

B

LECTIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA D-LUI GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZĂ MATEMATICĂ LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

VOLUMUL I.



LECTIUNI
DE

CALCUL DIFERENȚIAL

REDACTATE DE

Vno I

AUREL ANGELESCU,
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

MULȚIMI. — LIMITE. — SERII.
DERIVATE ȘI DIFERENȚIALE. — EXTREME.
SCHIMBĂRI DE VARIABLE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL”
STR. MEMORANDULUI 22.
1927.

CURS
DE
ANALIZĂ MATEMATICĂ.

VOLUMUL I.

Inv. A. 45.547

260654

260655

LECȚIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA D-LUI GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZĂ MATEMATICĂ LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.



VOLUMUL I.

LECȚIUNI
DE

CALCUL DIFERENȚIAL

REDACTATE DE

AUREL ANGELESCU,

PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

MULȚIMI. — LIMITE. — SERII.
DERIVATE ȘI DIFERENȚIALE. — EXTREME.
SCHIMBĂRI DE VARIABLE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL”
STR. MEMORANDULUI 22.

1927.

125607

246

COTA 63675

CONTROL 1953

RC 88/03

1953

B.C.U.Bucuresti



C125607

*Dedicăm acest prim curs de Analiză Ma-
tematică tipărit în limba română, Domnului*

Dimitrie Pompeiu

*Profesor la Universitatea din București,
Organizatorul și directorul Seminarului de Matematici
dela Universitatea din Cluj,*

în semn de admirație și dragoste colegială.

INȘTIINȚARE.

Ca profesor de Calcul diferențial și integral la Facultatea de Științe din Cluj, am avut ocazia să constat, în fiecare an, cât de mult se resimte — mai ales pentru studenții din noile provincii românești — lipsa unui tratat de ANALIZĂ MATEMATICĂ în limba română.

Pe de altă parte, din publicarea manualului meu de MATEMATICI GENERALE, cunoscând sacrificiile de timp și de muncă, ce necesită redactarea unui astfel de curs, precum și greutatea cu care se tipărește la noi o carte de Matematici superioare și totuși pentru a asigura apariția cât mai repede a acestor lecțiuni, m'am adresat la câțiva colegi de la Universitatea din Cluj, rugându-i să colaboreze la redactarea unui manual elementar de ANALIZĂ MATEMATICĂ, în care să fie tratate toate chestiunile, care se cer de obicei la examenul de Calcul diferențial și integral pentru licență în Matematici.

Modalitatea la care ne-am oprit este aceea de a scoate cursul în mai multe volume, cu a căror coordonare și uniformizare mă voi ocupa eu, așa ca toate volumele împreună să poată forma un tot.

Primul volum, intitulat: LECȚIUNI DE CALCUL DIFERENȚIAL, e redactat de D-l A. ANGELESCU, profesor de Teoria Funcțiunilor la Universitatea din Cluj. Volumul al doilea LECȚIUNI DE CALCUL INTEGRAL va fi redactat de mine. Celelalte volume vor fi destinate aplicațiilor geometrice, ecuațiilor diferențiale și ecuațiilor cu derivate parțiale.

Țin să exprim aici mulțumirile mele Ministerului Instrucțiunii, care a binevoit să ne înlesnească apariția acestui prim volum, precum și Institutului de Arte Grafice „Ardealul“, care — cu toate sacrificiile legate de imprimarea unui curs de Analiză Matematică — și-a dat toată silința ca aceste lecțiuni să apară în condițiile cele mai ieftine și cele mai bune.

Cluj, 17 Noembrie 1926.

GHEORGHE BRATU.

PREFAȚĂ.

Titlul de *Lecțiuni de Calcul Diferențial* dat acestui volum este poate prea restrâns, căci primele trei capitole, adică aproape jumătate din cuprinsul acestor lecțiuni, sunt destinate chestiunilor introductive: Mulțimi de numere, Limite, Funcțiuni și Serii.

Am căutat în expunerea făcută să fiu cât mai elementar, atingând numai, fără a intra în prea multe detalii, chestiunile mai delicate ce sunt desbătute în câteva din tratatele moderne de *Analiză Metematică*.

Pentru lămurirea și complectarea teoriilor expuse am crezut util să adaug după fiecare capitol un mic număr de exerciții, în parte noi, a căror soluție se găsește indicată în mod sumar.

Scopul lecțiunilor de față nu este altul de cât de a pune la îndemâna studenților noștri un manual didactic de *Calcul Diferențial* scris în românește.

AUREL ANGELESCU.

TABLA DE MATERII.

	<u>Pag.</u>
CAPITOLUL I. — <i>Mulțimi de numere. — Limite</i>	1
I. — Numere reale. — Mulțimi	1
II. — Variabile reale. — Limite	11
Exerciții	18
CAPITOLUL II. — <i>Funcțiuni</i>	20
I. — Funcțiuni de o variabilă	20
II. — Funcțiuni de mai multe variabile	30
Exerciții	32
CAPITOLUL III. — <i>Serii</i>	34
I. — Șiruri. — Serii numerice	34
II. — Serii de funcțiuni	46
Exerciții	52
CAPITOLUL IV. — <i>Derivarea funcțiilor de o variabilă</i>	55
I. — Infiniți mici. — Metoda infinitezimală	55
II. — Derivate și diferențiale	59
III. — Proprietățile derivatelor	71
Exerciții	75
CAPITOLUL V. — <i>Desvoltarea funcțiilor. — Extreme</i>	78
I. — Formulele lui Taylor și Maclaurin	78
II. — Valoarea adevărată a expresiunilor nedeterminate	85
III. — Maximele și minimele funcțiilor de o variabilă	90
Exerciții	93
CAPITOLUL VI. — <i>Funcțiuni de mai multe variabile</i>	96
I. — Derivarea și diferențierea funcțiilor explicite de mai multe variabile	96
II. — Funcțiuni implicite	108
III. — Funcțiuni dependente și independente	116
Exerciții	119
CAPITOLUL VII. — <i>Extreme. — Schimbări de variabile</i>	121
I. — Extremele funcțiilor de mai multe variabile	121
II. — Schimbarea variabilelor	130
Exerciții	137

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

CAPITOLUL I.

MULȚIMI DE NUMERE. — LIMITE.

I. — NUMERE REALE. — MULȚIMI.

1. Numere raționale. NUMERE ÎNTEGI. Nu vom încerca să dăm o definițiune a numerelor întregi; vom considera această noțiune ca intuitivă. Nu ne oprim nici asupra operațiunilor cu aceste numere. Vom observa numai că ideea de *infinit* este cuprinsă în acea de număr întreg; *șirul numerelor întregi este nelimitat*, pentru că după fiecare număr întreg urmează un alt număr întreg diferit de el și de toate celelalte numere dinaintea lui.

NUMERE FRAȚIONARE. Măsura lungimilor a introdus din timpurile cele mai vechi numerele *fracționare*. Putem considera o fracție $\frac{m}{n}$ (m și n numere întregi) ca o păreche de numere având roluri diferite. Definierea operațiunilor cu aceste numere trebuie să fie astfel făcută, ca să nu conducă la contradicții. Așa, de exemplu, definiția produsului a două fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ trebuie să ne conducă la definiția produsului a două numere întregi, atunci când m e divizibil prin n și p e divizibil prin q .

NUMERE NEGATIVE. Numerele negative s'au introdus în algebră ca soluții *false* ale ecuațiilor. Din interpretarea acestor soluții s'a degajat treptat, treptat ideea de număr negativ și număr pozitiv. Considerarea numerelor precedate de semnul $+$ sau $-$ pentru a determina un punct pe o axă *dirijată* a fost un eveniment de cea mai mare importanță în evoluția științelor matematice.

NUMERE RAȚIONALE. Numărul *zero* împreună cu numerele întregi și fracționare, pozitive și negative, formează mulțimea numerelor *raționale*.

Din două numere raționale distincte a și b unul este *mai mare* de cât celălalt. Dacă a este mai mare decât b , scriem $a > b$ sau $b < a$.

Dacă între trei numere a, b, c avem $a > b$ și $b > c$, vom avea și $a > c$. Exprimăm aceste proprietăți zicând că mulțimea numerelor raționale este *ordonată*.

Mai reamintim că între două numere raționale diferite putem întotdeauna intercala altele mai mari de cât cel mai mic și mai mici de cât cel mai mare și astfel încât diferența dintre două numere consecutive se fie ori cât de mică vrem.

2. Numere iraționale. NOȚIUNEA DE TĂETURĂ ⁽¹⁾. Definirea numerelor *iraționale* o vom bază pe posibilitatea de a separa *totalitatea* numerelor raționale în două clase, o clasă inferioară A și o clasă superioară B astfel ca:

- 1) Orice număr rațional să facă parte sau din clasa A sau din clasa B.
- 2) Orice număr rațional α din clasa A să fie mai mic de cât orice număr rațional β din clasa B.

Când am obținut o astfel de separare zicem că am făcut o *tăetură* în șirul numerelor raționale. Vom vedea, mai departe, unele procedee simple, care ne conduc la tăeturi.

În privința claselor A și B trei cazuri sunt posibile:

1^o. Clasa inferioară A conține un număr α mai mare decât toate celelalte numere din această clasă.

Prin urmare clasa A este formată din numărul α și din toate numerele raționale mai mici decât α ; iar clasa B din toate numerele mai mari decât α . În acest caz observăm că din definiția claselor A și B reiese că în clasa B nu putem avea nici un număr mai mic decât toate celelalte numere din această clasă. *(A) B este vorba tot de clasa B.*

În adevăr, dacă un astfel de număr β ar exista, el ar fi mai mare decât α , căci este din clasa B și între α și β , diferite, ar exista alte numere raționale, care ar fi toate în afară de clasele A și B, ceea ce este în contradicție cu definiția acestor clase.

2^o. Ipoteza precedentă ne fiind realizată, să presupunem că clasa superioară B ar conține un număr α mai mic decât toate celelalte numere din această clasă. Prin urmare clasa B este formată din numărul α și din toate numerele mai mari decât α , iar clasa A din toate numerele mai mici decât α . În acest caz, în clasa A, nu putem avea nici un număr mai mare decât toate celelalte numere din această clasă.

Aceste două cazuri sunt foarte ușor de realizat. Luăm un număr oarecare α ; așezăm în clasa A toate numerele mai mici decât α și în clasa B toate numerele mai mari decât α . Dacă așezăm numărul α în

(1) Noțiune datorită lui Dedekind.

clasa A, avem cazul întâi, dacă îl așezăm în clasa B, avem cazul al doilea. În ambele cazuri zicem că numărul α determină tăetura (A, B) și că această tăetură este rațională.

3°. Se poate însă întâmpla să nu existe nici în clasa A un număr mai mare decât toate, nici în clasa B un număr mai mic decât toate.

Fie, de exemplu, β un număr rațional, pozitiv și nu patrat perfect; vom așeza în clasa A toate numerele raționale negative și numerele raționale pozitive al căror patrat e mai mic decât β , iar în clasa B toate numerele raționale pozitive al căror patrat e mai mare decât β .

Așa fiind, în clasa A nu poate exista un număr mai mare decât toate celelalte. În adevăr, dacă a este un număr din clasa A, patratul lui e mai mic decât β și calculând rădăcina patrată din β , cu un număr suficient de cifre zecimale, prin lipsă, putem găsi întotdeauna un număr rațional α , care să satisfacă neegalitățile $\alpha > a$ și $\alpha^2 < \beta$.

În mod analog se arată că în clasa B nu poate fi nici un număr mai mic decât toate celelalte.

Când condițiile cazului 3° sunt îndeplinite, zicem că tăetura este irațională. Tăetura (A, B) ne definește un număr irațional prin condiția ca acest număr să fie mai mare decât toate numerele din clasa A și mai mic decât toate numerele din clasa B. Vom însemna, de aci înainte, acest număr cu o literă.

EXEMPLE de numere iraționale: $\sqrt{5}$, π , e , etc.

Totalitatea numerelor iraționale corespunde la totalitatea tăeturilor de tipul 3° posibile.

VALORI APROPIATE. Fie λ un număr irațional definit prin tăetura (A, B) și ϵ un număr rațional pozitiv ori cât de mic voim. Să considerăm progresia aritmetică

$$(1) \quad a, a + \epsilon, a + 2\epsilon, a + 3\epsilon, \dots$$

unde a este un număr din clasa A. Termenii acestei progresii crescând la infinit cu n , vom găsi în ea și termeni din clasa B. Fie $a + n\epsilon$ primul termen al progresiei (1), care aparține clasei B; $a + (n-1)\epsilon$ aparține clasei A și avem

$$a + (n-1)\epsilon < \lambda < a + n\epsilon.$$

Numerele raționale $a + (n-1)\epsilon$ și $a + n\epsilon$ se zic valori apropiate de λ cu o aproximație mai mică de cât ϵ , primul prin lipsă, al doilea prin adaos.

Prin urmare: Oricât de mic ar fi numărul rațional și pozitiv ϵ , pu-

tem determina întotdeauna două numere raționale a și b , respectiv din clasele A și B ale unui număr irațional λ , așa încât să avem $b - a = \varepsilon$.

Vom putea găsi astfel:

pentru $\varepsilon = \frac{1}{10}$ numerele a_1, b_1 cu $b_1 - a_1 = \frac{1}{10}$

„ $\varepsilon = \frac{1}{100}$ „ a_2, b_2 „ $b_2 - a_2 = \frac{1}{100}$

„ $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$ „ a_n, b_n „ $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$

și vom avea

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

cu

$$a_n < \lambda < b_n$$

pentru orice valoare a lui n .

3. Numerele reale. Totalitatea numerelor raționale și iraționale formează mulțimea numerelor reale.

Ordonarea numerelor reale implică determinarea relațiilor de egalitate și neegalitate dintre aceste numere.

Compararea unui număr rațional r cu un număr irațional λ , determinat de tăetura (A, B), este imediată: dacă numărul r se găsește în clasa A, este mai mic decât λ , iar dacă se găsește în clasa B este mai mare decât λ .

Să comparăm acum două numere iraționale. Fie λ un număr irațional definit prin tăetura (A, B). Vom zice că alt număr irațional λ' definit prin tăetura (A', B') este egal cu λ , atunci când orice număr din clasa A' face parte din clasa A și orice număr din clasa B' face parte din clasa B. Vom zice că numărul rațional λ' este mai mare decât λ , sau că λ este mai mic decât λ' , dacă un număr din clasa A' se găsește în clasa B.

Un număr real este pozitiv, dacă este mai mare decât un număr rațional pozitiv; este negativ, dacă este mai mic decât un număr rațional negativ. Prin urmare putem scrie și pentru numerele iraționale $\lambda > 0$ pentru λ pozitiv, și $\lambda < 0$ pentru λ negativ.

Să arătăm acum că între două numere reale diferite putem întotdeauna intercala un număr rațional și deci o infinitate.

În adevăr, dacă amândouă numerele sunt iraționale, propoziția se confundă cu definiția pe care am dat-o neegalității a două numere iraționale.

Să presupunem însă că numai unul din numere este irațional, de-

finit prin tăetura (A, B). Celălalt număr, fiind rațional, se va găsi în clasa A sau în clasa B, dar nu va fi nici cel mai mare din clasa A, nici cel mai mic din clasa B; prin urmare și în acest caz propoziția este adevărată.

În fine când ambele numere sunt raționale, propoziția este cunoscută din aritmetica elementară.

Simetricul unui număr rațional se numește acel număr *schimbat de semn*. Să extindem această definiție la numerele iraționale.

Fiind dat un număr *real* λ definit prin tăetura (A, B), vom însemna cu $-A$ și $-B$ clasele ce se obțin respectiv din A și B când, luăm simetricele numerelor ce le compun; este evident că în clasele $-A$ și $-B$ împreună întră *totalitatea* numerelor raționale și că fiecare număr din clasa $-B$ este mai mic decât fiecare număr din clasa $-A$. Tăetura $(-B, -A)$ definește deci un număr *real*, pe care îl însemnăm cu $-\lambda$ și vom zice că este *simetricul* lui λ .

Dacă un număr este pozitiv, simetricul său este negativ. Dintre numerele λ și $-\lambda$ acel, care este *pozitiv*, se numește *valoarea absolută* a lui λ și se notează cu $|\lambda|$.

Inversul unui număr rațional r este $\frac{1}{r}$. Fie λ un număr irațional; putem considera acest număr ca o tăetură făcută în totalitatea numerelor raționale *de acelaș semn* cu el și fie (A, B) acea tăetură. Să însemnăm cu A^{-1} și B^{-1} clasele formate respectiv de *inversele* numerelor din A și din B. Cum orice număr rațional diferit de zero este inversul unui număr rațional, rezultă că tăetura (B^{-1}, A^{-1}) definește un număr irațional de acelaș semn cu λ , pe care îl vom însemna cu $\frac{1}{\lambda}$ și îl vom numi *inversul* lui λ .

4. Operațiile cu numere reale. ADUNAREA. Fie λ și λ' două numere reale și a, b, a', b' patru numere *raționale* așa încât să avem

$$a < \lambda < b, \quad a' < \lambda' < b'.$$

Este evident că:

1°. toate numerele raționale de forma $a + a'$ sunt mai mici decât numerele de forma $b + b'$;

2°. nici unul dintre numerele $a + a'$ nu e mai mare decât toate numerele de forma $a + a'$;

3°. nici unul dintre numerele $b + b'$ nu e mai mic decât toate numerele de forma $b + b'$.

Să arătăm că există un număr real λ'' și numai unul, mai mare decât toate numerele $a + a'$ și mai mic decât toate numerele $b + b'$.

În adevăr, punând în clasa A orice număr rațional care e mai mic decât toate numerele de forma $b + b'$ și în clasa B toate celelalte numere raționale, am format tăietura (A, B), care definește un număr real λ . În particular, în clasa A sunt toate numerele de forma $a + a'$ și în clasa B toate numerele de forma $b + b'$ și cum nu există un număr, care să fie cel mai mare de forma $a + a'$ și nici un număr cel mai mic de forma $b + b'$, trebuie să avem

$$a + a' < \lambda < b + b'.$$

Numărul λ este unic. În adevăr, dacă ar fi două numere λ_1 și λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) care să satisfacă la neegalitatea precedentă, am avea, pentru toate numerele a, a', b, b' considerate, neegalitatea

$$\lambda_2 - \lambda_1 < (b + b') - (a + a') = b - a + b' - a',$$

ceea ce este imposibil, deoarece există numere a, b, a', b' pentru care diferențele $b - a$ și $b' - a'$ pot fi ori cât de mici, în particular mai mici decât $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$. Numărul λ astfel definit se numește *suma* numerelor reale λ, λ' . Vom scrie dar

$$\lambda + \lambda' = \lambda''.$$

Din această definiție a adunării, care cuprinde ca un caz particular adunarea numerelor raționale, reiese proprietatea comutativă,

$$\lambda + \lambda' = \lambda' + \lambda.$$

În mod analog se definește suma a mai multor numere reale și se verifică proprietatea asociativă

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Să verificăm că suma numerelor λ și λ' , unde λ' este *simetricul* lui λ , este *nulă*. Se vede imediat, în acest caz, că numerele de forma $a + a'$ sunt toate negative și numerele de forma $b + b'$ sunt toate pozitive; deci $\lambda + \lambda' = 0$.

SCĂDEREA. Pentru a scădea un număr λ din numărul μ , vom adăuga numărului μ pe λ' , simetricul lui λ ; rezultatul d al scăderii îl numim *diferență*, deci

$$d = \mu + \lambda'.$$

Se vede imediat că, dacă adunăm pe λ cu d , căpătăm pe μ , conform definiției obișnuite a scăderii, deoarece

$$d + \lambda = (\mu + \lambda') + \lambda = \mu + (\lambda' + \lambda) = \mu.$$

Se mai poate scrie

$$d = \mu - \lambda.$$

INMULȚIREA. λ și λ' fiind două numere reale pozitive, să considerăm toate numerele raționale și pozitive a, b, a', b' , care verifică neegalitățile

$$a < \lambda < b, \quad a' < \lambda' < b'.$$

Produsele de forma aa' sunt mai mici decât cele de forma bb' și cum există diferențe de formele $b - a$ și $b' - a'$, care să fie ori cât de mici voim, rezultă că sunt și diferențe de forma $bb' - aa'$ oricât de mici am voi. Raționând atunci ca în cazul adunării, vedem că există un număr real și pozitiv λ'' , și numai unul, mai mare decât toate produsele de forma aa' și mai mic decât cele de forma bb' . Acest număr se numește *produsul* numerelor λ și λ' .

Vom scrie dar

$$\lambda \cdot \lambda' = \lambda''.$$

Regula semnelor se extinde imediat în cazul când unul sau ambele numere λ, λ' ar fi negative.

Proprietățile *comutative*, *asociative* și *distributive* reprezentate prin egalitățile

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma, \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

se verifică imediat.

Un produs de mai mulți factori nu poate fi *nul*, decât dacă unul din factori este nul.

Se mai verifică ușor că produsul unui număr prin inversul său este egal cu 1.

IMPĂRȚIREA. Pentru a împărți un număr λ printr'un număr μ , vom înmulți pe λ prin μ_1 , inversul lui μ . Rezultatul c al acestei operații se numește *cât*. Se verifică imediat că $\mu c = \lambda$.

Mai putem scrie

$$\frac{\lambda}{\mu} = c.$$

PUTERI RAȚIONALE. Dacă n este un număr întreg și pozitiv, *ridicarea la puterea n* a unui număr λ este o consecință imediată a definiției înmulțirii.

Să definim rădăcina aritmetică de ordinul n a unui număr pozitiv λ . Vom separa totalitatea numerelor raționale pozitive în două clase A și B: în clasa A vom pune acele numere raționale, care ridicate la puterea n -a ne dau numere mai mici decât λ , iar în clasa B vom pune celelalte numere raționale pozitive. Am format astfel o tăietură (A, B), care ne definește un număr numit *rădăcina de ordinul n din λ* și pe care îl însemnăm prin $\sqrt[n]{\lambda}$.

Se vede imediat că numărul $\sqrt[n]{\lambda}$ astfel definit este irațional, afară de cazul când λ ar fi puterea a n -a a unui număr rațional.

Prin definiție avem apoi

$$\lambda^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\lambda^m}, \quad \lambda^0 = 1, \quad \lambda^{-r} = \frac{1}{\lambda^r}$$

unde m și n sunt numere întregi pozitive și r un număr rațional.

Aceste definiții sunt suficiente pentru a stabili, fără nici o dificultate, regulile de calcul cu exponenți raționali pozitivi sau negativi.

EGALITĂȚI ȘI NEEGALITĂȚI. Se poate arăta ușor că regulile elementare cunoscute de transformare și de combinare a egalităților și neegalităților subzistă și pentru numerele astfel generalizate.

5. Corespondența între mărimi și numere. Numerele reale se întrebuințează pentru a exprima măsura mărimilor concrete. Se admite, ca un postulat, că, dacă unitatea de măsură a fost aleasă, la fiecare *cantitate* dintr'o mărime corespunde un *număr* și reciproc.

Să considerăm o dreaptă nesfârșită pe care vom lua :

1^o. un punct O ca *origine*;

2^o. un *sens pozitiv*, de exemplu dela O spre dreapta;

3^o. un segment *unitate* OA în sensul pozitiv.

Vom zice că punctele O și A corespund respectiv numerelor 0 și 1 .

La orice *punct* P de pe dreaptă va corespunde un *număr real* $a = OP$ bine determinat, pozitiv dacă punctul P se găsește de aceeaș parte cu A față de O , negativ în caz contrar; și reciproc, la oricare număr real a corespunde un punct P ($a = OP$). Ținând seama de această reprezentare geometrică, vom putea zice, de aci înainte, în loc de numărul a , punctul a și invers.

6. Marginile unei mulțimi de numere. Când avem un număr finit sau infinit de numere, care se bucură toate de o proprietate comună, zicem că avem o *mulțime* de numere.

Spre exemplu, putem considera mulțimea numerelor raționale, mulțimea numerelor cuprinse între 0 și 1 , mulțimea numerelor întregi și pozitive mai mici decât 100 , etc.

Dacă mulțimea este formată dintr'un număr *finit* de numere, atunci unul din numerele mulțimii este mai mare decât celelalte. Când mulțimea cuprinde un număr *infinit* de numere, nu mai putem afirma acelaș lucru; așa, de exemplu, în mulțimea numerelor *negative* nu există nici un număr mai mare decât toate celelalte. Aceste constatări ne conduc la noțiunile de *margini* ale unei mulțimi.

O mulțime este *mărginită superior* sau *la dreapta*⁽¹⁾, dacă putem determina un număr A mai mare decât toate numerele mulțimii; este *mărginită inferior* sau *la stânga*, dacă putem determina un număr a mai mic de cât toate numerele mulțimii. Dacă mulțimea este mărginită și superior și inferior, zicem că este *mărginită*.

MARGINE SUPERIOARĂ. Fie (μ) o mulțime de numere mărginită superior. Față de această mulțime putem despărți toate numerele reale în două clase A și B . Vom zice că un număr n este din clasa A , dacă există cel puțin un număr, din mulțimea (μ) , mai mare de cât n ; în caz contrar n este din clasa B . Cum am presupus mulțimea (μ) mărginită superior, este evident că avem numere din ambele clase și că orice număr din clasa A este mai mic decât orice număr din clasa B .

Să arătăm că există un număr M , care desparte aceste două clase; adică orice număr mai mic decât M este în clasa A și orice număr mai mare decât M este în clasa B . În adevăr, zic că numărul M este numărul definit prin tăetura $(\bar{A}, B)$ făcută în modul următor în totalitatea numerelor raționale: luăm în clasa inferioară $\bar{A}$ toate numerele raționale cuprinse în A și în clasa superioară B toate numerele raționale cuprinse în B . Așa fiind, orice număr rațional mai mare decât M este în clasa B și orice număr rațional mai mic decât M este în clasa A . Un număr irațional mai mare decât M , este mai mare decât o infinitate de numere raționale mai mari decât M , adică din clasa B , deci și acel număr irațional este în clasa B ; tot astfel se vede că orice număr irațional mai mic decât M este în clasa A .

Acest număr M se bucură de următoarele două proprietăți:

- 1^o. Nici un număr din mulțimea (μ) nu este mai mare decât M .
- 2^o. Oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε , există întotdeauna, în mulțimea (μ) , un număr mai mare decât $M - \varepsilon$.

În adevăr, dacă ar exista în mulțimea (μ) un număr de forma $M + h$, ($h > 0$), atunci numărul $M + \frac{h}{2}$ ar fi în clasa A , ceea ce este absurd. Proprietatea 2^o este și ea o consecință imediată a definiției numărului M : numărul $M - \varepsilon$ face parte din clasa A , deci avem în mulțimea (μ) cel puțin un număr mai mare decât $M - \varepsilon$.

Numărul M astfel definit se numește *marginea superioară* a mulțimii (μ) ; el poate face parte sau nu din mulțimea (μ) .

EXEMPLE. În mulțimea de numere fracționare

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(1) Având în vedere reprezentarea geometrică a numerelor.

avem $M=1$ și acest număr nu aparține mulțimii, pentru că nu este fracționar. Dar în mulțimea numerelor al căror patrat nu este mai mare decât 2, avem $M=\sqrt{2}$ și el aparține mulțimii considerate.

W OBSERVĂRI. I. Se vede imediat că nu putem avea decât un singur număr, care să se bucure de proprietățile caracteristice ale numărului M .

II. Dacă M nu face parte din mulțimea (μ) , atunci în această mulțime există o *infinitate* de numere mai mari decât $M - \epsilon$. Căci dacă nu ar exista decât un număr *finit*, atunci cel mai mare dintre aceste numere ar avea toate proprietățile numărului M , ceea ce este imposibil.

MARGINE INFERIOARĂ. În mod analog se arată că, dacă o mulțime (μ) este mărginită inferior, există un număr m , numit *margine inferioară* a mulțimii și care se bucură de următoarele două proprietăți:

19. Nici un număr din mulțimea (μ) nu este mai mic decât m .
20. Oricât de mic ar fi numărul pozitiv ϵ , există întotdeauna un număr din mulțimea (μ) mai mic decât $m + \epsilon$.

7. Punct limită. Unei mulțimi de numere îi corespunde o mulțime de puncte pe o dreaptă dirijată, numită *mulțime liniară*. Punctele unei mulțimi mărginite sunt toate pe un segment de lungime finită.

Fiind dată o mulțime liniară, un punct p este numit *punct limită* sau punct de *îngrămădire*, atunci când există o *infinitate* de puncte de ale mulțimii în vecinătatea lui p , sau, mai precis, atunci când există o *infinitate* de puncte de ale mulțimii între $p - \epsilon$ și $p + \epsilon$, ϵ fiind un număr pozitiv arbitrar, oricât de mic.

Să arătăm că: o mulțime liniară (μ) , mărginită, care cuprinde o *infinitate* de puncte, are cel puțin un punct limită.

În adevăr, fie a și b extremitățile intervalului $a b$, care conține toate punctele mulțimei (μ) ; să-l împărțim în două părți egale prin punctul c . Dintre intervalele $a c$ și $c b$ unul cel puțin va conține o *infinitate* de puncte de ale mulțimii (μ) . Fie $a_1 b_1$ acel interval. Operând asupra intervalului $a_1 b_1$, cum am operat asupra lui $a b$, și așa mai departe, obținem segmentele $a b, a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$, fiecare fiind jumătatea celui dinaintea lui și în fiecare găsim o *infinitate* de puncte de ale mulțimii (μ) . Cum avem $a_n b_n = \frac{a b}{2^n}$, vedem că după un număr destul de mare de operațiuni, segmentul $a_n b_n$, care continuă a conține un număr infinit de puncte de ale mulțimii, poate fi făcut mai mic decât un număr pozitiv dat 2ϵ , oricât de mic ar fi el.

Fie p limita comună către care tind numerele $a_n b_n$, când n crește la infinit. Punctul p e un *punct limită* al mulțimii (μ) .

Un punct limită al unei mulțimi poate aparține sau nu acelei mulțimi.

EXEMPLE. Dacă considerăm mulțimea de puncte

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

atunci zero, adică originea, este un punct limită și el nu aparține mulțimii. Din contra în mulțimea de puncte

$$1, 1 - \frac{1}{2}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$$

1 este punct limită și el aparține acestei mulțimi.

O mulțime de puncte poate avea mai multe puncte limită, sau chiar o infinitate. Este evident însă că, dacă o mulțime este formată dintr'un număr finit de puncte, nu are nici un punct limită.

8. Cea mai mare limită. Dacă o mulțime mărginită (μ) are mai multe puncte limită, atunci marginea superioară L a mulțimii formată de aceste puncte limită, se cheamă *cea mai mare limită*, iar marginea inferioară l *cea mai mică limită*.

Din această definiție și din cele ce știm asupra punctului limită reiese că:

1^o. În mulțimea (μ) avem o infinitate de numere care sunt mai mari decât $L - \varepsilon$ și mai mici decât $L + \varepsilon$ și o infinitate de numere care sunt mai mici decât $l + \varepsilon$ și mai mari decât $l - \varepsilon$.

2^o. Nu putem avea în mulțimea considerată decât un număr finit de puncte la stânga punctului $l - \varepsilon$ sau la dreapta punctului $L + \varepsilon$.

EXEMPLU. În mulțimea în care primele 4 numere sunt

$$u_1 = 3, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{8}{9}, u_4 = \frac{17}{16},$$

iar toate celelalte numere, în număr infinit, se calculează după legea următoare:

$$u_n = 2 + \frac{1}{n} \text{ pentru } n = m \cdot 4 + 1,$$

$$u_n = 2 - \frac{1}{n} \quad \quad n = m \cdot 4 + 2,$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \quad n = m \cdot 4 + 3,$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad \quad n = m \cdot 4,$$

cea mai mare limită a mulțimii este 2, iar cea mai mică limită este 1; marginea superioară a mulțimii este 3, iar marginea inferioară $\frac{8}{9}$.

Dacă mulțimea (μ) are numai un singur punct limită, L și l coincid cu acest punct.

Se poate întâmpla ca numerele L și l să coincidă respectiv cu marginile superioară și inferioară ale mulțimii (μ).

II. — VARIABLE REALE. — LIMITE.

9. Variabila reală. O cantitate x care, trece printr'o infinitate de valori reale, se numește o *variabilă reală*. Zicem că x variază în inter-

valul (a, b), când x poate lua toate valorile cuprinse între a și b , împreună cu aceste valori extreme. Vom presupune, când nu vom specifica contrariul, $a < b$. Deci în acest caz a este marginea inferioară și b marginea superioară a intervalului (a, b), ambele accesibile pentru valorile lui x ; intervalul (a, b) este zis *închis*.

Dacă x nu poate lua valoarea a , sau valoarea b , sau ambele valori a și b , zicem că intervalul este *deschis* și că marginile nu sunt accesibile; în acest caz vom însemna intervalul în care variază x prin $(a + 0, b)$, sau $(a, b - 0)$, sau înfine $(a + 0, b - 0)$.

10. Limita unei variabile. Fie o variabilă x , care trece *succesiv* printr-o infinitate de valori, așezate unele după altele după o anumită lege. Zicem că x *tinde către o limită a* dacă, ori cât de mic ar fi numărul ε pozitiv, putem găsi o valoare x_0 a lui x , astfel ca, pentru toate valorile pe care le ia x după x_0 , să avem neegalitatea

$$(1) \quad |x - a| < \varepsilon.$$

În acest caz scriem: $\lim x = a$.

OBSERVARE. Condiția (1) se mai poate scrie

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Din această definiție reiese că o variabilă nu poate tinde în același timp către două limite diferite a și b , căci cantitățile $|x - a|$ și $|x - b|$ devenind mai mici decât ε , din $|x - a| < \varepsilon$, $|x - b| < \varepsilon$, deducem $|b - a| < 2\varepsilon$, ceea ce este imposibil de oarece ε poate fi luat ori cât de mic vom.

Dacă x crește și devine mai mare decât orice număr A , oricât de mare, zicem că x tinde către $+\infty$ și scriem: $\lim x = +\infty$.

Tot astfel dacă x descrește și devine mai mic decât orice număr negativ dat, zicem că x tinde către $-\infty$ și scriem: $\lim x = -\infty$.

11. Principiile teoriei limitelor. I. Dacă variabila x crește neconținut, rămânând însă mai mică decât un număr fix A , x are o limită și această limită este mai mică sau cel mult egală cu A .

În adevăr, mulțimea valorilor ce le poate lua x fiind mărginită superior, avem o margine superioară a acestei mulțimi, pe care să o notăm cu M . Variabila x nu poate deveni mai mare decât M , dar ajunge mai mare decât $M - \varepsilon$ (6); odată această valoare ajunsă, variabila x fiind crescătoare, se va apropia neconținut și mai mult de M . Deci M , evident mai mic sau egal cu A , este limita variabilei x .

În mod analog se arată că: dacă variabila x descrește neconținut dar rămâne mai mare decât un număr B , atunci x are o limită și această limită este mai mare sau cel puțin egală cu B .

$x = \alpha \quad x \rightarrow \alpha$
 $y = \beta \quad y \rightarrow \beta$

II. Fie x și y două variabile având ca limite pe α și β , vom avea

$$\lim (x \pm y) = \alpha \pm \beta, \quad \lim (xy) = \alpha \beta, \quad \lim \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\alpha}{\beta},$$

dacă în ultima egalitate presupunem pe β diferit de zero.

Primele două egalități sunt aproape evidente. Vom demonstra pe cea din urmă. Să punem $x = \alpha + h$ și $y = \beta + k$, unde h și k sunt variabile având ca limită pe zero (fiindcă $|h| = |x - \alpha| < \epsilon$). Vom avea

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + h}{\beta + k} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta h - \alpha k}{\beta(\beta + k)}$$

Cum β este diferit de zero, putem face ca această ultimă fracție să fie mai mică, în valoare absolută, decât orice număr pozitiv. Deci $\frac{x}{y}$ are ca limită pe $\frac{\alpha}{\beta}$.

Propoziția precedentă se poate enunța sub o formă mai generală considerând sume și produse de mai multe variabile, dar în număr finit.

Mai general:

III. Fie $R(x, y, z, \dots)$ o expresie rațională de un număr finit de variabile $x, y, z, \dots$, adică o expresie al cărei calcul nu cere decât cele patru operațiuni fundamentale; dacă variabilele $x, y, z, \dots$ au respectiv ca limită pe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, atunci $R(x, y, z, \dots)$ va avea ca limită expresiunea $R(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Pentru valabilitatea acestei propozițiuni se cere, ca în cazul când în expresiunea R avem operațiuni de împărțire, împărțitorul să nu aibă o limită nulă.

IV. O variabilă a cărei valoare rămâne cuprinsă neconținut între valorile corespunzătoare ale altor două variabile, care au aceeași limită finită, tinde către această limită.

În adevăr, dacă x rămâne cuprins între variabilele u și v , care tind amândouă către același număr finit a , $x - a$ va fi cuprins între diferențele $u - a$ și $v - a$, care tind către zero. Prin urmare $x - a$ tinde către zero; deci x are ca limită pe a .

12. Când am obținut o relație între mai multe variabile, care subzistă pentru o infinitate de valori ale variabilelor, bazându-ne pe principiile precedente, putem înlocui în acea relație variabilele prin valorile lor limite. Această operațiune se numește trecere la limită.

Să dăm câteva exemple de trecere la limită.

10. Fie un număr fix $a > 1$ și m un număr întreg și pozitiv.

Vom avea $a^m > 1$. Din identitatea $a^{m+p} = a^m a^p$, unde p este un întreg pozitiv, deducem că a^m crește în același timp cu m .

Să arătăm că a^m tinde către $+\infty$ când m crește neconținut.

În adevăr, din identitatea

$$a^m - 1 = (a - 1)(1 + a + \dots + a^{m-1})$$

deducem, ținând seama că $a > 1$,

$$a^m - 1 > m(a - 1)$$

sau, făcând $a = 1 + h$, cu $h > 0$, avem

$$(1 + h)^m > 1 + mh.$$

Este deci suficient să arătăm că putem alege un număr întreg m așa încât să avem, ori cât de mare ar fi numărul dat A ,

$$1 + mh > A.$$

Această neegalitate este satisfăcută, dacă luăm numărul întreg m mai mare decât $\frac{A-1}{h}$.

Dacă a este un număr pozitiv mai mic decât 1, el va fi inversul unui număr pozitiv $b > 1$. Deci $a^m = \frac{1}{b^m}$. De aci rezultă că în acest caz puterile succesive ale numărului a merg descrescând și tind către zero când m tinde către $+\infty$.

Să trecem acum la exponenții fracționari. Să arătăm mai întâi că rădăcinile succesive ale numărului $a > 1$, descresc când indicele crește și au ca limită unitatea, când indicele tinde către $+\infty$. În adevăr, se verifică imediat că

$$\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}.$$

Pentru a stabili și partea a doua este suficient să arătăm că putem alege pe m destul de mare, așa încât, ori cât de mică ar fi cantitatea pozitivă ϵ , să avem

$$\sqrt[m]{a} - 1 < \epsilon$$

sau, neegalitatea echivalentă,

$$a < (1 + \epsilon)^m.$$

Pentru aceasta e de ajuns să luăm pe m așa încât $a < 1 + m\epsilon$.

Se arată tot astfel, că dacă numărul pozitiv a este mai mic decât unitatea, rădăcinile sale succesive cresc și au ca limită unitatea.

Dacă fracția rațională $\frac{m}{p}$ tinde către zero, $a^{\frac{m}{p}}$ are ca limită unitatea.

În adevăr, dacă n este partea întreagă a fracției $\frac{m}{p}$, avem

$$\frac{1}{n+1} < \frac{m}{p} < \frac{1}{n};$$

deci a fiind presupus pozitiv, după cele ce preced $a^{\frac{m}{p}}$ e cuprins între $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[n+1]{a}$; cum $\frac{m}{p}$ tinde către zero, n va crește nemărginit și prin urmare (11, IV) $a^{\frac{m}{p}}$ are ca limită unitatea.

Tot astfel se vede ușor că puterile fracționare pozitive ale lui a merg crescând, când exponentul crește, dacă $a > 1$, și merg descrescând dacă $0 < a < 1$.

2°. Dacă variabila x tinde către $+\infty$ este evident că

$$\lim x^n = +\infty \text{ și } \lim \frac{1}{x^n} = 0,$$

oricare ar fi întregul pozitiv n .

Să ne folosim de acest rezultat pentru a găsi limita raportului a două polinoame întregi în x ,

$$\frac{c x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n}{d x^m + d_1 x^{m-1} + \dots + d_m}$$

când variabila x tinde către $+\infty$. Impărțind numărătorul și numitorul cu x^n și trecând apoi la limită, vedem că limita raportului considerat este: *infinită*, dacă $n > m$; *zero*, dacă $n < m$; $\frac{c}{d}$, dacă $n = m$.

3°. Să căutăm limita raportului $\frac{\sin x}{x}$ când x tinde către zero. Se știe din trigonometrie că, pentru arcele x din primul cadran, avem

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \dots \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Făcând pe x să tindă către zero prin valori pozitive, cum $\frac{x}{\sin x}$ rămâne cuprins între două cantități care au ca limită 1, vom avea (11, IV)

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pentru x negativ, putem scrie

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

și raportul are tot limita 1.

4°. Să arătăm că expresiunea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ are o limită bine determinată, când numărul întreg n crește nemărginit. Din identitatea

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

deducem, a fiind pozitiv și mai mic decât unitatea,

$$1 - a^n < n(1 - a).$$

Făcând pe $a = 1 - \frac{1}{n^2}$, căpătăm

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n};$$

de unde, împărțind cu $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ambii membri, suntem conduși la neegalitatea

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

care ne arată că expresia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crește cu numărul întreg n . Pentru a putea arăta existența limitei cerute, este deci suficient să arătăm că mulțimea valorilor ce ia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e mărginită (11, I). Pentru aceea vom folosi neegalitatea

$$(1) \quad (1 - a)^n > 1 - na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$$

unde $0 < a < 1$, iar n un întreg mai mare ca 3. Neegalitatea (1) se verifică imediat pentru $n=4$. Presupunând această neegalitate adevărată pentru n , vedem ușor, înmulțind ambii membri cu $1-a$, că subzistă pentru $n+1$. Ea este deci adevărată pentru orice număr întreg $n > 3$.

Făcând, în (1) $a = \frac{1}{n}$, vom avea

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \right],$$

sau

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} > \frac{1}{3}.$$

Cum însă

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}},$$

deducem că

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 3.$$

Mulțimea valorilor ce ia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este deci mărginită.

Limita expresiei $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, a cărei existență am demonstrat-o, se

însemnează cu e . Din cele arătate vedem că e este cuprins între 2 și 3. Vom indica în altă parte mijlocul de a determina numărul e cu mai multă precizie. Valoarea sa apropiată este 2,718281828.

5°. Dacă b_n crește și devine infinit odată cu n și dacă raportul

$$(1) \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

are o limită pentru n infinit, atunci și raportul $\frac{a_n}{b_n}$ are aceeași limită.

În adevăr, fie λ limita raportului (1). Din definiția limitei unei cantități variabile, reiese că putem determina un număr întreg N așa că, pentru toate valorile lui $n \geq N$, să avem

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \lambda + \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv oricât de mic voim. Ceeace se mai poate scrie ținând seama că $b_{n+1} - b_n$ este pozitiv,

$$(\lambda - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (\lambda + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n).$$

Făcând în aceste neegalități pe n succesiv egal cu $N, N+1, \dots, N+p-1$ și adunând neegalitățile obținute membru cu membru, avem

$$(\lambda - \varepsilon)(b_{N+p} - b_N) < a_{N+p} - a_N < (\lambda + \varepsilon)(b_{N+p} - b_N)$$

Ceeace se mai poate scrie

$$(2) \quad \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} = \lambda + \varepsilon_1,$$

unde $|\varepsilon_1| < \varepsilon$ și $n > N$.

Pentru a stabili propoziția noastră să formăm diferența

$$d = \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - \frac{a_N}{b_N} = \frac{a_n b_N - a_N b_n}{b_n (b_n - b_N)},$$

sau, înlocuind pe a_n prin valoarea sa scoasă din (2), vom avea

$$d = \frac{(\lambda + \varepsilon_1) b_N - a_N}{b_n}.$$

Trecând la limită, adică făcând pe n să tindă către ∞ , vedem că $\lim d = 0$, căci a_N și b_N sunt numere determinate pe când b_n , prin ipoteză, devine infinit cu n .

Deci

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} = \lambda,$$

conform egalității (2).

EXERCITIUL.

1. Când x crește nemărginit, să se precizeze dacă fracția

$$\frac{x^3 + a x^2 + b x + c}{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

ține către unitate prin valori supraunitare sau subunitare.

R. Impărțind numărătorul și numitorul cu x^3 se vede imediat că:

1^o) dacă $a > \alpha$ fracția se apropie de limită prin valori > 1 ; 2^o) dacă $a < \alpha$ fracția este subunitară pentru x destul de mare. Dacă $a = \alpha$, vom împărți numărătorul și numitorul fracției date cu x , în loc de x^3 , etc.

2. $R(u)$, $S(u)$, $T(u)$ fiind trei polinoame întregi în u respectiv de gradele r , s și $r + s$, să se determine limita expresiunii

$$\frac{R(x) S(y)}{T(x + y)}$$

când x și y cresc nemărginit, așa fel încât $\lim \frac{x}{y} = a$.

R. Expresia dată se mai poate scrie

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^r \left(\frac{y}{x+y}\right)^s \frac{R(x)}{x^r} \times \frac{S(y)}{y^s} \times \frac{(x+y)^{r+s}}{T(x+y)}$$

Luând limita fiecărui factor, găsim că limita expresiunii date este

$$\frac{\rho \sigma}{\tau} \cdot \left(\frac{a}{1+a}\right)^r \left(\frac{1}{1+a}\right)^s$$

unde ρ , σ și τ sunt coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt în polinoamele R , S , T .

3. Dacă a_n are ca limită a când n crește nemărginit, să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

R. Din cele ce se vor vedea la nr. 14, rezultă că

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}} \right]^a = e^a;$$

Ținând seama și de neegalitățile

$$1 + \frac{a - \epsilon}{n} < 1 + \frac{a_n}{n} < 1 + \frac{a + \epsilon}{n}$$

deducem limita cerută.

4. Să se arate că avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

p fiind un număr întreg pozitiv.

R. Se va folosi propoziția 5^o dela nr. 12, punând

$$a_n = 1^p + 2^p + \dots + n^p \text{ și } b_n = n^{p+1}.$$

5. Să se arate că expresiunea,

$$E(n) = \frac{(n+a+1)(n+a+2) \dots (2n+a)}{(n+1)(n+2) \dots 2n}$$

unde a este un număr pozitiv, are o limită, când n crește nemărginit.

R. Se va arăta mai întâi că

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n > E(n) > \left(1 + \frac{a}{2n}\right)^n$$

de unde rezultă (Exercițiul 3) că mulțimea valorilor pe care le ia $E(n)$ este mărginită. Se va forma apoi raportul $\frac{E(n+1)}{E(n)}$ și, ținând seama de exercițiul 1, se va putea preciza dacă $E(n)$ crește sau descrește, când n crește.

6. Se consideră șirul de egalități

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a+u_1}, \dots, u_n = \sqrt{a+u_{n-1}}, \dots,$$

unde a este un număr pozitiv. Să se arate că u_n are o limită pentru n infinit și să se calculeze acea limită.

R. Se va arăta că u_n crește cu n rămânând mai mic decât un număr fix; deci (11, 1) u_n are o limită.

Dacă x este acea limită, vom avea $x^2 = a + x$. Cum x trebuie să fie pozitiv, deducem că $x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

7. Fie p și q două numere pozitive, $p > q$ și

$$p_1 = \frac{p+q}{2} \quad q_1 = \sqrt{pq}$$

$$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2} \quad q_2 = \sqrt{p_1 q_1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2} \quad q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}.$$

Să se arate că p_n și q_n au aceleași limite pentru n infinit.

R. Se va considera șirurile

$$(1) \quad p, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

$$(2) \quad q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

Se va arăta că: p_n descrește când n crește, dar $p_n > q$; q_n crește cu n , dar $q_n < p$.

Pe de altă parte se vede că

$$p_1 - q_1 < \frac{p-q}{2}, \quad p_2 - q_2 < \frac{p_1 - q_1}{2} < \frac{p-q}{2^2}, \dots$$

deci

$$p_n - q_n < \frac{p-q}{2^n}.$$

CAPITOLUL II.

FUNCȚIUNI.

I. — FUNCȚIUNI DE O VARIABILĂ.

13. Generalități. Zicem că două variabile x și y sunt funcțiuni una de alta, atunci când există o *dependență* (o legătură) între valorile ce li se pot atribui. Se consideră, în general, una din variabile, de exemplu x , ca independentă. Valorilor arbitrar alese pentru x , corespund valori determinate pentru y . În acest caz se zice că y este *funcție* de x și această dependență se exprimă prin

$$y = f(x).$$

Funcțiunea $f(x)$ este *definită* în intervalul (a, b) , atunci când la orice valoare dată lui x , în intervalul (a, b) , corespunde o valoare determinată pentru $f(x)$. *sau pt. y*

Funcțiunea $f(x)$ definită în intervalul (a, b) este *crescătoare* în acest interval, dacă pentru orice valori $x_1 < x_2$ din acest interval avem $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funcțiunea e *descrescătoare* în intervalul (a, b) , dacă pentru orice valori $x_1 < x_2$ din acest interval avem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Fie (μ) mulțimea valorilor unei funcțiuni $f(x)$ definită în intervalul (a, b) ; dacă mulțimea (μ) este mărginită, zicem că funcțiunea $f(x)$ este *mărginită* în acest interval. Marginile superioară M și inferioară m ale mulțimii (μ) sunt *marginile superioară și inferioară* ale funcțiunii $f(x)$. Diferența $M - m$ se numește *oscilația* funcțiunii în intervalul (a, b) .

OBSERVĂRI. Pentru ca o funcție să fie mărginită într'un interval (a, b) nu-i deajuns să aibă valori finite pentru toate valorile lui x din acest interval.

De exemplu, să definim funcția $f(x)$ în intervalul $(0, 1)$ în felul următor:

$$f(0) = 0 \text{ și } f(x) = \frac{1}{x} \text{ pentru } 0 < x < 1;$$

$f(x)$ are deci o valoare finită pentru orice valoare a lui x din intervalul $(0, 1)$ și cu

toate acestea nu este mărginită în sensul pe care l-am dat acestui cuvânt; căci oricât de mare ar fi numărul A , avem $f(x) > A$ pentru $0 < x < \frac{1}{A}$.

20. Se poate ca o funcție mărginită într-un interval (a, b) să nu ia, pentru nici o valoare a variabilei, valoarea M sau m .

De exemplu, funcția $f(x)$ definită în intervalul $(0, 1)$ prin condițiile

$$f(0) = 0 \text{ și } f(x) = 1 - x \text{ pentru } 0 < x \leq 1,$$

are marginile $m = 0$ și $M = 1$; marginea inferioară este atinsă de $f(x)$ pentru $x = 0$ și $x = 1$; marginea superioară nu este atinsă pentru nici o valoare a lui x .

14. Funcțiuni elementare. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ. Definiția funcției exponențiale λ^x va rezulta din cele ce știm asupra exponenților fracționari. Am văzut (4) ce se înțelege prin λ^x , când λ este un număr pozitiv oarecare și x un număr fracționar. Să definim acum operația λ^x , când x este un număr irațional pozitiv definit prin tăetura (A, B) . Vom folosi șirurile de numere

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

definite anterior (3) așa ca

$$a_n < \lambda < b_n \text{ și } b_n - a_n = \frac{1}{10^n} = \varepsilon.$$

Vom arăta că numerele λ^{a_n} și λ^{b_n} au aceeași limită când n crește nemărginit; această limită, prin definiție, este valoarea lui λ^x .

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, $\lambda > 1$; în acest caz λ^{a_n} merge crescând cu n , dar rămâne mai mic decât λ^b (b fiind un număr oarecare din clasa B). Deci λ^{a_n} are o limită L . Să considerăm diferența

$$\lambda^{b_n} - \lambda^{a_n} = \lambda^{a_n} (\lambda^\varepsilon - 1).$$

Când n crește nemărginit, ε tinde către zero și deci (12, 10) λ^ε tinde către 1. Prin urmare

$$\lim \lambda^{b_n} = \lim \lambda^{a_n} = L.$$

Proprietățile

$$\lambda^x \lambda^y = \lambda^{x+y}, (\lambda^x)^m = \lambda^{mx}, \lambda^{-x} = \frac{1}{\lambda^x}$$

se extind ușor la cazul când exponenții sunt iraționali.

OBSERVARE. Funcțiunea a^x unde $a > 1$ crește dela 0 la ∞ , când x crește dela $-\infty$ la $+\infty$ (12, 10).

FUNCTIA LOGARITMICĂ. Fie $a > 1$. Logaritmul unui număr pozitiv x , în sistemul de logaritmi cu baza a , este puterea y la care trebuie să ridicăm pe a , ca să căpătăm pe x , adică să avem

$$a^y = x.$$

Orice număr pozitiv are un logaritm și numai unul, după cum reiese din observarea precedentă. Corespondența între numărul x și logaritmul său y se însemnează prin

$$y = \log_a x.$$

Din proprietățile funcției exponențiale rezultă proprietățile funcției logaritmice :

$$\log_a uv = \log_a u + \log_a v, \log_a (u^v) = v \log_a u, \log_a x \log_b a = \log_b x.$$

Logaritmii naturali au ca bază numărul e , pe care l-am definit (12, 40), dar căruia putem să-i dăm acum o definiție mai largă. Să arătăm că dacă numărul α tinde către zero, într'un mod arbitrar, vom avea

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

În adevăr, dacă α este pozitiv, $\frac{1}{\alpha}$ este cuprins între două numere întregi consecutive n și $n + 1$, care cresc nemărginit când α tinde către 0.

Avem deci

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Prin urmare cantitatea $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ fiind cuprinsă între două cantități, care au aceeași limită e , va avea ca limită e . Dacă α este negativ, punând

$$1 + \alpha = \frac{1}{1 + \beta},$$

β tinde către zero prin valori pozitive, și avem

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1 + \beta) (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}},$$

asa că suntem conduși la cazul precedent $\alpha > 0$.

FUNCTIUNI TRIGONOMETRICE. Din cele șase funcțiuni trigonometrice, $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$ sunt cele mai întrebuițate în Analiza Matematică.

Presupunem cunoscute din trigonometrie, proprietățile elementare ale acestor funcțiuni. Va trebui să ținem seama însă că de câte ori vom întâlni aceste funcțiuni, variabila x înseamnă măsura unghiului în *radiani*⁽¹⁾.

FUNCTIUNI TRIGONOMETRICE INVERSE. 10. Intre un arc y și linia trigonometrică sinus corespunzătoare avem o dependență, pe care o notăm $x = \sin y$, dacă considerăm pe x ca funcție de y ; sau $y = \arcsin x$, zisă funcțiunea *inversă a sinusului*, dacă considerăm pe y ca funcție de x . Când y crește de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, x ia o singură dată toate valorile cuprinse între -1 și $+1$. Numim *valoarea principală* a funcției $\arcsin x$, valoarea cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$; pe aceasta o vom considera-o întotdeauna, când nu vom preciza contrariul. Este ușor de văzut că pentru o valoare dată lui x , avem, în afară de valoarea principală corespunzătoare a lui y , o infinitate de alte valori cuprinse în formulele

$$y = \arcsin x + 2k\pi, \quad y = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi$$

unde k este un întreg pozitiv sau negativ, iar $\arcsin x$ are valoarea sa principală.

20. Funcția $y = \arccos x$ va avea *valoarea principală* cuprinsă între 0 și π când x descrește dela $+1$ la -1 . Celelalte valori sunt

$$y = 2k\pi + \arccos x, \quad y = 2k\pi - \arccos x.$$

OBSERVARE. Funcțiunile $\arcsin x$ și $\arccos x$ n'au sens, în domeniul real în care rămânem, decât pentru x cuprins în intervalul $(-1, +1)$.

30. Funcția $y = \operatorname{arctg} x$ are o *valoare principală* cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$, când x crește dela $-\infty$ la $+\infty$. Celelalte valori sunt date de formula unică

$$y = \operatorname{arctg} x + k\pi,$$

unde k este un întreg pozitiv sau negativ.

15. Definiții. **FUNCTIUNI UNIFORME ȘI MULTIFORME.** O funcție $f(x)$ este zisă *uniformă* sau cu *determinare simplă*, atunci când pentru fiecare valoare a variabilei, funcțiunea are o valoare unică.

EXEMPLE. Funcțiunile ax , $\sin x$, ... sunt uniforme.

Dacă însă la o valoare dată variabilei corespund mai multe valori pentru funcțiune, atunci zicem că funcțiunea este *multiformă* sau cu *determinări multiple*.

(1) Radianul e unghiul la centru, care corespunde la un arc egal cu raza.

EXEMPLE. Funcțiunile $\sqrt{x}$, $\arcsin x$, sunt multiforme, prima având două determinări de semne contrarii, iar cea de a doua o dublă infinitate de determinări, după cum am văzut.

FUNCTIUNI EXPLICITE ȘI IMPLICITE. Dacă între variabilele x și y avem o relație de forma $y=f(x)$, adică relația între x și y este dată printr-o ecuație rezolvată în raport cu y , zicem că y este *funcție explicită* de x .

În caz contrar zicem că funcțiunea este *implicită* și se notează $F(x, y) = 0$.

Când relația dintre x și y poate fi exprimată printr-o ecuație ai cărei membrii sunt polinoame întregi în x și y , zicem că funcțiunea este *algebrică*; în caz contrar funcțiunea este zisă *transcendentă*.

EXEMPLE: Funcțiunea implicită $x^2 + y^2 = x^3$ este algebrică, iar funcțiunea explicită $y = ax$ este transcendentă.

O funcție algebrică este *rațională*, atunci când ecuația care leagă pe y de x este de gradul întâi în y ; în caz contrar, y privit ca funcție de x , este irațională. Funcția rațională generală este deci câtul a două polinoame în x .

FUNCTIUNI INVERSE. Când y este o funcție explicită de x , $y=f(x)$, de așa natură încât să putem scoate din ecuația ce leagă pe y de x pe x în funcție de y , $x=\varphi(y)$, funcțiunea $\varphi(y)$ se numește *funcțiunea inversă* a funcției $f(x)$.

EXEMPLE. Funcțiunile x^m , ax , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ au respectiv ca inverse $x^{\frac{1}{m}}$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arctg x$.

16. Reprezentarea funcțiunilor. O funcție se reprezintă geometriceste utilizând principiile geometriei analitice. Ecuația $y=f(x)$ reprezintă față de două axe dreptunghiulare Ox , Oy o curbă, care este reprezentarea grafică a funcțiunii.

OBSERVARE. Se poate întâmpla ca y să fie astfel definit în funcție de x , încât să nu avem o curbă, în sensul obișnuit al cuvântului, care să reprezinte funcțiunea. Așa, de exemplu, să definim în felul următor pe y în funcție de x : y este nul pentru toate valorile raționale ale lui x și este egal cu unitatea pentru toate valorile iraționale ale lui x . În acest caz punctele (x, y) ale funcțiunii se găsesc toate pe axa x -ilor și pe paralela dusă prin $(0, 1)$ la această axă; dar pe aceste drepte se găsesc și puncte care nu aparțin funcțiunii și care ar trebui excluse.

17. Continuitate. Fie $y=f(x)$ o funcție definită în intervalul (a, b) și u un punct din acest interval. Zicem că funcțiunea $f(x)$ este *continuă* în punctul u , dacă la oricare număr pozitiv ε corespunde un număr pozitiv η așa încât să avem

$$|f(u+h) - f(u)| < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui h , care satisfac la neegalitatea $|h| < \eta$ și pentru care punctul $u + h$ aparține intervalului (a, b) .

Cu alte cuvinte zicem că $f(x)$ este continuă în punctul u , dacă $f(u + h)$ are ca limită pe $f(u)$, când h tinde către zero după o lege oarecare; ceea ce putem scrie

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u).$$

Funcțiunea $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) , dacă este continuă pentru toate valorile lui x din acel interval și dacă diferențele $f(a + h) - f(a)$ și $f(b - h) - f(b)$ tind către zero, când h tinde către zero prin valori pozitive.

EXEMPLU. Funcția $\sin x$ este continuă pentru orice valoare a variabilei, căci

$$\sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot h.$$

Ținând seama că primii doi factori din ultimul produs sunt mai mici ca unitatea avem

$$|\sin(x + h) - \sin x| < |h|,$$

ceea ce probează continuitatea funcției $\sin x$.

OBSERVARE. Condiția precedentă de continuitate în punctul u , mai poate fi enunțată și astfel: oricărui număr pozitiv ε putem face să-i corespundă un număr η , așa încât să avem

$$f(u) - \varepsilon < f(x) < f(u) + \varepsilon$$

pentru toate valorile lui x din intervalul $(u - \eta, u + \eta)$.

Sub această formă se vede imediat că dacă $f(u)$ este continuă și diferită de zero în punctul u , putem totdeauna găsi un interval $(u - \eta, u + \eta)$ în interiorul căruia $f(x)$ să păstreze acelaș semn cu $f(u)$. Va fi deajuns să alegem numărul arbitrar ε mai mic decât valoarea absolută a lui $f(u)$, căci în acest caz cantitățile $f(u) - \varepsilon$ și $f(u) + \varepsilon$ vor avea acelaș semn cu $f(u)$.

18. Funcțiuni compuse. ¹⁰. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcțiuni continue în acelaș interval. Funcțiunile reprezentate prin suma $f(x) + g(x)$ și produsul $f(x)g(x)$ sunt și ele continue în acest interval. Funcțiunea $\frac{f(x)}{g(x)}$ este continuă în toate punctele intervalului, afară de acelea în care $g(x)$ se anulează.

Cele enunțate rezultă imediat din teoria limitelor (11). Să luăm, de exemplu, cazul raportului, u fiind un punct în care $g(x)$ nu se anulează. Când x tinde către u , $f(x)$ și $g(x)$ tind respectiv către $f(u)$ și $g(u)$, așa că limita raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ este $\frac{f(u)}{g(u)}$.

Rezultă, în particular, că înversa $\frac{1}{f(x)}$ a unei funcțiuni $f(x)$ continuă în intervalul (a, b) , este o funcție continuă în toate punctele acelui interval în care $f(x)$ nu se anulează. Cu alte cuvinte, dacă funcția înversă a unei funcțiuni continue $f(x)$ nu este continuă într'un punct c , din intervalul (a, b) , atunci $f(c) = 0$.

20. Fie $u = f(x)$ și $y = F(u)$; dacă $f(x)$ este continuă pentru $x = \alpha$ și $F(u)$ este continuă pentru $u = f(\alpha)$, atunci y este o funcție continuă de x în punctul α .

În adevăr, când x tinde către α , avem

$$\lim F[f(x)] = F[\lim f(x)] = F[f(\alpha)].$$

19. Proprietățile funcțiilor continue. I. Fie $f(x)$ o funcție continuă în intervalul închis (a, b) și ε un număr pozitiv arbitrar. Putem în totdeauna împărți intervalul (a, b) într'un anumit număr de intervale parțiale, așa fel încât u și v fiind două valori oarecare ale variabilei luate în același interval parțial, să avem

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

pentru toate intervalele parțiale.

Vom relua un raționament făcut anterior. Să presupunem că ne este imposibil a realiza împărțirea intervalului așa cum cere enunțul propoziției. Împărțim intervalul (a, b) în două intervale egale. Imposibilitatea va subzista cel puțin pentru unul din aceste două intervale parțiale, căci în caz contrar propoziția ar fi adevărată. Fie (a_1, b_1) jumătatea intervalului (a, b) în care imposibilitatea subzistă, sau jumătatea din stânga, dacă imposibilitatea subzistă în ambele jumătăți. Vom împărți tot astfel intervalul (a_1, b_1) în două părți egale și vom însemna cu (a_2, b_2) jumătatea acestui interval în care subzistă imposibilitatea, sau jumătatea din stânga în caz de ambiguitate.

Formăm astfel șirul de intervale (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , ... fiecare fiind jumătatea intervalului precedent și ajungem la rezultatul că, oricât de mare ar fi n , putem întotdeauna găsi în intervalul (a_n, b_n) două puncte u și v pentru care să avem

$$(1) \quad |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Să arătăm că acest rezultat este în contradicție cu ipoteza făcută: funcțiunea $f(x)$ continuă în intervalul (a, b) . În adevăr, numerele $a_1, a_2, a_3, \dots$ formează un șir crescător și cum toate sunt inferioare lui b , a_n tinde către o limită λ . Tot astfel vedem că șirul $b_1, b_2, \dots$ este descrescător și b_n tinde către o limită λ' .

Cum însă

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

rezultă, făcând pe n să crească nemărginit, că $\lambda = \lambda'$.

Punctul λ aparține unui interval (a_n, b_n) cuprins în (a, b) ; funcțiunea $f(x)$ fiind continuă pentru $x = \lambda$, putem găsi un număr pozitiv η așa încât să avem

$$(2) \quad |f(x) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $\lambda - \eta < x < \lambda + \eta$. Să luăm acum pe n destul de mare, așa ca numerele a_n și b_n să difere de λ cu mai puțin decât η și deci ca intervalul (a_n, b_n) să fie cuprins în intervalul $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$. Așa fiind, dacă u și v sunt două numere oarecare din intervalul (a_n, b_n) , vom avea, conform neegalității (2),

$$|f(u) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(v) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$, ceea ce este în contradicție cu neegalitatea (1). Prin urmare teorema enunțată este exactă.

II. Orice funcție continuă într'un interval (a, b) , este mărginită în acest interval.

Această propoziție este o consecință a celei precedente. În adevăr, fie $(a, x_1, x_2, \dots, x_n, b)$ o împărțire a intervalului (a, b) în $n+1$ intervale parțiale prin punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$, așa încât enunțul I să fie satisfăcut. Vom putea deci scrie, făcând să coincidă pe u și v cu extremitățile intervalelor în primele p intervale $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{p-1}, x_p)$ și luând în intervalul (x_p, x_{p+1}) pe u în x_p și pe v într'un punct oarecare x al acestui interval,

$$\begin{aligned} f(a) - \varepsilon &< f(x_1) < f(a) + \varepsilon \\ f(x_1) - \varepsilon &< f(x_2) < f(x_1) + \varepsilon \\ &\dots \dots \dots \\ f(x_{p-1}) - \varepsilon &< f(x_p) < f(x_{p-1}) + \varepsilon \\ f(x_p) - \varepsilon &< f(x) < f(x_p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste neegalități deducem

$$f(a) - (p+1)\varepsilon < f(x) < f(a) + (p+1)\varepsilon.$$

Ceea ce ne arată că oricare ar fi x în intervalul (a, b) , $f(x)$ rămâne cuprins între $f(a) - (n+1)\varepsilon$ și $f(a) + (n+1)\varepsilon$ și deci că această funcție este mărginită în acel interval.

III. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă în intervalul (a, b) , putem face să corespundă oricărui număr pozitiv ε , un număr η așa încât, dacă u și v sunt două numere din intervalul (a, b) să avem $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ atunci când $|u - v| < \eta$ (Cantor).

Vom demonstra această propoziție cu ajutorul propoziției I. Fie (a, x) , (x_1, x_2) , ..., (x_n, b) intervalele parțiale, în care am descompus intervalul (a, b) , așa încât să avem

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

u și v fiind două valori arbitrare luate într'unul, oricare, din intervalele parțiale. Fie η un număr mai mic decât toate diferențele $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$, ..., $(b - x_n)$. După felul cum am ales numărul η , reiese că pentru a avea $|u - v| < \eta$ va trebui ca: u și v să fie în același interval parțial, sau, u și v să cadă în două intervale alăturate. În primul caz condițiile din enunț sunt satisfăcute prin felul cum am ales intervalele parțiale. În cazul al doilea avem

$$|f(u) - f(v)| < |f(u) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

unde x_k este extremitatea comună a celor două intervale parțiale alăturate. Propoziția este deci demonstrată.

Proprietatea III se mai poate enunța astfel: o funcție continuă într'un interval (a, b) este *uniform continuă* în acel interval.

IV. Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) și dacă $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrarii, atunci $f(x)$ se anulează în cel puțin un punct c cuprins între a și b .

Să intercalăm între punctele a și b un număr de puncte consecutive destul de apropiate unul de altul, așa încât, valoarea absolută a diferenței valorilor ce ia funcțiunea în două puncte consecutive să fie mai mică decât ε , ceace se poate realiza oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε (I). Dacă funcțiunea $f(x)$ nu se anulează în niciunul din punctele intercalate, atunci urmează că $f(x)$ să schimbe de semn în două puncte consecutive, în care puncte valoarea absolută a funcțiunei este mai mică decât ε . Prin urmare avem puncte în intervalul (a, b) în care $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$; cum însă ε poate fi luat oricât de mic voim, urmează că funcțiunea $\frac{1}{f(x)}$ nu este mărginită în intervalul (a, b) și deci nu este continuă în toate punctele acestui interval (II). Inversa funcțiunei $f(x)$ ne fiind continuă, trebuie ca $f(x)$ să se anuleze în intervalul (a, b) [18, I].

V. Dacă funcțiunea $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) , $f(x)$ ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$.

Această propoziție este o consecință a propoziției precedente. În adevăr, fie A un număr oarecare cuprins între $f(a)$ și $f(b)$. Să considerăm funcțiunea $f(x) - A$, evident continuă în același interval, care ia valori de semne contrarii pentru $x = a$ și $x = b$ și deci se anulează într'un punct c din intervalul (a, b) . Prin urmare $f(c) = A$.

VI. Dacă M și m sunt marginile superioară și inferioară ale funcțiunii $f(x)$, continue în intervalul (a, b) , atunci există întotdeauna cel puțin două valori ale lui x în intervalul (a, b) pentru care $f(x)$ ia valorile M și m (Weierstrass).

Vom face demonstrația numai pentru M , cea pentru m fiind analogă. Să considerăm funcțiunea $M - f(x)$, care poate fi făcută mai mică decât orice număr pozitiv ϵ , căci $f(x)$ poate întrece orice număr de forma $M - \epsilon$. Funcțiunea $\frac{1}{M - f(x)}$ putând întrece orice număr pozitiv oricât de mare ar fi, ea nu este mărginită și deci nici continuă. Va trebui, prin urmare, ca $M - f(x)$ să se anuleze în intervalul (a, b) .

OBSERVĂRI. 1^o. Din propozițiile V și VI reiese că în intervalul (a, b) funcțiunea $f(x)$ trece, cel puțin odată, prin toate valorile cuprinse între M și m .

2^o. Numărul M se mai numește *maximul absolut* și numărul m *minimul absolut* ale funcțiunii $f(x)$ în intervalul (a, b) .

3^o. Pentru valabilitatea propozițiilor enunțate este necesar ca funcțiunea $f(x)$ să fie continuă în intervalul închis $[a, b]$.

EXEMPLU. Funcțiunea $f(x) = 1 + x$ definită în intervalul deschis $(0, 1 - 0)$ (adică variabila ia valoarea zero și toate valorile pozitive mai mici decât 1) are ca margine superioară $M = 2$ și $f(x)$ nu poate atinge, în intervalul considerat, această valoare.

20. **Funcțiuni discontinue.** Să considerăm o funcție $f(x)$ definită în intervalul (a, b) . Dacă această funcție nu este continuă într'un punct u al acestui interval, punctul u este numit *punct de discontinuitate* sau *punct singular*. Va trebui ca $f(u + \epsilon)$ sau $f(u - \epsilon)$ să nu tindă către $f(u)$, când numărul pozitiv ϵ tinde către zero.

Zicem că u este un *punct de discontinuitate de prima specie*, atunci când și $f(u + \epsilon)$ și $f(u - \epsilon)$ au limite determinate, când ϵ tinde către zero. Aceste limite se însemnează cu $f(u + 0)$ și $f(u - 0)$.

Pentru ca u să fie un punct de discontinuitate, trebuie ca numerele $f(u + 0)$ și $f(u - 0)$ să fie diferite, sau, dacă sunt egale, să fie diferite de $f(u)$.

EXEMPLU. Să considerăm, într'un cerc de rază egală cu unitatea, o coardă AB și un diametru $A'B'$ perpendicular pe AB . Fie 2α și 2β lungimile arcelor $AA'B$, $BB'A$; presupunem $\alpha \neq \beta$. Dela A' vom lua, în sensul $A'B'B$ un arc $A'P$ de lungime x

și vom considera unghiul APB ca o funcție de x , notând-o $U(x)$. Când x crește de la 0 la a , $U(x)$ păstrează o valoare constantă β ; când x ia valoarea $a + \epsilon$, avem $U(x) = a$ și u păstrează această valoare până ce x ajunge la $a + 2\beta$. Prin urmare funcția $U(x)$ are în intervalul $(0, a + 2\beta)$ un punct de discontinuitate de prima specie și anume $x = a$. Dacă mărim intervalul în care variază x întâlnim succesiv punctele de discontinuitate $a, a + 2\beta, 3a + 2\beta, \dots$. Reprezentarea grafică a funcției $U(x)$ se face cu cea mai mare ușurință.

Zicem că un punct u este un punct de discontinuitate de *specia a doua*, atunci când $f(u + \epsilon)$ sau $f(u - \epsilon)$ nu tinde către nici o limită determinată.

EXEMPLU. Fie $f(x) = \sin \frac{1}{x-a}$. Punctul a este pentru această funcție un punct de discontinuitate de specia a doua, căci dacă x tinde către a , $f(x)$ nu tinde către nici o limită, valoarea acestei funcțiuni rămânând cuprinsă între -1 și $+1$.

II. — FUNCTIUNI DE MAI MULTE VARIABLE.

21. Generalități. Dacă valorile ce le ia o variabilă t depind de valorile date altor variabile $x, y, \dots$, zicem că t este o *funcție* de aceste variabile. Pentru simplificarea expunerii vom presupune că funcțiunea depinde numai de două variabile independente x și y . Vom considera pe x și y ca fiind coordonatele unui punct în planul axelor dreptunghiulare xOy . La orice sistem de valori pentru variabilele x și y , corespunde un punct în acest plan și invers.

O funcție $t = f(x, y)$ este *definită* într-o anumită regiune R din plan, dacă la oricare punct (x, y) din această regiune corespunde o valoare pentru t . Regiunea R , care se numește *domeniul* sau *câmpul* funcțiunii, este limitată, în general, de un contur închis, numit *frontiera* domeniului.

Un domeniu care conține și frontiera sa este un domeniu *închis*; iar dacă din domeniu se exclude frontiera, domeniul este *deschis*. Când nu se precizează nimic asupra unui domeniu se presupune că el e închis.

Zicem că o funcțiune $t = f(x, y)$ este *mărginită* într'un domeniu R , atunci când mulțimea valorilor ce le ia t , pentru toate punctele (x, y) ale acestui domeniu, este o mulțime mărginită. *Marginea superioară* M , *marginea inferioară* m și *oscilația funcțiunii* $f(x, y)$ în domeniul R se definesc ca și pentru funcțiile de o singură variabilă.

CONTINUITATE. Fie $f(x, y)$ o funcție definită într'un domeniu R și P un punct de coordonate u și v din acest domeniu. Zicem că *funcțiunea* $f(x, y)$ este *continuuă* în punctul P , atunci când la orice număr pozitiv ϵ , putem face să corespundă un număr $\eta > 0$, așa încât să avem

$$(1) \quad |f(u+h, v+k) - f(u, v)| < \epsilon$$

pentru toate valorile $|h| < \eta, |k| < \eta$.

După această definiție punctul de coordonate $u + h, v + k$ se va găsi în interiorul patratului de latură 2ε , având centrul în P și laturile paralele cu axele. Considerând atunci cercul înscris în acest patrat, se vede imediat că definiția continuității funcției $f(x, y)$ în punctul P poate fi înlocuită prin aceasta: *la orice număr ε putem face să corespundă un număr η , așa încât neegalitatea (1), să fie satisfăcută pentru toate valorile lui h și k , pentru care avem $\sqrt{h^2 + k^2} < \eta$, adică pentru toate punctele $u + h, v + k$ situate la o distanță, mai mică decât η , de punctul P .*

Tot astfel zicem că funcțiunea $f(x, y)$ este continuă într'un punct $P(u, v)$ de pe frontieră, atunci când neegalitatea (1) are loc pentru orice punct $u + h, v + k$ situat în regiunea comună a domeniului R și a cercului C cu centrul în P și cu raza η .

Dacă o funcție $f(x, y)$ este continuă în orice punct al unui domeniu R și în orice punct al frontierei acestui domeniu, zicem că este o funcție continuă în R .

OBSERVĂRI. 1^o. Condițiile de continuitate mai pot fi enunțate și în felul următor: Funcțiunea $f(x, y)$ este continuă în punctul $P(u, v)$, dacă la un număr pozitiv ε putem face să corespundă două numere pozitive a și b , astfel ca să avem

$$f(u, v) - \varepsilon < f(x, y) < f(u, v) + \varepsilon$$

pentru toate valorile lui x și y care satisfac la neegalitățile

$$|x - u| < a, |y - v| < b.$$

Se vede atunci imediat, alegând pe ε destul de mic, că dacă funcțiunea $f(x, y)$ este continuă în punctul P , ea va păstra acelaș semn cu $f(u, v)$ în tot dreptunghiul mărginit de dreptele $x = u - a, x = u + a, y = v - b, y = v + b$.

2^o. Din definiția continuității reiese că o funcție continuă în raport cu amândouă variabilele, este continuă în raport cu fiecare variabilă separat.

Reciproca nu este totdeauna adevărată: o funcție de două variabile poate fi funcție continuă în raport cu fiecare din variabile, fără să fie funcție continuă de ambele variabile.

Fie, spre exemplu, funcțiunea $f(x, y)$ pe care o definim în felul următor:

$$f(x, y) = \frac{x y}{x^2 + y^2}$$

pentru toate punctele din plan, afară de punctul $x = 0, y = 0$ pentru care avem $f(0, 0) = 0$. Vedem că funcțiunea $f(x, y)$ este nulă, când punctul (x, y) este pe axa Ox sau pe axa Oy . Această funcție este deci

continuă în origine când x variază singur sau y variază singur. Cu toate acestea funcțiunea $f(x, y)$ nu este continuă în origine.

În adevăr, să facem ca x și y să varieze în așa fel încât să avem $y = \alpha x$ (α o constantă). Pentru x diferit de zero, dar oricât de mic, vom avea

$$f(x, y) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Cum în origine $f(x, y) = 0$, reiese că această funcțiune este discontinuă în origine.

30. Proprietățile, pe care le-am stabilit pentru funcțiunile continue de o variabilă, se pot extinde la funcțiunile continue de două sau mai multe variabile.

EXERCITIUL.

1. Funcțiunile următoare, definite ca limite de funcțiuni continue,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n} \quad x > 0,$$

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} \quad x \text{ oricare},$$

sunt funcțiuni discontinue de x .

R. $f(x)$ este egală cu zero pentru $0 \leq x < 1$ și egală cu 1, pentru $x = 1$.

$\phi(x)$ este egală cu $+1$, pentru $x < 1$; cu -1 , pentru $x > 1$ și cu zero, pentru $x = 1$.

$\psi(x)$ este nulă pentru orice valoare a lui x afară de $x = 0$, când funcțiunea este egală cu 1.

2. Se cere forma generală a unei funcțiuni $f(x)$, continuă în orice interval finit, care satisface la ecuația funcțională

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

oricare ar fi valorile variabilelor x și y .

R. Făcând $y = 0$ avem $f(0) = 0$ și pentru $y = -x$, $f(-x) = -f(x)$. Apoi succesiv $f(x + x) = 2f(x)$, $f(x + 2x) = 3f(x)$, ..., $f(nx) = nf(x)$ și $f(-nx) = -nf(x)$.

Dacă facem $\frac{m}{n}x = y$, m și n două numere întregi pozitive sau negative, vedem că $f(mx) = nf\left(\frac{mx}{n}\right) = mf(x)$ și punând $f(1) = a$, avem $f\left(\frac{m}{n}\right) = a \frac{m}{n}$.

Prin urmare avem $f(x) = ax$ pentru toate valorile raționale ale lui x ; cum funcțiunea căutată este continuă, conchidem că $f(x) = ax$.

3. Să se găsească forma generală a funcției continue $f(x)$ care satisface la ecuația funcțională

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

R. Luăm logaritmi în baza A a ambilor membri și, însemnând $\log_A f(x) = \phi(x)$, vom avea $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$. După exercitiul precedent $\phi(x) = ax$, așa că $f(x) = A\phi(x) = A^ax$.

4. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcțiuni pozitive, continue și crescătoare într'un interval (a, b) . Dacă α și β sunt două puncte din intervalul (a, b) , există un număr γ , cuprins între α și β , așa fel încât să avem

$$f(\alpha)g(\beta) = f(\gamma)g(\gamma).$$

R. Să presupunem $\alpha < \beta$ și să considerăm funcțiunea

$$F(x) = f(x)g(x) - f(\alpha)g(\beta).$$

Total revine să arătăm că $F(x)$ se anulează într'un punct γ cuprins între α și β . Din ipotezele făcute rezultă că

$$F(\alpha) = f(\alpha)[g(\alpha) - g(\beta)] < 0,$$

$$F(\beta) = g(\beta)[f(\beta) - f(\alpha)] > 0.$$

Prin urmare (19, IV) $F(\gamma) = 0$.

5. Ori ce funcție poate fi considerată ca suma a două funcțiuni, una pară și una impară.

R. Se zice că o funcție este pară, atunci când schimbând pe x în $-x$ funcțiunea rămâne neschimbată și impară dacă, după această schimbare, funcțiunea schimbă de semn.

Fie $f(x)$ o funcție definită într'un interval $(-a, +a)$. Funcțiunea

$$F(x) = f(x) + f(-x)$$

este o funcție pară, iar funcțiunea

$$G(x) = f(x) - f(-x)$$

este o funcție impară. Avem însă

$$f(x) = \frac{1}{2} [F(x) + G(x)].$$

6. Fiind dată o funcție $f(x, y)$, continuă într'un domeniu A , să se arate că putem împărți acest domeniu în domenii parțiale destul de mici așa fel încât, (u, v) și (u', v') fiind două puncte dintr'un același domeniu parțial, să avem

$$|f(u, v) - f(u', v')| < \epsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul dat ϵ .

R. Se va proceda prin subdiviziuni succesive, împărțind domeniul A , în domenii parțiale prin drepte paralele cu axele și echidistante. Dacă propoziția nu ar fi adevărată pentru domeniul A , va trebui ca ea să nu fie nici cel puțin pentru unul din domeniile parțiale. Fie A_1 un astfel de domeniu parțial; se va împărți și acest domeniu prin drepte paralele cu axele, etc. Raționamentul se va sfârși ca la No 19, I.

7. O funcție $t = f(x, y)$ continuă într'un domeniu R ia, în două puncte P și Q ale domeniului, valori de semne contrarii. Fie Γ un arc de curbă situat în întregime în domeniul R și având extremitățile în P și Q . Să se arate că $f(x, y)$ se anulează cel puțin într'un punct al arcului Γ .

R. Când punctul (x, y) descrie arcul Γ , t poate fi considerat ca o funcție continuă de o singură variabilă: lungimea arcului având originea în P și extremitatea cealaltă în (x, y) . Deci $f(x, y)$ se anulează pe arcul Γ [19, IV].

CĂPITOLUL III.

SERII.

I. — ȘIRURI. — SERII NUMERICE.

22. Șiruri convergente. Dacă considerăm o mulțime infinită de numere

$$(1) \quad s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

ocupând fiecare un *rang determinat*, zicem că avem un *șir*. Acest șir este *convergent* dacă s_n tinde către o limită finită S , când rangul n crește nemărginit; sau, cu alte cuvinte, dacă la oricare număr pozitiv ε putem face să corespundă un număr întreg și pozitiv N , așa încât să avem

$$|s_n - S| < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui $n \geq N$.

Dacă șirul (1) nu este convergent, zicem că este *divergent*. Divergența poate fi de două feluri: fie că $|s_n|$ crește nemărginit, fie că s_n nu tinde către nici o limită, fără însă ca $|s_n|$ să crească nemărginit.

Șirul (1) este *crescător*, dacă avem neconținut $s_{n+1} - s_n \geq 0$; iar dacă avem $s_{n+1} - s_n \leq 0$ șirul este *descrescător*.

Dacă termenul general al unui șir *crescător* nu crește nemărginit, șirul este *convergent*. Această propoziție este o consecință imediată a celor stabilite anterior (11, I).

CRITERIU GENERAL. Condiția necesară și suficientă pentru ca șirul (1) să fie convergent este ca, la oricare număr pozitiv ε să putem face să corespundă un număr întreg N , așa încât să avem

$$|s_{N+p} - s_N| < \varepsilon,$$

oricare ar fi numărul pozitiv p .

Condiția este necesară, căci dacă șirul este convergent, vom avea

$$|S - s_N| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |S - s_{N+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și cum

$$|S - s_N| + |S - s_{N+p}| > |(S - s_N) - (S - s_{N+p})|$$

vom avea *a fortiori*

$$|s_{N+p} - s_N| < \varepsilon.$$

Condiția este suficientă. În adevăr, dacă presupunem $|s_{N+p} - s_N| < \varepsilon$, oricare ar fi p , această înseamnă că dela un rang determinat N , toate elementele șirului (1) sunt cuprinse între $s_N - \varepsilon$ și $s_N + \varepsilon$; în afară de acest interval nu putem avea deci decât un număr *finit* de elemente ale șirului. Punctul limită S al mulțimii (1) va trebui să fie prin urmare cuprins între $s_N - \varepsilon$ și $s_N + \varepsilon$ și vom avea $|S - s_N| < \varepsilon$. Dar cum

$$s_{N+p} - S = (s_{N+p} - s_N) + (s_N - S),$$

vom avea, oricare ar fi întregul pozitiv p ,

$$|s_{N+p} - S| < |s_{N+p} - s_N| + |s_N - S| < 2\varepsilon.$$

Dar ε poate fi luat oricât de mic; deci s_n are ca limită pe S .

23. Serii numerice. Dacă avem un șir de numere $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ formate după o anumită lege, simbolul

$$(2) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

se numește *serie*. Termenul u_n este *termenul general* și dacă cunoaștem expresia lui în funcție de n , deducem din el toți termenii seriei.

Seria (2) se poate scrie, mai concentrat, $\sum u_n$.

Fie

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

suma primilor $n+1$ termeni ai seriei. Zicem că seria (2) este *convergentă*, dacă șirul $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ este convergent. În caz contrar seria (2) este *divergentă*. Dacă seria este convergentă *suma seriei este limita S către care tinde s_n când n crește nemărginit*.

Să însemnăm

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots;$$

avem astfel o serie care este convergentă în același timp cu seria (2); R_n se numește *restul* seriei de la termenul de rang $n+1$. Vedem că în studiul *convergenței* putem totdeauna face abstracție de un număr limitat de termeni dela începutul seriei.

OBSERVARE. Pentru a decide dacă o serie este convergentă suntem conduși, după definițiune, să cercetăm convergența sau divergența unui șir. Putem proceda însă și invers: pentru a ști dacă șirul $s_0, s_1, s_2, \dots$, este convergent, este suficient a examina seria al cărei termen general este $s_n - s_{n-1}$, adică seria

$$s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \dots + (s_n - s_{n-1}) + \dots$$

fiindcă suma primilor $n+1$ termeni ai ei este chiar s_n .

CRITERIU GENERAL DE CONVERGENȚĂ. Din definiția convergenței vedem că condiția necesară și suficientă pentru convergența unei serii este [22] să putem face să corespundă la un număr pozitiv ε , oricât de mic ar fi, un număr n așa încât să avem

$$(3) \quad |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

p fiind un întreg pozitiv oarecare.

Condiția (3) se mai poate scrie și astfel

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dacă facem $p=1$ vedem că: în orice serie convergentă termenul general u_n tinde către zero când n crește nemărginit, dar această condiție nu este suficientă pentru a asigura convergența unei serii.

EXEMPLE DE SERII. I. Seria

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

care se numește *progresie geometrică*, este des folosită în studiul general al seriilor. Dacă r este diferit de 1, avem

$$s_n = a + ar + \dots + ar^n = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Pentru $|r| < 1$, r^n tinde către zero, când n crește nemărginit, deci seria este convergentă și suma ei este $\frac{a}{1-r}$. Pentru $|r| \geq 1$ termenul general ar^n nu tinde către zero, deci seria este divergentă, afară de cazul $a=0$, când seria este nulă.

II. Să considerăm identitatea

$$(v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \dots + (v_n - v_{n+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

care ne permite să formăm cu ușurință serii convergente sau divergente. În adevăr, dacă v_n tinde către zero, când n crește nemărginit, atunci seria al cărei termen general este $v_n - v_{n+1}$, este convergentă, iar suma seriei este v_0 .

EXEMPLU. Dacă luăm $v_n = \frac{1}{n+1}$ avem seria

$$(4) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

care este convergentă și are ca sumă unitatea.

Dacă însă v_n nu tinde către nici o limită, sau crește nemărginit în valoare absolută, seria al cărei termen general este $u_n = v_n - v_{n+1}$ este divergentă.

EXEMPLU. Luând $v_n = -\text{Log}(1+n)$ suntem conduși la seria divergentă

$$(5) \quad \sum \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

16-17 24. **Serii cu termeni pozitivi.** Dacă toți termenii unei serii sunt pozitivi, zicem că seria e *pozitivă*. Șirul s_n fiind în acest caz crescător, avem criteriul general: *Condiția necesară și suficientă pentru ca o serie pozitivă să fie convergentă este ca sumele s_n să rămână mai mici decât un număr fix.*

Dacă o serie pozitivă este divergentă, suma ei crește nemărginit.

Din compararea a două serii deducem următoarele

REGULI DE CONVERGENȚĂ. I. Fie Σu_n și Σv_n două serii pozitive, așa ca de la un rang n oarecare, să avem neconținut

$$u_n \leq v_n$$

- 1º. Dacă seria Σv_n este convergentă și seria Σu_n este convergentă;
2º. dacă Σu_n este divergentă și Σv_n este divergentă.

În adevăr: 1º suma seriei Σv_n fiind finită, a fortiori suma seriei Σu_n este finită și deci seria este convergentă.

2º. suma seriei Σu_n fiind nemărginită și suma seriei Σv_n va fi nemărginită, deci seria Σv_n este divergentă.

EXEMPLU. Avem

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \text{ pentru } n \geq 1,$$

deci, din faptul că seria (4) este convergentă, conchidem că și seria

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

este convergentă.

II. Dacă seria Σu_n este convergentă și seria Σv_n , obținută înmulțind fiecare termen al seriei prin factori pozitivi și inferiori unui număr pozitiv A , este convergentă.

În adevăr seria Σv_n va fi convergentă, căci are termenii săi mai mici de cât ai seriei $\Sigma A u_n$ evident convergentă.

Tot astfel vedem că: o serie, obținută înmulțind fiecare termen al unei serii divergente prin factori mai mari decât un număr pozitiv A , este divergentă.

III. Dacă $\frac{u_n}{v_n}$ tinde către o limită finită și diferită de zero când n crește nemărginit, seriile Σu_n și Σv_n sunt convergente sau divergente în același timp.

În adevăr, fie $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$. Aceasta înseamnă că, de la un anumit rang, avem $u_n < (l + \varepsilon) v_n$ și $u_n > (l - \varepsilon) v_n$, ε fiind luat destul de mic pentru ca $l - \varepsilon$ să fie pozitiv. Prin urmare propoziția enunțată este o consecință a celor stabilite mai sus.

Spre exemplu, *seria armonică*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

este divergentă, pentru că raportul dintre termenul general al seriei divergente (5) și termenul general $\frac{1}{n}$ al seriei armonice este

$$\text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

și are ca limită unitatea⁽¹⁾.

IV. Dacă seriile pozitive Σu_n și Σv_n sunt astfel încât începând de la un rang destul de mare, să avem neconținut

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

atunci: 1° dacă seria Σv_n este convergentă și seria Σu_n este convergentă; 2° dacă seria Σu_n este divergentă și seria Σv_n este divergentă.

În adevăr, de la o anumită valoare a lui n avem

$$\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geq \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \geq \dots$$

asa că dacă însemnăm cu a valoarea primului raport, avem, pentru toate valorile lui $m \geq n$,

$$u_m \leq a v_m \quad \text{și} \quad v_m \geq \frac{1}{a} u_m,$$

de unde, propoziția enunțată.

Fie spre exemplu

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad v_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

Vom avea

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n+1}{n} - \frac{2n+2}{2n+1} > 0.$$

Prin urmare seria $\Sigma \frac{1}{n}$ fiind divergentă și seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} + \dots$$

este divergentă.

CRITERIUL LUI D'ALEMBERT. Dacă în seria Σu_n raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de la o anumită valoare a lui n , rămâne mai mic decât un număr $k < 1$, seria este convergentă. Seria este divergentă dacă raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este mai mare decât unitatea.

(1) Logaritmii fiind luați în sistemul cu baza e , cum vor fi considerați întotdeauna, când nu vom specifica contrariul.

În adevăr, dacă avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$ și $k < 1$ pentru toate valorile lui n mai mari decât un număr determinat, deducem

$$u_{n+1} < k u_n, u_{n+2} < k^2 u_n, \dots, u_{n+p} < k^p u_n, \dots$$

Prin urmare termenii seriei

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} + \dots$$

sunt mai mici decât termenii progresiei geometrice convergente

$$k u_n + k^2 u_n + \dots + k^p u_n + \dots$$

Seria Σu_n este deci convergentă.

În ipoteza a doua termenii seriei, de la un anumit rang, merg crescând; seria este divergentă, căci termenul general nu tinde către zero.

OBSERVARE. Dacă raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tinde către o limită l , când n crește nemărginit, seria este convergentă dacă $l < 1$ și divergentă dacă $l > 1$. Dacă $l = 1$, acest criteriu nu ne permite a determina natura seriei, afară de cazul când $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tinde către 1 prin valori mai mari decât 1, în care caz seria este divergentă.

EXEMPLU. În seria pozitivă

$$1 + 2a + 3a^2 + \dots + (n+1)a^n + \dots$$

raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ are ca limită pe a ; deci seria este convergentă dacă $a < 1$ și divergentă dacă $a > 1$. Pentru $a = 1$ seria este evident divergentă. *avem radicals (dubiu)*

CRITERIUL LUI CAUCHY. O serie este convergentă dacă dela o anumită valoare a lui n , avem

$$(6) \quad \sqrt[n]{u_n} < k < 1$$

și divergentă dacă

$$(7) \quad \sqrt[n]{u_n} > 1.$$

În adevăr, dacă condiția (6) este satisfăcută, atunci avem, de la un anumit rang, $u_n < k^n$; deci seria e convergentă.

Dacă condiția (7) este realizată, termenul general al seriei nu tinde către zero; deci seria este divergentă.

OBSERVARE. Dacă $\sqrt[n]{u_n}$ are o limită l când n crește nemărgit, seria este convergentă când $l < 1$ și divergentă când $l > 1$.

Pentru $l = 1$, acest criteriu nu ne permite să determinăm natura seriei.

EXEMPLU. În seria

$$a + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}a\right)^n + \dots$$

$\sqrt[n]{u_n}$ are ca limită pe a . Deci dacă $a < 1$ seria este convergentă și dacă $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ seria este divergentă, căci termenul general are ca limită $\frac{1}{e}$.

CRITERIUL LUI KUMMER. Fie $a_0, a_1, a_2, \dots$ un șir de numere pozitive;

10. Dacă, de la o anumită valoare a lui n , expresia

$$(8) \quad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

rămâne mai mare decât un număr pozitiv fix α , atunci seria este convergentă.

20. Dacă însă expresia (8) este negativă sau nulă și dacă seria $\Sigma \frac{1}{a_n}$ este divergentă, atunci seria Σu_n este divergentă.

Cum termenii de la începutul seriei nu influențează asupra convergenței sau divergenței ei, vom presupune condițiile din enunț îndeplinite de la primul ei termen.

10. Dacă facem în neegalitatea

$$\alpha u_{n+1} < a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}$$

pe $n = 0, 1, \dots, n$ și adunăm apoi neegalitățile obținute membru cu membru, vom avea

$$\alpha (u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1}) < a_0 u_0 - a_{n+1} u_{n+1} < a_0 u_0.$$

Prin urmare seria este convergentă, ca având suma primilor n termeni (n oarecare) mărginită.

20. Vom avea, după ipoteza a doua,

$$a_n u_n \geq a_0 u_0$$

deci

$$u_n \geq a_0 u_0 \frac{1}{a_n}$$

și cum seria $\Sigma \frac{1}{a_n}$ este divergentă, a fortiori seria Σu_n va fi divergentă.

APLICAȚIE. Să facem $a_n = n$. Criteriul precedent ne conduce în acest caz la criteriul lui Raabe și Duhamel:

Dacă dela un anumit rang, avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n}$$

unde $k > 1$, atunci seria este convergentă.

Dacă însă avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

seria este divergentă.

OBSERVARE. Criteriul lui Raabe și Duhamel mai poate fi enunțat și sub forma următoare :

Fie

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n.$$

Seria este convergentă dacă avem, de la un anumit rang, $n\alpha_n > k > 1$ și divergentă dacă $n\alpha_n < 1$.

Să considerăm cazul: $\lim n\alpha_n = 1$. Să însemnăm

$$n\alpha_n = 1 + \frac{\beta}{n}$$

și să arătăm că: dacă de la un anumit rang avem $\beta < b$, b fiind un număr pozitiv determinat, seria este divergentă.

În adevăr, după notațiunile noastre, avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2}.$$

Seria cu termen general $\frac{1}{n-b}$, unde dăm lui n valori superioare lui b , este divergentă, fiind de aceeași natură cu seria armonică (regula III), iar raportul unui termen la următorul este

$$\frac{n+1-b}{n-b} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2} = \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Deci, după regula IV, seria $\sum u_n$ este divergentă.

25. Serii numerice oarecare. Termenii unei serii pot avea și semne diferite. Studiul seriilor, care de la un rang oarecare au toți termenii de același semn, se reduce imediat la studiul seriilor cu termeni pozitivi. Ne rămâne deci de studiat cazul, când o serie are o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi.

26. Serii alternate. Se numește serie *alternată* o serie ai cărei termeni sunt, alternativ, pozitivi și negativi.

CRITERIU DE CONVERGENȚĂ. *Dacă valoarea absolută a termenului general u_n descrește și tinde către zero, când n crește nemărginit, seria este convergentă.*

În seria alternată

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_{2n} - u_{2n+1} + \dots$$

avem, după enunțul propoziției,

$$u_0 > u_1 > u_2 > \dots > u_{2n} > u_{2n+1} > \dots$$

Să considerăm sumele

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n+1})$$

formate cu un număr par de termeni ai seriei. Se vede imediat că aceste sume pozitive cresc cu n . Pe de altă parte mai putem scrie

$$S_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1}$$

și cum fiecare paranteză este pozitivă, vedem că

$$S_{2n+1} < u_0.$$

Ceeace ne arată că sumele S_{2n+1} , crescătoare cu n , au o limită determinată pe care să o notăm cu S .

Cum însă

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$$

făcând pe n să crească nemărginit și ținând seama că u_{2n+1} are pe zero ca limită, vedem că sumele cu un număr par sau impar de termeni au aceeași limită S . Seria este deci convergentă.

EXEMPLU. *Seria armonică alternată*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

este convergentă.

27. Serii absolut convergente. O serie este *absolut convergentă*, atunci când seria formată de valorile absolute ale termenilor ei este convergentă.

O serie absolut convergentă este convergentă.

În adevăr, fie seria cu termeni pozitivi și negativi

$$(9) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

și

$$(10) \quad U_0 + U_1 + \dots + U_n + \dots$$

seria formată de valorile absolute ale termenilor seriei (9); am însemnat deci $U_n = |u_n|$. Seria (10) fiind convergentă și cum

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < U_n + U_{n+1} + \dots + U_{n+p}$$

conchidem, în baza criteriului general de convergență, că seria (9) este convergentă.

OBSERVARE. Reciproca nu este adevărată: se poate ca seria (9) să fie convergentă fără ca seria (10) să fie convergentă.

EXEMPLU. Am văzut că seria

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

este convergentă, pe când seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

este divergentă.

TEOREMĂ. *Intr'o serie absolut convergentă putem schimba ordinea termenilor, fără ca suma seriei să se schimbe.*

Fie seria absolut convergentă

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

și

$$u'_0 + u'_1 + u'_2 + \dots$$

aceeaș serie, însă cu termenii luați în altă ordine. Să însemnăm

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$S'_p = u'_0 + u'_1 + \dots + u'_p$$

și să luăm pe p destul de mare astfel ca toți termenii sumei S_n să se găsească în suma S'_p . Vom avea

$$S'_p - S_n = u_{n+\alpha} + u_{n+\beta} + \dots + u_{n+\lambda}$$

unde $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sunt $p - n$ numere întregi pozitive. Dacă m este cel mai mare număr dintre acestea, deducem

$$\begin{aligned} |S'_p - S_n| &< |u_{n+\alpha}| + |u_{n+\beta}| + \dots + |u_{n+\lambda}| \\ &< |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+m}|. \end{aligned}$$

Ținând seama că seria este absolut convergentă, vedem că putem lua pe n destul de mare, așa ca

$$|S'_p - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aci rezultă

$$|S'_p - S| < \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

28. Serii semi-convergente. O serie convergentă, care nu este absolut convergentă, se zice *semi-convergentă*. Să arătăm că într'o astfel de serie termenii pozitivi de o parte și termenii negativi de alta formează două serii divergente.

Fie S_n suma primilor n termeni ai unei serii semi-convergente; P_n și N_n respectiv sumele termenilor pozitivi și termenilor negativi care intră în S_n . După ipotezele făcute avem, S fiind suma seriei,

$$\lim (P_n - N_n) = S, \quad \lim (P_n + N_n) = \infty,$$

de unde deducem

$$\lim P_n = \infty \quad \text{și} \quad \lim N_n = \infty. \quad \text{c. e. d. d.}$$

TEOREMĂ. Schimbând ordinea termenilor într'o serie semi-convergentă, putem face ca suma seriei să fie orice număr dat.

Să presupunem dată o serie semi-convergentă și să formăm cu termenii ei o serie, care să aibă ca sumă, de exemplu, numărul pozitiv M . Vom lua din termenii pozitivi ai seriei, în ordinea în care se prezintă, un număr suficient de termeni, până ce suma lor depășește numărul M (ceea ce este posibil, căci suma tuturor termenilor pozitivi este infinită); vom adăuga apoi termenii negativi, până ce suma totală va fi mai mică decât M ; apoi iarăși adăugăm termeni pozitivi până ce depășim numărul M și continuăm la infinit aceste operațiuni. Am format astfel o serie Σ care va avea ca sumă pe M .

În adevăr să notăm cu Σ_m suma primilor m termeni ai acestei serii. Diferența $M - \Sigma_m$ schimbă de semn de o infinitate de ori; dacă această diferență este pozitivă, ea este mai mică decât ultimul termen pozitiv adăugat din seria dată; dacă este negativă, este mai mică, în valoare absolută de cât valoarea absolută a ultimului termen negativ adăugat. Cum termenul geneneral u_n al seriei date tinde către zero când n crește nemărginit, rezultă că

$$\lim \Sigma_m = M. \quad \text{c. e. d. d.}$$

29. Operațiuni cu seriile. ADUNAREA SERIILOR. Fie Σu_n și Σv_n două serii convergente având ca sume respectiv s și σ . Seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ este convergentă și are ca sumă $s \pm \sigma$.

Dacă notăm cu s_n și σ_n sumele primilor n termeni din seriile date, suma primilor n termeni din seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ va fi $s_n \pm \sigma_n$. Făcând pe n să crească nemărginit, vedem că seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ este convergentă și are ca sumă $s \pm \sigma$.

ÎNMULȚIREA SERIILOR. Fie seriile

$$(11) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

$$(12) \quad v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots$$

Înmulțindu-le termen cu termen, după regula înmulțirii a două sume și grupând termenii pentru cari suma indicilor lui u și v e aceeași, obținem seria produs

$$(13) \quad u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \dots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0) + \dots$$

TEOREMĂ. Dacă înmulțim două serii convergente, dintre care una cel puțin este absolut convergentă, seria produs este convergentă și are ca sumă produsul sumelor celor două serii (Mertens).

Vom presupune seria (11) absolut convergentă, iar seria (12) convergentă. Să notăm cu w_n termenul general al seriei (13), adică

$$(14) \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Vom considera următoarele diferențe, de ordin par și impar,

$$\delta = w_0 + w_1 + \dots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n),$$

$$\delta_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}).$$

Dacă vom arăta că diferențele δ și δ_1 au ca limită zero, când n crește nemărginit, teorema enunțată va fi demonstrată. Vom arăta acest lucru pentru δ ; pentru δ_1 demonstrația se face în mod identic.

Să punem mai întâiu expresia δ sub altă formă. Ținând seama de egalitatea (14) vedem că

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{2n} = u_0(v_0 + v_1 + \dots + v_{2n}) + u_1(v_0 + v_1 + \dots + v_{2n-1}) + \dots + u_n(v_0 + \dots + v_n) + u_{n+1}(v_0 + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{2n}v_0,$$

deci

$$\delta = u_0(v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}) + \dots + u_{n-1}v_{n+1} + u_{n+1}(v_0 + \dots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \dots + v_{n-2}) + \dots + u_{2n}v_0.$$

Prin ipoteză seria (11) este absolut convergentă și seria (12) convergentă. Prin urmare putem găsi două numere pozitive A și B , așa fel încât să avem, oricare ar fi m ,

$$|u_0| + |u_1| + \dots + |u_m| < A$$

$$|v_0 + v_1 + \dots + v_m| < B$$

și putem alege un rang n destul de mare, așa încât să avem, oricât de mic ar fi ϵ , pentru toate valorile lui p

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \frac{\epsilon}{A+B}$$

$$|v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p}| < \frac{\epsilon}{A+B}.$$

Ținând seama de aceste neegalități, deducem, din ultima expresie a lui δ ,

$$|\delta| < |u_0| \frac{\epsilon}{A+B} + |u_1| \frac{\epsilon}{A+B} + \dots + |u_{n-1}| \frac{\epsilon}{A+B} + |u_{n+1}| B + |u_{n+2}| B + \dots + |u_{2n}| B$$

de unde a fortiori

$$|\delta| < A \frac{\epsilon}{A+B} + B \frac{\epsilon}{A+B} = \epsilon.$$

Prin urmare $\lim |\delta| = 0$, când n crește nemărginit.

OBSERVARE. Dacă nici una din seriile convergente (11) și (12) nu este absolut convergentă, seria (13) poate fi *divergentă*.

Să arătăm acest lucru pe un exemplu simplu. Vom lua

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}};$$

seriile (11) și (12) vor fi convergente [26] dar nu absolut convergente. Vom avea

$$w_n = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right].$$

și ținând seama că $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$, vedem că

$$|w_n| > \frac{2(n+1)}{n+2}$$

deci w_n nu tinde către zero, când n crește indefinit; prin urmare seria (13) este divergentă.

II. — SERII DE FUNCȚIUNI.

30. Să considerăm o serie

$$(1) \quad u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ai cărei termeni sunt funcțiuni de o variabilă x . Dacă această serie este convergentă pentru toate valorile lui x din intervalul (a, b) suma acestei serii va fi o funcțiune de x determinată în acest interval.

Să punem

$$(2) \quad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Seria (1) fiind convergentă în intervalul (a, b) , pentru *fiecare* valoare a lui x din acest interval corespunde câte un număr N , așa încât să avem, oricât de mic ar fi numărul dat ε ,

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui $n > N$. Numărul N depinde în general de valoarea aleasă pentru x .

CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ. Zicem că seria (1) este *uniform convergentă* în intervalul (a, b) , atunci când fiind dat un număr ε putem face să-i corespundă numărul N , așa fel încât să avem

$$(3) \quad |R_n(x)| < \varepsilon,$$

pentru toate valorile lui $n > N$, oricare ar fi valoarea lui x în intervalul (a, b) . Cu alte cuvinte valoarea lui N nu trebuie să depindă de x .

Să dăm un exemplu de serie convergentă, care nu este uniform convergentă. Fie progresia geometrică

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$$

care este convergentă pentru orice valoare a lui x , căci pentru x diferit de zero, rația este pozitivă și mai mică decât unitatea, iar pentru $x=0$ seria se reduce la zero. Să arătăm că această serie nu este uniform convergentă în orice interval care cuprinde valoarea $x=0$.

În adevăr avem

$$R_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots \right]$$

deci

$$R_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Vedem că nu putem fixa pe N așa încât să satisfacem neegalitatea (3), oricât de vecin ar fi x de origină, căci luând, spre exemplu, $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, R_n este foarte vecin de $\frac{1}{e}$.

OBSERVARE. Suma seriei precedente este o funcție discontinuă de x : are valoarea zero pentru $x=0$ și $1+x^2$ pentru $x \neq 0$.

CRITERIU DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ. Fie

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots$$

o serie convergentă ai cărei termeni sunt numere pozitive.

Dacă pentru orice valoare a lui x din intervalul (a, b) avem, oricare ar fi n , $|u_n(x)| \leq v_n$, seria (1) este uniform convergentă în acest interval.

În adevăr, vom avea pentru toate valorile lui x din intervalul (a, b) ,

$$|R_n(x)| < v_{n+1} + v_{n+2} + \dots$$

Putem alege un număr N așa ca, pentru $n > N$, membrul al doilea al acestei neegalități să fie mai mic decât un număr dat ε . Vom avea deci a fortiori

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

pentru $n > N$, ori care ar fi x în intervalul (a, b) . Prin urmare seria (1) este uniform convergentă.

EXEMPLU. Seria

$$(4) \quad v_0 + v_1 \sin x + \dots + v_n \sin nx + \dots,$$

unde $v_0, v_1, \dots$ sunt termenii seriei precedente, este uniform convergentă, pentru x cuprins în orice interval, căci

$$|v_n \sin nx| \leq v_n.$$

TEOREMĂ. Dacă termenii seriei (1), uniform convergentă în intervalul (a, b) , sunt funcțiuni continue în același interval, suma seriei va fi o funcție continuă în intervalul (a, b) .

Să însemnăm cu $s_n(x)$ suma primilor $n+1$ termeni ai seriei (1) și cu $S(x)$ suma seriei. Vom avea, ținând seama de (2),

$$S(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Putem, prin ipoteză, să luăm pe n destul de mare așa încât să avem neegalitatea (3), oricare ar fi x în intervalul (a, b) , ε fiind un număr dat dinainte, oricât de mic voim.

u fiind un punct din intervalul (a, b) vom avea

$$S(u) - S(x) = s_n(u) - s_n(x) + R_n(u) - R_n(x),$$

precum și

$$|R_n(u) - R_n(x)| < 2\varepsilon.$$

Pe de altă parte $s_n(x)$ fiind o sumă de un număr limitat de funcțiuni continue, va fi o funcție continuă; deci putem lua pe u destul de aproape de x pentru ca să avem

$$|s_n(u) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Prin urmare avem

$$|S(u) - S(x)| < 3\varepsilon,$$

pentru u destul de aproape de x . Funcțiunea $S(x)$ este deci continuă în intervalul (a, b) .

EXEMPLU. Suma seriei (4) este o funcție continuă de x , în orice interval, căci această serie este uniform convergentă, iar termenii ei sunt funcțiuni continue de x .

31. Serii întregi. O clasă particulară de serii de funcțiuni și care joacă un rol fundamental în Analiza Matematică, sunt seriile ordonate după puterile întregi și pozitive ale variabilei. Fie

$$(5) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o astfel de serie, unde $a_0, a_1, \dots$ sunt coeficienți numerici. Seria (5) se numește o *serie întreagă* sau o *serie de puteri*. Să considerăm și seria pozitivă

$$A_0 + A_1 X + \dots + A_n X^n + \dots$$

formată de valorile absolute ale termenilor seriei (5); adică

$$|a_n| = A_n, \quad |x| = X.$$

CONVERGENȚĂ. Pentru a studia convergența seriei (5) să considerăm șirul

$$(7) \quad A_0, A_1, \sqrt[n]{A_2}, \dots, \sqrt[n]{A_n}, \dots$$

care poate prezenta una din următoarele trei particularități:

1^o. Șirul (7) este convergent și tinde către zero.

În acest caz seria (5) este absolut convergentă pentru orice valoare a lui x . În adevăr, aplicând seriei (6), criteriul lui Cauchy avem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{A_n X^n} = \lim \sqrt[n]{A_n} X = 0$$

ceea ce ne arată că seria (6) este convergentă oricare ar fi X ; prin urmare seria (5) este absolut convergentă.

EXEMPLU. Seria

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

este convergentă oricare ar fi x .

2^o. Șirul (7) nu este mărginit superior. În acest caz seria (5) este divergentă pentru orice valoare a lui x diferită de zero. În adevăr, termenul general al seriei, pentru $x \neq 0$, nu tinde către zero, căci modulul său

$$\left[\sqrt[n]{A_n} X \right]^n$$

poate depăși orice număr pozitiv.

EXEMPLU. Seria

$$1 + x + \dots + n^n x^n + \dots$$

este divergentă oricare ar fi x diferit de zero.

3^o. Să presupunem că șirul (7) are o margine superioară și nu convergează către zero. Să însemnăm cu L cea mai mare limită [8] a mulțimii numerelor din șirul (7). În acest șir nu vor fi decât un număr limitat de termeni mai mari decât $L + \varepsilon$; deci, dela un rang destul de mare, toți termenii șirului sunt mai mici decât $L + \varepsilon$. Pe când între $L - \varepsilon$ și $L + \varepsilon$ avem o infinitate de termeni ai șirului; adică dela orice rang, oricât de mare, se vor găsi termeni de-ai șirului mai mari decât $L - \varepsilon$.

Să însemnăm $R = \frac{1}{L}$ și să arătăm că:

α) Seria (1) este absolut convergentă pentru $-R < x < R$.

β) Seria (1) este divergentă pentru x în afară de intervalul $(-R, R)$.

α) Va trebui să arătăm că seria (6) este convergentă pentru orice valoare pozitivă $X < R$. Fie $X = \frac{1}{L + 2\varepsilon}$ un astfel de număr.

Avem, dela o valoare destul de mare a lui n ,

$$\sqrt[n]{A_n} < L + \varepsilon,$$

deci

$$\sqrt[n]{A_n X^n} < \frac{L + \varepsilon}{L - 2\varepsilon} < 1.$$

Prin urmare seria (6) este convergentă în virtutea criteriului lui Cauchy.

β) Presupunem pe x în afară de intervalul $(-R, R)$, deci

$$|x| = \frac{1}{L - \varepsilon}.$$

Dar în şirul (7) vom avea un termen, de un rang oricât de mare voim, așa ca

$$\sqrt[n]{A_n} > L - \varepsilon,$$

de unde

$$A_n X^n > (L - \varepsilon)^n X^n.$$

Inlocuind pe X prin valoarea aleasă pentru $|x|$, avem

$$A_n X^n = |a_n x^n| > 1.$$

Termenul general al seriei (5) ne tinzând către zero, seria este divergentă.

OBSERVĂRI. 10. Dacă raportul $\frac{A_n}{A_{n+1}}$ tinde către o limită l , avem $l = R$. In adevăr, să aplicăm seriei (6) criteriul lui d'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{A_{n+1} X}{A_n} = \frac{X}{l}.$$

Prin urmare seria (6) este convergentă pentru $X < l$ și divergentă pentru $X > l$. Va trebui deci să avem $l = R$.

20. Pentru $x = R$ sau $x = -R$ seria (5) poate fi convergentă sau divergentă.

EXEMPLU. Numărul R corespunzător seriei

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots$$

este 1. Seria este convergentă pentru $x = -1$ și divergentă pentru $x = 1$.

CONVERGENȚA UNIFORMĂ. Dacă seria (5) este convergentă pentru $-R < x < R$, să arătăm că ea este uniform convergentă în intervalul $(-R_1, R_1)$ unde R_1 este un număr pozitiv mai mic de cât R .

Pentru aceasta ne vom folosi de criteriul de convergență uniformă

indicat [30]. Seria pozitivă este convergentă pentru $X = R_1$ și cum pentru toate valorile lui x din intervalul $(-R_1, R_1)$ avem

$$|a_n x^n| \leq A_n R_1^n$$

urmează că seria (5) este uniform convergentă în acest interval.

CONSECINȚĂ. Cum termenii seriei întregi sunt funcțiuni continue de x , din convergența uniformă a seriei (5) în intervalul $(-R_1, R_1)$, deducem [30, Teoremă] că *suma seriei (5) este o funcțiune continuă în acest interval.*

TEOREMA LUI ABEL. *Dacă seria (5) este convergentă pentru $x = R$, este uniform convergentă în tot intervalul $(0, R)$.*

Pentru demonstrarea acestei propoziții ne vom folosi de următoarea Lemă a lui Abel:

Fie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$, $p + 1$ numere pozitive descrescătoare sau staționare, adică

$$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_p$$

și un acelaș număr de cantități oarecare $u_0, u_1, \dots, u_p$. Dacă sumele

$$(8) \quad s_i = u_0 + u_1 + \dots + u_i \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

sunt toate cuprinse între două numere A și B , atunci *suma*

$$(9) \quad \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_p u_p$$

va fi cuprinsă între $\varepsilon_0 A$ și $\varepsilon_0 B$.

În adevăr, din (8) deducem

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad \dots, \quad u_p = s_p - s_{p-1}$$

asa că suma (9) se mai poate scrie

$$s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + s_p(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p \varepsilon_p.$$

Diferențele $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ nefiind nici una negativă, obținem două limite, una inferioară și alta superioară, ale acestei sume, când înlocuim cantitățile $s_0, s_1, \dots, s_p$ prin A sau prin B . Vom avea deci

$$A\varepsilon_0 < s_0 u_0 + s_1 u_1 + \dots + s_p u_p < B\varepsilon_0.$$

Să trecem acum la demonstrarea *teoremei lui Abel*. Fie ε un număr pozitiv dat oricât de mic. Seria (5) fiind convergentă în punctul R , vom putea alege un număr n destul de mare, așa încât să avem

$$-\varepsilon < a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \dots + a_{n+p} R^{n+p} < \varepsilon$$

oricare ar fi numărul p . Pentru $0 < x \leq R$ numerele $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+i}$ sunt des-

crescătoare (sau staționare pentru $x=R$) când i crește. Să aplicăm lema lui Abel luând $\varepsilon_i = \left(\frac{x}{R}\right)^{n+i}$ și $u_i = a_{n+i} R^{n+i}$.

Vom avea

$$-\varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^n < \sum_{i=0}^{i=p} a_{n+i} R^{n+i} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+i} < \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

de unde, a fortiori,

$$|a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| < \varepsilon$$

pentru toate valorile pozitive ale lui x din intervalul $(0, R)$ inclusiv punctul R . Deci seria (5) este uniform convergentă în acest interval.

OBSERVARE. Din convergența uniformă a seriei (5), rezultă continuitatea sumei $S(x)$ a acestei serii în întreg intervalul $(0, R)$. Așa că putem scrie

$$\lim_{x=R} S(x) = S(R).$$

APLICAȚIE. Seria

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

convergentă pentru $-1 < x \leq 1$, are ca sumă $\text{Log}(1+x)$, după cum vom arăta mai departe. Această serie fiind convergentă pentru $x=1$, avem dreptul să scriem, în baza observării precedente,

$$\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

EXERCITIUL.

1. Dacă șirul $s_0, s_1, s_2, \dots$ este convergent, vom avea

$$\lim \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = \lim s_n$$

R. Consecință a propoziției 11, 5^o. Vom lua $a_n = s_0 + s_1 + \dots + s_n$ și $b_n = n+1$.

Cum $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = s_{n+1}$ are o limită, raportul $\frac{a_n}{b_n} = \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1}$ va avea aceeași limită.

2. Dacă șirul de numere pozitive $u_0, u_1, u_2, \dots$ este convergent, vom avea

$$\lim \sqrt[n+1]{u_0 u_1 \dots u_n} = \lim \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$$

adică media geometrică și media aritmetică au aceeași limită.

R. Consecință a exercițiului precedent, căci luând $s_i = \log u_i$ și aplicând cele stabilite mai sus, avem

$$\lim \frac{\log u_0 + \log u_1 + \dots + \log u_n}{n+1} = \lim \log u_n$$

de unde

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_0 \cdot u_1 \dots u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

3. Dacă într-o serie cu termeni pozitivi

$$V_0 + V_1 + \dots + V_n + \dots$$

raportul $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ are o limită atunci radicalul $\sqrt[n]{V_n}$ are aceeași limită. Reciproca nu este totdeauna adevărată.

R. Dacă în egalitatea (1) facem $u_0 = v_0$, $u_1 = \frac{v_1}{v_0}$, ..., $u_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$, avem poziția enunțată. Dacă luăm $v_{2n} = A^n B^n$ și $v_{2n+1} = A^n B^{n+1}$, vedem că reciproca nu este adevărată, căci $\sqrt[n]{v_n}$ are ca limită pe $\sqrt{AB}$, pe când $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ este alternativ A sau B .

4. Condiția necesară și suficientă pentru ca seria, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{n^p + a n^{p-1} + \dots}{n^q + b n^{q-1} + \dots},$$

(adică câtul a două polinoame ordonate după puterile descrescătoare ale lui n), să fie convergentă este $q \geq p + 2$.

R. Seria propusă este de aceeași natură cu seria, care are termenul general $v_n = \frac{n^p}{n^q}$, căci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Seria v_n este divergentă pentru $q \leq p$ sau $q = p + 1$; convergentă pentru $q = p + 2$ și a fortiori convergentă pentru $q > p + 2$.

5. Seria cu termenul general $u_n = \frac{n!}{n^n}$ este convergentă.

R. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$.

6. Seria al cărei termen general este

$$u_n = (2n+1) \left[\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n+1)} \right]^3$$

este convergentă pentru $\lambda > -\frac{1}{2}$ și divergentă pentru celelalte valori ale lui λ .

R. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = 4\lambda + 3;$$

deci, după criteriul lui Raabe și Duhamel, seria propusă este convergentă pentru $\lambda > -\frac{1}{2}$ și divergentă pentru $\lambda < -\frac{1}{2}$. Pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ seria este divergentă, căci avem $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

7. Dacă într-o serie raportul a doi termeni consecutivi este de forma

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a n^{p-1} + \dots}{n^p + b n^{p-1} + \dots},$$

seria va fi convergentă dacă $b - a > 1$ și divergentă dacă $b - a \leq 1$ (Gauss).

R. Avem

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = b - a;$$

deci seria este convergentă dacă $b - a > 1$ și divergentă dacă $b - a < 1$.

Pentru $b - a = 1$ expresiunea

$$\beta = n^2 \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - n$$

are o limită, deci după observarea făcută asupra criteriului Raabe și Duhamel [24], seria propusă este divergentă.

8. Fie seria, numită serie *îpergeometrică*,

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

unde α, β, γ sunt numere oarecare. Această serie este convergentă: 1^o pentru $|x| < 1$; 2^o pentru $x=1$ dacă $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

R. Găsim

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} x.$$

1^o. Avem $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$.

2^o. După exercițiul precedent seria este convergentă dacă $\gamma + 1 - \alpha - \beta > 1$ și divergentă dacă $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$.

9. Fie S și S' sumele a două serii convergente (nu absolut convergente)

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \\ v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

Dacă seria produs, care are ca termen general

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

este convergentă, atunci suma ei e SS' (A b e l).

R. Să considerăm seriile auxiliare

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n + \dots \\ \Sigma'(x) &= v_0 + v_1 x + \dots + v_n x^n + \dots \end{aligned}$$

care fiind convergente pentru $x=1$ vor fi absolut convergente pentru $|x| < 1$.

Facând produsul acestor serii [29], avem

$$\Sigma(x) \Sigma'(x) = w_0 + w_1 x + \dots + w_n x^n + \dots$$

Cum seria din membrul al doilea este convergentă pentru $x=1$, după teorema lui Abel, ambii membri sunt funcțiuni continue de x în întreg intervalul $(0,1)$. Făcând deci $x=1$, avem propoziția enunțată.

CAPITOLUL IV.

DERIVAREA FUNCȚIUNILOR DE O VARIABILĂ.

I. — INFINIȚI MICI. — METODA INFINITEZIMALĂ.

32. Infiniți mici. O cantitate, *variabilă*, care tinde către zero, este un *infinit mic*. Mai mulți infiniți mici, considerați simultan, se pot compara între ei.

Zicem că α este infinit ~~de~~ mic în raport cu β , dacă raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ are ca limită zero, când α și β tind către zero. Dacă însă raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ are o limită finită și *diferită de zero*, zicem că α și β sunt infiniți mici *de același ordin*.

Pentru stabilirea unei clasificări între mai mulți infiniți mici se alege unul ca etalon, căruia i se dă numele de *infinit mic principal*. Zicem că β este un infinit mic de *ordinul* p , în raport cu infinitul mic principal α , dacă avem

$$(1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^p} = k$$

unde k e un număr *finit*, determinat și *diferit de zero*. Dacă p este mai mare decât 1, egalitatea precedentă exprimă că β tinde mai repede către zero de cât α .

Dacă nu există nici un număr p cu ajutorul căruia să putem scrie o egalitate de forma (1), zicem că β nu are nici un *ordin de infinitudine* față de α .

EXEMPLU. Fie $\beta = \alpha \left(\sin \frac{1}{\alpha} + 2 \right)$; β nu are nici un ordin de infinitudine față de α . În adevăr, cum valoarea lui $\sin \frac{1}{\alpha}$ rămâne cuprinsă între -1 și $+1$, limita raportului $\frac{\beta}{\alpha^p}$, când α tinde către zero, este infinită pentru $p > 1$ și nulă pentru $p < 1$; pentru $p = 1$ acest raport nu tinde către nici o limită determinată.

Să presupunem că între infiniții mici α și β avem relația (1), care se mai poate scrie

$$\frac{\beta}{\alpha^p} = k + \varepsilon$$

unde ε tinde către zero, când α tinde către zero. Vom avea

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{k\alpha^p} = 1.$$

$k\alpha^p$ se numește *partea principală* a infinitului mic β .

Dacă $p=1$ și $k=1$, zicem că α și β sunt infiniți mici *echivalenți*.

Diferența δ a doi infiniți mici echivalenți, α și β , este infinit de mică în raport cu fiecare din cei doi infiniți mici și reciproc.

În adevăr, egalitatea $\delta = \alpha - \beta$, se mai poate scrie

$$\frac{\delta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$$

și cum membrul al doilea are ca limită zero, δ este infinit de mic în raport cu α . Reciproc, dacă δ este infinit de mic în raport cu α , din egalitatea precedentă deducem că $\frac{\beta}{\alpha}$ are ca limită unitatea; deci α și β sunt infiniți mici echivalenți.

OBSERVARE. Din propoziția precedentă rezultă că, dacă $k\alpha^p$ este partea principală a lui β , atunci diferența $\beta - k\alpha^p$ este infinit de mică în raport cu α^p ; deci dacă q este ordinul acestei diferențe față de infinitul mic principal α , vom avea

$$\beta - k\alpha^p = (l + \varepsilon_1)\alpha^q$$

unde $q > p$. Tot astfel, expresiunea $\beta - k\alpha^p - l\alpha^q$ este infinit de mică față de α^q și dacă notăm cu r ordinul ei față de infinitul mic principal α , avem

$$\beta - k\alpha^p - l\alpha^q = (m + \varepsilon_2)\alpha^r,$$

unde $r > q$. O expresie de forma

$$k\alpha^p + l\alpha^q + m\alpha^r \quad (p < q < r),$$

se chiamă *valoarea asimptotică* a lui β și diferă de β printr'un infinit mic de ordin superior lui r . Pentru a avea o cât mai bună valoare asimptotică se va lua un număr destul de mare de termeni în expresiunea de mai sus.

EXEMPLU. Fie $a = \frac{1}{n}$ și $\beta = \frac{1}{1 + na}$, unde $a > 0$; a și β sunt infiniți mici când n crește nemărginit. Să căutăm o valoare asimptotică pentru β . Vedem imediat că

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\beta}{a^a} = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\beta - a^a}{a^{2a}} = -1, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\beta - a^a + a^{2a}}{a^{3a}} = 1.$$

Prin urmare

$$a^{\alpha} - a^{2\alpha} + a^{3\alpha}$$

este o valoare asimptotică a lui β și diferă de β prin infiniți mici de un ordin superior lui 3α .

33. Metoda infinitezimală. Utilizarea în calcule sau raționamente o infiniților mici, constituie *metoda infinitezimală*. În *calculul diferențial* se consideră limita raportului a doi infiniți mici, iar în *calculul integral* se consideră limita unei sume de un număr (care crește nemărginit) de infiniți mici.

Vom indica două principii fundamentale în metoda infinitezimală și care stau, primul la baza calculului diferențial și al doilea la baza calculului integral.

I. *Limita raportului a doi infiniți mici nu se schimbă când înlocuim acești infiniți mici prin alții respectiv echivalenți.*

În adevăr, fie α și β doi infiniți mici, iar α' și β' infiniți mici respectiv echivalenți cu α și β ; cum putem scrie

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avem, trecând la limită,

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha}$$

și cum, prin ipoteză, avem

$$\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1, \quad \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1,$$

rezultă că

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

EXEMPLU. Ca să găsim limita raportului $\frac{\sin p\alpha}{\sin q\alpha}$ când α tinde către zero, vom înlocui $\sin p\alpha$ prin $p\alpha$ și $\sin q\alpha$ prin $q\alpha$, căci [12,3]

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Prin urmare

$$\lim \frac{\sin p\alpha}{\sin q\alpha} = \lim \frac{p\alpha}{q\alpha} = \frac{p}{q}.$$

II. *Limita sumei infiniților mici de același semn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, al căror număr crește nemărginit, nu se schimbă, când înlocuim acești infiniți mici prin alții echivalenți $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, rapoartele $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ tinzând însă în mod uniform către unitate.*

Înțelegem prin cuvintele *în mod uniform* posibilitatea de a alege pe n destul de mare așa încât să avem, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε

$$1 - \varepsilon < \frac{\beta_i}{\alpha_i} < 1 + \varepsilon$$

oricare ar fi indicele i .

Așa fiind, dacă înfiniții mici considerați sunt pozitivi, vom avea

$$(1 - \varepsilon) \alpha_i < \beta_i < (1 + \varepsilon) \alpha_i.$$

Făcând $i = 1, 2, \dots, n$ și adunând neegalitățile obținute, suntem conduși la

$$1 - \varepsilon < \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} < 1 + \varepsilon.$$

Cum ε poate fi făcut oricât de mic în același timp cu $\frac{1}{n}$, vedem că

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = 1$$

adică sumele $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ și $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ au aceeași limită, care poate fi finită, nulă sau infinită.

EXEMPLU. Se știe din trigonometrie că, pentru arcele din primul cadran, avem

$$1 - \frac{x^3}{4} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (1).$$

Să facem succesiv $x = \frac{1}{n^{1+a}}, \frac{2}{n^{1+a}}, \dots, \frac{n}{n^{1+a}}$; pentru toate aceste n valori ale lui x , vom avea

$$1 - \frac{1}{4 n^{2a}} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Dacă a este pozitiv, putem lua $\varepsilon = \frac{1}{4 n^{2a}}$ și după propoziția precedentă vedem că, dacă însemnăm

$$S_n = \sin \frac{1}{n^{1+a}} + \sin \frac{2}{n^{1+a}} + \dots + \sin \frac{n}{n^{1+a}},$$

avem

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim \left(\frac{1}{n^{1+a}} + \frac{2}{n^{1+a}} + \dots + \frac{n}{n^{1+a}} \right) = \lim \frac{n(n+1)}{2 n^{1+a}}$$

Prin urmare:

$$\lim S_n = \infty, \text{ dacă } 0 < a < 1; \lim S_n = \frac{1}{2}, \text{ dacă } a = 1; \lim S_n = 0, \text{ dacă } a > 1.$$

(1) Această dublă inegalitate rezultă și din dezvoltarea în serie a funcției $\sin x$ [50].

II. — DERIVATE ȘI DIFERENȚIALE.

34. Derivată. Fie $y = f(x)$ o funcție definită într'un interval (a, b) ; x un punct al acestui interval și $x_1 = x + h$ un punct vecin de x . Diferența $x_1 - x = h$ se numește *creșterea variabilei* ⁽¹⁾ și se mai notează cu Δx . Creșterea lui y corespunzătoare este egală cu diferența

$$f(x+h) - f(x)$$

și se notează cu Δy . Să formăm raportul acestor două creșteri

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dacă acest raport tinde către o limită când h tinde, într'un fel oarecare, către zero, această limită se numește *derivata* funcțiunei $f(x)$ în punctul x și se notează cu $f'(x)$ sau cu y' .

Fie spre exemplu $y = Ax^m$, unde A este o constantă și m un întreg pozitiv. Formând raportul (1) vom avea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

Desvoltând pe $(x+h)^m$ cu ajutorul formulei binomului și simplificând, găsim, făcând pe h să tindă către zero,

$$y' = mA x^{m-1}.$$

În particular, pentru $m=1$ derivata este A , iar pentru $y=A$ derivata e nulă.

Dacă raportul (1) tinde către o limită, când h tinde către zero prin valori *pozitive*, această limită se cheamă *derivata la dreapta* a funcției $f(x)$; pe când dacă avem o limită, când h tinde către zero prin valori *negative*, avem *derivata la stânga*.

EXEMPLU. Să se calculeze derivata funcțiunei

$$(2) \quad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

în punctul $x=0$. În acest punct funcțiunea se anulează, așa că raportul (1) va lua forma

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}}.$$

Dacă h tinde către zero prin valori pozitive, $e^{\frac{1}{h}}$ crește indefinit și deci derivata *la dreapta*, în punctul 0, este nulă.

Dacă h tinde către zero prin valori negative, $e^{\frac{1}{h}}$ tinde către zero și deci derivata *la stânga*, în punctul 0, a funcțiunei considerate, este 1.

(1) Creșterea poate fi pozitivă sau negativă.

Dacă însă aceste două derivate, la stânga și la dreapta, într'un punct, sunt *egale*, atunci valoarea lor comună este *derivata funcțiunii* în acel punct⁽¹⁾.

Zicem că o funcțiune este *derivabilă* într'un interval (a, b) , atunci când această funcțiune admite o derivată finită în fiecare punct din interiorul acestui interval; o derivată la dreapta în a și o derivată la stânga în b .

OBSERVARE. O condiție *necesară* pentru existența unei derivate finite într'un punct este ca funcțiunea să fie continuă în acel punct; căci în caz contrar numărătorul raportului (1) nu tinde către zero când h tinde către zero și deci limita acestui raport nu poate fi finită.

Continuitatea funcțiunii $f(x)$ în punctul x nu este o condiție *suficientă* pentru a putea afirma existența derivatei în acel punct.

EXEMPLE. 10. Fie funcțiunea

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

care este nulă pentru $x=0$ și continuă în acest punct. Pentru a avea derivata în punctul $x=0$ suntem conduși la căutarea limitei lui $\sin \frac{1}{h}$, când h tinde către zero, limită care nu există. Deci funcțiunea n'are derivată în acest punct.

20. Dacă considerăm funcțiunea

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

derivata în origine este limita lui $h^{-\frac{1}{2}}$, care crește nemărginit când h tinde către zero. Convenim a spune, în acest caz, că derivata funcției este infinită.

30. Weierstrass a dat în anul 1861 următorul exemplu de funcțiune continuă care nu admite derivată în nici un punct:

Seria

$$y = \sum a^n \cos(\pi b^n x)$$

este uniform convergentă pentru $0 < a < 1$ și reprezintă o funcție cotinuuă (30);

dacă $b > \frac{1}{a} + \frac{3\pi}{2a}$ această funcție nu admite derivată pentru nici o valoare a lui x .

Așa dar clasa funcțiilor derivabile este mai restrânsă decât clasa funcțiilor continue, căreia îi aparține.

35. Diferențială. Fie $y = f(x)$ o funcție care admite o derivată $f'(x)$ în punctul x ; dacă dăm lui x o creștere Δx va rezulta pentru funcțiune o creștere Δy . După definiția derivatei avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

(1) Dacă funcția nu este bine definită într'un punct c , în care funcția ar avea, de exemplu, o discontinuitate de prima specie, se poate să avem derivatele, la dreapta și la stânga lui c , egale între ele, fără să avem o derivată în acel punct. De exemplu, funcțiunea $U(x)$ considerată la n. 20 are derivatele nule la dreapta și la stânga punctului $x=a$, fără să aibă o derivată în acel punct.

unde ϵ tinde către zero, când Δx tinde către zero. Dacă considerăm pe Δx ca infinit mic principal și presupunem pe $f'(x)$ diferit de zero, partea principală a infinitului mic Δy este $\Delta x \cdot f'(x)$. Această parte principală se numește *diferențiala* lui y și se notează cu dy ; așa că

$$(3) \quad dy = f'(x) \Delta x.$$

Deci: *diferențiala unei funcțiuni este produsul dintre derivata funcțiunii și creșterea arbitrară Δx dată variabilei.*

Dacă considerăm în particular funcțiunea $y = x$, avem $y' = 1$ și formula (3) se reduce la $dx = \Delta x$. Astfel formula (3) se mai poate scrie

$$dy = f'(x) dx,$$

sau încă

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

De aci rezultă că *derivata unei funcțiuni este egală cu raportul dintre diferențiala funcțiunii și diferențiala variabilei.*

Formula (4) ne dă *notațiunea diferențială a derivatei.*

36. Interpretări geometrice. DERIVATA. Fie $y = f(x)$ o funcție continuă într'un interval (a, b) ; când x variază de la a la b punctul (x, y) descrie, în planul axelor dreptunghiulare xOy , un arc de curbă C , care reprezintă în mod grafic variația funcțiunii. Fie M și M' două puncte, foarte apropiate, ale curbei C , având respectiv abscisele x și $x + h$.

Coeficientul unghiular al dreptei MM' este

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Deci dacă funcțiunea $f(x)$ admite o derivată în punctul x , când h tinde către zero, coeficientul unghiular al dreptei MM' tinde către $f'(x)$. Prin urmare, când M' tinde către M , dreapta MM' tinde către o poziție limită MT , care se numește *tangenta la curbă* în punctul M . Ecuația acestei tangente, care trece prin punctul $M(x, y)$ și are pe y' ca coeficient unghiular, este

$$Y - y = y'(X - x)$$

unde X și Y sunt coordonatele curente.

●**BSERVARE.** Dacă considerăm cazul curbei (2), vedem că această curbă are două tangente în *origine*; acest punct e un *punct unghiular* al curbei.

Putem defini, în mod grafic, oricâte funcțiuni voim, care să prezinte aceeași parte ularitate.

DIFERENȚIALE. Fie Δx o creștere dată lui x ; M' și N punctele, de pe arcul C și de pe tangenta MT , care au aceeași abscisă $x + \Delta x$. În triunghiul dreptunghic MNP , (P fiind proiecția lui M pe $M'N$) avem $MP = \Delta x$ și $\text{tg } MNP = f'(x)$. Prin urmare

$$PN = f'(x) \Delta x;$$

ceea ce ne arată că PN reprezintă diferențiala dy . Observăm, în același timp, că diferența $\Delta y - dy = M'N$ este infinit de mică în raport cu Δy sau cu dy , căci aceștia sunt infiniti mici echivalenți.

37. Formule de derivare. Primul obiect al calculului diferențial este stabilirea câtorva formule simple de derivare pentru cazul când funcțiunea considerată este compusă cu ajutorul altor funcțiuni simple, ale căror derivate sunt presupuse determinate.

1^o. DERIVAREA UNEI SUME. Fie

$$y = u(x) + v(x),$$

unde presupunem funcțiunile u și v derivabile într'un interval comun (a, b) . Fie x o valoare din acest interval; dacă-i dăm lui x o creștere Δx , rezultă pentru u și v creșterile Δu și Δv , iar pentru y creșterea Δy și avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Trecând la limită, adică făcând pe Δx să tindă către zero, deducem

$$y' = u' + v'.$$

Dacă înmulțim ambii membri cu dx , suntem conduși la

$$dy = du + dv.$$

În loc de două funcțiuni u și v am fi putut considera o sumă de un număr oarecare, dar *finit*, de funcțiuni.

Prin urmare *derivata (diferențiala) unei sume de funcțiuni este egală cu suma derivatelor (diferențialelor) acestor funcțiuni.*

2^o. DERIVATA UNUI PRODUS. Fie $y = u \cdot v$ un produs de două funcțiuni de x derivabile. Avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Trecând la limită și ținând seama că limita ultimului termen scris este zero, avem

$$y' = u'v + v'u.$$

Înmulțind ambii membri cu dx , deducem

$$dy = v du + u dv.$$

Dacă considerăm un produs de trei factori $y = u \cdot v \cdot w$, avem

$$y' = (uv)'w + (w)'uv = uvw \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} \right).$$

Tot astfel se arată că, pentru un produs de un număr finit de factori, $y = uvw \dots$, avem

$$y' = uvw \dots \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \dots \right)$$

și

$$dy = uvw \dots \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots \right).$$

În particular, dacă $y = u^m$, m un întreg pozitiv, avem

$$y' = m u^{m-1} u'.$$

30. DERIVATA UNUI CÂT. Fie $y = \frac{u}{v}$; avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

de unde

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

sau cu notațiunea diferențială

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

În particular, dacă u se reduce la o constantă A , avem

$$y' = -A \frac{v'}{v^2} \text{ sau } dy = -A \frac{dv}{v^2}.$$

40. DERIVATA UNEI FUNCȚII DE FUNCȚIE. Fie $y = f(u)$ și $u = g(x)$, adică y este o funcție de x prin intermediul lui u . Pentru a calcula derivata acestei funcțiuni într'un punct x , să dăm lui x o creștere Δx . Avem

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x), \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

și putem scrie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cum presupunem că funcțiunile f și g au derivate finite și determinate, trecând la limită, deducem din ultima egalitate

$$y' = f'(u) \cdot g'(x),$$

căci Δu tinde către zero în acelaș timp cu Δx .

Dacă înmulțim ecuația precedentă cu dx , obținem

$$dy = f'(u) du.$$

Acest rezultat fundamental ne arată avantajul notațiunei diferențiale: diferențiala unei funcțiuni de x se calculează după aceeaș regulă, fie că este exprimată direct în funcție de x , fie că este exprimată în funcție de x prin intermediul unei variabile auxiliare u .

50. DERIVATA UNEI FUNCȚIUNI INVERSE. Fie $y=f(x)$ o funcție, care admite o funcție inversă $x=g(y)$. Dacă una din aceste funcțiuni admite o derivată diferită de zero, cealaltă funcțiune admite și ea o derivată.

Să presupunem că cunoaștem derivata lui f , adică

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Din egalitatea evidentă

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

deducem, trecând la limită,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}.$$

EXEMPLU. Funcțiunea $y=x^2$ are ca inversă $x=y^{\frac{1}{2}}$; aplicând formula precedentă deducem că $\sqrt{y}$ are ca derivată în raport cu y pe $\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

38. Derivatele funcțiunilor elementare.

I. EXPONENTIALA. Fie $y=e^x$. După definiția derivatei avem

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Insemnând $e^h - 1 = \alpha$, deducem $h = \text{Log}(1 + \alpha)$ și

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{\alpha}{\text{Log}(1 + \alpha)} = \frac{1}{\text{Log}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Dar α tinde către zero când h tinde către zero, iar $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tinde către e când α tinde către zero; avem deci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{\text{Log } e} = 1.$$

Prin urmare

$$y' = e^x.$$

Deci funcțiunea exponențială e^x se reproduce prin derivare.

Pentru a avea derivata unei exponențiale oarecare $y = A^x$ vom aplica formula derivării unei funcții de funcție. Putem scrie $y = e^{x \text{Log } A}$; deci, dacă punem $u = x \text{Log } A$, avem

$$y' = e^u u' = e^{x \text{Log } A} \text{Log } A = A^x \text{Log } A. \quad \text{y! og A}$$

II. LOGARITMUL. Să considerăm funcțiunea logaritmică într-o bază oarecare A

$$y = \text{Log}_A x.$$

Luând funcțiunea inversă a logaritmului, avem $x = A^y$ și aplicând formula de derivare a funcțiilor de funcțiuni, avem

$$y' = \frac{1}{A^y \text{Log } A} = \frac{1}{x \text{Log } A}.$$

Dacă considerăm cazul particular al logaritmilor *naturali*, adică $A = e$, avem

$$y' = \frac{1}{x}.$$

III. PUTEREA. Fie $y = x^a$ unde a este un număr dat și x o variabilă pozitivă. Putem scrie

$$x^a = e^{a \text{Log } x}$$

deci

$$y' = e^{a \text{Log } x} (a \text{Log } x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Regăsim astfel formula pe care am stabilit-o pentru a întreg și pozitiv [37, II].

IV. FUNCȚIUNI TRIGONOMETRICE. — 1^o. Fie $y = \sin x$. Avem

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Când h tinde către zero, $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ are ca limită pe $\cos x$ iar $\frac{\sin a}{a}$, unde $a = \frac{h}{2}$, are ca limită unitatea [12, 30]; deci

$$y' = \cos x.$$

20. Fie $y = \cos x$; avem $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Deci

$$y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

30. Dacă considerăm funcția $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, avem, utilizând formula care dă derivata unui cât,

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

40. Tot astfel pentru $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ găsim

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

ceea ce se mai poate deduce și din rezultatul precedent, ținând seama că $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

V. FUNCȚIUNI TRIGONOMETRICE INVERSE. — 10. Fie $y = \arcsin x$. Ne vom ocupa de ramura principală a funcțiunii [14], care este definită prin condiția $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Luând funcțiunea inversă avem $x = \sin y$, a cărei derivată este $\cos y$ sau $\sqrt{1 - \sin^2 y}$, unde luăm semnul $+$ înaintea radicalului căci $\cos y$ e pozitiv, când y variază de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$. Formula derivărei funcțiilor inverse ne dă deci

$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}.$$

Celelalte determinări ale lui y sunt legate de determinarea principală prin formulele

$$(I) \quad y = \arcsin x + 2k\pi,$$

$$(II) \quad y = -\arcsin x + (2k+1)\pi.$$

Determinările (I) au aceeași derivată ca și ramura principală; determinările (II) au o derivată de semn contrar.

20. Fie $y = \arccos x$. Vom considera ramura principală a acestei

funcțiuni multiforme, care se exprimă prin relația

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

cu ajutorul ramurei principale a funcției $\arcsin x$; deci

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

30. Pentru $y = \arctg x$, avem, luând funcțiunea inversă $x = \operatorname{tg} y$,

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

39. Diferențialele funcțiunilor elementare. Din formulele găsite mai sus deducem imediat diferențialele funcțiunilor elementare, înmulțind ambii membri ai fiecărei formule, prin dx . Avem astfel

$$d x^a = a x^{a-1} dx$$

$$d \sqrt{x} = \frac{dx}{2 \sqrt{x}}$$

$$d A^x = A^x \operatorname{Log} A dx$$

$$d \operatorname{Log}_A x = \frac{dx}{x \operatorname{Log} A}$$

$$d e^x = e^x dx$$

$$d \operatorname{Log} x = \frac{dx}{x}$$

$$d \sin x = \cos x dx$$

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d \cos x = -\sin x dx$$

$$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d \arctg x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

OBSERVARE. Este esențial de a observa că toate aceste formule subzistă atunci când înlocuim pe x printr-o funcție u de x .

Așa de exemplu, avem

$$d \operatorname{Log} u = \frac{du}{u} = \frac{u' dx}{u}.$$

40. Derivata logaritmică. Se numește *derivata logaritmică* a unei funcțiuni y , derivata logaritmului său, adică $\frac{y'}{y}$. Derivata y' a unei funcțiuni y se deduce deci înmulțind pe y prin derivata logaritmică. De multe ori este mai comod să procedăm astfel pentru determinarea derivatei.

EXEMPLU. Fie $y = u^v$, unde u și v sunt funcțiuni de x . Avem

$$\operatorname{Log} y = v \operatorname{Log} u$$

de unde

$$\frac{y'}{y} = v' \operatorname{Log} u + \frac{v'}{u} u'.$$

Prin urmare

$$y' = uv \left[v' \operatorname{Log} u + \frac{u'}{u} v \right].$$

41. Derivarea seriilor întregi. Fie

$$(5) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

o serie întreagă convergentă pentru $-R < x < R$. Să arătăm că seria derivată

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

este convergentă pentru $-R < x < R$ și are ca sumă $f'(x)$.

Fie x un punct oarecare din intervalul de convergență al seriei (5). Să considerăm seria modulelor termenilor acestei serii

$$F(X) = A_0 + A_1 X + \dots + A_n X^n + \dots$$

unde $|a_n| = A_n$ și $|x| = X$; această serie este convergentă [31] pentru $0 \leq X < R$. Fie Δ un număr pozitiv determinat așa ca $X + \Delta < R$. Seria $F(X + \Delta)$ fiind tot convergentă, vom avea

$$\frac{F(X + \Delta) - F(X)}{\Delta} = \sum A_n \frac{(X + \Delta)^n - X^n}{\Delta}$$

sau

$$\frac{F(X + \Delta) - F(X)}{\Delta} = \sum U_n$$

unde

$$U_n = A_n \left[n X^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta X^{n-2} + \dots \right].$$

Seria $\sum U_n$ cu termeni constanți și pozitivi (căci X și Δ au valori determinate) este convergentă.

Să dăm acum lui x , în seria (5) o creștere h așa ca $|h| < \Delta$. Seria $f(x + h)$, fiind convergentă, vom avea în mod analog

$$(6) \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \sum u_n(h),$$

unde

$$u_n(h) = a_n \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h x^{n-2} + \dots \right].$$

Seria $\sum u_n(h)$, ai cărei termeni sunt funcțiuni de h , este uniform convergentă pentru $|h| < \Delta$. În adevăr, pentru toate aceste valori ale lui h , $|u_n(h)| < U_n$, deci [30] această serie este uniform convergentă. Cum $u_n(h)$ sunt polinoame în h deci funcțiuni *continue* [30] de h , suma acestei serii este o funcție *continuă*, a cărei valoare pentru $h = 0$, se

confundă cu limita ei când h tinde către zero. Prin urmare, făcând pe h să tindă către zero în egalitatea (6), avem la limită

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}.$$

EXEMPLU. Avem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

pentru $-1 < x < 1$. Vom avea deci, pentru aceleași valori ale lui x ,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \dots + n x^{n-1} + \dots$$

OBSERVARE. La același rezultat mai putem ajunge înmulțind seria considerată prin ea însăși [29].

42. Derivate și diferențiale succesive. DERIVATE SUCCESIVE. Fie $y = f(x)$ o funcție derivabilă în intervalul (a, b) . Dacă derivata $f'(x)$ admite o derivată într'un punct x , această derivată a derivatei se numește *derivata a doua* a funcției $f(x)$ și se notează cu $f''(x)$ sau y'' . Tot astfel dela derivata a doua $f''(x)$ se trece la *derivata a treia*, care se notează cu y''' sau $f'''(x)$. Continuând astfel de la *derivata de ordinul* $n-1$ se trece la *derivata de ordinul* n , care este derivata întâi a derivatei de ordinul $n-1$ și se notează cu $y^{(n)}$ sau $f^{(n)}(x)$.

DIFERENȚIALE SUCCESIVE. Să plecăm de la diferențiala

$$(7) \quad d y = f'(x) d x.$$

Când x este *variabila independentă* convenim a considera pe $d x$ ca independent de poziția punctului x în intervalul (a, b) ; $d x$ este deci considerat ca o constantă.

Diferențiala a doua a lui y o vom obține diferențiind ambii membri (7), dar convenim ca în diferențiala membrului al doilea, creșterea Δx , care se introduce [35, (3)] să o luăm egală cu $d x$ și această convenție o păstrăm pentru toate diferențialele succesive.

Avem astfel diferențiala a doua

$$d(dy) = d[f'(x) dx] = f''(x) (dx)^2.$$

Dacă notăm $d(dy) = d^2 y$, ..., $d(d^{n-1} y) = d^n y$, obținem diferențialele succesive, până la acea de ordinul n ,

$$d^2 y = f''(x) dx^2, \quad d^3 y = f'''(x) dx^3, \quad \dots, \quad d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

De aci deducem *notațiunea diferențială* a derivatelor succesive

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

EXEMPLE. Să calculăm derivatele succesive ale câtorva funcțiuni elementare

$$\begin{aligned} y &= e^{ax}, & y' &= a e^{ax}, \dots, & y^{(n)} &= a^n e^{ax} \\ y &= x^a, & y' &= a x^{a-1}, \dots, & y^{(n)} &= a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n} \\ y &= \text{Log } x, & y' &= x^{-1}, \dots, & y^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\ y &= \sin x, & y' &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \dots, & y^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ y &= \cos x, & y' &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \dots, & y^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

OBSERVĂRI. 1^o. Existența unei derivate de ordinul n necesită existența derivatei de ordinul $n-1$; dar s'ar putea ca derivata de ordinul n să nu existe.

Sunt funcțiuni care admit derivate de orice ordin, așa de exemplu funcțiunile elementare sau seriile întregi.

2^o. Am văzut că diferențiala primă

$$dy = f'(u) \cdot du$$

are aceeași formă fie că u este variabila independentă sau nu.

Pentru diferențialele de ordin superior nu se mai prezintă aceeași simplitate, atunci când u este funcție de x . Diferențind egalitatea precedentă, avem

$$d^2y = f''(u) du^2 + f'(u) d^2u$$

căci nu mai putem considera $d^2u = 0$ ($du = u'dx$, $d^2u = u''dx^2$, etc. depind de valoarea variabilei x).

Tot astfel

$$d^3y = f'''(u) du^3 + 3f''(u) du d^2u + f'(u) d^3u$$

și așa mai departe, regula generală ne prezentându-se sub o formă simplă.

FORMULA LUI LEIBNIZ. Să considerăm o funcție reprezentată prin produsul a două funcții $y = uv$ și să ne propunem să găsim derivata a n -a a lui y . Avem

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + 2u'v' + uv'', \end{aligned}$$

Vedem că, în general, vom avea

$$(8) \quad y^{(n)} = A_0 u^{(n)} v + A_1 u^{(n-1)} v' + \dots + A_n u v^{(n)}$$

unde $A_0, A_1, \dots, A_n$ sunt coeficienți numerici, cari nu depind de forma particulară a funcțiunilor u și v . Dacă a este o constantă și punem $u = e^{ax}$ și $v = e^x$, avem $y = e^{(a+1)x}$; deci

$$y^{(n)} = (a+1)^n e^{(a+1)x}.$$

Aşa că formula (8) va deveni

$$(a+1)^n = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \dots + A_n$$

și identificând, găsim

$$A_p = C_n^p.$$

EXEMPLU. Aplicând formula lui Leibniz, găsim pentru derivata a n -a a funcției $y = (x-a)^n (x-b)^n$

$$y^{(n)} = n! \left[(x-a)^n + (C_n^1)^2 (x-a)^{n-1} (x-b) + (C_n^2)^2 (x-a)^{n-2} (x-b)^2 + \dots + (C_n^n)^2 (x-b)^n \right].$$

OBSERVARE. Dacă facem convenția să notăm cu $(u+v)^{(n)}$ operațiunea $(u+v)^n$ unde înlocuim produsul puterilor $u^p v^q$ prin produsul derivatelor $u^{(p)} v^{(q)}$, vom putea scrie

$$(uv)^{(n)} = (u+v)^{(n)}.$$

Se stabilește, în mod analog, că pentru un produs de trei sau mai mulți factori $y = u \cdot v \cdot w \cdot \dots$, avem

$$y^{(n)} = (u+v+w+\dots)^{(n)}.$$

III. — PROPRIETĂȚILE DERIVATELOR.

43. Teorema lui Rolle. Dacă $f(x)$ este o funcție derivabilă în intervalul (a, b) și dacă $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, există cel puțin un punct c , cuprins între a și b , pentru care să avem $f'(c) = 0$.

În adevăr, când x variază în intervalul (a, b) , $f(x)$ ia o valoare cea mai mare M și o valoare cea mai mică m [19, 41]. Dacă valorile M și m sunt amândouă nule, atunci $f(x)$ este egală cu zero în tot intervalul (a, b) și deci derivata sa va fi nulă în tot acest interval. Teorema, în acest caz este demonstrată.

Să presupunem acum că una din cantitățile M și m , de exemplu M , este diferită de zero. Fie c valoarea lui x pentru care $f(x) = M$.

Raportul

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cu $h > 0$, este negativ sau poate nul. Limita sa $f'(c)$ (derivata la dreapta) nu poate fi un număr pozitiv. Deci $f'(c) \leq 0$.

Tot astfel limita raportului

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{h},$$

unde h este tot pozitiv, este $f'(c)$ (derivata la stânga) care nu poate fi un număr negativ. Deci $f'(c) \geq 0$

Cum funcțiunea $f(x)$ este presupusă derivabilă în intervalul (a, b) , ea are o derivată unică în punctul c . Va trebui să avem dar $f'(c) = 0$.

CONSECINȚĂ. Dacă $f(x)$ ia aceeași valoare γ în punctele a și b , atunci derivata sa se anulează într'un punct din intervalul (a, b) , căci funcțiunea $f(x) - \gamma$, care are aceeași derivată cu $f(x)$, se anulează pentru $x = a$ și pentru $x = b$.

44. Formula creșterilor finite (LAGRANGE). Fie $f(x)$ o funcție continuă într'un interval (a, b) și având o derivată unică în fiecare punct al intervalului. Să considerăm raportul

(1)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = N f'(c)$$

$f'(c) = N$

între creșterea funcțiunei și creșterea variabilei; acest raport este un număr finit și determinat pe care să-l însemnăm cu N .

Vom avea

$$f(b) - f(a) - N(b - a) = 0.$$

Dacă considerăm acum funcțiunea auxiliară

$$g(x) = f(x) - f(a) - N(x - a)$$

vedem că $g(a) = 0$ și $g(b) = 0$. Va exista deci, după teorema lui Rolle un număr c cuprins între a și b astfel ca $g'(c) = 0$.

Cum $g'(x) = f'(x) - N$, deducem că $N = f'(c)$. Dar N este valoarea raportului (1); prin urmare avem:

(2)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b).$$

Aceasta este *formula creșterilor finite*, care se mai poate scrie, însemnând $b - a = h$,

(3)

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

Formula creșterilor finite se mai numește și *formula mediei*.

Interpretarea geometrică a formulei creșterilor finite se face cu ușurință. Să considerăm arcul de curbă ACB descris de punctul (x, y) , unde $y = f(x)$; punctele A, C și B corespunzând punctelor cu abscisele a, c, b . Coeficientul unghiular al coardei AB este

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

iar coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul C este $f'(c)$.

Formula (2) ne arată deci că există pe curba $y=f(x)$ un punct C, cuprins între A și B, în care *tangenta* la curbă este *paralelă* cu coarda AB.

45. Dacă o funcție $f(x)$ este derivabilă într'un interval (a, b) iar derivata sa este în mod constant nulă, atunci funcția $f(x)$ este constantă în intervalul (a, b) .

În adevăr fie x și $x+h$ două valori ale variabilei luate în intervalul (a, b) . Formula (3) ne dă

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) = 0$$

căci $x+\theta h$ este cuprins între a și b . Prin urmare $f(x)=f(x+h)$, adică $f(x)$ este o constantă în intervalul (a, b) .

CONSECINȚĂ. Dacă două funcțiuni $f(x)$ și $g(x)$ au derivate finite și egale într'un interval (a, b) atunci diferența lor este o constantă în acest interval.

Funcțiunea $f(x)-g(x)$ având derivata nulă, vom avea în intervalul (a, b) , $f(x)-g(x)=c$, c fiind o constantă.

Această propoziție stă la baza calculului integral, căci, după cum vom vedea aci, se cere să determinăm toate funcțiile care au o derivată cunoscută. După cele stabilite vedem că este suficient a cunoaște o singură funcțiune, toate celelalte obținându-se prin adăugarea unei constante la această funcție.

APLICAȚIE. Fie seria

$$F(x) = x - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Această serie este convergentă pentru $-1 < x < 1$ și după cele văzute [41] vom avea, pentru aceleași valori ale lui x ,

$$F'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

adică $F'(x) = \frac{1}{1+x}$. Dar și funcția $\text{Log}(1+x)$ are ca derivată pe $\frac{1}{1+x}$. Deci

$$\text{Log}(1+x) - F(x) = C$$

pentru $-1 < x < 1$. Pentru a determina constanta C să facem $x=0$; găsim astfel $C=0$. Prin urmare, pentru $|x| < 1$, avem

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

46. Derivata funcțiunilor crescătoare și descrescătoare. FUNCȚIUNI CRESCĂTOARE. Să considerăm o funcție $f(x)$ crescătoare într'un interval (a, b) și derivabilă în acest interval. Derivata $f'(x)$ nu poate fi negativă

pentru nici o valoare a lui x , căci numărătorul și numitorul raportului

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sunt de același semn.

Reciproc: dacă derivata $f'(x)$ este finită și nu devine negativă pentru nici o valoare a lui x din intervalul (a, b) , funcția $f(x)$ este *crescătoare* în intervalul (a, b) .

În adevăr dacă x_1 și x_2 sunt două numere oarecare din intervalul (a, b) și dacă $x_1 < x_2$, putem scrie, aplicând formula mediei,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi) \geq 0.$$

Deci $f(x_2) \geq f(x_1)$ când $x_2 > x_1$, adică funcțiunea $f(x)$ e *crescătoare*.

FUNCȚIUNI DESCRESCĂTOARE. În mod analog se arată că derivata unei funcțiuni descrescătoare într'un interval (a, b) nu poate fi pozitivă și reciproc: dacă derivata unei funcțiuni nu devine pozitivă într'un interval (a, b) , acea funcție este *descrescătoare* în acel interval.

EYEMPLU. Fie funcțiunea

$$f(x) = e^x (\sin x - \cos x) + 1.$$

Avem

$$f'(x) = 2e^x \sin x.$$

Pentru $0 \leq x \leq \pi$, derivata $f'(x)$ nu este negativă; funcția $f(x)$ crește de la $f(0) = 0$ la $f(\pi) = 1 + e^\pi$. Pentru $\pi \leq x < 2\pi$ derivata nu este pozitivă; funcția $f(x)$ descreește de la $f(-\pi) = 1 + e^\pi$ până la $f(0) = 0$.

OBSERVARE. Cele stabilite se pot aplica, cu oarecare precauțiuni și în cazul când funcțiunea sau derivata nu este continuă în întreg intervalul (a, b) .

Așa, de exemplu, dacă considerăm funcțiunea $f(x) = \frac{1}{a-x}$, unde a este o constantă, avem $f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2}$; deci derivata $f'(x)$ este pozitivă oricare ar fi x . Funcțiunea $f(x)$ nu este totuși *crescătoare*, când x variază de la $-\infty$ la $+\infty$, căci această funcție este discontinuă pentru $x=a$ și trece de la $+\infty$ la $-\infty$ când x ajunge și depășește valoarea a . Dacă însă ε este un număr pozitiv, funcțiunea este *crescătoare* în intervalele $(-\infty, a-\varepsilon)$ și $(a+\varepsilon, +\infty)$.

47. Formula lui Cauchy. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcțiuni continue și derivabile în intervalul (a, b) , derivata $g'(x)$ neanulându-se în acest interval. Să considerăm raportul

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

unde numitorul este diferit de zero, căci dacă am avea $g(a) = g(b)$, $g'(x)$ s'ar anula în intervalul (a, b) . Ne propunem să dăm o altă formă valorii acestui raport. Dacă însemnăm cu N valoarea sa, avem

$$f(b) - f(a) - N[g(b) - g(a)] = 0.$$

Să considerăm funcțiunea auxiliară

$$F(x) = f(x) - f(a) - N[g(x) - g(a)]$$

care se anulează pentru $x = a$ și $x = b$; deci după teorema lui Rolle

$$F'(c) = f'(c) - Ng'(c) = 0 \quad (a < c < b),$$

De unde putem scoate valoarea lui

$$N = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

căci $g'(c) \neq 0$. N fiind valoarea raportului inițial, deducem *formula lui Cauchy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b),$$

care se mai numește *formula mediei generalizată*, căci făcând $\varphi(x) = x$ regăsim formula mediei [44, (2)].

Formula lui Cauchy se mai poate scrie

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \quad (0 < \theta < 1).$$

OBSERVARE. Din cele ce preced se vede că formula lui Cauchy subzistă când $g'(x)$ s'ar anula într-una din extremitățile intervalului (a, b) .

EXERCITII.

1. Se consideră funcțiunea $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, nulă în origine; se cere derivata la dreapta și la stânga în punctul 0.

R. Aceste două derivate sunt diferite, căci avem pentru derivata la dreapta ($h > 0$)

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0^+} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2},$$

și pentru derivata la stânga

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0^-} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{-h} = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$y = (ax + b)^n (ax + \beta)^{n-1-\lambda}$$

R. Vom aplica formula lui Leibniz :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=0}^n k C_n^p (ax+b)^{\lambda-p} a^p (ax+\beta)^{p-1-\lambda} a^{n-p}$$

unde

$$k = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-p+1) \cdot (n-\lambda-1)(n-\lambda-2) \dots (p-\lambda),$$

sau

$$k = (-1)^{n-p} \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1).$$

Prin urmare

$$\frac{d^n y}{dx^n} = k (ax+b)^{\lambda-n} (ax+\beta)^{-1-\lambda} [\sum C_n^p (-aax-ab)^{1-p} (aax+a\beta)^p]$$

adică

$$\frac{d^n y}{dx^n} = k (ax+b)^{\lambda-n} (ax+\beta)^{1-\lambda} (a\beta-ab)^n.$$

3. Să se stabilească formula

$$(F_n) \quad \frac{d^n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

R. Această formulă se verifică imediat pentru $n=1$. Să presupunem adevărată formula F_{n-1} și să arătăm că formula F_n este o consecință a acesteia. Vom pleca de la identitatea

$$\frac{d^n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{d^n x \left[x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]}{dx^n}$$

unde membrul al doilea se mai poate scrie, aplicând formula lui Leibniz,

$$x \frac{d^n x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}$$

sau, ținând seama de formula F_{n-1} ,

$$(-1)^{n-1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right] + (-1)^{n-1} n \frac{1}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Derivând și făcând reducerile ne rămâne

$$(-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

R. Dacă în formula precedentă facem $f(u) = u^{n-1} g(u)$ suntem conduși la formula

$$\begin{aligned} \frac{d^n g\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} &= \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} [g^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n-1) C_n^1 x g^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + (n-1)(n-2) C_n^2 x^2 g^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots]. \end{aligned}$$

5. Să se calculeze derivata funcției $y = \arctg \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$ și să se explice rezultatul.

R. Găsim $y' = \frac{2}{1+x^2}$; deci y are aceeași derivată ca și funcția $u = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

Să arătăm că $y - u$ este constant. Avem

$$\operatorname{tg}(y - u) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} u}$$

și

$$\operatorname{tg} y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

Înlocuind și simplificând găsim $\operatorname{tg}(y - u) = 1$.

6. Fie $f(x)$ o funcție continuă așa ca $|f'(x)| \leq k < 1$. Să se arate că ecuația

$$F(x) = x - f(x) = 0$$

are o rădăcină reală r și numai una.

Dacă x_0 este un număr arbitrar și

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, \quad x_n = f(x_{n-1})$$

să se arate că, pentru $n \rightarrow \infty$, avem: $\lim x_n = r$.

R. Fie a un număr arbitrar. Formula mediei ne dă

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\theta),$$

θ fiind cuprins între x și a . Ecuația dată se mai poate scrie deci

$$F(x) = x[1 - f'(\theta)] - f(a) + af'(\theta) = 0.$$

Factorul $1 - f'(\theta)$ fiind pozitiv, se vede că $F(x)$ schimbă de semn când x crește de la $-\infty$ la $+\infty$. Deci $F(x)$ se anulează într'un punct $x = r$. Cum $F'(x)$ este totdeauna pozitivă, $F(x)$ este continuu crescătoare, așa că nu se poate anula decât într'un singur punct.

Avem, cu ajutorul formulei mediei,

$$x_1 - r = f(x_0) - f(r) = (x_0 - r)f'(\eta)$$

sau

$$|x_1 - r| < k |x_0 - r|$$

Tot astfel

$$|x_2 - r| < k |x_1 - r|$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|x_n - r| < k |x_{n-1} - r|.$$

Înmulțind aceste neegalități membru cu membru, obținem

$$|x_n - r| < k^n |x_0 - r|$$

de unde $\lim x_n = r$.

CAPITOLUL V.

DESVOLTAREA FUNCȚIUNILOR. — EXTREME.

I. — FORMULELE LUI TAYLOR ȘI MACLAURIN.

48. Formula lui Taylor. Dacă $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul n în x , ordonarea lui $P(x+h)$ după puterile lui h , ne conduce la formula

$$(1) \quad P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1} P'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(x),$$

care se verifică cu ușurință. În adevăr, polinomul $P(x)$ este o sumă de termeni de forma $a_k x^k$ (unde a_k sunt coeficienți numerici și $k = 0, 1, \dots, n$). Prin formula binomului se vede imediat că toți acești termeni, deci și suma lor, satisfac la formula (1). Generalizarea formulei (1) ne va conduce la *formula lui Taylor*.

Să considerăm o funcție $f(x)$ definită într'un interval (a, b) și admitând în acest interval derivate de primele $n+1$ ordine; de aci rezultă că $f(x)$ și primele n derivate sunt continue; vom presupune că derivata de ordinul $n+1$ e finită.

Fie x un punct determinat din intervalul (a, b) și h un număr astfel ca punctul $x+h$ să fie în același interval. Prin analogie cu formula (1) vom considera diferența

$$f(x+h) = f(x) - \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

care este nulă când $f(x)$ este un polinom de gradul n , dar care în general, este un număr ce depinde de funcția f și de valorile variabilelor x , n și h ; să luăm acest număr sub forma $h^p A$, unde p este un număr arbitrar așa că vom avea

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) - h f'(x) + \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) - h^p A = 0.$$

Pentru a da o altă formă numărului A să considerăm funcția auxiliară

$$F(u) = f(x+h) - f(u) - (x+h-u)f'(u) - \frac{(x+h-u)^2}{2!}f''(u) - \dots - \frac{(x+h-u)^n}{n!}f^{(n)}(u) - (x+h-u)^p A.$$

Această funcțiune de u este continuă și derivabilă pentru u cuprins în intervalul $(x, x+h)$; pe de altă parte ea se anulează pentru $u=x$ și pentru $u=x+h$. Deci, după teorema lui Rolle, $F'(u)$ se anulează pentru o valoare a lui u cuprinsă între x și $x+h$. Vom avea deci

$$(3) \quad F'(x+\theta h) = 0 \quad (0 < \theta < 1).$$

Dar derivând pe $F(u)$ și reducând termenii din membrul al doilea, vedem că

$$F'(u) = -\frac{(x+h-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u) + p(x+h-u)^{p-1}A.$$

Prin urmare, ținând seama de (3),

$$A = \frac{(1-\theta)^{n-p+1}h^{n-p+1}}{n!p}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Inlocuind pe A prin această expresiune, obținem formula

$$(4) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n$$

numită *formula lui Taylor*, unde am însemnat

$$(5) \quad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n!p}.$$

R_n se numește *termenul complementar* sau *restul* formulei lui Taylor. Numărul θ , care figurează în acest rest, depinde de x , h , n și p , dar este cuprins între 0 și 1.

Dacă facem $p=1$, avem restul sub forma dată de Cauchy

$$(6) \quad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^nf^{(n+1)}(x+\theta h)}{n!};$$

Pentru $p=n+1$, obținem

$$(7) \quad R_n = \frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}$$

formă dată de Lagrange și care este forma cea mai comodă pentru aplicațiuni.

OBSERVĂRI. 1^o. Este evident că numărul θ , care figurează în expresiunile resturilor (5), (6) și (7), nu este același

2^o. Formula lui Taylor (4), cu restul lui Lagrange (7), este o generalizare a formulei medii pe care o regăsim făcând $n=0$.

30. Dacă h este infinit de mic și îl considerăm ca infinit mic principal, formula (4) ne arată că expresia

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x)$$

unde $m \leq n$, este un infinit mic de ordinul $m+1$.

49. Formula lui Maclaurin. Dacă în formula (4) facem $x=0$, deci presupunem că intervalul (a, b) cuprinde originea și înlocuim pe h prin x , obținem *formula lui Maclaurin*

$$(8) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

scrisă cu restul lui Lagrange.

APLICAȚII. 10. *Constanta lui Euler.* Să aplicăm formula lui Maclaurin (8) la funcția $f(x) = \text{Log}(1+x)$, luând $n=1$ și $x > -1$. Vom avea

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

Această formulă ne va conduce la un rezultat important. Dacă înlocuim pe x prin $\frac{1}{n}$, n fiind un întreg pozitiv, vedem că

$$\frac{1}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^2} = \frac{\theta n}{2n^3}$$

θn fiind un număr pozitiv mai mic de cât unitatea.

Cum $\frac{1}{n^2}$ este termenul general al unei serii convergente [24, I], rezultă că seria al cărei termen general este $\frac{1}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ este și ea convergentă. Suma primilor n termeni ai acestei serii va fi

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left[\text{Log}\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

sau

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \text{Log}(n+1).$$

Limita lui S_n când n crește nemărginit este *constantă lui Euler* C , a cărei valoare cu 10 zecimale exacte este $C = 0,5772156649$.

20. *Numărul e.* Dacă facem în formula (8) pe $f(x) = e^x$, derivatele acestei funcțiuni fiind toate egale cu e^x și având valoarea 1 pentru $x=0$, obținem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

de unde, făcând $x=1$,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Ultimul termen din membrul al doilea este mai mic decât $\frac{3}{(n+1)!}$ pentru că [12, 40] $e < 3$ și $0 < \theta < 1$. Luând pe n destul de mare putem să zicem că acest ultim termen să devie oricât de mic. Prin urmare egalitatea precedentă ne permite a calcula numărul e cu orice aproximație voim.

Mai deducem din formula precedentă, înmulțind ambii membri cu $n!$, că

$$n!e = \text{număr întreg} + \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Această relație ne arată că e este un număr irațional; căci dacă ar fi rațional, ar fi de forma $\frac{p}{q}$ (p și q două numere întregi) și luând pe $n > q$ primul membru ar fi întreg, pe când membrul al doilea este fracționar pentru $n > 2$, căci $e^\theta < 3$.

50. Seriile lui Taylor și Maclaurin. Prezintă o deosebită importanță în Analiza Matematică cazul când funcțiunea $f(x)$ admite derivate de orice ordin, iar restul R_n tinde către zero când n crește nemărginit.

În acest caz avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \right] = 0$$

și seria

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

este convergentă pentru părechile de numere h și x luate după cum am convenit mai sus, suma seriei fiind $f(x+h)$. Putem deci scrie

$$(10) \quad f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Seria (9) se numește *seria lui Taylor* corespunzătoare funcțiunii $f(x)$. Când avem egalitatea (10) zicem că $f(x)$ este *desvoltabilă în seria lui Taylor*.

Din egalitatea (10), făcând $x = \alpha$ și $h = x - \alpha$, deducem

$$f(x) = \sum \frac{(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha),$$

și pentru $\alpha = 0$, obținem desvoltarea în *seria lui Maclaurin*

$$(11) \quad f(x) = \sum \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Putem afirma într'un anumit caz că termenul complementar R_n tinde către zero, când n crește nemărginit: când valoarea absolută a unei derivate de un ordin oarecare a funcțiunii $f(x)$ rămâne mai mică

decât un număr fix M . În adevăr din forma (7) a termenului complementar, rezultă că

$$|R_n| < M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Membrul al doilea fiind termenul general al unei serii convergente vedem că $\lim R_n = 0$; prin urmare formula (10) se aplică la aceste funcțiuni. În această categorie de funcțiuni intră e^x , $\sin x$, $\cos x$.

FUNCȚIA e^x . Derivatele acestei funcțiuni sunt toate egale cu e^x și deci mărginite, în orice interval (a, b) s'ar găsi x . Formula (10) se aplică dar acestei funcțiuni. Vom aplica formula mai simplă (11). Funcția e^x și toate derivatele ei sunt egale cu unitatea pentru $x=0$; vom avea deci dezvoltarea

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

valabilă pentru toate valorile pozitive sau negative ale variabilei x .

FUNCȚIA A^x . Schimbând pe x în $x \log A$ în formula precedentă avem

$$A^x = e^{x \log A} = 1 + \frac{x \log A}{1} + \dots + \frac{(x \log A)^n}{n!} + \dots$$

FUNCȚIA $\sin x$. Derivatele succesive ale acestei funcțiuni formează un șir periodic cu patru termeni distincți, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, ale căror valori absolute nu depășesc unitatea. Cum

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \dots$$

formula (11) fiind aplicabilă, găsim

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$$

dezvoltare valabilă pentru toate valorile pozitive și negative ale lui x .

FUNCȚIA $\cos x$. În mod analog găsim

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \pm \dots$$

OBSERVARE. Ar părea, la prima vedere, că condiția ca o funcție $f(x)$ să admită o dezvoltare în seria lui Taylor (10), ar fi ca seria (9) să fie convergentă, adică ca restul acestei serii

$$(12) \quad \sum_{i=n}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x)$$

să tindă către zero, când n crește nemărginit. Dar această condiție, care este evident necesară pentru valabilitatea dezvoltării (10), nu este suficientă. Formula (10) nu este justificată de cât atunci când se arată că termenul complementar (5) tinde către zero, când n crește nemărginit, ceea ce nu este o consecință a faptului că restul (12) tinde către zero.

Se poate, în adevăr, ca o serie de forma (9) să fie convergentă fără ca să reprezinte funcțiunea $f(x)$. Vom arăta acest lucru pe un exemplu dat de Cauchy.

Fie $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; această funcție este continuă și admite derivate de orice ordin, pentru toate valorile lui x . Se vede cu ușurință că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{P}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

unde m este un întreg pozitiv și P un polinom în x . Să arătăm că funcția $f(x)$ și toate derivatele ei succesive sunt nule pentru $x=0$. Este suficient a arăta că expresia

$$\frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

tinde către zero, când x tinde către zero. Sau, făcând $x = \frac{1}{u}$ să arătăm că $\frac{e^{u^2}}{u^m}$ crește nemărginit când u crește nemărginit. Acest lucru se vede imediat înlocuind pe e^{u^2} prin valoarea dată de formula [49, II]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

unde facem $x = u^2$ și $n > \frac{m}{2}$.

Prin urmare seria

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

pentru $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ este convergentă, toți termenii săi fiind nuli, dar nu reprezintă pe $f(x)$.

Mai general, dacă considerăm o funcție $g(x)$ pentru care formula (11) se aplică, adică

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1} g'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + \dots$$

vedem că funcția $G(x) = g(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ va avea aceeași dezvoltare în

seria lui Maclaurin ca și $g(x)$, dar această dezvoltare *nu* reprezintă funcția $G(x)$.

51. Formula binomului. Să căutăm dezvoltarea în seria lui Maclaurin a funcției $f(x) = (1+x)^\lambda$. Vom avea

$$f^{(n)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(1+x)^{\lambda-n};$$

prin urmare

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + R_n$$

unde R_n este *termenul complementar*. Pentru ca R_n să tindă către zero—când n crește nemărginit, este *necesar* ca seria, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n,$$

să fie convergentă. Dar

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda-n}{n}x$$

asa că, pentru $n=\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -x.$$

Seria va fi deci convergentă când $|x| < 1$. Să arătăm că pentru $|x| < 1$ și termenul complementar R_n tinde către zero.

În adevăr, vom lua forma lui Cauchy a termenului complementar

$$R_n = v_n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1}$$

unde

$$v_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!}x^{n+1}.$$

Seria al cărei termen general este v_n este convergentă pentru $|x| < 1$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$$

ținând seama că $0 < \theta < 1$, avem $1 + \theta x < 2$ iar $1 - \theta < 1 + \theta x$.

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Avem deci dezvoltarea în serie

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}x + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

valabilă pentru $|x| < 1$ și care se numește *formula binomului*.

II. — VALOAREA ADEVĂRATĂ A EXPRESIUNILOR NEDETERMINATE.

52. Expresiuni nedeterminate. VALOARE ADEVĂRATĂ. O expresie analitică se poate prezenta, pentru anumite valori ale variabilei, sub una din formele

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$$

care n'au nici un sens *a priori*. Fie în general o funcție $f(x)$ a cărei valoare devine nedeterminată pentru $x = a$; prin definiție limita către care tinde $f(x)$, când x tinde către a , este *valoarea adevărată* a funcției în punctul a .

53. Forma $\frac{0}{0}$. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sunt două funcțiuni care se anulează în același timp pentru $x = a$, raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ se prezintă sub formă nedeterminată. Pentru a putea găsi valoarea adevărată a acestui raport, vom face următoarele ipoteze:

1°. Funcțiunile f și g au derivate bine determinate în vecinătatea lui a .

2°. $g'(x)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătatea punctului a ; ceea ce înseamnă că putem determina un număr destul de mic ε astfel ca, în intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $g'(x)$ să nu se anuleze decât cel mult în a .

REGULA LUI L'HOSPITAL. Dacă există o limită a raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pentru $x = a$, avem

$$(1) \quad \lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

În adevăr formula lui Cauchy [47] devine, ținând seama că $f(a) = g(a) = 0$,

$$(2) \quad \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \quad (0 < \theta < 1),$$

condițiunile cerute pentru stabilirea acestei formule fiind îndeplinite prin ipotezele 1° și 2°. Prin urmare, dacă avem o limită pentru membrul al doilea, când h tinde către zero, aceasta este și limita primului membru. Egalitatea (1) este așa dar justificată.

Dacă derivatele $f'(x)$ și $g'(x)$ sunt funcțiuni continue în punctul a , deducem din (2) că

$$(3) \quad \lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Această ultimă egalitate subzistă pentru $g'(a) = 0$, dacă $f'(a)$ este diferit de zero și nu schimbă de semn în vecinătatea lui a . Limita raportului în acest caz este $+\infty$ sau $-\infty$.

EXEMPLU. Valoarea adevărată a raportului $\frac{\sin(x-a)}{\sin x - \sin a}$ pentru $x=a$ o găsim aplicând formula (3) și este $\frac{1}{\cos a}$.

OBSERVĂRI. 1^o. Dacă funcțiunile $f(x)$ și $g(x)$ sunt după cum am presupus (2^o) derivabile în punctul a , în egalitatea (2) putem face pe h să tindă către zero, indiferent prin valori pozitive sau negative. Dacă însă $f(x)$ și $g(x)$ sunt derivabile numai la dreapta, h va fi considerat pozitiv și vom avea

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a+0)}{g'(a+0)}.$$

Dacă f și g sunt derivabile numai la stânga, avem

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a-0)}{g'(a-0)}.$$

2^o. Dacă raportul $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ nu are o limită determinată când x tinde către a , nu trebuie să conchidem că raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu are nici o limită; căci în formula (2) h tinde către zero după o lege pe care nu o cunoaștem și care poate fi astfel încât membrul al doilea să aibă o limită. (1)

EXEMPLU. Raportul

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

are ca limită zero, pentru $x=0$; pe când raportul derivatelor

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

nu tinde către nici o limită.

În anumite cazuri putem ajunge la determinarea valorii adevărate a raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ prin aplicarea repetată a regulii precedente. Dacă și limita raportului $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, pentru $x=a$, se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ avem

$$\lim_{x=a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x=a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

căci aplicând raportului $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ formula (1) avem

$$\lim_{x=a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}.$$

(1) Spre exemplu $\sin \frac{1}{x}$, când x tinde către zero, nu are nici o limită; dar dacă x tinde către zero numai prin valorile $\frac{1}{2k\pi}$, unde k este un întreg, atunci $\sin \frac{1}{x}$ are ca limită zero.

Dacă și limita raportului derivatelor de ordinul al doilea se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$, vom lua limita raportului derivatelor de ordinul al treilea $f'''(x)$, $g'''(x)$; și așa mai departe.

Rezultă de aci că, în cazul când toate derivatele succesive ale funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$, până la ordinul n exclusiv, sunt nule în punctul a , derivatele $f^{(n)}(x)$ și $g^{(n)}(x)$ fiind continue în a fără ca ambele valori $f^{(n)}(a)$ și $g^{(n)}(a)$ să fie nule, vom avea

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

EXEMPLU. Raportul

$$\frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$$

ia, pentru $x=0$, forma $\frac{0}{0}$. Raportul derivatelor prime este de aceeași formă. Valoarea adevărată a acestui raport este dată de raportul derivatelor de ordinul al doilea și este 1.

OBSERVARE. Formula (4) se poate stabili și cu ajutorul formulei lui Taylor. În adevăr, aplicând funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ formulele (4) și (7) de la n avem

$$f(a+h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_1 h)$$

$$g(a+h) = \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(a + \theta_2 h).$$

Împărțind membru cu membru aceste egalități și făcând apoi pe h să tindă către zero, deducem, ținând seama de continuitatea funcțiilor $f^{(n)}(x)$ și $g^{(n)}(x)$, formula (4).

CAZUL $a = \infty$. Am presupus până acum pe a finit. Formula (1) poate fi însă extinsă și cazului $a = +\infty$ (sau $a = -\infty$).

Fie $a = +\infty$. Să facem $x = \frac{1}{u}$; când x crește nemărginit, u tinde către zero prin valori pozitive. Vom avea deci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Dacă funcțiunile $f\left(\frac{1}{x}\right)$ și $g\left(\frac{1}{x}\right)$ satisfac la condițiile 1^o și 2^o pentru $a = 0$, putem aplica formula (1); deci

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regăsim astfel formula (1) unde $a = +\infty$.

54. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții care devin *infinite* în punctul a ; de exemplu, pentru fixarea ideilor, $f(a+0) = +\infty$, și $g(a+0) = +\infty$. Presupunem că funcțiunile $f(x)$ și $g(x)$ sunt derivabile în intervalul deschis $(a+0, b)$ și că $g'(x)$ nu se anulează pentru $a < x < b$.

Să arătăm că: *dacă raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ are o limită A finită sau infinită, vom avea*

$$(5) \quad \lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Fie x_0 și x , $x_0 > x > a$, două valori din intervalul $(a+0, b)$. Aplicând formula lui Cauchy, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (x_0 < \xi < x)$$

Formula precedentă se mai poate scrie

$$(6) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \times \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}.$$

Să presupunem mai întâiu limita A finită. În membrul al doilea al egalității (6) avem doi factori și vom arăta că limita primului este A iar a celui de al doilea este 1.

În adevăr, putem lua pe x_0 și x destul de aproape de a așa fel ca $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ să difere de A cu mai puțin decât ϵ . Pentru factorul al doilea, putem, fără a înceta de a satisface condiției precedente, să lăsăm pe x_0 fix și să facem pe x să tindă către a . Rapoartele $\frac{g(x_0)}{g(x)}$ și $\frac{f(x_0)}{f(x)}$ tinzând către zero, vedem că acest factor poate fi presupus oricât de vecin de unitate.

Prin urmare avem egalitatea (5).

Dacă $A = +\infty$, rezultă ca mai sus din egalitatea (6) că limita raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ este infinită pentru $x = a$.

EXEMPLU. Valoarea raportului $\frac{\text{Log } x}{x^n}$ pentru $x = +\infty$, n fiind un număr pozitiv, este dată de limita raportului derivatelor $\frac{1}{n x^n}$ și este deci zero.

OBSERVARE. Se poate ca limita raportului derivatelor $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu existe; nu

putem conchide de aci că raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ nu are limită.

Așa de exemplu $\frac{x + \sin x}{x}$ pentru $x = \infty$ se vede imediat că are ca limită unitatea, pe când raportul derivatelor este $1 + \cos x$ și nu are nici o limită.

CAZUL $a = \infty$. Se arată, ca și în cazul formei $\frac{0}{0}$, că egalitatea (5) subzistă și pentru $a = \infty$.

55. Alte forme de nedeterminare. Alte forme mai importante de nedeterminare sunt

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

dar se reduc toate la cele două forme studiate.

Prima se prezintă când un produs $f(x) g(x)$ ia, pentru $x = a$, forma $0 \cdot \infty$. Cum însă putem scrie

$$f(x) g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

suntem conduși la forma $\frac{0}{0}$.

Tot astfel dacă o diferență $f(x) - g(x)$ este, pentru $x = a$, de forma $\infty - \infty$, vom scrie

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) : \frac{1}{f(x)g(x)}$$

și suntem conduși tot la forma $\frac{0}{0}$.

Pentru celelalte 3 forme luăm logaritmul expresiunii și regăsim una din formele considerate.

EXEMPLE. 1°. Limita expresiunii $x \operatorname{Log} \frac{x-a}{x+a}$ pentru $x = \infty$ este, după cele văzute, aceeași cu a raportului

$$\frac{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}}{-\frac{1}{x^2}}$$

pentru $x = \infty$, deci $-2a$.

2°. Pentru găsirea limitei lui x^x pentru $x = 0$ suntem conduși la găsirea limitei lui $x \log x$, care se determină ca în exemplul precedent și este 0. Deci pentru $x = 0$, avem $x^x = 1$.

OBSERVARE. Este de multe ori comod a întrebuița dezvoltarea în serie a lui Taylor pentru găsirea valorii adevărate a unei expresii nedeterminate.

Așa, de exemplu, dacă utilizăm dezvoltarea (1)

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{n! x^n} + \dots$$

vedem că valoarea expresiunii

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} \right)$$

pentru $x = \infty$, care se prezintă sub forma $\infty \cdot 0$, este 2.

III. — MAXIMELE ȘI MINIMELE FUNCȚIUNILOR DE O VARIABILĂ.

56. Maxime și minime. Fie $f(x)$ o funcție definită într'un interval (a, b) și c un punct în interiorul acestui interval. Dacă $f(c)$ este cea mai mare valoare pe care o ia funcția $f(x)$ pentru valorile lui x cuprinse în intervalul $(c - \eta, c + \eta)$, η fiind un număr pozitiv destul de mic, adică dacă

$$f(c) > f(c + h) \text{ pentru } |h| < \eta$$

zicem că funcțiunea $f(x)$ este *maximă* pentru $x = c$, maximul său fiind $f(c)$.

Dacă însă

$$f(c) < f(c + h) \text{ pentru } |h| < \eta$$

adică dacă $f(c)$ este cea mai mică valoare pe care o ia funcțiunea pentru valorile lui x din vecinătatea lui c , zicem că funcțiunea $f(x)$ este *minimă* pentru $x = c$, minimul său fiind $f(c)$.

EXEMPLU. Funcțiunea $\cos \frac{1}{x}$ este maximă pentru toate valorile lui x de forma $\frac{1}{2k\pi}$, unde k e un întreg pozitiv sau negativ și minimă pentru x de forma $\frac{1}{(2k+1)\pi}$.
Într'un interval care cuprinde originea, funcțiunea considerată are o infinitate de maxime și minime.

Din definițiunile date rezultă că un maxim sau un minim al funcției $f(x)$ nu este neapărat cea mai mare sau cea mai mică valoare a funcției $f(x)$ în întreg intervalul (a, b) . Se poate ca unul din minimele funcțiunei să fie mai mare ca unul din maxime. De aceea maximele și minimele definite mai sus se mai numesc și maxime și minime *relative*.

Maximul absolut și *minimul absolut* ale funcțiunei $f(x)$ în intervalul (a, b) sunt cea mai mare și cea mai mică valoare a funcțiunei în întreg(2) intervalul (a, b) [19, observați].

(1) Această dezvoltare se obține înlocuind, în dezvoltarea lui e^u în seria lui Maclaurin, pe u prin $\frac{1}{x}$.

(2) Este evident că dacă maximul și minimul absolut nu corespund extremităților intervalului (a, b) , atunci se găsesc printre maximele și minimele relative.

Maximele și minimele (relative) ale unei funcțiuni se mai numesc și *extremele* acelei funcțiuni.

57. Extremele funcțiunilor derivabile. Dacă funcțiunea $f(x)$ este derivabilă în intervalul (a, b) și dacă $f(c)$ este un extrem, atunci avem $f'(c) = 0$.

În adevăr, dacă presupunem că $f(x)$ este maximă pentru $x = c$, numărătorii rapoartelor

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{și} \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \quad h > 0,$$

sunt negativi, pe când numitorii sunt de semne contrarii. Când h tinde către zero, primul raport are o limită ≤ 0 , al doilea o limită ≥ 0 . Cum aceste limite trebuie să fie egale, vedem că $f'(c) = 0$.

Demonstrația este analoagă în cazul când $f(x)$ este minimă pentru $x = c$.

Prin urmare pentru a găsi punctele în care $f(x)$ poate fi un extrem vom căuta rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$.

Nu este însă suficient a avea $f'(c) = 0$ pentru a putea afirma că $f(x)$ este un extrem pentru $x = c$.

În adevăr să presupunem că toate derivatele succesive ale lui $f(x)$, până la cea de ordinul r inclusiv, se anulează pentru $x = c$ și că derivata de ordin $r+1$ există, și este diferită de zero, în punctul c . Avem după formula lui Taylor

$$(1) \quad f(c+h) = f(c) + \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(c + \theta h) \quad 0 < \theta < 1.$$

Cum însă $f^{(r)}(c) = 0$, termenul complementar se mai poate scrie

$$\frac{\theta h^{r+1}}{r!} \cdot \frac{f^{(r)}(c + \theta h) - f^{(r)}(c)}{\theta h}$$

și când h tinde către zero, al doilea factor tinde către $f^{(r+1)}(c)$.

Pentru a decide dacă $f(c)$ este un extrem al funcțiunei sau nu, va trebui să cercetăm semnul termenului complementar. Vom deosebi următoarele două cazuri:

CAZUL I: $r+1$ par. Dacă $f^{(r+1)}(c)$ este pozitiv, avem din formula (1), pentru h destul de mic și pozitiv

$$f(c+h) - f(c) > 0 \quad \text{și} \quad f(c-h) - f(c) > 0;$$

deci pentru $x = c$, funcțiunea $f(x)$ are un minim; dacă însă $f^{(r+1)}(c)$ este negativ, avem

$$f(c+h) - f(c) < 0 \quad \text{și} \quad f(c-h) - f(c) < 0$$

și funcțiunea are un maxim pentru $x = c$.

CAZUL II: $r+1$ impar. Când $f^{(r+1)}(c)$ este pozitiv, avem

$$f(c+h) - f(c) > 0 \quad \text{și} \quad f(c-h) - f(c) < 0;$$

deci $f(c)$ nu este un extrem, iar $f(x)$ este crescătoare în vecinătatea lui c ; când $f^{(r+1)}(c) < 0$, avem

$$f(c+h) - f(c) < 0 \quad \text{și} \quad f(c-h) - f(c) > 0;$$

deci nici în acest caz $f(c)$ nu este un extrem și $f(x)$ este descrescătoare în vecinătatea lui c .

OBSERVĂRI. 10. În considerațiunile de mai sus nu am presupus decât existența derivatei de ordinul $r+1$ în punctul c ; dacă presupunem însă și *continuitatea* acestei derivate, rezultatele precedente se stabilesc mai ușor plecând de la formula

$$f(c+h) = f(c) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(c + \theta h).$$

20. Dacă considerăm curba $y=f(x)$ și avem $f'(c)=0$, tangenta T în punctul $P[c, f(c)]$ este după cum știm paralelă cu Ox .

În cazul când $r+1$ este par, curba este de aceeași parte a tangentei, în vecinătatea lui P ; pe când dacă $r+1$ este impar, curba traversează tangenta în punctul P , care este un punct de *înflexiune* al curbei.

În rezumat vedem că pentru a găsi extremele funcției $f(x)$, derivabilă în intervalul (a, b) , vom căuta rădăcinile ecuației $f'(x)=0$. Dacă c este o rădăcină a acestei ecuații, vom calcula valorile derivatelor succesive ale lui $f(x)$ pentru $x=c$; fie n ordinul primei derivate care nu se anulează în punctul c . Dacă n este impar, $f(c)$ nu este un extrem al funcțiunii; dacă n este par, $f(c)$ este: un *maxim* dacă $f^{(n)}(c) < 0$; un *minim* dacă $f^{(n)}(c) > 0$.

EXEMPLU. Să căutăm extremele funcțiunii

$$(2) \quad y = 2 \cos x + e^x + e^{-x}$$

Avem

$$y' = 2 \sin x + e^x - e^{-x},$$

sau, înlocuind pe $\sin x$, e^x și e^{-x} prin dezvoltările după puterile lui x și făcând reducerile,

$$(3) \quad y' = 4x^3 \left(\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^8}{11!} + \dots \right)$$

Cum paranteza nu se anulează pentru nici o valoare a lui x , vedem că y poate avea un extrem în $x=0$. Derivatele a doua și a treia

$$y'' = -2 \cos x + e^x + e^{-x}, \quad y''' = 2 \sin x + e^x - e^{-x}$$

sunt nule pentru $x=0$, iar derivata a patra este egală cu 4 pentru $x=0$.

Prin urmare funcțiunea dată este minimă pentru $x=0$, minimumul său fiind egal cu 4. Avem deci neegalitatea

$$2 \cos x + e^x + e^{-x} \geq 4.$$

58. Extremele funcțiilor nederivabile. Să presupunem acum că funcțiunea continuă $f(x)$ nu este derivabilă în întreg intervalul (a, b) și anume că în anumite puncte, în număr finit, avem derivate la dreapta și la stânga diferite. Putem împărți intervalul (a, b) într'un număr finit de intervale parțiale, care să nu conțină fiecare decât câte un punct în care $f(x)$ nu are o derivată unică. Fie c acest punct al unuia din intervalele parțiale. Să cercetăm când $f(c)$ este un extrem.

Să presupunem că $f'(x)$ are, în vecinătatea punctului c , un semn unic pentru $x > c$. Dacă facem ca variabila x să treacă crescând prin valoarea c , se va prezenta unul din următoarele trei cazuri:

1^o. Dacă $f'(x)$ trece de la negativ la pozitiv, atunci $f(c)$ este un *minim*, căci funcțiunea descrește până ce x ajunge în c și apoi crește.

2^o. Dacă $f'(x)$ trece de la pozitiv la negativ, $f(c)$ este un *maxim*.

3^o. Dacă $f'(x)$ nu schimbă de semn, când x trece prin c , $f(c)$ nu este un extrem, funcțiunea $f(x)$ fiind continuu *crescătoare* sau *descrescătoare*, după cum $f'(x)$ este pozitiv sau negativ.

OBSEVARE. Considerațiunile de mai sus se pot aplica, pentru determinarea naturii extremului, și în cazul $f'(c) = 0$. De multe ori, în practică, este mai comod a cerceta cum variază funcția în vecinătatea lui c de cât a căuta semnul unei derivate de ordin superior pentru $x = c$.

Dacă reluăm exemplul precedent (2), vedem din (3) că y' trece dela negativ la pozitiv, când x traversează originea; deci y este *minim* pentru $x = 0$.

EXERCITIUL.

1. Să se arate ca

$$(1) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

și să se deducă egalitatea

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

R. Seria

$$(2) \quad \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

este convergentă pentru $|x| < 1$. Dacă $f(x)$ este suma acestei serii avem [41]

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

deci [45] $f(x) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = C$. Cum determinarea principală a funcției $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ se anulează pentru $x = 0$, vedem că $C = 0$.

Seria (2) fiind convergentă pentru $x = 1$, egalitatea (1) subzistă, după teorema lui Abel, când facem pe $x = 1$.

2. Să se desvolte în serie, după puterile lui x , funcția $\frac{\log(1+x)}{1+x}$.

R. Cunoaștem desvoltarea lui $\log(1+x)$ [45] și a lui $\frac{1}{1+x}$. Făcând produsul după regula de înmulțire a seriilor, avem desvoltarea

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n + \dots$$

valabilă pentru $|x| < 1$.

3. Se cere adevărata valoare a raportului $\frac{\log \cos \alpha x}{\log \cos \beta x}$ pentru $x=0$.

R. Raportul derivatelor numărătorului și numitorului este

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\cos \beta x}{\cos \alpha x} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

și are ca limită $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

4. Limita expresiei

$$y = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}$$

când x tinde către zero.

R. Înlocuind pe $\frac{1}{1+x}$ și $\log(1+x)$ prin desvoltările lor în serie, vedem că

$$y = \frac{1}{x} \left[(1 - x^2 + x^3 - \dots) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots\right) \right]$$

deci limita este $-\frac{1}{2}$.

5. Limita expresiei $y = \left(\frac{ax + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ când x tinde către zero.

R. Avem $\log y = \frac{1}{x} \log \left(\frac{ax + b^x}{2}\right)$. Deci

$$\lim_{x=0} \log y = \lim_{x=0} \frac{ax \log a + b^x \log b}{ax + b^x} = \frac{1}{2} \log a b.$$

Prin urmare limita este $\sqrt{ab}$.

6. Să se găsească extremele funcțiunei $y = x^{\frac{1}{x}}$

R. y este extrem în acelaș timp cu $u = \log y$. Avem

$$u' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

Deci y are un singur extrem: pentru $x=e$. Cum

$$u'' = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

vedem că u'' pentru $x=e$ este $-\frac{1}{e^3}$. Deci y este maxim pentru $x=e$.

7. Să se găsească extremele produsului $y = x^m(a-x)^n$, unde m și n sunt numere întregi și a un număr pozitiv.

R. Rădăcinile ecuației

$$x^{m-1}(a-x)^{n-1}[am - (m+n)x] = 0$$

adică $x=0$, $x=a$, $x=\frac{ma}{m+n}$ sunt punctele în care y poate fi un extrem. y'' este negativ pentru $x=\frac{ma}{m+n}$; deci y e un maxim în acest punct și are valoarea

$$m^m n^n \left(\frac{a}{m+n} \right)^{m+n}$$

Pentru $x=0$, vom cerceta curba $y=x^m(a-x)^n$ în vecinătatea originii făcând $x=\pm \varepsilon$. Vedem astfel că: dacă m este par, y este *minim* pentru $x=0$; iar dacă m este impar, n'avem un extrem în origine, funcțiunea fiind crescătoare.

Tot astfel, făcând $x=a\pm \varepsilon$, vedem că dacă n este par avem un *minim* pentru $x=a$, iar dacă n este impar funcțiunea descrește pentru $x=a$.

CAPITOLUL VI.

FUNȚIUNI DE MAI MULTE VARIABLE.

I. — DERIVAREA ȘI DIFERENȚIAREA FUNȚIUNILOR EXPLICITE DE MAI MULTE VARIABLE.

59. Derivate parțiale. Fie $\omega = f(x, y)$ o funcțiune de două variabile independente x și y , definită într'un domeniu D și continuă în acest domeniu. Dacă dăm lui y o valoare constantă și facem să varieze x , ω devine o funcție continuă de singura variabilă x ⁽¹⁾. Dacă această funcție admite o derivată, această derivată se numește *derivata parțială* a lui ω în raport cu x . Deci prin definiție această derivată *parțială* este limita raportului

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

când h tinde către zero.

Dacă în orice punct al domeniului D există o derivată parțială în raport cu x , zicem că ω este derivabilă parțial în raport cu x în domeniul D .

În mod analog se definește și derivata parțială în raport cu y

NOTAȚIUNI. Derivata parțială a funcției $\omega = f(x, y)$ în raport cu x se notează cu $f'_x(x, y)$, sau mai simplu

$$f'_x \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ sau } \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Derivata parțială în raport cu y , se notează cu $f'_y(x, y)$ sau

$$f'_y \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sau } \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Se mai întrebuițează notația lui Monge: prin litera p se notează derivata parțială în raport cu x și prin litera q derivata parțială în raport cu y .

⁽¹⁾ Geometricește, punctul (x, y) se deplasează pe porțiunea, cuprinsă în domeniul D , a unei drepte paralele cu axa x -ilor.

DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR. Derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcțiuni de x și y , care la rândul lor pot admite și ele derivate parțiale în raport cu x și y . Aceste derivate se notează prin

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

și se numesc derivate parțiale de ordinul al doilea.

Prin analogie f'_x și f'_y se numesc derivate parțiale de ordinul întâi.

Din derivatele parțiale de ordinul al doilea, deducem pe cele de ordinul al treilea

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Urmând tot astfel definim derivatele parțiale de un ordin oarecare n .

Se definesc la fel derivatele parțiale de diverse ordine ale funcțiilor ce depind de mai multe variabile independente.

PRINCIPIUL INTERVERTIREI ORDINEI DERIVĂRILOR. Nu totdeauna cele 4 derivate parțiale de ordinul al doilea ale unei funcțiuni de două variabile, sau cele 8 de ordinul al treilea, sunt distincte între ele. Vom indica un criteriu, care ne va permite să restrângem numărul derivatelor distincte de ordin superior.

Dacă într'un domeniu D , derivatele f''_{xy} și f''_{yx} sunt continue, atunci în acel domeniu avem:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

În adevăr, să considerăm expresia

$$E = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)$$

x și y fiind coordonatele unui punct din domeniul D ; însemnând

$$(1) \quad g(u) = f(x+h, u) - f(x, u),$$

expresia E se mai poate scrie

$$E = g(y+k) - g(y),$$

sau, aplicând formula mediei [44]

$$E = k g'_y(y + \theta k) \quad \text{unde } 0 < \theta < 1.$$

Dacă înlocuim pe g'_y prin valoarea sa (1), avem

$$E = k [f''_{yx}(x+h, y+\theta k) - f''_{xy}(x, y+\theta k)]$$

și aplicând din nou formula mediei

$$(2) \quad E = k h f''_{yx}(x+\theta' h, y+\theta k) \quad 0 < \theta' < 1.$$

Din cauza simetriei expresiei E în x, y, h și k vedem că plecând dela funcțiunea auxiliară

$$y(v) = f(v, y+k) - f(v, y)$$

ajungem, urmând aceeaș cale, la

$$(3) \quad E = k h f''_{xy}(x+\theta'_1 h, y+\theta_1 k) \quad 0 < \theta'_1 < 1, 0 < \theta_1 < 1.$$

Egalând valorile (2) și (3), vedem că

$$f''_{xy}(x+\theta'_1 h, y+\theta_1 k) = f''_{yx}(x+\theta' h, y+\theta k).$$

Când h și k tind către zero, f''_{xy} și f''_{yx} , fiind continue, vor fi limitele către care tind ambii membri ai egalității precedente și deci propoziția este demonstrată.

Acest lucru fiind stabilit, să presupunem că am efectuat asupra funcției $f(x, y)$ un număr oarecare de derivări parțiale succesive, unele în raport cu x , altele în raport cu y și într'o ordine arbitrară. Dacă toate derivatele parțiale ale funcțiunii sunt continue, putem interverti ordinea a două derivări consecutive și prin aplicarea repetată a unor astfel de intervertiri, putem aranja derivările în ordinea pe care o voim. Putem, spre exemplu, face mai întâiu toate derivările în raport cu x și apoi toate derivările în raport cu y .

În demonstrația criteriului precedent putem presupune că funcțiunea ar mai depinde și de alte variabile independente în afară de x și y , pentru că aceste alte variabile trebuiesc considerate ca niște constante în derivările parțiale în raport cu x și y .

Dacă avem o funcțiune $f(x, y, z, \dots)$ de un număr oarecare de variabile, ordinea a două derivări succesive în raport cu variabile diferite poate fi schimbată, în ipoteza continuității derivatelor.

Astfel că rezultatul a m derivări în raport cu x , n derivări în raport cu y , p derivări în raport cu $z, \dots$, efectuate într'o ordine oarecare, poate fi reprezentat prin simbolul unic

$$\frac{\partial^{m+n+p+\dots} f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \dots}$$

În aceste condițiuni o funcție de p variabile independente are atâtea derivate parțiale de ordinul n , câți termeni distincți poate avea un po-

linom omogen de gradul n cu p variabile, adică

$$\frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

ceea ce reprezintă *numărul combinațiilor cu repetiție* a p obiecte luate câte n . Pentru o funcție de două variabile vom avea deci: trei derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

care, după notațiunea lui Monge, se însemnează respectiv cu literele r, s, t ; patru derivate de ordinul al treilea

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

și în general $n+1$ derivate de ordinul n .

60. Formula creșterilor finite. Să considerăm o funcție de mai multe variabile, pentru fixarea ideilor de trei variabile,

$$\omega = f(x, y, z)$$

și să formăm diferența finită (sau creșterea)

$$\Delta \omega = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \Delta \omega = & f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l) \\ & + f(x, y+k, z+l) - f(x, y, z+l) \\ & + f(x, y, z+l) - f(x, y, z). \end{aligned}$$

Aplicând formula mediei diferențelor din fiecare rând, avem

$$(4) \quad \Delta \omega = h f'_x(x+\theta_1 h, y+k, z+l) + k f'_y(z, y+\theta_1 k, z+l) + l f'_z(x, y, z+\theta_2 l)$$

cu

$$0 < \theta, \theta_1, \theta_2 < 1.$$

În demonstrația acestei formule nu se presupune continuitatea derivatelor parțiale f'_x, f'_y, f'_z ; dacă însă aceste derivate sunt continue formula precedentă se mai poate scrie

$$(5) \quad \Delta \omega = f'_x(x, y, z) + f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + l\varepsilon_3$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ fiind cantități care tind către zero în același timp cu h, k, l .

61. Derivarea funcțiilor compuse. Să considerăm o funcție de mai multe variabile, pentru ușurarea scrisului de 3 variabile,

$$\omega = f(u, v, w)$$

u, v, w fiind funcțiuni de alte variabile independente x, y, z ; ω e funcție de variabilele independente $x, y, z, \dots$ prin intermediul funcțiunilor u, v, w .

Ne propunem să calculăm derivata parțială a funcției ω în raport cu una din variabilele independente, de exemplu x .

Presupunem că $f(u, v, w)$ este o funcție continuă de variabilele u, v, w ; că admite derivate f'_u, f'_v, f'_w continue și că funcțiunile u, v, w sunt derivabile în raport cu fiecare din variabilele $x, y, z, \dots$

Lăsând toate variabilele $y, z, \dots$ constante și dând lui x o creștere Δx , funcțiunile u, v, w capătă niște creșteri $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ și după formula (5), avem

$$\Delta \omega = \Delta u f'_u + \Delta v f'_v + \Delta w f'_w + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v + \varepsilon_3 \Delta w$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tinzând către zero în acelaș timp cu Δx .

Împărțind cu Δx și făcând apoi pe Δx să tindă către zero, obținem formula de derivare a funcțiunilor compuse

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

căci coeficienții cantităților $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tind către cantitățile finite $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$, pe când $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tind către zero.

În cazul particular când u, v, w depind numai de singura variabilă x , formula precedentă se poate scrie

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

EXEMPLU. Fie $\omega = u^v$, unde u și v sunt funcțiuni de x . Avem

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = v u^{v-1}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = u^v \text{Log } u$$

de unde

$$\frac{d\omega}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \text{Log } u \frac{dv}{dx}$$

rezultat pe care l-am găsit și pe altă cale [40].

62. Diferențiala totală de primul ordin. Fie $\omega = f(x, y, z)$ o funcție de 3 variabile independente x, y, z având derivatele parțiale f'_x, f'_y, f'_z . Fie dx, dy, dz diferențialele lui x, y, z , adică creșteri arbitrare ale acestor variabile. Suma

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

se numește diferențiala totală de primul ordin a funcției f și se notează

cu $d\omega$ sau df . Avem deci

$$d\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Presupunând derivatele f'_x, f'_y, f'_z continue, putem aplica funcțiunii f formula (5), unde vom face $h = dx, k = dy, l = dz$; vom avea deci

$$\Delta\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz.$$

Prin urmare, dacă dx, dy, dz sunt infiniți mici de acelaș ordin vedem că $d\omega$ este *partea principală* a creșterii $\Delta\omega$.

DIFERENȚIALA FUNCȚIUNILOR COMPUSE. Să presupunem că în funcția precedentă x, y, z n'ar mai fi variabile independente, ci ar fi funcțiuni de u și v . Diferențiala totală a funcției f , considerată ca funcție de variabilele independente u și v , va fi

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Dar avem, după regula de derivare a funcțiunilor compuse,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{du} \\ \frac{dv}{dx} \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dv} \end{aligned}$$

Inmulțind prima egalitate cu du și pe a doua cu dv și adunând, în membrul întâi capătăm pe $d\omega$, iar în membrul al doilea coeficienții lui $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sunt egali respectiv cu dx, dy, dz . Prin urmare

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

așa că expresia *diferențialei totale de primul ordin* a unei funcțiuni este *aceeaș* fie că variabilele sunt independente, fie că ele sunt funcțiuni de alte variabile independente.

OBSERVARE. Aplicând regula de diferențiere a funcțiunilor compuse, vedem că, oricare ar fi variabilele de care depind funcțiunile u și v și oricare ar fi numărul lor, avem

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = u dv + v du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \text{ etc.}$$

APLICAȚII. I. Calculul derivatelor parțiale prin diferențiere. Dacă printr'un calcul oarecare am găsit pentru diferențiala unei funcțiuni $u(x, y, z)$, de variabilele independente x, y, z , expresiunea

(7)

$$du = A dx + B dy + C dz$$

va trebui să avem

$$(8) \quad A \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C \equiv \frac{\partial u}{\partial z}.$$

În adevăr, diferențiala totală a funcției u este

$$(9) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Egalitățile (7) și (9) având loc oricare ar fi dx, dy, dz deci în particular și pentru $dy = 0, dz = 0$ deducem că

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A.$$

În același fel se găsesc și celelalte identități (8).

EXEMPLU. Fie $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Avem aplicând regula de diferențiere a unei funcții compuse

$$d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{d \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

II. Calculul erorilor. În diverse măsurători din fizică, astronomie, etc., datele unui calcul nu sunt cunoscute de cât cu anumite aproximații. Fie dx, dy, dz erorile cu care s'au măsurat mărimile x, y, z și α, β, γ limitele superioare ale acestor erori, adică

$$|dx| \leq \alpha, \quad |dy| \leq \beta, \quad |dz| \leq \gamma.$$

Se admite și este legitim din punct de vedere practic, că eroarea ce rezultă pentru $\omega = f(x, y, z)$ este dată de formula

$$d\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Limitarea eroarei $d\omega$ se obține imediat:

$$|d\omega| \leq |f'_x dx| + |f'_y dy| + |f'_z dz| \leq \alpha |f'_x| + \beta |f'_y| + \gamma |f'_z|.$$

63. Diferențiale de ordin superior. Fie $u = f(x, y)$ o funcție de două variabile independente x și y . Diferențiala sa de primul ordin este

$$du = f'_x dx + f'_y dy.$$

Diferențiala de ordinul al doilea $d^2 u$ este diferențiala diferențialei de ordinul întâi

$$d^2 u = d(du) = \frac{\partial du}{\partial x} dx + \frac{\partial du}{\partial y} dy$$

dx și dy fiind considerați ca niște constante. Avem deci

$$d^2 u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \quad (1).$$

Diferențialele succesive $d^3 u, d^4 u, \dots$ se definesc astfel din aproape în aproape.

Putem găsi o expresie simbolică foarte comodă pentru diferențiala de ordinul n a unei funcțiuni de un număr oarecare de variabile independente, observând că avem diferențiala totală a unei funcțiuni u , de variabilele independente x, y, z spre exemplu, înmulțind pe u cu factorul simbolic

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz.$$

Diferențiala a doua se poate scrie

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 u$$

ridicarea la patrat făcându-se ca și cum $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, dx, dy, dz$ ar fi factori algebrici. Cum trecerea de la o diferențiere la cea de un ordin superior cu o unitate se face prin multiplicarea cu factorul simbolic (10), avem

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u \quad (11)$$

puterile lui ∂ fiind interpretate ca indici de derivare.

FUNCȚIUNI COMPUSE. Fie $f(u, v, w)$ o funcție de cantitățile u, v, w care sunt funcțiuni de variabilele independente x și y . Am văzut că

$$df = A du + B dv + C dw$$

unde am însemnat

$$A = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Înlocuind în egalitatea precedentă pe du, dv, dw prin valorile lor, avem

$$df = A \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + B \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right).$$

Putem pune astfel pe df sub forma $Pdx + Qdy$; pentru a trece la diferențiala a doua vom proceda ca mai sus, considerând pe dx și dy

(1) Presupunem, ca și în toate cele ce urmează, că condițiile ce se cer pentru a avea facultatea de a interverti ordinea derivărilor, sunt satisfăcute.

ca niște constante, așa că

$$d^2f = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy \right) dA + A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 \right) + \dots$$

adică, mai concentrat,

$$d^2f = dA du + A d^2u + dB dv + B d^2v + dC dw + C d^2w,$$

unde

$$dA = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} dv + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} dw$$

dB și dC având valori analoage. Vedem astfel că formula ce ne dă pe d^2f este mai complicată de cât în cazul când u, v, w ar fi variabile independente.

Diferențialele de ordin superior se prezintă sub forme din ce în ce mai complicate, expresia lui $d^n f$ conținând diferențialele $du, d^2u, \dots, d^n u$ și cele analoage în v și w .

În cazul particular când

$$u = ax + by + c$$

$$v = a_1x + b_1y + c_1$$

$$w = a_2x + b_2y + c_2$$

toate diferențialele $d^n u, d^n v, d^n w$ sunt nule pentru $n > 1$. Formula care dă pe $d^n f$ va fi deci aceeași ca și când u, v, w ar fi variabile independente, adică, sub formă simbolică:

$$(11) \quad d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw \right)^n f.$$

64. Funcțiuni omogene. Zicem că o funcțiune $f(x, y, z)$ este omogenă în raport cu variabilele x, y, z atunci când avem identitatea

$$(12) \quad f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$$

t fiind o variabilă auxiliară. Numărul m este gradul de omogeneitate. El este un număr întreg, pozitiv sau negativ, dacă f este o funcție rațională; pentru alte funcții el poate fi fracționar sau chiar irațional.

EXEMPLU. Funcția

$$\frac{(x+y)^a (x-y)^b}{(x+y)^c + (x-y)^c}$$

este omogenă, gradul său fiind $a + b - c$.

Dacă derivăm în raport cu t ambii membri ai identității (12) avem

$$x f'_x (tx, ty, tz) + y f'_y (tx, ty, tz) + z f'_z (tx, ty, tz) = m t^{m-1} f(x, y, z).$$

și făcând pe $t=1$,

$$x f'_x (x, y, z) + y f'_y (x, y, z) + z f'_z (x, y, z) = m f(x, y, z).$$

Această identitate constituie *teorema lui Euler*.

Putem generaliza această identitate utilizând formula (11). Să punem în identitatea (12) $u = tx$, $v = ty$, $w = tz$ și să socotim pe t ca variabilă independentă iar pe x, y, z ca constante. Dacă luăm diferențiala de ordinul n a ambilor membri ai identității (12), vom avea ținând seama de (11),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw \right)^n f(u, v, w) \\ = m(m-1) \dots (m-n+1) f(x, y, z) t^{m-n} dt^n. \end{aligned}$$

Dar

$$du = xdt, \quad dv = ydt, \quad dw = zdt$$

așa că identitatea precedentă devine, după ce am suprimat factorul comun dt^n și am făcut $t = 1$,

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f = m(m-1) \dots (m-n+1) f(x, y, z).$$

65. Formula lui Taylor. Să considerăm o funcție de mai multe variabile, pentru fixarea ideilor de trei variabile, $f(x, y, z)$. Ne propunem a pune funcțiunea $f(x+h, y+k, z+l)$ sub forma unei sume de polinoame omogene în raport cu h, k și l de gradele $0, 1, \dots, n$ plus un termen complementar. Presupunem pentru aceea că funcțiunea $f(x, y, z)$ admite derivate parțiale până la ordinul $n+1$.

Să plecăm de la funcțiunea auxiliară

$$g(t) = f(x+ht, y+kt, z+lt)$$

unde x, y, z, h, k, l sunt considerate ca constante. Aplicând funcțiunei $g(t)$, de singura variabilă independentă t , formula lui Maclaurin, avem

$$(13) \quad g(t) = g(0) + \frac{t}{1} g'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} g^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0t).$$

Funcțiunea $g(t)$ este prin intermediul lui f o funcție compusă de t , căci

$$g = f(u, v, w)$$

unde

$$u = x+ht, \quad v = y+kt, \quad w = z+lt.$$

Putem deci aplica formula (11). Avem astfel

$$\begin{aligned} d^n g = g^{(n)}(t) dt^n &= \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw \right)^n f \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial v} + l \frac{\partial}{\partial w} \right)^n f dt^n \end{aligned}$$

cum pentru $t = 0$, u, v, w se reduc la x, y, z , găsim

$$(15) \quad \begin{cases} g(0) = f(x, y, z) \\ g'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z} \\ \dots \dots \dots \\ g^{(n)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z) \end{cases}$$

iar

$$(16) \quad g^{(n+1)}(\theta t) = \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial v} + l \frac{\partial}{\partial w} \right)^{n+1} f(u, v, w)$$

unde după efectuarea derivărilor înlocuim pe u, v, w prin valorile lor (14).

Făcând $t = 1$ în formula (13) și ținând seama de relațiile (15) și (16) obținem formula lui Taylor

$$(17) \quad f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f + R_n.$$

Terminul complementar R_n are valoarea

$$(18) \quad R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n+1} f$$

unde, după derivare, variabilele x, y, z vor fi înlocuite respectiv prin $x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l$ cu $0 < \theta < 1$.

OBSERVĂRI. 1^o. Dacă facem în formula (17) $x = y = z = 0$ și $h = x, k = y, l = z$, obținem formula lui Maclaurin relativă la o funcție de trei variabile.

2^o. Făcând în formula (17) $n = 0$, căpătăm

$$(18) \quad f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = h f'_x(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l) + k f'_y(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l) + l f'_z(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l)$$

adică o extindere a formulei mediei la cazul funcțiunilor de mai multe variabile, diferită de formula (4) dată anterior.

3^o. Să privim creșterile h, k, l ca infiniți mici. Dacă punem $h = dx, k = dy, l = dz$ și dacă ținem seama de formula care ne dă diferențiala de ordinul n a lui $f(x)$ [63], vedem că formula (17) se mai poate scrie

$$\Delta f = df + \frac{1}{2!} d^2 f + \dots + \frac{1}{n!} d^n f + R_n$$

unde am însemnat $\Delta f = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$.

4^o. Să presupunem că $f(x, y, z)$ admite derivate parțiale de orice

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(n)} f$$

66. Determinanți funcționali. Fie

$$(19) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$(20) \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Dacă intervertim ordinea funcțiilor $f_1, f_2, \dots, f_n$ sau ordinea variabilelor $x_1, x_2, \dots, x_n$ în determinantul (20), atunci valoarea sa nu schimbă decât cel mult de semn, căci aceasta revine a schimba în acest determinant liniile între ele sau coloanele între ele.

Determinantul funcțional (20) se mai notează prin simbolul

$$J = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

și această notațiune are avantajul de a pune mai în evidență analogia ce există între proprietățile jacobianului și cele ale derivatei. Vom indica numai una din aceste proprietăți: cea care corespunde derivatei unei funcțiuni de funcțiune.

(1) De la numele matematicianului Jacobi care a creat teoria determinantilor funcționali.

Fie

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ y_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{array} \right. \quad \text{cu}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

Intre jacobianii acestor sisteme avem relația

$$(21) \quad \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Vom demonstra această relațiune presupunând pentru simplificarea scrisului $n=2$; demonstrația cazului general se face în acelaș fel.

Fie deci

$$\begin{aligned} X &= f(u, v), & u &= h(x, y), \\ Y &= g(u, v), & v &= k(x, y). \end{aligned}$$

Vom arăta că

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)}.$$

În adevăr, înmulțind determinanții, din membrul al doilea, obținem

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right|$$

și acest determinant este tocmai jacobianul $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$.

OBSERVARE. În cazul $n=1$ formula (21) ne dă regula cunoscută de derivare a unei funcțiuni de funcțiune.

Vom vedea mai departe, în acest capitol, importanța determinantilor funcționali.

II. FUNZIONI IMPLICATE.

67. Funcțiuni definite printr-o singură ecuație. Să considerăm ecuația

$$(1) \quad F(x, y, \dots, u) = 0,$$

F fiind o funcție de variabilele $x, y, \dots$. În anumite cazuri simple putem

scoate din ecuația (1) valoarea lui u în funcție de celelalte variabile $x, y, \dots$, adică putem găsi pentru u o funcție $f(x, y, \dots)$, care să verifice identic ecuația (1). Făcând anumite ipoteze asupra funcției F putem arăta existența unei funcțiuni $u = f(x, y, \dots)$ care satisface ecuației (1).

Dacă funcția F satisface la următoarele condițiuni:

1°. *Este continuă în vecinătatea punctului $M(a, b, \dots, u_0)$ și se anulează în acest punct, adică $F(a, b, \dots, u_0) = 0$;*

2°. *Are derivatele parțiale de primul ordin continue în vecinătatea punctului M ;*

3°. $F'(a, b, \dots, u_0) \neq 0$;

există o funcție și numai una, $u = f(x, y, \dots)$ de variabilele independente $x, y, \dots$, care se reduce la u_0 în punctul $(a, b, \dots)$ și care e continuă, derivabilă și satisface identic la ecuația (1) în vecinătatea punctului $(a, b, \dots)$.

Pentru a ușura expunerea demonstrației vom considera numai trei variabile x, y, u și vom presupune, pentru fixarea ideilor $F'_u(a, b, u_0) > 0$. Funcțiunile $F(x, y, u)$ și $F'_u(x, y, u)$ fiind continue în vecinătatea punctului (a, b, u_0) , putem alege un număr pozitiv α astfel ca, în domeniul D , definit prin neegalitățile

$$|x - a| \leq \alpha, \quad |y - b| \leq \alpha, \quad |u - u_0| \leq \alpha,$$

funcțiunile F și F'_u să fie continue în D , funcțiunea F'_u fiind pozitivă în întreg acest domeniu [21, observarea 1°].

Funcțiunea $F(a, b, u)$, de singura variabilă u , este crescătoare [46] când u crește de la $u_0 - \alpha$ la $u_0 + \alpha$, căci $F'_u(a, b, u) > 0$; cum însă $F(a, b, u_0) = 0$, vedem că, pentru $0 < \lambda < \alpha$ avem

$$F(a, b, u_0 + \lambda) > 0, \quad F(a, b, u_0 - \lambda) < 0.$$

Din aceste două neegalități rezultă⁽¹⁾ că putem determina un număr pozitiv β , cel mult egal cu α , astfel ca, pentru orice sistem de valori x, y luat în domeniul d definit prin neegalitățile

$$|x - a| \leq \alpha, \quad |y - b| \leq \beta,$$

să avem

$$F(x, y, u_0 + \lambda) > 0, \quad F(x, y, u_0 - \lambda) < 0.$$

Prin urmare, dacă în funcțiunea $F(x, y, u)$, fixăm pentru x și y valori în domeniul d și facem apoi pe u să varieze de la $u_0 - \lambda$ la $u_0 + \lambda$, cum $F'_u > 0$, funcțiunea de u , $F(x, y, u)$, va fi crescătoare; dar ea schimbă de semn pentru valorile extreme ale lui u . Deci această

(1) Ținând seama de continuitatea funcțiunilor $F(x, y, u_0 + \lambda)$, $F(x, y, u_0 - \lambda)$, de variabilele x și y , în domeniul $|x - a| \leq \alpha$, $|y - b| \leq \alpha$ și de observarea 1° de la n. 21.

funcție se anulează, și numai o singură dată în intervalul $(u_0 - \lambda, u_0 + \lambda)$. Așa dar vom avea o valoare bine determinată pentru u , cuprinsă între $u_0 - \lambda$ și $u_0 + \lambda$, astfel ca

$$F(x, y, u) = 0.$$

În particular, dacă luăm $x = a$ și $y = b$, valoarea corespunzătoare lui u , care este unică, va fi chiar u_0 , căci $F(a, b, u_0) = 0$.

Deci, în rezumat, la un sistem de valori x, y din domeniul d , corespunde pentru u o valoare unică satisfăcând condiției $|u - u_0| < \lambda$ și care verifică ecuația $F(x, y, u) = 0$.

Această variabilă u , care depinde de variabilele x, y , se numește o funcție implicită de x, y ; să o notăm $u = f(x, y)$. Vom avea

$$F[x, y, f(x, y)] = 0$$

în întreg domeniul d și $f(a, b) = u_0$.

CONTINUITATE. Fie (x, y) și $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ două puncte din domeniul d ; u și $u + \Delta u$ valorile corespunzătoare funcției f . Deci

$$F(x, y, u) = 0, \quad F(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u) = 0.$$

Dacă aplicăm funcției F formula (18) stabilită la n. 65, vedem că

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta x F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u) \\ &\quad + \Delta y F'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u) \\ &\quad + \Delta u F'_u(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u). \end{aligned}$$

Cum $0 < \theta < 1$, urmează că punctul $(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u)$ aparține domeniului D , așa că F'_u este pozitiv, deci diferit de zero, în acest punct. Prin urmare dacă Δx și Δy tind către zero și Δu tinde către zero; deci funcțiunea $u = f(x, y)$ este continuă în domeniul d .

DERIVATE. Dacă presupunem $\Delta y = 0$, egalitatea precedentă se va putea scrie

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u)}{F'_u(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, u + \theta \Delta u)}$$

și făcând pe Δx să tindă către zero, din cauza continuității derivatelor F'_x, F'_u (ipoteza 2^o), vom avea derivata lui u în raport cu x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{F'_x}{F'_u}.$$

În mod analog găsim

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_u}.$$

Din punct de vedere practic calculul derivatelor $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y}$ se poate face direct derivând, cu ajutorul regulei de derivare a funcțiilor compuse [61], ecuația $F(x, y, u) = 0$, unde u este funcție de x și y . Făcând derivarea în raport cu x , avem

$$F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de unde se deduce valoarea găsită pentru $\frac{\partial u}{\partial x}$.

68. Funcțiuni definite printr'un sistem de ecuații. Să considerăm sistemul de n ecuații cu $n + p$ variabile

$$(2) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_p, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

și să presupunem că următoarele condițiuni sunt satisfăcute:

1^o. Funcțiunile $F_1, F_2, \dots, F_n$ se anulează într'un punct $M(a_1, a_2, \dots, a_p, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$;

2^o. Aceste funcțiuni sunt continue și admit derivate parțiale continue în vecinătatea lui M ;

3^o. Determinantul funcțional

$$J = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

este diferit de zero în punctul M .

În aceste condițiuni există un sistem, și numai unul, de n funcțiuni $u_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_p)$, $k = 1, 2, \dots, n$, de variabilele independente $x_1, x_2, \dots, x_p$, funcțiuni care sunt continue, derivabile și care satisfac identic ecuațiilor (2) în vecinătatea punctului $m(x_1, x_2, \dots, x_p)$; funcțiunile $u_1, u_2, \dots, u_n$ iau respectiv valorile $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ în punctul m .

Am demonstrat [67] această teoremă în cazul $n = 1$. Pentru a o demonstra sub această formă generală, să presupunem că este adevărată pentru $n - 1$ ecuații și să dovedim că subzistă și pentru n ecuații.

În adevăr, jacobianul J dezvoltat după elementele primei coloane, ne dă

$$J = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1}$$

unde $J_1, J_2, \dots, J_n$ sunt minorii corespunzători elementelor din prima coloană.

Cum prin ipoteză J nu se anulează în punctul M , a trebui ca cel puțin unul din minorii J_k să nu se anuleze în acest punct; vom presupune că

$$J_1 = \frac{D(F_2, F_3, \dots, F_n)}{D(u_2, u_3, \dots, u_n)}$$

este diferit de zero în punctul M.

Teorema fiind presupusă adevărată pentru $n-1$ ecuațiuni, urmează că sistemul de $n-1$ ecuațiuni cu $n+p$ variabile

$$(3) \quad F_i(x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

definește un sistem unic de $n-1$ funcțiuni $u_2, u_3, \dots, u_n$ de $p+1$ variabile independente $x_1, x_2, \dots, x_p, u_1$ și care satisfac în mod identic ecuațiile (3).

Fie

$$u_i = U_i(x_1, \dots, x_p, u_1) \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

aceste funcțiuni. Ele sunt continue și au derivate parțiale în raport cu $x_1, \dots, x_p, u_1$ în punctul $(a_1, \dots, a_p, \mu_1)$; în acest punct vom avea $u_2 = \mu_2, u_3 = \mu_3, \dots, u_n = \mu_n$.

Înlocuind variabilele u_i prin funcțiunile U_i în sistemul (3), vom avea în mod identic, în vecinătatea punctului $(a_1, \dots, a_p, \mu_1)$,

$$(4) \quad F_i(x_1, \dots, x_p, u_1, U_2, \dots, U_n) = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Făcând aceeași substituție și în ecuația $F_1(x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_n) = 0$, obținem o nouă ecuație

$$F_1(x_1, \dots, x_p, u_1, U_2, \dots, U_n) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_p, u_1) = 0,$$

care rămâne să fie satisfăcută.

Această ecuație ne definește [67] pe u_1 ca funcție implicită de $x_1, x_2, \dots, x_p$; dacă $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$ este diferit de zero în punctul $a_1, a_2, \dots, a_p, \mu_1$.

Rămâne să calculăm pe $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$.

Derivând în raport cu u_1 ecuația $\Phi = 0$, după regula de derivare a funcțiunilor compuse, avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial U_n} \frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Ecuațiile sistemului (4) derivate în raport cu u_1 ne dau

$$0 = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial U_n} \frac{\partial U_n}{\partial u_1}$$

$$0 = \frac{\partial F_n}{\partial u_1} + \frac{\partial F_n}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Înmulțind aceste relațiuni respectiv cu $J_1, J_2, \dots, J_n$ și adunând

obținem

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1} + \left[J_1 \frac{\partial F_1}{\partial U_2} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial U_2} \right] \frac{\partial U_2}{\partial u_1} \\ + \dots + \left[J_1 \frac{\partial F_1}{\partial U_n} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \right] \frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Coeficienții lui $\frac{\partial U_2}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial u_1}$ sunt nuli, fiindcă se obțin din determinantul J înlocuind elementele din coloana întâi prin elementele unei alte coloane. Rămâne dar

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1} = J$$

deci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Cum prin ipoteză determinantii J și J_1 sunt diferiți de zero în punctul $(a_1, \dots, a_p, \mu_1, \dots, \mu_n)$, urmează că și $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$ este diferit de zero în punctul $(a_1, \dots, a_p, \mu_1)$. Prin urmare, ecuația

$$\Phi(x_1, \dots, x_p, u_1) = 0$$

definește pe u_1 ca funcție implicită de $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Fie

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_p)$$

această funcție, care este definită în vecinătatea punctului $(a_1, \dots, a_p)$; ea admite derivate în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_p$ și ia valoarea μ_1 în punctul $(a_1, \dots, a_p)$. Înlocuind pe u_1 în sistemul (4) prin $f_1(x_1, \dots, x_p)$ obținem pentru $u_2, u_3, \dots, u_n$ niște funcțiuni de $x_1, x_2, \dots, x_p$ pe care să le notăm respectiv cu $f_2, f_3, \dots, f_n$. Funcțiunile $f_1, f_2, \dots, f_n$ satisfac la toate condițiile din enunțul teoremei.

CALCULUL DERIVATELOR. Am văzut că funcțiunile implicite $u_1, u_2, \dots, u_n$ de variabilele $x_1, \dots, x_p$, definite prin sistemul (2), au derivate parțiale în raport cu aceste variabile. Să indicăm un procedeu de calcul al acestor derivate. Fie de calculat derivatele funcțiunilor $u_1, \dots, u_n$ în raport cu variabila x_1 , spre exemplu.

Derivând în raport cu x_1 ecuațiile sistemului (2), vom avea

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F_n}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0.$$

Am format astfel un sistem de n ecuații cu n necunoscute $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$, în care determinantul coeficienților necunoscutelor e tocmai

$$J = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} \neq 0;$$

deducem deci

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_1}^{x_1}}{J}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_2}^{x_1}}{J}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_n}^{x_1}}{J}$$

unde $J_{u_k}^{x_1}$ reprezintă determinantul ce se obține din J când înlocuim coloana derivatelor în raport cu u_k prin derivatele în raport cu x_1 .

69. Derivate și diferențiale de ordin superior. Să considerăm o funcție implicită z definită prin ecuația

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ne propunem să găsim derivatele parțiale de diferite ordine ale acestei funcțiuni. Am văzut că derivatele de ordinul întâi sunt date de ecuațiile

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Derivatele de ordinul al doilea se obțin derivând aceste ecuații în raport cu x și y . Astfel derivând prima ecuație (5) în raport cu x , avem

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = 0$$

sau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

de unde valoarea lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Derivând aceeași ecuație în raport cu y , obținem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

La aceeași relație suntem conduși, dacă derivăm a doua ecuație (5) în raport cu x ; această ecuație derivată însă în raport cu y ne dă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Derivatele de ordinul al treilea și cele de un ordin superior se vor calcula la fel.

Rezultatele de mai sus se pot regăsi pe o altă cale utilizând propoziția următoare:

Dacă mai multe funcțiuni $u_1, u_2, \dots, u_n$ de variabilele independente $x_1, x_2, \dots, x_p$ verifică relațiunea

$$(6) \quad f(u_1, u_2, \dots, u_n, x_1, x_2, \dots, x_p) = 0,$$

atunci diferențiala totală

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p,$$

calculată ca și când toate variabilele $u_1, \dots, u_n, x_1, \dots, x_p$ ar fi variabile independente, este nulă.

În adevăr derivând ecuația (6) în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_p$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_p} + \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0.$$

Înmulțind aceste p relațiuni respectiv cu $dx_1, dx_2, \dots, dx_p$, avem

$$df = 0. \quad \text{C. c. e. d. d.}$$

Obținem o relație între diferențialele de ordinul al doilea dacă aplicăm propoziția de mai sus la relația $df = 0$, considerând pe df ca o funcție de $u_1, \dots, u_n, du_1, \dots, du_n, x_1, \dots, x_p$; și așa mai departe.

Să aplicăm această propoziție la funcția implicită z de variabilele independente x și y definită prin ecuația

$$f(x, y, z) = 0.$$

Vom avea

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

$$(8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial z} \partial^2 z = 0, \text{ etc.}$$

căci $d^2x, d^2y, d^3x, \dots$ sunt nule. Din relația (7) deducem

$$dz = - \frac{f'_x dx + f'_y dy}{f'_z}.$$

Din relația (8), după ce înlocuim pe dz cu expresiunea găsită, obținem o expresie de forma

$$d^2z = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$$

OBSERVARE. În mod analog se vede că pentru ca n funcțiuni $u_1, u_2, \dots, u_n$ de $n+p$ variabile independente $x_1, x_2, \dots, x_{n+p}$ să fie dependente, este necesar ca toți determinanții funcționali

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda)}$$

unde $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sunt n oarecare din numerele $1, 2, \dots, n+p$, să fie identice nuli.

Condiția este suficientă. Vom face demonstrația luând, pentru simplificare, trei funcțiuni de trei variabile independente

$$(2) \quad u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z).$$

Prin ipoteză avem

$$(3) \quad \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \equiv 0$$

într'un anumit domeniu și vrem să dovedim existența unei relații

$$F(u, v, w) = 0.$$

Să presupunem că unul din minorii de ordinul întâi ai determinantului (3) este *diferit de zero*; fie

$$(4) \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Atunci primele două ecuațiuni ale sistemului (2) ne definesc pe x și y ca funcțiuni implicite de z, u, v . Să însemnăm aceste funcțiuni cu

$$x = X(z, u, v), \quad y = Y(z, u, v)$$

și să înlocuim pe x și y prin aceste expresiuni în ecuația a treia a sistemului (2); vom avea

$$w = h(X, Y, z) = H(z, u, v).$$

Să dovedim că funcțiunea H astfel obținută este independentă de z . Vom arăta, pentru aceea că derivata funcției H în raport cu z este identic nulă. Avem

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Dar cum avem în mod identic

$$u = f(X, Y, z), \quad v = g(X, Y, z),$$

deducem, derivând în raport cu z ,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}$$

sau

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminând pe $\frac{\partial X}{\partial z}$, $\frac{\partial Y}{\partial z}$ între relațiile (5) și (6) căpătăm

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}.$$

Cum prin ipoteză membrul al doilea este identic nul, rezultă, ținând seama de (4), că $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ și deci că funcțiunea $H(z, u, v)$ este independentă de z . Avem prin urmare

$$w = H(u, v).$$

OBSERVARE. Dacă toți minorii de ordinul al doilea ai determinantului (3) sunt nuli, atunci se dovedește în mod analog că două din funcțiunile u, v, w sunt funcțiuni de a treia.

În general, dacă toți minorii determinantului (1), până la ordinul $n-r+1$ sunt nuli și dacă primul minor diferit de zero este de ordinul $n-r$, atunci avem r relațiuni distincte între funcțiunile $u_1, u_2, \dots, u_n$ și r dintre aceste funcțiuni se pot exprima ca funcțiuni de celelalte $n-r$.

APLICAȚIE. Să determinăm o funcțiune derivabilă $f(x)$, astfel ca funcțiunile

$$u = f(x+y), \quad v = f'(x)f(y)$$

să fie dependente. Va trebui ca

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} f'(x+y) & f'(x)f'(y) \\ f'(x+y) & f'(x)f'(y) \end{vmatrix} = 0;$$

deci, funcțiunea f fiind presupusă, că nu este identică cu o constantă,

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f''(y)}{f'(y)}.$$

Această egalitate având loc oricare ar fi x și y , va trebui ca ambii membri să se reducă la aceeași constantă a . Vom avea deci

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = a.$$

Cum primul membru este derivata lui $\text{Log } f(x)$ iar membrul al doilea derivata lui ax , vom avea [45],

$$\text{Log } f(x) = ax + C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Prin urmare

$$f(x) = e^{ax+C} = A e^{ax}$$

A și a fiind două constante arbitrare.

Relația între u și v se vede imediat că este

$$Au = v.$$

EXERCITIUL.

1. Fie funcțiunea

$$f(x, y) = x^2 \arctg \frac{y}{x} - y^2 \arctg \frac{x}{y},$$

unde luăm valoarea *principală* pentru arc. tangentă. Să se arate că $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ în punctul $(0, 0)$.

R. Derivatele parțiale de primul ordin sunt

$$f'_x(x, y) = 2x \arctg \frac{y}{x} - y,$$

$$f'_y(x, y) = x - 2y \arctg \frac{x}{y}.$$

Deci

$$f'_x(0, y) = -y, \quad f'_y(x, 0) = -x$$

așa că $f''_{xy}(0, 0) = -1$ și $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

2. Funcțiunea

$$z = x f(x+y) + y g(x+y),$$

unde f și g sunt funcțiuni arbitrare, satisface la relația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R. Avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 f''(x+y) + x f'''(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + g'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 g'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y)$$

de unde relația cerută.

3. Fie sistemul

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + x^3 &= a \\ u v x &= b, \end{aligned}$$

care definește pe u și v în funcție de x . Să se determine derivatele lui u și v .

R. Avem

$$u^2 \frac{du}{dx} + v^2 \frac{dv}{dx} + x^2 = 0$$

$$vx \frac{du}{dx} + ux \frac{dv}{dx} + uv = 0,$$

de unde $\frac{du}{dx}$ și $\frac{dv}{dx}$.

4. Fie $z = f(x, y)$ o relație care ne definește pe x ca funcție implicită de variabilele independente z și y . Se cere diferențialele de ordinul întâi și al doilea ale funcției x .

R. Avem, cu notațiile lui Monge

$$(1) \quad dz = p dx + q dy$$

$a + 3x - z$
 $a + 2z$

deci

$$(2) \quad dx = \frac{dz - q dy}{p}.$$

Pentru a obține pe d^2x diferențiem ambii membri ai relației (1) și, ținând seama că d^2z și d^2y sunt nuli, căci z și y sunt variabile independente, avem

$$0 = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 + p d^2x.$$

De aci, ținând seama de (2), deducem

$$d^2x = - \frac{r dz^2 + 2(ps - qr) dz dy + (q^2r - 2pqs + p^2t) dy^2}{p^3}.$$

Rezultă că

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{p}{q};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y} = \frac{qr - ps}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2pqs - p^2t - q^2r}{p^3}.$$

5. Să se determine funcțiunea derivabilă $f(x)$ astfel ca funcțiunile

$$u = f(x+y), \quad v = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

să fie dependente. Să se determine apoi relația ce există între u și v .

R. Va trebui să avem

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{f'(x+y)}{[1 - f(x)f(y)]^2} \begin{vmatrix} 1 & f'(x)[1 + f^2(y)] \\ 1 & f'(y)[1 + f^2(x)] \end{vmatrix} = 0$$

adică, f constant sau

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{f'(y)}{1 + f^2(y)}$$

oricare ar fi x și y . Prin urmare

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = a,$$

de unde deducem

$$\arctg f(x) = ax + b$$

a și b fiind două constante arbitrare. Funcțiunea căutată este deci

$$f(x) = \operatorname{tg}(ax + b)$$

iar relația între u și v este

$$v = \frac{u + \operatorname{tg} b}{1 - u \operatorname{tg} b}.$$

CAPITOLUL VII.

EXTREME. — SCHIMBĂRI DE VARIABLE.

I. — EXTREMELE FUNCȚIUNILOR DE MAI MULTE VARIABLE.

71. Extremele funcțiilor de două variabile. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă și derivabilă într'un domeniu D . Zicem că această funcție este *extremă* (adică are un *maxim* sau un *minim*) în punctul (a, b) din domeniul D , atunci când putem determina un număr η astfel ca diferența

$$\Delta = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

să păstreze *acelaș semn* pentru toate valorile lui h și k pentru care avem

$$(1) \quad \sqrt{h^2 + k^2} < \eta.$$

În cazul când semnul lui Δ rămâne negativ, funcțiunea $f(x, y)$ are un *maxim* în punctul (a, b) ; iar când Δ rămâne pozitiv, $f(x, y)$ are un *minim* în punctul (a, b) .

Putem, în particular, satisface condiția (1) luând $k=0$ și $|h| < \eta$; diferența

$$f(a + h, b) - f(a, b)$$

păstrând un semn constant pentru toate valorile lui $|h| < \eta$, urmează că funcțiunea de o singură variabilă $f(x, b)$ este extremă în punctul $x=a$ și deci $f'_x(a, b)=0$.

Se vede tot astfel, luând $h=0$ și $|k| < \eta$, că $f'_y(a, b)=0$.

Prin urmare: singurele puncte în care funcțiunea $f(x, y)$ poate fi extremă, sunt punctele ale căror coordonate verifică sistemul

$$(2) \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de două ecuații cu două necunoscute, x și y , găsim un număr oarecare de soluții; fie $x=a$ și $y=b$ una din aceste soluții. Să cercetăm când funcțiunea $f(x, y)$ este extremă în punctul (a, b) .

Vom presupune că derivatele de ordinul al doilea, ale funcțiunii $f(x, y)$, există și sunt continue în vecinătatea punctului (a, b) . Formula lui Taylor [65] corespunzătoare lui $n=1$ ne dă

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left[h^2 f''_{x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 f''_{y^2}(a+\theta h, b+\theta k) \right]$$

cu $0 < \theta < 1$.

Dar, în virtutea continuității derivatelor de ordinul al doilea putem scrie

$$f''_{x^2}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{x^2}(a, b) + \varepsilon_1,$$

$$f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{xy}(a, b) + \varepsilon_2,$$

$$f''_{y^2}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{y^2}(a, b) + \varepsilon_3,$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sunt cantități care tind către zero, când h și k tind simultan către zero. Așa că, dacă însemnăm

$$(3) \quad A = f''_{x^2}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{y^2}(a, b),$$

formula precedentă a lui Taylor va deveni

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[A h^2 + 2 B h k + C k^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 h^2 + 2 \varepsilon_2 h k + \varepsilon_3 k^2 \right].$$

Pentru a face mai clară discuția în ceea ce privește semnul lui Δ , vom pune

$$h = r \cos \varphi, \quad k = r \sin \varphi$$

și vom avea toate valorile lui h și k din neegalitatea (1), dacă luăm pentru r și φ toate valorile care satisfac la neegalitățile

$$0 \leq r < \eta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Avem astfel

$$(5) \quad \Delta = \frac{r^2}{2} \left(A \cos^2 \varphi + 2 B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi \right) + \frac{r^2 \sigma}{2},$$

unde

$$\sigma = \varepsilon_1 \cos^2 \varphi + 2 \varepsilon_2 \cos \varphi \sin \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi.$$

Deci σ tinde către zero când r tinde către zero, căci $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tind către zero, când h și k tind către zero. Semnul lui Δ depinde de semnul trinomului

$$(6) \quad A \cos^2 \varphi + 2 B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi.$$

Distingem următoarele trei cazuri:

10. $AC - B^2 > 0$. În acest caz A și C sunt diferiți de zero, așa

că trinomul (6) se va putea scrie sub forma

$$(7) \quad \frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi}{A}$$

care ne arată că trinomul (6) nu se poate anula și păstrează neconținut semnul lui A . Cum acest trinom este o funcție continuă de φ , valoarea sa absolută va admite un *minim* $m > 0$. Cum putem determina un număr η destul de mic astfel ca pentru $r < \eta$ să avem $|\sigma| < m$, rezultă că expresia (5) va păstra semnul lui A pentru r și φ care satisfac la neegalitățile (4).

Prin urmare, dacă $A > 0$, vom avea

$$\Delta = f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0;$$

deci funcția $f(x, y)$ are un minim în punctul (a, b) ; iar dacă $A < 0$ vom avea

$$\Delta = f(a + h, b + k) - f(a, b) < 0;$$

deci funcția are un maxim în punctul (a, b) .

2º. $AC - B^2 < 0$. Să presupunem mai întâi $A \neq 0$. Trinomul (6) pus sub forma (7) ne arată că el schimbă de semn când φ variază, căci, pentru, $\sin \varphi = 0$, are semnul lui A , iar pentru $\cotg \varphi = -\frac{A}{B}$ are semnul lui $-A$. Prin urmare oricât de mic ar fi η , Δ nu poate păstra un semn constant, pentru toate valorile lui r și φ care satisfac la neegalitățile (4). Deci $f(x, y)$ nu are în punctul (a, b) nici maxim nici minim.

Dacă $A = 0$ și $C \neq 0$, concluzia este aceeași, căci nici în acest caz trinomul (6), care se mai poate scrie

$$\frac{(C \sin \varphi + B \cos \varphi)^2 - B^2 \cos^2 \varphi}{C}$$

nu păstrează un semn constant pentru (4).

Să presupunem în fine $A = C = 0$, deci B diferit de zero. Cum trinomul (6) se reduce la $2B \cos \varphi \sin \varphi$, care schimbă de semn, vedem că nici în acest caz $f(x, y)$ nu poate fi extremă în punctul (a, b) .

3º. $AC - B^2 = 0$. Dacă A este diferit de zero, trinomul (6) se mai poate scrie

$$\frac{1}{A} (A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2;$$

se vede astfel că trinomul (6) păstrează un semn constant, semnul lui A , dar se anulează pentru o anumită valoare a lui φ . Pentru valoarea lui φ care anulează pe (6) semnul lui Δ este dat de σ și cum, numai

cu ajutorul considerațiilor precedente, nu putem determina semnul lui σ și variația acestui semn, nu putem nici hotări dacă la punctul (a, b) corespunde sau nu un maxim sau minim pentru funcțiunea $f(x, y)$.

Dacă $A=0$ urmează că și $B=0$, iar trinomialul (6) se reduce la $C \sin^2 \varphi$, care păstrează un semn constant, dar se anulează pentru $\varphi=0$; deci nici în acest caz nu putem afirma că $f(x, y)$ are sau nu un extrem în punctul (a, b) .

Și în cazul $A=B=C=0$ avem nevoie de semnul lui σ .

Pentru ca să putem decide dar, când avem $AC-B^2=0$, dacă punctul (a, b) este sau nu un maxim sau minim al funcției $f(x, y)$, vom lua un număr mai mare de termeni în formula lui Taylor; dar cum discuția generală este foarte delicată nu-și are locul în acest curs.

În rezumat, dacă $x=a$ și $y=b$ sunt o soluție a sistemului (2) și dacă A, B, C au valorile (3),

1°. dacă $AC-B^2 > 0$ avem $\begin{cases} \text{maxim când } A < 0, \\ \text{minim când } A > 0; \end{cases}$

2°. dacă $AC-B^2 < 0$ n'avem nici maxim, nici minim;

3°. dacă $AC-B^2=0$ avem îndoială; o discuție specială este necesară.

EXEMPLU. Fie

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + ay^2 + 1.$$

Vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(ax+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(ay+x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a.$$

În acest caz sistemul (2) va avea ca soluție $x=0, y=0$, dacă $a^2-1 \neq 0$. $AC-B^2=a^2-1$. Prin urmare $f(x, y)$ va fi maximă dacă $a > 1$; pentru $-1 < a < +1$ nu va fi nici maximă nici minimă.

Dacă $a^2-1=0$, a este $+1$ sau -1 . Pentru $a=+1$ avem

$$f(x, y) = (x+y)^2 + 1$$

și vedem că în punctul $(0,0)$ $f(x, y)$ are cea mai mică valoare pe care poate să o ia, dar pentru toate punctele $x+y=0$ are aceeași valoare; deci în punctul $(0, 0)$ $f(x, y)$ nu va fi extremă în acest caz. Tot astfel vedem că nici în cazul $a=-1$ punctul $(0,0)$ nu corespunde unui extrem al funcției considerate.

72. Extremele funcțiilor de mai multe variabile. Pentru fixarea ideilor, vom considera cazul a trei variabile. Zicem că funcțiunea $f(x, y, z)$ are un extrem în punctul a, b, c atunci când putem determina un număr η astfel ca diferența

$$\Delta = f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$$

să păstreze un semn constant pentru toate valorile lui h, k, l care satis-

fac la neegalitatea

$$\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} < \eta.$$

În acest caz și funcțiunile de o singură variabilă

$$f(x, b, c), \quad f(a, y, c), \quad f(a, b, z)$$

vor fi extreme, prima pentru $x=a$, a doua pentru $y=b$, a treia pentru $z=c$, așa că va trebui să avem

$$(8) \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0$$

pentru $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Dacă aceste condițiuni sunt satisfăcute, formula lui Taylor, în ipoteza continuității tuturor derivatelor de ordinul al doilea ale funcțiunei $f(x, y, z)$, ne permite să scriem

$$f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c) = Q + \sigma,$$

unde am reprezentat prin Q valoarea expresiunii

$$\frac{1}{2} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(x, y, z)$$

în punctul $x=a$, $y=b$, $z=c$, iar prin σ un termen complementar, care tinde către zero, când h, k, l tind simultan către zero.

Dacă facem

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi$$

unde

$$(9) \quad 0 \leq r < \eta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

și luăm pe r ca infinit mic principal, vedem că Q este un infinit mic de ordinul al doilea, iar σ este infinit de mic față de Q . Așa că dacă Q păstrează un semn constant pentru toate valorile (9) ale lui r, θ, φ , neputându-se anula decât pentru $r=0$, funcțiunea $f(x, y, z)$ va fi extremă în punctul (a, b, c) . Dacă acest semn este negativ, $f(x, y, z)$ este maximă în punctul (a, b, c) ; dacă este pozitiv, funcțiunea este minimă în acel punct.

OBSERVARE. Condiția necesară pentru ca o funcție f de mai multe variabile să fie extremă într'un punct, este ca în acel punct să avem $df=0$.

APLICAȚIE. Să se găsească un punct astfel ca suma patratelor distanțelor la n puncte fixe, să fie minimă.

Fie (x, y, z) coordonatele punctului căutat și (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, \dots, n$ cele n puncte date. Axele fiind dreptunghiulare suntem conduși la căutarea minimului expresiei

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{i=n} [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2].$$

Sistemul corespunzător sistemului (8) este

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x - x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} (y - y_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} (z - z_i) = 0;$$

deci punctul în care expresia (10) poate fi extremă este

$$(11) \quad x = \frac{\sum x_i}{n}, \quad y = \frac{\sum y_i}{n}, \quad z = \frac{\sum z_i}{n},$$

adică centrul de greutate al sistemului de puncte dat.

Expresiunea (10) este minimă în punctul (11) căci

$$Q = k^2 + k^2 + l^2 > 0.$$

73. Extremele funcțiilor implicite. Fie y o funcție de x definită de ecuația

$$f(x, y) = 0.$$

Ne propunem a căuta pentru ce valori ale lui x funcțiunea y poate fi extremă. Va trebui să determinăm valorile lui x pentru care $y' = 0$. Dar avem

$$(12) \quad f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y) = 0$$

așa că la valorile lui x , care anulează pe y' , corespund pentru y valori care vor satisface sistemului

$$(13) \quad f(x, y) = 0, \quad f'_x(x, y) = 0.$$

Rezolvarea acestui sistem ne dă valorile lui x pentru care y poate fi un extrem și în același timp ne dă și eventualele valori extreme ale lui y .

Fie $x = a$ și $y = b$ o soluție a sistemului (13); pentru a putea afirma că pentru $x = a$ funcțiunea y are un extrem și a determina natura acestui extrem, trebuie să ne convingem că y' se anulează pentru $x = a$. Dacă pentru $x = a$ și $y = b$ avem $f'_y \neq 0$, atunci rezultă din (12) că y' este nul pentru $x = a$. Relația (12), derivată în raport cu x , ne dă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

și cum, pentru $x = a$, y' este nul, rezultă că valoarea lui y'' , pentru $x = a$, va fi dată de

$$y'' = \left[-\frac{f''_{xx}}{f''_{yy}} \right]_{x=a, y=b}.$$

Dacă însă f'_y se anulează în punctul (a, b) nu mai putem afirma că y' se anulează pentru $x = a$ și o discuție specială este necesară.

În cazul unei funcțiuni implicite de mai multe variabile, determinarea extremelor se face în mod analog. Pentru funcțiunea u de varia-

bilele x, y, z definită de ecuația

$$f(x, y, z, u) = 0,$$

se vede că punctele, în care u ar putea fi extrem, se obțin rezolvând sistemul

$$f = 0, \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0.$$

EXEMPLU. Să determinăm extremele funcțiunii y definită de ecuația

$$(14) \quad y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0.$$

Sistemul format de ecuația (14) și de ecuația $f'_x = 0$, adică de

$$(15) \quad xy + 1 = 0,$$

are următoarele două soluțiuni

$$(a) \quad x = 1 \quad \text{și} \quad y = -1$$

$$(b) \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{și} \quad y = 2.$$

Pentru soluția (a) avem $f'_y = 0$. Putem vedea ușor pentru $x = 1$ că y nu este nici maxim nici minim. În adevăr din (14) deducem

$$y = -x^2 \pm (x-1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

deci

$$y'(1) = -2 \pm \sqrt{6} \neq 0.$$

Pentru soluția (b) a sistemului (14) și (15) $f'_y \neq 0$, deci y' se anulează pentru $x = -\frac{1}{2}$. Cum valoarea lui y'' pentru $x = -\frac{1}{2}$ este dată de

$$\left[\frac{-2y}{y+x^2} \right]_{x=-\frac{1}{2}, y=2}$$

vedem că $y''(-\frac{1}{2}) < 0$; deci pentru $x = -\frac{1}{2}$, y' este maxim, valoarea acestui maxim fiind 2.

74. Extreme legate. Să ne propunem a găsi punctele în care funcțiunea

$$\omega = f(x, y, u, v)$$

ar putea fi extremă, variabilele x, y, u, v fiind *legate* prin două relațiuni

$$(16) \quad g(x, y, u, v) = 0, \quad h(x, y, u, v) = 0.$$

Extremele lui ω se numesc, în acest caz *extreme legate* sau *con-
diționate*.

Presupunem că condițiunile, cari ne permit a afirma că ecuațiile (16) definesc pe u și v ca funcțiuni de x și y , sunt satisfăcute și deci că într'un anumit domeniu, în care căutăm extremele lui ω , avem

$$J = \frac{D(g, h)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Putem deci considera pe ω ca o funcție numai de variabilele independente x și y , de care depinde direct și prin intermediul variabilelor u și v . Avem

$$(17) \quad d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

du și dv fiind legate prin relațiunile

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv = 0. \end{cases}$$

Din aceste două relațiuni vom scoate valorile lui du și dv , ceea ce este posibil, căci avem $J \neq 0$ și înlocuind în (17) obținem pentru $d\omega$ o expresie de forma $A dx + B dy$. Pentru ca ω să prezinte un extrem va trebui să avem $d\omega = 0$, deci $A = 0$, $B = 0$.

Putem face eliminarea lui du și dv între (17) și (18) și prin metoda multiplicatorilor (Lagrange). Să înmulțim relațiile (18) respectiv prin factorii nedeterminați λ și μ și apoi să le adunăm cu relația (17). Avem astfel

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) dy + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v} \right) dv.$$

Vom determina pe λ și μ astfel ca

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

deci

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) dy$$

și cum x și y sunt singurele variabile independente de care depinde ω , ω nu va putea prezenta un extrem decât dacă

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ecuatiile (19) și (20) împreună cu (16) determină pe λ, μ și pe x, y, u, v care pot corespunde la un maxim sau minim al funcțiunei ω .

Mai general, dacă ω este o funcție de n variabile

$$\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$ fiind legate între ele prin p relațiuni

$$(21) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_p = 0,$$

vedem, procedând ca mai sus, că valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$, pentru care funcțiunea ω poate avea extreme, se obțin în felul următor: considerăm funcțiunea auxiliară

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_p \varphi_p$$

de n variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$, cantitățile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ fiind considerate ca niște constante și scriem condițiile ca funcția F să fie extremă, adică

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Aceste n ecuațiuni, împreună cu ecuațiile (21) formează un sistem de $n + p$ ecuații cu $n + p$ necunoscute $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, care ne dă valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ căutate.

APLICAȚIE. Azele unei secțiuni centrale într-o cuadrică. Vom determina azele secțiunei prin planul central

$$(g) \quad lx + my + nz = 0$$

făcută în cuadrica cu centrul în origine

$$(h) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 1 = 0$$

ținând seama că jumătățile acestor axe reprezintă extremele distanței de la originea la un punct al secțiunei. Vom căuta deci extremele expresiunei

$$(22) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

x, y, z fiind legate prin relațiile (h) și (g); valorile extreme ale lui r vor fi jumătățile axelor căutate. Rezultă din cele văzute, că ecuațiunile

$$(23) \quad \begin{cases} 2x + \lambda l + 2\mu(Ax + Ez + Fy) = 0 \\ 2y + \lambda m + 2\mu(By + Dz + Fx) = 0 \\ 2z + \lambda n + 2\mu(Cz + Dy + Ex) = 0 \end{cases}$$

asociate cu ecuațiile (g) și (h) ne vor da pe x, y, z care corespund la extremele lui r . Dacă adăugăm la aceste 5 ecuațiuni, relația (22) și facem eliminarea lui x, y, z, λ, μ între aceste 6 ecuațiuni, obținem valorile jumătăților axelor căutate.

Pentru a face această eliminare să înmulțim prima relație (23) prin x , a doua prin y , a treia prin z și apoi să le adunăm. Obținem astfel ținând seama de (g), (h) și (22)

$$\mu = r^2.$$

Inlocuind pe μ prin valoarea r^2 în (23) suntem conduși la sistemul, linear și omogen în x, y, z, λ

$$\begin{array}{cccc} x(1 + Ar^2) + yFr^2 & + zEr^2 & + \frac{1}{2}\lambda l & = 0 \\ xFr^2 & + y(1 + Br^2) + zDr^2 & + \frac{1}{2}\lambda m & = 0 \\ xEr^2 & + yDr^2 & + z(1 + Cr^2) + \frac{1}{2}\lambda n & = 0 \\ xl & + ym & + zn & = 0 \end{array}$$

Astfel că eliminarea lui x, y, z, λ ne conduce la ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 + Ar^2 & Fr^2 & Er^2 & l \\ Fr^2 & 1 + Br^2 & Dr^2 & m \\ Er^2 & Dr^2 & 1 + Cr^2 & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

care este de gradul al doilea în r^2 și ale cărei rădăcini sunt patratele jumătăților axelor secțiunei.

II. — SCHIMBAREA VARIABILELOR.

75. In multe chestiuni de analiză, unde intervin funcțiuni de una sau mai multe variabile și derivatele lor, suntem conduși a înlocui acele variabile prin alte variabile, legate de cele dintâi prin anumite relațiuni. Derivatele funcțiunilor în raport cu noile variabile se calculează cu ajutorul formulelor generale de derivare stabilite.

76. Funcțiuni de o variabilă independentă. 10. SCHIMBAREA NUMAI DE VARIABILĂ. Cazul cel mai simplu de schimbare de variabilă ce se poate prezenta, este acela al unei funcțiuni

$$(1) \quad y = f(x)$$

unde se face schimbarea

$$(2) \quad x = g(t).$$

Va trebui să exprimăm derivatele lui y în raport cu x , în funcție de noua variabilă t . Expresia lui y în funcție de t este

$$y = f[g(t)];$$

deci, după regula de derivare a unei funcții de funcție, avem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot g'(t)$$

de unde scoatem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{g'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Prin urmare: pentru a avea derivata lui y în raport cu x , exprimată în funcție de t , vom lua derivata lui y în raport cu t și o vom împărți prin derivata lui x în raport cu t .

Pentru a obține pe $\frac{d^2y}{dx^2}$ în funcție de t , vom aplica regula precedentă pentru derivata funcțiunii $\frac{dy}{dx}$. Avem astfel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{x'} \right)}{x'} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}. \quad (1)$$

În mod analog

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{y'''x'^2 - 3y''x'x'' + 3y'x''^2 - y'x'x'''}{x'^5}$$

și așa mai departe, calculele făcându-se din aproape în aproape prin aplicarea formulei

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right]}{x'}.$$

OBSERVARE. Dacă notăm

$$f[g(t)] = h(t)$$

curba (1) va fi reprezentată parametric prin ecuațiile

$$x = g(t), \quad y = h(t)$$

Formulele precedente ne permit a exprima pe $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... cu ajutorul derivatelor funcțiunilor $g(t)$ și $h(t)$; avem astfel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h'(t)}{g'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'(t)h''(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}, \dots$$

Putem da altă formă formulelor precedente utilizând notațiunea diferențială. În adevăr dacă notăm cu y' , y'' , ... derivatele succesive ale lui y în raport cu x și cu dx , dy , d^2x , d^2y , ... diferențialele succesive ale lui x și y , luate în raport cu variabila t , avem

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Prin urmare: pentru a găsi derivata unei funcțiuni y în raport cu funcțiunea x , facem raportul între diferențiala lui y și diferențiala lui x .

Aplicând această regulă la funcțiunile y' , y'' , ..., avem succesiv

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx} = \frac{dx \, d^2y - d^2x \, dy}{dx^3}$$

(1) Derivatele marcate prin accente sunt în raport cu t .

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} (d^2x)^2 - dy dx d^3x$$

Trecerea de la o derivată la următoarea se face prin aplicarea formulei

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

EXEMPLU. Să considerăm expresia

$$(3) \quad E = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}$$

unde y' și y'' sunt derivatele de ordinul întâi și al doilea ale lui y în raport cu x . Să căutăm ce devine această expresie când luăm ca variabilă pe t , t fiind legat de x prin relația (2). Vom avea

$$E = \frac{\left[1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^3}{\left[\frac{y''x' - x''y'}{x'^3}\right]^2} = \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(y''x' - x''y')^2}. \quad (1)$$

Aceeaș expresie devine, cu notațiunea diferențială,

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^3}{(dx d^2y - dy d^2x)^2}.$$

29. SCHIMBAREA DE FUNCȚIE ȘI DE VARIABILĂ. Intre x și y avem o relație de forma

$$(4) \quad f(x, y) = 0$$

care ne definește pe y în funcție de variabila x . Dacă facem schimbarea

$$(5) \quad x = g(t, z), \quad y = h(t, z)$$

la relația (4) corespunde o relație între z și t care ne definește pe z în funcție de t . Ne propunem a exprima derivatele lui y în raport cu x cu ajutorul lui t, z și a derivatelor lui z în raport cu t . Această chestiune se reduce la precedenta, căci în formulele (5) putem considera pe z ca funcție de t , așa că x și y pot fi socotite ca funcțiuni compuse de noua variabilă independentă t . Avem deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dt}}{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt}}$$

(1) Derivatele însemnate prin accente sunt în raport cu t .

apoi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{x'_t} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right) \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \dots\right] - \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right] \left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \dots\right]}{\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right)^3}$$

și așa mai departe.

Derivata de ordinul n , $\frac{d^ny}{dx^n}$, se va exprima cu ajutorul lui t , z și a derivatelor $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, ..., $\frac{d^nz}{dt^n}$.

Chestiunea se poate trata și cu ajutorul diferențialelor.

EXEMPLU. Să reluăm expresiunea (3) și să facem schimbarea

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

θ fiind variabila independentă. Avem, însemnând prin accente derivatele în raport cu θ ,

$$x' = r' \cos \theta - r \sin \theta \qquad y' = r' \sin \theta + r \cos \theta$$

$$x'' = r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta \qquad y'' = r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta$$

de unde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3} = \frac{-rr'' + 2r'^2 + r^3}{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^3}.$$

Așa că

$$E = \frac{(r^2 + r'^2)^3}{(r' + 2r'^2 - rr'')^2}.$$

77. Funcțiuni de mai multe variabile. 10. SCHIMBAREA NUMAI DE VARIABILE. Vom considera pentru ușurarea expresiunii o funcțiune $z = f(x, y)$ de două variabile independente x și y . Să facem schimbarea

$$(6) \quad \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

luând pe u și v ca noi variabile independente, funcțiunile g și h fiind presupuse astfel ca sistemul (6) să definească pe u și v în funcție de z și y . Presupunem deci

$$\frac{D(g, h)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Ne propunem să exprimăm derivatele lui z în raport cu x și y cu ajutorul lui u, v și a derivatelor parțiale ale lui z luate în raport cu u și v . z este o funcție de u și v prin intermediul lui x și y , așa că avem,

aplicând formula de derivare a funcțiilor compuse,

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

Din acest sistem putem scoate valorile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$, de oarece am presupus că determinantul sistemului (7) e diferit de zero. Obținem astfel, pentru derivatele de primul ordin formulele

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= C \frac{\partial z}{\partial u} + D \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

unde am notat prin A, B, C, D niște funcțiuni cunoscute de u și v .

Derivatele de ordinul al doilea și următoarele se calculează din aproape în aproape prin aceleași formule, căci operațiile $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$ au ca transformate în u și v respectiv operațiile

$$A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v}, \quad C \frac{\partial}{\partial u} + D \frac{\partial}{\partial v}.$$

Să calculăm în particular pe $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= A \left(A \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &\quad + B \left(A \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

EXEMPLU. Să se caute ce devine expresia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

când luăm ca noi variabile pe u și v

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v.$$

Vom urma metoda generală indicată. Formulele (7) devin

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + \sin v \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -u \sin v \frac{\partial z}{\partial x} + u \cos v \frac{\partial z}{\partial y}$$

de unde scoatem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\sin v}{u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin v \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\cos v}{u} \frac{\partial z}{\partial v};$$

deci, în acest caz, $A = \cos v$, $B = -\frac{\sin v}{u}$, $C = \sin v$, $D = \frac{\cos v}{u}$.

Avem apoi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos v \frac{\partial}{\partial u} \left(\cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\sin v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\sin v}{u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\sin v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\sin^2 v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\sin 2v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\sin 2v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\sin^2 v}{u} \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

Tot astfel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\cos^2 v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\sin 2v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\sin 2v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\cos^2 v}{u} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

De unde, în fine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

20. SCHIMBARE DE FUNCȚIE ȘI DE VARIABILE. Ecuația

$$(8) \quad F(x, y, z) = 0$$

definește pe z în funcție de variabilele x și y . Să facem schimbarea

$$(9) \quad x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w).$$

La ecuația (8) corespunde o relație între u, v, w care ne definește pe w în funcție de u și v . Ne propunem să arătăm cum putem exprima derivatele parțiale ale lui z în raport cu x și y cu ajutorul lui u, v, w și a derivatele lui w în raport cu noile variabile independente u și v .

Mai întâi vom considera pe z ca funcție de u și v prin intermediul lui x și y ; deci

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Dar din formulele (9)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial k}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}$$

așa că

$$\frac{\partial k}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

În mod analog găsim

$$\frac{\partial k}{\partial v} + \frac{\partial k}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Din aceste două ecuațiuni scoatem valorile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Pentru calcularea derivatelor următoare se procedează ca în cazul precedent.

EXEMPLU. Să particularizăm ecuațiile luând

$$x = w \sin u \cos v, \quad y = w \sin u \sin v, \quad z = w \cos u.$$

Vom avea

$$\begin{aligned} -w \sin u + \cos u \frac{\partial w}{\partial u} = & \left(w \cos u \cos v + \sin u \cos v \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\ & + \left(w \cos u \sin v + \sin u \sin v \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\cos u \frac{\partial w}{\partial v} = \left(-w \sin u \sin v + \sin u \cos v \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(w \sin u \cos v + \sin u \sin v \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

de unde scoatem expresiile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$.

78. Transformările curbilor plane. În legătură cu schimbările de variabile vom considera și transformările curbilor plane.

10. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. Formulele

$$(10) \quad \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = g(x, y) \end{cases}$$

fac să corespundă unui punct $m(x, y)$ punctul $M(X, Y)$. Zicem că aceste formule definesc o transformare punctuală.

Când punctul m descrie o curbă c , punctul M va descrie o curbă C , care este *transformata*, prin formulele (10), a curbei c .

Fie dx, dy creșterile corespunzătoare lui x și y pentru o deplasare foarte mică a punctului m pe curba c și dX, dY creșterile ce rezultă pentru X și Y . Tangenta în m la curba c are ca coeficient unghiular

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

iar tangenta în punctul M la curba C are ca coeficient unghiular

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{g'_x(x, y) dx + g'_y(x, y) dy}{f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy} = \frac{g'_x + g'_y y'}{f'_x + f'_y y'}.$$

Din această expresie a lui Y' rezultă că fiind dată o transformare (10), direcțiunea tangentei în punctul $M(X, Y)$ al curbei C nu depinde de cât de x, y și y' , adică de punctul m și de tangenta în acest punct la curba c . Prin urmare, dacă o altă curbă c_1 este *tangentă* în m la curba c , atunci și transformata sa C_1 va fi tangentă în M la curba C .

20. TRANSFORMĂRI DE CONTACT. Două curbe tangente se pot transforma în alte două curbe tangente cu ajutorul unor transformări mai generale de cât cele punctuale. Să considerăm formulele

$$(11) \quad X = f(x, y, y'), \quad Y = g(x, y, y')$$

unde x, y sunt coordonatele unui punct m de pe o curbă c , iar y' coeficientul unghiular al tangentei în m la curba c . Când punctul m descrie curba c , punctul $M(X, Y)$ descrie transformata C . Să determinăm tangenta în punctul M la curba C .

Coeficientul unghiular Y' al acestei tangente va fi

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''}$$

Vedem că, în acest caz, Y' depinde de x, y, y', y'' . Două curbe c și c_1 tangente în m se vor transforma în două curbe tangente în M :

- a) dacă y'' este același în punctul m pentru ambele curbe c și c_1 ;
- b) dacă, y'' nefiind același, Y' nu depinde de y'' , adică dacă avem

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}$$

Când funcțiunile $f(x, y, y')$ și $g(x, y, y')$ satisfac la această condițiune, zicem că transformarea (11) este o transformare de contact.

EXEMPLU. Transformarea

$$X = y', \quad Y = xy' - y$$

numită transformarea lui Legendre, este de contact. În adevăr

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{y' + xy'' - y'}{y''} = x,$$

deci Y' nu depinde de y'' .

EXERCITII.

1. Să se găsească extremele funcțiunii

$$f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2.$$

R. Sistemul

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$$

are ca soluție unică $x = 0, y = 0$. Suntem în cazul dubios, căci $AC - B^2 = 0$.

Cum însă

$$f = \left(\frac{x^2}{2} + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^4,$$

vedem că originea corespunde unui *minim*, căci funcțiunea f este pozitivă și nu se anulează în alt punct de cât în origine.

2. Să se găsească extremele funcțiunii

$$f(x, y) = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \quad (1)$$

x și y fiind arcuri cuprinse între 0 și π .

R. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \frac{y}{2} \cos \frac{2x+y}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x+2y}{2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin \frac{y}{2} \sin \frac{2x+y}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x+2y}{2}.$$

Sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ este echivalent cu sistemul

$$\sin(x+y) = \sin x$$

$$\sin(x+y) = \sin y,$$

care are ca soluție

$$(1) \quad x = y = 0, \quad (2) \quad x = y = \frac{\pi}{3}.$$

La soluția (1) nu corespunde nici maxim nici minim. La soluția (2) corespunde *maximul* funcțiunii f .

3. Să se determine axele cuadrice

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 1 = 0.$$

R. Va trebui să căutăm extremele expresiei $x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z fiind legate prin ecuația cuadrice. Între sistemul

$$x + \lambda(Ax + Ez + Fy) = 0,$$

$$y + \lambda(By + Dz + Fx) = 0,$$

$$z + \lambda(Cz + Dy + Fx) = 0,$$

relația

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

și ecuația (1) va trebui să eliminăm pe x, y, z, λ . Găsim mai întâi $r^2 = \lambda$. Deducem apoi ecuația care ne dă patratele jumătăților axelor

$$\begin{vmatrix} 1 + Ar^2 & Fr^2 & Er^2 \\ Fr^2 & 1 + Br^2 & Dr^2 \\ Er^2 & Dr^2 & 1 + Cr^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ce devine $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}$, când facem schimbarea

$$e^x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) ?$$

R. Avem

$$x = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right);$$

prin urmare

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} = \cos \theta \frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos^2 \theta \frac{d^2y}{d\theta^2} - \sin \theta \cos \theta \frac{dy}{d\theta}$$

5. Ce devine expresia

$$E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

prin schimbarea de variabile

$$x = u, \quad y = uv ?$$

R. Avem $u = x$ și $v = \frac{y}{x}$, așa că

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Cu ajutorul acestor formule găsim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

de unde rezultă că $E = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

6. Transformarea

$$X = x - \frac{y}{y'}, \quad Y = y - xy'$$

este de contact.

R. Avem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-xy'^2}{y},$$

ceea ce ne arată că transformarea este de contact.

VERIFICAT

1987

ERRATA.

Pag. 6, rândul 9, se va adăuga după cuvântul numere :
cu aceste proprietăți, putem intercala între ele două numere
raționale

Pag. 6, rândul 10, prima virgulă se va înlocui prin : și

Pag. 14, rândul 2 de jos în sus, se va înlocui $\frac{m}{p}$ prin $\frac{p}{m}$

Pag. 16, rândul 7 de jos în sus, se va înlocui numărul 2 prin 3

Pag. 19, rândul 5 de jos în sus, se va înlocui semnul $>$ prin $<$

Pag. 25, rândul 15 de jos în sus, se va înlocui $f(u)$ prin $f(x)$

Pag. 26, rândul 6 de jos în sus, se va înlocui $<$ prin $>$

Pag. 102, rândul 7 de jos în sus, se va înlocui $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z$ prin
 $\alpha |f'_x| + \beta |f'_y| + \gamma |f'_z|$.

