2), avem

$$\lambda^2\varphi(u,v,w\,p)+\lambda\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)+\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0.$$

Presupunând că (u_1,v_1,w_1,p_1) este unul din aceste plane, atunci $\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0$ și ecuația precedentă ia forma

$$\lambda^2\varphi(u,v,w,p)+\lambda\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)=0.$$

Pentru ca și al doilea plan să se reducă la planul (u_1,v_1,w_1,p_1), trebue ca

$$u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0,$$

sau

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+w\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}+p\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}=0.$$

Dar această ecuație reprezintă un punct $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial w_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\right)$, care se află în planul (u_1,v_1,w_1,p_1), căci $u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}=2\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0$, și prin care punct vor trece toate planele (u,v,w,p), astfel că cele două plane tangente duse la cuadrică prin dreapta de intersecție a planelor (u_1,v_1,w_1,p_1), (u,v,w,p) se confundă cu planul (u_1,v_1,w_1,p_1). Dar, singurul punct din planul tangent (u_1v_1,w_1,p_1) la cuadrica $\varphi=0$, care se bucură de această proprietate, este punctul său de contact cu cuadrica. Deci, punctul de contact al cuadricei $\varphi(u,v,w,p)=0$ cu planul tangent (u_1,v_1,w_1,p_1) [adică $\varphi(u_1v_1w_1p_1)=0$] are coordonatele punctuale

$$\rho x=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ \rho y=\frac{\partial\varphi}{\partial v_1},\ \rho z=\frac{\partial\varphi}{\partial w_1},\ \rho t=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},$$

ρ fiind un factor de proporționalitate.

5. **Principiul dualității.** Fiind dată o conică (C) (Fig. 1), să considerăm polara μ a punctului M în raport cu conica (C). Când

punctul M descrie o curbă (M), polara μ înfăşură o curbă (μ), astfel că dacă punctul M face parte dintr'o figură (F), polara μ face parte din altă fiigură (Φ). Figurile (F) şi (Φ) se zic polare reciproce în raport cu conica (C). Considerând două puncte M, M' ale figurei (F), le corespund două drepte μ şi μ' ale figurei (Φ), astfel că după teoria polului şi polarei, urmează că polara, în raport cu conica (C), a punctului de intersecţie N a dreptelor μ şi μ' este dreapta MM'. Când punctele M şi M' sunt infinit vecine, şi polarele μ şi μ' sunt infinit vecine, punctul N tinde către punctul de contact al polarei μ cu curba (μ), iar dreapta MM' către tangenta în M al curbei (M). Rezultă deci că polarele punctelor curbei (μ) sunt tangente la curba (M) şi că, prin urmare, polara reciprocă a figurei (Φ) este figura (F).

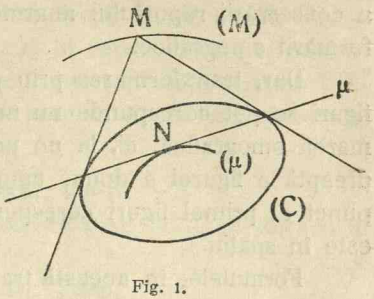


Fig. 1.

Această teorie a polarelor reciproce, descoperită de Poncelet, a condus pe Gergonne la principiul dualităţii, care permite a deduce, de. ex., din orice propoziţie de Geometrie plană, unde figurează relaţiuni între puncte şi drepte, o altă propoziţie nouă unde dreptele primei figuri sunt înlocuite prin puncte şi viceversa. Odată cu descoperirea acestui principiu, s'a simţit nevoia introducerii coordonatelor tangenţiale de către Chasles şi Plücker.

Aşa, de ex., din teorema lui Pascal, relativă la un exagon înscris într'o conică, unde laturile opuse se tae în trei puncte colineare (pe o dreaptă), rezultă teorema lui Brianchon, relativă la un exagon circumscris unei conice, unde dreptele care unesc punctele opuse se tae în acelaş punct.

6. **Figuri corelative.** Considerând două figuri (F) şi (F') care se corespund punctual şi biunivoc, formulele de transformare sunt

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3t,$$
$$t' = a_4x + b_4y + c_4z + d_4t,$$

care reprezintă transformarea omografică cea mai generală. unde (x,y,z,t), (x',y',z',t') sunt două puncte omoloage ale figurilor (F) şi (F'). Se poate uşor arăta că raportul anarmonic a patru puncte colineare a primei figuri este egal cu raportul anarmonic al puncte-

lor corespunzătoare ale figurei transfoamate. Această proprietate, a conservării raportului anarmonic, poate servi ca definiție a trasformării omografice.

Dar, transformarea prin polare reciproce ne-a arătat că două figuri se pot corespunde nu numai punct cu punct, ca în transformarea omografică, ci, la un punct al primei figuri corespunde o dreaptă a figurei a doua, cum este în Geometria plană, sau unui punct al primei figuri corespunde un plan al figurei a doua, cum este în spațiu.

Formulele, în această transformare prin polare reciproce, sunt

$$U=\frac{\partial f}{\partial x},\quad V=\frac{\partial f}{\partial y},\quad W=\frac{\partial f}{\partial z},\quad P=\frac{\partial f}{\partial t},$$

$f(x,y,z,t)=0$ fiind ecuația cuadricei în raport cu care se iau planele polare, (x,y,z,t), (U,V,W,P) fiind coordonatele punctuale și tangențiale a unui punct al primei figuri și a unui plan a figurei polare reciproce.

Să considerăm transformarea generală

$$\begin{aligned} U&=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t,\\ V&=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t,\\ W&=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t,\\ P&=a_4x+b_4y+c_4z+d_4t, \end{aligned}\tag{3}$$

care face ca la un punct $(x\,y,z,t)$ al primei figuri să corespunză planul (U,V,W,P) al figurei transformate. Această transformare se zice corelativă, iar figurile se zic corelative.

Să presupunem că punctul (X,Y,Z,T) al figurei a doua descrie planul

$$UX+VY+WZ+PT=0.$$

Inlocuind pe U, V, W, P cu valorile lor (3), se obține un rezultat de forma

$$ux+vy+wz+pt=0$$

și identificând avem

$$\begin{aligned} u&=a_1X+a_2Y+a_3Z+a_4T,\\ v&=b_1X+b_2Y+b_3Z+b_4T,\\ w&=c_1X+c_2Y+c_3Z+c_4T,\\ p&=d_1X+d_2Y+d_3Z+d_4T, \end{aligned}\tag{4}$$

care fac să corespunză unui puuct (X Y,Z,T) al figurei a doua, un plan (u,v,w,p) al figurei întâi.

Funcţiunile lineare de x,y,z,t, care figurează în membrul al doilea al relaţiilor (3), pot fi considerate drept coordonatele tetraedrice (x_1,y_1,z_1,t_1) ale punctului (x,y,z,t) în raport cu un tetraedru (T_1) diferit de tetraedrul (T) la care sunt raportate relaţiile (3). Astfel că formulele de transformare corelativă cea mai generală pot fi aduse la formele

$$U=x_1,\ V=y_1,\ W=z_1,\ P=t_1,$$

coordonatele U,V,W,P şi x_1,y_1,z_1,t_1 fiind relative la două tetraedre diferite. Formulele (4) ne dau atunci

$$X=u_1,\ Y=v_1,\ Z=w_1,\ T=p_1.$$

Se vede deci că orice propoziţie în care nu intervin nici forma tetraedrului şi nici parametrii $a,b\,c,d$ (de referinţă), se va aplica de la sine la toate figurile omografice şi corelative.

Un exemplu simplu de transformare corelativă îl găsim presupunând că suprafaţa $f(x,y,z,t)=0$, pe care o descrie punctul $M(x,y,z,t)$, se confundă cu cuadrica în raport cu care se iau polarele. În această transformare fiecărui punct M al cuadricei $f(x,y,z,t)=0$ îi corespunde planul tangent în acest punct la cuadrică, iar formulele de transformare sunt

$$(5)\qquad U=\frac{\partial f}{\partial x},\ V=\frac{\partial f}{\partial y},\ W=\frac{\partial f}{\partial z},\ P=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Suprafaţa corelativă obţinută cu această transformare este însăşi cuadrica $f(x,y,z,t)=0$, iar ecuaţia

$$\varphi(U,V,W\,P)=0,$$

obţinută eliminând pe x,y,z,t între formulele (5) şi $f(x,y,z,t)=0$, este ecuaţia tangenţială a cuadricei $f=0$, unde U,V,W,P, reprezintă coordonate tangenţiale.

7. **Conicele şi diviziunile omografice.** Se ştie (1) că *fiind date patru puncte* A,B,C,D *pe o conică, raportul anarmonic al dreptelor* MA, MB, MC, MD *care unesc un punct* M *al conicei cu aceste patru puncte este constant.*

Făcând calcule analoage în coordonate tangenţiale, sau transformând această proprietate prin dualitate, rezultă că *o tangentă variabilă la o conică interceptează pe patru tangente fixe patru puncte al căror raport anarmonic este constant.*

Deci raportul anarmonic a patru puncte ale unei conice este, sau raportul anarmonic al celor patru drepte ce unesc aceste patru puncte fixe cu un punct variabil al conicei, sau raportul anarmo-

(1) A se vedea, *Lecţiuni de Geometrie Analitică*, (No. 105, XVII).

nic al celor patru puncte unde o tangentă variabilă la conică tae tangentele în cele patru puncte date ale conicei.

Să considerăm două fascicole omografice (punctuale sau tangențiale), definite prin ecuațiile

$$\alpha=\lambda\beta,\ \delta=\lambda'\gamma,\ A\lambda\lambda'+B\lambda+C\lambda'+D=0,$$

unde A,B,C,D sunt constante Eliminând pe λ și λ' între aceste ecuații, se obține o ecuație de gradul al doilea. Deci, *punctul de intersecție a razelor corespunzătoare a două fascicole omografice de drepte descrie o conică trecând prin vârfurile celor două fascicole; dreapta care unește două puncte corespunzătoare a două diviziuni omografice pe două drepte rămâne tangentă la o conică tangentă la cele două drepte.*

Relația omografică cea mai generală fiind $A\lambda\lambda'+B\lambda+C\lambda'+D=0$, sau

$$\lambda'=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d},\quad ad-bc\neq 0, \tag{6}$$

elementele duble sunt date de

$$z=\frac{az+b}{cz+d},\quad cz^2+(d-a)z-b=0, \tag{7}$$

care se obține făcând $\lambda=\lambda'=z$ în ecuația (6). Presupunând aceste elemente duble distincte, să le notăm cu α și β. Avem

$$\alpha=\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d},$$

pe care scăzând-o din (6), obținem

$$\lambda'-\alpha=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d},\quad \lambda'-\alpha=\frac{(\lambda-\alpha)(ad-bc)}{(c\lambda+d)(c\alpha+d)}. \tag{8}$$

In mod analog, avem

$$\lambda'-\beta=\frac{(\lambda-\beta)(ad-bc)}{(c\lambda+d)(c\beta+d)}.$$

Impărțind aceste două ultime relații, obținem

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\,\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta},\quad \frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=h\,\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta}, \tag{9}$$

care este forma canonică a relației omografice (6).

Tot de aci rezultă

$$R(\lambda,\lambda',\alpha,\beta)=\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}:\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta}=h=\text{const.},$$

adică, raportul anarmonic a două elemente omografice și al elementelor duble este constant.

Când elementele duble sunt egale, $\alpha=\beta$, ecuația (7) devine $c(z-\alpha)^2=0$, pe care identificând-o cu (7) rezultă

$$d-a=-2\alpha c,\quad b=c\alpha^2.$$

Inlocuind în (8) pe b și d cu valorile lor scoase din relațiile precedente, obținem

$$\lambda'-\alpha=\frac{(\lambda-\alpha)(a-\alpha c)}{c(\lambda-\alpha)+a-\alpha c},$$

de unde

$$\frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{c}{a-\alpha c}+\frac{1}{\lambda-\alpha},\quad \frac{1}{\lambda'-\alpha}=k+\frac{1}{\lambda-\alpha},$$

care este forma canonică a relații omografiice cu elementele duble confundate.

Relația omografică (6) se zice involutivă, când nu se schimbă dacă se permută λ cu λ', ceea ce are loc când $a=-d$; iar când relația omografică are forma $A\lambda\lambda'+B\lambda+C\lambda'+D=0$, în cazul $B=C$. Inlocuind în relația (9) pe d cu $-a$, apoi pe β cu $-\alpha+\frac{a-d}{c}$, căci suma elementelor duble α și β date de (7) este egală cu $\frac{a-d}{c}$, obținem

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=-\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta},$$

care este forma canonică a relații involutive. Tot de aci mai rezultă că două elemente în involuție sunt acelea care divid armonic o pereche de elemente date α și β. Când elementele duble α și β sunt egale, relația involutivă ia forma

$$(\lambda-\alpha)(\lambda'-\alpha)=0.$$

8. **Definiția unghiului, abscisei și a distanței în plan. Relațiunea lui Laguerre.** Fie (x,y), (x',y') coordonatele rectangulare a două puncte reale sau imaginare A,B. Să considerăm cantitățile d și α definite cu relațiile

$$x'-x=d\cos\alpha,\quad y'-y=d\sin\alpha, \tag{10}$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'-y}{x'-x},\quad d=\frac{x'-x}{\cos\alpha}=\frac{y'-y}{\sin\alpha}. \tag{11}$$

Unghiul α este determinat afară de un multiplu de π.

Dacă alegem valoarea lui α dată de prima din formulele (11), d va fi cunoscut în mărime și în semn. Pentru a ține seamă de ordinea în care se iau punctele A și B, vom numi d abscisa AB.

Avem

$$AB+BA=0,$$

și, în general

$$AB+BC+\ldots+LA=0.$$

Cum AB nu-și schimbă nici semnul nici valoarea când α se mărește sau se micșorează cu un multiplu impar de π, vor fi numai două sensuri pe o dreaptă reală sau imaginară.

De oarece avem

$$d^2=(x-x')^2+(y-y')^2,$$

d este distanța dintre cele două puncte și se vede că are două valori egale și de semne contrarii.

Când

$$d^2=(x-x')^2+(y-y')^2=0,$$

atunci

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\pm i,$$

dreapta AB este izotropă sau de lungime nulă. Pentru dreptele izotrope, noțiunea de unghi dispare complect. Făcând în formulele (10) $d=0$, urmează $\cos\alpha=\infty$, $\sin\alpha=\infty$, și înlocuind aceste linii prin expresiile lor în exponențiale, se găsește $\alpha=\pm\infty i$, și astfel unghiul devine infinit imaginar.

După formulele (10), valorile lui α sunt aceleași pentru două drepte paralele. Vom zice că α este unghiul pe care ele le formează cu Ox. Insemnând cu m coeficientul unghiular al acestor drepte, avem

$$\operatorname{tg}\alpha=m,\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\quad \sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Cele două semne ale radicalului corespund celor două sensuri pe drepte.

Unghiul (D,D') a două drepte este egal cu $\alpha'-\alpha$ și este cunoscut afară de un multiplu de π, iar când s'a fixat un sens pe aceste drepte, unghiul este cunoscut afară de un multiplu par de π.

Coordonatele omogene a două puncte fiind (x,y,z), (x',y',z'), distanța dintre cele două puncte este

$$d^2=\frac{(xz'-zx')^2+(yz'-zy')^2}{z^2z'^2}.$$

Pentru ca această distanță să devie nedeterminată, trebue să avem în primul rând

$$zz'=0.$$

Presupunând $z'=0$ și anulând și numărătorul lui d, avem

$$z^2(x'^2+y'^2)=0.$$

Sunt două soluţii, sau $z=0$, sau $x'^2+y'^2=0$. Din prima rezultă că distanţa a două puncte de la infinit este nederminată. Din a doua, se vede că punctele (x',y',z') sunt punctele circulare I şi J şi că distanţa de la orice punct (x,y,z) la punctele circulare este nedeterminată.

Pentru ca distanţa să devie infinită, trebue să avem, de ex.

$$z'=0,\ z(x'^2+y'^2)\neq 0,$$

adică unul din puncte să fie la infinit şi să nu fie unul din punctele circulare I sau J.

In mod analog, se vede că distanţa de la un punct la o dreaptă,

$$\frac{y-mx-n}{\sqrt{1+m^2}},$$

este nedeterminată când punctul este la infinit pe dreaptă. Dacă dreapta este izotropă, distanţa este nedeterminată sau infinită, după cum punctul este sau nu pe dreaptă.

Relaţiunea lui Laguerre. Să considerăm dreptele D şi D', de coeficienţi unghiulari $m=\operatorname{tg}\alpha$, $m'=\operatorname{tg}\alpha'$. Unghiul lor (D, D') este dat de relaţia

$$\operatorname{tg}(D,D')=\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha)=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

Insemnând cu O punctul lor de intersecţie, să considerăm dreptele izotrope OI şi OJ ce trec prin punctul O, de coeficienţi unghiulari $\pm i$. Raportul anarmonic al fascicolului format de aceste patru drepte este

$$R(D', D, OI, OJ)=\frac{m'-i}{m'+i}:\frac{m-i}{m+i}.$$

Dezvoltând avem

$$R(D', D, OI, OJ)=\frac{mm'+1+i(m'-m)}{mm'+1-i(m'-m)}=\frac{1+i\dfrac{m'-m}{1+m'm}}{1-i\dfrac{m'-m}{1+m'm}}$$

$$R(D', D, OI, OJ)=\frac{1+i\operatorname{tg}(D,D')}{1-i\operatorname{tg}(D,D')}=\frac{\cos(D,D')+i\sin(D,D')}{\cos(D,D')-i\sin(D,D')}=\frac{e^{i(D,D')}}{e^{-i(D,D')}},$$

$$R(D', D, OI, OJ)=e^{2i(D,D')},$$

de unde

$$(D,D')=\frac{1}{2i}\log R(D, D', OI, OJ), \tag{7}$$

care este formula lui Laguerre, ce dă unghiul a două drepte cu ajutorul raportului anarmonic al fascicolului format de cele două

drepte D, D' şi cele două drepte izotrope ce trec prin punctul lor de intersecţie.

9. **Definiţia distanţei şi a unghiului în spaţiu.** *Distanţa* dintre punctele (x,y,z,t), (x',y',z',t') fiind

$$d^2=\frac{(xt'-tx')^2+(yt'-ty')^2+(zt'-tz')^2}{t^2t'^2},$$

pentru ca aceasta să fie nedeterminată, trebue ca numărătorul şi numitorul să fie nule, şi prin urmare, ca cel puţin unul din puncte să fie aruncat la infinit.

Să presupunem, de ex., că $t'=0$. Numărătorul se reduce atunci la

$$t^2(x'^2+y'^2+z'^2)=0.$$

Trebue deci, sau ca $t=0$, şi atunci ambele puncte sunt la infinit, sau ca unul din puncte fiind oarecare, celalt verifică relaţiile

$$t'=0,\quad x'^2+y'^2+z'^2=0. \tag{8}$$

Aceste două ecuaţii definesc cercul imaginar de la infinit, prin care trec toate sferele. Distanţa de la oricare din punctele sale la orice punct al spaţiului apare ca nedeterminată.

Pentru două puncte (x',y',z'), (x'',y'',z'') la distanţă finită, distanţa este nulă când

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=0,$$

adică între parametrii directori a, b, c ai dreptei, să avem relaţia

$$a^2+b^2+c^2=0, \tag{9}$$

când dreapta se zice izotropă. Punctul de la infinit al acestei drepte având coordonatele $(a, b, c, 0)$, se vede din relaţia (9), că acest punct este pe curba (8), adică dreapta ce uneşte cele două puncte întâlneşte cercul de la infinit. Toate dreptele izotrope care trec printr'un punct la distanţă finită, nasc o sferă de rază nulă, cu centrul în acest punct, sau încă un con izotrop cu vârful în acest punct.

Planul $Ax+By+Cz+D=0$ se zice izotrop, când $A^2+B^2+C^2=0$.

Definiţia unghiului. Să considerăm două drepte de parametrii directori (a, b, c), (a', b', c'). Unghiul V al acestor drepte este dat de

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}, \tag{10}$$

de unde se deduce

$$\sin V=\frac{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Aceste formule conțin trei radicali, ale căror semne sunt independente. Deci, toate valorile unghiului sunt cuprinse în formula

$$V = \pm V_0 + k\pi,$$

V însemnând una oarecare din ele. Chiar când s'a fixat sensul pe cele două drepte, unghiul V este dat de formula

$$V = \pm V'_0 + 2k\pi.$$

Nedeterminarea nu dispare de cât când s'a fixat un semn pentru fiecare radical. Știm că, pentru cele care figurează în expresia lui CosV, fixarea unui semn radicalului echivalează cu determinarea unui sens pe cele două drepte al căror unghi se caută. Să interpretăm însemnarea geometrică pe care o putem da fixării semnului celui de al treilea radical

$$\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2},$$

care figurează în expresia lui sinV. Pentru aceasta, să observăm că perpendiculara comună la cele două drepte al căror unghi se caută are parametrii directori $(bc'-cb', ca'-ac', ab'-ba')$ și deci, a fixa un semn pentru radicalul ce figurează în sinV, echivalează cu a atribui un sens acestei perpendiculare.

Putem da o altă expresie a unghiului a două drepte. In adevăr, fie A și A′ două puncte la infinit, ale căror coordonate $(a, b, c, 0)$, $(a', b', c', 0)$ definesc două direcții. Să căutăm intersecția dreptei AA′ cu cercul imaginar de la infinit $x^2+y^2+z^2=0$, $t=0$. Un punct oarecare al dreptei AA′ având coordonatele $a+\lambda a'$, $b+\lambda b'$, ..., valorile lui λ corespunzătoare punctelor μ și μ' de intersecție sunt date de ecuația

$$(a+\lambda a')^2+(b+\lambda b')^2+(c+\lambda c')^2=0,$$

sau

$$\lambda^2(a'^2+b'^2+c'^2)+2\lambda(aa'+bb'+cc')+a^2+b^2+c^2=0. \tag{11}$$

Să însemnăm cu λ și λ' valorile lui λ care corespund punctelor μ și μ'; acelea care corespund lui A și A′ fiind 0 și ∞, avem (No. 1)

$$R(A, A', \mu, \mu') = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Notând cu r acest raport, pentru a-l determina, să observăm că

$$\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda'}+1\right)^2}{\frac{\lambda}{\lambda'}} = \frac{(\lambda+\lambda')^2}{\lambda\lambda'}.$$

Inlocuin pe $\lambda+\lambda'$, $\lambda\lambda'$ cu valorile lor din ecuația (11) avem

$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{4(aa'+bb'+cc')^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}$$

și ținând seamă de (10), găsim

$$\frac{(r+1)^2}{r}=4\cos^2 V,$$

de unde

$$r^2+2r(1-2\cos^2 V)+1=0,$$

iar rădăcinile acestei ecuații sunt date de

$$r=-1+2\cos^2 V\pm 2i\cos V\sin V=\cos 2V\pm i\sin 2V,\quad r=e^{\pm 2iV},$$

și sunt

$$r=e^{2iV},\quad r'=e^{-2iV}.$$

Observând că aceste două valori sunt reciproce, avem

$$e^{2iV}=r,\quad V=\frac{1}{2i}\log R(A,A',\mu,\mu').$$

Am găsit deci pentru unghi o expresie analoagă cu cea din Geometria plană, cu deosebire că aci se iau în locul punctelor I și J al planului paralel cu cele două direcții cele două puncte μ și μ' unde acest plan tae cercul de la infinit.

Noțiuni de geometrie sferică.

10. **Generatoarele rectilinii ale sferei.** Să însemnăm cu

$$aP^2+bQ^2+cR^2+dS^2=0$$

ecuația unei cuadrice raportată la un tetraedru conjugat. Nefăcând nici o distincție între real și imaginar, se poate aduce această ecuație la forma

$$PQ=RS, \tag{1}$$

descompunând în doi factori $aP^2+bQ^2+cR^2+dS^2$.

Forma redusă (1) pune în evidență două sisteme (λ), (μ) de generatoare ale suprafeței,

$$R=\lambda P,\ Q=\lambda S;\quad R=\mu Q,\ P=\mu S.$$

De unde

$$\frac{P}{\mu}=\frac{Q}{\lambda}=\frac{R}{\lambda\mu}=\frac{S}{1},$$

și deci, coordonatele unui punct oarecare al cuadricei vor fi reprezentate, într'un sistem de coordonate tetraedrice oarecare, prin formule de forma

$$\rho X=a_1\lambda\mu+b_1\lambda+c_1\mu+d_1,$$
$$\rho Y=a_2\lambda\mu+b_2\lambda+c_2\mu+d_2,$$
$$\rho Z=a_3\lambda\mu+b_3\lambda+c_3\mu+d_3,$$
$$\rho T=a_4\lambda\mu+b_4\lambda+c_4\mu+d_4,$$

ρ fiind un factor de proporționalitate.

Să considerăm patru generatoare din sistemul (λ), corespunzătoare valorilor $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$. Acestea sunt tăiate de o generatoare din sistemul (μ) în punctele m_1,m_2,m_3,m_4, care sunt în planele

$$R=\lambda_1 P,\ R=\lambda_2 P,\ R=\lambda_3 P,\ R=\lambda_4 P. \tag{2}$$

Aceste plane tăindu-se după aceeaşi dreaptă $R=0, P=0$, raportul anarmonic al acestor patru puncte m_i este evident egal cu acela al valorilor corespunzătoare λ_i şi deci *raportul anarmonic al celor patru puncte unde patru generatoare fixe de un sistem sunt tăiate de o generatoare oarecare din celalt sistem este un număr constant.*

Să considerăm acum o secţiune plană oarecare (Σ). Ea tae dreapta $R=0, P=0$ într'un punct α şi cele patru plane reprezentate de ecuaţiile (2) tae planul conicei (Σ) după patru drepte întâlnind întâi conica (Σ) în punctul α şi în alte patru puncte μ_1, μ_2, μ_3,μ_4. Planele (2) tae planul secţiunei după dreptele $\alpha\mu_1,\alpha\mu_2,\alpha\mu_3,\alpha\mu_4$, al căror raport anarmonic este acelaş ca al celor patru plane, adică egal cu raportul anarmonic al parametrilor $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ \lambda_4$. Dar acest raport anarmonic al celor patru drepte $\alpha\mu_i$ este egal (No. 7) cu acela al celor patru puncte μ_i de pe conica (Σ). Deci, *dacă se consideră patru puncte* μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 *pe o secţiune plană oarecare a cuadricei, raportul lor anarmonic, evaluat considerându-le ca aparţinând la această secţiune, va fi egal cu acela al generatoarelor ale unuia sau celuilalt sistem care se tae în aceste patru puncte*, înţelegând prin raportul anarmonic a patru generatoare rectilinii aparţinând unui sistem, acela al celor patru puncte unde ele tae o generatoare oarecare din celalt sistem.

In cazul sferei

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

a cărei ecuaţie se poate scrie

$$(x+iy)(x-iy)=(1-z)(1+z),$$

ecuaţiile

$$\frac{x+iy}{1-z}=\alpha=\frac{1+z}{x-iy},$$

$$\frac{x-iy}{1-z}=-\frac{1}{\beta}=\frac{1+z}{x+iy}$$

definesc cele două sisteme de generatoare rectilinii α şi β ale sferei. Expresiunile lui x,y,z în funcţiune de α şi β sunt

$$x=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta},\quad y=i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},\quad z=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \tag{3}$$

Variabilele α şi β definesc un sistem de coordonate curbilinii ima-

ginare ale sferei. Generatoarele rectilinii pentru care $\alpha=$const., vor fi zise de primul sistem; acelea, dealungul căror $\beta=$const., generatoarele rectilinii de al doilea sistem. Pentru a trece dela un punct la punctul diametral opus, va fi destul a schimba α cu β.

Cele două generatoare rectilinii ale sferei (1) ce trec printr'un punct al sferei se obţin luând intersecţia cu planul tangent la sferă în acel punct.

11. **Expresiunea distanţei a două puncte ale sferei**. Să considerăm pe sfera de rază 1 două puncte M şi M′, ale căror coordonate sunt de forma (3), corespunzătoare valorilor (α,β), (α',β'). Unghiul dreptelor OM şi OM′ are ca măsură arcul de cerc mare ce uneşte cele două puncte şi este definit de relaţia

$$\cos MM'=xx'+yy'+zz'=\frac{-2\alpha\beta-2\alpha'\beta'+(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}.$$

De unde

$$\sin^2\frac{MM'}{2}=\frac{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')},\quad \cos^2\frac{MM'}{2}=\frac{-(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')},\quad \operatorname{tg}^2\frac{MM'}{2}=\frac{-(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')}.$$

Putem da o altă expresiune a unghiului direcţiilor OM şi OM′. Pentru aceasta, să notăm cu P unul din polii arcului MM′. Să presupunem că am ales axele de coordonate perpendiculare astfel ca xOy să fie planul MOM′, iar Oz dreapta OP. Ecuaţia sferei fiind $x^2+y^2+z^2=1$, planul tangent (T) în P(0,0,1), $z=1$, tae sfera după dreptele izotrope $x^2+y^2=0$ ale planului (T) ce trec prin P. Aceste două generatoare ale sferei ce trec prin punctul P întâlnesc deci cercul MOM′, ale cărui ecuaţii sunt $x^2+y^2=1$, $z=0$, în cele două puncte imaginare ale sale, I şi J, care sunt la infinit. Obţinem astfel patru puncte pe cercul mare MM′ şi însemnând cu m un punct al acestui cerc mare, după relaţia lui Laguerre (No. 8), avem (No. 7)

$$(mM',mM)=\frac{1}{2i}\log R(mM,mM',mI,mJ)=\frac{1}{2i}\log R(M,M',I,J).$$

Dar o fiind centrul cercului mare MM′, arcul MM′ este măsurat de unghiul la centru MoM′ egal cu îndoitul lui MmM′, şi deci

$$\text{sau}\qquad \operatorname{arc}MM'=\frac{1}{i}\log R(M,M',I,J),$$

$$(4)\qquad e^{iMM'}=R(M,M',I,J),$$

raportul anarmonic din membrul al doilea fiind acela al celor patru puncte (No. 7) pe cercul mare MM′. Se vede că acest unghi este determinat în mărime şi în semn, afară de un multiplu de 2π.

(1) A se vedea *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (No. 262).

Noțiuni asupra deplasărilor în Geometria euclidiană clasică și iperbolică.

12. Deplasările în geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni. Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni constă în studiul grupului de deplasări care lasă invariabilă o formă cuadratică fundamentală dată,

$$f(x_1-x_2,\ y_1-y_2)=a(x_1-x_2)^2+b(y_1-y_2)^2+c(x_1-x_2)(y_1-y_2),$$

relativă la punctele de coordonate (x_1, y_1), (x_2, y_2).

In Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni această formă cuadratică este

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \tag{1}$$

care se ia ca pătratul distanței punctelor considerate. Dacă se consideră punctul (x, y) și punctul infinit vecin, $(x+dx,\ y+dy)$, forma diferențială a formei cuadratice este

$$dx^2+dy^2 \tag{2}$$

și dă pătratul elementului de arc.

Se știe că transformarea lineară ortogonală

$$x=x_0+X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\quad y=y_0+X\sin\alpha+Y\cos\alpha \tag{3}$$

reproduce(1) forma cuadratică (1) sau (2).

In coordonate omogene relațiile (3) se pot scrie

$$\begin{aligned} x&=X\cos\alpha-Y\sin\alpha+x_0Z,\\ y&=X\sin\alpha+Y\cos\alpha+y_0Z,\\ z&=Z. \end{aligned} \tag{4}$$

Aceste transformări formează un grup, căci însemnând cu (F) poziția unei figuri date și (F′) și (F″) pozițiile figurei obținute cu două transformări (4), se poate trece de la figura (F) la (F″) direct cu o transformare analoagă, (4), fără a trece prin figura (F′).

Să căutăm dacă există un punct dublu (x,y,z), care să coincidă cu omologul său (X,Y,Z). Coordonatele fiind omogene, trebue să avem

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\rho.$$

Inlocuind pe x, y, z cu valorile lor $\rho X, \rho Y, \rho Z$ în ecuațiile (4), coordonatele (X,Y,Z) ale punctelor duble sunt date de ecuațiile

$$\begin{aligned} X(\cos\alpha-\rho)-Y\sin\alpha+x_0Z&=0,\\ X\sin\alpha+(\cos\alpha-\rho)Y+y_0Z&=0,\\ (1-\rho)Z&=0, \end{aligned} \tag{5}$$

al căror determinant este

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\rho & -\sin\alpha & x_0\\ \sin\alpha & \cos\alpha-\rho & y_0\\ 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix}=(1-\rho)(\rho^2-2\rho\cos\alpha-1).$$

---

(1) Transformarea generală, pentru care forma (2) este invariant, este $x=g(X,Y), y=h(X,Y)$, astfel că funcțiunea $g(X,Y)+ih(X,Y)$ să fie analitică de $X+iY$, când transformarea este cu păstrare de similitudine infinitezimală.

Sistemul (5) trebuind să admită soluţii pentru X,Y,Z nu toate nule, trebuie ca determinantul să fie nul, adică

$$(1-\rho)(\rho^2-2\rho\cos\alpha-1)=0,$$

de unde $\rho_1=1$, $\rho_2=e^{ix}$, $\rho_3=e^{-ix}$.

Inlocuind pe $\rho=1$ în primele două ecuaţii (5), avem

$$X(\cos\alpha-1)-Y\sin\alpha+x_0Z=0,$$
$$X\sin\alpha+(\cos\alpha-1)Y+y_0Z=0,$$

care ne dau un punct P unic la distanţă finită, dacă determinantul sistemului, $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2(1-\cos\alpha)$, este diferit de zero, adică dacă $\alpha\neq 0$; când $\alpha=0$, atunci ecuaţiile precedente se reduc la $Z=0$, adică toate punctele dreptei de la infinit sunt puncte duble, în care caz deplasarea considerată se reduce la o translaţie.

Inlocuind în (5) pe ρ cu $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $e^{-i\alpha}$, obţinem

$$Z=0,\ X\pm iY=0,$$

adică celelalte două puncte duble sunt punctele circulare $I(1,i,0)$, $J(1,-i,0)$.

Deci, deplasarea euclidiană clasică, definită de formulele (4), este o transformare proectivă ale cărei două din punctele duble sunt punctele circulare I şi J. Aceste transformări fac parte din grupul transformărilor omografice, deci au proprietatea conservării raportului anarmonic. $A\Delta_1$ şi $A\Delta_2$ fiind două drepte şi $A'\Delta'_1$, $A'\Delta'_2$ corespunzătoarele lor, avem egalitatea raportelor anarmonice

$$R(A\Delta_1,A\Delta_2,AI,AJ)=R(A'\Delta'_1,A'\Delta'_2,A'I,A'J).$$

Dar, după relaţia lui Laguerre,

$$V=\frac{1}{2i}\log R(A\Delta_1,A\Delta_2,AI,AJ),$$

rezultă că unghiul V al dreptelor $A\Delta_1,A\Delta_2$ este egal cu al dreptelor $A'\Delta'_1$ $A'\Delta'_2$, deci unghiurile se păstrează.

In rezumat, în Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni, deplasările plane se reduc la translaţii şi rotaţii. Insemnând cu (F_1) noua poziţie a unei figuri obţinută din figura (P) cu transformarea (3), şi însemnând cu P punctul dublu real, al transformării, se poate trece de la figura (F) la figura (F_1) cu o rotaţie de un unghi oarecare în jurul punctului P.

13. **Deplasările în geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni.** I. Insemnând cu (x,y,z), (x_1,y_1,z_1) coordonatele carteziene a două puncte M şi M_1. Geometria euclidiană cu trei dimensiuni este studiul deplasărilor care lasă neschimbată forma cuadratică

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2, \tag{6}$$

a cărei formă diferenţială este

$$dx^2+dy^2+dz^2.$$

Se ştie că aceste transformări sunt date de grupul transformărilor ortogonale (transformarea axelor de coordonate)

$$\begin{aligned} x&=x_1+a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ y&=y_0+a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ z&=z_0+a_3X+b_3Y+c_3Z, \end{aligned} \tag{7}$$

unde determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

este ortogonal[1]) şi are valoarea egală cu ± 1, adică

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,$$
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=1, \quad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,$$
$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1, \quad c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0.$$

În cazul $\Delta=1$, se deduce $a_1=b_2c_3-c_2b_3$,..., adică orice element al determinantului Δ este egal cu minorul său. Între cele 9 cosinusuri directoare a_1, ...c_3 există 6 relaţii distincte, mai rămân deci numai trei variabile. Cum în formulele (7) mai sunt trei cantităţi variabile, x_0,y_0,z_0, urmează că aceste deplasări depind de şase parametri variabili.

Am văzut că relaţia (6), care reprezintă distanţa $\overline{MM_1}^2$ este un invariant pentru aceste deplasări. Să considerăm trei puncte $M(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$. Avem

$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=[(x_1-x_3)-(x_1-x_2)]^2+[(y_1-y_3)-(y_1-y_2)]^2$$
$$+[(z_1-z_3)-(z_1-z_2)]^2=$$
$$[(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2]+[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]-$$
$$2[(x_1-x_3)(x_1-x_2)+(y_1-y_3)(y_1-y_2)+(z_1-z_3)(z_1-z_2)].$$

Deci

$$2[(x_1-x_3)(x_1-x_2)+(y_1-y_3)(y_1-y_2)+(z_1-z_3)(z_1-z_2)]=\overline{M_1M_3}^2+\overline{M_1M_2}^2-\overline{M_2M_3}^2.$$

Cum M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 sunt invarianţi, urmează că şi

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)$$

este un invariant pentru aceste deplasări. Dar

$$\frac{\Sigma(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{\sqrt{\Sigma(x_1-x_2)^2}\cdot\sqrt{\Sigma(x_1-x_3)^2}}$$

este cosinusul unghiului dreptelor M_1M_2, M_1M_3. Deci şi unghiul este un invariant pentru aceste deplasări, adică şi unghiurile se păstrează. Invarianţa unghiurilor rezultă din acea a distanţelor.

II. *Translaţii.* Printre deplasările reprezentate de ecuaţiile (7) sunt translaţiile

(8) $$x=x_0+X', \quad y=y_0+Y', \quad z=z_0+Z'.$$

Scriind aceste relaţii în coordonate omogene, avem

$$x=x_0T'+X', \quad y=y_0T'+Y', \quad z=z_0T'+Z', \quad t=T',$$

Dacă punctul (X',Y',Z',T') coincide cu omologul său (x,y,z,t), trebue să avem

$$\frac{x}{X'}=\frac{y}{Y'}=\frac{z}{Z'}=\frac{t}{T'}=\rho.$$

Înlocuind pe x,y,z,t, formulele (8) devin

$$(\rho-1)X'=x_0, \quad (\rho-1)Y'=y_0, \quad (\rho-1)Z'=z_0, \quad (\rho-1)T'=0.$$

Din ultima rezultă sau $\rho=1$, sau $T'=0$. Dar, pentru $\rho=1$, aceste ecuaţii sunt

[1]) A se vedea *Lecţiuni de Geometrie analitică* (No. 197).

incompatibile. Rămâne de considerat numai $T'=0$, iar din primele trei din aceste relații se găsesc valori determinate pentru X',Y',Z'. De aci rezultă că punctele care rămân invariabile față de translații sunt punctele planului de la infinit.

III. *Rotația în jurul unei axe.* Considerând deplasarea (7), se vede că punctul (x,y,z) la distanță finită care coincide cu omologul său (X,Y,Z), se obține făcând în (7) $x=X$, $y=Y$, $z=Z$. Deci, coordonatele acestui punct sunt date de ecuațiile

$$\begin{aligned}(a_1-1)X+b_1Y+c_1Z+x_0&=0,\\ a_2Y+(b_2-1)Y+c_2Z+y_0&=0,\\ a_3X+b_3Y+(c_3-1)Z+z_0&=0,\end{aligned}$$

al căror determinant este

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1-1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2-1 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_1+b_2+c_3-1.$$

Dar

$$a_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix},\quad b_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix},\quad c_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=1,$$

deci $\delta=0$. Așa dar, nu există nici un punct (X,Y,Z) la distanță finită care să rămâe invariabil în deplasarea (7). Obținem deci un rezultat contrariu ca în Geometria plană.

Inlocuind în (7) pe $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, omologul acestui punct este punctul O' de coordonate $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Făcând o translație (8), axele de coordonate $Oxyz$ se transportă paralel în O' și devin $O'X'Y'Z'$. Deplasarea rămasă din (7) este de forma

$$\begin{aligned}X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z\\ Z'&=a_3X+b_3Y+c_3Z,\end{aligned}\tag{9}$$

care este o rotație a triedrului format de axele de coordonate $O'X'Y'Z'$ până ajunge în noua poziție $O'XYZ$. Presupunând că o figură (F) este invariabil legată de triedrul $O'X'Y'Z'$, deplasarea (9) este o rotație a figurei (F) care are un punct fix O'.

Dar, dreapta $O'X$ poate fi adusă (1) peste $O'X'$ cu o rotație în jurul unei axe $O'\delta$ ce este în planul perpendicular pe planul $X'O'X$ dus prin bisectoarea unghiului $X'O'X$. Deci, unghiul $XO'Y$ se poate aduce peste unghiul $X'O'Y'$ cu o rotație în jurul unei axe $O'\Delta$ ce este la intersecția planelor perpendiculare pe planele $X'O'X$, $Y'O'Y$, duse respectiv prin bisectoarele unghiurilor $X'O'X$, $Y'O'Y$. Deci triedrul $O'X'Y'Z'$ se poate aduce peste triedrul $O'XYZ$ cu o rotație de unghiul θ în jurul axei $O'\Delta$.

Așa dar, o figură care are un punct fix O' se poate aduce în altă poziție cu o rotație în jurul unei axe $O'\Delta$ ce trece prin punctul fix, astfel că deplasările în Geometria euclidiană cu trei dimensiuni se reduc la translații și rotații în jurul unei axe.

(1) A se vedea *Lecțiuni de Geometrie Analitică* (No. 193).

IV. Putem obține aceste rezultate pe cale analitică. Pentru aceasta, vom da mai întâi alte expresiuni pentru cosinusurile directoare $a_1, \ldots, c_3$ din deplasarea (9). Să considerăm o figură mobilă având punctul fix O'; dacă îi dăm o deplasare oarecare, exprimată cu relațiile (9), aceasta echivalează cu o rotație de unghiul θ în jurul unei axe O'Δ (Fig. 2). Deci, M fiind un punct al figurei și M' noua sa poziție după deplasare, este un plan trecând prin M' și M, perpendicular pe O'Δ, și în acest plan un cerc ce trece prin M și M' cu centrul P pe O'Δ. Tangentele în M și M' se tae în Q. Unghiul MPM' fiind egal cu θ, unghiul MPQ este egal cu $\frac{\theta}{2}$. Raportând figura la axele O'X'Y'Z', și însemnând cu $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ cosinusurile directoare ale axei O'Δ, ecuațiile acestei axe sunt

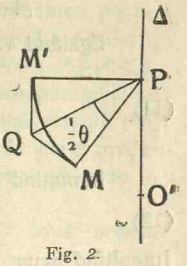


Fig. 2.

$$\frac{X'}{\cos\alpha}=\frac{Y'}{\cos\beta}=\frac{Z'}{\cos\gamma}.$$

Distanța de la punctul M'(X',Y',Z') la această dreaptă este

$$M'P=\sqrt{(Y'\cos\gamma-Z'\cos\beta)^2+(Z'\cos\alpha-X'\cos\gamma)^2+(X'\cos\gamma-Y'\cos\alpha)^2}.$$

Parametrii directori ai dreptei O'M' fiind X',Y',Z', iar dreapta M'Q fiind perpendiculară pe planul M'O'P (pe dreptele O'M', O'Δ), cosinusurile directoare q, p, r ale dreptei QM' verifică ecuațiile

$$pX'+qY'+rZ'=0,$$

$$p\cos\alpha+q\cos\beta+r\cos\gamma=0,$$

de unde

$$\frac{p}{Y'\cos\gamma-Z'\cos\beta}=\frac{q}{Z'\cos\alpha-X'\cos\gamma}=\frac{r}{X'\cos\beta-Y'\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{(Y'\cos\gamma-Z'\cos\gamma)^2+\ldots}}=\frac{1}{M'P},$$

$$p=\frac{Y'\cos\gamma-Z'\cos\beta}{M'P},\quad q=\frac{Z'\cos\alpha-X'\cos\gamma}{M'P},\quad r=\frac{X'\cos\beta-Y'\cos\alpha}{M'P}.$$

Din triunghiul dreptunghic QM'P, avem $QM'=M'P\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, deci proecțiile segmentului M'Q pe axele O'X', O'Y', O'Z' sunt

$$M'Q-p=MP\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\frac{Y'\cos\gamma\ \ Z'\cos\beta}{MP}=(Y'\cos\gamma-Z'\cos\beta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$(Z'\cos\alpha-X'\cos\gamma)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ (X'\cos\beta-Y'\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Punând

$$\frac{\lambda}{\rho}=\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ \frac{\mu}{\rho}=\cos\beta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ \frac{\nu}{\rho}=\cos\gamma\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\tag{10}$$

proecțiile lui M'Q pe axe sunt

$$\frac{\mu Z'-\nu Y'}{\rho},\ \frac{\nu X'-\lambda Z'}{\rho},\ \frac{\lambda Y'-\mu X'}{\rho}.$$

Pentru a obține coordonatele (ξ, η, ζ) ale punctului Q, observăm că $\text{pr}O'Q=\text{pr}O'M'+M'Q$. Proectând pe axele O'X', O'Y', O'Z' avem

$$\xi=X'+\frac{\mu Z'-\nu Y'}{\rho},\ \ldots,$$

sau

$$\rho\xi=\rho X'+\mu Z'-\nu Y',$$
$$\rho\eta=\rho Y'+\nu X'-\lambda Z',$$
$$\rho\zeta=\rho Z'+\lambda Y'-\mu X'.$$

Insemnând cu (X,Y,Z) coordonatele punctului M, observând că MQ este de sens contrar cu M'Q, printr'un calcul analog, obţinem

$$\rho\xi=\rho X-\mu Z+\nu Y,\ \rho\eta=\rho Y-\nu X+\lambda Z,\ \rho\zeta=\rho Z-\lambda Y+\mu X.$$

Egalând valorile lui $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, avem

(11)
$$\rho X'+\mu Z'-\nu Y'=\rho X-\mu Z+\nu Y,$$
$$\rho Y'+\nu X'-\lambda Z'=\rho Y-\nu X+\lambda Z,$$
$$\rho Z'+\lambda Y'-\mu X'=\rho Z-\lambda Y+\mu X.$$

Inmulţind aceste ecuaţii respectiv cu $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$ şi adunând, avem

(12)
$$\lambda X'+\mu Y'+\nu Z'=\lambda X+\mu Y+\nu Z.$$

Inmulţind acum ecuaţiile (12) şi (11) respectiv cu $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, $\pm\rho$, astfel ca adunând, coeficientul necunoscutei X',Y',Z' să devie egal cu

(13)
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=A$$

avem

(14)
$$AX'=(\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)X+2(\lambda\mu+\nu\rho)Y+2(\lambda\nu-\mu\rho)Z,$$
$$AY'=2(\lambda\mu-\nu\rho)X+(\rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2)Y+2(\mu\nu+\lambda\rho)Z,$$
$$AZ'=2(\lambda\nu+\mu\rho)X+2(\mu\nu-\lambda\rho)Y+(\rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)Z,$$

care sunt formulele lui d'Olinde Rodrigues. Se poate lua A=1, $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1$, când cantităţile λ, μ, ν, ρ se zic parametrii cuaternionieni.

Dar coordonatele (X,Y,Z) ale punctului M se obţin din acelea ale punctului M'(X',Y',Z') cu formulele (9), pe care comparându-le cu (14), B=1, urmează

(15)
$$\begin{cases} a_1=\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & b_1=2(\lambda\mu+\nu\rho), & c_1=2(\lambda\nu-\mu\rho), \\ a_2=2(\lambda\mu-\nu\rho), & b_2=\rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2 & c_2=2(\mu\nu+\lambda\rho), \\ a_3=2(\lambda\nu+\mu\rho), & b_3=2(\mu\nu-\lambda\rho), & c_3=\rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^2, \end{cases}$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1.$$

Acestea fiind stabilite, să căutăm dacă există o dreaptă O'Δ, ce trece prin O', şi care să rămâe invariabilă în deplasarea (9). Dacă (X,Y,Z) este un punct al acestei drepte O'Δ, punctul (X',Y',Z') obţinut din acesta cu deplasarea (9) va fi pe dreapta O'Δ, dacă

$$\frac{X'}{X}=\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=k.$$

Inlocuind în (9) pe X',Y',Z' cu kX,kY,kZ, cantităţile X,Y,Z sunt date de ecuaţiile

(16)
$$\begin{aligned} (a_1-k)X+\ b_1Y+\ c_1Z&=0,\\ a_2X+(b_2-k)Y+\ c_2Z&=0,\\ a_3X+\ b_3Y+(c_3-k)Z&=0, \end{aligned}$$

al căror determinant este

$$D=\begin{vmatrix} a_1-k & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-k & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-k^3+k^2(a_1+b_2+c_3)-$$
$$-k[(a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_3-a_3c_1)+(b_2c_3-b_3c_2)],$$
$$D=1-k^3+k^2(a_1+b_2+c_3)-k(c_3+b_2+a_1),$$
$$D=(1-k)[k^2+k(a_1-b_2+c_3-1)+1].$$

Pentru ca dreapta $O'\Delta$ să existe, trebue ca să putem găsi pentru (X,Y,Z) valori nu toate nule, deci determinantul D al sistemului (16) trebue să fie nul, iar valorile lui X,Y,Z sunt date în acest caz de primele două ecuaţii (16). Dar D se anulează pentru $k=1$ şi pentru rădăcinile ecuaţiei

$$k^2+k(a_1+b_2+c_3-1)+1=0. \tag{17}$$

Realizantul acestei ecuaţie în k este $R=(a_1+b_2+c_3-1)^2-4$. Inlocuind pe a_1, b_2, c_3 cu valorile lor (15), avem $R=(3\rho^2-\lambda^2-\mu^2-\nu^2-1)^2-4$ Cum $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1$, urmează $R=(3\rho^2-1+\rho^2-1)^2-4=16\rho^2(\rho^2-1)=16\rho^2(-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)=-16\rho^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)<0$. Deci ecuaţia (17) are rădăcini imaginare şi prin urmare determinantul D se anulează numai pentru $k=1$. Inlocuind pe k cu 1, primele două ecuaţii (16) ne dau un singur sistem de valori proporţionale pentru X,Y,Z, care corespund punctelor situate pe o dreaptă $O'\Delta$. Deci, în deplasarea (9) este o singură dreaptă care rămâne neschimbată.

Luând ca axă O'Z' dreapta $O'\Delta$, iar ca axe O'X',O'Y' două drepte perpendiculare oarecare, deplasarea (9) este de forma

$$\begin{aligned} X'&=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\ Y'&=X\sin\theta+Y\cos\theta,\\ Z'&=Z, \end{aligned}$$

care reprezintă o rotaţie de unghiul θ în jurul axei O'Z'. Se vede deci că orice deplasare care lasă neschimbat un punct din spaţiu la distanţă finită, este o rotaţie în jurul axei ce trece prin acest punct.

V. Observând că deplasarea (7) este rezultatul unei translaţii şi unei rotaţii în jurul unei axe, urmează că orice deplasare este rezultatul unei translaţii şi unei rotaţii în jurul unei axe.

In rezumat, în Geometria metrică cu trei dimensiuni(1) există un plan privilegiat, care este planul de la infinit; în acest plan sunt puncte particulare care joacă un rol special, şi anume punctele circulare de la infinit ale tuturor dreptelor izotrope. Locul acestor puncte este cercul imaginar de la infinit. Vom vedea, în cele ce urmează, că, privind problema din punct de vedere proectiv al raportului anarmonic, putem raporta la acest imaginar definiţiile fundamentale ale unghiului şi distanţei; vom putea deci construi Geometrii neeuclidiene, înlocuind acest cerc cu altă conică la distanţă finită sau infinită, în care caz vom lua în locul formei cuadratice

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

o formă cuadratică oarecare de x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2.

14 **Geometria pseudo-euclidiană iperbolică cu două dimensiuni.** I. Această Geometrie este studiul transformărilor proective care lasă neschimbate punctele P şi Q de la infinit a două drepte perpendiculare Ox, Oy, şi pentru care rotaţiile mai au proprietatea că fac să alunece asupra lor conicele (H) cu centrul, în centrul de rotaţie şi trecând prin P şi Q.

O translaţie în sensul Geometriei clasice lasă neschimbat fiecare punct de la infinit. Deci, conform definiţii noastre, translaţiile fac parte din grupul deplasărilor pe care le considerăm. Deci, în privinţa translaţii, şi prin urmare în privinţa paralelelor, nu este nici o deosebire între Geometria euclidiană iperbolică şi cea clasică.

(1) Pentru studiul deplasărilor în spaţiul cu patru dimensiuni, a se vedea, *Borel, Introduction géométrique à quelques théories physiques*, p. 16.

O rotație în jurul punctului O este o transformare proectivă dată de ecuațiile

(18) $$x=\alpha X+\beta Y,\quad y=\alpha' X+\beta' Y.$$

Dacă (x,y), (X,Y) sunt două puncte corespunzătoare, coeficienții unghiulari ai dreptelor δ' și δ ce unesc origina cu aceste puncte sunt $m'=\frac{y}{x}$, $m=\frac{Y}{X}$. Din (18), avem

$$\frac{y}{x}=\frac{\alpha'+\beta'\frac{Y}{X}}{\alpha+\beta\frac{Y}{X}},\quad m'=\frac{\alpha'+\beta' m}{\alpha+\beta m}.$$

O dreaptă δ este lasată invariabilă de această transformare când coincide cu δ', adică sunt acele drepte pentru care $m=m'$; ele sunt date de ecuația

(19) $$m=\frac{\alpha'+\beta' m}{\alpha+\beta m},\quad \beta m^2+(\alpha-\beta')m-\alpha'=0.$$

Punctele de la infinit P și Q ale axelor Ox, Oy fiind invariabile, se vede că dreptele care rămân invariabile sunt Ox și Oy, ale căror coeficienți unghiulari sunt 0 și ∞. Exprimând că ecuația (19) are aceste rădăcini, urmează $\alpha'=0$, $\beta=0$. Transformarea (18) este deci de forma

$$x=\alpha X,\quad y=\beta' Y.$$

Dar, conicele (H) cu centrul în 0 și trecând prin P și Q sunt iperbolele $xy=k$. Cum aceste conice trebue să alunece asupra lor în această rotație, urmează $xy=XY=k$, deci $\alpha\beta'=1$. Deci rotațiile iperbolice sunt reprezentate de ecuațiile

(20) $$x=\lambda X,\quad y=\frac{Y}{\lambda}.$$

Vom considera numai cazul λ pozitiv și anume figurile situate în unghiul xOy. sau în unghiul opus la vârf

Grupul deplasărilor în această Geometrie iperbolică care cuprind translațiile și rotațiile în jurul unui punct este dat de formulele

(21) $$x=a+\lambda X,\quad y=b+\frac{Y}{\lambda},$$

care depinde ca și cel euclidian clasic de trei parametrii a, b, λ.

II. Considerând punctele $m_1(x_1,y_1)$, $m_2(x_2,y_2)$ și corespunzătoarele lor cu această transformare, (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), se vede că avem

(22) $$(x_1-x_2)(y_1-y_2)=(X_1-X_2)(Y_1-Y_2).$$

Așa dar, în această Geometrie, forma cuadratică invariantă este

(23) $$(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

Deci, dacă segmentele m_1m_2 și M_1M_2 sunt astfel în cât să avem relația (22). putem să aducem cu deplasarea (21) segmentul m_1m_2 peste M_1M_2. Cantitatea

(24) $$M_1M=\sqrt{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}$$

se zice în această Geometrie distanța punctelor (x_1,y_1), (x_2,y_2).

Locul punctelor (x,y) la unitatea de distanță de origina O este iperbola $xy=1$. Dacă punctul $M(x,y)$ este pe una din dreptele Ox sau Oy, avem $OM=0$. De asemenea, distanța în sensul acestei geometrii, dată de formula (24), a două puncte oarecare ale unei paralele la Ox sau Oy, este nulă. Deci, paralelele la Ox și Oy sunt drepte de lungime nulă; aceste drepte înlocuesc dreptele izotrope din Geometria clasică.

III. Să considerăm două puncte $M(x,y)$, $M'(x',y')$; distanța lor este dată de

$$\overline{MM'}^2=(x-x')(y-y'),$$

care este un invariant. Dar

(25) $$\overline{MM'}^2=xy+x'y'-(xy'+x'y),\quad \overline{MM'}^2=\overline{OM}^2+\overline{OM'}^2-(xy'+x'y),$$

și cum MM', OM, OM' sunt invarianți, urmează că și $xy'+x'y$ este un invariant. Pentru a da o interpretare acestui invariant, să considerăm raportul anarmonic

$$\rho=R(OM',OM,OX,Oy).$$

Insemnând cu $m=\frac{y}{x}$, $m'=\frac{y'}{x'}$ coeficienții unghiulari ai dreptelor OM, OM', avem

$$\rho=\frac{m'}{m}=\frac{yx'}{xy'}.$$

Numind unghiul direcțiilor OM',OM cantitatea $V=\frac{1}{2}\log\rho$, avem

$$\sqrt{\rho}+\frac{1}{\sqrt{\rho}}=e^{V}+e^{-V}=2\mathrm{ch}V,$$

și deci

$$\frac{\rho+1}{\sqrt{\rho}}=2\mathrm{ch}V,\quad \frac{\frac{m'}{m}+1}{\sqrt{\frac{m'}{m}}}=2\mathrm{ch}V,\quad \frac{m'+m}{\sqrt{mm'}}=2\mathrm{ch}V,\quad \frac{yx'+xy'}{\sqrt{xyx'y'}}=2\mathrm{ch}V,$$

(26) $$xy'+yx'=2\sqrt{xyx'y'}\,\mathrm{ch}V,\quad xy'+yx'=2OM.OM'\mathrm{ch}V,$$

iar relația (25) devine

$$\overline{MM'}^2=\overline{OM}^2+\overline{OM'}^2-2OM.OM'\mathrm{ch}V,$$

care este o relație fundamentală în Geometria iperbolică considerată. Unghiul a două drepte este dat de relația (26).

Am văzut că

$$2\mathrm{ch}V=\frac{m+m'}{\sqrt{mm'}},\quad 2\mathrm{ch}V=e^{V}+e^{-V}.$$

Dacă V este egal cu $i\frac{\pi}{2}$, avem

$$\mathrm{ch}V=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad m+m'=0.$$

Se zice în acest caz că dreptele OM, OM' de coeficienți unghiulari m și m' sunt perpendiculare. De ex., tangenta MT la iperbola $xy=1$ este perpendiculară pe dreapta OM (Fig. 3).

Să considerăm un punct M pe iperbola $xy=1$, fie P (Fig. 3) un punct pe tangenta în M și Q punctul unde OP tae iperbola: avem $\overline{OM}=\overline{OQ}=1$, $\overline{OP}<\overline{OQ}$, ceea ce arată că în Geometria iperbolică perpendiculara este mai lungă de cât orice oblică.

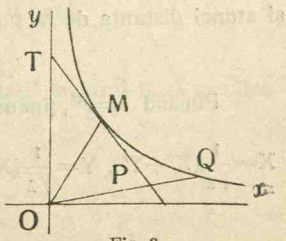


Fig. 3.

Pentru a preciza acest rezultat, să însemnăm în general cu (x,y), (x',y') coordonatele punctelor M și P, astfel ca OM și OP să fie

perpendiculare; coeficienții unghiulari ai dreptelor OM și MP sunt $m=\frac{y}{x}$, $m'=\frac{y-y'}{x-x'}$. Fiind perpendiculare, avem $m+m'=0$,

$$\frac{y}{x}+\frac{y-y'}{x-x'}=0,$$

de unde

$$x'y'=xy+(x-x')(y-y'),$$

și presupunând M și P în unghiul xOy, avem

(27) $$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+(x-x')(y-y').$$

Dar, observând mărimea coordonatelor x, y, x', y', se vede că $(x-x')(y-y')$ este negativă și atunci, conform definiției noastre, distanța MP nu este reală. Insemnând cu simbolul MP cantitatea

$$\sqrt{|(x-x')(y-y')|}=i\sqrt{(x-x')(y-y')},$$

relația (27) devine $\overline{OP}^2=\overline{OM}^2-\overline{MP}^2$, care este în Geometria iperbolică specială considerată teorema analoagă acelei lui Pitagora.

IV. Aria unui domeniu D este integrala $\iint dxdy$, care nu este schimbată prin deplasarea considerată observând relația (22). Să calculăm, de ex., aria triunghiului OMM', punctele M și M' fiind în unghiul xOy, pe curba $xy=1$. Notând cu (x,y), $(x'y')$ coordonatele acestor puncte, și $m=\frac{y}{x}$, $m'=\frac{y'}{x'}$ coeficienții unghiulari ai dreptelor OM, OM', expresia ariei triunghiului OMM' dată în geometria analitică este

$$2S=xy'-x'y=\frac{m-m'}{\sqrt{mm'}}.$$

Observând că $\frac{m+m'}{\sqrt{mm'}}=\text{ch}V$, $\text{ch}^2V-\text{sh}^2V=1$, urmează că

$$2S=\text{sh}V.$$

Se găsește în general că aria triunghiului OMM' este $\frac{1}{2}OM.OM'\text{sh}C$.

V. Dacă luăm ca axe de coordonate axele iperbolelor (H), adică bisectoarele axelor de coordonate considerate mai sus, însemnând cu x', y' coordonatele cele noi, avem

(28) $$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\quad y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

și atunci distanța de la punctul $M(x,y)$ la centru este dată de formula

$$2\overline{OM}^2=2xy=x'^2-y'^2.$$

Punând $\lambda=e^\theta$, ținând seamă de (28), $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y')$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'-Y')$, formulele (20) devin

$$x'=X'\text{ch}\theta+Y'\text{sh}\theta,$$
$$y'=X'\text{sh}\theta+Y'\text{ch}\theta,$$

de unde se deduce

$$x'^2-y'^2=X'^2-Y'^2. \tag{29}$$

Am fi putut pleca de la formula (29), luând ca formă cuadratică invariantă $(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2$. Raționând ca în cazul deplasărilor în spațiul cu trei dimensiuni, se obține pentru formulele deplasării

$$x'=a+X'\mathrm{ch}\theta+Y'\mathrm{sh}\theta,\quad y'=b+X\mathrm{sh}\theta+Y'\mathrm{ch}\theta.$$

16. **Geometria Pseudo-Euclidiană iperbolică cu trei dimensiuni.** In spațiul cu trei dimensiuni, deplasările iperbolice sunt acelea care lasă nescimbată forma cuadratică

$$F=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2.$$

Distanța a două puncte $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2$, este rădăcina pătrată a modulului formei cuadratice F. Printr'un raționament analog ca la spațiul euclidian cu trei dimensiuni, se vede că aceste deplasări sunt date de formulele

$$\begin{aligned} x&=a_1+a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ y&=a_2+a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ z&=a_3+a_3X+b_3Y+c_3Z, \end{aligned} \tag{30}$$

unde a_1, a_2, a_3 sunt trei constante date, iar elementele determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verifică relațiile independente

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2-a_3^2=1,\ a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3=0,\\ &b_1^2+b_2^2-b_3^2=1,\ b_1c_1+b_2c_2-b_3c_3=0,\\ &c_1^2+c_2^2-c_3^2=1,\ c_1a_1+c_2a_2-c_3a_3=0, \end{aligned} \tag{31}$$

Inlocuind în Δ și (31) pe a_3, b_3, c_3 cu ia_3', ib_3', ic_3', avem

$$\Delta^2=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix},\quad \begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+a_3'^2=1,\ a_1b_1+a_2b_2+a_3'b_3'=0,\\ &b_1^2+b_2^2+b_3'^2=1,\ b_1c_1+b_2c_2+b_3'c_3'=0,\\ &c_1^2+c_2^2+c_3'^2=1,\ c_1a_1+c_2a_2+c_3'a_3'=0, \end{aligned}$$

relații care arată că

$$\Delta^2=i\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}^2=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1.$$

Aceste deplasări se reduc la translații și rotații în jurul unei axe fixe care rămâne invariabilă în transformarea

$$\begin{aligned} X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ Z'&=a_3+Xb_3Y+c_3Z. \end{aligned}$$

Ca și în Geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni, se arată că

$$2[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)-(z_1-z_2)(z_1-z_3)=\overline{M_1M_3}^2+\overline{M_1M_2}^2-\overline{M_2M_3}^2,$$

și deci este un invariant. Insemnând cu V unghiul direcțiilor M_1M_2, M_1M_3, se notează cu

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)-(z_1-z_2)(z_1-z_3)=M_1M_2 \cdot M_1M_3 \operatorname{ch} V,$$

de unde

$$\operatorname{ch} V=\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)-(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}\ \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2-(z_1-z_3)^2}},$$

iar relația de mai sus devine

$$\overline{M_2M_3}^2=\overline{M_1M_2}^2+\overline{M_1M_3}^2-2M_1M_2 \cdot M_1M_3 \operatorname{ch} V.$$

Dreptele M_1M_2, M_1M_3 sunt perpendiculare când $V=i\frac{\pi}{2}$, adică $\operatorname{ch} V=0$, deci

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)-(z_1-z_2)(z_1-z_3)=0.$$

Studiul acestor deplasări corespunde într'un caz particular la spațiul lui Minkowski-Einstein în Relativitatea restrânsă.

Geometria neeuclidiană.
Geometria Cayleyană.

Definiţii metrice.

17. **Origina Geometrii Cayleyene.** Din cele studiate asupra Geometrii sferice şi Geometrii plane, am văzut că, pe când în Geometria sferică noţiunile de unghi şi de distanţă sunt în strânsă legătură cu raportul anarmonic, pare că în Geometria plană aceste noţiuni de unghi şi de distanţă sunt separate şi nu pot avea o origină comună. In cele ce urmează vom exprima principiile generale ale Geometrii Cayleyne, datorită marelui geometru englez Cayley, în care noţiunile metrice sunt obţinute printr'un procedeu uniform.

Pentru aceasta, să proectăm din centrul O al unei sfere diferitele puncte ale sale pe un plan (P). Cercurile mari ale sferei se vor proecta după linii drepte ale planului (P); conul izotrop cu vârful O şi ca bază cercul de la infinit, va tăia planul (P) după un cerc imaginar (C). Arcul de cerc mare, care uneşte două puncte M şi M' ale sferei, este egal, după relaţia lui Laguerre, cu

$$\text{arc}MM' = \frac{1}{2i}\log R(OM', OM, OI, OJ),$$

I şi J fiind punctele unde cercul mare MM' al sferei tae cercul de la infinit. Punctele M, M' se proectează după punctele m m'. ale planului (P), cercul mare MM' după dreapta mm' şi cele două puncte I şi J se proectează după punctele i şi j, unde dreapta m,m' tae cercul imaginar (C). Aplicând proprietatea proectivităţii raportului anarmonic, avem

$$\text{arc}MM' = \frac{1}{2i}\log R(m', m, i, j).$$

Pentru a găsi unghiul V a două arce de curbă trase pe sferă care se tae în M, şi având ca tangente Mt, Mt', să stabilim mai întâi o proprietate a generatoarelor rectilinii ale sferei. Să presupunem că am luat centrul O al sferei ca origină şi axă Oz dreapta OM. Planul tangent (T) în M la sferă are ecuaţia $z=1$

și tae sfera $x^2+y^2+z^2=1$ după dreptele izotrope $x^2+y^2=0$ ale planului tangent (T) ce trec prin punctul (0, 0, 1). Aceste drepte sunt cele două generatoare (No. 10) rectilinii α și β ale sferei ce trec prin M (Fig. 4). Intersecția cu planul (T) a conului izotrop $x^2+y^2+z^2=0$ cu vârful O este cercul imaginar $x^2+y^2+1=0$. Tangentele duse din punctul (x_1,y_1) la acest cerc se obțin înlocuind în ecuația acestui cerc x și y cu $\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}$ $\frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}$ și scriind că ecuația în λ,

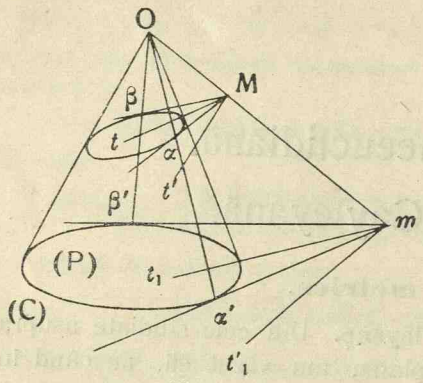


Fig. 4.

$$\left(\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}\right)^2+1=0,$$

$$(x^2+y^2+1)\lambda^2+2(x_1x+y_1y+1)\lambda+(x_1^2+y_1^2+1)=0,$$

are o rădăcină dublă, astfel că ecuația tangentelor din (x_1,y_1) la cercul $x^2+y^2+1=0$ este $(x_1^2+y_1^2+1)(x^2+y^2+1)-(x_1x+y_1y+1)^2=0$. Deci, ecuația tangentelor din M(0,0) la cercul $x^2+y^2+1=0$ este

$$(x^2+y^2+1)-1=0,\ x^2+y^2=0,$$

adică dreptele izotrope $x^2+y^2=0$, generatoarele rectilinii ale sferei ce trec prin M. Așa dar, generatoarele rectilinii într'un punct M al sferei sunt cele două drepte izotrope din planul tangent (T) în M la sferă ce trec prin M, și sunt tangentele din M la conul izotrop situate în planul tangent (T).

Așa fiind, unghiul curbelor trase pe sferă ce trec prin M, este dat de unghiul V al tangentelor Mt și Mt' în M la aceste curbe, care sunt situate în planul tangent (T) în M. Aplicând relația lui Laguerre pentru planul (T) și fascicolul format de Mt, Mt', și dreptele izotrope ce trec prin M, α și β, adică generatoarele rectilinii ale sferei în M, avem

$$V=\frac{1}{2i}\log R(Mt',Mt\,\alpha,\beta).$$

Proectând din centrul O figura pe planul (P) (Fig. 4), punctul M vine în m, generatoarele α și β se proectează după tangentele α' și β' duse din m la cercul (C), tangentele Mt și Mt' după tangentele mt_1, mt'_1, la curbele plane care sunt proecțiile curbelor sfe-

rice. Insă se ştie (No. 2) că raportul anarmonic al dreptelor de intersecţie a unui plan cu un fascicol de patru plane este constant şi este egal cu raportul anarmonic al fascicolului de plane, deci $R(Mt',Mt,\alpha,\beta)=R(mt'_1,mt_1,\alpha',\beta')$ şi deci

$$V=\frac{1}{2i}\log R(mt'_1,mt_1,\alpha',\beta').$$

Se vede, prin urmare, că dacă se consideră o Geometrie a relaţiunilor metrice în plan, întroducând un cerc imaginar (C) pe care să-l numim absolut, luând pentru distanţa a două puncte cătul prin $2i$ al logaritmului raportului anarmonic format de cele două puncte şi acelea unde dreapta care le uneşte întâlneşte cercul (C) şi pentru unghiul a două curbe, cătul prin $2i$ al logaritmului raportului anarmonic al tangentelor la aceste două curbe în punctul lor comun şi celor două tangente care se pot duce din acest punct la cercul (C), vom avea, în plan, o Geometrie care va fi echivalentul Geometrii sferice şi mai ales, care ar putea să cuprindă ca un caz limită Geometria clasică plană, căci se ştie că Geometria sferei se reduce la aceea a planului, când raza sferei creşte nemărginit.

Aceste rezultate bazându-se numai pe întrebuinţarea raportului anarmonic, subsistă, din această cauză, când se face o transformare omografică, astfel că se poate substitui cercului (C) o conică oarecare. Tot aceste rezultate ne vor face să înţelegem cum Cayley a fost condus la noua sa Geometrie.

Să considerăm mai întâi pe o dreaptă două puncte fixe A şi B şi două puncte variabile M şi M', poziţia punctului M depinzând de parametrul m. Raportul anarmonic al punctelor M, M', A şi B este

$$R(M,M',A,B)=\frac{m-a}{m-b}:\frac{m'-a}{m'-b},$$

m, m', a, b fiind valorile parametrului m care corespund respectiv punctelor M, M', A, B.

Punând

$$\frac{m-a}{m-b}=\varphi(m) \tag{1}$$

raportul anarmonic se scrie

$$R(M,M',A,B)=\frac{\varphi(m)}{\varphi(m')},$$

de unde rezultă identitatea

$$R(M,M',A,B)R(M',M'',A,B)R(M'',M,A,B)=1. \tag{2}$$

Intrebuinţând notaţia

$$\delta(MM') = \frac{1}{C}\log R(M',M,A,B),\ C = \text{const.}, \tag{3}$$

identitatea (2) devine

$$\delta(MM') + \delta(M'M'') + \delta(M''M) = 0. \tag{4}$$

Insă aceasta este relaţia caracteristică între abscisele (No. 8) a trei puncte în linie dreaptă, de unde urmează că este natural a numi distanţa punctelor M şi M′ funcţiunea δ determinată de relaţia (3). Această distanţă va fi deci definită de această formulă, îndată ce s'au dat punctele A şi B, care servesc de bază sau absolut.

După proprietăţile logaritmilor, această câtime este determinată afară de un multiplu de $\frac{2\pi i}{C}$; schimbă de semn, fără a-şi schimba valoarea, când se schimbă M cu M′, sau A cu B.

Dacă cele două puncte A şi B sunt reale, se pot prezenta două cazuri. Sau unul din punctele M, M′ este interior şi celalalt exterior segmentului AB şi atunci raportul anarmonic este negativ şi oricare ar fi valoarea constantei C $\delta(MM')$ este imaginar; sau, ambele puncte M şi M′ interioare sau exterioare segmentului AB şi atunci constanta C poate lua o valoare oarecare reală. Deci, în cazul când A şi B sunt reale, avem o geometrie interesantă când se consideră, sau numai punctele dintre A şi B, sau numai puncte în afară de segmentul AB.

Să presupunem acum că cele două puncte A şi B sunt imaginar conjugate, iar M şi M′ reale. Dacă se schimbă i în $-i$, punctul A se înlocueşte cu B şi B cu A, iar raportul anarmonic este înlocuit cu inversul său. Aceasta nu poate să aibă loc de cât dacă modulul său este egal cu 1. Logaritmul va fi atunci o cantitate pur imaginară, de forma ki. Vom lua $C = \frac{2i}{R}$, pentru a da lui $\delta(MM')$ perioada πR şi atunci vom avea

$$e^{\frac{2i}{R}\delta(MM')} = R(M',M,A,B).$$

Definiţiile precedente se aplică de asemenea la planele care trec printr'o dreaptă fixă sau la dreptele unui plan care trec printr'un punct fix. In primul caz, absolutul va fi dat de două plane fixe ce conţin dreapta, iar în al doilea, de două drepte fixe ce conţin punctul. Avem, în ambele cazuri,

$$\text{unghiul } (\mu\mu') = \frac{1}{C}\log R(\mu',\mu,\alpha,\beta),$$

α şi β fiind parametrii ficşi, care determină baza, iar μ, μ' aceia care determină planele sau dreptele.

18. Distanţa a două puncte. Unghiul a două plane sau două drepte. I. Acestea fiind stabilite, se poate construi o Geometrie metrică, introducând o conică în plan, sau o cuadrică în spaţiu. Vom considera numai cazul spaţiului, care cuprinde planul ca un caz particular.

Fiind dată o cuadrică, pe care o vom numi absolut, pentru a măsura distanţa a două puncte M,M', vom lua ca bază punctele A şi B unde dreapta MM' întâlneşte absolutul. Avem

$$MM' = \frac{1}{C} \log R(M', M, A, B). \tag{5}$$

Pentru a determina unghiul a două plane μ,μ', vom lua baza formată de cele două plane α şi β care trec prin intersecţia lor şi sunt tangente la absolut. Avem

$$\widehat{\mu\mu'} = \frac{1}{C'} \log R(\mu', \mu, \alpha, \beta). \tag{6}$$

Pentru a determina unghiul a două drepte care se tae, d şi d', vom lua baza formată de cele două tangente a şi b la absolut, care sunt în planul acestor drepte şi trec prin intersecţia lor. Avem

$$\widehat{dd'} = \frac{1}{C''} \log R(d', d, a, b). \tag{7}$$

Vom lua $C' = C''$ şi vom vedea cum putem dispune de C şi C'. Trebue de la început observat că aceste definiţii sunt independente faţă de o transformare omografică sau o transformare prin polare reciproce. Pentru transformarea omografică este evident, căci această transformare conservă rapoartele anarmonice. In particular, orice transformare omografică care nu schimbă absolutul, lasă neschimbate definiţiile precedente. Pentru transformarea prin polare reciproce, să observăm că punctele M şi M' sunt înlocuite cu planele μ şi μ'; punctele A şi B ale absolutului vor fi înlocuite prin două plane tangente la noul absolut şi care trec prin intersecţia planelor μ şi μ'. Formula care dă distanţele va fi înlocuită prin aceea care dă unghiurile şi reciproc. Mai rămâne numai de schimbat constantele C şi C'. In ce priveşte formula care dă unghiul a două drepte, nu trebue schimbat nimic; dreptele d şi d' vor fi înlocuite cu polarele lor reciproce şi cele două drepte a şi b prin alte două drepte polarele lor reciproce; constanta C' trebue deci conservată.

II. 1°. Pentru a calcula elementele definite mai sus, să considerăm ecuaţia punctuală $f(x,y,z,t)=0$ a cuadricei absolut. Insem-

nând cu (x,y,z,t), (x',y',z',t') coordonatele omogene ale punctelor M și M', acelea ale punctelor de intersecție ale dreptei MM' cu cuadrica,

$$x+\lambda x',\ y+\lambda y',\ z+\lambda z',\ t+\lambda t',$$

corespund valorilor lui λ date de ecuația

$$(8)\qquad \lambda^2 f(x',y',z',t')+\lambda\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial z}+t'\frac{\partial f}{\partial t}\right)+f(x,y,z,t)=0.$$

Expresiunea

$$\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial z}+t'\frac{\partial f}{\partial t}\right),$$

simetrică în raport cu variabilele x și x', o vom nota-o, pentru prescurtare, cu $f(x|x')$ și prin (MM') când voim a pune în evidență punctele iar nu coordonatele. Avem următoarele identități

$$(9)\qquad \begin{cases} f(x|x)=f(x,y,z,t) \\ f(x+hx'|x''+kx''')=f(x|x'')+hf(x'|x'')+kf(x|x''')+hkf(x'|x'''). \end{cases}$$

Raportul anarmonic $R=\frac{\lambda}{\lambda'}$ al celor două puncte M, M' și al celor unde dreapta MM' tae cuadrica, având în vedere ecuația (8), este determinat de formula

$$(10)\qquad \frac{(1+R)^2}{4R}=\frac{(\lambda+\lambda')^2}{4\lambda\lambda'}=\frac{f^2(x|x')}{f(x|x)\,f(x'|x')}=\frac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}.$$

Din această expresiune, se vede că raportul anarmonic are două valori inverse una alteia, ceea ce era evident, căci se pot schimba cele două puncte unde dreapta MM' tae absolutul.

Dacă scriem constanta C din ecuația (3) sub forma $\frac{2i}{k}$, această relație devine

$$(11)\qquad \frac{2i}{k}MM'=\log R,$$

de unde

$$R=e^{2i\frac{MM'}{k}},$$

$$\cos\frac{MM'}{k}=\frac{e^{i\frac{MM'}{k}}+e^{-i\frac{MM'}{k}}}{2},\qquad \cos^2\frac{MM'}{k}=\frac{e^{2i\frac{MM'}{k}}+e^{-2i\frac{MM'}{k}}+2}{4}=\frac{R+\frac{1}{R}+2}{4},$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \cos^2\dfrac{MM'}{k}=\dfrac{(R+1)^2}{4R}=\dfrac{f^2(x|x')}{f(x|x)\,f(x'|x')}=\dfrac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}, \\ \sin^2\dfrac{MM'}{k}=1-\cos^2\dfrac{MM'}{k}=\dfrac{f(x|x)f(x'|x')-f^2(x|x')}{f(x|x)\,f(x'|x')}=\dfrac{(MM)(M'M')-(MM')^2}{(MM)(M'M')}. \end{cases}$$

Inlocuind în această ultimă formulă pe x', y', ... cu $x+dx$,

$y+dy,\ldots$ și ținând seamă că raportul dintre arc și sinusul său tinde către 1 când arcul tinde către zero,

$$\frac{\text{arc}\,\frac{MM'}{k}}{\sin\frac{MM'}{k}} \to 1,$$

se obține elementul de arc, ds, al spațiului și care este dat de

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{f(x|x)f(dx|dx) - f^2(x|dx)}{f^2(x|x)}. \tag{13}$$

2°. Pentru a determina unghiul a două plane μ și μ', să luăm baza formată de cele două plane tangente la absolut ce trec prin intersecția lor. Fie

$$\varphi(u,v,w,p)=0$$

ecuația tangențială a absolutului. Întrebuințând notația

$$\varphi(u|u') = \frac{1}{2}\left(u'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial v} + w'\frac{\partial\varphi}{\partial w} + p'\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) = (\mu\mu'),$$

avem formula

$$\frac{(1+R')^2}{4R'} = \frac{\varphi^2(u|u')}{\varphi(u|u)\,\varphi(u'|u')},$$

unde R' este raportul anarmonic al planelor μ, μ' și celor două plane tangente la absolut duse prin intersecția lor. In cazul de față luăm pentru constanta C' valoarea $2i$ și avem

$$e^{2i\widehat{\mu\mu'}} = R', \tag{14}$$

de unde

$$\cos^2\widehat{\mu\mu'} = \frac{\varphi^2(u|u')}{\varphi(u|u)\,\varphi(u'|u')} = \frac{(\mu\mu')^2}{(\mu\mu)(\mu'\mu')}. \tag{15}$$

3°. Pentru a calcula unghiul a două drepte concurente, vom lua ca bază cele două tangente duse din punctul lor de intersecție și în planul lor, la absolut. Fie A punctul de intersecție al dreptelor d și d' și B și C două puncte luate arbitrar pe drepte. Raportul anarmonic al celor două drepte și al tangentelor duse din A la absolut în planul lor, este evident egal cu raportul anarmonic al punctelor B, C și al celor două puncte unde dreapta BC tae conul cu vârful A circumscris absolutului. Pentru a calcula acest raport, vom aplica formula (10), substituind absolutului conul circumscris. Întrebuințând notațiile precedente, ecuația conului este

$$(AA)(MM) - (AM)^2 = 0,$$

și aplicând formula (10), avem

$$\frac{(1+R'')^2}{4R''} = \cos^2\widehat{dd'} = \frac{[(AA)(BC) - (AB)(AC)]^2}{[(AA)(BB) - (AB)^2][(AA)(CC) - (AC)^2]}. \tag{16}$$

19. Diferitele cazuri particulare ale Geometrii Cayleyene. Geometria Cayleyană cuprinde ca un caz limită Geometria Euclidiană. Pentru a vedea diferitele Geometrii ce decurg din Geometria Cayleyană, să luăm forme diferite pentru absolut.

Dacă această cuadrică este imaginară, elementele care ne dau bazele în cele trei determinări metrice (distanța a două puncte, unghiul a două plane, unghiul a două drepte concurente) vor fi totdeauna imaginar conjugate. Deci (No. 17) cele trei rapoarte R, R′, R″ sunt imaginare cu modulul egal cu 1. După formula (14), la care se adaugă următoarea

$$e^{2i\widehat{dd'}} = R'', \tag{17}$$

unghiurile a două plane reale sau a două drepte concurente reale vor fi totdeauna reale. Pentru ca distanța a două puncte reale să fie totdeauna reală, trebue ca și constanta k să fie reală, pe care o vom înlocui-o cu R. Distanța a două puncte e dată de

$$\cos\frac{MM'}{R} = \frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}.$$

Să observăm că în toate aceste definițiuni este o nesiguranță; cele trei elemente nu au semnul bine determinat și sunt cunoscute afară de un multiplu de π pentru unghiuri, sau πR dacă este vorba de distanțe. Aceasta nu e de mirare, căci o nedeterminare analoagă se prezintă pentru unghiuri în Geometria ordinară și de asemenea pentru distanțe în Geometria sferică.

Să presupunem acum că absolutul este o cuadrică reală. Fie mai întâi că această cuadrică este o suprafață riglată. Atunci, în oricare regiune ne am așeza, dreptele care trec printr'un punct M, sunt de două feluri; unele sunt exterioare conului circumscris cu vârful M, și care nu întâlnesc suprafața, altele care o vor tăia. Pentru cele dintâi, raportul anarmonic R format cu punctul M și un punct infinit vecin al dreptei va fi o cantitate imaginară cu modulul egal cu 1; pentru celelalte, acest raport este egal și pozitiv. Deci, oricare ar fi valoarea dată constantei k în (11), vor fi puncte reale vecine de M, pentru care distanța va putea să fie reală, iar altele pentru care va fi imaginară. Aceleași concluziuni au loc și pentru unghiuri. Acest caz nu corespunde la nici o realitate practică, deci nu-l vom considera în cele ce urmează.

Dacă absolutul este o cuadrică reală convexă și suntem în exteriorul acestei suprafețe, atunci prin fiecare punct vor trece drepte care tae suprafața, altele care nu o vor tăia. Vom înlătura

şi acest caz ca şi pe precedentul pentru aceleaşi motive. Dar, dacă suntem în interiorul acestei suprafeţe, orice dreaptă a acestei regiuni tae absolutul în două puncte; raportul R(M,M'A,B) este totdeauna real pozitiv. După formula (11), pentru ca distanţa să fie reală, va fi de ajuns a lua pentru k o imaginară pură de forma Ri,

$$\cos\frac{MM'}{Ri}=\frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}},\quad \operatorname{ch}\frac{MM'}{R}=\frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}.$$

Atunci distanţa a două puncte nu va avea de cât două valori egale şi de semne contrarii. Nu e tot aşa pentru unghiuri, date de formulele (14), (17), căci planele tangente şi tangentele care servesc de bază în aceste măsurări nu sunt totdeauna imaginar conjugate. Dacă dreapta de intersecţie a două plane reale tae absolutul, formulele ne dau pentru unghiul acestor plane o valoare reală. Dacă numim spaţiu accesibil acela care este în interiorul absolutului şi spaţiu neaccesibil acela care este exterior, acest prim caz este acela unde cele două plane au puncte comune în spaţiul accesibil. Dacă, din contră, toate punctele comune ale celor două plane sunt în spaţiul neaccesibil, nu mai putem vorbi de unghiul lor care este imaginar. De asemenea, două drepte care se tae formează un unghi real, dacă punctul lor de intersecţie este în spaţiul accesibil.

In rezumat, vom studia două ipoteze; una, în care *absolutul este o suprafaţă imaginară*, cuprinzând toate punctele reale şi care a fost introdusă în ştiinţă de *Riemann*; Geometria corespunzătoare se zice *Riemanniană* sau eliptică. Alta, în care *absolutul este o suprafaţă convexă* (cum este sfera), *unde se consideră numai regiunea spaţiului interioară acestei suprafeţe*; această Geometrie este, după cum a arătat *F. Klein* (1), aceea la care au fost conduşi *Lobatschewsky, Bolyai, Gauss* şi se zice *Geometrie Lobatschefskyană* sau iperbolică.

Să arătăm acum că Geometria clasică este un caz limită al Geometrii Cayleyene, presupunând că absolutul se turteşte nemărginit şi se reduce la cercul imaginar de la infinit. In adevăr, să luăm pentru absolut sfera reprezentată în coordonate rectangulare omogene de ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2+R^2t^2=0.$$

Considerând două puncte $M(x,y,z,t)$, $M'(x',y',z',t')$ şi luând pentru constanta k valoarea R, formula (12) ne dă pentru distanţă

$$\cos\frac{MM'}{R}=\frac{xx'+yy'+zz'+R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2+R^2}}.$$

(1) *Sur la Géométrie dite non euclidienne (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, I-e serie, t. II. 1871, p. 341).

Când sfera se reduce la cercul de la infinit, $R \to \infty$. Dezvoltând expresia precedentă după puterile lui $\frac{1}{R}$, avem

$$1-\frac{1}{2R^2}(MM')^2+\frac{1}{R^4}(\,)+\ldots=1-\frac{1}{2R^2}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]+\frac{1}{R^4}+(\,)\ldots$$

Comparând dezvoltările ambilor membrii, obţinem ca limită a lui MM',

$$\overline{MM'}^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

care este expresia cunoscută a distanţei a două puncte în coordonate rectangulare.

Pentru a vedea ce devin unghiurile, să considerăm unghiul a două plane. Ecuaţia tangenţială a sferei fiind $u^2+v^2+w^2+\frac{p^2}{R^2}=0$, unghiul V a două plane este dat de formula

$$\cos V=\frac{uu'+vv'+ww'+\frac{pp'}{R^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2+\frac{p^2}{R^2}}\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2+\frac{p'^2}{R^2}}},$$

care se reduce, când $R \to \infty$, la expresia cunoscută din Geometria euclidiană.

20. **Discuţia formulei care dă distanţa a două puncte.** Considerând formula distanţei

$$\cos^2\frac{MM'}{k}=\frac{(MM')^2}{(MM)\,(M'M')},\quad MM'=\frac{1}{\frac{2i\pi}{k}}\log R(M',M,A,B),\quad \cos^2\frac{MM'}{k}=\frac{(1+R)^2}{4R},$$

se vede că MM' este o funcţiune multiformă şi toate valorile sale se exprimă cu una din ele cu formula

$$MM'=\pm\delta_0+n\pi k,$$

n fiind un întreg pozitiv sau negativ.

Relaţia $(MM')=0$, care se obţine egalând cu zero numărătorul primei expresii, arată că punctul M' este în planul tangent în M la absolut; iar $(MM)=0$, $(M'M')=0$ exprimă că M sau M' sunt pe absolut. Deci, distanţa devine nedeterminată când unul din puncte este pe absolut şi dacă celalt se află în planul tangent la absolut în primul punct. Aceasta se mai poate vedea considerând raportul R(M,M',A,B).

Pentru ca distanţa să fie nulă, trebue ca acest raport anarmonic să fie egal cu 1, adică M să coincidă cu M', sau A cu B. Deci, dacă M şi M' sunt distincte, distanţa este nulă dacă dreapta care le uneşte este tangentă la absolut. Dacă punctele M şi M'

sunt reale, cele două ipoteze pe care le-am făcut nu vor putea să se prezinte în nici una din cele două Geometrii considerate, Riemanniană și Lobatschefskiană.

Pentru ca distanța MM′ să fie infinită, trebue ca raportul anarmonic R(M,M′,A,B) să fie nul sau infinit, adică unul din puncte să fie pe absolut. Când M și M′ sunt reale, această ipoteză se prezintă numai în Geometria Lobatschefskiană; M și M′ fiind în interiorul absolutului, distanța lor este reală, și crește nemărginit dacă unul din puncte se apropie de absolut.

Când cele două puncte M,M′ sunt conjugate în raport cu absolutul, avem

$$R(M,M',A,B)=-1,\quad \overline{MM'}=\frac{\pi k}{2}+n\pi k,$$

n fiind întreg. Deci, este tot una a zice că două puncte sunt conjugate sau că una din valorile distanței lor este egală cu $\frac{\pi k}{2}$. Cu alte cuvinte, locul punctelor a căror distanță de un punct M este $\frac{\pi k}{2}$ este planul conjugat al lui M. In Geometria Lobatschefskyană acest loc nu există, pentrucă $\frac{\pi k}{2}$ este imaginar și planul polar a unui punct din interior este cu totul în afară de absolut.

Din cele expuse mai sus se pot vedea oarecare particularități relative la suprafețele care joacă în Geometria Cayleyană acelaș rol ca și sfera, adică acelea care sunt locul punctelor la o distanță dată de un punct dat. Dacă A este un punct dat, pe care-l vom numi centrul sferei Cayleyene, ecuația acestei sfere este, după formula (12),

$$(AM)^2=\cos^2\frac{\delta}{k}\cdot(AA)(MM).$$

Aceasta este o cuadrică înscrisă în absolut dealungul planului polar al centrului A.

21. **Propoziţiuni relative la unghiuri.** De oarece se poate trece de la plane la puncte prin metoda polarelor reciproce, concluziunile precedente se pot transporta la plane, și deci și la drepte, dacă trecem de la Geometria în spațiu la cea plană. Astfel, valorile unghiului a două plane, sau a două drepte concurente, sunt date de formula

$$\pm V_0+n\pi.$$

Acest unghi devine nedeterminat, dacă unul din plane sau una din drepte atinge absolutul, celalt trecând prin punctul său de contact.

Unghiul devine infinit, dacă unul din plane sau una din drepte este tangentă la absolut. Acest unghi este nul dacă cele două plane se tae după o tangentă la absolut, sau dacă cele două drepte sunt într'un plan tangent la această suprafață, sau se tae în unul din punctele sale.

Unghiul devine egal cu $\frac{\pi}{2}$ dacă cele două plane sunt conjugate, sau dacă cele două drepte sunt conjugate. Două *plane* sunt *conjugate* când unul oricare din ele conține polul celuilalt. Vom zice în acest caz că *sunt perpendiculare*. De asemenea, două drepte sunt conjugate, când una oricare din ele întâlnește polara celeilalte; înțelegând prin două drepte polare, două drepte astfel ca planele polare ale tuturor punctelor uneia din drepte să treacă prin cealaltă și reciproc. Se mai știe că polara unei drepte este linia care unește punctele de contact a absolutului cu cele două plane tangente la absolut duse prin prima dreaptă. Așa fiind, atunci există pe fiecare din cele două drepte conjugate un punct al cărui plan polar trece prin cealaltă. Când două *drepte* care se tae sunt *conjugate*, vom zice de asemenea că *sunt perpendiculare*.

Se zice că o dreaptă d este perpendiculară pe un plan (P), când ea trece prin polul planului. Atunci ea va fi evident perpendiculară pe toate dreptele care trec prin piciorul său pe plan, căci aceste drepte întâlnesc toate polara dreptei d situată în planul (P).

Printr'un punct oarecare M se poate duce totdeauna o perpendiculară la un plan (P). Pentru aceasta, vom uni punctul M cu polul planului (P), astfel că dacă M coincide cu polul, toate dreptele duse prin M vor fi perpendiculare pe planul (P). Afară de acest caz excepțional, perpendiculara este unică.

Printr'un punct M se poate duce un plan perpendicular la o dreaptă d și numai unul singur, afară numai dacă M nu este pe polara d' a lui d, în care caz toate planele duse prin d' vor fi perpendiculare pe d. In adevăr, toate planele perpendiculare pe d trebue să aibă polul lor pe d; ele trec deci prin polara d' a lui d. Deci, dacă M nu este pe această polară, este un singur plan perpendicular, determinat de M și d'.

Două plane distincte (P) și (P') au totdeauna o perpendiculară comună, care trece prin polurile celor două plane.

Când o dreaptă d este perpendiculară pe un plan (P), orice plan (P') trecând prin această dreaptă este perpendicular pe planul (P). In adevăr, polara lui d se găsește în planul (P) și deci și polul planului (P') este în planul (P).

Unghiul unei drepte cu un plan este complimentul unghiului pe care îl face dreapta cu perpendiculara pe plan dusă prin piciorul său pe plan.

22. **Relaţiuni între elementele reale în Geometria Riemaniană şi Lobatschewskyană.** In Geometria Riemaniană, unde absolutul este imaginar, distanţa a două puncte reale nu poate fi nici odată infinită, întocmai ca în Geometria sferică.

In Geometria Lobatschewskyană, unde absolutul este o suprafaţă convexă, şi unde se consideră numai puncte interioare, distanţa a două puncte devine infinită, când unul din puncte se apropie de absolut. Aşa fiind, un punct nu poate să iasă afară din absolut, fără ca distanţa sa la toate punctele situate în interiorul suprafeţei să devie infinită. Pentru acest motiv spaţiul exterior absolutului a fost numit neaccesibil.

Să ne închipuim în Geometria Riemaniană un punct M şi o dreaptă d. Distanţa punctului M la orice punct al dreptei d fiind finită, nu se mai poate vorbi de noţiunea de paralelă în această Geometrie, unde această noţiune a dispărut ca şi în Geometria sferică.

Dacă absolutul este o suprafaţă convexă, cele două puncte p şi p' unde dreapta d, luată în spaţiul accesibil, tae absolutul, vor fi la o distanţă infinită de punctul M. Deci, în Geometria Lobatschewskyană sunt două paralele la o dreaptă, sau, mai clar, se poate face să treacă prin punctul M două serii de drepte; unele, cuprinse în unghiul pMp', care întâlnesc d în spaţiul accesibil; altele, cuprinse în unghiul suplimentar, întâlnind porţiunea dreptei d situată în spaţiul neaccesibil, considerând acest spaţiu neaccesibil ca neexistent, ele nu întâlnesc dreapta d.

Trecând acum la perpendicularele la un plan (P), se vede că în Geometria Riemaniană, două perpendiculare la acest plan se întâlnesc totdeauna într'un punct real, polul acestui plan. In Geometria Lobatschewskyană, dacă planul (P) tae absolutul, toate perpendicularele pe acest plan trec prin polul său, care este în spaţiul neaccesibil şi trebue deci considerate că nu se întâlnesc. Deci, în Geometria Riemaniană, două perpendiculare la un plan se întâlnesc totdeauna; din contră, în Geometria Lobatschewskyană, două perpendiculare pe un plan în spaţiul accesibil nu se întâlnesc nici odată, iar printr'un punct al acestui spaţiu se duce numai o perpendiculară pe plan.

Să considerăm în fine planele duse printr'un punct M perpendiculare pe o dreaptă d, plane care trebue să conţie polara d'

a lui d. Aceste plane pot fi nedeterminate în Geometria Riemaniană dacă M este pe d'; ele nu vor fi nici odată nedeterminate în Geometria Lobatschewskyană.

23. **Propoziţiuni relative la două drepte care nu se tae.** Vom stabili mai întâi că există în general două drepte care să întâlnească patru drepte date. Insemnând cu

$$P_i \equiv u_i x + v_i y + w_i z + p_i, \quad P_i' \equiv u_i' x + v_i' y + w_i' z + p_i',$$

fie $P_i = 0$, $P_i' = 0$ ecuaţiile dreptelor D_i, $i = 1,2,3,4$. O dreaptă Δ ce se sprijină pe D_1 şi D_2 este la intersecţia a două plane oarecare

$$P_1 + \lambda P_1' = 0, \quad P_2 + \mu P_2' = 0, \tag{18}$$

ce trec prin D_1 şi D_2, λ şi μ fiind variabili. Pentru ca această dreaptă să întâlnească şi pe D_3, trebue ca să avem un sistem de valori pentru x, y, z, care să verifice ecuaţiile

$$P_1 + \lambda P_1' = 0, \quad P_2 + \mu P_2' = 0, \quad P_3 = 0, \quad P_3' = 0.$$

Eliminând pe x, y, z între aceste ecuaţii, urmează

$$\begin{vmatrix} u_1 + \lambda u_1' & v_1 + \lambda v_1' & w_1 + \lambda w_1' & p_1 + \lambda p_1' \\ u_2 + \mu u_2' & v_2 + \mu v_2' & w_2 + \mu w_2' & p_2 + \mu p_2' \\ u_3 & v_3 & w_3 & p_3 \\ u_3' & v_3' & w_3' & p_3' \end{vmatrix} = 0,$$

de unde

$$p\lambda\mu + q\lambda + r\mu + s = 0. \tag{19}$$

Scriind că aceeaş dreaptă Δ se sprijină şi pe D_4, avem

$$p'\lambda\mu + q'\lambda + r'\mu + s' = 0. \tag{20}$$

Ecuaţiile (19) şi (20) ne dau valorile lui λ şi μ corespunzătoare dreptei Δ, (18), care întâlneşte dreptele D_1, D_2, D_3, D_4. Inmulţind în (19) şi (20) cu p şi cu $-p$, adunând, avem

$$(p'q - pq')\lambda + (p'r - pr')\mu + p's - ps' = 0,$$

de unde se deduce valoarea lui λ, pe care introducând-o în (19), avem o ecuaţie de gradul al doilea în μ, care ne dă două valori pentru μ şi deci, în general, sunt două drepte (18) care să se reazeme pe patru drepte date.

Fie d şi d_1 două drepte şi δ şi δ_1 dreptele lor polare. Am văzut că orice dreaptă perpendiculară pe d, de ex., trebue să întâlnească pe δ. Deci, perpendicularele comune lui d şi d_1, trebue să întâlnească δ şi δ_1. Dar, am văzut că există, în general, două

drepte care să întâlnească patru drepte date. Deci, două drepte admit, în general, două perpendiculare comune p şi p_1. Cele două perpendiculare comune, astfel obţinute, sunt polare una celeilalte. In adevăr, dreapta p întâlnind pe d, d_1, δ, δ_1, polara sa trebue să întâlnească pe δ, δ_1, d, d_1, deci trebue să se confunde cu p_1.

Dacă cele patru drepte d, δ, δ_1, d_1 sunt generatoarele de acelaş sistem ale unui iperboloid, ele sunt întâlnite de toate generatoarele celuilalt sistem şi deci problema admite o infinitate de soluţii.

Dacă absolutul este o suprafaţă convexă şi dacă se consideră porţiunile dreptelor d şi d_1 care sunt în spaţiul accesibil, se va vedea că au o singură perpendiculară comună, căci una din aceste perpendiculare comune va tăia cele două drepte în spaţiul accesibil, cealaltă, care este polara primei, va fi în întregime în spaţiul neaccesibil.

24. **Distanţa de la un punct la un plan şi la o dreaptă.** Distanţa de la un punct la un plan va fi distanţa de la punct la piciorul perpendicularei coborâte din acest punct pe plan; ea este complimentul afară de $\frac{\pi k}{2}$ a distanţei punctului la polul planului în raport cu absolutul.

De asemenea, dintr'un punct oarecare M, se poate, în general, coborâ o singură perpendiculară pe o dreaptă d. Aceasta este dreapta ce trece prin M şi întâlneşte deodată pe d şi polara sa δ. Distanţa de la M la dreaptă va fi aceea de la acest punct la piciorul perpendicularei; este complimentul afară de $\frac{\pi k}{2}$ a distanţei aceluiaş punct la polara δ. Deci, locul punctelor la o egală depărtare de o dreaptă d va fi de asemenea locul punctelor la o depărtare constantă de polara sa δ.

Se poate obţine acest rezultat şi pe cale analitică. Fie A, B punctele unde dreapta d tae absolutul. Polara δ a lui d este la intersecţia planelor polare a punctelor A şi B în raport cu absolutul, care sunt planele tangente în A şi B la absolut. C şi D fiind punctele unde δ tae absolutul, urmează că AC, AD şi BC, BD sunt cele două generatoare ale absolutului ce trec respectiv prin A şi B, care sunt situate în planele tangente în A şi B, aceste plane tangente fiind determinate de AC, AD şi BC, BD. Deci cele patru drepte AC, AD, BC, BD sunt generatoarele absolutului. Dacă se ia tetraedrul ABCD ca tetraedru de referinţă, ecuaţia absolutului este de forma

$$xy+zt=0,$$

dreapta d fiind reprezentată de ecuațiile $x=0$, $y=0$, iar dreapta δ de ecuațiile $z=0$, $t=0$. Fie x_0,y_0,z_0,t_0 coordonatele unui punct M. Perpendiculara pe d, trecând prin acest punct, trebuind să întâlnească pe d și δ are ecuațiile

$$xy_0-yx_0=0,\quad zt_0-tz_0=0.$$

Coordonatele piciorului P al acestei perpendiculare verifică ecuațiile dreptei d și perpendicularei și sunt

$$x=0,\quad y=0,\quad z=z_0,\quad t=t_0.$$

Deci, distanța MP, care este prin definiție distanța la dreapta d, are o expresie dată de formula (12)

$$\cos\frac{MP}{k}=\frac{\sqrt{z_0t_0}}{\sqrt{x_0y_0+z_0t_0}},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\frac{MP}{k}=\sqrt{\frac{x_0y_0}{z_0t_0}},$$

așa că locul punctelor la o distanță dată de o dreaptă d (și prin urmare și de polara sa δ) este cuadrica definită de ecuația

$$\frac{xy}{zt}=\text{const.}$$

Această cuadrică poate fi definită ca tăind absolutul după un patrulater strâmb format de cele patru generatoare rectilinii care trec prin punctele de intersecție ale dreptei cu absolutul.

25. **Formule relative la curbe și suprafețe.** I. *Unghiul a două curbe* care se tae într'un punct va fi acela al tangentelor în acel punct. Pentru a-l calcula, să aplicăm formula (16) (No. 18). Însemnând cu $x\,y,z,t$ coordonatele punctului A comun celor două curbe, prin d și δ caracteristicile relative la deplasările pe curbele al căror unghi vrem să-l măsurăm, atunci coordonatele punctelor B și C pe aceste curbe, infinit vecine de A, sunt $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $t+dt$; $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $t+\delta t$.

Unghiul V al celor două curbe este dat de formula (16),

$$(21)\quad \cos V=\frac{f(x\,|\,x)f(dx\,|\,\delta x)-f(x\,|\,dx)f(x\,|\,\delta x)}{\sqrt{[f(x\,|\,x)f(dx\,|\,dx)-f^2(x\,|\,dx)][f(x\,|\,x)f(\delta x\,|\,\delta x)-f^2(x\,|\,\delta x)]}}.$$

Curbele sunt ortogonale când $V=90$, adică

$$f(x\,|\,x)f(dx\,|\,\delta x)-f(x\,|\,dx)f(x\,|\,\delta x)=0.$$

Putem da unghiului celor două curbe o interpretare simplă în modul următor. Pentru aceasta, să luăm forma cuadratică ds^2, de-

finită de formula

$$ds^2=\Sigma\Sigma a_{ik}\,dx_i dx_k,\ (i,\,k=1,2,\ldots n),$$

unde coeficienţii a_{ik} sunt funcţiuni oarecare de $x_1,x_2,\ldots x_n$, satisfăcând la condiţia $a_{ik}=a_{ki}$. Forma se poate scrie

$$ds^2=a_{11}dx_1^2+\ldots+2a_{12}dx_1dx_2+\ldots \tag{22}$$

Făcând schimbarea de variabile oarecare, substituind în locul lui x_i funcţiunea y_i de aceste variabile, vom avea

$$ds^2=\Sigma\Sigma a_{ik}\,dx_i\,dx_k=\Sigma\Sigma b_{ik}\,dy_i\,dy_k.$$

Considerând două sisteme de diferenţiale, se vede că vom avea

$$\Sigma\Sigma a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k=\Sigma\Sigma b_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

Inlocuind în relaţia precedentă pe dx_i cu $dx_i+\lambda\delta x_i$, ceeace conduce a înlocui pe dy_i prin $dy_i+\lambda\delta y_i$, egalând coeficienţii lui λ din ambii membri, avem

$$\Sigma\Sigma a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k=\Sigma\Sigma b_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k.$$

De aci urmează că unghiul θ definit de relaţia

$$\cos\theta=\frac{\Sigma\Sigma a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k}{\sqrt{\Sigma\Sigma a_{ik}\,dx_i\,dx_k}\,\sqrt{\Sigma\Sigma a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k}}$$

este un invariant. Acesta se zice unghiul a două direcţii definite de caracteristicele d şi δ, relative la forma cuadratică (22). Când această formă este definită, adică ea se poate descompune într'o sumă de pătrate toate de acelaş semn, θ este real.

Se vede că unghiul nu se schimbă când inmulţim sau împărţim, prin aceeaş funcţiune de altminterea oarecare de variabile, pe toţi coeficienţii formei cuadratice. Revenind la formula (21), se poate zice că unghiul V a două direcţii, definit de această formulă, este unghiul acestor două direcţii, evaluat în raport cu forma cuadratică (13), care dă elementul linear în spaţiul Cayleyan.

II. Dacă $g(u,v,w,p)=0$ este ecuaţia tangenţială omogenă a absolutului, unghiul a două plane este determinat de formula (15) (No. 18). Considerând două suprafeţe reprezentate de ecuaţiile omogene

$$F(x,y,z,t)=0,\ F_1(x,y,z,t)=0,$$

ecuaţiile planelor tangente sunt

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+\ldots=0,\ X\frac{\partial F_1}{\partial x}+\ldots=0,$$

pentru a găsi unghiul celor două suprafeţe într'unul din punctele lor comune, vom aplica formula (15) la aceste două plane, unde u,v,w,p şi u',v',w',p' sunt respectiv $\frac{\partial F}{\partial x},\ldots,\frac{\partial F_1}{\partial x},\ldots$

III. Fie

$$f(x,y,z,t)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cxt+2C'yt+2C''zt+Dt^2=0$$

ecuația punctuală a absolutului. Ecuația sa tangențială se obține scriind ecuațiile

$$(23)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}&=Ax+B''y+B'z+Ct=u,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}&=B''x+A'y+Bz+C't=v,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}&=B'x+By+A''z+C''t=w,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}&=Cx+C'y+C''z+Dt=p, \end{aligned}$$

ce determină polul unui plan (u,v,w,p); se exprimă apoi că acest pol este în plan, de unde se obține relația

$$(24)\quad ux+vy+wz+pt=0,$$

și apoi se elimină x, y, z, t între ecuațiile (23), (24). Punând

$$H=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C\\ B'' & A' & B & C'\\ B' & B & A'' & C''\\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix},$$

primul membru al acestei ecuații tangențiale a absolutului este

$$g(u,v,w,p)=-\frac{1}{H}\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u\\ B'' & A' & B & C' & v\\ B' & B & A'' & C'' & w\\ C & C' & C'' & D & p\\ u & v & w & p & 0 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{H}\left(\frac{\partial H}{\partial A}u^2+\ldots+\frac{\partial H}{\partial B''}uv+\ldots+\frac{\partial H}{\partial C}up+\ldots+\frac{\partial H}{\partial D}p^2\right).$$

De oarece coordonatele sunt omogene și sunt cunoscute afară de un factor constant, să presupunem că am ales factorul de proporționalitate astfel încât între coordonatele x, y, z, t ale unui punct care nu este pe absolut să avem

$$(25)\quad f(x,y,z,t)=1.$$

De asemenea, ecuația tangențială a absolutului fiind $\phi(u,v,w,p)=0$, se poate alege factorul de proporționalitate astfel că între coordonatele tangențiale u, v, w, p, ale unui plan netangent la absolut să avem relația

$$g(u,v,w,p)=1.$$

In aceste condițiuni, formulele date pentru elementul linear, unghiul a două curbe se simplifică. In adevăr, diferențiind (25), avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0,$$

expresiunile pe care le-am notat cu $f(x|dx,)$ $f(x|\delta x)$ sunt nule, iar din (13) avem

$$(26)\quad ds^2=k^2f(dx|dx).$$

Unghiul V a două curbe, dat de (21), e dat de formula

(22) $$ds\delta s\cos V=f(dx|\delta x),$$

iar condiția de ortogonalitate este $f(dx|\delta x)=0$, sau

$$(Ady+B''dy+B'dz+Cdt)\delta x+(B''dx+A'dy+Bdz+C'dt)\delta y+$$
$$(B'dx+Bdy+A''dz+C''dt)\delta z+(Cdx+C'dy+C''dz+Ddt)\delta t=0.$$

IV. Pentru a determina normala la suprafața definită de ecuația $F(x,y,z,t)=0$, să observăm că pentru orice deplasare care se efectuează plecând de la punctul (x,y,z,t) pe suprafață, avem

(28) $$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t}\delta t=0.$$

Considerând deplasarea dx, dy, dz, dt pentru care avem

$$Adx+B''dy+B'dz+Cdt=\lambda\frac{\partial F}{\partial x},$$
$$B''dx+A'dy+Bdz+C'dt=\lambda\frac{\partial F}{\partial y},$$
$$B'dx+Bdy+A''dz+C''dt=\lambda\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$Cdx+C'dy+C''dz+Ddt=\lambda\frac{\partial F}{\partial t},$$

relația (28) devine

$$(Adx+B''dy+B'dz+Cdt)\delta x+\ldots=0,$$

care este tocmai $f(dx|\delta x)=0$. ceea ce probează că deplasarea (dx, dy, dz, dt) este perpendiculară pe toate deplasările $(\delta x, \delta y, \delta z, \delta t)$ care se pot face pe suprafață. Această deplasare are loc deci dealungul normalei la suprafața $F(x,y,z,t)=0$ și deci ecuațiile precedente definesc direcțiunea normalei la suprafața $F(x,y,z,t)=0$.

V. Să presupunem că am raportat absolutul la un tetraedru conjugat luat ca tetraedru de referință. Ecuația punctuală a absolutului în coordonate tetraedrice este

$$f(x,y,z,t)\equiv a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4t^2=0,$$

iar în coordonate tangențiale,

$$\phi(u,v,w,p)\equiv\frac{u^2}{a_1}+\frac{v^2}{a_2}+\frac{w^2}{a_3}+\frac{p^2}{a_4}=0.$$

Un punct care nu este pe absolut are coordonate x, y, z, t, ce verifică relația

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4t^2=1.$$

Un plan ce nu este tangent la absolut are coordonatele tangențiale u, v, w, p, verificând relația

(29) $$\frac{u^2}{a_1}+\frac{v^2}{a_2}+\frac{w^2}{a_3}+\frac{p^2}{a_4}=1.$$

Elementul linear (26) este dat de

$$\frac{ds^2}{k^2}=a_1dx^2+a_2dy^2+a_3dz^2+a_4dt^2.$$

Unghiul V a două curbe $(dx,...)$, $(\delta x,...)$, este dat de (27),

$$\cos V=\frac{a_1dx\delta x+a_2dy\delta y+a_3dz\delta z+a_4dt\delta t}{k^2\sqrt{a_1dx^2+a_2dy^2+a_3dz^2+a_4dt^2}\sqrt{a_1\delta x^2+a_2\delta y^2+a_3\delta z^2+a_4\delta t^2}}.$$

Unghiul V a două suprafețe $F(x,y,z,t)=0$, $F_1(x,y,z,t)=0$ este dat de formula (15)

$$\cos V=\frac{g(u|u')}{\sqrt{g(u|u)g(u'|u')}}=\frac{\dfrac{uu'}{a_1}+\dfrac{vv'}{a_2}+\dfrac{ww'}{a_3}+\dfrac{pp'}{a_4}}{\sqrt{g(u,v,w,p)g(u',v',w',p')}},$$

unde $u,...,\ u',...$ sănt respevtiv $\frac{\partial F}{\partial x},...,\ \frac{\partial F_1}{\partial x},....$ Observând (?9), avem

$$\cos V=\frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial z}+\frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

VI. In cazul când ecuația absolutului în coordonate carteziene este $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+k^2=0$, elementul liniar e dat de formula (13)

$$\frac{ds^2}{k^2}=\frac{f(x,y,z,1)\,f(dx,dy,dz,0)-\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{f^2(x,y,z,1)},$$

$$\frac{ds^2}{k^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2+k^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(xdx+ydy+zdz)^2}{(x^2+y^2+z^2+k^2)^2},$$

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2+[(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2+(zdx-xdz)^2]\frac{1}{k^2}}{\left[1+\frac{1}{k^2}(x^2+y^2+z^2)\right]^2}.$$

Când $k=R$, avem Geometria Riemanniană; când $k=Ri$, avem Geometria Lobatschevskyană; când $k\to\infty$, avem $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, Geometria Euclidiană.

Deplasările Cayleyene.

26. **Generalități.** I. Am văzut că în Geometria Euclidiană studiul deplasărilor se reduce la acela al transformărilor omografice care conservă unghiurile și distanțele. Și în Geometria Cayleyană sunt astfel de transformări și Sophus Lie a arătat că Geometria Cayleyană este singura care are aceeaș proprietate ca și Geometria Euclidiană și anume, deplasările Cayleyene depind de șase parametri.

Vom numi deplasare Cayleyană orice transformare punctuală care conservă distanțele. Ținând seamă de definițiile distanțelor Cayleyene, acestea sunt transformări omografice căci conservă raportul anarmonic. Pentruca o transformare omografică să conserve distanțele, trebue ca ea să conserve absolutul, adică să transforme

această cuadrică în ea însăşi. Transformarea omografică trebue deci să înlocuiască ecuaţia absolutului cu o ecuaţie proporţională. Se poate chiar face ca noua ecuaţie să fie identică cu prima, căci se pot înmulţi cu o constantă arbitrară toţi coeficienţii unei substituţii omografice. Trebue deci a găsi acele substituţii lineare, care transformă o formă cuadratică în ea însăşi. Să considerăm o formă cuadratică omogenă de n variabile, $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ şi fie

$$x_i=\sum_k \alpha_{ik}y_k, \quad i=1,2,\dots n, \quad k=1,2,\dots n,$$

substituţia căutată, care face să avem

$$f(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv f(y_1,y_2,\dots y_n).$$

Scriind că forma cuadratică $\varphi(y_1,y_2,\dots y_n)$, obţinută cu substituţia considerată, are coeficienţii egali cu ai formei $f(y_1,\dots y_n)$, vom obţine $\frac{n(n+1)}{2}$ relaţii între cele n^2 constante α_{in}; deci soluţia conţine $\frac{n(n+1)}{2}$ arbitrare, iar în cazul Geometrii Cayleyene în spaţiul cu trei dimensiuni, unde numărul variabilelor este $n=4$, urmează că depinde de şase parametri.

Se obţine această soluţie aducând forma f la o sumă de pătrate. Considerând Hessianul formei $f(x_1,x_2,\dots x_n)$, adică determinatul

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

se ştie că după substituţia lineară, el se reproduce înmulţit cu pătratul determinantului substituţiei (modulului de transformare). Deci, dacă forma rămâne neschimbată, trebue ca determinantul substituţiei să aibă pătratul său egal cu 1. Vom avea deci două feluri de substituţii lineare; pentru unele determinantul va fi -1, pentru celelalte $+1$.

In cazul Geometrii Cayleyene, unde f depinde de patru variabile, soluţia cea mai simplă de care avem nevoe va fi obţinută prin considerarea generatoarelor rectilinii. Am văzut (No. 10) că cele două sisteme de generatoare reale sau imaginare ale absolutului pot fi reprezentate de ecuaţiile

(1) $\qquad P=\lambda R,\ S=\lambda Q,$

(2) $\qquad P=\mu S,\ R=\mu Q.$

unde P,Q,R,S sunt funcţiuni lineare, iar ecuaţia cuadricei se scrie

(3) $$PQ-RS=0.$$

Să găsim toate substituţiile lineare de determinant 1 care conservă absolutul. Aceste substituţii trebuind să conserve generatoarele rectilinii ale fiecărui sistem, vom obţine relaţii de forma

$$\lambda'=\varphi(\lambda),\ \mu'=\psi(\mu),$$

între parametrii λ, μ şi cei care le corespund λ' şi μ'. S'ar putea vedea direct prin calcul că φ şi ψ sunt funcţiuni raţionale de primul grad. Dar, substituţia căutată fiind omografică, trebue să păstreze raportul anarmonic a patru generatoare oarecare, care este egal cu acela al celor patru puncte unde aceste drepte tae o generatoare de celalt sistem. Va trebui deci cu $\varphi(\lambda)$, de ex., să satisfacă la o ecuaţie funcţională de forma

$$\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)}{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_1)}\cdot\frac{\varphi(\lambda_2-\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_0)}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_0},$$

de unde se deduce imediat, dând lui $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ valori constante, că

(4) $$\varphi(\lambda)=\frac{l\lambda+m}{n\lambda+p},\qquad \psi(\mu)=\frac{l_1+m_1}{n_1+p_1}.$$

Deci, pentru a obţine toate trasformările omografice continue ale absolutului în el însuşi, trebue a supune parametrii celor două familii de generatoare rectilinii la două substituţii omografice lineare oarecare. Impărţind în termenii primei fracţii (4) cu unul din coeficienţii l,m,n,p, rămân numai trei constante arbitrare şi tot trei rămân şi pentru a doua fracţie (4). Pentru aceasta apar cele şase constante în substituţiile căutate adică în deplasările Cayleyene.

Această condiţie necesară este şi suficientă. In adevăr, ecuaţia absolutului fiind (3), $PQ-RS=0$, formulele

(5) $$\rho P=\lambda\mu,\ \rho Q=1,\ \rho R=\mu,\ \rho S=\lambda,$$

care corespund unui punct oarecare al suprafeţei, pun în evidenţă parametrii λ şi μ ai generatoarelor rectilinii. Dacă efectuăm asupra acestor parametri cele două substituţii lineare definite de formulele

(6) $$\lambda=\frac{a\lambda'+b}{\alpha\lambda'+\beta},\qquad \mu=\frac{a_1\mu'+b_1}{\alpha_1\mu'+\beta_1},$$

ecuaţiile

(7) $$\rho'P'=\lambda'\mu',\ \rho'Q'=1,\ \rho'R'=\mu,\ \rho'S'=\lambda,$$

vor defini alt punct al absolutului. Din (5) şi (7) deducem

(8) $$\frac{P}{Q}=\lambda\mu,\ \frac{R}{Q}=\mu,\ \frac{S}{Q}=\lambda,$$

$$(9) \qquad \frac{P'}{Q'}=\lambda'\mu', \quad \frac{R'}{Q'}=\mu', \quad \frac{S'}{Q'}=\lambda'.$$

Înlocuind în (8) pe λ și μ cu valorile lor (o) și ținând seama de (9), avem

$$\frac{P}{Q}=\frac{aa_1\lambda'\mu'+ba_1\mu'+ab_1\lambda'+bb_1}{\alpha\alpha_1\lambda'\mu'+\beta\alpha_1\mu'+\alpha\beta_1\lambda'+\beta\beta_1}=\frac{aa_1P'+ba_1R'+ab_1S'+bb_1Q'}{\alpha\alpha_1P'+\beta\alpha_1R'+\alpha\beta_1S'+\beta\beta_1Q'}$$

și în mod analog

$$\frac{R}{S}=\frac{\alpha a_1P'+\beta b_1Q'+\beta a_1R'+b_1\alpha S'}{a\alpha_1P'+b\beta_1Q'+b\alpha_1R'+\alpha\beta_1S'}$$

și introducând factorul de proporționalitate ρ_1 urmează

$$(10) \qquad \begin{aligned} \rho P&=aa_1P'+bb_1Q'+ba_1R'+ab_1S',\\ \rho Q&=\alpha\alpha_1P'+\beta\beta_1Q'+\beta\alpha_1R'+\alpha\beta_1S',\\ \rho R&=\alpha a_1P'+\beta b_1Q'+\beta a_1R'+ab_1S',\\ \rho S&=a\alpha_1P'+b\beta_1Q'+b\alpha_1R'+a\beta_1S', \end{aligned}$$

Considerând aceste ecuații ca aplicate la două puncte oarecare ale spațiului, ele definesc o transformare omografică. Avem

$$\rho^2(PQ-RS)=\begin{vmatrix} a & b\\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}(P'Q'-R'S').$$

Deci, luând pentru ρ valoarea dată de ecuația

$$\rho^2=\begin{vmatrix} a & b\\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix},$$

urmează că transformarea definită de ecuațiile (10) va reproduce primul membru al ecuației absolutului.

Se vede că pe această suprafață parametrii generatoarelor în punctele corespunzătoare sunt legați cu relațiile (6).

II. Să considerăm cazul particular al Geometrii Euclidiene clasice, când absolutul se reduce la cercul imaginar de la infinit și unde deplasările se reduc deci la studiul omografiilor care conservă cercul de la infinit, ale cărui ecuații sunt $t=0$, $x^2+y^2+z^2=0$. Aceste deplasări sunt reprezentate de ecuațiile

$$(11) \qquad \begin{aligned} x&=a_1X+b_1Y+c_1Z+\alpha_1T,\\ y&=a_2X+b_2Y+c_2Z+\alpha_2T,\\ z&=a_3X+b_3Y+c_3Z+\alpha_3T,\\ t&=\qquad\qquad\quad T, \end{aligned}$$

împreună cu

$$(12) \qquad x^2+y^2+z^2=\rho^2(X^2+Y^2+Z^2), \quad t=T=0,$$

care arată că este conservat cercul de la infinit, ρ fiind o constantă arbitrară.

Făcând translaţia

$$x=\alpha_1+X',\ y=\alpha_2+Y',\ z=\alpha_3+Z', \tag{13}$$

astfel ca noua origină a axelor perpendiculare OX', OY', OZ' să fie $O'(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, deplasarea rămasă din (11) este din forma

$$\begin{aligned} X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ Z'&=a_3X+b_3Y+c_3Z, \end{aligned} \tag{14}$$

împreună cu

$$X'^2+Y'^2+Z'^2=(X^2+Y^2+Z^2), \tag{15}$$

care înlocueşte relaţia (12). Făcând înlocuirile, avem

$$(a_1X+b_1Y+c_1Z)^2+\ldots\equiv\rho^2(X^2+Y^2+Z^2),$$

de unde, prin identificare,

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+a_3^2=\rho^2,\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,\\ &b_1^2+b_2^2+b_3^2=\rho^2,\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,\\ &c_1^2+c_2^2+c_3^2=\rho^2,\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0, \end{aligned} \tag{16}$$

Punând $\frac{a_i}{\rho}=a_i',\ldots\frac{c_i}{\rho}=c_i'$, relaţiile (14) şi (16) devin

$$X'=\rho X'',\ Y'=\rho Y'',\ Z'=\rho Z'', \tag{17}$$

$$\begin{aligned} X''&=a_1'X+b_1'Y+c_1'Z,\\ Y''&=a_2'X+b_2'Y+c_2'Z,\\ Z''&=a_3'X+b_3'Y+c_3'Z, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2=1,\ a_1'b_1'+a_2'b_2'+a_3'b_3'=0,\\ &b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2=1,\ b_1'c_1'+b_2'c_2'+b_3'c_3'=0,\\ &c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2=1,\ c_1'a_1'+c_2'a_2'+c_3'a_3'=0. \end{aligned} \tag{19}$$

Relaţiile (19) probează că transformarea (18) este o rotaţie a axelor de coordonate, sau că această transformare este o rotaţie (No. 13) în jurul unei axe ce trece prin O'.

Să însemnăm cu $m(x,y,z)$ punctul dat şi $M(X,Y,Z)$ punctul obţinut cu transformarea (11). Fie $m'(X',Y',Z')$ punctul obţinut din $m(x,y,z)$ cu translaţia (13) egală cu OO', $m''(X'',Y'',Z'')$ punctul obţinut din m' cu (17), adică $X'^2+Y'^2+Z'^2=\rho^2(X''^2+Y''^2+Z''^2)$, $O'm'=\rho.O'm''$; deci m'' se obţine din m' cu o omotetie în raportul ρ. Punctul $M(X,Y.Z)$ se obţine din m'' cu (18), cu o rotaţie în jurul unei axe ce trece prin O'. Aşa dar, deplasarea omografică ce lasă neschimbat cercul imaginar de la infinit, se reduce la o trans-

laţie şi o rotaţie cu o omotetie, adică o similitudine în raportul ρ. Translaţia depinde de trei parametri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, rotaţia (18) de trei parametri şi omotetia (17) de parametrul ρ; deci, în total, deplasarea (11), care lasă neschimbat cercul imaginar de la infinit, depinde de şapte constante arbitrare.

Dar, am văzut că în deplasarea Cayleyană întră numai şase arbitrare; însă, făcând transformarea omografică care conservă absolutul, s'ar putea schimba valoarea constantei k, care figurează în expresia distanţei cayleyene în funcţiune de raportul anarmonic, deci, de fapt, sunt tot şapte constante arbitrare.

27. **Studiul cazului unde generatoarele unui sistem nu sunt deplasate de transformare.** I. Am văzut că deplasările Cayleyene se obţin supunând la două substituţii omografice lineare distincte parametrii celor două sisteme de generatoare. Aceste două substituţii lineare nu pot să se reducă în acelaş timp la două substituţii identice

$$\lambda=\lambda', \quad \mu=\mu',$$

căci orice omografie, care nu deplasează nici unul din punctele unei cuadrice, conservă toate dreptele şi se reduce prin urmare la o substituţie identică. Se poate însă că aceasta să aibă loc pentru unul din cele două sisteme de generatoare. De ex, să presupunem că formulele (6) se reduc la

$$\lambda=\lambda', \quad \mu=\frac{a_1'\mu+b_1}{\alpha_1'\mu+\beta_1}. \tag{20}$$

In acest caz, nici un punct al celor două generatoare din sistemul al doilea, ai căror parametri sunt daţi de ecuaţia

$$\mu=\frac{a_1\mu+b_1}{\alpha_1\mu+\beta_1}, \quad a_1\mu^2+(\beta_1-a_1)\mu-b_1=0,$$

nu va fi deplasat. Vor fi deci pe absolut două generatoare ale căror toate punctele vor rămâne neschimbate în deplasarea considerată. Această deplasare nu poate fi reală decât dacă absolutul este o cuadrică imaginară. In adevăr, dacă cuadrica este reală, cele două sisteme de generatoare sunt imaginar conjugate şi orice deplasare care lasă neschimbat primul sistem de generatoare, va lăsa şi pe al doilea. Deci, acest fel de deplasare nu are loc de cât în Geometria Riemanniană.

Să presupunem deci că absolutul este o cuadrică imaginară şi că am luat pe această suprafaţă două generatoare rectilinii imaginar conjugate de acelaş sistem, d şi d_1 care rămân neschimbate. Deplasarea corespunzătoare va fi definită în modul următor. Fie M un punct oarecare al spaţiului. Se poate totdeauna duce prin acest

punct o dreaptă D care să întâlnească deodată pe d şi d_1 şi aceasta dreaptă va fi evident reală. Cum ea tae absolutul în două puncte aşezate pe cele două generatoare duble d şi d_1, care rămân neschimbate, ea va aluneca dealungul ei însăşi în această deplasare. Ástfel, dacă M′ este noua poziţie a lui M, atunci M′ va fi pe dreapta D.

Pentru a defini relaţia dintre M şi M′, vom considera alt punct P oarecare şi fie P′ noua sa poziţie. Toate dreptele care se sprijină pe MP (Fig. 5), pe d şi d_1, vor întâlni evident pe M′P′. Deci, MP, M′P′, d, d_1 sunt patru generatoare rectilinii ale acelaşi cuadrice. Să însemnăm cu a, a_1, şi b, b_1 punctele unde dreptele MM′, PP′, tae pe d şi d_1. După proprietăţiile cuadricelor riglate (No. 10), raportul anarmonic R(M′,M,a,a_1) va fi egal cu R(P′,P,b,b_1) şi ţinând seamă de definiţia distanţelor Cayleyene, urmează că distanţa MM′ este totdeauna egală cu PP′ şi prin urmare va fi constantă.

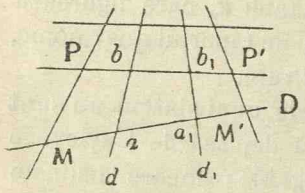


Fig. 5.

Deci se pot defini aceste deplasări Riemaniene, zicând că toate punctele spaţiului sunt deplasate cu aceeaş lungime şi că dreapta reală care uneşte un punct cu noua sa poziţie întâlneşte două generatoare fixe ale absolutului, imaginar conjugate una cu alta.

II. Un exemplu de astfel de deplasări îl avem în modul următor. Dacă punem

$$(21)\qquad \begin{aligned} X &= ax+by+cz+dt,\\ Y &= -bx+ay+dz-ct,\\ Z &= -cx-dy+az+bt,\\ T &= -dx+cy-bz+at, \end{aligned}$$

şi întrebuinţând o identitate a lui Lagrange, se vede că avem

$$X^2+Y^2+Z^2+T^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

Deci, dacă avem $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, formulele (21) transformă forma cuadratică $x^2+y^2+z^2+t^2$ în ea însăşi. Se vede că această transformare este de prima clasă, cu determinantul egal cu 1. Se poate totdeauna presupune că am ales tetraedrul de referinţă, astfel ca ecuaţia absolutului să fie

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0.$$

Să definim parametrii generatoarelor acestei suprafeţe prin formulele

$$\frac{X-iY}{Z-iT}=\lambda,\quad \frac{X+iT}{Z-iT}=\mu,\quad \frac{x-iy}{z-it}=\lambda',\quad \frac{x+iy}{z-it}=\mu'.$$

Ţinând seamă de ecuaţiile (21), avem

$$\lambda=\lambda',\ \mu=\frac{(a-ib)\mu'+c+id}{(-c+id)\mu'+a+ib},$$

ceeace probează că, în această deplasare, generatoarele unui sistem au rămas neschimbate.

28. **Studiul cazului general al deplasărilor.** I. Să trecem acum la cazul general, unde cele două substituţii omografice la care sunt supuse generatoarele rectilinii ale absolutului sunt oarecare. Dacă deplasarea este reală şi absolutul este o cuadrică imaginară, cele două omografii la care sunt supuse generatoarele rectilinii ale fiecărui sistem, sunt astfel că dreptele lor duble sunt imaginar conjugate. Insemnând cu ABCD (Fig. 6) patrulaterul format de cele două perechi de drepte duble, sunt AB şi CD, pentru prima omografie şi AD şi BC pentru a doua omografie şi sunt drepte imaginar conjugate. De aci urmează că punctele A şi C, care n'ar putea să fie reale, vor fi imaginar conjugate şi tot aşa şi cu B şi D. Deci diagonalele AC, BD ale patrulaterului ABCD format de cele patru generatoare ale absolutului sunt reale.

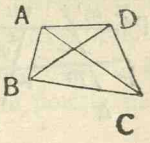


Fig. 6.

Să presupunem că deplasarea este reală, iar absolutul este o cuadrică convexă. Atunci, cele două drepte duble AB şi CD ale uneia din omografii nu vor putea fi imaginar conjugate. Dreptele duble AD şi BC ale celeilalte omografii vor fi imaginar conjugate ale primelor. Dacă AD, de ex., este imaginar conjugată cu AB şi prin urmare şi CD cu CB, punctele A şi C vor fi reale şi punctele B şi D imaginar conjugate. Astfel, diagonalele AC, BD ale patrulaterului ABCD vor fi încă reale şi una din ele întâlneşte absolutul în două puncte reale.

Să observăm că în ambele cazuri aceste două diagonale sunt polare una alteia în raport cu absolutul. De ex., AC este intersecţia planelor tangente în B şi D, care sunt planele polare ale lui B şi D în raport cu absolutul. Aşa dar, în orice deplasare, există două drepte Δ, Δ_1, polara una alteia în raport cu absolutul, care alunecă dealungul lor, aceste două drepte fiind reale când deplasarea este reală. Dreptele Δ şi Δ_1 se zic axele deplasării.

II. Pentru a vedea cum se efectuază această deplasare, să presupunem că dreptele Δ şi Δ_1 sunt date şi fie M un punct al dreptei Δ. După deplasare, acest punct ajunge într'un alt punct M' al lui Δ şi deci M' se va deduce din M cu o omografie. Punctele

duble ale acestei omografii sunt evident acelea, A şi C, de ex., unde dreapta Δ tae absolutul. Dar se ştie că raportul anarmonic format de două puncte oarecare şi cele două puncte duble ale omografii este constant. Deci raportul R(M',M,A,C) va rămâne constant, adică distanţa MM'. evaluată în raport cu absolutul, rămâne constantă. Aşa dar, pe fiecare din dreptele Δ şi Δ_1, deplasarea va face ca punctele să fie mişcate pe aceleaşi drepte cu o cantitate constantă, care nu este aceeaş pentru cele două drepte.

Să considerăm acum un punct oarecare P (Fig. 7) în spaţiu şi noua sa poziţie P' după deplasare. Să ducem prin punctul P o dreaptă d care întâlneşte deodată pe Δ şi Δ_1 şi prin urmare (No. 21) le este perpendiculară. Fie m şi μ punctele sale de intersecţie cu Δ şi Δ_1. Noua poziţie m' a lui m se va obţine ducând pe Δ o lungime constantă a; de asemenea, noua poziţie μ' a lui μ, se va obţine luând pe Δ_1 lungime α constantă şi $m'\mu'$ va fi noua poziţie d' a lui d. Pentru a obţine noua poziţie P' a lui P, va fi destul de a duce pe d', începând de la m', o lungime (cayleyană) $m'P'$ egală cu mP (căci distanţele sunt păstrate).

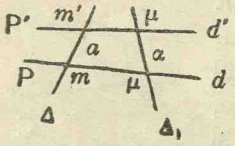


Fig. 7.

Este analogie între această construcţie şi Geometria obişnuită. Se poate trece de la $m\mu$ la $m'\mu'$, luând ca intermediar $m'\mu$. Atunci, în trecerea de la $m\mu$ la $m'\mu$, punctul μ va rămâne imobil, şi mm' va fi egal cu a. In trecerea de la $m'\mu$, la $m'\mu'$, punctul m' va rămâne imobil şi $\mu\mu'$ va fi egal cu α. Aceasta are loc ca şi cum dreapta $m'\mu$ s'a învârtit de un unghi constant proporţional cu α într'un plan perpendicular pe Δ. Dacă absolutul se reduce la cercul imaginar, de la infinit, prima deplasare a lui $m\mu$ la $m'\mu$ devine translaţia dealungul axei unei deplasări elicoidale, a doua se reduce la o rotaţie în jurul acestei axe.

III. Construcţia precedentă ne conduce la o clasificare a deplasărilor. Dacă constantele a şi α nu sunt nule, toate punctele spaţiului vor fi deplasate afară de cele patru puncte A,B,C,D unde axele Δ, Δ_1 tae absolutul, căci dreapta $m\mu$, care conţine punctul P, este înlocuită cu $m'\mu'$, care n'are nici un punct comun cu ea. Deci punctul P' nu se poate confunda cu P. Deplasarea corespunzătoare se zice elicoidală.

Dacă numai una din constantele a, α sunt nule, a, de ex., toate punctele dreptei Δ rămân neschimbate. Vom zice că deplasarea este o rotaţie în jurul dreptei Δ.

Dacă ambele constante a şi α sunt nule, toate punctele drep-

telor Δ şi Δ_1, toate dreptele cum au fost $m\mu$, sunt conservate prin deplasare. Pentru a construi punctul P′ corespunzător punctului P al lui $m\mu$, se va observa că punctele P şi P′ se corespund într'o omografie ale cărei puncte duble sunt m şi μ, şi a cărei o pereche de puncte omoloage este formată de punctele p şi p' unde dreapta $m\mu$ tae absolutul. Dar, p şi p' sunt conjugate armonic în raport cu segmentul $m\mu$, căci Δ şi Δ_1 sunt conjugate în raport cu absolutul; deci şi punctele P şi P′ se vor bucura de aceeaş proprietate şi prin urmare, deplasarea care corespunde cazului când a şi α sunt nule, se obţine luând două drepte Δ, Δ_1 polare reciproce una alteia în raport cu absolutul şi construind conjugatul armonic P′ al unui punct oarecare P în raport cu segmentul determinat de axele Δ,Δ, pe dreapta ce trece prin P şi întâlneşte aceste două axe. Avem, astfel, un nou exemplu şi mai general ca cel întâlnit (No. 27, I) al deplasărilor a căror repetare aduce orice figură la poziţia primitivă; acestea se numesc reîntoarceri.

In rezumat, avem trei feluri de deplasări, care pot fi reale.

1°. *Deplasări elicoidale*, în care rămân neschimbate patru puncte A,B,C,D ale absolutului, Diagonalele Δ, Δ_1 ale patrulaterului format de aceste patru puncte sunt polare una a celeilalte. Acestea, împreună cu laturile patrulaterului, sunt singurele drepte care alunecă dealungul lor înşi-le în deplasare. Dacă absolutul este o suprafaţa convexă şi dacă deplasarea este reală, două din aceste patru puncte sunt reale.

2°. *Rotaţiuni*, pentru care toate punctele uneia din dreptele Δ, Δ_1 sunt imobile.

3°. *Reîntoarceri*, pentru care rămân imobile toate punctele axelor Δ, Δ_1. Trebuie să facem distincţie între aceste deplasări şi deplasările Riemaniene, pe care le-am studiat precedent (No. 27) şi care aveau proprietatea caracteristică, că fac să alunece asupra lor înşi-le o dublă infinitate de drepte, adică acelea care întâlnesc două generatoare imaginar conjugate ale absolutului, alese arbitrar.

Analiza Cayleyană.

29. **Trigonometria.** Din studiul deplasărilor Cayleyene rezultă că în această Geometrie, ca şi în Geometria clasică, vom avea o Trigonometrie, adică vor exista trei relaţii între laturile şi unghiurile unui triunghi plan. Aceste şase elemente depind de nouă cantităţi, coordonatele celor trei vârfuri; dar putem deplasa triunghiul şi reduce la zero şase din aceste coordonate, astfel că elementele vor depinde cel mult de trei parametri şi deci vor trebui să fie

legate prin trei relaţii. Dacă se ia, de ex., ca tetraedru de referinţă acela care este format de vârfurile triunghiului ABC şi de polul D al planului său în raport cu absolutul, ecuaţia acestei cuadrice va avea forma

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2\alpha yz+2\beta zx+2\gamma xy=0$$

şi cele şase elemente se vor exprima în funcţiune de α,β,γ.

I. Vom presupune mai întâi că absolutul este o cuadrică imaginară şi să considerăm un triunghi ABC, ale cărui laturi şi unghiuri să le notăm cu a,b,c, A,B,C. Formulele de la No. 18, ne dau

$$(1)\qquad \cos\frac{a}{R}=\frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}},$$

$$(2)\qquad \sin\frac{a}{R}=\frac{\sqrt{(BB)\,(CC)-(BC)^2}}{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}}$$

$$(3)\qquad \cos A=\frac{(AA)\,(BC)-(AB)\,(AC)}{\sqrt{(AA)(BB)-(BB)^2}\;\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}},$$

de unde urmează

$$(4)\qquad \sin A=\frac{\sqrt{(AA)}\,\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)\,(BB)-(AB)^2}\;\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}},$$

unde

$$(5)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}(AA)&(AB)&(AC)\\(AB)&(BB)&(BC)\\(AC)&(BC)&(CC)\end{vmatrix}$$

Făcând permutări circulare cu A, B, C, vom obţine cu formule analoage, liniile trigonometrice ale lui $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, B, C. Să convenim ca în toate formulele, radicalii să fie luaţi pentru tot cu aceeaş determinare (semn). Atunci formula (3) se poate scrie

$$\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A=\cos\frac{a}{R}-\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R},$$

de unde, prin permutări circulare, se deduce sistemul

$$(6)\qquad \begin{aligned}\cos\frac{a}{R}&=\cos\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A,\\ \cos\frac{b}{R}&=\cos\frac{c}{R}\sin\frac{a}{R}+\sin\frac{c}{R}\sin\frac{a}{R}\cos C,\\ \cos\frac{c}{R}&=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C.\end{aligned}$$

De asemenea, ecuaţia (4) se poate scrie

$$(7)\qquad \sin A \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)}\,\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}},$$

de unde se deduce proporţionalitatea sinusurilor

$$(8)\qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{R}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{R}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{R}}.$$

Regăsim formulele Trigonometrii sferice pe o sferă de rază R. Dacă este vorba de un triunghi real, luând pentru radicalii analogi cu $\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}$ semne convenabile, se va putea obţine valori pozitive pentru $\sin\frac{a}{R}$, $\sin\frac{b}{R}$, $\sin\frac{c}{R}$, şi de asemenea, alegând o determinare convenabilă pentru $\sqrt{\Delta}$, se vor obţine valori pozitive pentru sinA, sinB, sinC. Se va putea lua pentru cele şase elemente A, B, C, $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ valori cuprinse între 0 şi π.

II. Să presupunem acum că absolutul este o cuadrică reală convexă. Vom putea lua

$$(9)\qquad \cos\frac{a}{Ri}=\frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}},$$

$$(10)\qquad i\sin\frac{a}{Ri}=\frac{\sqrt{(BC)^2-(BB)(CC)}}{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}}$$

$$(11)\qquad \cos A=\frac{(AB)(AC)-(AA)(BC)}{\sqrt{(AB)^2-(AA)(BB)}\,\sqrt{(AC)^2-(AA)(CC)}},$$

$$(12)\qquad \sin A=\frac{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AB)^2-(AA)(BB)}\,\sqrt{(AC)^2-(AA)(CC)}},$$

Δ fiind dat de (5). Luând radicalii cu aceeaş determinare, vom regăsi formulele (6) şi (8), unde R va fi înlocuit cu Ri, adică [1]

$$\cos\frac{a}{Ri}=\cos\frac{b}{Ri}\cos\frac{c}{Ri}+\sin\frac{b}{Ri}\sin\frac{c}{Ri}\cos A,$$

$$(13)\qquad \cos\frac{b}{Ri}=\cos\frac{c}{Ri}\cos\frac{a}{Ri}+\sin\frac{c}{Ri}\sin\frac{a}{Ri}\cos B,$$

$$\cos\frac{c}{Ri}=\cos\frac{a}{Ri}\cos\frac{b}{Ri}+\sin\frac{a}{Ri}\sin\frac{b}{Ri}\cos C,$$

$$(14)\qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{Ri}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{Ri}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{Ri}}$$

(1) Sau $\operatorname{ch}\frac{a}{R}=\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R}-\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos A$, ..

Dacă triunghiul ABC este real și în spațiul accesibil, se va putea lua ecuația absolutului astfel ca (AA), (BB), (CC) să fie pozitivi. Se va vedea ușor că expresiunile astfel ca (BC) sunt de asemenea pozitive, căci semnul lui BC, de ex., nu poate să se schimbe când B și C se deplasează rămânând în interior, pentrucă atunci aceste puncte nu devin niciodată conjugate unul cu altul, și acest semn este pozitiv când B se confundă cu C. In mod analog se arată că expresiunile de felul lui $(BC)^2-(BB)(CC)$ rămân pozitive. Deci, luând toate radicalele cu semnul $+$, se va obține pentru $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$, valori pozitive și se va putea lua pentru unghiurile A, B, C valori cuprinse între 0 și π.

III. In cele două Geometrii pe care le-am considerat, relațiile între cele șase elemente ale unei triedru sunt aceleași ca în Geometria Euclidiană, acest triedru fiind oarecare dacă absolutul este imaginar și având un vârf în spațiul accesibil dacă absolutul este o cuadrică reală și convexă. In adevăr, să raportăm absolutul la tetraedrul conjugat al cărui unul din vârfuri să fie vârful S al triedrului. In ambele cazuri, ecuația absolutului are una din formele

$$\pm t^2+x^2+y^2+z^2=0.$$

Muchile triedrului înțeapă planul polar al vârfului acestui triedru în trei puncte A, B, C, pentru care t va fi nul și cărora se pot alege celelalte coordonate astfel ca $x^2+y^2+z^2=1$. Se va putea deci face să corespunză celor trei puncte A, B, C, trei puncte A′, B′, C′ ale unei sfere cu raza egală cu 1 și având pentru coordonate rectangulare coordonatele omogene ale punctelor A, B, C. Se vede deci că elementele triedrului se calculează cu aceleași formule ca ale triunghiului sferic A′B′C′ și deci propoziția enunțată este demonstrată.

30. **Volumul.** I. Am văzut că în Geometria Euclidiană, elementul de volum poate fi caracterizat prin proprietatea că nu se schimbă când efectuăm deplasarea cea mai generală. Să adoptăm și în noua Geometrie această definiție.

Să luăm ecuația absolutului sub forma

$$x^2+y^2+z^2+1=0.$$

Orice integrală triplă este de forma

$$V=\iiint\psi(x,y,z)dxdydz,$$

și rămâne a determina pe ψ astfel ca această integrală să nu se schimbe dacă se efectuază o substituție omografică oarecare ce conservă absolutul.

Să considerăm mai întâi acelea din aceste substituţii care sunt întregi şi reproduc $x^2+y^2+z^2$. Ele sunt ortogonale, de forma

$$x=ax'+by'+cz',\ y=a'x'+b'y'+c'z',\ z=a''x'+b''y'+c''z',$$

cu determinatul egal cu unitatea. Ele transformă integrala triplă V în următoarea

$$\iiint\psi(ax'+by'+cz',\ a'x'+b'y'+c'z',\ a''x'+b''y'+c''z')dx'd'ydz'.$$

Pentru ca V să se reproducă, trebue ca funcţiunea ψ să depindă numai de $x^2+y^2+z^2$, astfel că V se va putea pune sub forma

$$V=\iiint F(1+x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

Să facem acum substituţia

$$x=\frac{x'}{z'},\ y=\frac{y'}{z'},\ z=-\frac{1}{z'}, \tag{15}$$

care, de asemenea, conservă absolutul. Integrala V devine

$$V=\iiint F\left(\frac{1+x'^2+y'^2+z'^2}{z'^2}\right)\frac{dx'dy'dz'}{z'^4}$$

şi, după cele ce am văzut, trebuind să fie independentă de z', trebue să avem

$$F(u)=\frac{C}{u^2},$$

C fiind o constantă. Volumul va fi deci definit cu o integrală de forma

$$V=C\iiint\frac{dxdydz}{f^2(x,y,z,1)} \tag{16}$$

ecuaţia omogenă a absolutului fiind $f(xyzt)=0$.

Dacă absolutul este o suprafaţă reală, substituţia (15) n'ar fi; dar, este uşor de a o înlocui cu alta fracţionară care ar conduce la acelaş rezultat.

Pentru a determina constanta C, să punem condiţia ca elementul de integrală V să devină cel din Geometria clasică, când Geometria Cayleyană se reduce la Geometria Euclidiană. In acest caz, obţinem $C=k^3$.

II. Acest rezultat se mai poate obţine şi prin alte consideraţii. Am văzut (No. 18) că elementul linear al spaţiului se poate pune sub forma

$$ds^2=k^2\frac{f(x,x)f(dx,dx)-f^2(x,dx)}{f^2(x,x)}.$$

Făcând $t=1$, vom avea o formă cuadratică de diferenţiale dx, dy, dz,

$$ds^2=Adz^2+A'dy^2+A''dz^2+2Bdydz+2B'dzdx+2B''dxdy.$$

Dar, se ştie că, făcând o schimbare de variabile oarecare, integrala triplă

$$V=\iiint\Delta dxdydz,$$

unde avem

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

rămâne neschimbată. Cu atât mai mult, dacă se efectuează substituţiile lineare care conservă absolutul.

Insemnând cu H hessianul formei $f(x,y,z,t)$, avem

$$\Delta=\frac{k^6}{f^4}H.$$

Deci

$$V=k^3\sqrt{H}\iiint\frac{dxdydz}{f^2(x,y,z,1)}.$$

Dacă absolutul este imaginar, H va fi pozitiv şi k real, dacă absolutul este o cuadrică reală convexă, H va fi negativ şi k o imaginară pură. Regăsim deci cu o mică schimbare de notaţii, expresia volumului dat de (16).

III. Să aplicăm aceasta formulă şi să luăm ecuaţia absolutului sub forma

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0.$$

Avem

$$V=R^3\iiint\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$

Făcând substituţia

(17) $$x=\rho\sin\theta\cos\alpha,\quad y=\rho\sin\theta\sin\alpha,\quad z=\rho\cos\theta,$$

obţinem

$$V=R^3\iiint\frac{\rho^2d\rho d\theta d\alpha}{(1+\rho^2)^2}.$$

Să întindem această integrală pentru tot spaţiul; pentru aceasta, vom face pe θ să varieze de la 0 la π, pe α de la 0 la 2π şi pe ρ de la 0 la ∞. Volumul total al spaţiului va fi

$$\frac{1}{2}\pi^3R^3,$$

adică este finit.

Dacă absolutul este o suprafaţă reală, a cărei ecuaţie se pune sub forma

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0,$$

vom înlocui pe k cu Ri, iar volumul devine

$$V=R^3\iiint\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}.$$

Făcând substituţia (17), avem

$$V=R^3\iiint\frac{\rho^2d\rho d\theta d\alpha}{(1-\rho^2)^2}$$

şi volumul devine infinit când ρ tinde către 1, adică atunci când ne apropiem de absolut.

31. **Aria.** I. Aceleaşi consideraţiuni se pot întrebuinţa şi în cazul ariilor. Pentru ariile plane, vom considera elementul linear în plan

$$ds=k^2\frac{f(x,y,1)\,f(dx,dy)-f^2(x,dx)}{f^2(x,y,1)},$$

unde $f(x,y,z)=0$ este ecuația omogenă a absolutului. Elementul linear este de forma

$$ds^2=Adx^2+A'dy^2+2Bdxdy,$$

iar integrala dublă

$$\iint \sqrt{B^2-AA'}\,dxdy$$

va fi un invariant. Insemnând cu H hessianul formei $f(x,y,z)$, avem $B^2-AA'=\frac{k^6}{f^3}H$; deci, va trebui să luăm pentru arie

$$A=k^3\sqrt{H}\iint\frac{dx\,dy}{f^{3/2}(x,y,1)}, \tag{18}$$

H fiind hessianul absolutului.

II. Ca aplicație, să presupunem că am luat în plan două puncte reale oarecare A, B și polul lui AB. Luând acest triunghi de referință, ecuația absolutului va fi de forma

$$f(x,y,z)=ax^2+2bxy+cy^2+z^2=0,$$

ecuația dreptei AB fiind $z=0$, punctele A și B având respectiv coordonatele $y=0$, $z=0$ și $x=0$, $z=0$.

Fie $C(x,y,1)$ un punct din plan. Unghiul $\theta=ACB$ poate fi calculat aplicând formula (16) (No. 18) cunoscută,

$$\cos\theta=\frac{(CC)(AB)-(AC)(BC)}{\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}},$$

care, în cazul de față, devine

$$\cos\theta=\frac{b-\delta xy}{\sqrt{(a+\delta y^2)(c+\delta x^2)}},$$

$\delta=ac-b^2$ fiind hessianul absolutului. Avem

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{\delta}\sqrt{f(x,y,1)}}{\sqrt{(a+\delta y^2)(c+\delta x^2)}}.$$

Vom alege semnele astfel ca θ să devie egal cu π, când C vine să se așeze pe AB între A și B.

Se vede că unghiul θ definit mai sus, satisface la ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=\frac{\sqrt{\delta}}{f^{3/2}};$$

deci expresia (18) a arii se scrie

$$A=k^2\iint\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}dxdy.$$

Pentru a o aplica, să construim patrulaterul C'D'CD, obținut (Fig. 8)

ducând două raze prin A și două raze prin B. Integrala dublă, întinsă la acest patrulater, va fi diferența dintre suma valorilor lui θ pentru C și C' și suma valorilor aceluiaș unghi pentru D și D', adică va fi egală cu suma unghiurilor interioare patrulaterului, micșorată cu 2π. Dacă punctul C' vine să se așeze între A și B, unghiul C' devine egal cu π și suma precedentă devine egală cu

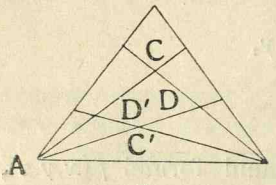


Fig. 8.

$$A+B+C-\pi,$$

A,B,C fiind unghiurile triunghiului ABC. Deci, aria unui triunghi ABC format de trei linii drepte situate în același plan este egală cu

$$k^2(A+B+C-\pi). \tag{19}$$

In cazul când absolutul este imaginar, $A+B+C-\pi$ va fi pozitiv, căci k^2 este pozitiv; va fi un exces al sumei unghiurilor asupra lui π, în Geometria Riemanniană, suma unghiurilor unui triunghi este mai mare ca π, două unghiuri drepte. Când absolutul este o cuadrică convexă și suntem în interior, se înlocuește k^2 cu $-R^2$, aria triunghiului este $R^2[\pi-(A+B+C)]$, în Geometria Lobatschewskyană suma unghiurilor unui triunghi este înferioară la două unghiuri drepte.

III. O altă aplicație o avem luând ecuația absolutului sub forma redusă. In cazul Geometriei Riemaniene, unde absolutul poate să aibă forma $x^2+y^2+R^2=0$, aria cuprinsă în interiorul unui domeniu oarecare, va fi dată de integrala (18), care devine

$$\iint \frac{R^2 dx dy}{(x^2+y^2+R^2)^{3/2}},$$

astfel că aria totală a planului Riemanian este $2\pi R^2$. In cazul Geometrii Lobatschewskyene, absolutul are ecuația $x^2+y^2-R^2=0$. Aria unui triunghi, dată de (19), este $R^2[\pi-(A+B+C)]$, A, B, C fiind măsurile Cayleyene ale unghiurilor. In particular, un triunghi înscris în absolut are cele trei unghiuri ale sale nule și deci aria sa egală cu πR^2. Cum, de altă parte, putem pava interiorul absolutului cu o infinitate de astfel de triunghiuri, suprafața totală a acestei regiuni este infinită ca și dimensiunile sale lineare.

Imaginile Euclidiene ale Geometriei Cayleyene.

32. **Imaginea sferică a Geometrii Riemaniene.** Să considerăm în planul II, care conține două drepte perpendiculare Ox, Oy,

Geometria Riemaniană, luând ca absolut pseudocercul (1) (cercul imaginar) (Γ)

$$(\Gamma) \quad x^2+y^2+R^2=0.$$

Să ducem sfera $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ de centru C și rază R, tangentă în O la planul II. La fiecare punct M al planului II putem face să corespundă cele două puncte unde dreapta CM tae sfera; dintre acestea vom considera pe cel mai apropiat de O, pe care să-l notăm cu m. Conul izotrop cu vârful C, $x^2+y^2+(z-R)^2=0$, tae planul II după pseudocercul (Γ), care servește de absolut. La o dreaptă D din planul II corespunde pe sferă un cerc mare; la punctele de intersecție ale dreptei D cu (Γ) corespund punctele de intersecție ale acestui cerc mare cu conul izotrop, care puncte sunt tocmai punctele circulare ale acestui cerc mare.

Din cele studiate, urmează că distanța Cayleyană a două puncte M și M′ este egală cu lungimea arcului de cerc mare determinat pe sferă de punctele m și m' corespunzătoare. De asemenea, la o dreaptă din planul II tangentă la absolutul (Γ), corespunde un cerc mare al cărui plan este tangent la conul izotrop, de unde urmează că unghiul Cayleyan a două drepte este egal cu unghiul cercurilor mari care le corespund.

Deci, Geometria Riemaniană din planul II are ca imagine Geometria sferică pe sfera considerată. Această imagine, sau schemă cum îi zice D-l *Appell* (2), are avantajul de a păstra un sens euclidian reprezentărilor distanțelor și unghiurilor în Geometria Riemaniană. Tot de aci se vede de ce spațiul Riemanian este limitat, pentru ce distanțele sunt cunoscute afară de un multiplu de πR și pentru ce Trigonometria Cayleyană se confundă cu cea sferică.

33. **Imaginea plană a Geometriei Lobatschewskyene plane.** S'a dat diverse imagini Geometriei neuclidiene a lui Lobatschewsky. Următoarea, datorită D-lui *Picard* (3), se referă la punctele unei jumătăți de plan și se bazează pe transformarea fucksiană

(1) *Darboux*, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires (1873), p. 211; *Rouché et de Comberousse*, Traité de Géométrie, 8-e édition, Géométrie dans l'espace, Note de *Poincaré*, Sur la Géométrie non euclidienne, pp. 575—593.

(2) *Appell*, Traité de Mécanique rationnelle, t V, Aperçus de Géométrie Cayleyenne, pp. 170—191.

(3) **Picard**, *Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la Géométrie non euclidienne* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1922, p. 425); sau *Traité d'Analyse*, t. I (ediția 3-a), *Quelques remarques sur la Géométrie non euclidienne*, pp. 587—593.

$$Z=\frac{az+b}{cz+d},$$

a, b, c, d fiind reale, astfel ca $ad-bc=1$, iar $z=x+iy$, $Z=X+iY$, $i=\sqrt{-1}$. Însemnând cu z_0 conjugatul lui z, avem

$$dx^2+dy^2=dzdz_0,\quad dZdZ_0=\frac{dzdz_0}{(cz+d)^2(cz_0+d)^2}.$$

De oarece

$$Y=\frac{y}{(cz+d)(cz_0+d)},$$

urmează

$$\frac{dX^2+dY^2}{Y^2}=\frac{dx^2+dy^2}{y^2},$$

adică $\frac{ds}{y}$, $ds^2=dx^2+dy^2$, este un invariant în această transformare.

Să observăm că prin două puncte α și β (Fig. 9) ale jumătății de plan deasupra lui Ox, trece un cerc ortogonal la axa Ox, pe care o tae în k și h și ale căror afixe să le notăm cu aceleași litere.

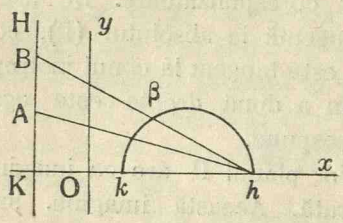


Fig. 9.

Se vede că raportul anarmonic

$$R(\alpha,\beta,h,k)=\frac{\alpha-h}{\alpha-k}:\frac{\beta-h}{\beta-k}$$

este pozltiv și mai mare ca 1, căci $\left|\frac{\alpha-h}{\beta-h}\right|>1$, $\left|\frac{\beta-k}{\alpha-k}\right|>1$. Să însemnăm cu $D(\alpha,\beta)$ expresiunea $\log R(\alpha,\beta,h,k)$, unde este vorba de logaritmi neperieni. Făcând o inversiune în raport cu punctul h ca centru, se obține o dreaptă KH perpendiculară pe Ox. Raportul anarmonic fiind un invariant față de inversiune, vom obține raportul anarmonic al punctelor K, A, B, H pe dreapta KH, care este egal cu $\frac{KB}{KA}$.

De aci urmează că, fiind date trei puncte α, β, γ în jumătatea de plan și pe același cerc normal la Ox, avem

$$R(\alpha,\beta,h,k)R(\beta,\gamma,h,k)R(\gamma,\alpha,h,k)=\frac{KB}{KA}\frac{KC}{KB}\frac{KA}{KC}=1.$$

Deci

$$D(\alpha,\beta)+D(\beta,\gamma)+D(\gamma,\alpha)=0,$$

care, fiind proprietatea aditivă a lungimilor pentru trei puncte în linie dreaptă, este natural a se numi $D(\alpha,\beta)$ distanța punctelor α și β.

Să presupunem că punctele α și β sunt două puncte infinit apropiate z, $z+dz$. Am văzut că

$$R(z, z+dz, h, k) = \frac{KB}{KA} = 1 + \frac{AB}{AK}.$$

De oarece pe KAB (Fig. 9), AB este creşterea lui KA şi din cauza invarianţei lui $\frac{ds}{y}$, urmează

$$\frac{ds}{y} = \frac{AB}{AK}.$$

Deci

$$\log R(z, z+dz, h, k) = \log\left(1 + \frac{ds}{y}\right),$$

şi acest logaritm este egal cu $\frac{ds}{y}$, afară de infiniţi mici de ordin superior. Prin urmare

$$D(z, z+dz) = \frac{ds}{y},$$

adică distanţa infinitezimală este un invariant.

Acestea fiind stabilite, putem da, pe jumătatea de plan considerată, o imagine a Geometriei neuclidiene a lui Lobatschewsky a planului întreg. Vom numi drepte jumătăţile de cercuri normale axei Ox. Distanţa a două puncte α şi β este expresia $D(\alpha,\beta)$ definită mai sus, care se bucură de proprietatea aditivă a distanţelor pentru puncte situate în linie dreaptă neeuclidiană.

Două segmente egale $\alpha\beta$ şi $\alpha'\beta'$ pot fi aduse să coincidă cu substituţia

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

de unde se vede că deplasările precedente depind de trei parametrii. Toate ipotezele Geometriei Lobatschwskyene sunt deci realizate, afară de postulatul paralelelor.

După definiţia distanţei Lobatschewskyene, urmează că o dreaptă (în imagine un cerc normal la Ox) are două puncte la infinit, care în fig. 9 sunt h şi k. Se vede deci, că fiind dată o dreaptă Lobatschewskyană D, se poate duce prin punctul A al planului două paralele la aceeaşi dreaptă, adică două drepte care o întâlnesc pe aceasta la infinit. Dreapta D fiind reprezentată de cercul C de diametru kh (Fig. 10), cele două paralele sunt reprezentate de cercurile ce trec prin A, tangente în h şi k la cercul C şi ortogonale axei Ox. Printre dreptele ce trec prin A, unele

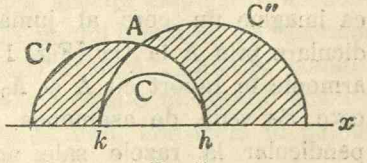


Fig. 10.

întâlnesc pe D, altele nu o întâlnesc; vor fi deci secante și nesecante, separate de cele două paralele. Partea liniată din fig. 10 corespunde cercurilor normale la Ox, nesecante cercului C, din interiorul unghiului de paralelism. În ce privește unghiurile, unghiurile neeuclidiene sunt identice cu unghiurile imaginei pe jumătatea de plan.

Tot cu ajutorul acestei imagini, se vede că în Geometria Lobatschewskyană sunt triunghiuri ale căror toate unghiurile sunt nule; așa, de ex., considerând punctele α, β, γ ale axei Ox, cercurile descrise pe $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ ca diametre, dau imaginea laturilor triunghiului cu unghiurile nule, căci cercurile sunt tangente în α, β, γ.

De asemenea, două drepte nesecante și neparalele, au o perpendiculară comună, căci, în jumătatea de plan este un cerc ortogonal la două cercuri date, și care are centrul în punctul unde axul radical al celor două cercuri tae axa Ox.

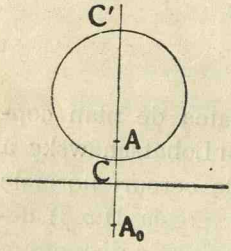


Fig. 11.

Să considerăm acum cercurile Lobatschewskyene, adică locul extremităților dreptelor neeuclidiene de lungime constantă trecând prin punctul dat A. Insemnând cu a afixul punctului A și a_0 afixul conjugatului A_0 (Fig. 11) (A și A_0 simetrice în raport cu Ox), substituțiile lineare de tipul considerat mai sus sunt

$$\frac{Z-a}{Z-a_0}=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-a_0},$$

și corespund la o rotație de unghiul θ. B fiind un punct dat de afix b, locul punctelor B', astfel ca AB' să fie egală cu distanța AB (cercul Lobatschewskyan de centru A) este dat de ecuația

$$\frac{Z-a}{Z-a_0}=e^{i\theta}\frac{b-a}{b-a_0},$$

unde θ este variabil, iar Z este afixul punctului B'. Cum $e^{i\theta}$ descrie un cerc, Z va descrie un cerc. Deci, cercul Lobatschewskyan are ca imagine un cerc al jumătății planului. Acest cerc tae perpendiculara prin A la Ox (Fig. 11) în două puncte C și C' conjugate armonic în raport cu A și A_0, iar CC' este un diametru al acestui cerc. Se vede, de asemenea, că un cerc Lobatschewskyan este perpendicular la razele sale, adică la dreptele neeuclidiene ce trec prin centrul său. Am văzut că un cerc al jumătății de plan ce nu tae axa Ox, reprezintă un cerc Lobatschewskyan. Centrul acestuia corespunde punctului A pe diametrul perpendicular pe Ox, astfel ca A și A_0 să fie conjugate în raport cu cercul.

Să considerăm, în particular, un cerc al jumătății de plan tangent axei Ox în punctul H (Fig. 11). Acest cerc reprezintă o curbă normală la o infinitate de drepte Lobatschewskyene paralele (cercurile ortogonale în H la Ox). Avem deci în planul Lobatschewskyan o curbă ale cărei normale sunt drepte paralele Lobatschewskyene. O astfel de curbă a fost numită de Lobatschewsky *horiciclu* și poate fi privit ca limita unui cerc al cărui centru se depărtează indefinit. In adevăr, în fig. 11, avem $\overline{HA}^2=HC.HC'$ și cum $HC=0$, rezultă $HA=0$, deci centrul neeuclidian corespunzător lui A se depărtează nemărginit.

In Geometria Lobatschewskyană fiind dată o dreaptă, locul punctelor echidistante de această dreaptă nu este o dreaptă, ci cercuri care tae axa Ox în cele două puncte de intersecție ale lui Ox cu jumătatea de cerc ce reprezintă dreapta. Aceste curbe au fost numite de Lobatschewsky *hypercicle* și sunt cercuri ale căror toate razele sunt perpendiculare la aceeaș dreaptă.

Putem da altă imagine a Geometriei Lobatschewskyene în interiorul unui cerc C, transformând, cu ajutorul unei înversiuni, jumătatea de plan în interiorul cercului C (Fig. 12). Dreptele corespund atunci la cercuri ortogonale cercului C. Două puncte α și β determină o dreaptă și logaritmul raportului anarmonic, luat ca mai sus, al punctelor α, β, h, k, este distanța punctelor α și β. Presupunând că jumătatea de plan este transformată în interiorul cercului $X^2+Y^2=1$, se găsește că elementul linear este

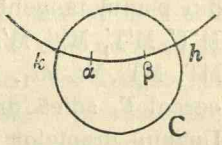


Fig. 12.

$$\frac{dX^2+dY^2}{(1-X^2-Y^2)^2}.$$

34. **Altă reprezentare conformă a Geometriei Lobatschewskyene.** În afară de imaginea dată de *Poincaré* pentru Geometria Lobatschewskyană (1), considerând nn iperboloid de rotație cu două pânze, o altă reprezentare conformă a acestei Geometrii neeuclidiene a fost dată de D-l *Cartan* 2) în modul următor. Să înscriem în conul de rotație cu vârful H (Fig. 13) o sferă Σ tangentă conului dealungul cercului Γ'. Fie Γ cercul de intersecție al acestui con cu planul (II), perpendicular pe axa conului. Vom considera în planul

(1) A se vedea nota lui **Poincaré**, *Sur la Géométrie non euclidienne*, în Traité de Géométrie de Rouché et Comberousse, 8-e éd., Géom. dans l'espace, pp. 575—593.

(2) In Cursul său de Geometrie superioară, *La Géométrie des espaces de Riemann*, profesat la Sorbona, în 1925—1926.

(II) Geometria Lobatschewskyană, luând ca absolut cercul Γ. Lăsând deoparte calota sferei dinspre H, să observăm că la orice punct M al planului (II) corespunde un punct M′ pe sferă la intersecţia ei cu dreapta HM. La o dreaptă P_1P_2 din planul (II) corespunde pe sferă un arc de cerc ortogonal cercului Γ′. Această reprezentare conservă unghiurile. In adevăr să considerăm unghiul dreptelor MT, MT_1 în planul Lobatschewskyan, cărora le corespund pe sferă două cercuri ce se tae în M′ şi care admit ca tangente M′T′, M′T′$_1$. Planul tangent (T) în M′ la sferă tae conul după o conică (C), ce are M′ ca focar (1), iar tangentele M′t', M′t'_1 duse din focarul M′ la această conică sunt (2) dreptele izotrope din planul tangent (T) ce trec prin M′. Conicei (C) şi dreptelor M′T′, M′T′$_1$, M′t', M′t'_1 le corespund în planul (II) cercul Γ şi dreptele MT, MT_1, Mt, Mt_1, ultimele două fiind tangentele (3) duse din M la cercul Γ, adică dreptele izotrope din planul (II) ce trec prin M. Unghiul dreptelor M′T′, M′T′$_1$ este dat de raportul R(M′T′$_1$, M′T′, M′t', M′t'_1), iar unghiul Lobatschewskyan al dreptelor MT, MT_1, de raportul R(MT_1, MT, Mt, Mt_1), adică coincide cu cel euclidian, căci dreptele Mt, Mt_1 sunt izotrope. Se vede că cercurile se conservă (4) în această reprezentare. Deci, avem o reprezentare conformă a planului Lobatschewskyan pe o sferă.

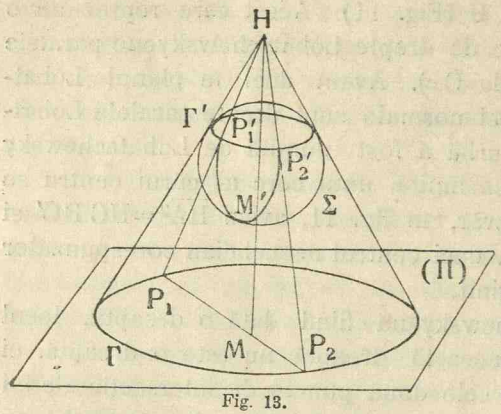


Fig. 13.

După cum vedem, găsirea imaginei Geometrii Cayleyene stă în strânsă legătură cu teoria suprafeţelor aplicabile, care constă în deformarea uneia din ele (fără a altera lungimile liniilor trase pe această suprafaţă şi unghiurile sub care aceste linii se tae), astfel

(3) A se vedea *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (No. 96, Aplicaţie).

(4) A se vedea *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (No. 105, XI).

(5) Căci să ştie că dacă două curbe sunt tangente şi proecţiile lor conice pe un plan sunt tangente.

(6) Aceasta se poate vedea analitic, luând astfel axele perpendiculare ca ecuaţia sferei să fie $x^2+y^2+z^2=1$, a planului (II) $z=d$ şi H(0,0,a). Se scrie ecuaţia conului (*Lecţiuni de Geometrie Analitică*, No. 245, II) cu vârful H şi trecând prin curba de intersecţie (cercul) a sferei cu planul $ux+vy+wz=0$ (ce trece prin centru); se vede apoi că intersecţia acestui con cu planul II (făcând $z=d$) este un cerc.

ca să o putem aplica pe o altă suprafață fără ruptură și îndoitură. Știm că o geodezică a unei suprafețe este prin definiție drumul cel mai scurt de la un punct la altul pe această suprafață. Deci, dacă două suprafețe sunt aplicabile, geodezicele uneia corespund geodezicelor celeilalte, căci deformarea nealterând lungimile, conservă geodezicele.

Curbura totală a unei suprafețe este inversa produsului celor două raze de curbură principale. Se arată că condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață să fie aplicabilă pe o sferă de rază R, este ca această suprafață să aibă curbura totală constantă și egală cu $\frac{1}{R^2}$. O sferă este aplicabilă într'o înfinitate de moduri pe ea însăși; deci, o suprafață cu curbura totală constantă va fi aplicabilă pe ea însăși într'o înfinitate de moduri. Prin urmare, Geometria liniilor trase pe o suprafață va fi aceeaș ca Geometria liniilor trase pe o suprafață aplicabilă pe prima.

Dar, am văzut că Geometria plană a lui Riemann nu diferă de Geometria pe o sferă; ea nu va diferi de Geometria suprafețelor cu curbura constantă pozitivă. Triunghiurile ale căror laturi sunt trei geodezice trase pe o astfel de suprafață, vor avea suma unghiurilor mai mare ca două drepte și elementele vor fi legate cu formulele Trigonometrii sferice. Cum cercurile mari (geodezicele) ale sferei se întâlnesc, rezultă că în Geometria Riemaniană toate dreptele se întâlnesc, deci nu sunt paralele.

Dar sunt și suprafețe cu curba constantă negativă, cunoscute sub numele de suprafețele lui *Beltrami*, cum este pseudo-sfera (Fig. 15), suprafața de rotație născută de curba tractrice în jurul asimptotei (Fig. 14), această curbă fiind caracterizată prin proprietatea că este constantă porțiunea MT din tangenta cuprinsă între punctul de contact și asimptotă. Geodezicele pe această suprafață au proprietatea că printr'un punct se pot duce mai multe geodezice ce nu tae o geodezică dată; ele prelungite, se încolăcesc mereu în jurul gâtului subțire al suprafeței fără să întâlnească geodezica dată; deci printr'un punct se pot duce mai multe paralele la o dreaptă. Geometria pe aceste suprafețe nu diferă de aceea a lui Lobatschewsky.

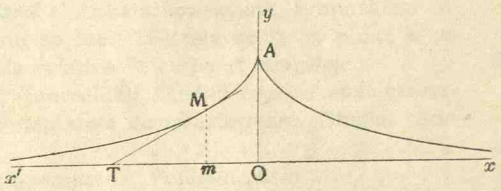


Fig. 14.

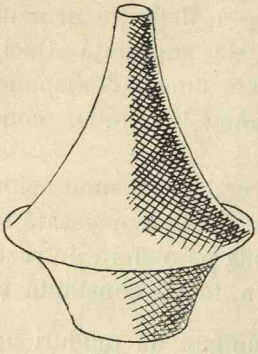


Fig. 15.

Triunghiurile ale căror laturi sunt trei geodezice trase pe o astfel de suprafață, vor avea suma unghiurilor mai mică de cât două drepte și elementele lor vor fi legate cu formulele Trigonometrii plane Lobatschewskyene.

Aceste imagini ale Geometrii Cayleyene, aceste dicționare, cum le numia Poincaré, ne fac să înțelegem oarecare propoziții ale Geometriilor neeuclidiene, pe care nu le poate prinde intuiția noastră obișnuită cu spațiul euclidian în care presupunem că trăim.

Cum Universul real (Spațiul-Timp) este o multiplicitate Riemaniană cu patru dimensiuni, Geometria Spațiilor lui Riemann a luat o mare desvoltare. Această Geometrie poate fi concepută ca studiul unei forme cuadratice de diferențiale $\Sigma g_{ik} dx_i dx_k$, definită pozitiv, adică ce se descompune într'o sumă de pătrate. Se poate concepe însă o Geometrie mai generală, ca studiul unei forme cuadratice de diferențiale, cum este în Relativitatea generalizată. De altfel, toate aceste Geometrii pot fi construite pornind de la ideea de grup (1).

---

(1) Pentru mai multe detalii, a se vedea: *Weyl*, Temps, espace et matière, 1922; *Becquerel*, Exposé élémentaire de la Théorie d'Einstein (Collection Payot, 1922); *Darmois*, Eléments de Géométrie des espaces (Annales de Physique, 1924); *Bouligand*, Leçons de Géométrie vectorielle, 1924; *Cartan*, La théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle (L'Enseignement mathématique, vol XXIV, 1924-1925); *Cartan*, La Géométrie des espaces de Riemann (Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. IX 1925); *Levi-Civita*, Lezioni di Calcolo differenziale assoluto (Roma, A. Stock, 1925).

Tabla de materii

Pag.

Generalităţi. Istoric 462

Noţiuni introductive.

Raportul anarmonic a patru puncte ale unei drepte. Raportul anarmonic al unui fascisol de patru plane. Ecuaţia unei cuadrice conjugată în raport cu tetraedrul de referinţă. Coordonate tangenţiale. Principiul dualităţii. Figuri corelative. Conicele şi diviziunile omografice. Definiţia unghiului, abscisei şi a distanţei în plan. Relaţiunea lui Laguerre. Definiţia distanţei şi a unghiului în spaţiu. 465

Noţiuni de geometrie sferică. Generatoarele rectilinii ale sferei. Expresiunea distanţei a două puncte ale sferei 480

Noţiuni asupra deplasărilor în Geometria Euclidiană clasică şi iperbolică. Deplasările în Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni. Deplasările în Geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni. Geometria pseudo-euclidiană iperbolică cu două dimensiuni. Geometria pseudo-euclidiană iperbolică cu trei dimensiuni. 483

Geometria Neeuclidiană. Geometria Cayleyană.

Definiţii metrice. Origina Geometrii Cayleyene. Distanţa a două puncte. Unghiul a două plane sau a două drepte. Diferitele cazuri particulare ale Geometrii Cayleyene. Geometria Riemaniană. Geometria Lobatschewskyană. Geometria Cayleyană cuprinde ca un caz limită Geometria Euclidiană. Discuţia formulei care dă distanţa a două puncte. Propoziţiuni relative la unghiuri. Relaţiuni între elementele reale în Geometria Riemaniană şi Lobatschewskyană. Propoziţiuni relative la două drepte care nu se tae. Distanţa de la un punct la un plan şi la o dreaptă. Formule relative la curbe şi suprafeţe. 495

Deplasările Cayleyene. Generalităţi. Studiul cazului unde generatoarele unui sistem nu sunt deplasate de transformare. Studiul cazului general al deplasărilor. 514

Analiza Cayleyană. Trigonometria. Volumul. Aria. 523

Imaginile euclidiene ale Geometrii Cayleyene. Imaginea sferică a Geometrii Riemaniene. Imaginea plană a Geometrii Lobatschewskyene. Altă reprezentare conformă a Geometrii Lobatschevskyene. 535

NOŢIUNI ELEMENTARE
DE
GEOMETRIE VECTORIALĂ.

Operaţiuni elementare asupra vectorilor.
Vectori.

1. **Generalităţi.** O cantitate vectorială, sau un *vector*, este caracterizată printr'o direcţie şi o mărime, cum sunt, de ex., viteza, acceleraţia, forţa. O cantitate scalară, sau un *scalar*, este caracterizată numai prin mărimea sa, fără să indice nici o direcţie, cum sunt, de ex., numărul locuitorilor unui oraş, massa unui corp, energia înmagazinată de un acumulator.

Un vector se poate reprezenta grafic printr'un segment dirijat, având o origină sau un punct de aplicaţie, o direcţie ce trece prin punctul de aplicaţie şi care este comparabilă cu direcţia vectorului, un sens pe direcţie (comparabil cu acela al vectorului) şi o mărime sau modul care este raportul mărimei vectorului prin mărimea luată ca unitate de măsură. De ex., $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 1) reprezintă un vector, având origina A, direcţia AB, sensul de la A la B şi mărimea $|\overrightarrow{AB}|$.

Pentru uşurintă, se reprezintă un vector printr'o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată; de ex,

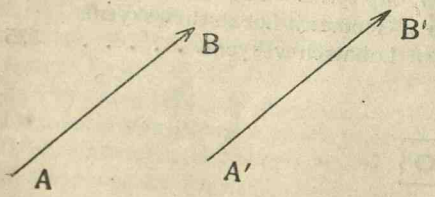


Fig. 1.

$\vec{a}$.

Un vector este nul, când origina sa coincide cu extremitatea; un asemenea vector are modulul zero, iar direcţia şi sensul sunt nedeterminate.

Doi *vectori* (sau mărimi vec-

toriale) $\vec{a}$, $\vec{a'}$ se zic *echipolenți*, când au aceeaș direcție, același sens, același modul, și care au punctele de aplicație diferite. Aceasta se exprimă astfel

$$\vec{a} = \vec{a'}.$$

Echipolența are aceleași proprietăți ca și egalitatea (numerilor, figurilor, etc.), adică, dacă $\vec{a} = \vec{b}$, avem $\vec{b} = \vec{a}$; dacă $\vec{a} = \vec{b}$ și $\vec{b} = \vec{c}$, avem $\vec{a} = \vec{c}$. De aceea, în loc de echipolență, se zice egalitate vectorială, sau, mai simplu, egalitate (dacă nu este nici o îndoială). Vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{A'B'}$ sunt echipolenți (Fig. 1), când pot coincide printr'o translație.

In *Calculul vectorial*, elementele operațiunilor ca și rezultatele lor sunt cunoscute afară de o echipolență (o egalitate).

Raportul a doi vectori de aceeaș direcție este câtul modulelor, luat cu semnul + sau −, după cum vectorii sunt de același sens sau de sens contrar.

Dreaptă dirijată sau *axă* este o dreaptă pe care s'a ales un vector $\vec{u}$ care să servească ca unitate, al cărui sens definește sensul pe axă și cu care se va compara orice vector paralel cu dreapta. Vectorul $\vec{u}$ se zice *vectorul unitate* sau *vectorul unitar* al axei.

Măsura unui vector paralel cu axa este raportul său cu vectorul unitar $\vec{u}$. Deci *raportul a doi vectori paraleli cu o axă* este egal cu câtul măsurilor lor. Modulul unui vector este valoarea absolută a măsurei sale.

Produsul unui vector $\vec{a}$ *printr'un scalar* (un număr) k, este un vector de aceeaș direcție cu $\vec{a}$ și al cărui raport față de $\vec{a}$ este precis egal cu k (în mărime și semn). Acest produs se reprezintă prin $k.\vec{a}$ sau $\vec{a}.k$. Se vede că vectorul $k.\vec{a}$ se obține făcând asupra lui $\vec{a}$ o omotetie în raportul k, centrul de omotetie fiind oarecare. Toți vectorii $k.\vec{a}$ sunt paraleli cu $\vec{a}$.

Câtul unui vector $\vec{a}$ *printr'un scalar* k este un vector $\vec{b}$ paralel cu $\vec{a}$, care este egal cu produsul lui $\vec{a}$ prin inversul lui k, adică

$$\vec{b} = \frac{1}{k} \cdot \vec{a}.$$

Inversul unui vector $\vec{a}$ este un vector $\vec{b}$, paralel cu $\vec{a}$, dar a cărui mărime este inversa mărimei lui $\vec{a}$. De ex., dacă $\vec{a}=k.\vec{u}$, $\vec{u}$ fiind vectorul unitar, atunci

$$\vec{b}=\frac{1}{\vec{a}}=\vec{a}^{-1}=\frac{1}{k}\cdot\vec{u}.$$

Un *vector liber* este un vector care este definit afară de o echipolență. Dacă avem nevoe a preciza origina A a unui vector liber $\overrightarrow{AB}$, se introduce un al doilea vector $\overrightarrow{OA}$ care admite ca origină un punct fix O al spațiului.

Calculul vectorial(1) operează direct asupra vectorilor. Acest calcul are față de metoda analitică carteziană, următoarele avantajii: 1°. Nu cere descompunerea vectorilor dați după axele de coordonate; 2°. Legile sau rezultatele se traduc printr'o singură ecuație în loc de trei; 3°. Se operează direct asupra mărimilor vectoriale, ceea ce permite gândirei de a conserva imaginea mărimilor fizice asupra cărora ea lucrează; 4°. Ecuațiile nu depind de nici un sistem de axe particular.

2. **Sumă geometrică. Diferență geometrică.** Se zice *suma geometrică* a mai multor vectori (sau mărimi vectoriale de acelaș fel) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, vectorul obținut cu regula poligonului în modul următor: Printr'un punct A (Fig. 2) se duce un vector $\overrightarrow{AB}$ echipolent cu $\vec{a}$, prin punctul B un vector $\overrightarrow{BC}$ echipolent cu $\vec{b}$, prin punctul C un vector $\overrightarrow{CD}$ echipolent cu $\vec{c}$, și așa mai departe; dacă M este extremitatea ultimului vector așa construit,

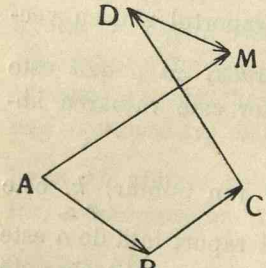


Fig. 2.

(1) Născut și dezvoltat în țările anglo-saxone, începând de la 1844, de către *Hamilton*, *Willard Gibs*, *Heavnside* O parte foarte importantă în naș-terea și dezvoltarea sa se datorește deopotrivă și germanului *Grassmann*. Pentru mai multe detalii, se poate consulta: **Burali-Forti et Marco-longo**, *Calcul vectoriel et applications* (1911); **Guiot**, *Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée* (1912); **Coffin**, *Calcul vectoriel* (1914); **Silberstein**, *Eléments d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle* (1921); **Pomey**, *Principes de Calcul vectoriel et tensoriel* (1923); **Bouligand**, *Leçons de Géométrie vectorielle* (1924); **A. Chatelet et I. Kampé de Fériet**, *Calcul vectoriel* (*Théorie, Applications géométriques et cinématiques*) (1924); **Lafay**, *Notations et formules vectorielles* (1925); **A. Tresse**, *Géométrie analytique* (1925); **R. Bricard**, *Leçons de Cinématique* (1926); **Bouligand et Rabaté**, *Initiation aux méthodes vectorielles* (1926).

$\overrightarrow{AM}$ este suma geometrică a vectorilor.

Suma este definită afară de o echipolenţă.

In cazul a doi vectori (Fig. 3), avem regula paralelogramului. In loc de a construi $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{AC}$ echipolenţi cu vectorii de adunat $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, se poate construi, începând de la aceeaş origină O, $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ echipolenţi cu aceşti vectori. Se vede că suma $\overrightarrow{OC}$ este diagonala paralelogramului construit pe OA şi OB.

Adunarea geometrică este o operaţie *comutativă* (se poate interverti ordinea a doi vectori), ceea ce se vede din fig. 3, că, în regula paralelogramului, cei doi vectori joacă acelaş rol. Adunarea geometrică este şi o operaţie *asociativă* (doi sau mai mulţi vectori pot fi înlocuiţi prin suma lor efectuată); aceasta se poate vedea în fig 2, că, în regula poligonului pentru trei vectori, se poate înlocui linia poligonală BCD prin vectorul $\overrightarrow{BD}$ suma lui $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CD}$.

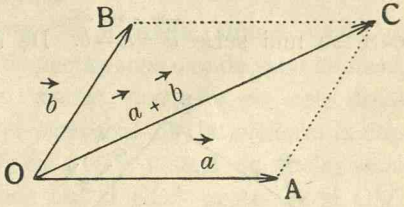


Fig 3.

Datorită acestor proprietăţi, adunarea geometrică se reprezintă prin acelaş semn + ca şi adunarea numerilor şi avem

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}.$$

Din aceste egalităţi rezultă, ca şi în aritmetică, că într'o sumă de mai mulţi vectori, se pot permuta termenii şi înlocui mai mulţi dintre ei prin suma lor efectuată. Dacă se adună acelaş vector la cei doi membrii ai unei egalităţi vectoriale (adică a unei echipolenţe), se obţine tot o egalitate.

Modulul unei sume geometrice este cel mult egal cu suma modulelor

$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\cdots\right| \leqq \left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right| + \cdots .$$

Aceasta se poate vedea din fig. 2, unde lungimea dreptei AM este cel mult egală cu suma lungimilor laturilor liniei frânte AB+BC+... Egalitatea are loc numai dacă vectorii sunt paraleli între ei şi de acelaş sens.

Vectorul opus lui $\overrightarrow{AB}$ este orice vector echipolent cu $\overrightarrow{BA}$. Avem

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$. Acest vector este încă vectorul produs $(-1).\overrightarrow{AB}$ și se reprezintă de obicei cu $-\overrightarrow{AB}$, sau cu $-\vec{a}$ în cazul vectorului $\vec{a}$.

Diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este un vector $\vec{d}$, astfel că

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a}.$$

Vectorul $\vec{d}$ este definit afară de o echipolență și este suma lui $\vec{a}$ cu vectorul opus lui $\vec{b}$, adică

$$\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

care se mai scrie $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. De aci urmează, ca și în aritmetică, că semnul — pus înaintea unui vector înseamnă, sau a scădea acest vector din cel care îl precede, sau a aduna opusul său. Pentru a obține diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, se duce printr'un punct O (Fig. 4) vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ echipolenți cu $\vec{a}$ și $\vec{b}$; suma vectorilor $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{BA}$ fiind $\overrightarrow{OA}$, urmează că $\overrightarrow{BA}$ este diferența vectorilor $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$, astfel că diferența $\vec{a}-\vec{b}$ este echipolentă cu vectorul $\overrightarrow{BA}$, care merge de la vectorul scăzător la vectorul descăzut.

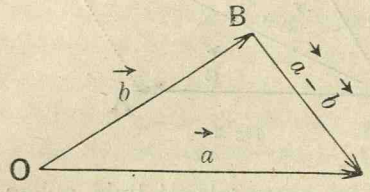


Fig. 4.

De aci urmează că, fiind date două puncte M și M′, avem, oricare ar fi punctul O (1),

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}.$$

3. **Componentele unui vector. Distanța a două puncte.** I. *Orientarea spațiului.* O axă $x'x$ este o dreaptă pe care s'a ales un sens de parcurs, numit sens pozitiv. Un plan xOy (Fig. 5) este orientat, când s'a ales un sens de rotație; sensul direct este cel ce aduce pe Ox peste Oy cu o rotație inversă ca mersul acelor unui ceasornic, când stând în O și privind pre x și y, avem mâna

(1) Pe aceasta se bazează notația lui *Grassmann*, după care se consideră vectorul $\overrightarrow{MM'}$ ca diferența a două puncte M și M′, ceea ce se scrie $\overrightarrow{MM'}=M'-M$.

dreaptă spre Ox și mâna stângă spre Oy. Un spațiu este orientat, când, în jurul fiecărei axe din spațiu, este asociat un sens de rotație, zis sensul direct al spațiului. Spațiul cu trei dimensiuni, fiind reprezentat prin trei axe Ox, Oy, Oz, (Fig. 5), sensul direct al spațiului este acela care corespunde rotații în jurul lui Oz, ce aduce planul xOz peste planul yOz, cu o rotație inversă ca mersul acelor unui ceasornic, pentru un observator străbătut de la picioare la cap de Oz, și care privind spre x și y, are mâna dreaptă spre Ox și mâna stângă spre Oy.

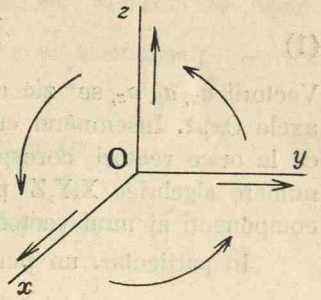


Fig. 5.

Două triedre $Oxyz$ și $O'x'y'z'$ sunt de același sens sau de sens contrar, după cum, pentru un observator, așezat succesiv pe cele două muchii corespunzătoare Oz, $O'z'$, și străbătut de la picioare la cap de aceste axe, unghiurile (Ox, Oy), $(O'x', O'y')$ sunt de același sens sau de sens contrar (adică se aduce Ox și $O'x'$ peste Oy și $O'y'$ cu rotații de același sens sau de sens contrar).

II. *Componentele unui vector.* Proecția unui punct pe o axă paralel cu un plan dat, este intersecția axei cu planul dus prin punct paralel cu planul dat. Proecția unui vector pe o axă, paralel cu un plan, este vectorul care are ca origină și ca extremitate proecțiile originii și extremității vectorului dat.

Se arată că proecția pe o axă a sumei geometrice a mai multor vectori este egală cu suma proecțiilor vectorilor care compun suma.

Considerând vectorul $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 6), să construim paralelipipedul cu diagonala AB și cu muchile paralele cu acelea ale triedrului $Oxyz$. Se vede că vectorul $\overrightarrow{AB}$ este suma geometrică a vectorilor $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AE}$, adică

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$$

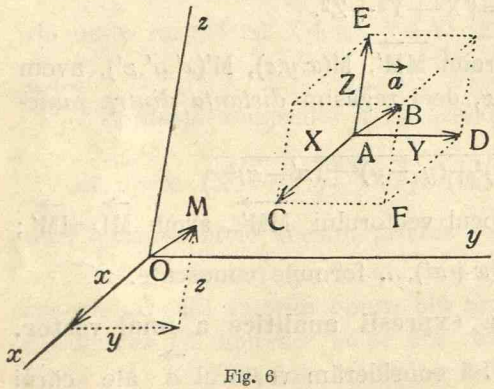


Fig. 6

Deci, un vector $\vec{a}$ poate fi descompus, numai într'un singur fel, în alți trei, $\vec{a}_x$,

$\vec{a_y}, \vec{a_z}$, respectiv paraleli cu Ox, Oy, Oz, astfel în cât avem

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}. \tag{1}$$

Vectorii a_x, a_y, a_z, se zic componentele vectorului a în raport cu axele $Oxyz$. Insemnând cu X,Y,Z măsurile acestor vectori, se vede că la orice vectori corespund trei cantități X,Y,Z și invers, trei numere algebrice X,Y,Z pot fi considerate ca măsurile vectorilor componenți ai unui vector față de axele $Oxyz$.

In particular, un punct M (Fig. 6) este reprezentat prin măsurile componentelor lui $\vec{OM}$, x,y,z, care sunt coordonatele lui M, x fiind abscisa, y ordonata, z cota.

Ca aplicație, să considerăm vectorul $\vec{MM'}$, definit prin $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$. Insă am văzut că

$$\vec{MM'} = \vec{OM'} - \vec{OM}$$

și aplicând proprietățile proecții sumei geometrice, rezultă că vectorul $\vec{MM'}$ are ca măsuri ale componentelor sale

$$X = x' - x, \quad Y = y' - y, \quad Z = z' - z.$$

Regăsim astfel rezultatele din Geometria analitică și anume proecțiile pe axele $Oxyz$ ale vectorului MM', când se cunosc coordonatele punctelor M și M'.

Altă aplicație avem calculând *lungimea vectorului* $\vec{a}$ (X,Y,Z). Această lungime este diagonala paralelipipedului dreptunghic având ca laturi $\vec{a_x}, \vec{a_y}, \vec{a_z}$, și este egală cu

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Aplicând acest rezultat vectorului $\vec{MM'}$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$, avem $X = x' - x$, $Y = y' - y$, $Z = z' - z$, deci regăsim *distanța dintre punctele* M, M'.

$$MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

In fine, $I(x_0,y_0,z_0)$ fiind mijlocul vectorului $\vec{MM'}$, avem $\vec{MI} = \vec{IM'}$; deci $x_0 - x = x' - x_0, \ldots, x_0 = \frac{1}{2}(x + x'), \ldots$ formule cunoscute.

4. **Forma vectorială a expresii analitice a unui vector. Aplicații. Direcții paralele.** Să considerăm vectorul $\vec{a}$ ale cărui

proecţii pe axele $Oxyz$ au măsurile X, Y, Z. Să însemnăm cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vectorii unitari pe axele Ox, Oy, Oz; vectorul de măsură X pe Ox se poate reprezenta prin $X.\vec{i}$, şi de esemenea pentru vectorii Y şi Z. Egalitatea (1), adică

$$\vec{a} = \text{vector de măsură X pe } Ox + \text{vector de măsură Y pe } Oy + \text{vector de măsură Z pe } Oz,$$

ia forma mai simplă, vectorială,

$$\vec{a} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}. \tag{2}$$

In această egalitate, semnul + însemnează adunarea (suma) geometrică; semnul . înseamnă produsul unui vector cu un scalar, operaţii expuse mai sus. Se poate deci aduce relaţiile şi operaţiile definite între vectori la relaţii şi operaţii asupra proecţiilor sau coordonatelor.

Ca aplicaţie, să considerăm doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{a'}$, ale căror proecţii pe cele trei axe Ox, Oy, Oz, de vectori unitari $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sunt X, Y, Z şi X', Y', Z'; avem

$$\vec{a} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}, \quad \vec{a'} = X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k}.$$

Adunând vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{a'}$, avem

$$\vec{a} + \vec{a'} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k} + X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k},$$

$$\vec{a} + \vec{a'} = (X + X').\vec{i} + (Y + Y').\vec{j} + (Z + Z').\vec{k},$$

de unde rezultă că X+X', Y+Y', Z+Z' sunt componentele sumei $\vec{a} + \vec{a'}$.

Produsul vectorului $\vec{a}$ cu scalarul m, este

$$m.\vec{a} = m.(X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}) = (m.X).\vec{i} + (m.Y).\vec{j} + (m.Z).\vec{k},$$

deci componentele acestui produs sunt $m.X$, $m.Y$, $m.Z$.

In particular, produsul prin -1, adică opusul unui vector, are ca proecţii valorile opuse ala proecţiilor vectorului considerat. Se deduce că diferenţa celor doi vectori are componentele X−X', Y−Y', Z−Z'. Diferenţa a doi vectori echipolenţi fiind nulă, con-

diţiile ca vectorii să fie echipolenţi se obţin exprimând că aceste componente sunt nule, adică $X=X'$, $Y=Y'$, $Z=Z'$.

Pentru ca vectorul $\vec{a'}$ să fie paralel cu $\vec{a}$, trebue a exprima că vectorii $\vec{a}$ şi $m.\vec{a}$, m fiind un scalar, sunt echipolenţi, adică

$$\vec{a}=m.\vec{a'}.$$

Proecţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $m.\vec{a'}$ fiind X, Y, Z şi $m.X'$, $m.Y'$, $m.Z'$, condiţiile ca vectorii $\vec{a}$ şi $m.\vec{a'}$ să fie echipolenţi sunt

$$X=m.X', \quad Y=m.Y', \quad Z=m.Z',$$

sau

$$\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'},$$

care sunt relaţiile analitice ca vectorii (X,Y,Z), (X',Y',Z') să fie paraleli.

Cum (X,Y,Z), (X',Y',Z') sunt parametrii directori (în cazul vectorilor unitari, sunt cosinusurile directoare) ai direcţiilor vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{a'}$, regăsim condiţiile de paralelism a două drepte.

5. **Schimbarea sistemului de vectori unitari.** Să considerăm, în spaţiul orientat, două triedre directe $Oxyz$, $O'x'y'z'$ (Fig. 7). Al doilea triedru este definit faţă de primul, când se cunosc vectorul $\vec{OO'}(x_0, y_0, z_0)$, şi vectorii unitari $\vec{i'}(p_1,q_1,r_1)$, $\vec{j'}(p_2,q_2,r_2)$ $\vec{k'}(p_3,q_3,r_3)$ ai axelor $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$.

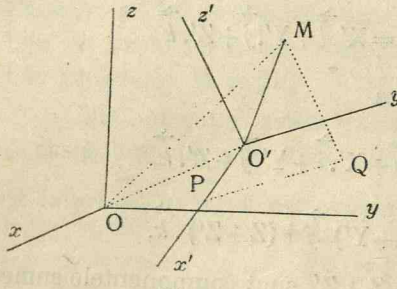


Fig. 7.

$PQ \| O'y'$, $MQ \| O'z'$

Insemnând cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vectorii unitari ai axelor $Oxyz$, avem

$$\vec{OO'}=x_0.\vec{i}+y_0.\vec{j}+z_0.\vec{k},$$

$$\vec{i'}=p_1.\vec{i}+q_1.\vec{j}+r_1.\vec{k}, \quad \vec{j'}=p_2.\vec{i}+q_2.\vec{j}+r_2.\vec{k}, \quad \vec{k'}=p_3.\vec{i}+q_3.\vec{j}+r_3.\vec{k}.$$

Să considerăm vectorul $\vec{OM}$ şi fie (x,y,z), (x',y',z') coordonatele punctului M faţă de axele $Oxyz$, $O'x'y'z'$, adică

$$\vec{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}, \quad \vec{O'M}=x'.\vec{i}+y'.\vec{j}+z'.\vec{k}.$$

Relaţia $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$ devine

$$x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}=(x_0.\vec{i}+y_0.\vec{j}+z_0.\vec{k})+(x'.\vec{i}'+y'.\vec{j}'+z'.\vec{k}').$$

Inlocuind pe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ cu valorile lor avem

$$x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}=x_0.\vec{i}+y_0.\vec{j}+z_0.\vec{k}+x'.(p_1.\vec{i}+q_1.\vec{j}+r_1.\vec{k})+$$
$$y'.(p_2.\vec{i}+q_2.\vec{j}+r_2.\vec{k})+z'.(p_3.\vec{i}+q_3.\vec{j}+r_3.\vec{k}),$$

ordonând în raport cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, obţinem

$$x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}=(x_0+p_1.x'+p_2.y'+p_3.z').\vec{i}+$$
$$(y_0+q_1.x'+q_2.y'+q_3.z').\vec{j}+(z_0+r_1.x'+r_2.y'+r_3.z').\vec{k},$$

de unde

$$x=x_0+p_1x'+p_2y'+p_3z',$$
$$y=y_0+q_1x'+q_2y'+q_3z',$$
$$z=z_0+r_1x'+r_2y'+r_3z',$$

care sunt formulele de transformare ale axelor de coordonate.

In cazul axelor perpendiculare, coeficienţii directori p_1, q_1, $r_1, \ldots$ p_3, q_3, r_3 sunt cosinusurile directoare ale axelor $O'x'y'z'$.

6. **Reprezentarea parametrică a dreptei.** I. *Dreaptă dusă printr'un punct paralelă cu o dreaptă.* Fiind date punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi vectorul $\vec{a}$ (p,q,r) (Fig. 8), se vede că $\overrightarrow{M_1M}=\lambda.\vec{a}$ arată că vectorul $\overrightarrow{M_1M}$ este echipolent cu $\vec{a}$; deci această ecuaţie vectorială reprezintă, când λ variază, punctele $M(x,y,z)$ ale dreptei dusă prin M_1 paralelă cu $\vec{a}$.

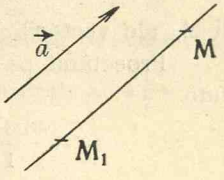


Fig. 8.

Proectând pe cele trei axe, din ecuaţia vectorială a dreptei, deducem

$$x-x_1=\lambda.p,\ y-y_1=\lambda.q,\ z-z_1=\lambda.r,$$

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$$

care dau reprezentarea parametrică şi ecuaţiile analitice ale dreptei considerate.

Ecuaţia vectorială $\overrightarrow{M_1M}=\lambda.\vec{a}$ a dreptei date se poate scrie şi altfel. Insemnând cu O un punct oarecare al spaţiului, ştim că $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$, astfel că ecuaţia vectorială a dreptei considerate se scrie

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda.\vec{a},$$

M fiind un punct oarecare al dreptei, iar λ un parametru variabil. Tot această ecuație vectorială reprezintă dreapta dusă prin extremitatea M_1 a vectorului $\overrightarrow{OM_1}$ și paralelă cu $\vec{a}$.

II. *Dreaptă definită de două puncte.* M fiind un punct al dreptei M_1M_2 (Fig. 9), se vede că $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\cdot\overrightarrow{MM_2}$ este ecuația vectorială a acestei drepte. O fiind un punct oarecare al spațiului, ecuația vectorială se poate scrie

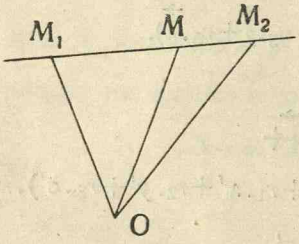


Fig. 9

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}),$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\cdot\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}, \tag{3}$$

sau

$$\overrightarrow{OM}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{OM_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OM_2},\quad \lambda_1=\frac{1}{1+\lambda},\quad \lambda_2=\frac{\lambda}{1+\lambda},\quad \lambda_1+\lambda_2=1,$$

sau

$$\overrightarrow{OM}=\mu\cdot\overrightarrow{OM_1}+(1-\mu)\overrightarrow{OM_2}, \tag{4}$$

μ fiind un parametru variabil.

Ecuația (4) reprezintă dreapta ce trece prin extremitățile M_1 și M_2 ale vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$.

Proectând pe cele trei axe, din (3) deducem ecuațiile cunoscute

$$x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda},$$

ce dau reprezentarea parametrică a dreptei definită de punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2\,z_2)$.

In cazul figurei plane, presupunând că luăm ca axe Ox și Oy dreptele OM_1 și OM_2, însemnând cu a și b lungimile vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$, proectând paralel cu direcțiile Oy, Ox pe Ox și Oy, din eacuația (3), deducem

$$x=\frac{a}{1+\lambda},\quad y=\frac{\lambda\cdot b}{1+\lambda},$$

de unde, eliminând pe λ,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

care este ecuația cunoscută a dreptei ce tae pe axele Ox și Oy lungimile $OM_1=a$, $OM_2=b$.

7. Aplicații asupra dreptei. 1. *Să se arate că diagonalele unui paralelogram se tae în mijlocul lor.* Să luăm origina O în vârful A al paralelogramului ABCD (Fig. 10). De oarece $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, însemnând cu M un punct al dreptei OC, ecuația acestei drepte este

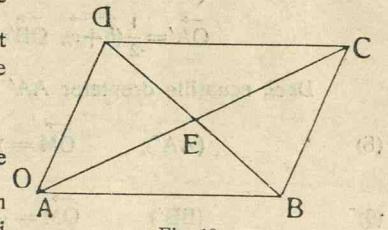


Fig. 10.

$$(5) \qquad \overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}).$$

Dreapta DB trecând prin extremitățile vectorilor $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$, însemnând cu M un punct al dreptei DB, ecuația acestei drepte este

$$(6) \qquad \overrightarrow{OM}=\mu.\overrightarrow{OD}+(1-\mu)\overrightarrow{OB}.$$

Dacă M este punctul de intersecție al dreptelor OC și DB, avem aceeaș valoare pentru $\overrightarrow{OM}$ dată de ecuațiile (5), (6) și deci

$$(7) \qquad \lambda(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\mu.\overrightarrow{OD}+(1-\mu).\overrightarrow{OB}$$

Ambii membrii ai acestei ecuații exprimă vectorial descompunerea aceluiaș vector $\overrightarrow{OM}$ după direcțiile OB și OD. Cum această descompunere se face în mod unic, în funcțiune de vectori $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, urmează că trebue să fie respectivi egali coeficienții scalari ai acestor vectori în ambii membrii ai ecuații (7). Coeficienții lui $\overrightarrow{OB}$ dau $\lambda=1-\mu$, și acei ai lui $\overrightarrow{OD}$, dau $\lambda=\mu$. De unde $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$, iar vectorul $\overrightarrow{OE}$ corespunzător punctului de intersecție al dreptelor AC, EB este dat de ecuația (5), unde se înlocueşte λ cu $\frac{1}{2}$,

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OC},$$

relație care probează că acest punct de intersecție este mijlocul diagonalelor.

Observare. Se vede că în exemplul de mai sus am exprimat toate dreptele problemei în funcțiune numai de doi vectori, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, neparaleli, din acelaș plan cu figura dată. La fel se procedează în orice problemă din plan, căutând a exprima toate dreptele în funcțiune de doi vectori neparaleli din acel plan, iar pentru o figură din spațiu, exprimând totul cu ajutorul a trei vectori care nu sunt în acelaș plan și arbitrar aleși.

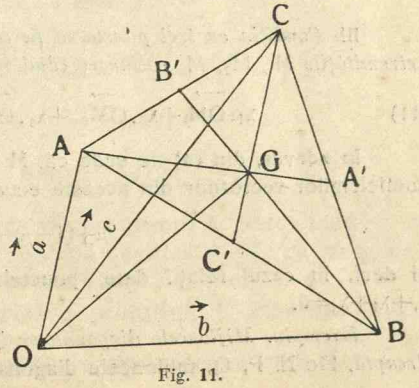


Fig. 11.

II. *Mediancle unui triunghi se întâlnesc într'un punct așezat la două treimi din lungimea lor începând de la vârfuri.* Să luăm ca origină O un punct exterior planului triunghiului dat ABC (Fig. 11). Să exprimăm

dreptele problemei în funcțiune de vectori, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Insemnând cu A', B', C' mijloacele laturilor, avem

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}),\quad \overrightarrow{OC'}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Deci, ecuațiile dreptelor AA' BB' CC' sunt

(8) $$(AA')\qquad \overrightarrow{OM}=\lambda\,.\,\vec{a}+(1-\lambda)\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),$$

(9) $$(BB')\qquad \overrightarrow{OM}=\mu\,.\,\vec{b}+(1-\mu)\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}),$$

(10) $$(CC')\qquad \overrightarrow{OM}=\nu\,.\,\vec{c}+(1-\nu)\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Punctul de intersecție al dreptelor AA', BB' se obține egalând în ecuațiile (8) și (9) coeficienții lui $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, adică

$$\lambda=\frac{1}{2}(1-\mu),\quad \frac{1}{2}(1-\lambda)=\mu,\quad \frac{1}{2}(1-\lambda)=\frac{1}{2}(1-\mu);$$

de unde $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$ și înlecuind în (8), urmează că vectorul $\overrightarrow{OM}$ corespunzător punctului de intersecție este

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

Din cauza simetrii, se vede că punctul G este punctul de intersecție și al celorlalte mediane.

Pentru a vedea poziția lui G pe mediana AA', să observăm că

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\right]=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

III. *Condiția ca trei puncte să fie colineare. Vectorii* $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ *au extremitățile* M_1, M_2, M_3 *colineare când între ei avem relația*

(11) $$\lambda_1\,.\,\overrightarrow{OM_1}+\lambda_2\,.\,\overrightarrow{OM_2}\,.+\lambda_3\,.\,\overrightarrow{OM_3}=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

In adevăr, din (4) se vede că, M fiind un punct al dreptei M_1M_2, suma coeficienților vectorilor din această ecuație este

$$\mu+(1-\mu)-1=0,$$

și deci, în cazul relației date, punctele M_1, M_2, M_3 sunt colineare când $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

Exemplu. Mijloacele diagonalelor într'un patrulater complect suut în linie dreaptă. Fie N, P, Q, mijloacele diagonalelor AB, DB, EF ale patrulaterului

complect ABCDEF (Fig. 12). Să luăm origina O în A şi să exprimăm toţi vectorii în funcţie de vectori $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Să presupunem că $\overrightarrow{AE}=p.\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=q.\vec{b}$. Ecuaţiile dreptelor DE şi FB sunt

$$\overrightarrow{OM}=\lambda.\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AE},$$

(12) (DE) $\overrightarrow{OM}=\lambda.\vec{b}+(1-\lambda)p.\vec{a}$,

(13) (FB) $\overrightarrow{OM}=\mu.q.\vec{b}+(1-\mu).\vec{a}$.

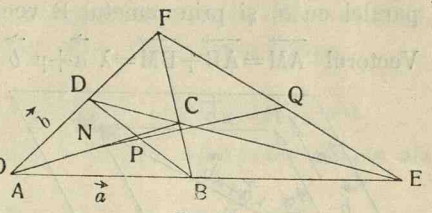


Fig. 12.

Vectorul $\overrightarrow{OM}$ corespunzător punctului de intersecţie C al dreptelor DE şi FB se obţine egalând coeficienţii lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ în ecuaţiile (12) şi (13), de unde

$$\lambda=\mu p,\ (1-\lambda)p=1-\mu;\ \lambda=\frac{(p-1)q}{pq-1},\ \mu=\frac{p-1}{pq-1}.$$

Inlocuind în (12), avem

$$\overrightarrow{OC}=\frac{p(q-1)}{pq-1}\vec{a}+\frac{q(p-1)}{pq-1}.\vec{b}.$$

N, P, Q fiind mijloacele lui AC, DB, FE, avem

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left[\frac{p(q-1)}{pq-1}\vec{a}+\frac{q(p-1)}{pq-1}\vec{b}\right],$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}(p.\vec{a}+q.\vec{b}).$$

Pentru a arăta că punctele N, P, Q sunt colineare, să arătăm că între vectorii $\overrightarrow{ON}$ $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ avem o relaţie analoagă cu (11), adică

$$\alpha.\overrightarrow{OP}+\beta.\overrightarrow{OQ}+\gamma.\overrightarrow{ON}=0,\ \alpha+\beta+\gamma=0,$$

$$\alpha.\overrightarrow{OP}+\beta.\overrightarrow{OQ}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{ON},$$

sau

$$t.\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(t+1)\overrightarrow{ON},$$

unde am pus $\frac{\alpha}{\beta}=t$. Inlocuind, trebue să avem

$$t.(\vec{a}+\vec{b})+p\vec{a}+q.\vec{b}=(t+1)\left[\frac{p(q-1)}{pq-1}\vec{a}+\frac{q(p-1)}{pq-1}\vec{b}\right].$$

Egalând coeficienţii lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, obţinem

$$t+p=(t+1)\frac{p(q-1)}{pq-1},\ t+q=(t+1)\frac{q(p-1)}{pq-1},$$

două ecuaţii care trebue să dea aceeaş valoare pentru t. Rezolvându-le în raport cu t, obţinem în adevăr aceeaş soluţie pentru $t=-pq$, de unde urmează că relaţia (11) este verificată, punctele sunt colineare.

8. **Reprezentarea parametrică a planului.** I *Plan dus printr'un punct, paralel cu două drepte.* Să considerăm vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$

în spaţiu şi să ducem prin punctul A (Fig. 13) vectorul $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}$, paralel cu $\vec{a}$, şi prin punctul B vectorul $\overrightarrow{BM}=\mu.\vec{b}$ paralel cu $\vec{b}$. Vectorul $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\lambda\vec{a}+\mu.\vec{b}$ este într'un plan paralel cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. O fiind un punct al spaţiului, avem $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$, adică

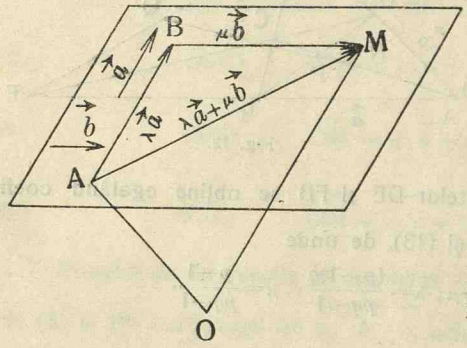


Fig. 13.

$$(14)\qquad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{b},$$

ecuaţie care dă un punct oarecare M al planului dus prin punctul A paralel cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, unde λ şi μ sunt doi parametrii variabili.

Insemnând cu $A(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{a}(p,q,r)$, $\vec{b}(p',q',r')$ punctul şi vectorii daţi, cu $M(x,y,z)$ un punct al planului, din ecuaţia vectorială (14) obţinem următoarele trei ecuaţii

$$x=x_0+\lambda p+\mu p',\quad y=y_0+\lambda q+\mu q',\quad z=z_0+\lambda r+\mu r',$$

de unde, eliminând pe λ şi μ, avem

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}=0,$$

ecuaţia carteziană a planului considerat.

II. *Plan ce trece prin trei puncte.* $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$, fiind cele trei puncte, problema revine a duce un plan ce trece prin M_1 şi paralel cu vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$. Deci, reprezentarea parametrică a acestui plan este

$$(15)\qquad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\,.\,\overrightarrow{M_1M_2}+\mu\,.\,\overrightarrow{M_1M_3},$$

$$(16)\qquad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1})+\mu(\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}),$$

$$(17)\qquad \overrightarrow{OM}=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OM_1}+\lambda\,.\,\overrightarrow{OM_2}+\mu\,.\,\overrightarrow{OM_3}.$$

Ecuaţia (17) reprezintă, de asemenea, planul ce trece prin extremităţile M_1, M_2, M_3 ale vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$.

Suma coeficienților vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, $\overrightarrow{OM}$ din ecuația (17) fiind $(1-\lambda-\mu)+\lambda+\mu-1=0$, urmează că vectorii $\overrightarrow{OM_i}$, $i=1,2,3,4$, sunt cu extremitățile M_i în același plan, când avem relația

$$\lambda_1.\overrightarrow{OM_1}+\lambda_2.\overrightarrow{OM_2}+\lambda_3.\overrightarrow{OM_3}+\lambda_4\overrightarrow{OM_4}=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0.$$

Se vede, de asemenea, că M_i, $i=1,2,3,4$, fiind patru puncte ale spațiului,

$$\overrightarrow{OM}=(1-\lambda-\mu-\nu)\overrightarrow{OM_1}+\lambda.\overrightarrow{OM_2}+\mu.\overrightarrow{OM_3}+\nu.\overrightarrow{OM_4}$$

reprezintă, când λ, μ, ν variază, orice punct M al spațiului definit de punctele M_i, $i=1,2,3,4$.

Ecuația (16) se poate scrie

$$(1+\lambda+\mu)(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1})+\lambda(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_2})+\mu.(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_3})=0,$$

sau, punând $\alpha=\dfrac{\lambda}{1+\lambda+\mu}$, $\beta=\dfrac{\mu}{1+\lambda+\mu}$,

$$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}+\alpha(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM})+\beta(\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM})=0,$$

$$(18)\quad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\alpha.\overrightarrow{OM_2}+\beta.\overrightarrow{OM_3}}{1+\alpha+\beta},\quad \overrightarrow{OM}=\frac{m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2}+m_3.\overrightarrow{OM_3}}{m_1+m_2+m_3},$$

sau

$$(19)\qquad \overrightarrow{MM_1}+\alpha.\overrightarrow{MM_2}+\beta.\overrightarrow{MM_3}=0.$$

Proectând pe axele Ox, Oy, Oz, paralel cu planele de coordonate $Oxyz$, din relația (15) deducem

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu(x_3-x_1),$$
$$y=y_1+\lambda(y_2-y_1)+\mu(y_3-y_1),$$
$$z=z_1+\lambda(z_2-z_1)+\mu(z_3-z_1),$$

de unde, eliminând pe λ și μ, obținem

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

ecuația carteziană a planului ce trece prin punctele M_1, M_2, M_3.

Proectând, din ecuația (18), avem

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},\quad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3},$$

reprezentarea parametrică a planului $M_1M_2M_3$.

Luând pe $OM_1=a$, $OM_2=b$, $OM_3=c$ ca axe Ox, Oy, Oz, proectând pe axele $Oxyz$ paralel cu planele de coordonate, din relația (18) deducem

$$x=\frac{a}{1+\alpha+\beta},\quad y=\frac{a.b}{1+\alpha+\beta},\quad z=\frac{\beta.c}{1+\alpha+\beta},$$

de unde

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

ecuația cunoscută a planului ce tae pe axele $Oxyz$ lungimile a, b, c.

9. Baricentru. Fie n puncte M_1, M_2,..M_n, cărora le corespund coeficienții $m_1, m_2, ...m_n$; O fiind un punct oarecare, să considerăm vectorul

$$\overrightarrow{OM}=m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2}+...+m_n.\overrightarrow{OM_n}.$$

Vom arăta că dacă $m_1+m_2+...+m_n=0$, atunci $\overrightarrow{OM}=\text{const.}$

În adevăr, să luăm o nouă origină O′ și să considerăm vectorul

$$\overrightarrow{O'M'}=m_1.\overrightarrow{O'M_1}+m_2.\overrightarrow{O'M_2}+...+m_n.\overrightarrow{O'M_n}.$$

Avem

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O'M'}=m_1(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{O'M_1})+...+m_n(\overrightarrow{OM_n}-\overrightarrow{O'M_n}).$$

Cum $\overrightarrow{OM_p}-\overrightarrow{O'M_p}=\overrightarrow{M_pO'}-\overrightarrow{M_pO}=\overrightarrow{OO'}$, urmează

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O'M'}=(m_1+m_2+...+m_n)\overrightarrow{OO'}=0,$$

deci $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M'}$, adică $\overrightarrow{OM}=\text{const.}$, oricare ar fi punctul O.

Să presupunem acum $m_1+m_2+...+m_n\neq 0$ și să considerăm vectorul

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m_1.\overrightarrow{OM_1}+...+m_n.\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+...+m_n}. \tag{20}$$

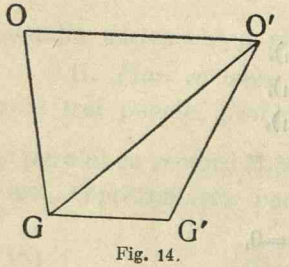


Fig. 14.

Vom arăta că poziția punctului G este independentă de origina O. In adevăr, să considerăm un alt punct O′ și vectorul corespunzător

$$\overrightarrow{O'G'}=\frac{m_1.\overrightarrow{O'M_1}+...+m_n\overrightarrow{O'M_n}}{m_1+...+m_n}. \tag{21}$$

Scăzând relațiile (20) și (21), avem

$$(m_1+...+m_n)(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{O'G'})=m_1(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{O'M_1})+...+m_n(\overrightarrow{OM_n}-\overrightarrow{O'M_n}),$$

$$(m_1+...+m_n)(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{O'G'})=(m_1+...+m_n)\overrightarrow{OO'},$$

$$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{O'G'}=\overrightarrow{OO'}. \tag{22}$$

Dar (Fig. 14), $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'G}$, $\overrightarrow{O'G'}=\overrightarrow{O'G}+\overrightarrow{GG'}$ și înlocuind

în (22), avem

$$\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'G}-(\overrightarrow{O'G}+\overrightarrow{GG'})=\overrightarrow{OO'},\quad \overrightarrow{GG'}=0,$$

adică punctul G' coincide cu G. Punctul G este independent de origina O şi se zice baricentrul punctelor $M_1,...M_n$, caracterizate de coeficienţii $m_1....m_n$, sau centrul distanţelor proporţionale.

Pentru a construi punctul G corespunzător celor n puncte, să considerăm mai întâi cazul a două puncte M_1, M_2 (Fig. 15). Se poate construi punctul M ce divide segmentul M_1M_2 în raportul $m_2:m_1$, adică $\overrightarrow{M_1M}:\overrightarrow{MM_2}=m_2:m_1$; de unde $\overrightarrow{M_1M}.m_1=\overrightarrow{MM_2}.m_2$, $(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1})m_1=(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM})m_2$,

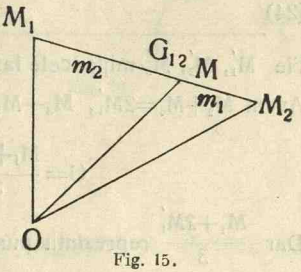


Fig. 15.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2}}{m_1+m_2}. \tag{23}$$

Deci M este baricentrul G_{12} al punctelor M_1 şi M_2, adică centrul de greutate al masselor m_1 şi m_2 aplicate în M_1 şi M_2.

Considerând încă un punct M_3 de massă m_3, noul baricentru G_{123} va fi acela al punctului G_{12} de massă m_1+m_2 şi M_3 de massă m_3; este dat de relaţia (23),

$$\overrightarrow{OG_{123}}=\frac{(m_1+m_2)\overrightarrow{OG_{12}}+m_3.\overrightarrow{OM_3}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2}+m_3.\overrightarrow{OM_3}}{m_1+m_2+m_3},$$

este punctul ce divide segmentul $G_{12}M_3$ în raportul $m_3:(m_1+m_2+m_3)$ şi se poate deci construi. Din aproape în aproape, se poate construi şi baricentrul G pentru cazul a n puncte, dat de

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\Sigma m_i.\overrightarrow{OM_i}}{\Sigma m_i}.$$

10. Aplicaţii asupra baricentrului. I. In cazul a două puncte, relaţia (20) devine

$$(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}=m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2},$$

şi pentru a vedea poziţia lui G, să alegem origina O chiar în G. In acest caz avem $\overrightarrow{OG}=0$, iar relaţia precedentă devine $m_1.\overrightarrow{OM_1}+m_2.\overrightarrow{OM_2}=0$, care probează (No. 6) că punctul O sau G este pe dreapta M_1M_2.

Când $m_1=m_2$, $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}}{2}$, sau suprimând punctul O, avem

simbolic

$$G=\frac{M_1+M_2}{2},$$

iar punctul G este mijlocul segmentului M_1M_2.

II. In cazul a trei puncte, să alegem originea O în punctul G, de unde

$$OG=0,\ m_1\cdot\overrightarrow{OM_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OM_2}+m_3\cdot\overrightarrow{OM_3}=0,$$

relație care probează că G aparține planului $M_1M_2M_3$. Când $m_1=m_2=m_3$, avem simbolic

$$G=\frac{M_1+M_2+M_3}{3}. \tag{24}$$

Fie M_1', M_2', M_3' mijloacele laturilor M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 ale triunghiului $M_1M_2M_3$. Avem $M_2+M_3=2M_1'$, $M_3+M_1=2M_2'$, $M_1+M_2=2M_3'$ și egalitatea (24) se scrie

$$G=\frac{M_1+2M_1'}{3}=\frac{M_2+2M_2'}{3}=\frac{M_3+2M_3'}{3}.$$

Dar $\frac{M_1+2M_1'}{3}$ reprezintă punctul situat pe mediana M_1M_1' la două treimi de la M_1. Deci medianele unui triunghi concură în același punct așezat la două treimi de la vârf.

III. In cazul a patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4, să presupunem $m_1=m_2=m_3=m_4$. Avem simbolic

$$G=\frac{M_1+M_2+M_3+M_4}{4}.$$

Să considerăm, în fețele tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$, punctele de întâlnire ale medianelor; fie M_1' acela al feței opuse lui M_1, ... etc. Observând că $M_2+M_3+M_4=3M_1'$, ..., putem scrie

$$G=\frac{M_1+3M_1'}{4}=\frac{M_2+3M_2'}{4}=\frac{M_3+3M_3'}{4}=\frac{M_4+3M_4'}{4}.$$

Dar, $\frac{M_1+3M_1'}{4}$ reprezintă punctul situat pe dreapta M_1M_1' la trei pătrimi de la M_1. Deci, punctul G aparține celor patru drepte unind fiecare vârf cu punctul de întâlnire al medianelor feței opuse; acest punct este la trei pătrimi ale fiecăreia dintre ele începând de la vârf.

Se poate de asemenea scrie

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{M_1+M_2}{2}+\frac{M_3+M_4}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_1+M_3}{2}+\frac{M_2+M_4}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_1+M_4}{2}+\frac{M_2+M_3}{2}\right).$$

Dar $\frac{M_1+M_2}{2}$ este mijlocul dreptei M_1M_2; însemnând aceste puncte cu M_{12}, ..., avem

$$G=\frac{1}{2}(M_{12}+M_{34})=\frac{1}{2}(M_{13}+M_{24})=\frac{1}{2}(M_{14}+M_{23}),$$

de unde rezultă că punctul G este mijlocul comun al segmentelor determinate de mijloacele muchiilor opuse ale tetraedrului.

IV. *Centrele cercului înscris și exînscris.* 1° Fie BC=a, CA=b, AB=c laturile triunghiului ABC (Fig. 16). N fiind un punct al bisectoarei interioare unghiului A, paralelele prin N la AC și AB tae pe AB și AC în D și E, astfel că AD=AE; $\overrightarrow{AN}$ este suma vectorilor egali $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AE}$. Cum AB și AC au lungimile c și b, atunci $\frac{\overrightarrow{AB}}{c}$, $\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$ sunt vectori egali cu unitatea așezați pe AB și AC; deci $\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$ este un vector cu origina în A, așezat pe bisectoarea interioară. Așa dar

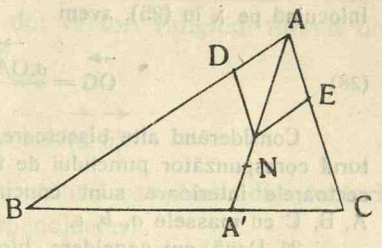


Fig. 16.

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$$

reprezintă punctele M ale bisectoarei interioare unghiului A. O fiind un punct oarecare, această ecuație se poate scrie

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{c}+\frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{b}\right),$$

$$\overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{b}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{c}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{b}\overrightarrow{OC}. \tag{25}$$

Dreapta BC unind extremitățile vectorilor $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, are (No. 6, II) ecuația

$$\overrightarrow{OM}=\mu\,\overrightarrow{OB}+(1-\mu)\overrightarrow{OC}. \tag{26}$$

Punctul A', unde bisectoarea unghiului A tae pe BC, se obține (No. 7, II) egalând coeficienții lui $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ din ecuațiile (25) și (26); de unde

$$1-\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{b}=0,\quad \frac{\lambda}{c}=\mu,\quad \frac{\lambda}{b}=1-\mu;\quad \lambda=\frac{bc}{b+c},\quad \mu=\frac{b}{b+c}.$$

Înlocuind în (25) pe λ, avem

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{bc}{b+c}\left(\frac{\overrightarrow{OB}}{c}+\frac{\overrightarrow{OC}}{b}\right)=\frac{b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{b+c},$$

relație care probează că punctul A' împarte pe BC în raportul $c:b$, adică bisectoarea interioară împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile alăturate.

Bisectoarea interioară a unghiului B are o ecuație de forma (25)

$$\overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{\alpha}{c}-\frac{\alpha}{a}\right)\overrightarrow{OB}+\frac{\alpha}{c}\overrightarrow{OA}+\frac{\alpha}{a}\overrightarrow{OC}, \tag{27}$$

α fiind variabil. Punctul G comun bisectoarelor unghiurilor A și B se obține

egalând coeficienții lui $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ din ecuațiile (25), (27),

$$1-\frac{\lambda(b+c)}{bc}=\frac{\alpha}{c},\quad \frac{\lambda}{c}=1-\alpha\frac{a+c}{ac},\quad \frac{\lambda}{b}=\frac{\alpha}{a};\quad \alpha=\frac{ac}{a+b+c},\quad \lambda=\frac{bc}{a+b+c}.$$

Înlocuind pe λ în (25), avem

$$\text{(28)}\qquad \overrightarrow{OG}=\frac{a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

Considerând alte bisectoare, vom obține tot expresia (28) pentru vectorul corespunzător punctului de intersecție al lor, de unde urmează că bisectoarele interioare sunt concurente în punctul G, baricentrul punctelor A, B, C cu masele a, b, c.

2°. Dacă am considera bisectoarea exterioară a unghiului A, atunci $\frac{\overrightarrow{AB}}{c}-\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$ este un vector cu originea în A, așezat pe bisectoarea exterioară. Deci

$$\overrightarrow{AM}=t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}-\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right),\quad \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=t\left(\frac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{c}-\frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{b}\right),$$

$$\text{(29)}\qquad \overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{t}{c}+\frac{t}{b}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{c}\overrightarrow{OB}-\frac{t}{b}\overrightarrow{OC}$$

reprezintă punctele M ale bisectoarei exterioare a unphiului A, t fiind variabil.

Se arată, ca mai sus, că

$$\frac{-a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{-a+b+c},\quad \frac{a.\overrightarrow{OA}-b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{a-b+c},\quad \frac{a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}-c.\overrightarrow{OC}}{a+b-c}$$

sunt baricentrele care corespund respectiv centrelor exînscrise triunghiului.

3. Punctul A″ de intersecție al lui BC cu bisectoarea exterioară a unghiului A, se obține egalând coeficienții lui $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ din (26) și (29); de unde $t=\frac{bc}{b-c}$, și înlocuind în (29), avem

$$\overrightarrow{OA''}=\frac{b.\overrightarrow{OB}-c.\overrightarrow{OC}}{b-c},$$

și expresiuni analoage pentru punctele B″, C″ de intersecție ale celorlalte laturi cu bisectoarele exterioare,

$$\overrightarrow{OB''}=\frac{c.\overrightarrow{OC}-a.\overrightarrow{OA}}{c-a},\quad \overrightarrow{OC''}=\frac{a.\overrightarrow{OA}-b.\overrightarrow{OA}}{a-b}.$$

Se vede că

$$(b-c)\overrightarrow{OA''}+(c-a)\overrightarrow{OB''}+(a-b)\overrightarrow{OC''}=0,\quad (b-c)+(c-a)+(a-b)=0,$$

de unde urmează (No. 7, III) că punctele A″, B″, C″ sunt colineare, adică, punctele de intersecție ale laturilor unui triunghi cu bisectoarele exterioare sunt în linie dreaptă.

Produse de vectori. Produs scalar.

11. **Produs scalar** sau interior a doi vectori a și b este o mărime scalară, care se obține făcând produsul modulelor vectorilor prin cosinusul unghiului celor doi vectori (unghiul format de direcțiile vectorilor) și se scrie $\vec{a}.\vec{b}$ sau

$$(1) \qquad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Acest produs interior este nul, când, sau unul din vectori este nul, sau când vectorii sunt perpendiculari.

Din expresia (1), se vede că produsul scalar a doi vectori este produsul modulului unuia din vectori prin proecția ortogonală a măsurei celuilaltvector pe direcția celui dintâi. Acest produs este pozitiv sau negativ, după cum unghiul vectorilor este ascuțit sau obtus.

Ca exemplu de produs scalar, este travaliul unei forțe F, constantă în mărime, direcție și sens, și al cărei punct de aplicație se deplasează în linie dreaptă de la A la B; acest travaliu este produsul interior $\vec{F}.\vec{AB}$.

Produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul modulului său, $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Acest produs se mai zice și pătratul vectorului a și se reprezintă prin $(\vec{a})^2$.

12. **Proprietăți.** I. Conform definiției, avem

$$\vec{b}.\vec{a} = |\vec{b}| . |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}.\vec{b},$$

de unde rezultă că produsul scalar este comutativ, adică se poate schimba ordinea a doi factori.

II. m și n fiind două scalare, să considerăm vectorii $m.\vec{a}$ și $n.\vec{b}$, al căror unghi este egal sau suplimentar cu acela al vectorilor echipolenți $\vec{a}$ și $\vec{b}$, după cum produsul $m.n$ este pozitiv sau negativ (m și n au sau nu același semn). In caz când $m.n > 0$, avem

$$(m.\vec{a}).(n.\vec{b}) = |m.\vec{a}| . |n.\vec{b}| \cos(m.\vec{a}, n.\vec{b}) = |m| . |n| \{|\vec{a}| . |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})\} =$$
$$m.n.(\vec{a}.\vec{b}).$$

Când $m.n<0$,

$$(\vec{m.a}).(\vec{n.b})=|m.a|.|n.b|\cos[180^0-(\vec{a},\vec{b})]=-|m|.|n|\{|a|.|b|\cos(\vec{a},\vec{b})\}=$$
$$m.n.(\vec{a}.\vec{b}).$$

Deci, avem proprietatea

$$(\vec{m.a}).(\vec{n.b})=m.n(\vec{a}.\vec{b}).$$

III. Să considerăm produsul scalar $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$. Să proectăm ortogonal vectorul $\vec{b}+\vec{c}$ pe direcţia vectorului $\vec{a}$; ştim că

$$\mathrm{pr}(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{pr}\,\vec{b}+\mathrm{pr}\,\vec{c}.$$

Inmulţind ambii membrii ai acestei egalităţi scalare cu numărul $|a|$, avem

$$(2)\qquad |a|.\mathrm{pr}(\vec{b}+\vec{c})=|a|.\mathrm{pr}\,\vec{b}+|a|.\mathrm{pr}\,\vec{c}.$$

Dar, $|a|.\mathrm{pr}\,\vec{b}$ este produsul modulului vectorului $\vec{a}$ cu măsura proecţii vectorului $\vec{b}$ pe direcţia lui $\vec{a}$, este deci produsul scalar $\vec{a}.\vec{b}$. Deci, egalitatea (2) este

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c},$$

de unde rezultă proprietatea asociativă a produsului scalar.

IV. In general, avem

$$(\vec{m.a}+\vec{n.b}+...).(\vec{m'.a'}+\vec{n'.b'}+...)=$$
$$m.m'.(\vec{a}.\vec{a'})+n.m'(\vec{b}.\vec{a'})+m.n'.(\vec{a}.\vec{b'})+n.n'.(\vec{b}.\vec{b'})+...$$

13. **Reprezentare analitică. Distanţa dintre două puncte Direcţii perpendiculare.** I. Fie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vectorii unitari de aceeaş lungime ai axelor $Oxyz$, ce fac unghiurile $Oyz=\lambda$, $Ozx=\mu$, $Oxy=\nu$. Avem

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1,\quad \vec{i}.\vec{j}=\cos\nu,\quad \vec{j}.\vec{k}=\cos\lambda,\quad \vec{k}.\vec{i}=\cos\mu.$$

Considerând vectorii $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{a'}(X',Y',Z)$, avem

$$\vec{a}.\vec{a'}=(X.\vec{i}+Y.\vec{j}+Z.\vec{k}).(X'.\vec{i}+Y'.\vec{j}+Z'.\vec{k})=$$
$$X.X'+Y.Y'+Z\,Z'+(X.Y'+X'.Y)\cos\nu+(Y.Z'+Y'.Z)\cos\lambda+(Z.X'+Z'.X)\cos\mu.$$

Deci

$$(\vec{a})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2.Y.Z\cos\lambda + 2Z.X\cos\mu + 2X.Y\cos\nu.$$

II. In cazul axelor perpendiculare, avem

$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = 0,$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{a}' = X.X' + Y.Y' + Z.Z', \quad (\vec{a})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

III. In cazul coordonatelor polare, însemnând cu r și r' lungimile vectorilor $\vec{a}$, $\vec{a}'$ și cu θ, θ' unghiurile axei polare Ox cu acești vectori, avem $\vec{a}\,.\,\vec{a}' = r.r'\cos(\theta' - \theta)$.

IV. *Pătratul distanței a două puncte* $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$, în coordonate perpendiculare sau oblice, este pătratul scalar al vectorului $\vec{MM'}(X = x' - x,\ Y = y' - y,\ Z = z' - z)$.

V. Unghiul θ a doi vectori $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{a}'(X',Y',Z')$, în coordonate perpendiculare, se obține dezvoltând produsul lor scalar,

$$\vec{a}\,.\,\vec{a} = |\vec{a}|\,.\,|\vec{a}'|\cos\theta, \quad |\vec{a}|\,.\,|\vec{a}'|\cos\theta = X.X' + Y.Y' + Z\,Z'.$$

Vectorii sunt *perpendiculari* când $X.X' + Y.Y' + Z.Z' = 0$.

14. Aplicații. I. Fie $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vectorii unitari de aceeaș lungime pe axele perpendiculare Oxy (Fig. 17). Să considerăm punctul M, la distanță de O egală cu lungimea comună a vectorilor unitari. Însemnând cu α unghiul (Ox, OM), $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ sunt proecțiile vectorului $\vec{OM}$ pe Ox și Oy. Deci

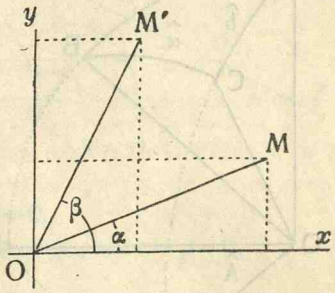


Fig. 17.

$$\vec{OM} = \vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cdot\sin\alpha. \tag{2}$$

Calculând patratul scalar al acestui vector, avem

$$(\vec{OM})^2 = (\vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cdot\sin\alpha)(\vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cdot\sin\alpha),$$

$$1 = \vec{i}\,.\,\vec{i}\cdot\cos^2\alpha + \vec{j}\,.\,\vec{i}\cdot\sin\alpha\cos\alpha + \vec{i}\,.\,\vec{j}\cdot\cos\alpha\sin\alpha + \vec{j}\,.\,\vec{j}\cdot\sin^2\alpha.$$

Cum $\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = 1$, $\vec{i}\,.\,\vec{j} = 0$, obținem $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, relația fundamentală din Trigonometria plană.

II. *Dezvoltarea* $\cos(\alpha - \beta)$. Fie $\vec{OM}$ și $\vec{OM'}$ (Fig. 17) doi vectori de lungime egală cu unitatea și α, β unghiurile axei Ox cu acești vectori. Să evaluăm produsul scalar $\vec{OM}\,.\,\vec{OM'}$. Avem

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=(\vec{i}\cdot\cos\alpha+\vec{j}\cdot\sin\alpha)\cdot(\vec{i}\cdot\cos\beta+\vec{j}\cdot\sin\beta),$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

relația cunoscută din Trigonometria plană.

III. *Relațiune între laturile și un unghi a unui triunghi.* Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Să ridicăm la patrat scalar egalitatea vec-
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. Avem

$$(\overrightarrow{AB})^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CB})^2+(\overrightarrow{CA})^2-2(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}).$$

Pătratele $(\overrightarrow{AB})^2$, $(\overrightarrow{CB})^2$, $(\overrightarrow{CA})^2$ sunt pătratele lungimilor c^2, a^2, b^2. Pentru a calcula produsul $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$, să luăm ca sensuri pozitive acelea ale vectorilor $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$; măsurile acestor vectori sunt numerile pozitive b și a; unghiul acestor vectori, neținând seamă de semn, este unghiul C al triunghiului. De unde, relația cunoscută

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

IV. *Formula fundamentală a Trigonometrii sferice.* Să considerăm (Fig. 18) unghiul triedru OA, OB, OC, ale cărui fețe $BOC=\hat{a}$, $COA=\hat{b}$, $AOB=\hat{c}$ sunt unghiuri pozitive (cuprinse între 0 și π). In fața OAB să ducem OB′ perpendiculară pe OA și de aceeaș parte cu OB. De asemenea, în fața OAC, să ducem OC′ perpendiculară pe OA și de aceeaș parte cu OC. In fiecare din aceste fețe, să luăm ca sensuri pozitive acelea ale unghiurilor (OA, OB′), (OA, OC′). In aceste condiții, avem $(OA,OB)=c+2k\pi$, $(OA,OC)=b+2k\pi$; unghiul dreptelor OB′, OC′ este unghiul plan corespunzător al diedrului A și de oarece este într'un plan neorientat, acest unghi este egal cu diedrul A, afară de semn.

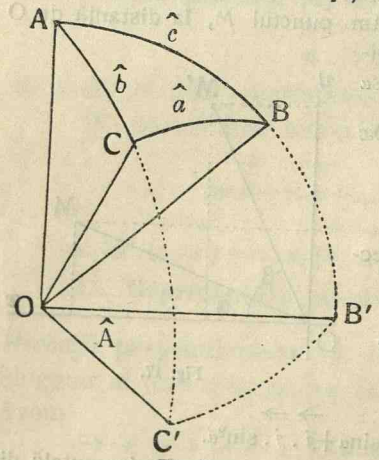


Fig. 18.

Să presupunem că punctele A, B, C, B′, C′ sunt situate la unitatea de distanță față de O. In cele două fețe orientate, (OA,OB′), (OA,OC′), observând (2), putem scrie egalitățile vectoriale analoage cu (2)

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\cos c+\overrightarrow{OB'}\sin c,$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cos b+\overrightarrow{OC'}\sin b.$$

Făcând produsul scalar al acestor două egalități, membru cu membru, și observând că $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=0$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC'}=0$, avem

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA})^2\cdot\cos c\cdot\cos b+(\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'})\cdot\sin c\cdot\sin b.$$

Dar, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos a$, $\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}=\cos A$; deci, obținem

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

formula fundamentală a Trigonometrii sferice (triunghiul sferic ABC fiind tras pe sfera cu centrul O și raza OA).

19. **Ecuația dreptei din plan.** I. O dreaptă D fiind definită prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ și direcția ei, să presupunem că această direcție este perpendiculară pe vectorul $\vec{n}(p, q)$. Punctul $M(x, y)$ va aparține dreptei date, dacă vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ și $\vec{n}$ sunt perpendiculari, adică

$$\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}=0, \tag{3}$$

care este altă formă de ecuație vectorială a unei drepte din plan.

Componentele vectorilor $\overrightarrow{M_0M}$ și $\vec{n}$ fiind $x-x_0$, $y-y_0$ și p, q, expresia analitică a acestui produs, în axe perpendiculare, este

$$(x-x_0)p+(y-y_0)q=0,$$

ecuația dreptei în coordonate carteziene.

O altă formă a ecuației vectoriale (3), se obține înlocuind pe $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}$ și este $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}.\vec{n}$, $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=s$, $s=\overrightarrow{OM_0}.\vec{n}=px_0+qy_0=\text{const.}$

II. Să presupunem că punctul M_0 este piciorul H (Fig. 19) al perpendicularei din O pe dreapta D și să însemnăm cu $OH=p$, $(Ox, OH)=\alpha$. Vectorii $\overrightarrow{HM}$ și $\overrightarrow{OH}(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ fiind perpendiculari, ecuația vectorială a dreptei D este $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OH}=0$, de unde

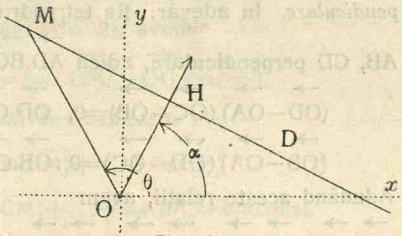


Fig. 19.

$$(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{OH}=0,$$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OH}-(\overrightarrow{OH})^2=0,$$

$$x.p\cos\alpha+y.q\sin\alpha-p^2=0,\quad x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

care este ecuația normală a dreptei date.

III. In coordonate polare, să însemnăm cu ρ și θ coordonatele polare ale unui punct M al dreptei date D (Fig. 19), $OH=p$, lungimea perpendicularei din O pe dreaptă și $\alpha=(Ox, OH)$. Dezvoltând produsul scalar $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OH}$, avem $(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{OH}=0$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{OH})^2$, $\rho.p.\cos(\theta-\alpha)=p^2$, sau

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p,$$

care este ecuația dreptei date în coordonate polare.

16. **Ecuația planului.** Să considerăm planul ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și având ca direcție a normalei pe aceea a vectorului $\vec{n}(p, q, r)$. $M(x, y, z)$ fiind un punct oarecare al planului ecuația vectorială a planului se obține scriind că vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ $(x-x_0, y-y_0\ z-z_0)$ și $\vec{n}$ sunt perpendiculari, adică

$$\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}=0,\quad \overrightarrow{OM}\,\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}.\vec{n},\quad \overrightarrow{OM}.\vec{n}=s,\quad s=\overrightarrow{OM_0}.\vec{n}=\text{const}$$

Dezvoltând, obținem

$$(x-x_0).p+(y-y_0).q+(z-z_0).r=0,$$

care este ecuația carteziană a planului.

Ecuația vectorială a planului este $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=s$, unde $s=\overrightarrow{OM_0}.\vec{n}=px_0+qy_0+rz_0$.

17. **Aplicații asupra dreptei și planului.** I. *Dacă un vector* $\vec{a}$ *este perpendicular pe vectorii* $\vec{b}$ *și* $\vec{c}$, *este de asemenea perpendicular pe orice vector* $\alpha.\vec{b}+\beta.\vec{c}$ *dintr'un plan paralel cu vectorii* $\vec{b}$ *și* $\vec{c}$. In adevăr, avem $\vec{a}.\vec{b}=0$, $\vec{a}.\vec{c}=0$, deci $\vec{a}.(\alpha\,\vec{b}+\beta\,\vec{c})=0$.

II. *Să se arate că dacă într'un tetraedru, două perechi de muchii opuse sunt perpendiculare, atunci și cea de a treia pereche de muchii opuse sunt perpendiculare.* In adevăr, fie tetraedrul ABCD, cu muchile opuse AD, BC și AB, CD perpendiculare, adică $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}=0$. Deci

$$(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0,\quad \overrightarrow{OD}\,\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0,$$

$$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=0,\quad \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0.$$

Adunând aceste relații, avem

$$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0,\quad (\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,\quad \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0,$$

ceea ce probează că și muchile BD, AC sunt perpendiculare.

III. *Într'un plan se consideră vectorul* AB *de lungime d* (*Fig. 20*). *Prin* A *și* B *se duc* $AA'=a$, $BB'=b$, *care fac unghiurile* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})=\alpha$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB'})=\beta$, *cu direcția lui* AB *Să se calculeze lungimna lui* A'B'. Observăm că $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$. Ridicând scalar la pătrat această egalitate vectorială, obținem

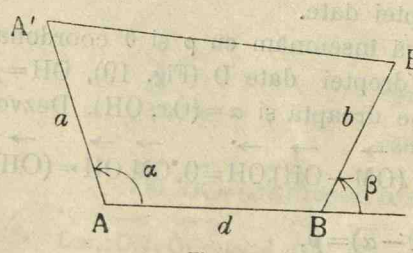


Fig. 20.

$$(\overrightarrow{A'B'})^2=(\overrightarrow{A'A})^2+(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{BB'})^2+$$
$$2.(\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB})+2.(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BB'})+$$
$$2.(\overrightarrow{BB'}).(\overrightarrow{A'A}).$$

Cum $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB})$ este unghiul măsurat în sens direct și format de direcțiile $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{AB}$ [adică unghiul cu care trebue rotit direct $\overrightarrow{A'A}$ (prelungirea lui A'A) ca să se aștearnă peste $\overrightarrow{AB}$], acest unghi este $180^0-\alpha$; de asemenea, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB'})=\beta$, $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{A'A})=(180^0-\alpha)+\beta=180^0-(\alpha-\beta)$. Deci, din egalitatea vectorială, deducem

$$(A'B')^2=a^2+d^2+b^2-2a\,d\cos\alpha+2d,b\cos\beta-2.b.a\cos(\alpha-\beta).$$

IV. *Fiind date n puncte* $M_1, M_2, \ldots M_n$ *și coeficienții* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *atașați la aceste puncte, să se afle locul punctelor* M *pentru care avem*

$$m_1\overline{MM_1}^2+m_2\overline{MM_2}^2+\cdots+m_n\overline{MM_n}^2=a=\text{const.}$$

Să presupunem mai întâi că $m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$. Sistemul de n puncte admite baricentrul G (No. 9). Avem egalitățile vectoriale

$$\overrightarrow{MM_i}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM_i},\ i=1, 2, \ldots n.$$

Făcând produsul scalar prin ele însăși ale celor două membre din aceste egalități, avem

$$(\overrightarrow{MM_i})^2=(\overrightarrow{MG})^2+(\overrightarrow{GM_i})^2+2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GM_i}.$$

Adunând aceste egalități după ce le-am înmulțit respectiv cu m_i, obținem

$$\Sigma m_i(\overrightarrow{MM_i})^2=(m_1+m_2+\ldots+m_n)(\overrightarrow{MG})^2+\Sigma m_i(\overrightarrow{GM_i})^2+2\overrightarrow{MG}\times\Sigma^{m_i}\overrightarrow{GM_i}.$$

Dar după proprietatea baricentrului (No. 9), avem

$$\Sigma m_i\overrightarrow{GM_i}=\Sigma m_i(\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OG})=\Sigma m_i.\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OG}\,\Sigma m_i=0,$$

astfel că din egalitatea vectorială de mai sus deducem

$$a=(m_1+\ldots+m_n)\overline{MG}^2+m_1\overline{GM_1}^2+\ldots+m_n\overline{GM_n}^2$$

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)\overline{MG}^2=a-(m_1\overline{GM_1}^2+\ldots+m_n\overline{GM_n}^2=k=\text{const.}$$

Deci MG=const., adică locul M este o sferă cu centrul G, reală sau imaginară după cum k și Σm_i sunt sau nu de același sem.

Să presupunem acum că $m_1+m_2+\ldots+m_n=0$. Să așezăm punctele M_i în două grupe, astfel că suma coeficienților fiecărei grupe să nu fie nulă, cum ar fi de ex., așezând într'o grupă toate punctele afectate de coeficienți pozitivi și în a doua grupă punctele de coeficienți negativi.

Să însemnăm cu $M_1, \ldots M_p$, punctele din prima grupă și cu $M_{p+1}, \ldots M_n$ pe cele din a doua. Dacă G' și G'' sunt baricentrele acestor grupe, avem, ca mai sus,

$$m_1\overline{MM_1}^2+\ldots+m_p\overline{MM_p}^2=(m_1+\ldots+m_p)\overline{MG'}^2+m\overline{G_1'M_1}^2+\ldots+m_p\overline{G'M_p}^2,$$

$$m_{p+1}\overline{MM_{p+1}}^2+\ldots+m_n\overline{MM_n}^2=(m_{p+1}+\ldots+m_p)\overline{MG''}^2+$$
$$m_{p+1}\overline{G''M}^2_{p+1}+\ldots+m_n\overline{G''M_n}^2.$$

Punând $m_1+\ldots+m_p=m$, atunci avem $m_{p+1}+\ldots+m_n=-m$, căci prin ipoteză, $m_1+\ldots+m_n=0$. Adunând membru cu membru egalitățile de mai sus,

avem

$$a = m(\overline{MG'}^2 - \overline{MG''}^2) + \text{const.},$$

de unde urmează că locul lui M este un plan perpendicular pe dreapta G'G''.

Produs vectorial.

18. **Produs vectorial.** Produsul vectorial sau exterior a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este un vector $\vec{n}$, perpendicular pe fiecare din cei doi vectori dați, orientat astfel ca triedrul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ să fie direct și al cărui modul este măsura arii paralelogramului cu laturile echipolente cu $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Această arie este egală cu produsul modulelor vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ prin valoarea absolută a sinusului unghiului celor doi vectori. Produsul vectorial este deci o mărime vectorială, și se notează cu

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Acest produs este nul când sau unul din vectori este nul, sau când vectorii sunt paraleli.

Momentul unei forțe în raport cu un punct fix, este un caz particular al produsului vectorial a doi vectori, unul din vectori fiind vectorul forță, iar celalt vectorul cu origina în punctul de aplicație al forței și cu extremitatea în punctul fix.

19. **Proprietăți.** I. *Schimbarea ordinei factorilor.* Dacă se permută doi factori ai produsului, se permută două axe ale triedrului corespunzător; pentru ca sensul triedrului să nu se schimbe, trebue schimbat sensul axei a treia a triedrului. Deci

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a},$$

adică produsul vectorial nu este comutativ.

II. *Produsul factorilor prin scalari* Inmulțind cu p și q vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, se înmulțesc cu p și q laturile paralelogramului corespunzător; deci valoarea absolută a arii se înmulțesc cu pq. Direcția vectorului produs nu s'a schimbat. Pentru a i vedea sensul, să observăm că înmulțind numai unul din factori (vectori) cu -1, se schimbă sensul uneia din axele triedrului corespunzător, și deci, pentru ca triedrul să nu-și schimbe sensul (care trebue să fie direct), trebue să schimbăm sensul axei a treia, a produsului vectorial, adică trebue a înmulți cu -1 produsul vectorial.

Deci

$$(-\vec{a}) \wedge \vec{b} = -\vec{a} \wedge \vec{b}, \quad (p.\vec{a}) \wedge (q.\vec{b}) = p.q(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

III. *Distributivitatea.* Fie $\vec{b'}$ proecţia ortogonală a vectorului $\vec{b}$ pe un plan (P) perpendicular pe $\vec{a}$ (Fig. 21). Planul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este perpendicular pe (P), este deci planul proectant al lui $\vec{b}$ pe (P), şi deci conţine $\vec{b'}$; prin urmare, produsele $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{a}\wedge\vec{b'}$ au ca direcţie comună perpendiculara la acest plan. Să observăm că aria paralelogramului construit cu $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egală cu aria dreptunghiului construit cu $\vec{a}$ şi $\vec{b'}$; deci, produsele $\vec{a}\wedge\vec{b}$ şi $\vec{a}\wedge\vec{b'}$ au acelaş modul. Mai mult, un observator aşezat dealungul oricărui din aceste produse, privind către vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, vede unghiurile $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a},\vec{b'})$ de acelaş sens, căci $\vec{b}$ este în interiorul unghiului drept $(\vec{a},\vec{b'})$; deci, produsele $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{a}\wedge\vec{b'}$ au şi acelaş sens. Aşa dar, produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu produsul vectorial al vectorului $\vec{a}$ cu cel ce se obţine proectând $\vec{b}$ pe un plan perpendicular pe $\vec{a}$.

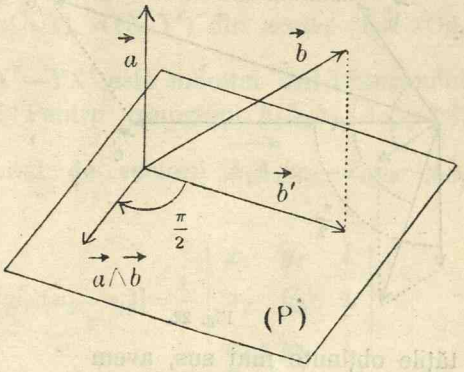


Fig. 21.

Se poate observa (Fig 21) că produsul $\vec{a}\wedge\vec{b}$ se obţine rotind $\vec{b'}$ în planul (P) de un unghi drept în sensul pozitiv şi apoi dilatând vectorul în raportul lui $|\vec{a}|$ către unitate.

Acestea fiind stabilite, să considerăm produsele $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{a}\wedge\vec{c}$. Insemnând cu $\vec{b'}$ şi $\vec{c'}$ proecţiile lui $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ pe un plan (P) perpendicular pe $\vec{a}$, avem $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b'}$, $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c'}$. Dar $\vec{b'}+\vec{c'}$ este proecţia vectorului sumă $\vec{b}+\vec{c}$, deci $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge(\vec{b'}+\vec{c'})$. Pentru a efectua aceste produse, va fi de ajuns de a roti vectorii $\vec{b'}$, $\vec{c'}$, $\vec{b'}+\vec{c'}$ (Fig. 22) de un unghi drept în sensul pozitiv faţă de $\vec{a}$ şi apoi a-i

dilata într'un raport egal cu $|\vec{a}|$. Cum $\vec{b'}+\vec{c'}$ este diagonala paralelogramului construit cu $\vec{b'}$ și $\vec{c'}$, se vede că rotația urmată de dilatare, transformă paralelogramul în altul având ca laturi $\vec{a}\wedge\vec{b'}$, $\vec{a}\wedge\vec{c'}$ și ca diagonală $\vec{a}\wedge(\vec{b'}+\vec{c'})$. Deci

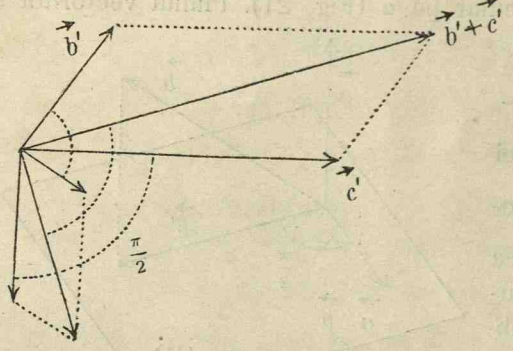


Fig. 22.

$$\vec{a}\wedge(\vec{b'}+\vec{c'})=\vec{a}\wedge\vec{b'}+\vec{a}\wedge\vec{c'}$$

și ținând seamă de egalitățile obținute mai sus, avem

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c},$$

de unde rezultă proprietatea distributivă a produsului vectorial.

In general, avem

$$(\vec{a}+\vec{b}+\ldots)\wedge(\vec{a_1}+\vec{b_1}+\ldots)=\vec{a}\wedge\vec{a_1}+\vec{b}\wedge\vec{a_1}+\vec{a}\wedge\vec{b_1}+\vec{b}\wedge\vec{b_1}+\ldots$$

20. **Reprezentare analitică.** Fie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vectorii unitari ai axelor perpendiculare $Oxyz$. Avem

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=0,\quad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i},$$
$$\vec{j}\wedge\vec{j}=0,\quad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j},$$
$$\vec{k}\wedge\vec{k}=0,\quad \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}.$$

Considerând vectorii $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{a'}(X',Y',Z')$, avem

$$\vec{a}\wedge\vec{a'}=(X.\vec{i}+Y.\vec{j}+Z.\vec{k})\wedge(X'.\vec{i}+Y'.\vec{j}+Z'.\vec{k})$$
$$=(YZ'-ZY').\vec{i}+(ZX'-XZ').\vec{j}+(XY'-YX').\vec{k}.$$

Deci, componentele vectorului produs sunt $L=YZ'-ZY'$, $M=ZX'-XZ'$, $N=XY'-YX'$.

21. **Aria unui triunghi.** Produsul vectorial $\vec{a}\wedge\vec{a'}$ având ca modul aria paralelogramului construit cu vectorii $\vec{a}$ și $\vec{a'}$, și componentele sale fiind $YZ'-ZY'$, $ZX'-XZ'$, $XY'-YX'$, urmează că pătratul ariei triunghiului format cu vectorii $\vec{a}$ și $\vec{a'}$ este

$$\frac{1}{4}[(YZ'-ZY')^2+(ZX'-XZ')^2+(XY'-YX')^2].$$

Considerând triunghiul $A_1A_2A_3$, $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$, atunci $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}(X=x_2-x_1, Y=y_2-y_1, Z=z_2-z_1)$, $\vec{a'}=\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, deci aflăm expresia carteziană a arii $A_1A_2A_3$.

In cazul a doi vectori $\vec{a}(X,Y)$, $\vec{a'}(X',Y')$ din același plan xOy, modulul produsului $\vec{a}\wedge\vec{a'}=XY'-YX'$ este îndoitul arii triunghiului arii format cu acești vectori. Pentru triunghiul $A_1A_2A_3$, $A_i(x_i, y_i)$, aria triunghiului $A_1A_2A_3$ format de vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1, y_2-y_1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1)$ este

$$\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

și se vede că această expresie este pozitivă, dacă un observator parcurge perimetrul triunghiului în sensul pozitiv, 1,2,3, adică brațul stâng al observatorului să rămâe în interiorul triunghiului.

Cum proecția $XY'-YX'=2S_z$ pe Oz a produsului vectorial am văzut că este îndoitul arii proecții pe planul xOy a arii triunghiului format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{a'}$ din spațiu, urmează că aria S a triunghiului din spațiu este date de $S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2$.

22. **Ecuația dreptei.** I. *Dreaptă din plan.* Fie $M(x,y)$ un punct al dreptei (D), ce trece prin punctul $A(x_0,y_0)$ și paralelă cu vectorul $\vec{a}(p,q)$ dus prin origina O. Ecuația vectorială a dreptei se obține scriind că produsul $\vec{a}\wedge\overrightarrow{AM}=0$, sau

$$\vec{a}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{a}\wedge\overrightarrow{OA},\quad \vec{a}\wedge\overrightarrow{OM}=b,\quad b=\vec{a}\wedge\overrightarrow{OA}=\text{const.}$$

Inlocuind produsele vectoriale cu expresiile lor analitice, obținem ecuația carteziană a dreptei

$$py-qx=py_0-qx_0.$$

II. *Dreptă din spațiu.* Fie $M(x, y, z)$ un punct al dreptei (D) ce trece prin punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ paralelă cu vectorul $\vec{a}(p, q, r)$ dus prin origina O. Ecuația vectorială a dreptei este

$$\vec{a}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{a}\wedge\overrightarrow{OA},\quad \vec{a}\wedge\overrightarrow{OM}=b,\quad (b=\vec{a}\wedge\overrightarrow{OA}=\text{const.}), \tag{4}$$

iar ecuațiile carteziene sunt

$$qz-ry=qz_0-ry_0,$$
$$rx-pz=rx_0-pz_0,$$
$$py-qx=py_0-qx_0.$$

ceuații de forma

$$qz-ry=l,$$
$$rx-pz=m,$$
$$py-qx=n,$$

cu condiția

$$pl+qm+rn=0.$$

23. **Normala la un plan definit prin două drepte.** $\vec{a}(p, q, r)$, $\vec{a'}(p', q', r')$ fiind doi vectori luați pe cele două drepte date, normala la plan este dată de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ sau $\vec{b}\wedge\vec{a}$ după sensul care se ia.

24. **Diviziunea geometrică** este operația care constă în aflarea vectorului $\vec{c}$, astfel că $\vec{a}$ și $\vec{b}$ fiind dați, să avem

$$\vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}. \tag{5}$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca $\vec{b}$ să fie perpendicular pe $\vec{a}$. Dacă această condiție este îndeplinită, se obține o primă soluție luând un vector $\vec{c_0}$ perpendicular pe planul $\vec{a}$, $\vec{b}$ (Fig. 23), astfel ca triedrul $\vec{c_0}, \vec{a}, \vec{b}$ să fie direct, și al cărui modul să fie cătul modulului lui $\vec{b}$ prin acela al lui $\vec{a}$, adică $\vec{b}=\vec{c_0}\wedge\vec{a}$. Insemnând cu c soluția generală, trebue să avem

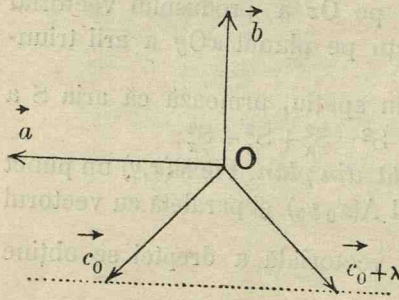


Fig. 23

$$\vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}=\vec{c_0}\wedge\vec{a}, \quad (\vec{c}-\vec{c_0})\wedge\vec{a}=0.$$

Deci $\vec{c}-\vec{c_0}$ trebue să fie paralel cu $\vec{a}$, adică de forma, $\lambda.\vec{a}$, astfel că soluția generală a acestei diviziuni geometrice, este

$$\vec{c}=\vec{c_0}+\lambda.\vec{a}.$$

Dacă $\vec{a}(p, q, r)$, $\vec{b}(l, m, n)$, $\vec{c_0}(X_0, Y_0, Z_0)$, $\vec{c}(X, Y, Z)$, sunt componentele vectorilor, din (5) obținem

$$rY-qZ=l, \quad pZ-rX=m, \quad qX-pY=n.$$

Pentru ca acest sistem să fie compatibil, trebue să avem $pl+qm+rn=0$, care este echivalentă cu condiția ca vectorii $\vec{a}$ și

$\vec{b}$ să fie perpendiculari. Presupunând că aceasta este verificată, sistemul are o infinitate de soluții, deduse din una din ele X_0, Y_0, Z_0 cu relațiile

$$X=X_0+\lambda p,\ Y=Y_0+\lambda q,\ Z=Z_0+\lambda r.$$

25. Aplicație. Identitatea lui Lagrange. Insemnând cu $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{b}(X',Y',Z')$ doi vectori ce fac unghiul θ, avem

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})^2=(\vec{a})^2\,(\vec{b})^2\sin^2\theta=(\vec{a})^2.(\vec{b})^2-(\vec{a})^2.(\vec{b})^2\cos^2\theta.$$

Dar $(\vec{a})^2.(\vec{b})^2\cos^2\theta$ este pătratul produsului scalar $\vec{a}\,.\,\vec{b}$. Deci

$$(6)\qquad (\vec{a}\wedge\vec{b})^2=(\vec{a})^2.(\vec{b})^2-(\vec{a}\,.\,\vec{b})^2.$$

Componentele vectorilor $\vec{a}\wedge\vec{b}$ și $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ fiind $YZ'-ZY'$, $ZX'-XZ'$, $XY'-YX'$, și XX', YY', ZZ', din egalitatea (6) deducem

$$(YZ'-ZY')^2+(ZX'-XZ')^2+(XY'-YX')^2=$$
$$(X^2+Y^2+Z^2)(X'^2+Y'^2+Z'^2)-(XX'+YY'+ZZ')^2,$$

care este identitatea lui Lagrange. Forma geometrică (6) este folositoare la multe aplicații ale calculului vectorial.

Produse compuse.

26. Produsul mixt $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$. I. Acest produs mixt este un scalar, produsul scalar al vectorului $\vec{a}$ cu vectorul $\vec{b}\wedge\vec{c}$. Componentele acestor vectori fiind $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{b}(X',Y',Z')$, $\vec{c}(X'',Y'',Z'')$, $\vec{b}\wedge\vec{c}=(Y'Z''-Z'Y'',\ Z'X''-X'Z'',\ X'Y''-Y'X'')$, avem

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c},=X(Y'Z''-Z'Y'')+Y(Z'X''-X'Z'')+Z(X'Y''-Y'X''),$$

care este dezvoltarea determinantului

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}.$$

II. Cum se poate permuta circular liniile unui determinant, fără a-i schimba valoarea, rezultă că se pot permuta circular vectorii produsului mixt

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Pe de altă parte, cum un determinant își schimbă semnul dacă se permută numai două linii, urmează

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=-\vec{a}(\vec{c}\wedge\vec{b})=\vec{c}.(\vec{b}\wedge\vec{a})=-\vec{b}.(\vec{a}\wedge\vec{c}).$$

27. **Volumul unui tetraedru.** Produsul mixt considerat admite următoarea interpretare geometrică. Să observăm că $\vec{b} \wedge \vec{c}$ are ca modul aria paralelogramului construit cu cei doi vectori. Produsul $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$ este deci egal cu produsul acestei arii cu proecția lui $\vec{a}$ pe $\vec{b} \wedge \vec{c}$, adică cu proecția lui $\vec{a}$ pe normala la planul $\vec{b}, \vec{c}$. Deci, valoarea absolută a produsului mixt este volumul paralelipipedului construit cu vectorii $\vec{a}\ \vec{b}, \vec{c}$. Semnul acestui produs va fi $+$ sau $-$, după cum $\vec{a}$ și $\vec{b} \wedge \vec{c}$ sunt sau nu de aceeaș parte a planului $\vec{b}, \vec{c}$, adică, după cum triedrele $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$ sunt sau nu de acelaș sens. Cum triedrul al doilea este direct, urmează că semnul va fi $+$ sau $-$, după cum triedrul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este direct sau nu. Deci, *produsul* $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$ *este volumul paralelipipedului construit cu vectorii* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, *luat cu semnul* $+$ *sau* $-$, *după cum triedrul* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *este direct sau nu.*

Prin urmare, volumul tetraedrului construit cu vectorii $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{b}(X',Y',Z')$, $\vec{c}(X'',Y'',Z'')$ este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului construit cu acești vectori, iar expresia sa carteziană este dată de relația (7),

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix},$$

luat cu semnul $+$ sau $-$, după cum triedrul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este direct este direct sau nu. In cazul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$, $A_i(x_i,y_i,z_i)$, volumul său este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului construit cu vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}(X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1\ Z=z_2-z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_4}(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1)$, și este egal cu

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

28. **Condiția ca trei vectori să fie în același plan.** Produsul $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ este nul, în următoarele cazuri. Sau unul din vectori este nul. Sau, dacă doi vectori sunt paraleli; în adevăr, presupunând, că am permutat circular factorii, astfel ca vectorii paraleli să fie $\vec{b}$ și $\vec{c}$, atunci $\vec{b}\wedge\vec{c}=0$ și deci produsul mixt este nul. In fine, presupunând că nici una din condițiile de mai sus nu este îndeplinită, produsul $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ este nul numai atunci când vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}\wedge\vec{c}$ sunt perpendiculari, adică $\vec{a}$ să fie perpendicular pe normala la planul $\vec{b}$, $\vec{c}$, de unde urmează că $\vec{a}$ este în planul $\vec{b}$, $\vec{c}$. Deci, dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt în același plan, avem $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=0$.

29. **Aplicație. Descompunerea unui vector $\vec{d}$ după muchiile unui triedru ale căror direcții sunt reprezentate de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.** Presupunând că $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt vectorii unitari pe cele trei axe ale triedrului, să însemnăm cu X, Y, Z componentele lui $\vec{d}$ pe aceste axe. Avem

$$\vec{a}.X+\vec{b}.Y+\vec{c}.Z=\vec{d}. \tag{8}$$

Pentru a găsi valorile scalarilor X, Y, Z, să înmulțim vectorial termenii acestei egalități cu $\vec{c}$ și avem

$$\vec{c}\wedge\vec{a}.X+\vec{c}\wedge\vec{b}.Y+\vec{c}\wedge\vec{c}.Z=\vec{c}\wedge\vec{d}.$$

Cum $\vec{c}\wedge\vec{c}.Z=0$, căci $\vec{c}$ și $\vec{c}.Z$ sunt paraleli, avem

$$\vec{c}\wedge\vec{a}.X+\vec{c}\wedge\vec{b}.Y=\vec{c}\wedge\vec{d}.$$

Să înmulțim scalar termenii acestei egalități cu $\vec{b}$. Obținem

$$\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a}.X)+\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{b}.Y)=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{d}).$$

Cum $\vec{b}$ și $\vec{b}.Y$ sunt paraleli, produsul $\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{b}.Y)=0$; deci

$$\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a}.X)=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{d}),\quad X=\frac{\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{d})}{\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})}=\frac{\vec{d}.(\vec{b}\wedge\vec{c})}{\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})},$$

In mod analog,

$$Y=\frac{\vec{d}.(\vec{c}\wedge\vec{a})}{\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})},\quad Z=\frac{\vec{d}.(\vec{a}\wedge\vec{b})}{\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})},$$

soluțiile fiind determinate, căci $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})\neq 0$, vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formând un triedru veritabil.

Problema tratată este şi rezolvarea ecuaţii (8) cu variabilele scalare X, Y, Z, care este posibilă dacă $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})\neq 0$. Presupunând că $\vec{a}=X_1.\vec{i}+Y_1.\vec{j}+Z_1.\vec{k}$, $\vec{b}=X_2.\vec{i}+Y_2.\vec{j}+Z_2.\vec{k}$, $\vec{c}=X_3.\vec{i}+Y_3.\vec{j}+Z_3.\vec{k}$, $\vec{d}=p.\vec{i}+q.\vec{j}+r.\vec{k}$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind vectorii unitari ai axelor $Oxyz$ perpendiculare, egalând coeficienţii lui $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ecuaţia (8) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

(10) $X_1.X+X_2.Y+X_3.Z=p$, $Y_1.X+Y_2.Y+Y_3.Z=q$, $Z_1.X+Z_2.Y+Z_3.Z=r$.

Exprimând în funcţie de proecţiile $X_1, Y_1, Z_1, \ldots$, relaţiile vectoriale (9), ne dau

$$X=\begin{vmatrix} p & q & r \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

care sunt soluţiile cunoscute ale sistemului (10) de ecuaţii lineare.

30. **Dublul produs vectorial** $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ I. Dacă $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{b}(X',Y',Z')$, $\vec{c}(X'',Y'',Z'')$, atunci proecţia pe axa Ox a acestui dublu produs vectorial este

$$Y(X'Y''-Y'X'')-Z(Z'X''-X'Z'')=X'(YY''+ZZ'')-X''(YY'+ZZ')=$$
$$X'(XX''+YY''+ZZ'')-X''(XX'+YY'+ZZ')=$$
$$X'.(\vec{a}.\vec{c})-X''.(\vec{a}.\vec{b}),$$

şi în mod analog pentru proecţiile pe Oy şi Oz; astfel că

(11) $$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}.(\vec{a}.\vec{b}).$$

Acest dublu produs vectorial este în planul ultimilor doi vectori şi este diferit de $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$; deci înmulţirea vectorială a vectorilor nu este asociativă.

II. Ţinând seamă de egalitatea (11), obţinem relaţia

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})+\vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})+\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=0.$$

III. Cu ajutorul acestui dublu produs, putem da soluţia $\vec{c}$ a diviziunei geometrice (No. 24), $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}$. Presupunând $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ perpendiculari, să găsim soluţia particulară a diviziunei, reprezentată de un vector perpendicular la $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, deci de forma $m.(\vec{b}\wedge\vec{a})$. Pentru a determina pe m, să înlocuim pe $\vec{c}$ în relaţia $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}$ şi avem

$$\vec{b}=\vec{a}\wedge[m.(\vec{b}\wedge\vec{a})]=m[\vec{b}.(\vec{a}.\vec{a})-\vec{a}.(\vec{a}.\vec{b})].$$

Cum vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt perpendiculari, urmează $\vec{a}.\vec{b}=0$, deci $\vec{b}=m.(\vec{a})^2.\vec{b}$. Cantitatea $m.(\vec{a})^2$ fiind un scalar, pentru ca această ultimă egalitate vectorială să aibă loc, trebue ca $m.(\vec{a})^2=1$, de unde $m=\frac{1}{(\vec{a})^2}$, iar soluţia particulară căutată este $m.(\vec{b}\wedge\vec{a})=\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{(\vec{a})^2}$.

Soluţia generală (No. 24) a diviziunei geometrice este

$$\vec{c}=\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{(\vec{a})^2}+\lambda.\vec{a}.$$

IV. Ca aplicaţie să considerăm produsul $(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d})$. Insemnând cu $\vec{u}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ şi permutând factorii, avem

$$(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d})=\vec{u}.(\vec{c}\wedge\vec{d})=\vec{c}.(\vec{d}\wedge\vec{u})=\vec{c}.[\vec{d}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})].$$

Aplicând produsului $\vec{d}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$ identitatea (11), avem

$$(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d})=\vec{c}[\vec{a}.(\vec{b}.\vec{d})-\vec{b}.(\vec{a}.\vec{d})]$$

$$(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d})=(\vec{a}\,\vec{c}).(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}\,\vec{d}).(\vec{b}\,\vec{c}).$$

Această egalitate conţine ca un caz particular identitatea lui Lagrange, făcând $\vec{c}=\vec{a}$, $\vec{d}=\vec{b}$.

3. **Aplicaţii. 1.** *Condiţia ca patru puncte* A_i, $i=1, 2, 3, 4$, *să fie în acelaş plan.* Pentru aceasta, va fi de ajuns a scrie că vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ sunt în acelaş plan, adică (No. 28)

$$\overrightarrow{A_1A_2}.(\overrightarrow{A_2A_3}\wedge\overrightarrow{A_3A_4})=0.$$

Scriind expresia analitică a acestui produs, găsim determinatul (7) (No. 26)

$$\begin{vmatrix} x_i-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \end{vmatrix}=0,$$

condiţia cartezianâ ca punctele A_i să fie în acelaş plan.

II. *Condiţia ca dreptele* AB, A'B' *să fie concurente,* se obţine scriind că vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sunt în acelaş plan.

32. **Distanţa de la un punct la o dreaptă din plan.** Să calculăm distanţa $SM=d$ de la punctul $S(x_1, y_1)$ la dreapta (D) definită de punctul $B(x_0, y_0)$ şi perpendiculară pe vectorul $\vec{n}(p,q)$ ce

trece prin punctul A, vectorul $\vec{n}$ având sensul pozitiv de la punctul A la dreapta (D). Să observăm că $\overrightarrow{SM}$ este un vector paralel cu $\vec{n}$, deci de forma $\vec{SM}=\varepsilon d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, ε fiind egal cu $+$ sau $-$, după cum vectorii $\vec{SM}$ și $\vec{n}$ sunt sau nu de același sens, adică după cum punctele A și S sunt de aceeaș parte sau de o parte și de alta a dreptei (D). Pe de altă parte, avem $\vec{SM}=\vec{OM}-\vec{OS}$, deci

$$\vec{OM}-\vec{OS}=\varepsilon d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Inmulțind scalar cu $\vec{n}$, obținem

$$\vec{OM}.\vec{n}-\vec{OS}.\vec{n}=\varepsilon d\frac{(\vec{n})^2}{|\vec{n}|},\quad \vec{OM}.\vec{n}-\vec{OS}.\vec{n}=\varepsilon d|\vec{n}|,$$

căci $(\vec{n})^2=|\vec{n}|^2$. Dar, ecuația vectorială a dreptei fiind (No. 15, I) $\vec{OM}.\vec{n}=\vec{OB}.\vec{n}$, relația precedentă devine $\vec{OB}.\vec{n}-\vec{OS}.\vec{n}=\varepsilon d|\vec{n}|$, care dă distanța d de la punctul S la dreapta (D). Scriind această relație vectorială sub formă carteziană, avem

$$x_0p+y_0q-(x_1p+y_1q)=\varepsilon d\sqrt{p^2+q^2},\quad d=\frac{x_0p+y_0q-(x_1p+y_1q)}{\varepsilon\sqrt{p^2+q^2}},$$

care dă distanța de la punctul $S(x_1,y_1)$ la dreapta $px+qy-(px_0+qy_0)=0$ ε fiind $+$ sau $-$, după cum punctele A și S sunt sau nu de aceeaș parte a dreptei (D).

33. **Distanța de la un punct** $S(x_1,y_1,z_1)$ **la un plan** (P) definit de punctul $B(x_0,y_0,z_0)$ și perpendicular pe vectorul $\vec{n}(p,q,r)$ ce trece prin A, vectorul $\vec{n}$ având sensul pozitiv de la punctul A la planul (P), este dată de o formulă analoagă,

$$\vec{OB}.\vec{n}-\vec{OS}.\vec{n}=\varepsilon d|\vec{n}|,\quad |\vec{n}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

ε fiind $+$ sau $-$, după cum punctele A și S sunt sau nu de aceeaș parte a planului dat.

34. **Distanța de la un punct la o dreaptă din spațiu.** Pentru a afla distanța $SH=d$ de la punctul $S(x_1,y_1,z_1)$ la dreapta (D), definită de punctul $A(a,b,c)$ și de parametrii directori (p,q,r), să con-

siderăm vectorul $\overrightarrow{AB}(p,q,r)$ și egalitatea vectorială $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OS}$. Dar modulul produsului $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{SA}$ este

$$|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{SA}|\,|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SA})| = |\overrightarrow{AB}|\,d = \sqrt{p^2+q^2+r^2}.d.$$

Proecțiile pe axele $Oxyz$ ale expresii $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OS}$ sunt

$$(qc-rb)-(qz_1-ry_1),\ (ra-pb)-(rx_1-pz_1),\ (pb-qa)-(py_1-qx_1),$$

iar pătratul modulului acestei cantități este suma pătratelor acestor proecții,

$$m^2=[q(c-z_1)-r(b-y_1)]^2+[r(a-x_1)-p(c-z_1)]^2+[p(b-y_1)-q(a-x_1)]^2,$$

și egalând aceste module, avem

$$d^2(p^2+q^2+r^2)=m^2,$$

care dă expresia distanței d de la punctul S la drepta (D).

35. **Intersecția a două plane.** Am văzut (No. 16) că ecuația unui plan care admite normala $\overrightarrow{n}$, este $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{OM}=s$. Să aflăm ecuația vectorială a dreptei de intersectie a planelor reprezentate de ecuațiile vectoriale

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{OM}=s,\quad \overrightarrow{n'}.\overrightarrow{OM}=s'. \tag{12}$$

Planele nefiind paralele, urmează că $\overrightarrow{n}$ și $\overrightarrow{n'}$ nu sunt paraleli. Vectorul $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$ paralel cu cele două plane, este paralel cu dreapta lor de intersecție, a cărei ecuație este deci de forma (4) (No. 22, II)

$$\overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'})=\overrightarrow{b},$$

$\overrightarrow{b}$ fiind un vector constant care trebue determinat. Pentru aceasta, să dezvoltăm primul membru după formula (11) (No. 30) și avem

$$\overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'})=\overrightarrow{n}.(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n'})-\overrightarrow{n'}.(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}).$$

Dar, punctul M aparține celor două plane, deci, ținând seamă de relațiile (12), egalitatea precedentă devine

$$\overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'})=\overrightarrow{n}.s'-\overrightarrow{n'}.s,$$

și este ecuația intersecții celor două plane.

Exprimând această ecuație în coordonate carteziene, obținem formulele care le-am deduce dacă am rezolva ecuațiile carteziene ale celor două plane.

36. **Lungimea perpendicularei comune la două drepte.** O dreaptă fiind definită de punctul A și paralelă cu $\overrightarrow{a}$, ecuația ei

vectorială este $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{a}$, sau $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{b}+\lambda.\overrightarrow{a}$. Să considerăm două drepte

$$(D)\ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{b}+\lambda.\overrightarrow{a},\quad (D')\ \overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{b'}+\lambda'.\overrightarrow{a'},$$

pe care să le presupunem neparalele, adică $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}\neq 0$. Dacă vectorul

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{b'}-\overrightarrow{b}+\lambda'.\overrightarrow{a'}-\lambda.\overrightarrow{a}$$

este simultan perpendicular pe $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{MM'}$ este perpendiculara comună la (D) și (D') și lungimea ei d este cea mai scurtă distanță a celor două drepte. Așa fiind, avem

$$\overrightarrow{MM'}=\varepsilon d.\frac{\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}}{|\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}|},\quad \overrightarrow{b'}-\overrightarrow{b}+\lambda'\overrightarrow{a'}-\lambda\overrightarrow{a}=\varepsilon d\frac{\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}}{|\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}|},$$

ε fiind $+1$ sau -1 după cum vectorii $\overrightarrow{MM'}$ și $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}$ sunt sau nu de același sens. Făcând produsul scalar al acestei egalități cu $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}$, și ținând seamă că

$$\overrightarrow{a'}.(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'})=0,\quad \overrightarrow{a}.(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'})=0,\quad (\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'})^2=|\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}|^2,$$

obținem

$$d=\varepsilon\frac{(\overrightarrow{b'}-\overrightarrow{b}).(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'})}{|\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{a'}|}.$$

Inlocuind cu valorile lor produsul mixt de la numărător și modulul produsului vectorial de la numitorul lui d, se obține expresia sa carteziană.

37. **Ecuațiile cercului și sferei.** Intr'un cerc sau o sferă, luând origina O în centrul C (Fig. 24), lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{u}$, dus din origină la suprafață este constantă și egală cu raza. Insemnând cu $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}$, relația

$$(\overrightarrow{OM})^2=(\overrightarrow{a})^2,\quad (\overrightarrow{u})^2=(\overrightarrow{a})^2$$

este ecuația cercului sau a sferei, după cum se consideră două sau trei dimensiuni.

Scriind această ecuație sub forma

$$(\overrightarrow{u})^2-(\overrightarrow{a})^2=0,\quad (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{a}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{a})=0,$$

rezultă (Fig. 24) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$, adică dreptele AM, BM sunt perpendiculare, ceea ce exprimă că suprafața considerată este locul puncte-

lor de unde se vede un diametru AB sub un unghi drept.

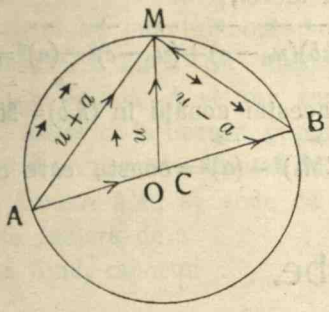


Fig. 24.

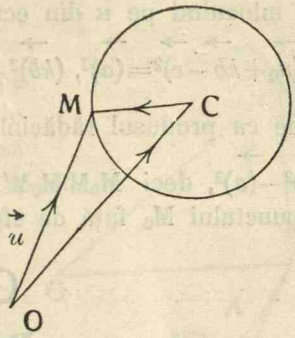


Fig. 25.

Dacă origina O (Fig. 25) nu este în centrul C al sferei, notând cu $\vec{c}=\vec{OC}$, atunci vectori $\vec{OM}-\vec{OC}=\vec{u}-\vec{c}$ şi $\vec{CM}=\vec{a}$ au aceeaş lungime şi deci

$$(\vec{u}-\vec{c})^2=(\vec{a})^2$$

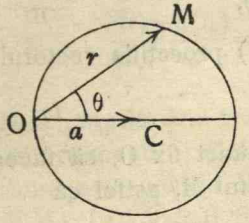
este ecuaţia sferei considerate. Dezvoltând, avem

$$(\vec{u})^2-2\vec{u}\cdot\vec{c}=(\vec{a})^2-(\vec{c})^2=\text{const.}$$

Dacă $(\vec{c})^2=(\vec{a})^2$, ceea ce are loc când origina este pe sferă, ecuaţia se reduce la $(\vec{u})^2-2\vec{u}\cdot\vec{a}=0$; exprimând analitic produsele scalare se vede că în coordonate polare plane (Fig. 26) ecuaţia cercului devine $OM=2a\cos\vartheta$, $r=2a\cos\vartheta$, iar în coordonate carteziene, ecuaţia sferei este

$$x^2+y^2+z^2=2a(lx+my+nz),$$

unde l,m,n sunt proecţiile unei raze date pe cele trei axe.



Eig. 26.

Se poate găsi proprietatea *puterei unui punct* M_0 *faţă de o sferă* cu centrul C (Fig. 27) $(\vec{u}-\vec{c})^2=(\vec{a})^2$, definind punctul M_0 prin vectorul $\vec{OM_0}=\vec{u_0}$ şi scriind ecuaţia unei drepte ce trece prin M_0 şi paralelă cu vectorul $\vec{b}$, sub forma $\vec{OM}=\vec{OM_0}+k\vec{b}$, k fiind un scalar, $\vec{b}$ un vector dat, sau $\vec{u}=\vec{u_0}+k.\vec{b}$. Punctele de intersecţie M ale

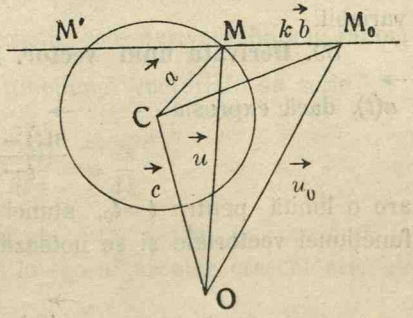


Fig. 27.

sferei cu dreapta corespund valorilor lui k date de ecuaţia ce se obţine înlocuind pe $\vec{u}$ din ecuaţia sferei,

$$(\vec{u_0}+k\vec{b}-\vec{c})^2=(a)^2,\ (kb)^2+2(kb)(\vec{u_0}-\vec{c})+(\vec{u_0}-\vec{c})^2-(a)^2=0.$$

Se vede ca produsul rădăcinilor acestei ecuaţii în $(k.b)=\vec{M_0M}$ este $(\vec{u_0}-\vec{c})^2-(a)^2$, deci $M_0M.M_0M'=(\vec{CM_0})^2-(a)^2=$ const., care este puterea punctului M_0 faţă de sferă.

Curbe.

Derivate.

38. **Generalităţi.** Se zice că o funcţiune vectorială $\vec{a}(t)$ de o variabilă scalară t este definită în intervalul (t_0, t_1), dacă există o regulă care face să corespunză la orice valoare a lui t cuprinsă în acest interval o determinare a vectorului $\vec{a}$, definită prin direcţia sa, sensul şi modulul său, afară de o echipolenţă.

Reprezentarea analitică vectorială a unei funcţiuni $\vec{a}(t)$ este

$$\vec{a}(t)=\vec{i}.X(t)+\vec{j}.Y(t)+\vec{k}.Z(t),$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind vectorii unitari, iar $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ proecţiile vectorului $\vec{a}(t)$ pe axele $Oxyz$.

Fiind dată funcţiunea $\vec{a}(t)$, luând un punct fix O, să facem să corespunză la fiecare valoare a lui t punctul M, astfel că

$$\vec{OM}=\vec{a}(t).$$

Când t variază, punctul M descrie în general o curbă (C), numită hodograful sau indicatoarea funcţiunei vectoriale sau a vectorului variabil.

39. **Derivata unui vector.** Fiind dată funcţiunea vectorială $\vec{a}(t)$, dacă expresia

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}$$

are o limită pentru $t=t_0$, atunci această limită se zice derivata funcţiunei vectoriale şi se notează cu

$$\vec{a}'_t(t_0),\ \frac{\vec{da}}{dt_0}.$$

Fie (C) (Fig. 28) hodograful funcțiunei $\vec{a}(t)$ și M_0 punctul corespunzător la valoarea t_0 a lui t. Să alegem pe hodograf o origină A și un sens de parcurs, astfel că la fiecare punct M să corespundă un număr s afectat de semn, măsura arcului AM; se vede că s este o funcție scalară de t.

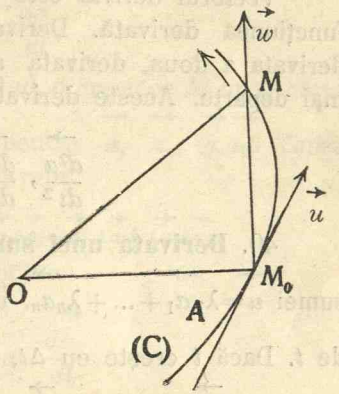


Fig. 28.

Așa fiind, raportul

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}=\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t-t_0}$$

este un vector așezat pe coarda M_0M și al cărui raport către vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este $\frac{1}{t-t_0}$. Să luăm pe M_0M vectorul unitar $\vec{w}$, îndreptat în sensul arcelor crescătoare pe hodograf [de la M_0 la M sau invers, după cum $s(t)$ este mai mare sau mai mic de cât $s(t_0)$]. Acest raport se scrie

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}=\vec{w}\,\frac{|M_0M|}{t-t_0}=\vec{w}\,\frac{|M_0M|}{s(t)-s(t_0)}\,\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0},$$

$|M_0M|$ însemnând măsura vectorului $\overrightarrow{M_0M}$ pe axa vectorului unitar $\vec{w}$. Dar, termenii $|M_0M|$ și $s(t)-s(t_0)$ sunt de același semn, și cum primul este coarda M_0M și al doilea arcul M_0M, limita raportului $|M_0M|:[s(t)-s(t_0)]$ tinde către 1 când M tinde către M_0, sau când $t-t_0$. La limită, $\vec{w}$ tinde către vectorul $\vec{u}$, de lungime egală cu 1, tangent la curba (C) în M_0 și dirijat în sensul arcelor crescătoare; limita raportului $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$, dacă există, este derivata lui s în raport cu t, pentru $t=t_0$. Deci, derivata funcțiunei vectoriale se scrie

$$(1)\qquad \frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{u}\,\frac{ds}{dt},\quad \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}=\vec{u}\,\frac{ds}{dt};$$

acest vector care reprezintă derivata este așezat pe tangenta la hodograf, tangenta fiind orientată în sensul arcelor crescătoare, iar măsura vectorului derivat este $\frac{ds}{dt}$, căci $|\vec{u}|=1$.

Vectorul derivat este din nou o funcţiune de variabila t, este funcţiunea derivată. Derivata acestei noi funcţiuni este numită derivata a doua, derivata acesteia se zice derivata a treia şi aşa mai departe. Aceste derivate succesive se notează

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{a}}{dt^3}, \ldots, \vec{a}''(t), \vec{a}'''(t), \ldots$$

40. **Derivata unei sume geometrice.** Să calculăm derivata sumei $\vec{u}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$, unde λ_i sunt scalari, iar $\vec{a}_i(t)$ funcţiuni de t. Dacă t creşte cu Δt, variaţia lui $\vec{u}$ are ca mărime vectorială

$$\Delta\vec{u}=\Sigma(\lambda+\Delta\lambda)(\vec{a}+\Delta\vec{a})-\Sigma\lambda\vec{a}=\Sigma\vec{a}\Delta\lambda+\Sigma(\lambda+\Delta\lambda)\Delta\vec{a}.$$

Divizând cu Δt şi trecând la limită, se obţine, ca în cazul funcţiunilor scalare,

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\Sigma\lambda\frac{d\vec{a}}{dt}+\Sigma\frac{d\lambda}{dt}\cdot\vec{a},$$

sau

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\lambda_1\frac{d\vec{a}_1}{dt}+\ldots+\lambda_n\frac{d\vec{a}_n}{dt}+\frac{d\lambda_1}{dt}\vec{a}_1+\ldots+\frac{d\lambda_n}{dt}\vec{a}_n.$$

In particular, însemnând cu $X(t), Y(t), Z(t)$ componentele unui vector $\vec{a}(t)$ după axele $Oxyz$ de vectori unitari $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, care sunt îndependenţi de t, avem

$$\vec{a}=i\vec{X}+j\vec{Y}+k\vec{Z}, \quad \frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{i}\frac{dX}{dt}+\vec{j}\frac{dY}{dt}+\vec{k}\frac{dZ}{dt}.$$

Deci, dacă într'un sistem de axe independente de t, un vector are componentele X,Y,Z, derivata sa geometrică are componentele

$$\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}.$$

Sau, *derivatele succesive ale proecţii unui vector pe o axă fixă sunt proecţiile derivatelor succesive ale acestui vector.*

41. **Derivata unui produs scalar.** Să considerăm vectorii $\vec{a}(X,Y,Z)$, $\vec{a}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ funcţiuni de t într'un sistem de axe independente de t. Produsul scalar

$$\vec{a}.\vec{a}_1=X.X_1+Y.Y_1+Z.Z_1$$

are ca derivată

$$X\frac{dX_1}{dt}+Y\frac{dY_1}{dt}+Z\frac{dZ_1}{dt}+X_1\frac{dX}{dt}+Y_1\frac{dY}{dt}+Z_1\frac{dZ}{dt},$$

sau

$$\frac{d(\vec{a}.\vec{a}_1)}{dt}=\vec{a}\frac{d\vec{a}_1}{dt}+\vec{a}_1\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Acest rezultat îl putem obține dând o creștere Δt lui t, căreia corespund creșterile $\Delta\vec{a}$, $\Delta\vec{a}_1$, $\Delta(\vec{a}\,\vec{a}_1)$ pentru $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}.\vec{a}_1$. Ținând seamă de proprietatea distributivității, avem

$$\Delta(\vec{a}\,\vec{a}_1)=(\vec{a}+\Delta\vec{a}).(\vec{a}_1+\Delta\vec{a}_1)-\vec{a}.\vec{a}_1=\vec{a}.\Delta\vec{a}_1+\vec{a}_1.\Delta\vec{a}+\Delta\vec{a}.\Delta\vec{a}_1.$$

Divizând cu Δt și trecând la limită, obținem

$$\frac{d(\vec{a}.\vec{a}_1)}{dt}=\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}_1}{dt}+\vec{a}_1\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}$$

42. **Derivata geometrică a unui produs vectorial.** Să calculăm derivata geometrică a produsului vectorial $\vec{a}\wedge\vec{b}$ pentru valoarea t_0 a lui t. Această derivată este limita pentru $t\to t_0$ (dacă există) a raportului

$$\frac{\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t)-\vec{a}(t_0)\wedge\vec{b}(t_0)}{t-t_0}.$$

Adăugând și scăzând $\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t_0)$, grupând termenii doi câte doi în baza proprietății distributivității (No 19, III), numărătorul se poate scrie

$$\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t)-\vec{a}(t_0)\wedge\vec{b}(t_0)=\vec{a}(t)\wedge[\vec{b}(t)-\vec{b}(t_0)]+[\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)]\wedge\vec{b}(t_0),$$

astfel că raportul considerat se scrie

$$\vec{a}(t)\wedge\frac{\vec{b}(t)-\vec{b}(t_0)}{t-t_0}+\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}\wedge\vec{b}(t_0).$$

Presupunând că funcțiunile $\vec{a}(t)$ și $\vec{b}(t)$ au derivate pentru $t=t_0$, atunci

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}\to\vec{a}'(t_0),\quad\frac{\vec{b}(t)-\vec{b}(t_0)}{t-t_0}\to\vec{b}'(t_0);$$

de altă parte, $\vec{a}(t)$ tinde către $\vec{a}(t_0)$ și $\vec{b}(t_0)$ rămâne constant pentru $t\to t_0$. Deci, la limită, pentru $t\to t_0$ avem

$$\vec{a}(t_0)\wedge\vec{b}'(t_0)+\vec{a}'(t_0)\wedge\vec{b}(t_0),$$

și în general

$$\frac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt}=\vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b}.$$

Se observă că în derivata produsului vectorial trebue conservată ordinea factorilor.

43. **Vector de direcţie fixă.** Fie $\vec{a}(t)$ o funcţe vectorială a cărei direcţie rămâne fixă. Să alegem pe această direcţie un sens pozitiv, adică un vector unitar $\vec{u}$; însemnând cu $f(t)$ măsura vectorului, avem

$$\vec{a}(t)=\vec{u}\,.\,f(t).$$

Luând derivata şi ţinând seamă că derivata (de direcţie şi modul constant) vectorului constant $\vec{u}$ este nulă, avem

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{u}.\frac{df}{dt}.$$

Deci, derivata unui vector de direcţie constantă este un vector de aceeaş direcţie care are ca măsură derivata măsurei vectorului.

Se poate obţine acest rezultat considerând hodograful şi observând că în acest caz hodograful vectorului variabil este o dreaptă şi luând pe acest hodograf ca origină punctul O, arcul OM este precis egal cu măsura vectorului.

44. **Vector de modul constant.** Să considerăm vectorul $\vec{a}(t)$ de direcţie variabilă, dar de modul constant,

$$|\vec{a}|=R=\text{const.}$$

Hodograful acestui vector este locul unui punct M care rămâne la o distanţă constantă R de origina; este deci o curbă trasă pe o sferă de centrul O şi raza R.

Avem $\vec{a}\,.\,\vec{a}=R^2$ şi luând derivata, obţinem

$$2\vec{a}\,.\,\frac{d\vec{a}}{dt}=0.$$

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\frac{d\vec{a}}{dt}$ fiind nul, urmează că derivata unui vector de modul constant este perpendicular pe acest vector.

Cum orice curbă trasă pe o sferă de raza R şi de centrul O poate fi considerată ca hodograful unui vector variabil de modul constant R, din proprietatea de mai sus rezultă că, în orice punct al unei curbe trasă pe o sferă, tangenta este perpendiculară pe raza ce trece prin acel punct.

45. **Vector de modul constant în plan.** Dacă vectorul $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, funcţiune de t, de modul constant R, rămâne într'un plan fix şi orientat (Fig. 29), hodograful, locul lui M, este un cerc de centru O şi raza R. Derivata lui $\vec{a}$ este aşezată pe tangenta în M la cerc, perpendiculară pe rază, iar măsura sa pe această tangentă, orientată în sensul arcelor crescătoare, este (No. 39) $\frac{ds}{dt}$. Arcul s al cercului se exprimă în funcţiune de unghiul θ al direcţii fixe OA, ce uneşte punctul O cu origina A a arcelor, cu direcţia vectorului $\overrightarrow{OM}$. Luând ca sens pozitiv al arcelor sensul de orientare al planului, avem $s=\text{arc}AM=R.\theta$, $\theta=(OA.OM)$,

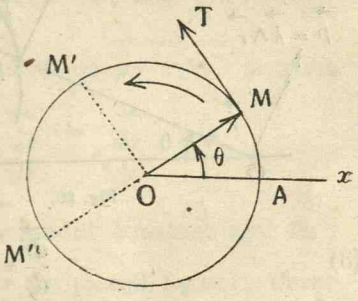


Fig. 29.

$$\frac{ds}{dt}=R.\frac{d\theta}{dt}.$$

Cum tangenta MT face cu raza OM unghiul $+\frac{\pi}{2}$, vecorul $\overrightarrow{OM'}$ paralel cu tangenta şi de măsură R pe MT se deduce din $\vec{OM}$ cu o rotaţie de $+\frac{\pi}{2}$; este deci egal cu $\vec{k}\wedge\overrightarrow{OM}$, unde $\vec{k}$ este vectorul unitar direct perpendicular pe plan. Aşa fiind, vectorul derivat este paralel cu $\overrightarrow{OM'}$, iar raportul lor este egal cu $\frac{d\theta}{dt}$, derivata lui θ. Observând că rezultatul este independent de t, urmează că, dacă într'un plan fix orientat, un vector $\vec{a}$ are un modul constant şi astfel că o direcţie fixă Ox face cu vectorul un unghi θ variabil, derivata vectoruiui este dată în funcţiune de aceea a unghiului cu relaţia

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=(\vec{k}\wedge\vec{a}).\frac{d\theta}{dt},\quad \theta=(\vec{Ox},\vec{a}). \tag{2}$$

46. **Derivate în coordonate polare.** In planul orientat, raportat la polul O şi axa polară Ox (Fig. 30), să considerăm vectorul variabil $\vec{a}$, definit prin componentele sale polare ρ şi θ. Să numim cu $\vec{r}$ vectorul unitar pe semidreapta OM de unghiul polar θ

(Fig. 30); avem $|\vec{r}|=1$, $(0x,\vec{r})=\theta$, $\vec{a}=\rho.\vec{r}$.

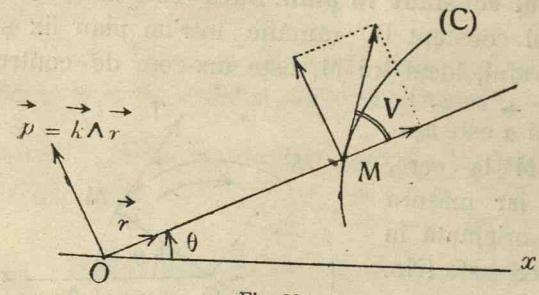


Fig. 30.

Derivând, obținem

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{r}.\frac{d\rho}{dt}+\rho.\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Dar $\vec{r}$ fiind un vector de modul constant, derivata sa este dată de formula (2) (No. 45),

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(\vec{k}\wedge\vec{r}).\frac{d\theta}{dt}, \tag{3}$$

$\vec{k}$ fiind vectorul direct perpendicular la planul figurei și cu modulul egal cu 1; deci înlocuind, avem

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{r}.\frac{d\rho}{dt}+(\vec{k}\wedge\vec{r}).\rho.\frac{d\theta}{dt}=\vec{r}.\frac{d\rho}{dt}+\vec{p}.\left(\rho.\frac{d\theta}{dt}\right), \tag{4}$$

unde $\vec{p}$ este vectorul $(\vec{k}\wedge\vec{r})$, de modul egal cu 1 (No. 45), direct perpendicular pe $\vec{r}$.

Deci, componentele derivatei vectorului $\vec{a}$ pe raza vectoare (semidreapta de unghi polar θ, de vector unitar $\vec{r}$) și pe semidreapta direct perpendiculară [de unghi polar $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$, de vector unitar $\vec{p}=\vec{k}\wedge\vec{r}$], sunt respectiv

$$\frac{d\rho}{dt},\quad \rho.\frac{d\theta}{dt}.$$

Derivând din nou egalitatea (4), obținem

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}=\frac{d\vec{r}}{dt}.\frac{d\rho}{dt}+\vec{r}.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{d\vec{p}}{dt}.\left(\rho.\frac{d\theta}{dt}\right)+\vec{p}.\left(\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}+\rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}\right). \tag{5}$$

Inlocuind pe $\frac{d\vec{r}}{dt}$ cu valoarea sa (3) și observăm că $\vec{p}$, fiind un vector de modul constant în plan, derivata sa este dată de formula (2) (No. 45).

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=(\vec{k}\wedge\vec{p}).\frac{d\theta}{dt}.$$

Dar $\vec{k} \wedge \vec{p}$ se deduce din $\vec{p}$ cu o rotaţie de $+\frac{\pi}{2}$, deci din $\vec{r}$ cu o rotaţie (Fig. 29) de $2\frac{\pi}{2}=\pi$, şi este egal cu $-\vec{r}$; deci $\frac{d\vec{p}}{dt}=-\vec{r}.\frac{d\theta}{dt}$.

Acest rezultat îl găsim şi direct, derivând pe $\vec{p}=\vec{k}\wedge\vec{r}$, şi avem

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(\vec{k}\wedge\vec{r})}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}\wedge\vec{r}+\vec{k}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{k}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt},$$

căci $\frac{d\vec{k}}{dt}=0$, de oarece vectorul $\vec{k}$ este de modul constant egal cu 1 şi de direcţia fixă, direct perpendicular pe planul figurei; observând (3), avem

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{r})\frac{d\theta}{dt}. \tag{6}$$

şi ţinând seamă de formula (11) (No. 30, I), $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$, obţinem

$$\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{r})=\vec{k}(\vec{k}.\vec{r})-\vec{r}.(\vec{k}.\vec{k})=-\vec{r},$$

căci $\vec{k}.\vec{r}=0$, vectorii fiind perpendiculari, şi $\vec{k}.\vec{k}=(\vec{k})^2=|\vec{k}|^2=1$.

Formula (6) devine $\frac{d\vec{p}}{dt}=-\vec{r}.\frac{d\theta}{dt}$, iar (5)

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt}=\vec{r}\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+\vec{p}\left(\rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Am obţinut pentru $\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$ o expresie ineară în $\vec{r}$ şi $\vec{p}$, vectorii unitari respectiv pe raza vectoare şi raza direct perpendiculară. Deci, componentele derivatei a doua a vectorului $\vec{a}$, după raza vectoare şi raza direct perpendiculară, sunt

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

47. **Vector derivat nul.** Derivata proecţii unui vector fiind (No. 40) proecţia derivatei acelui vector, urmează că, dacă derivata vectorului a este nulă, şi derivata proecţii sale pe o axa oarecare este nulă; deci, această proecţie, care este o funcţiune sca-

lară, este o constantă şi prin urmare şi funcţiunea vectorială este o constantă.

Aşa fiind, să considerăm un vector, funcţiune de o variabilă t, $\vec{a}(t)$, paralel cu derivata sa, adică

$$\vec{a}(t) \wedge \vec{a}'(t) = 0 \tag{7}$$

Insemnând cu $\vec{u}(t)$ vectorul unitar pe direcţia lui $\vec{a}(t)$, să presupunem că $\vec{a}(t) = f(t) \cdot \vec{u}(t)$. Derivând, avem

$$\vec{a}'(t) = f'(t) \cdot \vec{u}(t) + f(t) \cdot \vec{u}'(t).$$

Făcând produsul vectorial cu $\vec{a}(t)$, şi ţinând seamă de condiţia (7) de paralelism, obţinem

$$\vec{a}(t) \wedge \vec{a}'(t) = [f(t) \cdot \vec{u}(t)] \wedge [f'(t)\ \vec{u}(t)] + f(t) \cdot \vec{u}(t) \wedge [f(t) \cdot \vec{u}'(t)],$$

$$0 = f(t) \cdot \vec{u}(t) \wedge [f(t) \cdot \vec{u}'(t)], \tag{8}$$

căci $[f(t) \cdot \vec{u}(t)] \wedge [f'(t) \cdot \vec{u}(t)] = 0$, aceşti vectori fiind paraleli. Relaţia (8) devine

$$f^2 t)\,(\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0.$$

Cum vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sunt (No. 44) (căci $|u| = 1$) perpendiculari, produsul lor vectorial nu poate fi nul decât dacă $\vec{u}'$ este egal cu zero, deci $\vec{u}$ constant, adică direcţia vectorului şi prin urmare şi aceea a lui $\vec{a}$ rămâne aceeaş Aşa dar, dacă un vector este paralel cu vectorul derivat al său, acest vector are o direcţie fixă.

48. **Primitive.** Se numeşte primitiva unei funcţiuni vectoriale $\vec{a}(t)$ orice funcţiune admitând $\vec{a}(t)$ ca derivată, sau soluţia ecuaţii diferenţiale

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{a}(t).$$

Insemnând cu $\vec{A}\,t)$ una din aceste soluţii, cea generală este

$$\vec{y} = \vec{A}(t) + \vec{C},$$

$\vec{C}$ fiind un vector constant arbitrar.

Ca şi la funcţiunile scalare, avem

$$\int [\vec{a}(t) + \vec{b}(t)]\,dt = \int \vec{a}(t)\,dt + \int \vec{b}(t)\,dt,$$

$$\int \vec{a}(t)\,dt = \int \vec{a}[f(u)] \cdot f'(u) \cdot du,\ t = f(u).$$

Insemnând cu $A(t)$ o primitivă a lui $\vec{a}$, avem

$$\int_{t'}^{t''} \vec{a}(t).dt = \vec{A}(t'') - \vec{A}(t').$$

Curbe plane.

49. Tangenta la o curbă plană. I. Fie M un punct al unei curbe (C) (Fig. 31). Vectorul $\vec{OM}$ și coordonatele (x,y) ale punctului M sunt funcțiuni de parametrul t. Curba (C) este hodograful lui $\vec{OM}$ funcțiune vectorială de t,

$$\vec{OM} = \vec{i}.x + \vec{j}.y.$$

Vectorul

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{i}.\frac{dx}{dt} + \vec{j}.\frac{dy}{dt}$$

este pe tangenta în M și are ca proecții $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Deci $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, sau mai simplu, (dx, dy) sunt parametrii directori ai acestei tangente; $\frac{dy}{dx}$ este coeficientul unghiular al tangentei.

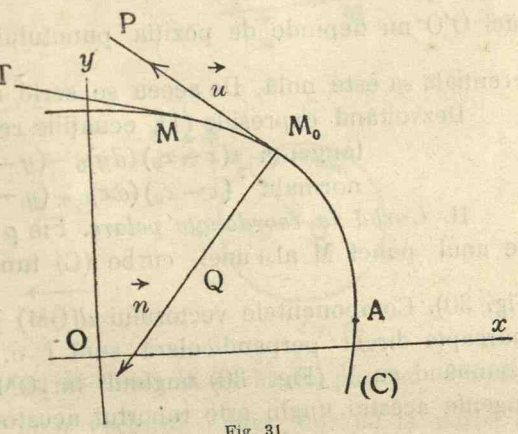


Fig. 31.

Cum măsura vectorului derivat (No. 39) este $\frac{ds}{dt}$, se vede că $|d(\vec{OM})|$ este egal cu valoarea absolută a lui ds. Ridicând scalar la pătrat, avem $(\vec{i}.\vec{j}=0)$

$$ds^2 = [d(\vec{OM})]^2 = dx^2 + dy^2.$$

Luând arcul s ca variabilă, $s=t$, derivata $\frac{d(\vec{OM})}{ds}$ este egală cu vectorul unitar $\vec{u}$ pe tangentă, iar $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sunt cosinusurile directoare ale tangentei.

Insemnând cu P şi Q respectiv câte un punct oarecare al tangentei şi normalei în M_0 (Fig. 31), ecuaţiile lor vectoriale sunt

(1) tangenta $\overrightarrow{M_0P} \wedge d(\overrightarrow{OM})_{M_0} = 0$, normala $\overrightarrow{M_0Q} . d(\overrightarrow{OM})_{M_0} = 0$,

indicele M_0 arătând că trebue luate valorile derivatelor sau diferenţialelor în punctul M_0.

Trebue observat că diferenţialele nu se schimbă dacă se ia altă origină O′ în locul lui O. In adevăr, avem

$$d(\overrightarrow{O'M}) = d(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) = d(\overrightarrow{O'O}) + d(\overrightarrow{OM}) = d(\overrightarrow{OM}),$$

căci $\overrightarrow{O'O}$ nu depinde de poziţia punctului M pe curbă şi deci diferenţiala sa este nulă. De aceea se scrie uneori $d\overrightarrow{M}$ în loc de $d(\overrightarrow{OM})$.

Dezvoltând expresiile (1), ecuaţiile respective carteziene, sunt

tangenta $(x-x_0)(dy)_0 - (y-y_0)(dx)_0 = 0$,

normala $(x-x_0)(dx)_0 + (y-y_0)(dy)_0 = 0$.

II. *Curbă în coordonate polare.* Fie ρ şi θ coordonatele polare ale unui punct M al unei curbe (C) funcţiuni de parametrul θ (Fig. 30). Componentele vectorului $d(\overrightarrow{OM})$ pe raza vectoare şi semidreapta direct perpendiculară sunt (o. 46) respectiv $(d\rho, \rho d\theta)$. Insemnând cu V (Fig. 30) unghiul lui OM cu tangenta la curbă, tangenta acestui unghi este raportul acestor componente,

$$tgV = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

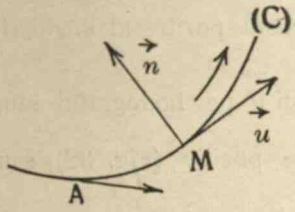
Modulul lui $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ fiind (No. 39) egal cu acela al lui $\frac{ds}{dt}$, urmează că modulul lui $d(\overrightarrow{OM})$ este egal cu ds, deci

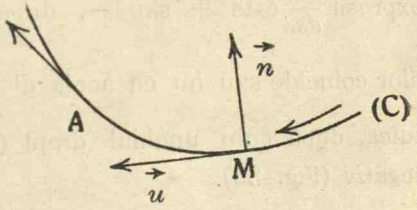
$$ds^2 = [d(\overrightarrow{OM})]^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 . (d\theta)^2,$$

care este expresia arcului în coordonate polare.

50. **Curbura unei curbe plane.** Fie M un punct al unei curbe plane (C) (Fig. 32), pe care s'a ales punctul A ca origină a arcelor crescătoare. Luăm ca parametru variabil arc $AM = s$, avem (No. 39) $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds} = \overrightarrow{u}$, u fiind vectorul unitar pe tangenta în M. Vectorul $\overrightarrow{u}$ având modulul constant, derivata sa, $\frac{d\overrightarrow{u}}{ds}$, este (No. 44) normal la $\overrightarrow{u}$, deci normal la curbă.

Modulul vectorului $\frac{\vec{du}}{ds}$ se zice curbura în punctul M; inversa curburei este raza de curbură R în acest punct; sensul vectorului





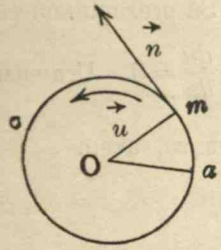


Fig. 32.

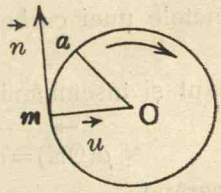


Fig. 33.

$\frac{\vec{du}}{ds}$ este sensul curburei pe normala la curbă în punctul considerat. Aşa fiind, însemnând cu $\vec{n}$ vectorul unitar normal la curbă în sensul curburei, avem

$$\frac{\vec{du}}{ds} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2} = \vec{n} \cdot \frac{1}{R}, \quad R > 0.$$

Sensul curburei este independent de sensul luat pentru arce pe curba (C) şi coincide în fiecare punct cu sensul concavităţii curbei. In adevăr, să considerăm cazurile când luăm pe curba (C) cele două sensuri de parcurs, în primul, M fiind posterior originei A (Fig. 32) şi în al doilea, M anterior originei A (Fig. 33). Indicatoarele vectorilor $\vec{u}$ sunt cercuri de raza 1 parcurse în sensuri opuse. Vectorii $\vec{u}$ fiind de asemenea de sensuri contrare, rezultă că derivatele lor sunt egale, paralele şi de acelaş sens.

Să însemnăm cu σ arcul indicatoarei vectorului $\vec{u}$, socotit în sensul pozitiv al unghiurilor începând de la origina a, care corespunde originei A a curbei (C); σ este măsurat de unghiul $(\vec{Oa}, \vec{u})$ şi modulul derivatei lui $\vec{u}$ este (No. 45)

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \frac{1}{R}.$$

$d\sigma$ se zice *unghi de contigență* și este diferențiala unghiului unei axe fiixe OA cu tangenta la curbă în punctul variabil M. Semnul expresii $\frac{d\sigma}{ds}$ este $+$ sau $-$, după cum sensul pozitiv al unghiurilor coincide sau nu cu acela al variației lui $\vec{u}$ pe hodograful său, adică, după cum unghiul drept $(\vec{u}, \vec{n})$ este pozitiv (Fig. 32) sau negativ (Fig. 33).

Am presupus până acum că $\frac{du}{ds} \neq 0$. Să presupunem că pentru toate punctele unei curbe avem $R \to \infty$, $\frac{du}{ds} = 0$. Urmează că $\vec{u}$ este constant și însemnând cu $\vec{u_0}$ valoarea sa, avem

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{u_0}.ds, \quad |\vec{u_0}| = 1,$$

de unde, integrând,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u_0}.s + \vec{v_0},$$

$\vec{u_0}$ și $\vec{v_0}$ fiind vectori fiçși. Așa dar, arcul de curbă este (No. 6) o dreaptă.

51. **Triedrul lui Frenet.** Să însemnăm prin $\vec{k}$ vectorul unitar direct perpendicular (No. 23) la planul figurei pe care să-l presupunem orientat. Având în vedere semnul expresii $\frac{d\sigma}{ds}$, avem

$$\frac{1}{R} = \varepsilon \frac{d\sigma}{ds},$$

ε fiind egal cu $+1$ sau -1, adică având același semn ca și $\frac{d\sigma}{ds}$, după cum unghiul drept $(\vec{u}, \vec{n})$ este pozitiv sau negativ.

Să considerăm triedrul tridreptunghic format de vectorii unitari $\vec{u}$, $\vec{n}$ și vectorul unitar direct perpendicular $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{n} = \varepsilon.\vec{k}$. Acesta este triedrul lui Frenet corespunzător punctului M al curbei (C). Să studiem variația vectorilor unitari ai muchilor acestui triedru. Am văzut (No. 50) că

$$d\vec{u} = \vec{n}.\frac{1}{R}ds.$$

Vectorul de modul constant $\vec{b}$ este echipolent cu el însuşi dealungul arcului considerat al curbei (C), unde ε îşi păstrează semnul (adică unde curbura sau concavitatea nu-şi schimbă sensul), deci (No. 43, 44) $\vec{db}=0$. Pentru $\vec{n}$, avem $\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{u}=\varepsilon.\vec{k}\wedge\vec{u}$; diferenţiând şi ţinând seamă că $\vec{b}$ este constant, avem

$$\vec{dn}=\vec{b}\wedge\vec{du}=\vec{b}\wedge\vec{n}\cdot\left(\frac{1}{R}\cdot ds\right)=-\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{R}\cdot ds\right).$$

Avem deci formulele lui Frenet pentru curbele plane

$$\vec{d(OM)}=\vec{u}.ds,\quad \vec{du}=\vec{n}.\frac{1}{R}ds,\quad \vec{dn}=-\vec{u}.\frac{1}{R}ds,\quad \vec{db}=0.$$

52. **Expresiunea curburei.** I. M fiind un punct al unei curbe definită parametric, avem $\vec{d(OM)}=\vec{u}.ds$.

$$\vec{d^2(OM)}=\vec{u}\,d^2s+\vec{(du)}.ds.$$

Inlocuind pe $\vec{du}$ prin valoarea sa, $\vec{du}=\vec{n}.\frac{1}{R}ds$, obţinem

$$\vec{d^2(OM)}=\vec{u}.d^2s+\vec{n}\,\frac{1}{R}.(ds)^2.$$

ectuând produsul vectorial (exterior), avem

$$E\equiv\vec{d(OM)}\wedge\vec{d^2(OM)}=\vec{u}.ds\wedge[\vec{u}.d^2s+\vec{n}.\frac{1}{R}(ds)^2],$$

$$E=(\vec{u}.ds)\wedge(\vec{u}.d^2s)+(\vec{u}.ds)\wedge[\vec{n}.\frac{1}{R}(ds)^2]=(\vec{u}\wedge\vec{n}).\frac{1}{R}.(ds)^3=\vec{k}\varepsilon.\frac{1}{R}(ds)^3,$$

căci $(\vec{u}.ds)\wedge(\vec{u}.d^2s)=0$. Deci

$$\vec{d(OM)}\wedge\vec{d^2(OM)}=\vec{k}\varepsilon.\frac{1}{R}(ds)^3.$$

Numind măsura acestui produs raportul său prin vectorul unitar $\vec{k}$, expresia precedentă devine

(3) $$\text{măsura}\,[\vec{d(OM)}\wedge\vec{d^2(OM)}]=\varepsilon\frac{1}{R}(ds)^3.$$

Valoarea lui R se obţine luând modulele celor doi membrii din expresia (2); deci (1)

(1) Inlocuind $\vec{d(OM)}$ cu $\vec{dM}$, putem scrie

$$R=\frac{|\vec{dM}|^3}{|\vec{d(M)}\wedge\vec{d^2M}|}.$$

(4) $$R=\frac{|\overrightarrow{d(OM)}|^3}{|\overrightarrow{d(OM)}\wedge\overrightarrow{d^2(OM)}|}.$$

II. *Expresia carteziană a curburei.* Să însemnăm cu (x, y) coordonatele unui punct M al curbei și cu x', y', x'', y'' derivatele lor de ordinul întâi și al doilea în raport cu parametrul t. Dezvoltând (No. 20) produsul exterior, care este numitorul expresii (4), obținem

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|}.$$

Luând pe x ca variabilă, avem $x'=1$, $x''=0$,

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Luând arcul s ca variabilă, curbura este (No. 50) modulul expresii $\frac{\overrightarrow{d^2(OM)}}{ds^2}=\vec{n}.\frac{1}{R}$. Inlocuind (No. 49) $\overrightarrow{OM}=\vec{i}.x+\vec{j}.y$, avem

$$\frac{\overrightarrow{d^2(OM)}}{ds^2}=\vec{i}.\frac{d^2x}{ds^2}+\vec{j}.\frac{d^2y}{ds^2},\ \vec{i}.\frac{d^2x}{ds^2}+\vec{j}.\frac{d^2y}{ds^2}=\vec{n}.\frac{1}{R}.$$

Egalând pătratele modulelor, obținem

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Observare. Să observăm că $x'y''-y'x''$ este măsura (3) a produsului vectorial divizată cu $(dt)^3$; deci

$$x'y''-y'x''=\varepsilon.\frac{1}{R}.\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Sensul lui s și t variază în același sens, astfel că $\frac{ds}{dt}>0$. Deci, semnul acestei expresii depinde de acela al lui ε. Așa dar, $(x'y''-y'x'')$ este pozitivă sau negativă, după cum tangenta la curbă, în sensul valorilor crescătoare ale lui t, și normala, dirijată în sensul curbei formează un unghi drept pozitiv sau negativ (în raport cu unghiul axelor). Acest semn dă sensul concavității curbei.

III. *Expresia curburei în coordonate polare.* Avem (No. 46)

$$\overrightarrow{d(OM)}=\vec{r}.d\rho+\vec{p}.(\rho d\theta),$$

$$\overrightarrow{d^2(OM)}=\vec{r}.[d^2\rho-\rho(d\theta)^2]+\vec{p}.(\rho.d^2\theta+2.d\rho.d\theta),$$

$$\overrightarrow{d(OM)}\wedge\overrightarrow{d^2(OM)}=(\vec{r}\wedge\vec{p}).[\rho.d\rho.d^2\theta+2(d\rho^2.d\theta-\rho.d^2\rho.d\theta+\rho^2.(d\theta)^3],$$

unde $\vec{r}\wedge\vec{p}=-\vec{p}\wedge\vec{r}$, $\vec{r}\wedge\vec{r}=0$, $\vec{p}\wedge\vec{p}=0$, $\vec{r}$ şi $\vec{p}$ fiind vectorii unitari direct perpendiculari, iar $\vec{r}\wedge\vec{p}=\vec{k}$. Luând modulele, avem

$$|\vec{d}(\overrightarrow{OM})|^2=(d\rho)^2+(\rho.d\theta)^2,$$

$$|\vec{d}(\overrightarrow{OM})\wedge\vec{d}^2(\overrightarrow{OM})|=|\rho.d\rho.d^2\theta+2.(d\rho)^2.d\theta-\rho.d^2\rho.d\theta+\rho^2(d\theta)^3|.$$

Inlocuind diferenţialele cu derivate, expresia (4) devine

$$R=\frac{(\rho'^2+\rho^2.\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho.\rho'.\theta''+2\rho'^2.\theta'-\rho.\rho''.\theta'+\rho^2.\theta'^3|}.$$

Dacă se ia unghiul polar θ ca variabilă, avem $\theta'=1$, $\theta''=0$, deci

$$R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2+2\rho'^2-\rho.\rho''|}.$$

53. Poziţia unei curbe în vecinătatea unuia din punctele sale. I. *Punct ordinar.* Să considerăm o ramură de curbă (C), definită parametric, în vecinătatea unui punct al său M_0, prin relaţia $\vec{OM}=\vec{a}(t)$ şi că în vecinătatea valorei t_0 corespunzătoare lui M_0, funcţiunea $\vec{a}(t)$ admite o dezvoltare după puterile lui $(t-t_0)$. Punând $t-t_0=\theta$, se vede că nu se schimbă valorile derivatelor pentru $t=t_0$ sau pentru $\theta=0$. Deci, pentru uşurinţă, putem presupune $t_0=0$ şi punând $\vec{a}_0^{(i)}=\vec{a}^{(i)}(0)$ (valoarea derivatei de ordinul i pentru $t=0$), fie că avem

$$(5)\qquad \vec{OM}=\vec{a}(t)=\vec{a}_0+\frac{t}{1}\cdot\vec{a}_0'+\frac{1}{2'}\cdot t^2.\vec{a}_0''+\ldots+\frac{1}{p!}\cdot\vec{a}_0^{(p)}+t^p.\vec{\epsilon}(t),$$

unde funcţiunea vectorială $\vec{\epsilon}(t)$ este infinit mic în raport cu t şi că admite derivate în vecinătatea lui $t=0$.

Zicem că *punctul* M_0, corespunzător lui $t=0$, este *simplu*, dacă $\vec{a}_0'$ este un vector diferit de zero. In acest caz, mărginind dezvoltarea lui $\vec{OM}$ la primii doi termeni, avem

$$\vec{OM}=\vec{a}_0+t.\vec{a}_0'+t.\vec{\epsilon}(t),$$

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\vec{a}_0'+\vec{\epsilon}(t)+t.\vec{\epsilon}'(t)=\vec{a}_0'+\vec{\epsilon}_1(t).$$

Ridicând ultima egalitate la pătrat, avem

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left[\frac{d(\vec{OM})}{dt}\right]^2=(\vec{a}_0')^2+\eta(t),$$

vectorul $\vec{\epsilon}_1$ şi scalarul η fiind ca şi $\vec{\epsilon}(t)$ infiniţi mici în raport cu t. De unde

$$s=\text{arc}M_0M=\int_0^t\sqrt{(\vec{a}_0')^2+\eta(t)}.dt,$$

şi putem găsi şi funcţiunea inversă $t=f(s)$, căci dezvoltarea lui s începe cu $|\vec{a_0'}|.t$ şi avem $\left(\frac{ds}{dt}\right)_0=\vec{a_0'}\neq 0$, tocmai condiţia cerută pentru existenţa funcţiunei implicite.

Pentru a găsi curbura în punctul simplu M_0, să observăm (No. 39 şi 50) că vectorul unitar $\vec{u_0}$ pe tangentă este

$$\vec{u_0}=\left[\frac{d(\vec{OM})}{ds}\right]_0=\vec{a_0'}\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)_0=\frac{\vec{a_0'}}{|\vec{a_0'}|}.$$

Aplicând formula (?) (No. 52), pentru punctul $M_0(t=0)$, avem

$$\vec{a_0'}\wedge\vec{a_0''}=\vec{k_0}.\epsilon\cdot\frac{1}{R}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^3=(\vec{u_0}\wedge\vec{n_0})\frac{1}{R}|\vec{a_0'}|^3.$$

Deci, dacă vectorii $\vec{a_0'}$, $\vec{a_0''}$ nu sunt paraleli (produsul lor exterior este diferit de zero), curbura nu este nulă, vectorul unitar $\vec{n_0}$ este determinat. În punctul M_0 este deci un sens pentru curbură şi o rază de curbură, iar în acest caz punctul se zice *ordinar*.

Pentru a vedea poziţia curbei în punctul ordinar M_0 (Fig. 34), faţă de tangenta M_0T, să observăm că, în ipoteza făcută asupra sensului luat pentru arcul s, vectorii $\vec{a_0'}$ şi $\vec{u_0}$ sunt paraleli şi de acelaş sens, şi tot aşa şi cu vectorii, produsele exterioare, $(\vec{a_0'}\wedge\vec{a_0''})$, $(\vec{u_0}\wedge\vec{n_0})$. Deci $\vec{a_0''}$ şi $\vec{n_0}$ sunt îndreptaţi către aceeaşi regiune a planului în raport cu direcţia lui $\vec{a_0'}$ sau $\vec{u_0}$. Punând

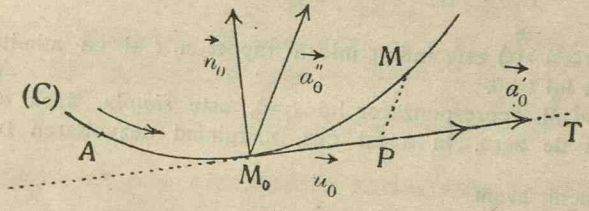


Fig. 34.

$$\vec{P}=\vec{a_0}+\vec{a_0'}t,$$

se vede că pentru valori ale lui t vecine de zero, locul lui P este o porţiune din tangenta în M_0 la curbă. Un punct M al curbei (C) se obţine adăugând lui $\vec{OP}$ vectorul

$$\vec{PM}=\frac{1}{2!}t^2.\vec{a_0''}+t^2.\epsilon(t).$$

Pentru t destul de mic, $\vec{PM}$ este aproape echipolent cu $\vec{a_0''}$, adică face cu $\vec{a_0''}$ nn unghi foarte mic şi este prin urmare îndreptat, în raport cu tangenta, către aceeaş regiune a planului ca şi $\vec{a_0''}$ şi $\vec{n_0}$. Adică, în vecinătatea lui M_0, curba (C) este de aceeaş parte a tangentei ca vectorul $\vec{n_0}$, sau că sensul curburei coincide cu acela al concavităţii curbei.

II. *Punct de inflexiune.* Dacă în punctul M_0, derivata a doua a lui $\overrightarrow{OM}$ este nulă, sau dacă derivata întâi şi a doua a lui $\overrightarrow{OM}$ sunt paraleli, adică

$$\vec{a}_0' \wedge \vec{a}_0'' = 0,$$

curbura este nulă, raza de curbură R este infinită. Se zice că M_0 este un *punct de inflexiune.* Să presupunem că $\vec{a}_0'''$ nu este nici nulă, nici paralel cu $\vec{a}_0'$, când se zice că punctul de inflexiune este ordinar. Oprind dezvoltarea lui $\overrightarrow{OM}$ la t^3, putem scrie

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}_0 + \vec{a}_0'\left(t + \frac{\alpha}{2}t^2\right) + \vec{a}_0''' \cdot \frac{t^3}{6} + t^3 \cdot \vec{\epsilon}(t),$$

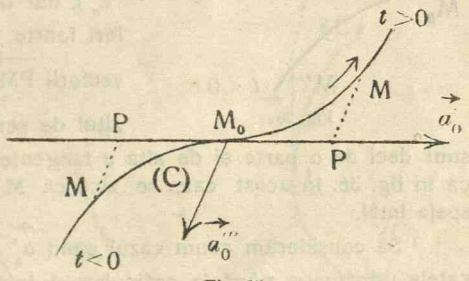


Fig. 35.

astfel că, dacă $\alpha = 0$, avem $\vec{a}_0'' = 0$, iar dacă $\alpha \neq 0$, vectorii $\vec{a}_0'$ şi $\vec{a}_0'' = \vec{a}_0' \cdot \alpha$ sunt paraleli. Punând

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a}_0 + \vec{a}_0'\left(t + \frac{\alpha}{2}t^2\right), \quad \overrightarrow{PM} = \vec{a}_0''' \cdot \frac{t^3}{6} + t^3 \cdot \vec{\epsilon}(t),$$

P, pentru valori destul de mici ale lui t, este pe tangenta în M_0 (Fig. 35), iar M un punct al curbei. Mai mult, pentru t destul de mic, semnul lui $\left(t + \frac{\alpha}{2}t^2\right)$ este acelaş cu al lui t, astfel că pe tangenta în M_0, orientată în sensul lui $\vec{a}_0'$, P este înainte de M_0 pentru $t < 0$, sau după M_0 pentru $t > 0$. Dar, din expresia lui $\overrightarrow{PM}$, pe care trebue a-l adăuga lui $\overrightarrow{OP}$ pentru a avea un punct M al curbei, se vede că, pentru valori destul de mici ale lui t, PM este aproape paralel şi de acelaş sens sau de sens contrar cu $\vec{a}_0'''$, după cum t este pozitiv sau negativ. Deci, în punctul de inflexiune M_0, curba traversează tangenta.

II'. *Punct de întoarcere.* Dezvoltând pe $\overrightarrow{OM}$ după puterile lui t, să presupunem că pentru punctul M_0 al curbei avem $\vec{a}_0' = 0$, în care caz punctul se zice sinpular. Dacă $\vec{a}_0''$ şi $\vec{a}_0'''$ nu sunt nuli şi nici paraleli, atunci M_0 se zice punct de întoarcere ordinar. Oprind dezvoltarea lui $\overrightarrow{OM}$ la t^3, avem

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM} - \vec{a}_0 = \vec{a}_0'' \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{a}_0''' \cdot \frac{t^3}{6} + \vec{\epsilon}(t)\, t^3.$$

Câtul $\overrightarrow{M_0M} : t^2$ are ca limită $\vec{a}_0''$, iar dreapta M_0Mare ca poziţie limită o paralelă la acest vector, care este pe tangenta în M_0 (Fig. 36). Obţinem poziţia curbei faţă

de tangentă, descompunând pe $\overrightarrow{M_0M}$ în doi vectori, $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{M_0P}+\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{M_0P}=\vec{a}_0''\frac{t^2}{2}$,

$$\overrightarrow{PM}=\vec{a}_0'''\frac{t^3}{6}+\vec{\epsilon}(t)\,t^3.$$

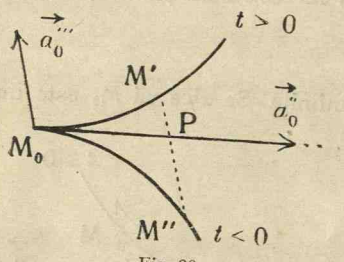


Fig. 36.

La două valori egale şi de semn contrar ale lui t, corespund, un singur punct P pe tangenta în M_0 (dincolo de M_0 în sensul lui $\vec{a}_0''$), dar două puncte M, care, pentru valori foarte mici ale lui t, sunt definite de vectorii $\overrightarrow{PM'}$, $\overrightarrow{PM''}$, unul de acelaş sens, iar altul de sens contrar cu $\vec{a}_0'''$; aceste puncte sunt deci de o parte şi de alta a tangentei, de unde urmează forma curbei ca în fig. 36. In acest caz, se zice că M_0 este un punct de întoarcere de speţa întâi.

Sa considerăm acum cazul când $\vec{a}_0''$ este diferit de zero, dar că derivatele următoare, până la ordinul $p-1$ inclusiv, sunt, paralele cu acest vector, sau nule. Putem scrie (Fig. 37),

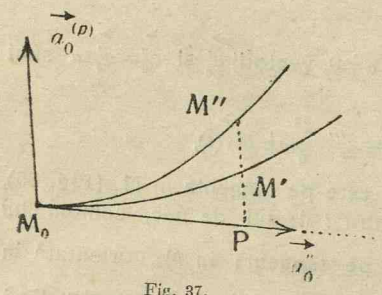


Fig. 37.

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{M_0P}+\overrightarrow{PM},$$

$$\overrightarrow{M_0P}=\vec{a}_0''\cdot\left[\frac{t^2}{2}+\alpha\cdot\frac{t^3}{6}+..+\lambda\cdot\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\right],$$

$$\overrightarrow{PM}=\vec{a}_0^{(p)}\cdot\frac{t^p}{p!}+t^p\cdot\vec{\epsilon}(t).$$

Tangenta în M_0 este paralelă cu a_0'', iar punctul P este dincolo de M_0, în sensul acestui vector (pentru valori destul de mici ale lui t).

Dacă numărul p este impar, vectorul $\overrightarrow{PM}$ îşi schimbă semnul în acelaş timp cu t; cele două ramuri ale curbei ce trec prin M_0 sunt de o parte şi de alta a tangentei în M_0, curba are în M_0 un punct de întoarcere de speţa întâi (Fig. 36); dacă p este par, sensul lui $\overrightarrow{PM}$ rămâne acelaş pentru valori destul de mici ale lui t, oricare ar fi semnul lui t, cele două ramuri ale curbei sunt de aceeaş parte a tangentei în M_0, curba are în M_0 un punct de întoarcere de speţa a doua (Fig. 37).

IV. *In general*, să presupunem că h este ordinul primului termen ne nul în dezvoltarea lui $\overrightarrow{OM}$ şi k ordinul primului termen care urmează după precedentul, care nu este nici nul nici paralel cu primul. Avem

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{M_0P}+\overrightarrow{PM},$$

$$\overrightarrow{M_0P}=\vec{a}_0^{(h)}.t^h.f(t),\quad f(0)\neq 0,\ f \text{ un scalar},$$

$$\overrightarrow{PM}=\vec{a}_0^{(k)}\frac{t^k}{k}+t^k.\vec{\epsilon}(t).$$

Raţionând ca mai sus, se vede că tangenta în M_0 este paralelă cu $a_0^{(h)}$;

dacă h este par şi k impar, M_0 este punct de întoarcere de speţa întâi (Fig. 36); h par, k par, punct de întoarcere de speţa a doua (Fig. 37); h impar, k par, punct ordinar (Fig. 34); h impar, k impar, punct de inflexiune ordinar (Fig. 35).

54. **Centru de curbură. Desfăşurată.** I. M fiind un punct al unei curbe plane (C), să luăm pe normala în M, în sensul curburei, o lungime MI egală cu raza de curbură R în M (Fig. 38). Punctul I se zice centrul de curbură al curbei în M. Cercul cu centru în centrul de curbură şi cu raza egală cu raza de curbură în M, se zice *cercul de curbură* în M. Când M variază pe curba (C), punctul I descrie o curbă (E), care se zice desfăşurata curbei (C).

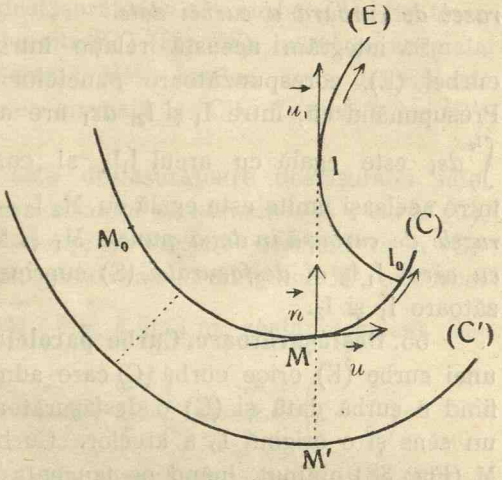


Fig. 38.

Să însemnăm cu $\vec{u}$ şi $\vec{n}$ vectorii unitari ai tangentei şi normalei în M la curba (C), definită parametric, în funcţiune de arcul s al curbei, socotit de la o origină M_0. Centrul de curbură I este dat de

$$\vec{OI} = \vec{OM} + R.\vec{n}; \tag{6}$$

diferenţiind, avem

$$\vec{d(OI)} = \vec{d(OM)} + d(R).\vec{n} + R\vec{dn}.$$

Ţinând seamă de valorile lui $\vec{d(OM)}$ şi $\vec{dn}$ obţinute la No. 51, $\vec{d(OM)} = \vec{u}.ds$, $R.\vec{dn} = -\vec{u}.ds$, relaţia precedentă devine

$$\vec{d(OI)} = \vec{n}.dR. \tag{7}$$

Această relaţie arată că tangenta în I la locul (E) descris de acest punct este paralelă cu vectorul $\vec{n}$ şi deci se confundă cu normala IM. Aşa dar, *normala la curba* (C) *este tangentă în punctul* I *corespunzător al desfăşuratei sale* (E). Curba (E) este înfăşurătoarea normalelor curbei (C).

II. Să luăm pe curba (E) ca sens pozitiv al arcelor, acela care e dat de prelungirea lui $\vec{n}$ (Fig. 38); însemnând cu s_1 arcul

astfel definit, şi aplicând formula (1) (No. 39), avem pentru curba (E)

$$d(\overrightarrow{OI}) = \vec{n} \cdot ds_1,$$

şi ţinând seamă de (7), obţinem $\vec{n} \cdot ds_1 = \vec{n} \cdot dR$, de unde

$$ds_1 = dR.$$

Deci, *diferenţiala arcului desfăşuratei este egală cu diferenţiala razei de curbură a curbei date.*

Să integrăm această relaţie între două puncte I_1 şi I_2 ale curbei (E), corespunzătoare punctelor M_1 şi M_2 ale curbei (C). Presupunând că, între I_1 şi I_2, ds_1 are un semn constant, integrala $\int_{I_1}^{I_2} ds_1$ este egală cu arcul I_1I_2 al curbei (E); integrala lui dR între aceleaşi limite este egală cu $M_2I_2 - M_1I_1$. Deci, *diferenţa între razele de curbură în două puncte* M_1 *şi* M_2 *ale curbei* (C) *este egală cu arcul* I_1I_2 *al desfăşuratei* (E) cuprins între punctele corespunzătoare I_1 şi I_2.

55. **Desfăşurătoare. Curbe paralele** I. Se zice desfăşurătoarea unei curbe (E) orice curbă (C) care admite (E) ca desfăşurată. (E) fiind o curbă dată şi (C) o desfăşurătoare a sa, să alegem pe (E) un sens şi o origină I_0 a arcelor. Curba (C) este locul punctului M (Fig. 38) obţinut luând pe tangenta într'un punct I al lui (E), în sensul opus acelui al arcelor, o lungime IM = arc I_0 I.

Să însemnăm cu s_1 arcul I_0I al curbei (E), $\vec{u}_1$ vectorul unitar pe tangenta la (E), în sensul pozitiv al arcelor. Punctul M se obţine cu relaţia

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} - \vec{u}_1 \cdot s_1.$$

Diferenţiind, obţinem

$$d(\overrightarrow{OM}) = d(\overrightarrow{OI}) - \vec{u}_1 \cdot ds_1 - s_1 \cdot \overrightarrow{du_1}.$$

Observând relaţia (1) (No. 39), avem $d(\overrightarrow{OI}) = \vec{u}_1 \cdot ds_1$, şi deci relaţia precedentă devine

$$d(\overrightarrow{OM}) = -s_1 \cdot \overrightarrow{du_1}.$$

Dar, $\overrightarrow{du_1}$ fiind diferenţiala unui vector $\vec{u}_1$ de modul constant (unitar), este perpendicular (No. 44) pe acest vector. Cum, din relaţia precedentă, se vede că $d(\overrightarrow{OM})$ este paralel cu $\overrightarrow{du_1}$, rezultă că este perpendicular pe IM. Dar $d(\overrightarrow{OM})$ dă tangenta în M la curba (C) descrisă de acest punct; urmează deci că IM este normală la locul lui M.

Se obține deci *o desfășurătoare a curbei* (E), *desfășurând un fir înfășurat pe* (E) *și considerând locul descris de extremitatea firului.*

Rezultatele precedente sunt valabile numai pentru un arc al curbei (E) care nu conține un punct de inflexiune sau un punct de întoarcere.

II. *Curbe paralele* Dacă în construcția precedentă facem să varieze, sau poziția originei I_0 pe (E), sau lungimea firului fixat în I_0, se obțin o infinitate de desfășurătoare ale curbei (E). Se trece de la o desfășurătoare (C) la alta (C') (Fig. 38), luând pe normala în M la (C) o lungime constantă MM', într'un sens determinat. Dreapta MM' este de asemenea normală la (C'). Curbele (C) și (C') se zic *paralele*

Cum orice curbă (C) este desfășurătoare desfășuratei sale, urmează că, *luând o lungime constantă pe normalele la o curbă* (C), *se obține o curbă paralelă, admițând aceleași uormale ca și* (C). Aceasta se poate vedea direct, observând că un punct M', al curbei (C'), este definit de $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}+\delta.\vec{n}$, δ fiind un scalar constant. Diferențiind, avem

$$d(\overrightarrow{OM'})=d(\overrightarrow{OM})+\delta.\vec{dn}=\vec{u}.ds-\vec{u}.\delta.\frac{1}{R}.ds=\vec{u}.ds\left(1-\frac{\delta}{R}\right).$$

Deci $d(\overrightarrow{OM'})$, tangent la (C'), este paralel cu $\vec{u}$, tangent la (C).

56. **Determinarea centrului de curbură.** Am văzut [No. 52, (3); No. 54, (6); No. 51]

$$\text{măsura } [d(\overrightarrow{OM})\wedge d^2(\overrightarrow{OM})]=\varepsilon.\frac{1}{R}.(ds)^3,$$

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+R.\vec{n},\quad \vec{n}=\varepsilon.\vec{k}\wedge\vec{u}=\varepsilon.\vec{k}\wedge\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}.$$

Eliminând pe $\vec{n}$ și R, și ținând seamă că $(ds)^2=[d(\overrightarrow{OM})]^2$, avem

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\frac{[d(\overrightarrow{OM})]^2}{\text{măsura } [d(\overrightarrow{OM})\wedge d^2(\overrightarrow{OM})]}.\vec{k}\wedge d(\overrightarrow{OM})$$

Insemnând cu (x_1, y_1) coordonatele punctului I, cu (x, y) acelea ale lui M, cu x', y', x'', y'' derivatele lor în raport cu un parametru oarecare, obținem expresiile cortezicne ale coordonatelor centrului I de curbură,

$$x_1=x-\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}.y',\quad y_1=y+\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}.x'.$$

57. **Contactul a două curbe.** Fie (M) și (P) (Fig. 39) două curbe, hodografele funcțiunilor vectoriale

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{a}(t),\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{b}(\theta),$$

care au punctul A comun corespunzător lui $t=0$, $\theta=0$. Să presupunem că punctul A este simplu pentru fiecare din curbele (M) și (P), ale căror arce AM și AP să le notăm cu s și σ.

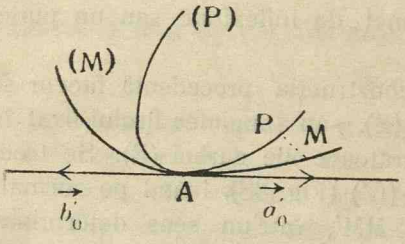


Fig. 39.

Se zice că curbele (M) și (P) au în A un contact de ordiuul p, dacă se poate stabili, în vecinătatea punctului A, o corespondență între punctele M și P (sau între parametrii t și θ, sau între arcele s și σ), astfel ca vectorul $\overrightarrow{MP}$ să fie infinit mic de ordinul p, în raport cu s sau σ, sau cu unul din parametrii t sau θ, acești parametrii find de același ordin ca și s sau σ.

Fie

$$(8)\quad \begin{cases} \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t.\overrightarrow{a'_0}+\frac{1}{2}t^2.\overrightarrow{a''_0}+\frac{1}{6}t^3.\overrightarrow{a'''_0}+\ldots+\frac{1}{p!}t^p.\overrightarrow{a_0^{(p)}}+t^p.\overrightarrow{\varepsilon}, \\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\theta.\overrightarrow{b'_0}+\frac{1}{2}\theta^2.\overrightarrow{b''_0}+\frac{1}{6}\theta^3.\overrightarrow{b'''_0}+\ldots+\frac{1}{p!}\theta^p.\overrightarrow{b_0^{(p)}}+\theta^p.\overrightarrow{\varepsilon_1} \end{cases}$$

dezvoltările lui $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OP}$, unde $\overrightarrow{a}(0)=\overrightarrow{b}(0)=\overrightarrow{OA}$.

Intre M și P fiind stabilită o corespondență, urmează că θ este o funcțiune de t. Pentru ca $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$ să fie de ordin superior lui t^p, trebue ca $\overrightarrow{OP}$ să se poată dezvolta cel puțin până la ordinul p în funcțiune de t, iar coeficienții vectonali ai acestei dezvoltări să fie egali cu aceea ai dezvoltării lui $\overrightarrow{OM}$. Trebue deci ca θ să se dezvolte în funcțiune de t cel puțin până la ordinul p,

$$\theta=\lambda_1 t+\frac{1}{2}\lambda_2 t^2+\frac{1}{6}\lambda_3 t^3+\ldots+\frac{1}{p!}\lambda_p t^p+t^p.\eta;$$

înlocuind pe θ pe dezvoltarea lui $\overrightarrow{OP}$, ordonând și egalând coeficienții vectoriali cu aceea ai lui $\overrightarrow{OM}$, urmează

$$(9)\quad \overrightarrow{a'_0}=\lambda_1.\overrightarrow{b'_0},$$

$$(10)\quad \overrightarrow{a''_0}=\lambda_2.\overrightarrow{b'_0}+\lambda_1^2.\overrightarrow{b''_0},$$

$$\overrightarrow{a'''_0}=\lambda_3\overrightarrow{b'_0}+3\lambda_2\lambda_1.\overrightarrow{b''_0}+\lambda_1^3\overrightarrow{b'''_0},$$

. . . . . .

De oarece $\vec{a}'_0$ și $\vec{b}'_0$ nu sunt nuli, urmează că λ_1 este diferit de zero. Deci infiniții mici t și θ, și prin urmare s și σ, sunt de același ordin, și prin urmare vectorul infinit mic $\overrightarrow{MP}$ este de un ordin mai mare ca p, sau în raport cu s (sau t), sau în raport cu σ (sau θ).

Așa fiind, se vede că scalarii

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right]^2, \quad \left[\frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt}\right]$$

au aceeași dezvoltare în funcțiune de t până la ordinul $p-1$, începând cu o constantă diferită de zero. De asemenea, și rădăcinile lor pătrate $\frac{ds}{dt}, \frac{d\sigma}{dt}$ au aceeași dezvoltare până la ordinul $p-1$, pe care integrându-le, rezultă că s și σ admit aceeași dezvoltare până la ordinul $p-1$ în funcțiune de t. Deci, *pentru ca curbele* (M) *și* (P) *să aibă un contact de ordinul p, trebue ca diferența arcelor* $s-\sigma = arc\,AM - arc\,AP$ *să fie un infinit unic de ordin superior lui p în raport cu unul din ele.*

Luând $s=\sigma$, găsim o nouă formă a condiții de contact de ordinul p în A, anume, *trebue ca dezvoltările vectorilor* $\overrightarrow{AM}$ *și* $\overrightarrow{AP}$ *în funcțiune de* $s = arc\,AM$ *și* $\sigma = arc\,AP$, *să aibă aceeași coeficienți până la ordinul p inclusiv.*

In cazul unui contact de ordinul p în A, dezvoltările (8) ale lui $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OP}$, având aceeași coeficienți până la t^p inclusiv, urmează că diferența $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$, care dă valorile lui t corespunzătoare punctelor comune curbelor (M) și (P), conține t^{p+1} factor, ceea ce probează că *cele două curbe au* $p+1$ *puncte comune confundate în* A, corespunzătoare la cele $p+1$ valori ale lui t egale cu zero.

In cazul unui *contact de ordinul întâi*, trebue ca să putem determina pe λ_1 cu (9), de unde urmează că $\vec{a}'_0$ și $\vec{b}'_0$ (Fig. 39) să fie paraleli, ceea ce însemnează că *curbele trebue să fie tangente în acel punct.* Curbele au în acest caz două puncte confundate în A.

Presupunând că λ_1 este determinat de (9) și că condiția precedentă este îndeplinită, pentru ca curbele să aibă *un contact de ordinul al doilea*, trebue ca relația (10) să poată determina pe λ_2. Inmulțind vectorial (9) și (10), avem

$$\vec{a}'_0 \wedge \vec{a}''_0 = \lambda_1^3 (\vec{b}'_0 \wedge \vec{b}''_0).$$

Inlocuind pe λ_1 cu valoarea sa din (9), urmează

$$\frac{|\vec{a}_0' \wedge \vec{a}_0''|}{|\vec{a}_0'|^3} = \frac{|\vec{b}_0' \wedge \vec{b}_0''|}{|\vec{b}_0'|^3},$$

ceea ce probează că *cele două curbe trebue să aibă acelaş centru de curbură în* A. Curbele care au un contact de ordinul al doilea se zic *osculatoare*. In acest caz curbele au trei puncte confundate în A, cercul ce trece prin aceste trei puncte se zice *cercul osculator* în A şi se confundă cu cercul de curbură în A. Se vede, de asemenea, că dezvoltarea lui $\overrightarrow{MP}$ începe cu un termen în t^3; deci acest vector îşi schimbă semnul când M şi P trece prin A, ceea ce însemnează că *două curbe osculatoare se traversează*.

58. **Exemple.** I. *Cercul.* In cazul unui cerc de centru O (Fig. 29) şi rază R, să luăm ca parametru variabil unghiul $\theta = (Ox, OM)$, ce-l face Ox cu raza OM. Acest cerc este hodograful unui vector de modul constant. Originea arcelor fiind în A, arcul AM este egal cu $s = R\theta$. Avem (No. 45)

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds} = (\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{R}, \quad \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{d(\overrightarrow{OM'})}{ds} = \frac{\overrightarrow{OM''}}{R^2},$$

unde $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM''}$ sunt vectorii deduşi din $\overrightarrow{OM}$ cu o rotaţie (Fig. 29) de $\frac{\pi}{2}$ şi π. Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{n}$ sunt respectiv $\frac{\overrightarrow{OM'}}{R}$ şi $\frac{\overrightarrow{OM''}}{R}$ şi raza de curbură R. Centrul de curbură este constant în O, deci desfăşurata se reduce la acest punct.

II. *Elipsa.* Fie M un punct al unei elipse raportată la axele sale de lungimi $2a$ şi $2b$. Insemnând cu $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ vectorii unitari ai axelor, se poate defini elipsa ca locul punctului M, dat în funcţiune de parametrul α,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i} \cdot a \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Derivând în raport cu α, avem

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\alpha} = -\vec{i} \cdot a \cdot \sin\alpha + \vec{j} \cdot b \cdot \cos\alpha, \quad \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d\alpha^2} = -\vec{i} \cdot a \cdot \cos\alpha - \vec{j} \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Făcând produsele vectoriale (exterioare) ale acestor doi vectori şi apoi pătratul primului, avem

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\alpha} \wedge \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d\alpha^2} = \vec{i} \wedge \vec{j} \cdot ab \cdot \sin^2\alpha - \vec{j} \wedge \vec{i} \cdot ab \cdot \cos^2\alpha = \vec{i} \wedge \vec{j} \cdot ab,$$

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\alpha}\right]^2 = a^2 \cdot \sin^2\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha.$$

Măsura produsului exterior (vectorial) fiind pozitivă ($\epsilon = 1$, No. 52), avem pentru raza de curbură

$$R=\frac{(a^2\sin^2\alpha+b^2.\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

de unde se poate deduce o construcție a centrului de curbură.

III. *Cicloida.* Fie M un punct al cicloidei născută de un punct M însemnat al cercului de rază 1 care se rostogolește pe Ox (Fig. 40) Presupunând că la momentul inițial M a fost în O, că P este punctul de contact al cercului cu Ox, avem arc PM=OP. Fie A centrul cercului, $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vecorii unitari ai axelor perpendiculare. Insemnând cu t=OP, reprezentarea parametrică vectorială a cicloidei se obține considerând conturul OPAM, $\vec{OM}=\vec{OP}+\vec{PA}+\vec{AM}$,

(11) $$\vec{OM}=\vec{i}.t+\vec{j}+\vec{AM},\ (Ox,AM)=-t-\frac{\pi}{2}\cdot$$

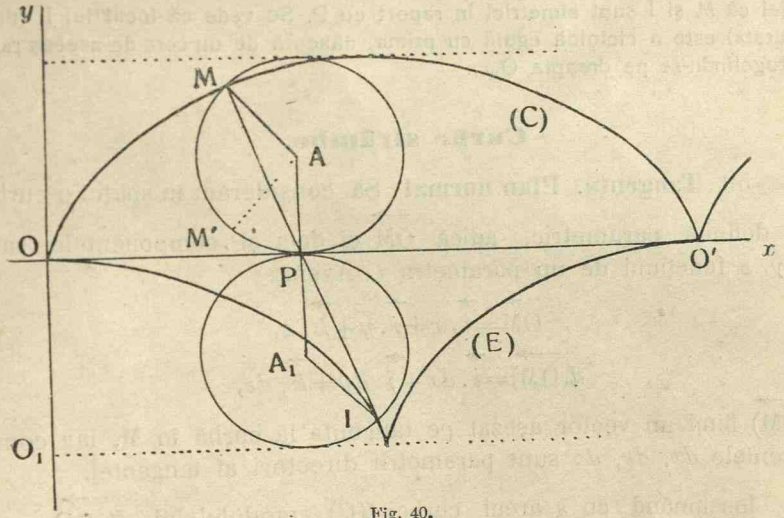


Fig. 40.

Derivata vectorului $\vec{AM}$ de modul 1. este (No. 45) vectorul $\vec{AM'}$ direct perpendicular, înmulțit cu derivata unghiului (Ox, AM) în raport cu t, adică -1. Deci

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\vec{i}-\vec{AM'},\ \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2}=-\vec{AM},\ \frac{d^3(\vec{OM})}{dt^3}=\vec{AM},...$$

Derivata întâi este nulă numai în punctele O de pe Ox. In O avem $\vec{AM}=-\vec{j}$, $\vec{AM'}=\vec{i}$, deci în vecinătatea lui O, avem

$$\vec{OM}=(\vec{OM})_0+\frac{t}{1}\frac{d(\vec{OM})_0}{dt}+\frac{t^2}{2!}\frac{d^2(\vec{OM})_0}{dt^2}+\frac{t^3}{3!}\frac{d^3(\vec{OM})_0}{dt^3}+...,\ t=0,$$

$$\vec{OM}=\frac{t^2}{2!}\cdot\vec{j}+\frac{t^3}{3!}\cdot\vec{i}+\frac{t^4}{4!}\cdot\vec{j}-\frac{t^5}{5!}\cdot\vec{i}+t^5.\epsilon(t),$$

care arată că O este (No. 53, III) un punct de întoarcere de speța întâi.

Pentru calculul razei de curbură, să efectuăm

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\wedge\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}=-\vec{i}\wedge\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM'}\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{k}.\left[\sin\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]=-\vec{k}.(-\cos t),$$

$$\left[\frac{d(OM)}{dt}\right]^2=1-2.\vec{i}.\overrightarrow{AM'}+1=2(1-\cos t).$$

Deci [No. 52, formula (4)] raza de curbură este egală -2, iar poziția centrului I de curbură (No. 56) se obține cu formula

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}-2.\vec{k}\wedge(\vec{i}-\overrightarrow{AM'})=\overrightarrow{OM}-2(\vec{j}+\overrightarrow{AM}),$$

unde, înlocuind pe $\overrightarrow{OM}$ cu valoarea sa (11), avem

$$\overrightarrow{OI}=\vec{i}.t-\vec{j}-\overrightarrow{AM}.$$

Se duce deci $\overrightarrow{OP}=\vec{i}.t$, apoi $\overrightarrow{PA_1}$, opus lui $\overrightarrow{PA}=\vec{j}$, în fine $\overrightarrow{A_1I}$ opus lui $\overrightarrow{AM}$, astfel că M și I sunt simetrici în raport cu P. Se vede că locul lui I (desfășurata) este o cicloidă egală cu prima, născută de un cerc de aceeaș rază rostogolindu-se pe dreapta O_1x_1.

Curbe strâmbe.

59. **Tangenta. Plan normal** Să considerăm în spațiu o curbă (C) definită parametric, adică $\overrightarrow{OM}$ și deci și componentele sale x, y, z funcțiuni de un parametru t. Avem

$$\overrightarrow{OM}=\vec{i}.x+\vec{j}.y+\vec{k}.z,$$

$$d(\overrightarrow{OM})=\vec{i}.dx+\vec{j}.dy+\vec{k}.dz,$$

$d(\overrightarrow{OM})$ fiind un vector așezat pe tangenta la curbă în M, iar componentele dx, dy, dz sunt parametrii directori ai tangentei.

Insemnând cu s arcul curbei (C), modulul lui $d(\overrightarrow{OM})$ este egal cu $|ds|$ și deci, ridicând scalar la pătrat pe $d(\overrightarrow{OM})$, avem

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Luând arcul s ca variabilă, $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ este vectorul unitar $\vec{u}$ pe tangentă, orientată în sensul arcelor crescătoare, iar derivatele $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sunt *cosinusurile directoare* ale tangentei.

Planul trecând prin punctul M al curbei (C) și normal la tangenta în M se zice *planul normal* la curbă în M. Orice dreaptă ce trece prin M și conținută în planul normal este o *normală* la curbă.

Însemnând cu M şi P puncte variabile respectiv pe curba (C) şi tangenta în M_0 la curba (C) (Fig. 41), ecuaţiile vectoriale ale tangentei şi planului normal în M_0 la curba (C) sunt

$$\overrightarrow{M_0P} \wedge [\overrightarrow{d(OM)}]_0 = 0, \text{ tangenta},$$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot [\overrightarrow{d(OM)}]_0 = 0, \text{ plan normal.}$$

Inlocuind produsele vectorial şi scalar cu expresiile lor, ecuaţiile carteziene ale tangentei şi planului normal în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt

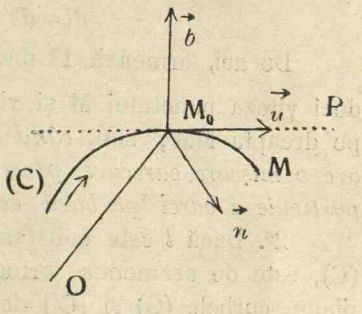


Fig. 41.

$$\frac{x-x_0}{dx_0} = \frac{y-y_0}{dy_0} = \frac{z-z_0}{dz_0},$$

$$(x-x_0)dx_0 + (y-y_0)dy_0 + (z-z_0)dz_0 = 0.$$

60. **Variaţia de lungime a unui segment de dreaptă.** Fie M şi M′ două puncte variabile în funcţie de parametrul t, primul descriind curba (C), al doilea curba (C′). Să însemnăm cu l lungimea segmentului MM′, unde M şi M′ sunt două puncte corespunzătoare la aceeaş valoare a lui t.

O fiind un punct oarecare al spaţiului, avem $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$,

$$\frac{\overrightarrow{d(MM'^2)}}{dt} = 2.\overrightarrow{MM'}.\frac{\overrightarrow{d(MM')}}{dt} = 2.\overrightarrow{MM'}\left[\frac{\overrightarrow{d(OM')}}{dt} - \frac{\overrightarrow{d(OM)}}{dt}\right]$$

$$= 2\overrightarrow{MM'}\left[\frac{\overrightarrow{d(OM')}}{ds'}\frac{ds'}{dt} - \frac{\overrightarrow{d(OM)}}{dt}\frac{ds}{dt}\right] = 2.\overrightarrow{MM'}\left(\vec{u}'.\frac{ds'}{dt} - \vec{u}.\frac{ds}{dt}\right),$$

unde $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sunt vectorii unitari ai tangentelor în M şi M′ la curbele (C) şi (C′).

Cum $\frac{\overrightarrow{d(MM'^2)}}{dt} = 2l.\frac{dl}{dt}$, urmează

$$l\frac{dl}{dt} = \overrightarrow{MM'}.\vec{u}'.\frac{ds'}{dt} - \overrightarrow{MM'}.\vec{u}.\frac{ds}{dt}.$$

Punând $\theta = (\overrightarrow{MM'}, \vec{u})$, $\theta' = (\overrightarrow{MM'}, \vec{u}')$, după definiţia produsului scalar, avem

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = l\cos\theta, \quad \overrightarrow{MM'}.\vec{u}' = l\cos\theta'$$

şi deci relaţia precedentă devine

$$\frac{dl}{dt} = \frac{ds'}{dt}\cos\theta' - \frac{ds}{dt}\cos\theta,$$

care dă variația de lungime a segmentului $\overrightarrow{MM'}$,

$$dl = ds' \cos\theta' - ds \cos\theta.$$

De aci, urmează 1° dacă l este constant, $\frac{ds'}{dt}\cos\theta' = \frac{ds}{dt}\cos\theta$, deci viteza punctului M și viteza punctului M' au aceeaș proecție pe dreapta MM'; sau, *când o bară rigidă* (de lungime constantă) *are o mișcare oarecare, proecția, la un moment dat, a vitezei unei particule a barei pe bară este independentă de această particulă.*

2°. Dacă l este constant și dacă MM' este ortogonal la curba (C), este de asemenea ortogonal la curba (C'). In cazul curbelor plane, curbele (C) și (C') descrise de M și M' sunt *paralele.*

3°. Dacă MM' este ortogonal la (C) și (C'), l este constant.

61. **Plan osculator.** Să considerăm planul ce trece prin tangenta în punctul M_0 al unei curbe (C) și paralel cu tangenta în punctul infinit vecin M. Limita acestui plan când M tinde către M_0 se zice planul osculator în M_0 la curba (C).

Binormala în punctul M_0 este perpendiculara în M_0 la planul osculator. Este deci limita perpendicularei comune la două tangente înfinit vecine.

Normala principală este normala la curbă conținută în planul osculator și este deci intersecția planului normal cu planul osculator.

Din cele expuse, rezultă că tangenta, normala principală și binormala formează un triedru tridreptunghic, adică sunt perpendiculare două câte două. Tangenta și normala determină planul osculator; normala principală și binormala determină planul normal; binormala și tangenta determină *planul rectifiant*, care este perpendicular pe cele două plane precedente.

Fie M, M', M'' trei puncte consecutive infinit vecine, corespunzătoare vectorilor $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + d(\overrightarrow{OM})$, $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM'} + d(\overrightarrow{OM'}) = \overrightarrow{OM} + 2d(\overrightarrow{OM}) + d^2(\overrightarrow{OM})$. Tangenta în M e dată de vectorul $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d(\overrightarrow{OM})$, iar tangenta în punctul infinit vecin M' e dată de vectorul $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{OM'} = d(\overrightarrow{OM}) + d^2(\overrightarrow{OM})$.

Tangenta în punctul M și punctul infinit vecin fiind caracterizate de vectorii $d(\overrightarrow{OM})$ și $d^2(\overrightarrow{OM})$ urmează că planul osculator este paralel cu acești doi vectori. Dacă acești vectori nu sunt paraleli, ei determină un plan, iar vectorul

$$d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})$$

este un vector normal la acest plan, deci paralel cu binormala.

Pentru a obține un vector așezat pe normala principală, formăm produsul vectorial al vectorilor $d(\overrightarrow{OM})$ și al celui precedent,

$$(1) \qquad d(\overrightarrow{OM}) \wedge [d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})].$$

Dezvoltând acest dublu produs vectorial (No 30, I), avem

$$d(\overrightarrow{OM})[d(\overrightarrow{OM}).d^2(\overrightarrow{OM})] - d^2(\overrightarrow{OM}).[d(\overrightarrow{OM})]^2.$$

De asemenea P fiind un punct oarecare din planul normal, sau planul osculator, sau planul rectifiant, în punctul M_0 al curbei (C), aceste plane sunt caracterizate de ecuațiile

$$\text{Plan normal} \qquad \overrightarrow{M_0P}.[d(\overrightarrow{OM})]_0 = 0,$$

$$\text{Plan osculator} \qquad \overrightarrow{M_0P}.[d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})]_0 = 0,$$

$$\text{Plan rectifiant} \qquad \overrightarrow{M_0P}.\{d(\overrightarrow{OM}) \wedge [d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})]\}_0 = 0,$$

de unde se obțin ecuațiile lor carteziene.

In cazul unei curbe plane, $d(\overrightarrow{OM})$ și $d^2(\overrightarrow{OM})$ sunt în planul său, care este planul osculator; binormala este perpendiculară pe planul curbei; normala principală este normala la curbă în planul său.

62. **Curbura.** Fiind dată o curbă (C) în spațiu, să luăm ca parametru variabil arcul $AM = s$, socotit dela origina A. Derivata $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ este (No. 39) vectorul unitar $\overrightarrow{u}$ al tangentei în M orientată în sensul arcelor crescătoare. Derivata $\frac{d\overrightarrow{u}}{ds}$ a vectorului $\overrightarrow{u}$ de modul constant 1, este (No. 44) normal la curba (C); de oarece este derivata a doua a lui $\overrightarrow{OM}$, acest vector este în planul osculator. Deci

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{ds} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2}$$

este un vector așezat pe normala principală. Inlocuind derivatele în raport cu s în formula (1), care dă expresia vectorului așezat pe normala principală, obținem

$$\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{u}.\frac{d\overrightarrow{u}}{ds}\right) - \frac{d\overrightarrow{u}}{ds}.\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}\right) = -\frac{d\overrightarrow{u}}{ds},$$

de unde regăsim proprietatea derivatei lui $\overrightarrow{u}$.

Modulul vectorului $\frac{\vec{du}}{ds}$ *este curbura în punctul considerat, iar inversa curburei este raza de curbură* R. Sensul vectorului $\frac{\vec{du}}{ds}$ este sensul curburei pe normala principală.

Insemnând cu $\vec{n}$ vectorul de modul 1 așezat pe normala principală, și dirijat în sensul curburei avem

$$\frac{\vec{du}}{ds}=\frac{d^2(\vec{OM})}{ds^2}=\frac{1}{R}.\vec{n}. \tag{2}$$

Sensul curburei este independent de sensul ales pentru arce. In adevăr, schimbând sensul arcelor, să însemnăm cu s_1 și $\vec{u_1}$ noile elemente și fie $s_1=-s+a$, $\vec{u_1}=-\vec{u}$. Avem deci

$$\frac{du_1}{ds_1}=\frac{d(-\vec{u})}{-ds}=\frac{\vec{du}}{ds}.$$

Să observăm că modulul lui $\frac{\vec{du}}{ds}$ este egal cu derivata în raport cu s a arcului hodografului lui $\vec{u}$, acest hodograf fiind o curbă (U), trasă pe o sferă de rază 1, numită *indicatoarea tangentelor.*

Centrul de curbură în M este punctul I obținut luând pe normala principală lungimea MI=R în sensul curburei, și este dat de

$$\vec{OI}=\vec{OM}+R.\vec{n}.$$

Cele expuse mai sus sunt valabile numai dacă derivata lui $\vec{u}$ în raport cu s este diferită de zero. Dacă această derivată este nulă dealungul unui arc de curbă, acel arc este o linie dreaptă.

63. **Torsiunea.** Fie $\vec{b}$ vectorul unitar direct perpendicular pe $\vec{u}$ și $\vec{n}$,

$$\vec{b}=\vec{u}\wedge\vec{n}.$$

Acest vector este așezat pe binormala la curbă.

$\vec{b}$ fiind de modul constant, $\frac{\vec{db}}{ds}$ este (No. 44) perpendicular pe $\vec{b}$. Cum $\vec{b}$ și $\vec{u}$ sunt perpendiculari, avem $\vec{u}.\vec{b}=0$ și derivând în raport cu s, avem

$$0=\frac{\vec{du}}{ds}.\vec{b}+\vec{u}.\frac{\vec{db}}{ds}=\left(\frac{1}{R}.\vec{n}\right).\vec{b}+\vec{u}.\frac{\vec{db}}{ds}=\vec{u}.\frac{\vec{db}}{ds},$$

căci (No. 26) $\left(\frac{1}{R}.\vec{n}\right).\vec{b}=\frac{1}{R}.[\vec{n}.(\vec{u}\wedge\vec{n})]=0$. Deci $\vec{u}.\frac{\vec{db}}{ds}=0$, ceea ce arată că $\frac{\vec{db}}{ds}$ este perpendicular pe $\vec{u}$ (pe tangentă). Cum este perpendicular şi pe $\vec{b}$ (binormală), este paralel cu normala principală. Deci vectorul $\frac{\vec{db}}{ds}$ este aşezat pe normala principală.

Măsura vectorului $\frac{\vec{db}}{ds}$ *pe normala principală, orientat în sensul curburei, se zice torsiune; inversa torsiunei este raza de torsiune* T,

$$\frac{\vec{db}}{ds}=\frac{1}{T}.\vec{n}. \tag{3}$$

Semnul torsiunei este independent de sensul arcelor. In adevăr, dacă se schimbă acest sens, $\vec{ds}$ şi $\vec{u}$ îşi schimbă sensul, $\vec{n}$ nu schimbă, $\vec{b}$ şi $\vec{db}$ îşi schimbă, deci $\frac{\vec{db}}{ds}$ nu schimbă sensul. Semnul lui T depinde de orientarea spaţiului, căci, dacă se schimbă această orientare, ds, $\vec{u}$, $\vec{n}$ nu schimbă, $\vec{b}$ şi $\vec{db}$ schimbă, deci şi T, care este un scalar, îşi schimbă semnul.

Modulul torsiunei este egal cu derivata în raport cu s a arcului hodografului lui $\vec{b}$. Acest hodograf este o curbă (B), numită *indicatoarea binormalelor*, aşezată, ca şi aceea a tangentelor, pe o

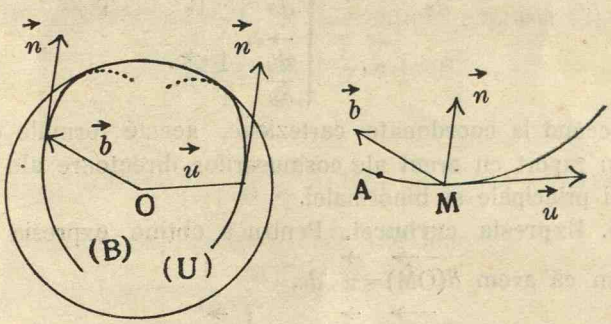


Fig 42.

sferă de rază 1. Din expresiunile derivatelor lui $\vec{u}$ şi $\vec{b}$ rezultă că *tangentele la cele două indicatoare* (U) *şi* (B) (Fig. 42), *în puncte corespunzătoare, sunt paralele cu normala principală.*

Cele expuse sunt valabile, dacă derivata lui $\vec{b}$ nu este nulă. Să presupunem că dealungul unui arc de curbă, derivata lui $\vec{b}$ este nulă. Deci $\vec{b}$ este constant dealungul acest arc. Dar, $d(\overrightarrow{OM})$ aşezat pe tangenta la curbă este perpendicular pe $\vec{b}$, deci

$$0=d(\overrightarrow{OM}).\vec{b}=d(\overrightarrow{OM}.\vec{b}).$$

Integrând, $\overrightarrow{OM}.\vec{b}=$ const., ceea ce arată că M este (No. 16) într'un plan fix perpendicular pe $\vec{b}$. Deci, *dacă* $\frac{d\vec{b}}{ds}=0$ *dealungul unui arc de curbă, acel arc este într'un plan.*

64. **Formulele lui Frenet.** Triedrul format într'un punct M al curbei (C) de tangentă, normala principală şi binormală, se zice triedrul lui Frenet în punctul M al curbei (C). Vectorii unitari ai acestui triedru sunt $\vec{u}, \vec{n}, \vec{b}$.

Să derivăm $\vec{n}=-\vec{u}\wedge\vec{b}$. Observând (2) şi (3), avem

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{d\vec{u}}{ds}\wedge\vec{b}-\vec{u}\wedge\frac{d\vec{b}}{ds}=-\frac{1}{R}\vec{n}\wedge\vec{b}-\vec{u}\wedge\frac{1}{T}.\vec{n}=-\frac{1}{R}.\vec{u}-\frac{1}{T}.\vec{b}.$$

Această formulă, împreună cu (2) şi (3), sunt formulele lui Frenet

$$(4)\qquad \frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}=\vec{u},\quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{ds}=\dfrac{1}{R}.\vec{n}, \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds}=-\dfrac{1}{R}.\vec{u}-\dfrac{1}{T}.\vec{b}, \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds}=\dfrac{1}{T}.\vec{n}. \end{cases}$$

Trecând la coordonate carteziene, aceste formule dau derivatele în raport cu arcul ale cosinusurilor directoare ale tangentei, normalei principale şi binormalei.

65. **Expresia curburei.** Pentru a obţine expresia curburei, observăm că avem $d(\overrightarrow{OM})=\vec{u}.ds$,

$$(6)\qquad d^2(\overrightarrow{OM})=\vec{u}.d^2s+\frac{1}{R}.\vec{n}\ (ds)^2,$$

de unde

$$d(\overrightarrow{OM})\wedge d^2(\overrightarrow{OM})=(\vec{u}\wedge\vec{n})\frac{1}{R}.(ds)^3=\vec{b}.\frac{1}{R}.(ds)^3.$$

Egalând modulele ambilor membrii, înlocuind pe ds cu $|\overrightarrow{d(OM)}|$, avem

$$R=\frac{|\overrightarrow{d(OM)}|^3}{|\overrightarrow{d(OM)}\wedge\overrightarrow{d^2(OM)}|}.$$

Trecând la coordonate carteziene, obţinem

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{[(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicând identitatea lui Lagrange (No. 25), numitorul din (6) se poate înlocui cu rădăcină pătrată a expresii

$$[\overrightarrow{d(OM)}]^2[\overrightarrow{d^2(OM)}]^2-[\overrightarrow{d(OM)}.\overrightarrow{d^2(OM)}]^2.$$

Luând ca variabilă arcul s, numărătorul din (6) devine egal cu $\left|\frac{\overrightarrow{d(OM)}}{ds}\right|^3=|\overrightarrow{u}|^3=1$ (căci $|\overrightarrow{u}|=1$), iar numitorul se reduce la $\left|\frac{\overrightarrow{d^2(OM)}}{ds^2}\right|$. Expresia (6) devine

$$\left|\frac{\overrightarrow{d^2(OM)}}{ds^2}\right|=\frac{1}{R},$$

şi regăsim astfel definiţia curburei (No. 62). In coordonate carteziene această expresie devine

$$\frac{1}{R^2}=\left|\frac{\overrightarrow{d^2(OM)}}{ds^2}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{d^2(i.x+j.y+k.z)}}{ds^2}\right|^2=\left|\overrightarrow{i}.\frac{d^2x}{ds^2}+\overrightarrow{j}.\frac{d^2y}{ds^2}+\overrightarrow{k}.\frac{d^2z}{ds^2}\right|^2,$$

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

66. **Expresia torsiunei.** Să diferenţiem expresia (5),

$$\overrightarrow{d^2(OM)}=\overrightarrow{u}.d^2s+\frac{1}{R}.\overrightarrow{n}.(ds)^2.$$

Avem

$$\overrightarrow{d^3(OM)}=\frac{\overrightarrow{du}}{ds}.ds.d^2s+\overrightarrow{u}.d^3s-\frac{1}{R^2}.\frac{dR}{ds}.\overrightarrow{n}(ds)^3+\frac{1}{R}.\frac{\overrightarrow{dn}}{ds}(ds)^3+\frac{1}{R}.\overrightarrow{n}.2ds.d^2s.$$

Aplicând formulele (4) ale lui Frenet, obţinem

$$\overrightarrow{d^3(OM)}=\frac{1}{R}.\overrightarrow{n}ds.d^2s+\overrightarrow{u}\,d^3s-\frac{1}{R^2}.\frac{dR}{ds}.\overrightarrow{n}.(ds)^3+$$

$$\frac{1}{R}\left(-\frac{1}{R}.\overrightarrow{u}-\frac{1}{T}.\overrightarrow{b}\right).(ds)^3+\frac{1}{R}.\overrightarrow{n}.2ds.d^2s,$$

$$\overrightarrow{d^3(OM)}=-\frac{1}{T.R}.\overrightarrow{b}.(ds)^3+p\overrightarrow{u}+q\overrightarrow{n},$$

p şi q fiind scalari.

Să efectuăm produsul vectorial $d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})$ și obținem

$$d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})=\left(\overrightarrow{u}.d^2s+\frac{1}{R}.\overrightarrow{n}\,ds^3\right)\wedge\left(-\frac{1}{T.R}\overrightarrow{b}.ds^3+p.\overrightarrow{u}+q.\overrightarrow{n}\right)$$

$$=-(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{b})\frac{1}{T.R}d^2s.(ds)^3+(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{n}).d^2s.q-(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{b})\frac{1}{T.R^2}(ds)^6+(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u})\frac{1}{R}.p.(ds)^3.$$

Să calculăm produsul mixt (No. 26)

$$d(\overrightarrow{OM}).[d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})]=\overrightarrow{u}\,ds\left[-(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{b})\frac{1}{T.R}.d^2s.(ds)^3+(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{n})\,d^2s.q\right.$$

Avem

$$\left.-(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{b})\frac{1}{T.R^2}(ds)^6+(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u})\frac{1}{R}.p.(ds)^3\right].$$

$$d(\overrightarrow{OM}).[d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})]=-\overrightarrow{u}(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{b})\frac{1}{T.R^2}(ds)^6=-\frac{(ds)^6}{T.R^2}.$$

Inlocuind pe R cu valoarea sa (6), obținem expresia torsiunei

$$T=-\frac{[d(\overrightarrow{OM})\wedge d^2(\overrightarrow{OM})]^2}{d(\overrightarrow{OM}).[d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})]}.$$

Aplicând formula lui Lagrange la numărător, avem

$$T=-\frac{[d(\overrightarrow{OM})]^2.[d^2(\overrightarrow{OM})]^2-[d(\overrightarrow{OM}).d^2(\overrightarrow{OM})]^2}{d(\overrightarrow{OM}).[d^2(\overrightarrow{OM})\wedge d^3(\overrightarrow{OM})]}.$$

In coordonate carteziene, expresia torsiunei este

$$T=-\frac{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}.$$

67. **Aplicație. Elicea.** Fie m un punct al unei curbe plane (c), așezată în planul (P) (Fig. 43) și A uu punct fix al acestei curbe. Să considerăm suprafața (Σ) născută de o dreapta mD ce trece prin m și perpendiculară pe planul (P). Locul descris de un punct M al dreptei mD, astfel ca $\overline{mM}$ să fie proporțională cu arcul $Am=s$ al curbei (c), este o curbă *elice* (C) așezată pe suprafața (Σ).

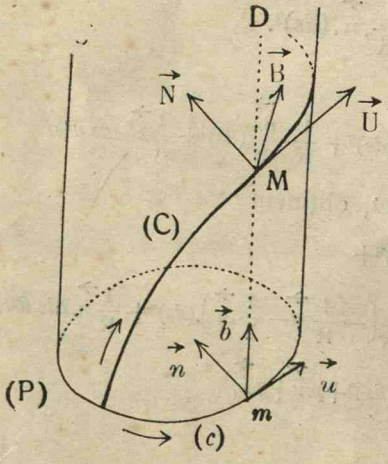


Fig. 43.

Insemnând cu $\overrightarrow{k}$ vectorul unitar așezat pe generatoarea mD, o elice (C) este hodograful funcțiunei de s,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{k}.hs,$$

h fiind un scalar.

Să însemnăm cu S arcul elicei (C), socotit de la origina A, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{B}$ vectorii unitari ai triedrelor lui Frenet

ai curbelor (c) şi (C). Se observă că $b=\epsilon k$, ϵ fiind egal cu $+1$ sau -1 după cum sensurile pe curbele (c) şi (C) sunt aceleaşi sau diferite. Avem

$$\vec{d}(\overrightarrow{OM})=\vec{U}.dS, \quad \vec{d}(\overrightarrow{OM})=\vec{d}(\overrightarrow{Om})+\vec{k}.h.ds=\vec{u}.ds+\vec{k}.h.ds, \quad dS^2=(1+h^2).ds^2.$$

Deci arcul S al elicei este proporţional cu arcul s al curbei (c) (secţiunei drepte) şi deci proporţional cu cota $\overline{mM}$.

De asemenea,

$$\vec{U}=\frac{\vec{d}(\overrightarrow{OM})}{dS}=\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}(\vec{u}+\vec{h}.\vec{k}),$$

şi derivând, avem

$$\frac{\vec{N}}{R}=\frac{\vec{dU}}{dS}=\frac{1}{1+h^2}\cdot\frac{\vec{n}}{r},$$

R şi r fiind razele de curbură ale elicei şi curbei (c). Deci normala principală la elice este paralelă cu normala la secţiunea dreaptă (c), sensurile curburei sunt aceleaşi, iar razele de curbură R şi r sunt proporţionale,

$$\vec{N}=\vec{n}, \quad R=(1+h^2).r.$$

Vectorul binormal $\vec{B}$ al elicei este

$$\vec{B}=\vec{U}\wedge\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}(\vec{k}-h\,\vec{u}).$$

derivând, avem

$$\frac{\vec{dB}}{dS}=\frac{\epsilon h}{1+h^2}\cdot\frac{\vec{n}}{r},$$

deci derivata vectorului binormal este paralel cu $\vec{n}$ şi deci (No. 63) raza de torsiune T este proporţională cu raza de curbură r a curbei (c) şi prin urmare proporţională şi cu raza de curbură R a elicei,

$$T=-\epsilon\frac{1+h^2}{h}\cdot r=-\frac{\epsilon.R}{h}.$$

Aceasta este proprietatea caracteristică a elicei şi anume, elicea este curba pentru care raportul între raza de curbură şi de torsiune este constant.

In cazul elicei circulare, curba (c) fiind un cerc, r şi deci R şi T sunt constante.

VERIFICAT 2017

Tabla de materii.

Pag.

Operaţiuni elementare asupra vectorilor.

Vectori. Generalităţi. Sumă geometrică. Diferenţă geometrică. Componentele unui vector. Distanţa a două puncte. Forma vectorială a expresii analitice a unui vector. Aplicaţii. Direcţii paralele. Schimbarea sistemului de vectori unitari. Reprezentarea parametrică a dreptei. Aplicaţii asupra dreptei. Reprezentarea parametrică a planului. Baricentru. Aplicaţii asupra baricentrului 540

Produse de vectori. Produs scalar. Proprietăţi Reprezentare analitică. Distanţa a două puncte Direcţii perpendiculare. Aplicaţii. Ecuaţia dreptei din plan Ecuaţia planului. Aplicaţii asupra dreptei şi planului. 561

Produs vectorial. Proprietăţi. Reprezentare analitică. Aria unui triunghi. Ecuaţia dreptei. Normala la un plan definit prin două drepte. Diviziunea geometrică. Aplicaţie. Identitatea lui Lagrange. 568

Produse compuse. Produsul mixt $a \,.\, (b \wedge c)$. Volumul unui tetraedru. Condiţia ca trei vectori să fie în acelaş plan. Aplicaţie. Descompunerea unui vector după muchiile unui triedru ale căror direcţii sunt reprezentate de trei vectori daţi. Dublul produs vectorial $a \wedge (b \wedge c)$ Aplicaţii. Condiţia ca patru puncte să fie în acelaş plan. Condiţia ca două drepte să fie concurente. Distanţa de la un punct la o dreaptă din plan. Distanţa de la un punct la o dreaptă din spaţiu. Intersecţia a două plane Lungimea perpendicularei comune la două drepte. Ecuaţiile cercului şi sferei 573

Curbe

Derivate. Generalităţi. Derivata unui vector. Derivata unei sume geometrice. Derivata unui produs scalar Derivata geometrică a unui produs vectorial. Vector de direcţie fixă. Vector de modul constant în plan. Derivate în coordonate polare. Vector derivat nul. Primitive . . 582

Curbe plane. Tangenta la o curbă plană. Curbura unei curbe plane. Triedrul lui Frenet. Expresiunea curburei. Poziţia unei curbe în vecinătatea unuia din punctele sale. Punct ordinar. Punct de inflexiune. Punct de întoarcere. Centru de curbură. Desfăşurată. Desfăşurătoare. Curbe paralele. Determinarea centrului de curbură. Contactul a două curbe. Exemple. Cercul. Elipsa. Cicloida 591

Curbe strâmbe. Tangenta. Plan normal. Variaţia de lungime a unui segment de dreaptă. Plan osculator. Binormala. Normala principală Plan rectifiant. Curbura. Centru de curbură. Torsiunea. Formulele lui Frenet. Expresia curburei. Expresia torsiunei. Aplicaţie. Elicea . . 608

VERIFICAT 1987

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

2007

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
STR. MEMORANDULUI 22, CLUJ.

GHEORGHE BRATU, Profesor la Universitatea din Cluj — **Curs de Matematici Generale.** — Editura Universității din Cluj.

VOLUMUL I. — **Matematici elementare** (în două fascicole):

FASC. I. — *Calcul numeric. Calcul algebric. Reprezentare grafică.* — 320 pagini și 62 figuri . . . . . 160 Lei.

FASC. II. — *Calculele cu logaritmi. Trigonometrie. Operații cu numere aproximate.* — 200 pagini și 40 figuri . . . . . 110 Lei

VOLUMUL I. — **Matematici elementare** (complect) . . . . . 270 Lei.

VOLUMUL II. — **Matematici superioare.** — *Elemente din Algebra superioară, Geometria analitică* în plan și în spațiu, *Calcul diferențial și integral.* (în preparare).

AUREL ANGELESCU, Profesor la Universitatea din Cluj. — **Lecțiuni de Calcul Diferențial.** — *Mulțimi. Limite. Serii. Derivate și diferențiale. Extreme. Schimbări de variabile.* — VOLUMUL I din **Lecțiuni de Analiză Matematică** dela Universitatea din Cluj. . . . . 140 Lei.

GHEORGHE BRATU, Profesor la Universitatea din Cluj. — **Lecțiuni de Calcul Integral.** — VOLUMUL II din **Lecțiuni de Analiză Matematică** dela Universitatea din Cluj . . . . . (În preparare).

N. ABRAMESCU, Profesor la Universitatea din Cluj. — **Lecțiuni de Geometrie Analitică** urmate de **Introducere elementară în studiul analitic al Geometriilor Neeuclidiene și Noțiuni elementare de Geometrie Vectorială** . . . . . 535 Lei.

N. ABRAMESCU, Profesor la Universitatea din Cluj și **V. LUPAN,** Profesor secundar. — **Lecțiuni de Trigonometrie plană.** Un volum cu 160 pagini și 60 figuri: 50 Lei.

AL. MANICATIDE. — **Algebră** pentru cl. V-a reală, revăzută de **N. ABRAMESCU,** profesor la Universitatea din Cluj; ediția IX, 1926 . . . . . 110 Lei.

AUREL CIORTEA, Rectorul Academiei Comerciale din Cluj și **F. I. BLAGA.** — **Curs de Fizică experimentală,** ediția a II-a modificată de A. CIORTEA. Volumele I și II cu 798 pagini și 547 figuri . . . . . 220 Lei.

AUREL CIORTEA, Profesor la Academia Comercială din Cluj. — **Introducere la principiul relativității.** Un volum cu 60 pagini . . . . . 10 Lei.

I. POPESCU-VOITEȘTI, Profesor la Universitatea din Cluj. — **Elemente de Geologie,** ediția a II-a, 468 figuri și o hartă geologică . . . . . 110 Lei.

VICTOR PAPILIAN, Profesor la Facultatea de Medicină din Cluj. — **Tratat de Anatomie umană.** — Editura Universității din Cluj.

VOLUMUL I. — *Generalități, osteologie, artrologie, miologie.* — 630 pagini și 275 figuri . . . . . 280 Lei

VOLUMUL II — *Angiologia, Sistem nervos central și periferic.*

FASC. I. — 222 pagini cu 115 figuri . . . . . 300 Lei.

FASC. II. — 272 pagini cu 120 figuri . . . . . 300 Lei.

Dr. TITU VASILIU, Profesor la Facultatea de Medicină din Cluj. — **Sângele și Organele hematopoetice. Hematologia.** Tratat de Patologie clinică și Anatomie patologică, cu trei planșe în colori, 170 figuri și 528 pagini . . . . . 340 Lei.

Prețul 535 Lei.