Biblioteca Centrală Universitară
București

COTA 400 737 Dublet

INVENTAR 133 909

CASA ȘCOLELOR
BIBLIOTECA PEDAGOGICĂ
№ 19991
Dr. C. Șc. No 43221. 2.XII.926.

CURS
DE
MATEMATICI GENERALE.

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ.

CURS

DE

MATEMATICI GENERALE

PENTRU STUDENȚII DELA FACULTATEA DE ȘTIINȚE,
DELA ACADEMIILE DE COMERȚ ȘI AGRICULTURĂ
ȘI DELA ȘCOLILE TEHNICE SUPERIOARE

DE

GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZA MATEMATICĂ LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE
DELA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

133909

VOLUMUL I.

MATEMATICI ELEMENTARE.

CALCUL NUMERIC. — CALCUL ALGEBRIC. — REPREZENTARE GRAFICĂ.
TRIGONOMETRIE. — OPERAȚII CU NUMERE APROPIATE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «ARDEALUL»
STR. MEMORANDULUI 22.
1926.

1956

Biblioteca Centrală Universitară
Cota 400737 Dublet
Inventar 133909

400737

CASA ...
BIBLIOTECA PEDAGOGICA
Nr. 19991

VOLUMUL I.

MATEMATICI ELEMENTARE.

PREFAȚĂ.

O mare greutate, pe care o întâmpină studenții dela Matematici — mai ales cei dela Universitățile din Cluj și Cernăuți — pentru pregătirea examenelor, e lipsa de cărți de Matematici superioare în limba română.

Pentru a înlătură această dificultate, Ministerul Instrucțiunii a introdus în budget un fond anual pentru publicarea manualelor didactice universitare.

Cartea de față e publicată din acest fond și e menită să servească de bază pentru învățământul Matematicilor pure și aplicate la Facultatea de Științe, la Școala Politehnică, la Academiile de Comerț și de Agricultură și la toate școlile tehnice superioare.

Constatând că o parte din Matematici se învață în liceu la o vrâstă, când mintea copilului nu poate prinde toate subtilitățile raționamentelor ce i se fac, am crezut că e absolut necesar să se facă la Universitate o revedere generală a Matematicilor elementare, înainte de a se intrà în studiul aprofundat al diferitelor ramuri din Matematicile superioare.

De aceea acest CURS DE MATEMATICI GENERALE *e împărțit în două:*

Volumul I, MATEMATICI ELEMENTARE, *cuprinde: Calculul numeric, calculul algebric, reprezentarea grafică, calculele cu logaritmi, trigonometria și operațiile cu numere apropiate.*

Volumul II, MATEMATICI SUPERIOARE, *va cuprinde elemente din: Algebra superioară, Geometria analitică în plan și în spațiu, calcul diferențial, calcul integral și ecuații diferențiale.*

In partea întâi sunt Conferințele de Matematici elementare, pe care le fac la Academia de Comerț și, în semestrul întâi, la Facultatea de Științe din Cluj.

Partea a doua e cursul de Matematici generale, pe care — sub formă redusă — l-am făcut la Institutul Electro-tehnic dela Universitatea din Iași și din care — de șease ani — fac o parte, în semestrul al doilea, la Facultatea de Științe din Cluj.

E evident că pentru fiecare școală specială, cu caracter practic, profesorul va alege din acest curs numai părțile, pe care le va crede necesare învățământului special din acea școală.

Cartea va puteà fi consultată şi de profesorii de Matematici dela şcolile secundare, precum şi de ingineri, arhitecţi, fizicieni, chimişti, agronomi, ofiţeri de arme speciale şi în general de orice persoană, pe care o poate interesà un curs de Matematici Generale, care începe cu operaţiile cele mai elementare din Aritmetică şi se termină cu noţiuni asupra operaţiilor superioare din Calculul diferenţial şi integral.

Terminologia românească e întrodusă conform Vocabularului Matematic publicat în biblioteca Gazetei Matematice din Bucureşti.

Acest curs, tipărit cu multe sacrificii atât din partea tipografiei „Ardealul" cât şi din partea autorului, apare numai cu scopul de a se da studenţimii o carte românească de Matematici Generale.

Ţin să exprim acì mulţumirile mele Senatului Universitar din Cluj, care a aprobat ca acest curs să fie imprimat în editura Universităţii din Cluj; d-lui Inginer R. Ostrogovich, care a desemnat figurile intercalate în text şi Institutului de Arte Grafice „Ardealul", care a primit să tipărească cu mari greutăţi tehnice — în condiţiile cele mai ieftine şi cele mai bune — o carte de Matematici Superioare.

Observările, pe care vor binevoì să mi le transmită cititorii acestui curs, vor fi primite cu mulţumire şi vor servì la îmbunătăţirea ediţiilor viitoare.

Cluj, 7 Noembre 1925.

G. Bratu.

CURS
DE
MATEMATICI GENERALE.

INTRODUCERE.

NUMERELE.

1. Numere întregi. Existența colecțiunilor de mai multe obiecte asemănătoare a născut în mintea omului noțiunile de *unitate* și de *număr întreg*, iar din necesitatea comparării colecțiunilor între ele a rezultat operația de *numărare* și diferitele *sisteme de numerație*.

Fiecare număr trebue să aibă *un nume* pentru vorbire și *un semn* pentru scriere. De aci: *numerația vorbită* și *numerația scrisă*.

Pentru a spune (sau scrie) toate numerele, de care avem nevoe, cu cât mai puține vorbe (sau semne) distincte, s'au întrodus, pe lângă unitățile *simple* (de ordinul întâi), unități *de ordin superior* (de ordinul al doilea, al treilea, etc.,) cu convenția următoare: *n unități de un ordin oarecare formează o unitate de ordin imediat superior*.

Numărul n se numește *baza* sistemului de numerație.

Sistemul generalizat prin uz are baza *zece* și se numește sistemul *zecimal*. Pentru a scrie toate numerele în acest sistem, avem nevoe numai de zece semne sau *cifre*:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Ordinul unităților se arată prin *locul* pe care-l ocupă cifra în număr. Când nu avem nici o unitate de un ordin oarecare, punem la locul corespunzător cifra 0.

2. Notații. Când vrem să scriem un număr, fără să-i precizăm valoarea, îl putem reprezentà printr'o *literă*. Astfel a reprezintă *un număr* presupus cunoscut, dar oricare; b reprezintă un *alt* număr.

Uneori mai multe numere diferite se scriu prin litere cu *indici*: a_1, a_2, b_m, b_n (a unu, a doi, b em, b en); alteori prin litere cu *accente*:

c', c'', c''' (c prim, c secund, c terț) sau prin litere grecești simple, cu indici sau cu accente: α, β, γ, λ_1, λ_2, λ_m, ϵ', ϵ'' [1].

3. Șirul numerelor întregi. Dacă scriem toate numerele întregi unele după altele

(N) $$1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

astfel ca fiecare număr din acest șir să se capete adăugând numai *o unitate* pe lângă unitățile numărului precedent, zicem că am format *șirul natural al numerelor întregi* sau șirul N.

Operația cea mai elementară în Matematici este trecerea dela un număr din acest șir la numărul *consecutiv* (imediat următor). Această operație se scrie cu simbolul $+1$ (*plus* unu). Astfel $n+1$ însemnează numărul din șirul N, care vine imediat după n.

Numărul n se zice al n-lea din șir sau *de rang* n.

4. Compararea numerelor. Fiecare număr reprezintă o *colecțiune* de unități. Două numere a și b se zic *egale*, când colecțiunile, pe care le reprezintă, au *același număr* de unități [2]; în acest caz scriem

$$a = b \quad (a \text{ egal cu } b).$$

In cazul contrariu numerele se zic *neegale* și scriem

$$a \neq b \quad (a \text{ diferit de } b).$$

Dacă a conține mai puține unități decât b, zicem că

$$a < b \quad (a \text{ mai mic decât } b)$$

sau

$$b > a \quad (b \text{ mai mare decât } a).$$

Avem

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1 < \ldots;$$

de aceea șirul N se zice *ordonat* în mod *crescător*. Din contra șirul

$$n+1 > n > \ldots > 3 > 2 > 1$$

este ordonat în mod *descrescător*.

A *numără* însemnează a spune șirul numerelor întregi în ordine crescătoare.

---

[1] Vezi TABLELE dela sfârșitul volumului.

[2] Adică dacă la fiecare unitate din colecțiunea întâia corespunde câte o unitate din colecțiunea a doua și reciproc.

OBSERVARE. In şirul N nu există niciun număr mai mare decât toate. In adevăr, oricât de mare ar fi un număr n, numărul $n+1$ este *mai mare* decât n. De aceea zicem că şirul numerelor întregi creşte la *infinit*.

Pentru *infinit* se întrebuinţează semnul ∞ şi şirul numerelor întregi se poate scrie:

$$(N) \qquad 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, \infty.$$

Când nu avem nicio unitate, convenim să zicem că avem 0 (*zero*) unităţi. Prin generalizare considerăm şi pe 0 ca un număr şi-l aşezăm în şir la stânga lui 1.

Şirul astfel complectat:

$$(I) \qquad 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots \infty$$

păstrează proprietăţile şirului N şi pentru 0, fiindcă avem $0+1=1$, $0<n$ şi $n>0$, oricare ar fi n din şirul I.

5. Corespondenţa dintre numere şi puncte. Pe o dreaptă D, începând dela un punct O, să însemnăm nişte diviziuni la distanţe egale. In dreptul punctului O să punem numărul 0 (zero) şi în dreptul fiecărei din diviziunile următoare să scriem succesiv numerele şirului N (*fig.* 1).

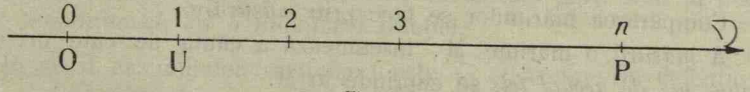


Fig. 1.

Cum dreapta este infinită, se poate scrie astfel pe ea *toate* numerele întregi. *La fiecare număr din şirul I corespunde un punct de diviziune pe dreapta* D şi *reciproc*. Dacă la numărul n corespunde punctul P, putem zice punctul n în loc de punctul P.

Punctul O este *origina* diviziunilor. Segmentul OU este *unitatea*. Fiindcă dela O până la P avem n unităţi, zicem ca segmentul OP are lungimea n.

6. Egalitate şi neegalitate. Dacă a şi b reprezintă două numere, $a=b$ este o *egalitate*; $a<b$ sau $a>b$ este o *neegalitate*. Numărul scris la stânga semnului $=$ (sau $<$, sau $>$) se numeşte *membrul întâi* al egalităţii (sau al neegalităţii); numărul scris la dreapta se numeşte *membrul al doilea*.

Două neegalităţi sunt *de acelaş sens*, când au aceleaşi semne de neegalitate:

$$a>b, c>d \quad \text{sau} \quad a<b, c<d.$$

Două neegalități sunt *de sens contrariu*, când au semnele de neegalitate diferite: .

$$a > b\ ,\quad c < d.$$

Dacă b este mai mare decât a, numărul b este așezat la dreapta numărului a în șirul I și punctul b este așezat la dreapta punctului a în figura 1 și reciproc.

Din definiția egalității și neegalității a două numere [4] rezultă următoarele *axiome* (1)

1°. Avem întotdeauna $a = a$.
2°. Din $a = b$ rezultă $b = a$;
3°. Din $a = b$, $b = c$ rezultă $a = c$.
4°. Din $a < b$ rezultă $b > a$ și reciproc.
5°. Din $a = b$, $b < c$ rezultă $a < c$.
6°. Din $a < b$, $b < c$ rezultă $a < c$
7°. Din $a = b$, $b > c$ rezultă $a > c$.
8°. Din $a > b$, $b > c$ rezultă $a > c$.

7. Măsură. Căutarea deosebirilor dintre obiecte ne-a dus la noțiunile de *formă* și de *mărime* ca: lungime, suprafață, volum, greutate, capacitate, unghiu, temperatură, presiune, etc.

Compararea mărimilor se face prin *măsurare.*

A *măsură* o mărime M, însemnează a căută de câte ori o altă mărime m, *de acelaș fel*, se cuprinde în M.

Astfel, pentru a măsură o lungime L, se ia o altă lungime l ca *unitate de măsură* (metrul, cotul, yardul, ...) și dacă lungimea l se cuprinde de n ori în L, se zice că numărul n este *măsura* lungimei L cu ajutorul unității l.

OBSERVARE. Numărul ce rezultă din numărarea obiectelor unei aceleași colecțiuni e întotdeauna *același*; în acest caz unitatea e naturală.

Numărul ce rezultă din măsurarea unei mărimi *depinde de unitatea de măsură aleasă*; în acest caz unitatea e convențională.

8. Numere fracționare. In general o unitate de măsură l nu intră de un număr exact de ori într'o lungime L.

Să presupunem că L = AB (*fig.* 2) și că unitatea de măsură se cuprinde de n ori dela A până la C, dar mai rămâne o porțiune CB mai mică decât l Avem deci:

$$\text{de } n \text{ ori } l < \text{AB} < \text{de } n+1 \text{ ori } l.$$

(1) Adevăruri evidente fără demonstrare.

In acest caz, pentru a măsură și lungimea rămasă CB, împărțim unitatea l într'un număr oarecare de părți *egale* și luăm una din aceste părți ca unitate de măsură. Această nouă unitate aleasă se numește *unitate fracționară*. Vechea unitate l este *unitatea întreagă*.

Un număr de unități fracționare formează un *număr fracționar* sau o *fracție*. Avem fracții *ordinare* și fracții *zecimale*.

De exemplu, dacă împărțim unitatea l în 5 părți egale, una din aceste părți este *o cincime*. Dacă cincimea intră în CB de 3 ori, zicem că măsura lui CB este 3 *cincimi*. Cincimea este o unitate fracționară; numărul 3 cincimi sau $\frac{3}{5}$ este o *fracție ordinară*.

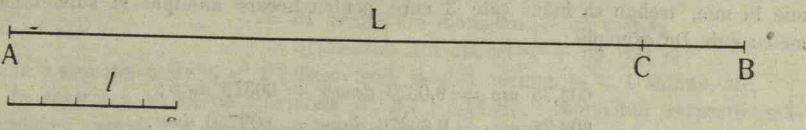


Fig. 2.

In general o *fracție ordinară* $\frac{a}{b}$ se scrie cu două numere întregi a și b, care se numesc *termenii* fracției; b arată în câte părți egale s'a împărțit unitatea întreagă; a arată câte din aceste părți sunt în fracție. a este *numărătorul*, iar b *numitorul* fracției.

In acest caz unitatea fracționară este $\frac{1}{b}$ și avem prin definiție

$$\frac{a}{b} = \text{de } a \text{ ori } \frac{1}{b} .$$

9. Numere zecimale. Când se ia ca unitate fracționară a zecea, a suta, a miia, ..., parte din unitatea întreagă, numărul fracționar, care rezultă din măsurare, se numește *număr fracționar zecimal* sau *fracție zecimală*. Numerele zecimale se formează și se scriu după aceeaș regulă ca și numerele întregi, cu singura deosebire că, numărul zecimal are două părți: *partea întreagă* formată din unități întregi și *partea zecimală* formată din unități fracționare zecimale. Aceste două părți se scriu una lângă alta și se despart printr'o *virgulă* (virgula zecimală).

Unitățile *întregi* de diferite ordine (dela virgula zecimală spre stânga) sunt: unimi, zeci, sute, mii, zeci de mii, sute de mii, milioane, etc.

Unitățile *zecimale* de diferite ordine (dela virgula zecimală spre dreapta) sunt: zecimi, sutimi, miimi, zecimi de miimi, sutimi de miimi, milionimi, etc.

Pentru măsurare se întrebuințează de obiceiu unități fracționare zecimale. Astfel, în *sistemul metric*, multiplii și submultiplii metrului,

litrului, gramului, se formează după aceeaș lege ca și unitățile de diferite ordine din sistemul zecimal.

De aceea, dacă o lungime măsurată cu metrul ne dă: 6 *hm* 3 *m* 7 *dm* și 5 *cm*, acest număr se poate scrie imediat — cu aceleași cifre — sub formă de număr zecimal: 603, 75 *m*. De asemenea se poate scrie ușor măsura acestei lungimi, când luăm ca unitate de măsură un *multiplu* sau un *submultiplu* al metrului: e de ajuns să punem virgula zecimală la dreapta cifrei care reprezintă noul fel de unități.

De exemplu: 603, 75 *m.* = 6, 0375 *hm.* = 603750 *mm.*

Acesta e unul dintre marile avantagii practice ale sistemului metric.

Totuși, pentru *suprafețe* unitățile de măsură crescând din sută în sută, trebue să luăm, dela virgula zecimală spre stânga sau spre dreapta, câte 2 cifre pentru fiecare multiplu și submultiplu de metru patrat. Pentru *volume*, unitățile crescând din mie în mie, trebue să luăm câte 3 cifre pentru fiecare multiplu și submultiplu de metru cub. De exemplu:

$$603{,}75\ mp = 6{,}0375\ damp = 60375\ dmp;$$
$$603{,}75\ mc = 0{,}60376\ damc = 603750\ dmc.$$

Toate numerele întregi și fracționare, ordinare și zecimale, se numesc *numere raționale.*

10. Numere complexe aritmetice. La Engleji unitatea de măsură pentru lungimi e *yardul* (y) și are ca submultipli: piciorul (p) și degetul (d)

$$1\,y = 3\,p, \quad 1\,p = 12\,d.$$

Dacă dintr'o măsurare am găsit 5 yarzi, 2 picioare și 8 degete, vom scrie $5\,y\,2\,p\,8\,d$; $5\,y$ este partea întreagă, $2\,p\,8\,d$ este partea fracționară. Numărul însă nu este nici întreg, nici fracționar ordinar, nici zecimal. Un astfel de număr se numește *număr complex aritmetic.*

Și la noi în sistemul vechi (cu unitățile de măsură românești: stânjenul, falcea, ocaua, ...) rezultatele măsurărilor trebuiau scrise cu numere complexe. Chiar și azi anumite mărimi, ca unghiurile, arcurile și timpul, se mai exprimă tot cu astfel de numere complicate, care îngreuie mult calculele în mod inutil.

Astfel, unghiurile și arcurile se măsoară în grade (^{0}), minute ($'$) și secunde ($''$): $1^0 = 60'$, $1' = 60''$. Timpul se măsoară în ani (a), luni (l), zile (z), ore (h), minute (m) și secunde (s): $1\,z = 24\,h$, $1\,h = 60\,m$, $1\,m = 60\,s$.

OBSERVARE. Când ni se dă un număr (de ex. 14) fără să ni se arete *felul unităților* din care e format, zicem că numărul e *abstract.*

Când ni se spune și felul unităților (de ex. 14 metri) zicem că numărul e *concret.*

11. Numere iraţionale. Sunt cazuri când o mărime nu cuprinde de un număr *exact* de ori nici unitatea de măsură întreagă şi nici vreo unitate fracţionară a acesteia, *ori cât de mică ar fi această unitate fracţionară.*

De exemplu, se demonstrează în Geometrie că, dacă măsurăm lungimea unui *cerc* cu *diametrul lui*, nici zecimea, nici sutimea şi nicio unitate fracţionară oricât de mică din diametru, nu intră de un număr *exact* de ori în lungimea cercului. De aceea aceste două lungimi (cercul şi diametrul lui) se zic *incomensurabile* între ele.

Astfel găsim prin măsurări succesive:

lungimea cercului = 3 *diametri* + un rest r_1
= 31 *zecimi* din diametru + un rest r_2
= 314 *sutimi* din diametru + un rest r_3

şi aşă mai departe, unde $r_1 < 1$ (diametru), $r_2 < 1$ zecime, $r_3 < 1$ sutime, etc.

In acest caz zicem că numerele 3 , 3,1 , 3,14 , . . . reprezintă respectiv măsura lungimii cercului *cu aproximaţie* mai mică decât 1 unitate, 1 zecime, 1 sutime, . . .

Cu cât facem măsurarea cu mai mare preciziune, adică cu unităţi fracţionare mai mici, cu atât obţinem ca măsură un număr zecimal *cu mai multe cifre zecimale.* In practică, evident că imperfecţiunea instrumentelor de măsură şi limita perceperii simţurilor noastre, nu ne permit să determinăm această măsură, decât cu un număr *finit* de cifre zecimale. In teorie însă, se demonstrează că această operaţie se poate continua la infinit.

Numărul, care ar reprezentă *exact* măsura lungimii cercului cu ajutorul diametrului lui, ar trebui să fie exprimat printr'un număr zecimal *cu o infinitate de cifre zecimale.* Un astfel de număr se numeşte *iraţional* şi se înseamnă, de obicei, printr'o literă sau printr'un *semn convenţional.*

Astfel se scrie:

lungimea cercului = $\pi \times$ *lungimea diametrului,*

sau $C = \pi \times D,$

unde numărul iraţional

$$\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots$$

se ia în practică numai cu câteva cifre zecimale.

Toate numerele raţionale şi iraţionale se numesc *numere reale.*

12. Operaţiile fundamentale. Toate calculele elementare se reduc la 7 operaţii fundamentale, care se împart în două grupe: *operaţii directe* şi *operaţii inverse.*

Operaţiile directe sunt: *adunarea*, *înmulţirea* şi *ridicarea la putere.* Ele se mai numesc şi operaţii directe *de treapta întâia*, *a doua* şi *a treia* respectiv.

Fiecare operație de o treaptă nu e decât un caz particular al operației de treapta precedentă.

In forma cea mai simplă a unei operații directe, ni se dau două numere a și b și se cere să formăm din ele un al treilea număr c. In operația inversă corespunzătoare, ni se dau numărul c și unul din numerele a sau b și se cere să-l aflăm pe celălalt (b sau a). Totuși avem numai patru operații fundamentale inverse.

Operațiile inverse sunt: *scăderea* (operație de treapta întâia), *împărțirea* (operație de treapta a doua), *extragerea rădăcinei* și *aflarea logaritmului* (operații de treapta a treia).

13. Generalizarea numerelor. Fiecare operație inversă introduce în calcule numere noi. Astfel scăderea introduce numerele *negative*, împărțirea introduce numerele *fracționare*, extragerea rădăcinei și aflarea logaritmului introduc numerele *irationale* și *imaginare*.

CAPITOLUL I.

OPERAȚIILE DE TREAPTA ÎNTÂIA.

I. — ADUNAREA.

14. Adunarea este operația prin care din mai multe numere a, b, c, se formează un singur număr s, care conține toate unitățile numerelor date; semnul adunării este $+$ (plus); s se numește *suma* numerelor a, b, c și se scrie

$$a+b+c=s.$$

Numerele a, b, c sunt *termenii* sumei; expresia $a+b+c$ este suma *neefectuată*; s este suma *efectuată*.

Calcularea sumei $m+1$ se reduce la operația elementară $m+1$ [3]. Calcularea sumei $m+n$ se reduce la n operații elementare succesive, adică la a căuta în șirul numerelor

$$(I) \qquad 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ ,\ n\ ,\ n+1\ ,\ \ldots$$

care este al n-lea număr dela dreapta lui m. Avem dar

$$(1) \qquad m+n > m\ .$$

Primele n numere din șirul I mai mari decât m sunt:

$$m+1\ ,\ m+2\ ,\ m+3\ ,\ \ldots\ ,\ m+n\ .$$

Suma a mai multor numere $m+n+p+q$ se capătă adunând pe m cu n, apoi pe $m+n$ cu p, apoi pe $m+n+p$ cu q, ceeace se arată în scris astfel:

$$m+n+p+q = [(m+n)+p]+q.$$

15. Legile adunării. Din definiția adunării rezultă următoarele *legi*:

1°. Adunarea este o operație întotdeauna *posibilă* și *univocă* (1) în șirul numerelor întregi.

2°. Adunarea e *comutativă*:

$$a+b=b+a, \quad 3+5=5+3. \tag{2}$$

Adică: într'o sumă neefectuată *se poate schimbà ordinea termenilor*, fără ca suma efectuată să se schimbe.

3°. Adunarea e *asociativă*:

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c), \tag{3}$$
$$2+8+5=10+5=2+13.$$

Adică: într'o sumă neefectuată *se pot înlocuì doi sau mai mulți termeni prin suma lor efectuată*, fără ca prin aceasta suma totală efectuată să se schimbe.

4°. Din legea 2° și neegalitatea (1) rezultă că

$$a+b>a \qquad \text{și} \qquad a+b>b.$$

Adică: o sumă de numere din șirul I este mai mare decât fiecare din termenii ei.

Invers, dacă $a>b$, b e o parte a lui a și putem scrie

$$a=b+n.$$

5°. Dacă a, b, c, d sunt numere din șirul I, obținem prin adunare:

$$\begin{array}{l} \text{din} \quad a=b \\ \qquad\quad c=d \\ \hline a+c=b+d \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{din} \quad a>b \\ \qquad\quad c=d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{din} \quad a>b \\ \qquad\quad c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array}$$

16. Adunarea sumelor. Suma a două sau mai multe sume neefectuate este egală cu o singură sumă neefectuată, care are ca termeni *toți* termenii sumelor date. Adică:

$$(a+b+c)+(d+e)+(f+g)=a+b+c+d+e+f+g.$$

Această operație rezultă din legea 3°. Sumele din membrul întâi se numesc *sume parțiale*; suma din membrul al doilea e *suma totală*.

(1) Cu rezultat *unic*.

Reciproc: suma totală a mai multor numere se poate considerà ca suma a două sau mai multe sume parțiale.

17. Rezultantă. Suma $a+b+c$ se poate calculà ușor pe o dreaptă divizată [5]. Dacă dela O până la P (*fig.* 3) avem a diviziuni, dela P la Q b diviziuni, dela Q la R c diviziuni, dela O până la R avem $a+b+c$ diviziuni. Suma $s=a+b+c$ este numărul, care corespunde punctului R.

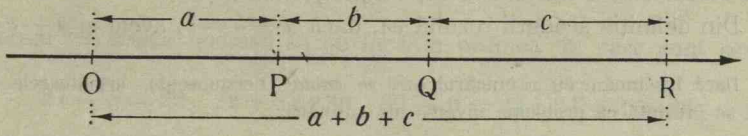


Fig. 3.

Segmentul OR se numește *rezultanta* segmentelor OP, PQ, QR. Insemnând cu $\overline{OP}$ numărul, care reprezintă *măsura* segmentului OP, vom scrie

$$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{OR}. \tag{4}$$

18. Semnul Σ. Dacă $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ reprezintă n numere diferite, vom zice că unul din aceste numere e de forma a_r, unde r poate fi oricare dintre numerele $1, 2, \ldots, n$.

In acest caz, suma acestor numere

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

se poate scrie pe scurt cu simbolul

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \quad \text{sau} \quad \sum a_r \quad (r=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

care se citește *sumă de* a_r *dela* $r=1$ *la* $r=n$ sau *pentru* $r=1,2,\ldots,n$.

II. — SCĂDEREA.

19. Scăderea este operația prin care putem scoate dintr'un număr a atâtea unități câte sunt într'un alt număr b.

Când scăderea e posibilă, numărul a se descompune în două părți:

1°. unitățile scoase (b),

2°. unitățile rămase (c)

și trebuie să avem $b+c=a$.

De aceea se mai zice că: *a scădea pe b din a însemnează a găsi un număr c, care adunat cu b să ne dea pe a*. Scăderea este operația inversă adunării. Semnul scăderii este — (*minus*) și se scrie

$$(6) \qquad a - b = c \quad \text{dacă} \quad b + c = a.$$

Expresia $a - b$ se numește *diferență neefectuată*; a este *descăzutul*, b *scăzătorul*, c *restul* sau *diferența efectuată*.

Din definiția scăderii rezultă că, dacă $a - b = c$, avem și $a - c = b$.

Dacă însemnăm cu x numărul *care se caută* (necunoscut), următoarele două cazuri se prezintă ca probleme inverse ale adunării:

$$1^0. \quad x + b = a$$

sau care e numărul, la care trebue să adunăm b unități, ca să căpătăm pe a?

$$2^0. \quad b + x = a$$

sau la numărul b, câte unități trebue să adunăm, ca să căpătăm pe a?

Din punct de vedere al calculului practic, fiindcă adunarea este o operație *comutativă* [15], aceste două probleme se reduc una la alta.

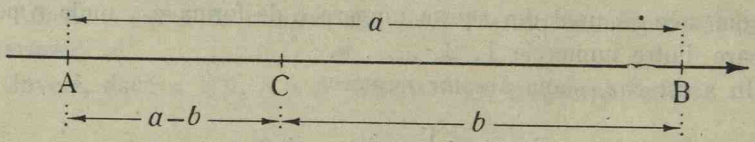


Fig. 4.

OBSERVARE. Dacă $n > m$ diferența $n - m$ se poate calculà căutând în șirul natural al numerelor întregi

$$(I) \qquad 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$$

care este al m-lea număr dela *stânga* lui n.

Primele m numere dela stânga lui n sunt:

$$n-1, \; n-2, \; n-3, \; \ldots, \; n-m.$$

Dacă $n < m$, nu există *în șirul I* niciun număr, care să fie al m-lea la stânga lui n, deci diferența $n - m$ nu se poate efectuà.

20. Diferența $a - b$ se poate calculà și pe o dreaptă divizată (*fig.* 4) astfel: dela un punct A, spre dreapta, luăm a diviziuni până în punctul B; din B, spre stânga, luăm b diviziuni până în punctul C; dela A la C avem $a - b$ diviziuni.

Putem dar scrie

$$\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}.$$

Segmentul AC se numeşte *diferenţa* segmentelor AB şi CB.

21. Şiruri de operaţii. Când scriem un şir de mai multe operaţii de treapta întâia

$$27 - 5 + 8 - 6 + 2,$$

convenim ca aceste operaţii să se facă în ordinea în care sunt scrise:

$$27 - 5 = 22,\ 22 + 8 = 30,\ 30 - 6 = 24,\ 24 + 2 = 26.$$

Dacă vrem ca şirul de operaţii să se efectueze în altă ordine, convenim *să punem în paranteză* operaţiile, care trebue să se facă înaintea celorlalte. Astfel:

$$27 - (5 + 8) - 6 + 2 = 27 - 13 - 6 + 2 = 10,$$

$$27 - (5 + 8 - 6 + 2) = 27 - 9 = 18,$$

fiindcă în prima operaţie $5 + 8 = 13$ şi în a doua $5 + 8 - 6 + 2 = 9$.

22. Legile scăderii. Din definiţia scăderii rezultă că:

1°. Avem

$$(a - b) + b = a \quad \text{şi} \quad (a + b) - b = a,$$

ceeace se mai poate scrie

$$(8) \qquad a - b + b = a \quad \text{şi} \quad a + b - b = a.$$

Prin urmare, *operaţiile consecutive de adunare şi scădere ale aceluiaş număr se distrug una pe alta.*

In general avem

$$a + b + c + d - c = a + b + d + c - c = a + b + d.$$

2°. Ca să scădem o *sumă* dintr'un număr, scădem din număr, succesiv, *toate părţile sumei.* Adică:

$$(9) \qquad a - (b + c + d) = a - b - c - d.$$

3°. Dacă *mărim* (sau *micşorăm*) *descăzutul* cu un număr, *restul se măreşte* (sau se *micşorează*) cu acel număr. Adică:

$$(10)\qquad \begin{aligned}(a+m)-b&=a-b+m\\(a-m)-b&=a-b-m.\end{aligned}$$

4°. Dacă *mărim* (sau *micșorăm*) *scăzătorul* cu un număr, *restul se micșorează* (sau se *mărește*) cu acel număr. Adică

$$(11)\qquad \begin{aligned}a-(b+m)&=a-b-m\\a-(b-m)&=a-b+m.\end{aligned}$$

5°. Dacă *mărim* (sau *micșorăm*) *și descăzutul și scăzătorul* cu un acelaș număr, *restul nu se schimbă*. Adică

$$(12)\qquad (a+m)-(b+m)=a-b,$$

$$(13)\qquad (a-m)-(b-m)=a-b.$$

III. — NUMERE ALGEBRICE.

23. Am văzut că, dacă $a<b$, diferența $a-b$ nu se mai poate calculà cu numerele din șirul *I*.

La fiecare operație inversă vom găsì cazuri de *imposibilitate*. Aceasta provine din cauză că numerele date de colecțiuni (numerele naturale) nu sunt decât o parte din totalitatea numerelor, care rezultă din măsurarea mărimilor sau din operațiile fundamentale.

Dar mai provine și din altă cauză: numerele, pe lângă înțelesul lor *cantitativ*, mai au și un înțeles *calitativ* (un *sens*), de care nu se ține seama în șirul numerelor *I*.

Numeroase exemple din viața practică ne obligă să considerăm *două feluri de numere*. Astfel: când spunem că un loc A, de pe o șosea, este la 2 *km* de B, locul A nu e determinat; sunt *două* locuri pe șosea la 2 *km* de B, unul *într'un sens*, altul *în celălalt sens*.

Tot astfel: temperatura unui corp față de un altul poate fi mai mare sau mai mică; altitudinea unui loc față de nivelul mării poate fi deasupra sau dedesubtul acestui nivel; timpul se poate socotì în trecut și în viitor dela o dată anumită; o sumă de bani poate fi cheltuită sau încasată, etc.

De aceea, și în vorbire și în scris, trebue să putem arătà nu numai *numărul de unități* dintr'o colecție, ci și *sensul* în care sunt socotite aceste unități.

Un număr, care ne exprimă și numărul și sensul unităților lui, se numește *număr relativ* sau *algebric*.

24. Axă. Segment dirijat. Cele două sensuri de pe o dreaptă Δ (*fig.* 5) se numesc: unul (de exemplu cel arătat de săgeata de pe axă) *sens pozitiv*; celălalt *sens negativ*.

O dreaptă, pe care s'a determinat sensul pozitiv, este o *dreaptă dirijată* sau o *axă*.

Un segment AB poate fi parcurs și el în două sensuri: dela A spre B sau dela B spre A. Când atribuim unui segment un *sens* determinat, zicem că segmentul e *dirijat*. In acest caz scriem $\overrightarrow{AB}$, ca să arătăm în scris și *mărimea* și *sensul* segmentului.

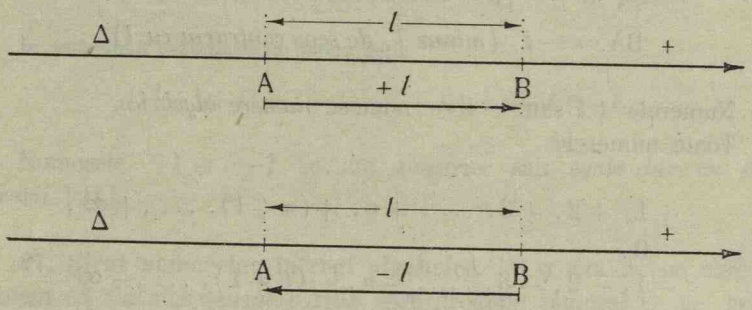


Fig. 5.

Un segment dirijat $\overrightarrow{AB}$ (*fig.* 5) are:

1°. o *origine*: punctul A,

2°. o *extremitate*: punctul B,

3°. o *lungime*: $l = AB$,

4°. un *sens*: dela A spre B.

Segmentul $\overrightarrow{BA}$ are originea în B, extremitatea în A, lungimea tot l, dar sensul dela B spre A. Segmentele $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BA}$ se zic *simetrice* sau *egale dar de sens contrariu*.

25. Valoare algebrică. Dacă segmentul $\overrightarrow{AB}$ e așezat pe o axă Δ (sau e *paralel* cu această axă), zicem că acest segment e *pozitiv*, când sensul lui coincide cu sensul pozitiv al axei; în cazul contrariu segmentul e *negativ*.

O măsură, care exprimă și *lungimea* și *sensul* unui segment pe o axă, se numește *măsură algebrică*.

Măsura *algebrică* a segmentului $\overrightarrow{AB}$ se înseamnă cu $\overline{AB}$ (cu o linie deasupra); lungimea sau măsura *aritmetică* a acestui segment se înseamnă cu AB (fără linie). Prin urmare:

$$AB = BA, \quad \overline{AB} \neq \overline{BA}.$$

26. Numere algebrice. Pentru a puteà exprimà măsura algebrică a unui segment cu un număr, va trebuì să introducem în calcule și numere de două feluri: *pozitive* și *negative*, corespunzătoare celor două sensuri de pe axă. Pentru aceasta, facem convenția următoare:

Dacă l e un *număr aritmetic* (de exemplu lungimea segmentului AB sau BA) convenim să scriem pentru segmentul *pozitiv* $\overline{AB}$ (*fig.* 5)

$$\overline{AB} = +l = l \quad (\textit{plus } l, \textit{ de acelaș sens cu } l \text{ sau cu axa})$$

și pentru segmentul *negativ* $\overline{BA}$:

$$\overline{BA} = -l \quad (\textit{minus } l, \textit{ de sens contrariu cu } l).$$

Numerele $+l$ sau $-l$ se numesc *numere algebrice.*

Toate numerele

$$+1, +2, +3, \ldots, +n, +(n+1), \ldots, +\infty,$$
$$0,$$
$$-1, -2, -3, \ldots, -n, -(n+1), \ldots, -\infty$$

formează *mulțimea numerelor întregi algebrice* (1). Numerele din șirul de sus se numesc *pozitive*, cele din șirul de jos *negative.*

Fiecare număr algebric, afară de 0 (zero), are

1°. un *semn algebric*: $+$ sau $-$,

2°. o *valoare absolută*: numărul *fără semn.*

Semnul algebric se scrie înaintea valorii absolute. Când înaintea unui număr nu e scris niciun semn, se subînțelege semnul $+$.

Când nu vrem să precizăm nici valoarea, nici semnul unui număr algebric, îl putem reprezentà printr'o *literă.* De exemplu n poate fi un număr algebric (pozitiv sau negativ). In acest caz valoarea lui absolută se înseamnă cu $|n|$ sau N.

Observare. 1°. In notațiile algebrice semnul $+$ însemnează *de acelaș sens* și semnul $-$ *de sens contrariu.* De aceea nu trebue confundate semnele algebrice $+$ și $-$ cu semnele de *adunare* și *scădere.* Când această confuzie ar puteà aveà loc, se scrie numărul cu semnul lui algebric într'o paranteză: $(+3)$, (-2).

2°. Dacă l e un număr *aritmetic*, $+l$ e un număr algebric *pozitiv*, $-l$ e un număr algebric *negativ.*

---

(1) *Mulțime* = ensemble, aggregato, Menge.

3°. Dacă l e un număr *algebric*, $+l$ nu e întotdeauna pozitiv, nici $-l$ negativ.

Dacă L e valoarea absolută a lui l, pentru $l=+L$ avem

$$+l=+(+L)\ [\text{de acelaș sens cu } +L]=+L \quad \textit{pozitiv},$$
$$-l=-(+L)\ [\text{de sens contrariu cu } +L]=-L \quad \textit{negativ};$$

pentru $l=-L$ avem

$$+l=+(-L)\ [\text{de acelaș sens cu } -L]=-L \quad \textit{negativ},$$
$$-l=-(-L)\ [\text{de sens contrariu cu } -L]=+L \quad \textit{pozitiv}.$$

In amândouă cazurile însă putem scrie

$$|l|=|+l|=|-l|=|+L|=|-L|=L.$$

Numerele $+l$ și $-l$ se zic *simetrice* sau *egale dar cu semne contrarii* [24].

27. Șirul numerelor întregi algebrice. Pe o axă Δ (pe care presupunem că s'a ales *sensul pozitiv* spre dreapta, punctul O ca *origine* și lungimea OA ca *unitate*) se pot însemnă toate punctele, care sunt la distanțele 1, 2, 3, ..., n, ... dela O *spre dreapta* și dela O *spre stânga*. Obținem astfel o dreaptă divizată până la infinit în amândouă sensurile.

133909

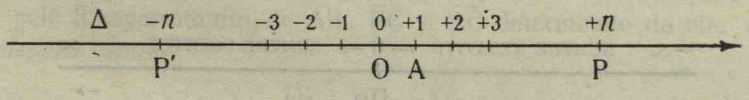


Fig. 6.

Scriind, în dreptul fiecărui punct de diviziune P, valoarea *algebrică* a segmentului $\overline{OP}$, vedem că la fiecare număr întreg algebric corespunde câte un punct de diviziune pe axa Δ și reciproc (*fig.* 6). Numărul, care corespunde punctului P se numește *abscisa* acestui punct.

Dela punctul O spre dreapta avem numerele *pozitive*; dela punctul O spre stânga avem numerele *negative*.

Toate aceste numere, așezate în ordinea în care sunt scrise pe axa Δ (*fig.* 6)

$$(I)\quad -\infty, \ldots, -(n+1), -n, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +n, +(n+1), \ldots, +\infty$$

formează *șirul numerelor întregi algebrice*.

Relațiile de *mai mare* și *mai mic*, [6], se extind la șirul I în modul următor. Insemnând cu λ un număr algebric oricare, zicem că:

Orice număr așezat în șirul I *la stânga* lui λ e *mai mic* decât λ și orice număr așezat în șirul I *la dreapta* lui λ e *mai mare* decât λ.

De acì rezultă că:

1°. Dintre două numere pozitive diferite, acela este mai mare, care are valoarea absolută mai mare.

2°. Dintre două numere negative diferite, acela este mai mare, care are valoarea absolută mai mică.

3°. Orice număr negativ e mai mic decât orice număr pozitiv.

4°. Zero este mai mic decât orice număr pozitiv și mai mare decât orice număr negativ.

De aceea se scrie:

$$\lambda > 0 \text{ pentru } \lambda \textit{ pozitiv}$$

$$\text{și } \lambda < 0 \text{ pentru } \lambda \textit{ negativ.}$$

OBSERVARE. In șirul I nu există niciun număr întreg *mai mare decât toate* [4]; de aceea se zice că numerele întregi algebrice cresc către $+\infty$ (plus infinit). In șirul I nu există niciun număr *mai mic decât toate*; de aceea se zice că numerele întregi algebrice descresc către $-\infty$ (minus infinit).

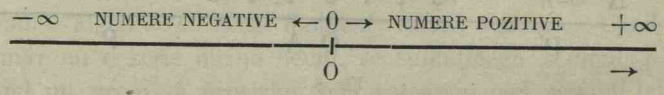


Fig. 7.

E evident că pentru a exprimà măsura oricărei mărimi, care poate fi socotită în *două sensuri*, se pot întrebuința numere algebrice. Numerele pozitive vor exprimà mărimile socotite într'un sens, iar numerele negative mărimile de sens contrariu.

EXEMPLE: Temperatura de $+30^0$ (de-asupra lui 0^0) și de -30^0 (sub 0^0); anul $+1924$ (după Chr.) și -1924 (înainte de Chr.); suma de $+4500$ lei (încasată) și de -4500 lei (cheltuită), etc.

28. Suma a două segmente. A adunà două segmente dirijate $\overrightarrow{S_1}$ și $\overrightarrow{S_2}$ (pe o aceeaș axă Δ sau paralele cu aceeaș axă) însemnează a le așezà pe această axă unul după altul, *în sensurile lor*, așà ca originea segmentului al doilea să coincidă cu extremitatea segmentului întâi (*fig.* 8 și 9).

Segmentul $\overrightarrow{R}$, care are ca origine originea segmentului întâi și ca extremitate extremitatea segmentului al doilea, se numește *suma algebrică* sau *rezultanta* acestor două segmente și se scrie

$$\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{R}.$$

Astfel în figura 8 avem

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

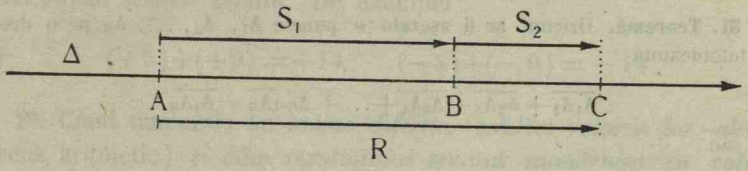


Fig. 8.

iar în figura 9

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

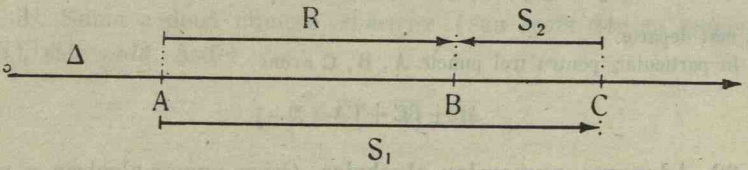


Fig. 9.

29. Teoremă. *Oricum ar fi așezate* 3 *puncte* A, B, C *pe o axă,* între cele 3 segmente dirijate $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ și $\overline{AC}$ determinate de ele, *avem întotdeauna relația*

(14) $$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

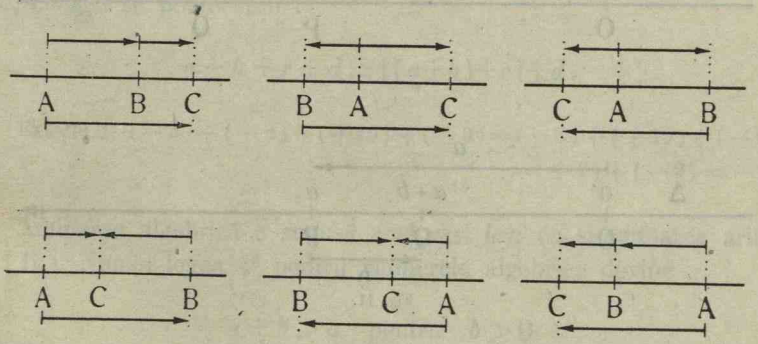


Fig. 10.

Egalitatea (14) se verifică ușor, în toate cazurile posibile, pe figura 10.

30. Suma a mai multor segmente. A adunà mai multe segmente dirijate $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (așezate pe o aceeaș axă sau paralele cu aceeaș axă) însemnează a le așeză pe această axă unele după altele, *în sensurile lor*, așà ca originea fiecărui segment să coincidă cu extremitatea segmentului precedent.

Segmentul R, cu originea în originea primului segment S_1 și cu extremitatea în extremitatea ultimului segment S_n, se numește *suma algebrică* sau *rezultanta* segmentelor date și se scrie

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = R.$$

Această sumă e comutativă și asociativă [15].

31. Teoremă. Oricum ar fi așezate n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pe o dreaptă, avem întotdeauna

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n} \tag{15}$$

sau

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0. \tag{16}$$

In adevăr, după **29**, avem:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_3}, \quad \overline{A_1A_3} + \overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_4}, \quad \ldots$$

și așà mai departe.

In particular, pentru trei puncte A, B, C avem

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0. \tag{17}$$

32. Adunarea numerelor algebrice. Orice număr algebric a poate fi reprezentat pe o axă printr'un *segment dirijat* S. Originea acestui segment e arbitrară; măsura lui algebrică e a [25].

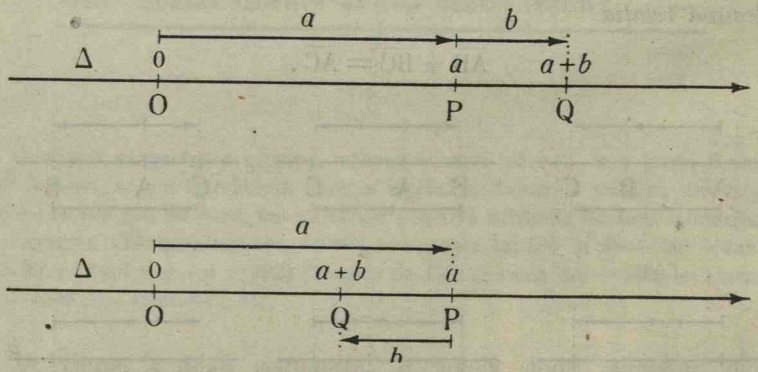


Fig. 11.

A adunà două sau mai multe numere algebrice a, b, c, însemnează a căutà măsura algebrică S a rezultantei *segmentelor corespunzătoare* acestor numere.

Şi în acest caz scriem

$$a+b+c=s,$$

unde + este semnul adunării.

Astfel, în figura 11, dacă $OP=a$, $PQ=b$, avem $OQ=a+b$.

De aci rezultă *regula adunării* a două numere algebrice:

1°. Când numerele au *aceleaşi semne, adunăm valorile lor absolute şi dăm sumei semnul comun.* De exemplu

$$(18)\qquad (+5)+(+9)=+14,\quad (-5)+(-9)=-14.$$

2°. Când numerele au *semne diferite, scădem valorile lor absolute* (în sens aritmetic) *şi dăm rezultatului semnul numărului cu valoarea absolută cea mai mare.* De exemplu

$$(19)\qquad (-5)+(+9)=+4,\quad (+5)+(-9)=-4.$$

3°. Suma a două numere *simetrice* (sau *egale dar cu semne contrarii*), este *nulă*. Astfel

$$(20)\qquad (+3)+(-3)=0.$$

4°. Dacă unul din numere e *nul*, suma este celălalt număr. Adică

$$(21)\qquad (+3)+0=+3,\quad 0+(-5)=-5.$$

Ca să adunăm *mai multe numere* algebrice a, b, c, d, adunăm întâiul număr cu al doilea, suma obţinută cu al treilea şi aşa mai departe, ceeace se poate scrie:

$$a+b+c+d=[(a+b)+c]+d.$$

EXEMPLU: $(-5)+(+2)+(+10)+(-9)=(-3)+(+10)+(-9)$
$=(+7)+(-9)=-2.$

Adunarea algebrică e supusă aceloraşi *legi* ca şi adunarea aritmetică [**15**]. Numai legea 4° pentru numerele algebrice devine

$$(22)\qquad \begin{aligned} &a+b>a \quad \text{pentru} \quad b>0\\ \text{şi}\quad &a+b<a \quad \text{pentru} \quad b<0. \end{aligned}$$

EXEMPLU: $(-8)+(+6)=-2>-8$; $(-8)+(-6)=-14<-8$.

33. Sumă algebrică. Într'o sumă de numere, cu *semnele algebrice scrise*, se suprimă de obicei toate semnele de adunare (+) și se scriu numai numerele unele după altele cu semnele lor algebrice.

Astfel în loc de

$$(+7)+(-5)+(+3)+(-2)+(-4)$$

se scrie numai

$$7-5+3-2-4.$$

O expresiune de această formă se numește o *sumă algebrică* și se efectuează în modul următor:

1°. *Dacă toate numerele au aceleași semne, se adună valorile lor absolute și se dă rezultatului semnul comun.* Astfel

$$+2+4+3=+9, \qquad -2-4-3=-9.$$

2°. *Dacă numerele au semne diferite, adunăm de o parte toate numerele pozitive, de altă parte toate numerele negative* și reducem astfel suma dată la *suma a două numere cu semne diferite*, care se calculează după regula **32**, 2. Astfel,

$$5-7+8-3-1=5+8-7-3-1$$

și fiindcă $5+8=13$, $-7-3-1=-11$, avem

$$5-7+8-3-1=13-11=2.$$

Regula 1° rezultă din **32**, 1.

Regula 2° rezultă din aplicarea succesivă a *legilor scăderii* **22**, 3 și 4. Astfel pentru $5-7+8-3-1$, putem scrie

$$5-7+8=(5+8)-7=13-7 \qquad [\text{după } \mathbf{22}, 3],$$
$$5-7+8-3=13-7-3=13-(7+3)=13-10 \qquad [\text{după } \mathbf{22}, 4],$$
$$5-7+8-3-1=13-10-1=13-(10+1)=13-11=2.$$

Dacă avem în sumă *doi termeni egali dar cu semne contrarii*, îi suprimăm. Astfel: $5-\mathbf{3}-7+\mathbf{3}=5-7=-2$, fiindcă $-3+3=0$.

34. Adunarea sumelor algebrice. Ca să *adunăm* două sume algebrice, *scriem, după suma întâia, toți termenii sumei a doua cu semnele lor.* Astfel:

$$(I) \qquad (a-b+c)+(d-e+f-g)=a-b+c-d-e+f-g.$$

EXEMPLU. $(3-5)+(-2+6-1)=3-5-2+6-1=9-8=1.$

35. Scăderea numerelor algebrice. Dacă a și b sunt două numere algebrice, zicem că

$$(23) \qquad a-b=d \quad \text{dacă} \quad b+d=a.$$

Insemnând cu b' *simetricul* lui b, deducem din ultima egalitate

$$b+d+b'=a+b'$$

și cum $b+b'=0$, avem $d=a+b'$ sau

$$(24) \qquad a-b=a+b'.$$

REGULĂ: Ca să *scădem* două numere algebrice, *adunăm descăzutul cu simetricul scăzătorului.*

EXEMPLU. $7-(+3)=7+(-3)=7-3=4,$
$(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-7+3=-4.$

OBSERVARE. Cu această regulă diferența $a-b$, a două numere aritmetice, se poate calculă în toate cazurile:

dacă $a>b$, avem $a-b=+(a-b)>0$ (diferență *pozitivă*),
dacă $a=b$, avem $a-b=b-a=0$ (diferență *nulă*),
dacă $a<b$, avem $a-b=-(b-a)<0$ (diferență *negativă*).

Diferențele $a-b$ și $b-a$ se zic *opuse*; ele reprezintă două numere *simetrice* sau *egale dar cu semne contrarii*. Avem dar, pentru $a \neq b$,

$$(25) \qquad a-b \neq b-a \quad \text{și} \quad |a-b|=|b-a|.$$

Numai pentru $a=b$ avem $a-b=b-a$.

EXEMPLU: $7-5=2, \quad 5-5=0, \quad 2-5=-3.$

36. Diferența a două segmente. Să însemnăm cu S_1 și S_2 două segmente dirijate pe o axă și cu S'_2 *simetricul* segmentului S_2.

După definiția generală a scăderii, *diferența* S_1-S_2 *este un segment, care adunat cu* S_2 *ne dă pe* S_1.

Observăm și în acest caz, că pentru a scădeà segmentul S_2 din S_1 e deajuns să adunăm pe S_1 cu simetricul lui S_2, adică

$$(26) \qquad S_1-S_2=S_1+S'_2.$$

In adevăr, după regula adunării segmentelor dirijate [28], avem

$$S_1+S'_2+S_2=S_1.$$

Astfel, pentru segmentele $\overline{AB}=a$, $\overline{CB}=b$ (*fig.* 12) găsim

$$\overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

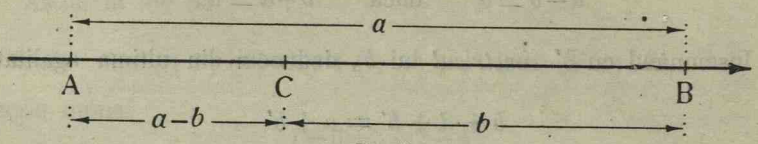


Fig. 12.

37. Valoarea unui segment. Dacă l e valoarea algebrică a unui segment $\overrightarrow{AB}$ pe o axă Δ (*fig.* 13) și dacă a și b sunt *abscisele* punctelor extreme A și B [27], avem în toate cazurile

$$l=b-a. \tag{27}$$

Regulă. *Valoarea algebrică a unui segment pe o axă este egală cu diferența dintre abscisa extremității și abscisa originii lui.*

In adevăr ,oricare ar fi pozițiile punctelor O, A, B pe axa Δ, avem

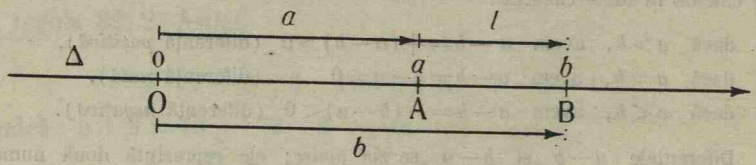


Fig. 13.

întotdeauna [29]: $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$, deci $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ sau, cu numerele algebrice corespunzătoare, $l=b-a$.

Exemplu: Dacă punctele A și B au respectiv abscisele $+5$ și -11, valoarea algebrică a segmentului $\overline{AB}$ este $(-11)-(+5)=-16$.

Observare. Dintre trei puncte A, B, C așezate pe o aceeași axă, cu abscisele a, b, c respectiv, punctele A și C se zic *simetrice* față de B, dacă punctul B e mijlocul segmentului $\overline{AC}$. In acest caz avem, în mărime și în semn,

$$\overline{AB}=\overline{BC} \quad \text{sau} \quad b-a=c-b.$$

38. Scăderea unei sume algebrice. *Ca să scădem o sumă algebrică, scriem după descăzut suma scăzătoare cu toate semnele schimbate.* Astfel:

$$(a-b+c)-(-d-e+f-g)=a-b+c+d+e-f+g. \tag{II}$$

In adevăr, restul adunat cu scăzătorul ne dă pe descăzut.

Exemplu: $(3-5)-(-2+6-1)=3-5+2-6+1=6-11=-5$.

39. Sumă algebrică în paranteză. Dacă însemnăm cu S o sumă algebrică și cu S' suma S *cu toate semnele schimbate*, din egalitățile (I) și (II) rezultă că

1°. *Putem suprimă o paranteză*, care închide suma S, *și semnul dinaintea parantezei*, aplicând regula următoare:

$$+(S)=S, \quad -(S)=S'.$$

De exemplu, dacă $S=5-3+7$, avem $S'=-5+3-7$ și putem scrie

$$+(5-3+7)=5-3+7; \quad -(5-3+7)=-5+3-7.$$

2°. *Putem închide suma S într'o paranteză* punând înaintea parantezei semnul $+$ sau $-$, după regula următoare:

$$S=+(S), \quad S=-(S').$$

De exemplu, pentru $S=5-3+7$, putem scrie

$$5-3+7=+(5-3+7); \quad 5-3+7=-(-5+3-7).$$

Prin urmare avem:

$$a+(b+c)=a+b+c, \quad a+(b-c)=a+b-c,$$
$$a-(b+c)=a-b-c, \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

40. Egalități și neegalități algebrice. Adunarea și scăderea lor.

1°. Dacă a și b sunt două numere algebrice

$$(28) \qquad \begin{array}{lll} \text{din} & b>a & \text{rezultă} \quad b-a>0, \\ \text{„} & b=a & \text{„} \quad b-a=0, \\ \text{„} & b<a & \text{„} \quad b-a<0, \end{array}$$

și *reciproc*.

Aceste relații au fost stabilite pentru a și b pozitive [**35**].

Dacă a și b au semne diferite, pentru $b>a$ trebue să avem $a=-A$ $b=+B$; deci $b-a=B+A>0$.

Dacă a și b sunt negative, $a=-A$, $b=-B$, pentru $b>a$ trebue să avem $B<A$; deci $b-a=-B+A=A-B>0$.

In acelaș fel se stabilesc relațiile (28) și în celelalte cazuri.

2°. Din $a=b$ rezultă, oricare ar fi c,

$$a+c=b+c, \quad a-c=b-c, \quad c-a=c-b.$$

In general, din $a=b$, $c=d$ rezultă

$$a+c=b+d, \quad a-c=b-d.$$

3°. Dacă schimbăm semnele ambilor membri ai unei neegalități, neegalitatea își *schimbă sensul*. Adică

(29) din $a > b$ rezultă $-a < -b$.

In adevăr, prima neegalitate ne dă $a - b > 0$, care se mai poate scrie $(-b) - (-a) > 0$; deci după **40**, 1°, $-b > -a$ sau $-a < -b$.

4°. Dacă $a > b$, avem oricare ar fi c,

$$a + c > b + c, \quad a - c > b - c \quad \text{dar} \quad c - a < c - b.$$

In adevăr, din $a > b$ deducem $a - b > 0$ și

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0,$$
$$(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b > 0.$$
$$(c - a) - (c - b) = c - a - c + b = b - a < 0.$$

In general, din $a > b$, $c = d$ rezultă

$$a + c > b + d, \quad a - c > b - d \quad \text{dar} \quad c - a < d - b.$$

5°. Dacă $a > b$, $c > d$, avem $a + c > b + d$.

Din $a > b$ deducem $a + c > b + c$ și din $c > d$ deducem $b + c > b + d$; prin urmare

$$a + c > b + c > b + d.$$

In general, când ni se dau mai multe neegalități, *toate de același sens*, dacă le *adunăm* membru cu membru, căpătăm o neegalitate *de același sens* cu cele date. Astfel din

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2, \quad \ldots, \quad a_n < b_n$$

rezultă

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

sau

$$\Sigma a_p < \Sigma b_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

6°. Din $a > b$, $c < d$ rezultă $a - c > b - d$.

In adevăr, din prima neegalitate deducem $a - c > b - c$ și din a doua $b - c > b - d$.

De asemenea din $a < b$, $c > d$ rezultă $a - c < b - d$.

Prin urmare: dacă *scădem* membru cu membru două neegalități *de sens contrariu* (cea de a doua din cea dintâi), căpătăm o neegalitate *de același sens cu cea dintâi*.

7°. Din

(30) $$a+b=c+d,$$

scăzând pe b sau pe c din ambii membri ai egalității, deducem

$$a+b-b=c+d-b \quad \text{sau} \quad a=c+d-b,$$
$$a+b-c=c+d-c \quad \text{sau} \quad a+b-c=d.$$

In acelaș fel, din

(31) $$a+b>c+d,$$

deducem

$$a>c+d-b \quad \text{sau} \quad a+b-c>d.$$

Prin urmare: într'o egalitate sau neegalitate algebrică *putem trece un termen dintr'un membru în celălalt, dacă schimbăm semnul acestui termen.*

EXEMPLU. Din $5-7<-3+8$ rezultă

$$5<-3+8+7 \quad \text{sau} \quad 5-7-8<-3.$$

In particular, dacă trecem toți termenii în membrul întâi, egalitatea (30) devine

$$a+b-c-d=0$$

și neegalitatea (31) devine

$$a+b-c-d>0.$$

REZUMAT.

Adunări:

Din				
$a>b$	$a=b$	$a>b$	$a>b$
rezultă	$c=d$	$c=d$	$c>d$
$-a<-b$	$a+c=b+d$	$a+c>b+d$	$a+c>b+d$

Scăderi:

$a>b$	$c=d$	$a>b$	$a<b$
$c=d$	$a>b$	$c<d$	$c>d$
$a-c>b-d$	$c-a<d-b$	$a-c>b-d$	$a-c<b-d.$

41. Valori absolute. 1°. Insemnând cu a și b două numere algebrice și cu $|a|=A$, $|b|=B$ valorile lor absolute, trebue să se observe că:

Dacă a și b sunt amândouă *pozitive*, avem $a=A$, $b=B$ și din $a<b$ sau $A<B$ rezultă $|a|<|b|$.

Dacă a și b sunt amândouă *negative*, avem $a = -A$, $b = -B$ și din $a < b$ sau $-A < -B$ rezultă $A > B$ sau $|a| > |b|$.

Dacă a și b sunt de semne *contrarii*, și dacă $a < b$, putem avea sau $A < B$, sau $A > B$, sau $A = B$, deci poate rezultă

$$\text{sau } |a| < |b|, \quad \text{sau } |a| > |b|, \quad \text{sau } |a| = |b|.$$

EXEMPLE:

Din	$+5 < +7$	$-8 < -3$	$-2 < +7$	$-9 < +3$	$-5 < +5$
rezultă	$5 < 7$	$8 > 3$	$2 < 7$	$9 > 3$	$5 = 5$
adică	$\|+5\| < \|+7\|$	$\|-8\| > \|-3\|$	$\|-2\| < \|+7\|$	$\|-9\| > \|+3\|$	$\|-5\| = \|+5\|$.

2°. Dacă λ e un număr pozitiv, *din* $|a| < \lambda$ *rezultă*

$$-\lambda < a < +\lambda.$$

In adevăr, dacă a e pozitiv, avem $a = A < \lambda$ și

$$-\lambda < a < +\lambda;$$

dacă a e negativ, avem $a = -A$ și din $\lambda > A$ rezultă $-\lambda < -A = a$, deci

$$-\lambda < a < +\lambda.$$

Reciproc, *din* $-\lambda < a < +\lambda$ *deducem* $|a| < \lambda$.

EXEMPLU. Din $|x| < 3$ rezultă $-3 < x < +3$.

3°. *Din* $|x - a| < \lambda$ *rezultă*

$$a - \lambda < x < a + \lambda.$$

In adevăr, dacă $|x - a| < \lambda$ avem după **41**, 2

$$-\lambda < x - a < +\lambda$$

și adunând a la fiecare membru al acestor neegalități, deducem

$$a - \lambda < x < a + \lambda.$$

EXEMPLE. Dacă $|x - 100| < 6$ avem

$$100 - 6 < x < 100 + 6 \quad \text{sau} \quad 94 < x < 106.$$

Dacă $|x - 6| < 100$ avem

$$6 - 100 < x < 6 + 100 \quad \text{sau} \quad -94 < x < 106.$$

4°. Teoremă. *Valoarea absolută a sumei a două numere algebrice este cel mult egală cu suma* (și *cel puțin egală cu diferența*) *valorilor absolute ale acestor numere.* Adică:

$$(III) \qquad |a| - |b| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

In adevăr, fie $|a| = A < |b| = B$. Dacă a și b au aceleași semne, avem

$$|a+b| = |A+B| = |-A-B| = A+B > A-B,$$

deci

$$|a| - |b| < |a+b| = |a| + |b|.$$

Dacă a și b au semne contrarii, avem

$$|a+b| = |A-B| = |-A+B| = A-B < A+B,$$

deci

$$|a| - |b| = |a+b| < |a| + |b|.$$

Observare. Fiindcă $a-b = a+(-b)$, dacă $|a| > |b|$, avem și pentru *diferența* $a-b$ neegalitățile

$$(32) \qquad |a| - |b| \leqq |a-b| \leqq |a| + |b|.$$

5°. Teoremă. *Valoarea absolută a sumei mai multor numere algebrice este cel mult egală cu suma valorilor absolute ale acestor numere.* Adică:

$$(33) \qquad |a+b+c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

In adevăr, $a+b+c$ se poate scrie $(a+b)+c$ și după teorema precedentă avem

$$|a+b+c| \leqq |a+b| + |c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

In același fel se arată că, dacă teorema e adevărată pentru o sumă cu $n-1$ termeni, e adevărată și pentru o sumă cu n termeni. Teorema e dar generală:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt* n *numere algebrice, avem*

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

sau

$$(IV) \qquad |\Sigma a_p| \leqq \Sigma |a_p| \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

EXERCIȚII.

1. Se dau trei numere a, b, c, și se cere să se scrie alte trei numere x, y, z, astfel formate:

1°. x să fie cu p unități mai mare decât a, y cu q unități mai mic decât b, z cu r unități mai mare decât c.

2°. x să fie cu b unități mai mic decât a, y cu x unități mai mare decât b, z cu x unități mai mic decât c.

R. 1°. $x=a+p$, $y=b-q$, $z=c+r$; 2°. $x=a-b$, $y=a$, $z=c-a+b$.

2. Pe un câmp avem trei puncte așezate în linie dreaptă și în ordinea A, B, C. Două persoane, plecând din punctul B, fac pe dreapta AC:

1° Prima 85 m spre A, 200 m înapoi și apoi iar 61 m spre A; a doua 36 m spre C, 196 m înapoi și apoi iar 114 m spre C.

2°. Prima a metri spre A, b metri înapoi și apoi iar c metri spre A; a doua d metri spre C, e metri înapoi și apoi iar f metri spre C.

La ce distanță se găsesc cele 2 persoane în fiecare caz și câți metri a parcurs fiecare?

R. 1°. Luând punctul B ca *origine* și dreapta AC ca *axă* cu sensul pozitiv dela A spre C, drumurile făcute înspre C vor fi pozitive, iar cele înspre A vor fi negative.

Prima persoană vine în punctul M cu abscisa $-85+200-61=+54$; a doua persoană vine în punctul N cu abscisa $+36-196+114=-46$. Distanța dintre ele este $NM=46+54=100$ m. Fiecare persoană a parcurs câte 346 m.

2°. Prima persoană vine în punctul M cu abscisa $-a+b-c$; a doua vine în punctul N cu abscisa $d-e+f$. Valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{MN}$ este

$$\overline{MN}=(d-e+f)-(-a+b-c)=d-e+f+a-b+c.$$

Distanța dintre cele două persoane este

$$MN=|d-e+f+a-b+c|.$$

Prima persoană a parcurs în total $a+b+c$ metri; iar a doua $d+e+f$ metri.

3. Luându-se aceleași date pentru amândouă cazurile, se întreabă, în fiecare caz, câți metri și în ce sens mai trebue să meargă a doua persoană, ca să ajungă într'o poziție *simetrică* cu cea dintâi *față de punctul* B.

R. Considerăm numai cazul 2°. Persoana întâia vine în punctul M cu abscisa $-a+b-c$. Simetricul punctului M față de B este punctul M' cu abscisa $a-b+c$. După datele problemei persoana a doua ajunge în punctul N cu abscisa $d-e+f$. Ca să vie în M', mai trebue să parcurgă segmentul *relativ*

$$\overline{NM'}=a-b+c-d+e-f.$$

4. Să se efectueze următoarele sume algebrice:

$$S=6405-3240-472+719+56-9007,$$
$$S_1=6405+3240+472+719+56+9007,$$
$$S_2=-6405-3240-472-719-56-9007;$$

$=S+S_1$, $b=S+S_2$, $c=S-S_1$, $d=S-S_2$, $e=S_1+S_2$, $f=S_1-S_2$.

Generalizare. Dacă P e suma tuturor termenilor *pozitivi* și $-N$ suma tuturor termenilor *negativi* ai unei sume algebrice S, avem $S = P - N$.

Cum se scriu în acest caz expresiunile S_1, S_2, a, b, c, d, e, f, cu ajutorul numerelor P și N? Ce relații există între ultimele 6 expresiuni algebrice?

R. În cazul numeric particular avem:

$$S = 7180 - 12719 = -5539, \quad S_1 = 7180 + 12719 = 19899, \quad S_2 = -19899,$$
$$a = +7180 + 7180 = 14360, \quad b = -12719 - 12719 = -25438,$$
$$c = -25438, \quad d = 14360, \quad e = 0, \quad f = 19899 + 19899 = 39798.$$

În cazul general avem:

$$S = P - N, \quad S_1 = P + N, \quad S_2 = -P - N, \quad a = 2P, \quad b = -2N,$$
$$c = -2N, \quad d = 2P, \quad e = 0, \quad f = 2P + 2N;$$
$$a = d, \quad b = c, \quad e = a - d = b - c, \quad f = a - b = d - c.$$

5. Să se calculeze numărul x, care satisface la una din egalitățile următoare:

1°. $x + 315 = 452$, 2°. $x - 28 = 201$, 3°. $156 - x = 83$,
4°. $242 + x = 194$, 5°. $x - 72 = -151$, 6°. $324 - x = 1259$,
7°. $x + a = b$, 8°. $x - m = n$, 9°. $p - x = q$.

R. Pentru ultima linie găsim

7°. $x = b - a$, 8°. $x = n + m$, 9°. $-x = q - p$ sau $x = p - q$.

6. Să se determine toate numerele x, care satisfac la una din neegalitățile următoare:

1°. $x + 315 < 452$, 2°. $x - 28 > 201$, 3°. $156 - x < 83$,
4°. $x + a < b$, 5°. $x - m > n$, 6°. $p - x < q$.

R. 4°. $x < b - a$, 5°. $x > m + n$, 6°. $-x < q - p$ sau $x > p - q$.

7. Dacă $|a - \alpha| < \lambda$, $|b - \beta| < \mu$, $|c - \gamma| < \nu$ să se arete că

$$|a - b + c - \alpha + \beta - \gamma| < \lambda + \mu + \nu.$$

R. Avem

$$a - b + c - \alpha + \beta - \gamma = (a - \alpha) - (b - \beta) + (c - \gamma)$$

și

$$|a - b + c - \alpha + \beta - \gamma| \leqq |a - \alpha| + |b - \beta| + |c - \gamma| < \lambda + \mu + \nu$$

8. Să se arete că din neegalitățile

$$|x_1 - a| < \lambda, \quad |x_2 - a| < \lambda$$

rezultă

$$|x_1 - x_2| < 2\lambda.$$

R. Avem

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - a + a - x_2| \leqq |x_1 - a| + |x_2 - a| < 2\lambda.$$

CAPITOLUL II.

OPERAȚIILE DE TREAPTA A DOUA.

I. — INMULȚIREA.

42. Inmulțirea cu un număr întreg este o adunare de numere *egale*. De exemplu în loc de suma

$$a + a + \ldots + a$$

unde a este luat de b ori, se scrie $a \times b$ sau $a \,.\, b$ sau $a\,b$ și se citește de b ori a sau a înmulțit cu b.

Dacă $a \times b = p$, a este *deînmulțitul*, b *înmulțitorul*, $a \times b$ este *produsul neefectuat*, p este produsul *efectuat*. Numerele a și b se numesc *factorii* produsului.

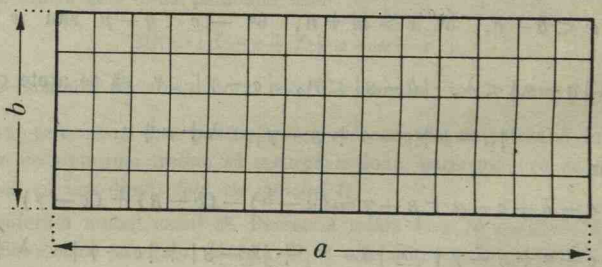


Fig. 14.

Semnul înmulțirii ($\times$ sau .) nu se scrie între două litere sau între un număr și o literă. Astfel:

$$5\,a = a + a + a + a + a \quad \text{(de 5 ori)},$$
$$m\,a = a + a + \ldots + a \quad \text{(de } m \text{ ori)}.$$

43. Produs grafic. Dacă un *dreptunghiu* are lungimea de a cm. și lățimea de b cm. (*fig.* 14), suprafața lui conține ab centimetri pătrați. Putem reprezentà dar, *în mod grafic*: produsul a două numere întregi prin suprafața unui dreptunghiu.

De exemplu, *tabla lui* PYTHAGORA (1), care ne dă toate produsele a două numere de câte o singură cifră, se poate construi pe o hârtie cadrilată, fără niciun calcul și fără nicio cifră, în modul următor:

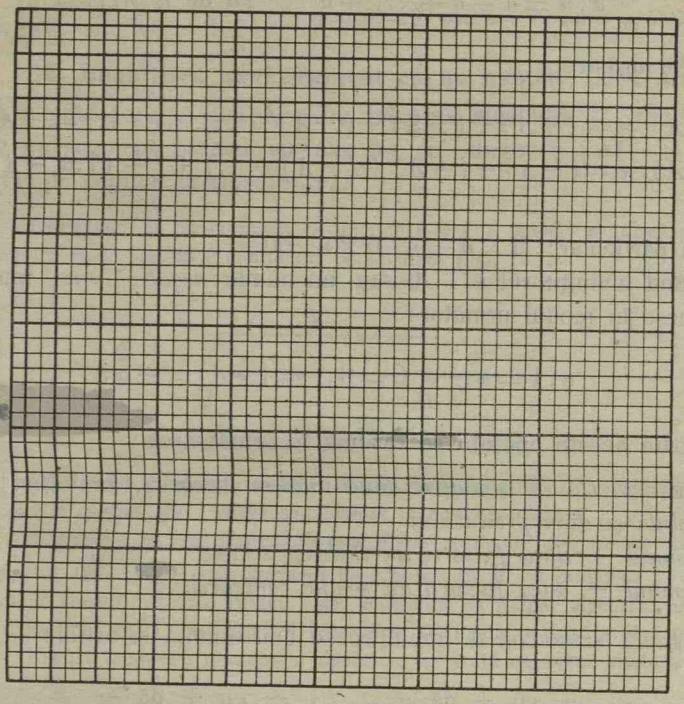


Fig. 15.

44. Multiplu. Dacă înmulțim un număr a rând pe rând cu fiecare număr întreg, formăm șirul de numere

$$(1) \qquad a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ ma,\ (m+1)a,\ \ldots$$

$2a$ este *dublul* lui a; $3a$ *triplul* lui a; în general ma se numește un *multiplu* al lui a. Șirul (1) este *șirul multiplilor* lui a.

Multiplii lui 2 se numesc numere *pătrechi* sau *cu soț*. Dacă n este un număr întreg,

$a = 2n$ însemnează a păreche,
$a = 2n+1$ „ a nepăreche.

Primele n numere întregi pătrechi sunt $2, 4, 6, \ldots, 2n$; primele n numere întregi nepătrechi sunt $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.

(1) PYTHAGORA, filosof grec, născut la Samos în secolul al VI-lea a. Chr.

45. Inmulțirea numerelor algebrice. Când înmulțitorul e un număr întreg și *pozitiv*, avem

$$a.n = a + a + \ldots + a \qquad (a \text{ de } n \text{ ori}).$$

Prin urmare

$$(+A).n = (+A) + (+A) + (+A) + \ldots + (+A) = +An.$$
$$(-A).n = (-A) + (-A) + (-A) + \ldots + (-A) = -An.$$
$$\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad 3 \qquad\quad\; n$$

In particular: $1 \times n = n$, $0 \times n = 0$.

Când înmulțitorul e 1, 0 sau un număr *negativ* $-n$, înmulțirile se definesc în modul următor:

$$(2) \qquad a.1 = a, \quad a.0 = 0, \quad a.(-n) = -an.$$

Toate aceste operații se rezumă în următoarea

REGULĂ. *Ca să înmulțim două numere algebrice, înmulțim valorile lor absolute și dăm produsului*
semnul + *dacă factorii au aceleași semne,*
semnul − *dacă factorii au semne contrarii.*

REGULA SEMNELOR la înmulțire se mai enunță și astfel:

+ cu + dă +	− cu + dă −
+ cu − dă −	− cu − dă +.

EXEMPLE: $(+3).(+5) = +15$, $(-2).(+8) = -16$,
$(+4).(-6) = -24$, $(-7).(-4) = +28$.

Se verifică ușor că oricare ar fi numerele algebrice a și b, avem

$$(3) \qquad \begin{aligned} (+a).(+b) &= +ab, & (-a).(+b) &= -ab. \\ (+a).(-b) &= -ab, & (-a).(-b) &= +ab. \end{aligned}$$

In particular

$$(-1).a = a.(-1) = -a.$$

Deci: *a înmulți un număr cu* -1 *înseamnă a-i schimba semnul* și reciproc.

Astfel: $(-1).3 = -3$, $(-1).(-5) = +5$, $-7 = (-1).7$.

OBSERVARE. Din formulele (2) și (3) rezultă că

$ab > 0$ înseamnează a și b cu *aceleaș semne*,
$ab < 0$ „ a și b cu *semne contrarii*,
$ab = 0$ „ sau $a = 0$, sau $b = 0$ sau $a = b = 0$.

46. Inmulțirea unui segment cu un număr. Dacă $\overrightarrow{AB}$ e un segment paralel cu o axă Δ și cu valoarea algebrică l, produsul $a \cdot \overrightarrow{AB}$ este un segment paralel cu axa Δ, cu lungimea $|al|$ și cu sensul arătat de semnul produsului al.

EXEMPLU. Să presupunem că un punct M (un *mobil*) se mișcă pe o axă Δ cu o mișcare *uniformă* de v centimetri pe secundă (*fig.* 16).

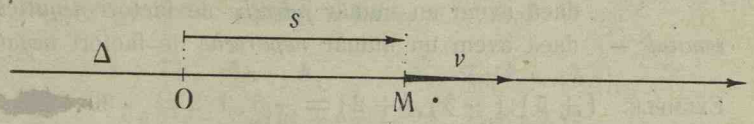


Fig. 16.

Dacă după t secunde mobilul M a parcurs distanța $\overline{OM}$, zicem că t este *timpul*, $\overline{OM} = s$ e *spațiul*, iar v *vitesa* sau *iuțeala* în această mișcare.

Mărimile s și v se reprezintă prin două segmente *dirijate* pe axa Δ; s este segmentul $\overrightarrow{OM}$, iar v e un segment cu originea în M, cu lungimea $|v|$ și cu sensul arătat de sensul mișcării. Timpul t se consideră ca număr algebric: *negativ* dacă M n'a ajuns încă în O; *nul* când M trece prin O și *pozitiv* dupăce M a trecut prin O.

Regula înmulțirii numerelor algebrice, ne arată că avem întotdeauna

$$s = vt, \tag{4}$$

care e *legea spațiilor* în mișcarea *uniformă*.

Egalitatea valorilor absolute $S = VT$ rezultă din însăși definiția mișcării uniforme (1). Mai rămâne să arătăm că s și vt au aceleași semne.

In adevăr, dacă $v > 0$, mobilul M se mișcă *spre dreapta* pe axa Δ și pentru $t < 0$ (adică înainte ca M să fi trecut prin O) M e la stânga lui O, deci $s < 0$ (și $vt < 0$); pentru $t > 0$ (adică dupăce M a trecut prin O) M e la dreapta lui O, deci $s > 0$ (și $vt > 0$).

Dacă $v < 0$, mobilul M se mișcă *spre stânga* și pentru $t < 0$ (adică înainte ca M să fi trecut prin O) M e la dreapta lui O, deci $s > 0$ (și $vt > 0$); pentru $t > 0$ (adică după ce M a trecut prin O) M e la stânga lui O, deci $s < 0$ (și $vt < 0$).

47. Produs de mai mulți factori. Când scriem $a \times b \times c \times d$ sau $a\,b\,c\,d$, înțelegem deocamdată să înmulțim pe a cu b, pe produsul obținut să-l înmulțim cu c și pe noul produs cu d, operații, care se arată în scris, cu ajutorul parantezelor, în modul următor:

$$a \times b \times c \times d = [(a \times b) \times c] \times d.$$

(1) Dacă într'o secundă se parcurge drumul V, în T secunde se va parcurge drumul $S = VT$.

Factorii a, b, c, d pot fi pozitivi, negativi sau nuli.

Produsul a n numere algebrice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se scrie pe scurt cu simbolul

$$\prod_{r=1}^{n} a_r \quad \text{sau} \quad \Pi a_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

care se citeşte *produs de* a_r *dela* $r = 1$ *la* $r = n$ sau pentru $r = 1, 2, \ldots, n$.

Din definiţia acestui produs rezultă următoarea

Regulă. *Ca să înmulţim mai multe numere algebrice, înmulţim valorile lor absolute şi dăm produsului*

semnul $+$ dacă avem *numai factori pozitivi* sau
dacă avem un număr *păreche* de factori *negativi*;
semnul $-$ dacă avem un număr *nepăreche* de factori *negativi*.

Exemple. $(+5).(-3).(+2) = -5.3.2 = -30$,
$(-6).(-2).(-8).(+4).(-7) = +6.2.8.4.7 = +8064$.

Observare. Egalitatea $\Pi a_r = 0$ însemnează că cel puţin unul dintre factorii a_r e *nul*.

48. Valori absolute. Din regula precedentă rezultă că, oricare ar fi numerele algebrice $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, avem

$$|a_1 a_2 a_3 \ldots a_n| = |a_1|.|a_2|.|a_3| \ldots |a_n|$$

sau

$$(\mathrm{V}) \qquad |\Pi a_r| = \Pi |a_r| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Teoremă. *Valoarea absolută a produsului unor numere algebrice este egală cu produsul valorilor absolute ale acestor numere.*

49. Factori egali. Produsul a n numere egale cu a se scrie a^n şi se citeşte *a la puterea n* sau *a la n*. Expresiunea a^n este o *putere*; a este *baza*, iar n *exponentul* puterei.

Astfel:

$$(5) \qquad \begin{aligned} a.a &= a^2 \quad (a \text{ la a doua}), \\ a.a.a &= a^3 \quad (a \text{ la a treia}), \\ \underset{1}{a}.\underset{2}{a}.\underset{3}{a}.\ldots\underset{n}{a} &= a^n \quad (a \text{ la a } n\text{-a}). \end{aligned}$$

Pentru exponentul 1 se scrie $a = a^1$.

OBSERVARE. 10^n este 1 urmat de n zeruri, adică unitatea întreagă de ordin $n+1$ [1]. Astfel în sistemul zecimal avem: *zecea* $= 10$, *suta* $= 10^2$, *miia* $= 10^3$, etc.

Un număr scris cu cifrele $abcdef$ e format din f unități simple, e zeci, d sute, c mii, b zeci de mii și a sute de mii. El conține dar, în total,

$$a.10^5+b.10^4+c.10^3+d.10^2+e.10+f$$

unități simple.

50. Expresie algebrică întreagă. Se numește *expresie algebrică* un șir de numere și de litere legate între ele prin semne de operații.

O expresie algebrică în care, între numerele reprezentate prin litere, nu avem de făcut alte operații decât *adunare*, *scădere* și *înmulțire* se numește expresie algebrică *întreagă*. Astfel

$$a+7b,\quad 2a-b,\quad -5a^3,\quad 2ab^2+abc,$$
$$5ab^3c-3a^4b^2+(a^2-2b)\,(a^3+b)^2,$$

sunt expresii algebrice întregi.

51. Legile înmulțirii. Din definiția înmulțirii rezultă următoarele *legi*:

1°. Inmulțirea e o operație întotdeauna *posibilă* și *univocă* (1)

2°. Inmulțirea e *comutativă*. Adică avem

$$ab=ba,\qquad abcd=dacb. \tag{6}$$

Valoarea unui produs de mai mulți factori nu se schimbă, dacă schimbăm ordinea factorilor.

3°. Inmulțirea unei *sume algebrice* cu un număr e o operație *distributivă*. Adică

$$m\,(a+b+c)=ma+mb+mc. \tag{7}$$

In adevăr, pentru m pozitiv, avem

$$m\,(a+b+c)=\underbrace{a+b+c}_{1}+\underbrace{a+b+c}_{2}+\ldots+\underbrace{a+b+c}_{m}$$
$$=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m}+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{m}+\underbrace{c+c+\ldots+c}_{1\cdot 2\ m}$$
$$=ma+mb+mc.$$

Pentru m negativ, $m=-M$, avem

$$m\,(a+b+c)=-M\,(a+b+c)=-Ma-Mb-Mc$$
$$=(-M)\,a+(-M)\,b+(-M)\,c=ma+mb+mc.$$

(1) Cu rezultat *unic*.

REGULĂ. *Ca să înmulțim o sumă algebrică cu un număr*, sau efectuăm suma și o înmulțim cu numărul, sau *înmulțim numărul cu fiecare parte a sumei și facem apoi suma algebrică a produselor obținute.*

EXEMPLU. $(8-5+7)\times 3 = 10\times 3 = 30$

sau $(8-5+7)\times 3 = \mathbf{24}-\mathbf{15}+\mathbf{21} = 30.$

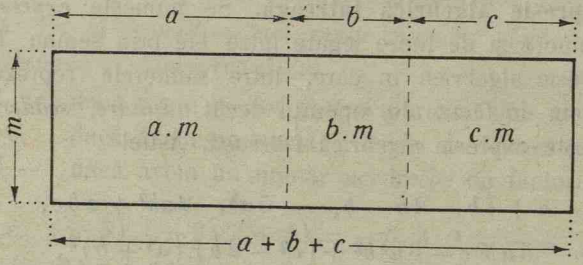


Fig. 17.

OBSERVARE. Dacă numerele a, b, c, m sunt *pozitive*, formula (7 ne dă

$$(8) \qquad (a+b+c).m = a.m + b.m + c.m$$

egalitate evidentă pe figura 17,

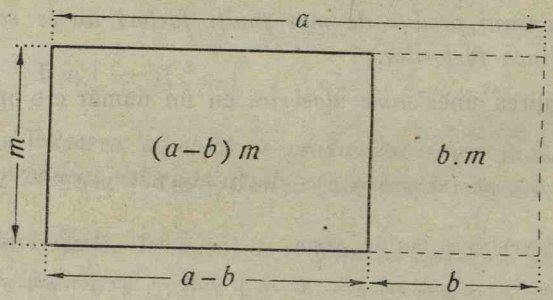


Fig. 18.

și

$$(9) \qquad (a-b).m = a.m - b.m$$

egalitate evidentă pe figura 18.

4º. Inmulțirea e *asociativă*. Adică

$$(10) \qquad abc = (ab).c = a.(bc).$$

In adevăr, după **45**, semnul acestor produse e acelaș, iar pentru valorile lor absolute putem scrie

$$(AB).C = (\underset{1}{B} + \underset{2}{B} + \ldots + \underset{A}{B}).C$$

$$= (\underset{1}{BC} + \underset{2}{BC} + \ldots + \underset{A}{BC}) = A.(BC).$$

EXEMPLU :

$$(-2).(+3).(-5) = [(-2).(+3)].(-5) = (-2).[(+3).(-5)]$$

adică

$$(-2).(+3).(-5) = (-6).(-5) = (-2).(-15) = +30.$$

52. Înmulțirea produselor. Ca să înmulțim un produs neefectuat cu un număr, *înmulțim numai pe unul din factorii lui cu acel număr.*

In adevăr, din legea 4^0 a înmulțirii rezultă că

$$(11) \qquad (abc)m = abcm = (am)bc = a(bm)c = ab(cm).$$

Inmulțirea unui *produs* cu un număr nu e o operație distributivă (1).

EXEMPLU: $[5 \times 3 \times (-7)] \times 4 = (-105) \times 4 = -420,$

sau $[5 \times 3 \times (-7)] \times 4 = \mathbf{20} \times 3 \times (-7) = -420,$

$= 5 \times \mathbf{12} \times (-7) = -420,$

$= 5 \times 3 \times (-\mathbf{28}) = -420$

Ca să înmulțim două sau mai multe produse neefectuate, *formăm un singur produs din toți factorii lor.*

Astfel:

$$(abc).(de) = abcde.$$

53. Factor comun. Egalitatea (7) se scrie, în general,

$$(VI) \qquad m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n,$$

oricare ar fi numerele *algebrice* m, a_1, a_2, ..., a_n, sau

$$m \Sigma a_p = \Sigma m a_p. \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Invers avem

$$ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Numărul m, care se găsește *ca factor* în fiecare termen din membrul întâi al ultimei egalități, se numește *factor comun.*

(1) Să se compare cu înmulțirea unei *sume* cu un număr, [**51**, 3].

Operația făcută în membrul al doilea se zice: *scoaterea lui m în factor comun.*

EXEMPLE: $3\times 7+8\times 7-5\times 7=7\times(3+8-5)=7\times 6=42.$

$3a+5a-9a=(3+5-9)a=-a, \qquad 2ab-7abc=ab(2-7c).$

54. Inmulțirea sumelor algebrice. Ca să efectuăm produsul

$$(a+b).(c+d+e),$$

considerăm pe $(a+b)$ ca un singur număr, și [după **51**, 3] putem scrie

$$(a+b).(c+d+e)=(a+b)c+(a+b)d+(a+b)e.$$

Calculând apoi, după aceeaș regulă, fiecare din aceste trei produse, găsim

(VII) $$(a+b).(c+d+e)=ac+bc+ad+bd+ae+be.$$

REGULĂ. *Ca să înmulțim două sume algebrice* neefectuate, *înmulțim fiecare termen al sumei întâia cu fiecare termen al sumei a doua* și facem suma algebrică a tuturor produselor obținute.

EXEMPLE.

$(7+5).(3-8)=12.(-5)=-60, \qquad (7-5).(3-8)=2.(-5)=-10$

sau

$(7+5).(3-8)=7\times 3+5\times 3-7\times 8-5\times 8=21+15-56-40=-60,$

$(7-5).(3-8)=7\times 3-5\times 3-7\times 8+5\times 8=21-15-56+40=-10.$

OBSERVARE. Când termenii a, b, c, d, e sunt *numere pozitive*, egalitatea (VII) e evidentă pe figura următoare:

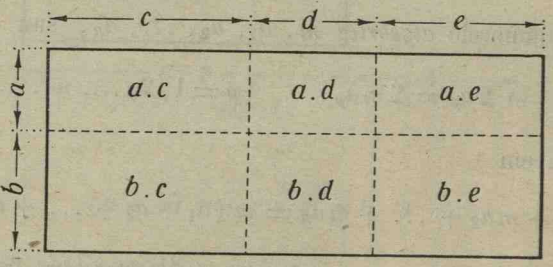


Fig. 19.

55. Sumă dublă. Produsul

(12) $$(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

este egal cu suma celor mn produse din tabloul următor:

$$(13)\qquad \begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_mb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_mb_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & a_mb_n \end{array},$$

egalitate care se scrie pe scurt astfel:

$$\sum_{p=1}^{m} a_p \cdot \sum_{q=1}^{n} b_q = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_p\, b_q$$

sau

$$(14)\qquad \Sigma\, a_p \,\Sigma\, b_q = \Sigma\,\Sigma\, a_p\, b_q \quad (p=1, 2, \dots, m, \quad q=1, 2, \dots, n).$$

Suma din membrul al doilea se numește *sumă dublă*. Ea reprezintă suma *tuturor produselor* de forma $a_p b_q$ *din tabloul* (13).

In particular, după această regulă, rezultă că:

$$(\text{VIII})\qquad (a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd.$$

$$(\text{IX})\qquad (a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd.$$

56. Inmulțirea egalităților și a neegalităților. 1°. Din $a = b$ rezultă $ac = bc$, oricare ar fi c. Se mai poate zice că:

$$\text{din}\quad a = b,\ c = d \quad \text{rezultă} \quad ac = bd.$$

2°. Din $a > b$ rezultă

$$ac > bc \quad \text{dacă} \quad c > 0,$$
$$ac < bc \quad \text{dacă} \quad c < 0.$$

In adevăr dacă $a > b$, avem $a - b > 0$ și, după **45**, deducem

$$(a-b)c = ac - bc > 0 \quad \text{deci} \quad ac > bc \quad \text{pentru} \quad c > 0$$
$$\text{și}\quad (a-b)c = ac - bc < 0 \quad \text{deci} \quad ac < bc \quad \text{pentru} \quad c < 0.$$

Teoremă. *Când înmulțim ambi membri ai unei neegalități cu un același număr, dacă numărul e pozitiv, neegalitatea rămâne de același sens; dacă numărul e negativ, neegalitatea își schimbă sensul.*

Se mai poate zice că:

$$\text{din}\quad a > b,\ c = d > 0 \quad \text{rezultă} \quad ac > bd,$$
$$\text{din}\quad a > b,\ c = d < 0 \quad \text{rezultă} \quad ac < bd.$$

3°. Din $a > b$, $c > d$ rezultă prin înmulțire

$$ac > bd \quad \text{dacă} \quad a > 0,\ d > 0;$$
$$ac < bd \quad \text{dacă} \quad a < 0,\ d < 0.$$

In adevăr dacă $a > 0$, $d > 0$, înmulțind prima neegalitate cu d și a doua cu a, deducem

$$ad > bd \text{ și } ac > ad \text{ deci } ac > bd.$$

Dacă $a < 0$, $d < 0$, prin aceleași operații deducem

$$ad < bd \text{ și } ac < ad \text{ deci } ac < bd.$$

In acelaș fel se arată că din $a > b$, $c > d$ rezultă

$$ac > bd \quad \text{dacă} \quad b > 0,\ c > 0;$$
$$ac < bd \quad \text{dacă} \quad b < 0,\ c < 0.$$

Scriind neegalitățile $a > b$, $c > d$ una sub alta, vom zice că a, d și b, c sunt membri *în cruce*.

Teoremă. *Când înmulțim două neegalități de același sens, dacă doi membri în cruce sunt pozitivi, neegalitatea dintre produse e de același sens; dacă doi membri în cruce sunt negativi, neegalitatea dintre produse e de sens contrariu* cu neegalitățile date.

Observare. Dacă neegalitățile date nu au doi membri în cruce *de același semn*, nu putem preciză sensul neegalității dintre produse.

Rezumat. Inmulțiri:

$a = b$	$a > b$	$a > b$	$a > b$	$a < b$
$c = d$	$c = d > 0$	$c = d < 0$	$c > d$	$c < d$
$ac = bd$	$ac > bd$	$ac < bd$	$ac > bd$ $\wedge$ $a > 0, d > 0$	$ac > bd$ $\vee$ $c < 0, b < 0$

Exemple.

Neegalități sigure:

$-3 > -5$	$-5 < 2$	$-2 > -5$	$-2 > -5$	$-2 > -5$
$4 > -2$	$3 < 7$	$8 > 3$	$4 > 3$	$5 > 2$
$-12 < +10$	$-15 < 14$	$-16 < -15$	$-8 > -15$	$-10 = -10$.

Neegalități nesigure:

II. — ÎMPĂRȚIREA.

57. Definiții. Insemnând cu a și b două numere date $(a > b \neq 0)$ și cu x numărul necunoscut, următoarele două cazuri se prezintă ca probleme *inverse* ale înmulțirei:

$$1°.\ x \times b = a, \qquad 2°.\ b \times x = a.$$

In cazul întâi se întreabă: *de câte ori* b face a? sau *de câte ori* b *este cuprins în* a? x e un număr *abstract* [**10**].

In cazul al doilea se întreabă: de b ori *cât* face a? sau *care este a b-a parte din* a? Dacă a este un număr *concret*, x reprezintă *același fel de unități* ca și a. Problema se rezolvă împărțind pe a în b părți egale (dacă e posibil); x este una din aceste părți și se numește o *parte alicotă* a lui a.

Din punct de vedere al calculului practic, fiindcă prin schimbarea ordinei factorilor produsul nu se schimbă, problemele 1^0 și 2^0 se reduc una la alta. Dacă c e numărul căutat, operația, prin care din numerele a și b aflăm pe c, se numește *împărțire*. Semnul împărțirei este : (*împărțit prin* sau *împărțit la*) și se scrie

$$a : b = c \quad \text{dacă} \quad c \times b = a \quad \text{sau} \quad a = bc.$$

a este *deîmpărțitul*, b *împărțitorul* și c *câtul*.

De exemplu: $12 : 4 = 3$ fiindcă $3 \times 4 = 12$.

De aci rezultă

Definiția I. *A împărți pe a prin b însemnează a găsi un număr c, care înmulțit cu b să ne dea pe a.*

Rezolvarea acestei probleme *cu numere-întregi* e, în general, imposibilă. De exemplu pentru $26 : 7$, nu există niciun număr întreg, care înmulțit cu 7 să dea 26.

Când această operație e posibilă, a se descompune în b părți *egale*, fiecare parte având câte c unități, fiindcă $a = b \times c$. De aceea mai putem zice că:

A împărți pe a la b însemnează a face, din a unități, b părți egale.

Problema împărțirei se mai pune însă și sub altă formă:

Definiția II. A împărți pe a prin b $(a > b)$ însemnează a găsi *cel mai mare număr* c, care, înmulțit cu b, să dea un produs, *care să se poate scădea din* a.

In acest caz problema se rezolvă cu ajutorul *șirului multiplilor lui* b:

$$(M) \qquad 0,\ b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots,\ nb,\ (n+1)b,\ \ldots$$

unde, prin generalizare, considerăm tot ca multipli de b și produsele $0.b = 0$, $1.b = b$. Acest șir se formează din șirul N [pag. 3] luând numerele întregi din b în b.

Dacă a e un număr întreg,

1°. Sau a se găsește în șirul M, de exemplu $a = nb$; în acest caz zicem că b se cuprinde în a de n ori *exact* și scriem

$$a : b = n \quad (\textit{cât exact}).$$

2°. Sau a nu se găsește în șirul M, dar atunci e cuprins între două numere consecutive din acest șir, de exemplu

$$nb < a < (n+1)\,b.$$

In acest caz zicem că b se cuprinde de n ori în a, dar nu se cuprinde de $n+1$ ori; n se numește *câtul prin lipsă* al împărțirei $a : b$; $n+1$ este *câtul prin adaos* sau *prin exces* al acestei împărțiri.

Diferența $a - nb = r$ este *restul* împărțirii. In cazul 1° avem $r = 0$ (împărțire *exactă*); în cazul 2° avem $0 < r < b$ (împărțire *neexactă*).

OBSERVARE. Impărțirea, după definiția II, este o operație întotdeauna *posibilă* în șirul N al numerelor întregi; ea ne conduce la *două* rezultate: un *cât* și un *rest*.

Impărțirea $a : b$ se poate face și prin scăderi succesive:

$$a - b = r_1, \quad r_1 - b = r_2, \quad r_2 - b = r_3, \quad \ldots$$

și așa mai departe, până ce ajungem la un rest *nul* sau *mai mic* decât b. Numărul scăderilor făcute este *câtul* împărțirii. De aceea se mai zice că împărțirea este o *scădere repetată* (operație inversă *de treapta a doua*).

EXEMPLE. Impărțire exactă:

$48 : 6 = 8$, $48 : 8 = 6$ fiindcă $48 = 6 \times 8$.

Impărțire neexactă:

$53 : 9$ dă câtul 5 și restul 8, fiindcă $53 = 9 \times 5 + 8$ și $8 < 9$;
$53 : 5$ „ „ 10 „ „ 3, „ $53 = 5 \times 10 + 3$ „ $3 < 5$.

Avem în particular:

$$\begin{aligned} a : a &= 1 && \text{fiindcă} && a \times 1 = a, \\ a : 1 &= a && \text{„} && 1 \times a = a, \\ na : a &= n && \text{„} && a \times n = na, \\ 0 : a &= 0 && \text{„} && a \times 0 = 0. \end{aligned}$$

$0 : 0$ este *orice număr*, fiindcă $0 \times n = 0$. De aceea zicem că $0 : 0$ este o *nedeterminare*.

$a : n$ *n'are sens* pentru $a \neq 0$, fiindcă nu există niciun număr, care înmulțit cu 0 să dea pe $a \neq 0$.

58. Împărțirea numerelor întregi algebrice. Dacă a, b, c sunt numere întregi algebrice, cu valorile absolute A, B, C respectiv, zicem că

(15) $\quad a:b=c$ dacă $a=bc$ (împărțire *exactă*).

Prin urmare, pentru împărțirea exactă, trebue să avem

$$(X)\qquad \begin{array}{llll} (+A):(+B)=+C & \text{fiindcă} & +A=(+B)(+C), \\ (+A):(-B)=-C & \text{„} & +A=(-B)(-C), \\ (-A):(+B)=-C & \text{„} & -A=(+B)(-C), \\ (-A):(-B)=+C & \text{„} & -A=(-B)(+C). \end{array}$$

Regulă. *Ca să împărțim două numere algebrice, împărțim volorile lor absolute* și *dăm câtului semnul* $+$, *dacă amândouă numerele au aceleași semne*; *dăm câtului semnul* $-$, *dacă numerele au semne contrarii.*

Regula semnelor la împărțire este aceeaș ca și la înmulțire [**45**]:

$+$ cu $+$ dă $+$, $\quad -$ cu $+$ dă $-$,
$+$ cu $-$ dă $-$, $\quad -$ cu $-$ dă $+$,

Exemple: $(+28):(+7)=+4$, $\quad (-48):(+6)=-8$,
$(+36):(-12)=-3$, $\quad (-55):(-11)=+5$.

In general, c este câtul și r $(\neq 0)$ restul împărțirii $a:b$, dacă avem

(16) $\quad a=bc+r$ cu $|r|<|b|$ (împărțire *neexactă*).

Valoarea absolută C a câtului se obține împărțind $A:B$. Semnul câtului c e dat prin regula semnelor. Dacă C e câtul *prin lipsă* al împărțirii $A:B$, avem $A<BC$ și semnul restului $r=a-bc$ este semnul lui a.

Exemple: $(-35:(-9)$ dă câtul $+3$ și restul -8, fiindcă
$(-9).(+3)-8=-27-8=-35$ și $8<9$.

$(-35):(+3)$ dă câtul -11 și restul -2, fiindcă
$(+3).(-11)-2=-33-2=-35$ și $2<3$.

Observare. Egalitatea (16) e generală. Pentru $r\neq 0$ zicem că împărțirea e *neexactă*; pentru $r=0$ avem împărțirea *exactă* și egalitatea (16) devine egalitatea (15).

59. Teoreme relative la împărţirea exactă. Din definiţia împărţirii exacte rezultă că:

1°. Avem

$$(17) \qquad (a:b)\times b = a, \quad (a\times b):b = a.$$

Astfel operaţiile de *înmulţire* şi *împărţire cu un acelaş număr se distrug una pe alta.*

2°. *Ca să împărţim o sumă algebrică printr'un număr*, sau efectuăm suma şi împărţim rezultatul cu numărul dat, sau *împărţim fiecare termen al sumei cu numărul şi facem suma algebrică a câturilor obţinute.* Adică

$$(18) \qquad (a+b+c):m = (a:m)+(b:m)+(c:m),$$

dacă împărţirile se pot face exact. Operaţia este deci *distributivă.*

In adevăr, după **51**,3, avem

$$[(a:m)+(b:m)+(c:m)]\times m = (a:m).m+(b:m).m+(c:m).m$$
$$= a+b+c.$$

EXEMPLU: $(27-18+15):3 = \mathbf{24}:3 = 8$

sau $(27-18+15):3 = \mathbf{9}-\mathbf{6}+\mathbf{5} = 8.$

De acì rezultă că:

$$(XI) \qquad (a+b):c = (a:c)+(b:c),$$

$$(XII) \qquad (a-b):c = (a:c)-(b:c).$$

3°. *Ca să împărţim un produs printr'un număr*, sau efectuăm produsul şi-l împărţim prin număr, sau *împărţim numai pe unul din factori cu numărul dat* şi apoi facem înmulţirile rămase. Adică avem:

$$(19) \qquad \begin{aligned}(a\times b\times c):m &= (a:m)\times b\times c\\ &= a\times(b:m)\times c\\ &= a\times b\times(c:m).\end{aligned}$$

In adevăr, înmulţind oricare din aceste rezultate cu m şi ţinând seamă de teorema **59**,1 căpătăm $a\times b\times c$.

EXEMPLU: $(6\times 9\times 15):3 = 810:3 = 270.$

sau $(6\times 9\times 15):3 = \mathbf{2}\times 9\times 15 = 6\times \mathbf{3}\times 15 = 6\times 9\times \mathbf{5} = 270.$

In particular, *ca să împărțim un produs prin unul din factorii lui suprimăm acel factor.* In adevăr

$$(20) \qquad (a \times b \times c) : b = a \times 1 \times c = a \times c.$$

4°. *Ca să împărțim un număr printr'un produs de mai mulți factori, putem împărți numărul prin primul factor, câtul obținut prin al doilea factor și așa mai departe.* Adică pentru $a:(b.c.d)$, dacă

$$(21) \qquad a:b = q, \quad q:c = q', \quad q':d = q'',$$

avem

$$(22) \qquad a:(bcd) = q''.$$

In adevăr din (21) rezultă succesiv

$a = bq$, $q = cq'$ deci $a = bcq'$; $q' = dq''$ deci $a = bcdq''$.

60. Legile împărțirei. ÎMPĂRȚIRE EXACTĂ. 1°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *deîmpărțitul cu un număr* și lăsăm împărțitorul neschimbat, *câtul se înmulțește* (sau *se împarte*) *cu acel număr.*

In adevăr, înmulțind (sau împărțind) cu m ambii membri ai egalității $a = b \times c$, deducem după **52** și **59**, 3

$$am = b \times cm \quad \text{și} \quad a:m = b \times (c:m).$$

EXEMPLU. Din $45:5 = 9$, înmulțind deîmpărțitul 45 cu 2 deducem $\mathbf{90:5 = 18}$ sau împărțind deîmpărțitul 45 cu 3 deducem $\mathbf{15:5 = 3}$.

2°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *împărțitorul cu un număr* și lăsăm deîmpărțitul neschimbat, *câtul se împarte* (sau *se înmulțește*) *cu acel număr.*

In adevăr, în loc de $a = b \times c$, putem scrie, după **59**, 1

$$a = b \times (c:m) \times m \quad \text{sau} \quad a = bm \times (c:m),$$
$$a = (b:m) \times m \times c \quad \text{sau} \quad a = (b:m) \times cm.$$

EXEMPLU. Din $360:12 = 30$, înmulțind împărțitorul 12 cu 2 deducem $360:\mathbf{24 = 15}$ sau împărțind împărțitorul 12 cu 3 deducem $360:\mathbf{4 = 90}$.

3°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și deîmpărțitul și împărțitorul cu un acelaș număr, câtul împărțirei nu se schimbă.*

In adevăr din $a = b \times c$, înmulțind (sau împărțind) cu m ambi membri ai egalității, deducem

$$am = bm \times c \quad \text{și} \quad (a:m) = (b:m) \times c.$$

EXEMPLU. Din $24:8=3$, înmulțind (sau împărțind) și deîmpărțitul și împărțitorul cu 2, rezultă

$$48:16=3 \quad \text{și} \quad 12:4=3.$$

4°. IMPĂRȚIRE NEEXACTĂ. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și deîmpărțitul și împărțitorul cu un același număr, câtul nu se schimbă* iar *restul se înmulțește* (sau *se împarte*) *cu acel număr.*

In adevăr, din

$$a=bc+r, \qquad |r|<|b|$$

înmulțind (sau împărțind) cu m deducem

$$am=bm\times c+rm, \qquad |rm|<|bm|$$

$$\text{și} \quad a:m=(b:m)\times c+(r:m), \qquad |r:m|<|b:m|.$$

EXEMPLU. Din

$$\underline{(+27):(-6)=-4} \quad \text{(cât)}$$
$$\text{rest} \quad +3$$

înmulțind și deîmpărțitul și împărțitorul cu 1000, deducem

$$\underline{(+27000):(-6000)=-4} \quad \text{(cât)}$$
$$\text{rest} \quad +3000$$

sau împărțind și deîmpărțitul și împărțitorul cu -3, deducem

$$\underline{(-9):(+2)=-4} \quad \text{(cât)}.$$
$$\text{rest} \quad -1$$

61. Ordinea efectuării operațiilor. Intr'un șir de operații de treapta întâia și a doua, scrise unele după altele fără nici o paranteză, trebue efectuate *întâi toate operațiile de treapta a doua* și apoi cele de *treapta întâia.*

Astfel:

$$7\times 8-4+26:2-2\times 5\times 3$$

înseamnă

$$(7\times 8-4+(26:2)-(2\times 5\times 3)=56-4+13-30=35.$$

Dacă vrem ca operațiile să se efectueze *altfel*, arătăm prin paranteze operațiile care trebue să se facă înaintea celorlalte.

De exemplu, șirul de operații

$$(7\times 8-4+26):2-2\times 5\times 3$$

înseamnă

$$(56-4+26):2-30$$

sau

$$78:2-30=39-30=9.$$

Pe când șirul de operații

înseamnă $$7\times(8-4+26:2-2)\times 5\times 3$$

sau $$7\times(8-4+\mathbf{13}-2)\times 5\times 3$$

$$7\times\mathbf{15}\times 5\times 3=1575.$$

Uneori se întrebuințează mai multe feluri de paranteze, pentru a se arătă ordinea în care trebue să fie efectuate operațiile. In acest caz înțelegem să se efectueze întâi operațiile din parantezele mici și apoi din cele mari.

EXEMPLU.

$$\big([7\times 8-(4+26:2)]-2\big)\times 5\times 3$$

$$=\big([7\times 8-\mathbf{17}]-2\big)\times 5\times 3$$

$$=\big(\mathbf{39}-2\big)\times 5\times 3=\mathbf{37}\times 5\times 3=555.$$

62. Impărțirea egalităților și a neegalităților. Impărțiri exacte.

1°. Din $a=b$ rezultă $a:c=b:c$, oricare ar fi $c\neq 0$.

Din $a=b$, $c=d\neq 0$ rezultă $a:c=b:d$.

OBSERVARE. In aplicarea acestei operații trebue să fim siguri că expresiunea prin care împărțim *nu e nulă*. Altfel ajungem la rezultate absurde.

Astfel pentru $a=0$, avem evident

$$3\times a=7\times a$$

și, împărțind ambii membri ai egalității cu a, deducem $3=7$.

2°. Din $a>b$, rezultă

$$a:c>b:c \quad \text{dacă} \quad c>0$$

și $$a:c<b:c \quad \text{dacă} \quad c<0.$$

In adevăr din $a>b$ rezultă $a-b>0$; prin urmare câtul

$$(a-b):c=a:c-b:c$$

are semnul lui c.

3°. Dacă numerele a și b sunt *pozitive*, din $a>b$ rezultă

$$c:a<c:b \quad \text{dacă} \quad c>0$$

și $$c:a>c:b \quad \text{dacă} \quad c<0.$$

Prima neegalitate e evidentă; a doua rezultă din cauza semnelor.

4°. Dacă numerele a, b, c, d sunt *pozitive*,

din $a > b$, $c < d$ rezultă $a : c > b : d$.

In adevăr avem succesiv $a : c > b : c$ și $b : c > b : d$.

OBSERVARE. Dacă numerele sunt *algebrice*, regulele 3° și 4° se pot aplică numai la valorile lor absolute.

REZUMAT. Impărțiri exacte:

din $\dfrac{a = b}{c = d \neq 0}$ $\quad a : c = b : d$

din $\dfrac{a > b}{c = d}$ $\quad a : c > b : d$, $\quad a : c < b : d$

din $\dfrac{c = d}{a > b}$ $\quad c : a < d : b$ pentru $c = d > 0$, $\quad c : a > d : b$ pentru $c = d < 0$,

și pentru a, b, c, d pozitive:

din $\dfrac{a > b}{c < d}$ $\quad a : c > b : d$

din $\dfrac{a < b}{c > d}$ $\quad a : c < b : d$

EXEMPLE. Impărțiri:

$\dfrac{-12 = 6 - 18}{3 = 3}$ $\quad -4 = 2 - 6$ $\qquad$ $\dfrac{20 - 5 > -10}{5 = 5}$ $\quad 4 - 1 > -2$ $\qquad$ $\dfrac{20 - 5 > -10}{-5 = -5}$ $\quad -4 + 1 < +2$ $\qquad$ $\dfrac{30 = 18 + 12}{5 > 3}$ $\quad 6 < 6 + 4$ $\qquad$ $\dfrac{70 > 32}{7 < 8}$ $\quad 10 > 4.$

III. — DIVIZIBILITATEA.

63. Dacă un număr a se împarte exact printr'un alt număr b, zicem că a e *divizibil* cu b sau divizibil prin b. In acest caz a este un *multiplu* al lui b, iar b un *divizor* al lui a.

Astfel: 60 e divizibil prin 15, fiindcă $60 : 15 = 4$ sau $60 = 4 \times 15$; 60 e un multiplu al lui 15 și 15 e un divizor al lui 60.

Dacă a este divizibil cu b (de exemplu $a : b = \alpha$), putem scrie

(23) $$a = \alpha b \qquad (\alpha \text{ întreg})$$

și *reciproc*. Când nu vrem să precizăm de câte ori se cuprinde b în a, putem scrie numai

$$a = Mb \quad (a \text{ egal } \textit{multiplu} \text{ de } b).$$

In toată teoria divizibilității vom considerà numai numere *pozitive*, deoarece împărțirea a două numere algebrice $a : b$ se reduce, afară de semn, la împărțirea valorilor lor absolute $A : B$.

64. Teoreme. 1°. Dacă două numere a și b sunt divizibile cu n, *suma, diferența și produsul lor sunt divizibile cu* n.

In adevăr din ipoteza: $a = \alpha n$, $b = \beta n$ rezultă

$$a + b = (\alpha + \beta)n, \quad a - b = (\alpha - \beta)n, \quad ab = (\alpha\beta n)n.$$

OBSERVARE. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: o sumă, o diferență, un produs de două sau mai multe numere pot fi divizibile printr'un număr, fără ca fiecare termen sau fiecare factor să fie divizibil prin acel număr.

Un *produs* e divizibil printr'un număr, dacă *unul* din factorii lui e divizibil prin acel număr [**59**, 3].

EXEMPLE. Suma $5 + 9 = 14$ e divizibilă cu 2 și 7, dar nici 5, nici 9 nu e divizibil cu 2 sau 7. Produsul $2 \times 5 \times 9$ e divizibil cu 3, fiindcă factorul 9 e divizibil cu 3.

In general, dacă mai multe numere algebrice sunt divizibile prin n, *orice expresie algebrică întreagă* [**50**], *formată numai cu aceste numere, este divizibilă prin* n.

2°. Dacă a e divizibil cu n, *orice multiplu al lui* a *este divizibil cu* n. Deoarece din $a = \alpha n$ rezultă

$$ma = m\alpha n = (m\alpha).n \quad (m\alpha \text{ întreg}).$$

EXEMPLU. Dacă 15 e divizibil cu 5, și multiplul $7 \times 15 = 105$ e divizibil cu 5.

3°. Dacă două numere a și b sunt divizibile cu n, *și restul împărțirei* $a : b$ *este divizibil cu* n.

Fie

$$a = bc + r \quad (r < b).$$

Dacă $a = \alpha n$, $b = \beta n$, din $a > bc$ rezultă $\alpha > \beta c$ și avem

$$r = a - bc = \alpha n - \beta nc = (\alpha - \beta c)n$$

cu $\alpha - \beta c$ întreg. Prin urmare r este divizibil cu n.

EXEMPLU. Fiindcă 240 și 84 sunt divizibile cu 12, și restul împărțirii 240 : 84, adică 72, e divizibil cu 12.

4°. Dacă două numere a și b *diferă printr'un multiplu de* n, aceste numere, împărțite prin n, *dau același rest.*

In adevăr dacă

$$a - b = pn \quad \text{sau} \quad a = b + pn$$

și dacă $b : n$ dă restul r, avem

$$b = qn + r \quad (r < n)$$

și $a = qn + r + pn = (p + q)n + r$ cu $r < n$. Deci și $a : n$ dă restul r [**58**].

EXEMPLU. Fiindcă $319 - 235 = 84$ este un multiplu de 7, numerele 319 și 235 împărțite prin 7 dau *același rest.*

65. Congruență. In general, dacă două numere a și b împărțite cu n *dau același rest*, zicem că a este *congrù* cu b pentru *modulul* n și scriem

$$a \equiv b \pmod{n}. \tag{24}$$

Relația (24) se numește o *congruență*. Din definiția congruenței rezultă că, dacă

$$a \equiv b, \quad b \equiv c \pmod{n},$$

avem și

$$a \equiv c \pmod{n}.$$

In particular $a \equiv 0 \pmod{n}$ însemnează că a este *divizibil* cu n.

EXEMPLU. Avem $22 \equiv 34 \pmod{6}$ fiindcă și 22 și 34 împărțite prin 6 dau același rest 4.

66. Recunoașterea divizibilității. Ca să știm dacă a est divizibil prin n, trebue să căutăm *restul* împărțirei $a:n$. In unele cazuri acest rest poate fi dat de o altă împărțire mai simplă. De exemplu, dacă pentru orice număr a putem găsi un număr b, care să satisfacă condițiile

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{și} \quad b < a,$$

restul împărțirei $a:n$ este

sau b, dacă $b < n$,

sau *restul dat de* $b:n$, dacă $b \geqslant n$.

Alegând numărul b în mod convenabil, obținem astfel o *regulă* pentru *divizibilitatea unui număr cu* n.

OBSERVARE. Dacă avem

$$a \equiv b \pmod{n},$$

și dacă d este un *divizor* al lui n, avem și

$$a \equiv b \pmod{d}.$$

Prin urmare regula de divizibilitate găsită pentru n este adevărată și pentru *orice divizor al lui* n.

67. Regulele elementare de divizibilitate. Un număr N, scris cu cifrele a, b, c, d, e în sistemul zecimal, este

$$N = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e \tag{25}$$

sau

$$N = 10000\,a + 1000\,b + 100\,c + 10\,d + e.$$

Dacă însemnăm cu S *suma cifrelor*: $a+b+c+d+e$ şi cu S' *suma alternată* a acestor cifre: $a-b+c-d+e$, se observă că

$$N \equiv e \pmod{2, 5, 10},$$
$$N \equiv 10d+e \pmod{25, 50, 100},$$
$$N \equiv S \pmod{3, 9},$$
$$N \equiv S' \pmod{11}.$$

De acì deducem toate regulele elementare de divizibilitate.

Primele două congruenţe rezultă imediat din egalitatea (25); celelalte două rezultă din egalităţile

$$N = a(10^4-1)+b(10^3-1)+c(10^2-1)+d(10-1)+S,$$
$$N = a(10^4-1)+b(10^3+1)+e(10^2-1)+d(10+1)+S',$$

dacă se observă că 10^n-1 e divizibil prin 3 şi 9, iar $10^{2n}-1$ şi $10^{2n+1}+1$ sunt divizibile prin 11, oricare ar fi n întreg şi pozitiv.

68. Divizor comun. Dacă mai multe numere întregi a, b, c sunt divizibile prin d, zicem că d este un *divizor comun* al acestor numere.

Să se observe că:

1°. Numerele a, b, c au cel puţin un divizor comun: *pe* 1.

2°. Ele pot avea şi alţi divizori comuni *mai mari decât* 1.

3°. Dacă $a > b > c$, orice divizor comun al lor este $\leqq c$.

Există dar un număr D, care este *cel mai mare divizor comun* al numerelor a, b, c, şi avem $1 \leqq D \leqq c$.

69. Cel mai mare divizor comun (c. m. m. d. c.). Fiind date două numere a şi b $(a > b)$, să însemnăm cu D pe c. m. m. d. c. al lor.

Dacă a e divizibil prin b, avem $D = b$.

Dacă a nu e divizibil prin b, avem $a = bc + r$ $(r < b)$ şi orice divizor comun al numerelor a şi b este şi un divizor al lui r [**64**, 3]. Prin urmare c. m. m. d. c. al numerelor a şi b este c. m. m. d. c. al numerelor b şi r.

Dacă b este divizibil prin r, avem $D = r$.

Dacă b nu e divizibil prin r, avem $b = rc_1 + r_1$ $(r_1 < r)$. Raţionând ca mai sus, rezultă că D este c. m. m. d. c. al numerelor r şi r_1. Şi aşa mai departe.

Resturile r, r_1, r_2, ... merg descrescând cel puţin cu câte o unitate. Prin urmare, după un număr *finit* de operaţii (cel mult r) trebue să ajungem la un rest $r_n = 0$. Ultimul împărţitor (adică restul r_{n-1}) este cel mai mare divizor comun căutat. Deci $D = r_{n-1}$.

Dacă numerele a și b au ca divizor comun *numai pe* 1, aceste numere se zic *prime între ele.* In acest caz avem $D = 1$.

EXEMPLU. Să se afle c. m. m. d. c. al numerelor 10890 și 3542. Observăm că 10890 : 3542 dă câtul 3 și restul 264; prin urmare trebue să căutăm pe c. m. m. d. c. al numerelor 3542 și 264.

3542 : 264 dă câtul 13 și restul 110; 264 : 110 dă câtul 2 și restul 44; 110 : 44 dă câtul 2 și restul 22; 44 : 22 dă câtul 2 și restul **0**. Prin urmare 22 e c. m. m. d. c. al numerelor 10890 și 3542.

In practică aceste împărțiri succesive se așează în modul următor:

	3	13	2	2	2
10890	3542	264	110	44	**22**
10626	902	44	22	0	
264	792				
	110				

OBSERVARE. Din calcularea celui mai mare divizor comun D, a două numere, prin împărțiri succesive, rezultă următoarele proprietăți (analoage cu ale *restului* unei împărțiri):

1°. Orice divizor comun al numerelor a și b este și un divizor al lui D [**64**, 3].

2°. Când înmulțim (sau împărțim) numerele a și b cu un acelaș număr m, și D se înmulțește (sau se împarte) cu m [**60**, 4].

In particular, dacă împărțim pe a și b cu D, c. m. m. d. c. al câturilor $a : D = a'$, $b : D = b'$ este $D : D = 1$. Prin urmare câturile a' și b' sunt *prime între ele.*

70. C. m. m. d. c. al mai multor numere: a, b, c, d. Căutăm pe c. m. m. d. c. al numerelor a și b; fie D_1. Apoi pe c. m. m. d. c. al numerelor D_1 și c; fie D_2. Apoi pe c. m. m. d. c. al numerelor D_2 și d; fie D_3. *C. m. m. d. c. al numerelor* a, b, c, d *este* $D = D_3$.

In adevăr dacă D_3 divide pe d și pe D_2, divide și pe multiplii lui D_2, pe D_1 și pe c; divide dar și pe multiplii lui D_1, pe a și b [**64**, 2]. Prin urmare D_3 *este un divizor comun* al numerelor a, b, c, d. Vrem să arătăm că e și *cel mai mare.*

Dacă ar există, pentru numerele a, b, c, d, un divizor comun $D > D_3$, D ar fi divizor comun și pentru numerele D_1 (c. m. m. d. c. al lui a și b [**69**, 1]), D_2 (c. m. m. d. c. al lui D_1 și c) și D_3 (c. m. m. d. c. al lui D_2 și d); prin urmare $D > D_3$ ar fi un divizor al lui D_3, rezultat evident absurd.

Dacă $D = 1$, numerele a, b, c, d se zic *prime între ele.*

Numerele se zic *prime între ele două câte două,* când *două oricare dintre aceste numere,* n'au alt divizor comun decât pe 1.

71. Multiplu comun. Dacă M este un multiplu şi al lui a şi al lui b, zicem că M este un *multiplu comun* al numerelor a şi b. In acest caz avem [**63**]:

$$M = pa = qb \quad (p \text{ şi } q \text{ întregi}).$$

EXEMPLU: 70 e un multiplu comun al numerelor 7 şi 5 fiindcă avem

$$70 = 10 \times 7 = 14 \times 5.$$

OBSERVARE. In particular produsul ab este un multiplu comun al numerelor a şi b. Astfel $35 = 7 \times 5$ este un multiplu comun al numerelor 7 şi 5.

Dacă M este un multiplu comun al numerelor a şi b, şi produsul nM este un multiplu comun al acestor numere, oricare ar fi n întreg. Deci şirul multiplilor comuni a două numere:

$$(\mu) \qquad M,\ 2M,\ 3M,\ \ldots,\ nM,\ (n+1)M,\ \ldots$$

este *nemărginit* spre dreapta. Dar spre stânga?

72. Cel mai mic multiplu comun (**c. m. m. m. c.**). Dacă a e mai mare decât b, *niciun multiplu comun al numerelor* a şi b *nu poate fi mai mic decât* a. Există deci la stânga şirului (μ) un număr $m \geqq a$, care este mai mic decât toate numerele din acest şir; m este *cel mai mic multiplu comun* (*c. m. m. m. c.*) al numerelor a şi b.

In acelaş fel se defineşte un multiplu comun al mai multor numere a, b, c şi se vede că există un număr m, care este *cel mai mic multiplu comun* al acestor numere. Dacă $a > b > c$, trebue să avem $m \geqq a$.

73. Numere prime. Orice număr N, care nu e divizibil decât prin el însuşi şi prin unitate, se numeşte *număr prim*. De exemplu: 7, 11, 23.

Dacă numărul N mai are şi alţi divizori, afară de N şi de 1, zicem că N este *neprim*.

EXEMPLU: 15 este neprim, fiindcă are ca divizori pe 3 şi 5.

Pentru a obţine *numerele prime* e deajuns să tăiem din şirul

$$(N) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

toate numerele din 2 în 2, începând dela $2^2 = 4$; apoi toate numerele din 3 în 3, începând dela $3^2 = 9$ şi aşa mai departe.

Obţinem astfel *şirul numerelor prime* (1):

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, ...

Oricât de mare ar fi un număr A, *există numere prime mai mari decât* A. De aceea se zice că şirul numerelor prime este *nemărginit* (spre dreapta).

(1) TABLA II dela sfârşitul volumului.

74. Teoreme. 1°. *Orice număr a neprim are cel puțin un divizor prim.* In adevăr d, cel mai mic divizor $\neq 1$ al lui a, e *prim.*

Dacă d n'ar fi prim, ar admite un divizor d_1; dar atunci și a ar admite divizorul $d_1 < d$ [**64**,2], ceeace e contrar cu ipoteza că d e cel mai mic divizor al lui a.

2°. Două numere a și b *neprime între ele* au cel puțin un divizor comun *prim.*

Se arată, ca mai sus, că d, cel mai mic divizor comun $\neq 1$ al numerelor a și b, este *prim.*

3°. *Orice număr N neprim se poate descompune într'un produs de factori primi.*

In adevăr dacă a e cel mai mic divizor $\neq 1$ al lui N, a e prim și avem $N = a\,Q$. Dacă Q e prim, teorema e demonstrată. Dacă Q nu e prim, admite și el un divizor prim b și avem $Q = b\,Q_1$, deci $N = a\,b\,Q_1$. Operația aceasta, care nu se poate prelungi la infinit, nu se poate termină decât când am ajuns la un cât Q_n *prim.* Atunci N este descompus într'un produs de *factori primi.*

Această descompunere nu se poate face decât într'un singur fel.

Raționamentul făcut nu exclude cazul ca doi sau mai mulți factori primi să fie *egali* între ei. De exemplu, dacă $a = b$, în loc de produsul $a\,b$ avem a^2.

In general găsim pentru N un produs de forma

$$N = a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

unde a, b, ..., l sunt *factori primi*, iar α, β, ..., λ sunt numere întregi $\geqq 1$.

EXEMPLU. $3600 = 36 \times 100 = 4 \times 9 \times 4 \times 25 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$.

OBSERVARE. Dacă N conține factorul a^α, el conține ca factor și pe a^n, pentru $n = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$.

Astfel $48 = 2^4 \times 3$ are ca factor și pe 2^3 și pe 2^2 și pe 2, fiindcă avem

$$48 = 2^3 \times 6 = 2^2 \times 12 = 2 \times 24.$$

IV. — NUMERE RAȚIONALE.

75. Fracții ordinare. Dacă a și b sunt două numere *întregi* și *pozitive* $(a > b)$ și dacă

(26) $$a : b = c \quad \text{(cât exact)},$$

c este a b-a parte a lui a și avem

(27) $$a = b \times c.$$

Dar dacă a ($>b$) nu e divizibil prin b sau dacă a e mai mic decât b?

In aceste cazuri, în șirul numerelor întregi nu există niciun număr c, care să satisfacă la egalitatea (27). Pentru a da un sens noțiunei de *cât exact* și în aceste cazuri, trebue să introducem în aritmetică *numere noi*.

Să observăm că problema împărțirii exacte se poate rezolvà întotdeauna pe cale geometrică. De exemplu, pentru 5 : 3 câtul exact trebue să reprezinte *a treia parte* a lui 5 [57].

Să luăm o lungime AB (*fig.* 20) egală cu 5 unități și să împărțim fiecare unitate în 3 părți *egale*. Una din aceste părți AV este *o treime*;

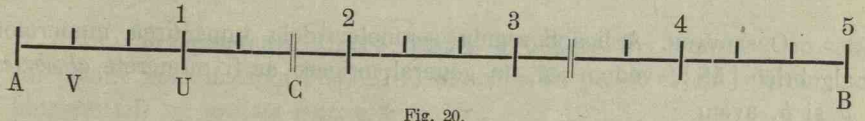


Fig. 20.

lungimea AB conține 15 treimi și a treia parte din AB = 15 *treimi* este AC = 5 *treimi* (cât exact).

O treime este o *unitate fracționară* și se scrie $\frac{1}{3}$; 5 treimi este un *număr fracționar* sau o *fracție ordinară* [8] și se scrie $\frac{5}{3}$.

Introducând numerele fracționare avem dar egalitatea

(28) $$5 : 3 = \frac{5}{3} \quad (5 \textit{ treimi} \text{ sau } 5 \textit{ pe } 3)$$

și în general

(XIII) $$a : b = \frac{a}{b} \quad (a \text{ pe } b).$$

Câtul exact al împărțirii $a : b$ se mai numește și *raportul* dintre a și b. Egalitatea (XIII) ne arată că *raportul dintre numerele a și b este fracția ordinară* $\frac{a}{b}$.

Observare. Din definiția fracțiilor ordinare rezultă că:

1°. Dintre două fracții, care au *același numitor*, *aceea este mai mare*, care are *numărătorul mai mare*.

2°. Dintre două fracții, care au *același numărător*, aceea este *mai mare*, care are *numitorul mai mic*.

76. Fracții algebrice. Dacă a și b sunt două numere algebrice, cu valorile absolute A și B respectiv, vom zice că

$$\frac{a}{b} = +\frac{A}{B} \quad \text{dacă } a \text{ și } b \text{ au } \textit{aceleași semne};$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{A}{B} \quad \text{dacă } a \text{ și } b \text{ au } \textit{semne contrarii}.$$

Avem dar două feluri de fracții algebrice: *pozitive* și *negative*.

Orice fracție algebrică poate fi considerată întotdeauna *cu numitorul pozitiv*. In adevăr putem scrie

$$(XIV) \qquad \frac{-A}{-B} = \frac{+A}{+B} = \frac{A}{B}, \qquad \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{+B}.$$

Observare. Aplicând regula semnelor dela împărțirea numerelor algebrice [58], vedem că, în general, oricare ar fi numerele *algebrice* a și b, avem

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Prin urmare *raportul* (câtul exact) dintre două numere algebrice a și b este *fracția ordinară* algebrică $\frac{a}{b}$.

Numerele a și b se numesc *termenii* raportului; a e *numărătorul*, b e *numitorul* și avem în valoare absolută și în semn

$$(29) \qquad a:b = \frac{a}{b} \quad \text{și} \quad b \times \frac{a}{b} = a.$$

In particular putem scrie

$$(30) \qquad a:1 = \frac{a}{1} = a.$$

Regulă. *Orice număr întreg se poate scrie sub formă de fracție ordinară, dacă-i punem numitorul* 1.

77. Șiruri de fracții. Din șirul I al numerelor întregi algebrice [27].

$$(I) \qquad \ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

împărțind fiecare număr cu m (întreg și pozitiv) formăm șirul

$$(F_m) \qquad \ldots, -\frac{n}{m}, \ldots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{n}{m}, \ldots$$

care conține toate fracțiile cu numitorul m.

Relațiile de neegalitate se extind la fracțiile algebrice în modul următor: Dacă $\frac{a}{m}$ și $\frac{b}{m}$ sunt două numere algebrice din șirul F_m, vom zice că

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m} \quad \text{dacă} \quad a > b.$$

Astfel șirul F_m este *ordonat* în mod *crescător*.

Pentru $n = pm$, oricare ar fi p întreg, avem

$$\frac{n}{m} = \frac{pm}{m} = p.$$

Șirul F_m conține dar, din m în m, toate numerele *întregi* algebrice.

78. Corespondența dintre fracții și puncte. Pe o axă Δ, cu sensul pozitiv spre dreapta (*fig.* 21), să luăm un punct O ca *origine* și o lungime OU ca *unitate întreagă*.

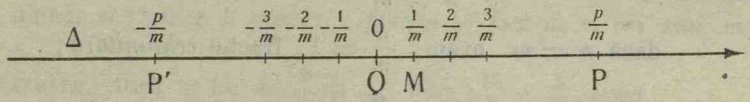


Fig. 21.

Unitatea fracționară $\frac{1}{m}$ este lungimea

$$\text{OM} = \text{a } m\text{-a parte din OU}.$$

Să presupunem axa Δ divizată cu diviziuni egale cu OM dela O *spre dreapta* și dela O *spre stânga*. Dacă P și P' sunt punctele de diviziune, pentru care segmentele $\overline{OP}$ spre dreapta și $\overline{OP'}$ spre stânga conțin câte p diviziuni, vom zice că *abscisa punctului* P *este* $+\frac{p}{m}$ și *abscisa punctului* P' *este* $-\frac{p}{m}$.

Scriind în dreptul fiecărui punct P abscisa lui, stabilim astfel o corespondență univocă între punctele de diviziune și între numerele fracționare din șirul F_m.

EXEMPLU. Luând diviziunile $\text{OV} = \text{OU} : 5$, unitatea fracționară este *o cincime* și toate numerele corespunzătoare acestor diviziuni sunt fracțiile din șirul

$$(F_5) \qquad \ldots, -\frac{n}{5}, \ldots, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{n}{5}, \ldots$$

care pot fi presupuse scrise pe axa Δ (*fig.* 22) în dreptul punctelor de diviziune corespunzătoare.

Dacă $\overline{OP} = 13$ *cincimi*, în loc de punctul P vom zice punctul $\frac{13}{5}$.

OBSERVARE. Pe figura 24 vedem că fracțiile $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ sunt *mai mici* decât unitatea întreagă $\overline{OU}$; $\frac{5}{5}$ este egală cu $\overline{OU} = 1$; $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, ... sunt *mai mari* decât $\overline{OU}$, deci *mai mari* decât 1.

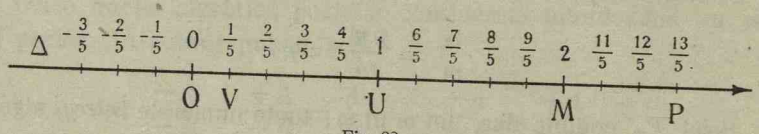


Fig. 22.

Pentru o fracție *cu termeni pozitivi* $\frac{n}{m}$ se pot prezentă următoarele cazuri:

dacă $n < m$ avem $\frac{n}{m} < 1$ fracție *subunitară*;

dacă $n = m$ avem $\frac{n}{m} = 1$ fracție *echiunitară*;

dacă $n > m$ avem $\frac{n}{m} > 1$ fracție *supraunitară*;

dacă $n = p\,m$ avem $\frac{n}{m} = p$ număr *întreg*.

Această regulă *nu se aplică la fracțiile algebrice*. De exemplu, din $+3 > -5$ nu rezultă $\frac{+3}{-5} > 1$ [**62**, 2].

O fracție *subunitară* se mai zice și fracție *proprie*; toate celelalte feluri de fracții sunt fracții *improprii*.

79. *Orice fracție improprie conține întregi*, adică unitățile fracționare din ea formează una sau mai multe *unități întregi*.

EXEMPLU. Să luăm fracția $\frac{13}{5}$. Fiindcă un întreg are 5 cincimi, în 13 cincimi vor fi atâția întregi de câte ori 5 se cuprinde în 13; dar

$$13 = 2 \times 5 + 3,$$

deci în 13 cincimi avem 2 *întregi* și 3 *cincimi* și scriem

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}.$$

Numărul $2 + \frac{3}{5}$, care se mai scrie și $2\frac{3}{5}$ se numește *număr mixt*.

REGULĂ. *Ca să aflăm câți întregi sunt cuprinși într'o fracție improprie, împărțim numărătorul prin numitor.*

Intregii din fracția $\frac{a}{b}$ se scriu uneori cu notația $\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$.

O fracție *improprie*, dacă nu e egală cu un număr întreg, este suma unui număr *întreg* cu o fracție *proprie*.

In adevăr, dacă $a > b$ și dacă $a:b$ dă câtul c și restul $r < b$, avem

$$a = b \times c + r \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = c + \frac{r}{b},$$

unde c e un *număr întreg*, iar $\frac{r}{b}$ o *fracție proprie*.

OBSERVARE. Câtul împărțirii 13 : 5 după definiția I [57] este *raportul* $\frac{13}{5}$ câtul acelea i împărțiri după definiția II [57] este *numărul întreg* $\mathrm{E}\left(\frac{13}{5}\right)$ sau 2.

80. Legile fracțiilor ordinare. Din definițiile fracțiilor rezultă următoarele *legi* pentru *fracțiile ordinare pozitive* (1):

1°. Dacă *înmulțim numărătorul* (sau *împărțim numitorul*) unei fracții cu un număr n (întreg și pozitiv), *fracția se face de n ori mai mare.*

EXEMPLU. Dacă în loc de $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{18}$ luăm $\frac{15}{7}$ și $\frac{5}{9}$, avem

$$\frac{15}{7} > \frac{3}{7} \text{ (de 5 ori)}; \quad \frac{5}{9} > \frac{5}{18} \text{ (de 2 ori)}.$$

In adevăr, în neegalitatea întâia, fracția a doua conține 3 șeptimi, iar întâia conține 15 șeptimi, adică de 5 ori mai mult decât a doua. In neegalitatea a doua, fracția a doua conține 5 optsprezecimi, iar întâia 5 noimi și cum noimea e de 2 ori mai mare decât optsprezecimea, fracția întâia e de 2 ori mai mare decât a doua.

2°. Dacă *împărțim numărătorul* (sau *înmulțim numitorul*) unei fracții cu n (întreg și pozitiv) *fracția se face de n ori mai mică.*

EXEMPLU. Dacă în loc de $\frac{15}{7}$ și $\frac{5}{9}$ luăm $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{18}$, avem

$$\frac{3}{7} < \frac{15}{7} \text{ (de 5 ori)}; \quad \frac{5}{18} < \frac{5}{9} \text{ (de 2 ori)}.$$

3°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr*, schimbăm numai termenii fracției, dar *valoarea fracției rămâne neschimbată.*

In adevăr de câte ori mărim fracția prin înmulțirea numărătorului, tot de atâtea ori o și micșorăm prin înmulțirea numitorului.

---

(1) Să se compare cu *legile împărțirii exacte* [60, 1, 2 și 3].

EXEMPLU: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{210}{525}$.

In acest caz zicem că *amplificăm* (sau *simplificăm*) fracția. Avem dar, oricare ar fi n,

(31) $$\frac{a}{b} = \frac{a.n}{b.n} \quad (\textit{amplificare cu } n).$$

și, dacă împărțirile se pot face exact,

(32 $$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n} \quad (\textit{simplificare cu } n).$$

OBSERVAREA I. Să nu se confunde *amplificarea* cu *înmulțirea*, nici *simplificarea* cu *împărțirea* fracțiilor.

EXEMPLE: Fracția

$\frac{6}{10}$ *înmulțită* cu $2 = \frac{6}{10} \times 2 = \frac{12}{10}$ sau $\frac{6}{5} > \frac{6}{10}$ (legea 1°).

$\frac{6}{10}$ *amplificată* cu $2 = \frac{6 \times 2}{10 \times 2} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$ (legea 3°).

$\frac{6}{10}$ *împărțită* cu $2 = \frac{6}{10} : 2 = \frac{3}{10}$ sau $\frac{6}{20} < \frac{6}{10}$ (legea 2°).

$\frac{6}{10}$ *simplificată* cu $2 = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (legea 3°).

OBSERVAREA II. Un *număr întreg* nu poate fi scris (în sistemul zecimal) decât într'un singur fel, pe când o *fracție ordinară* poate fi scrisă într'o *infinitate* de feluri (simplificând-o, dacă e posibil, sau aplificând-o cu orice număr vrem).

EXEMPLU. Fracția $\frac{9}{15}$ se mai poate scrie $\frac{3}{5}$ sau $\frac{3n}{5n}$ oricare ar fi n.

81. Fracție nereductibilă. Când termenii a și b sunt *primi între ei* [69], fracția $\frac{a}{b}$ se zice *nereductibilă*.

Orice fracție, dacă nu e nereductibilă, se poate reduce prin simplificare la o fracție *egală* nereductibilă.

In adevăr, dacă p e cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, simplificând fracția $\frac{a}{b}$ cu p, câturile $a:p = a'$ și $b:p = b'$ sunt *prime între ele* [69] și găsim

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad (\text{fracție nereductibilă}).$$

OBSERVARE. Din tot șirul infinit de fracții *egale* cu $\frac{a}{b}$, numai o singură fracție e *nereductibilă*: acea care e scrisă cu termenii cei mai mici.

82. Aducerea fracțiilor la același numitor. Am văzut că prin amplificări sau simplificări putem scrie *aceeași fracție ordinară* într'o infinitate de feluri. In particular putem să-i punem ca numitor *orice multiplu N al numitorului ei.*

In adevăr, în loc de fracția $\frac{a}{b}$ dacă $N = bn$, putem scrie

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{an}{N}.$$

De aci rezultă că mai multe fracții $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ pot fi scrise toate cu *același numitor*, fără a le schimbă valoarea. Dacă N este un multiplu comun al numitorilor b, d, f și dacă

$$N:b = b', \quad N:d = d', \quad N:f = f',$$

sau

$$N = bb', \quad N = dd', \quad N = ff',$$

avem

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{ab'}{N}, \quad \frac{c}{d} = \frac{cd'}{dd'} = \frac{cd'}{N}, \quad \frac{e}{f} = \frac{ef'}{ff'} = \frac{ef'}{N}.$$

Astfel fracțiile date au fost *aduse la același numitor*. N este un *numitor comun*. Se poate alege ca numitor comun *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor fracțiilor date.

Regulă pentru aducerea mai multor fracții la *același numitor*:

Operația I. *Alegem un multiplu comun al tuturor numitorilor* fracțiilor date (1).

Operația II. Pentru fiecare fracție, *împărțim multiplul comun ales prin numitorul fracției* și *amplificăm fracția cu câtul obținut.*

EXEMPLU. Să se aducă la același numitor fracțiile: $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}$.

Operația I. 12 fiind divizibil prin 6 și 3, **12** e un multiplu comun al numitorilor. Operația II. Pentru frac ia întâia: $12:6=2$, deci $\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{10}{12}$. Pentru fracția a doua: $12:3=4$, deci $\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$. Fr cția a treia având numitorul 12 rămâne neschimbată $\frac{7}{12}$. Astfel, în loc de fracțiile date, putem scrie $\frac{10}{12}, \frac{8}{15}, \frac{7}{12}$.

83. Compararea fracțiilor. Ca să comparăm două sau mai multe fracții, care n'au același numitor, *le aducem întâi la același numitor* și apoi le comparăm.

---

(1) Acesta poate fi sau *produsul tuturor numitorilor*, sau *cel mai mic multiplu comun* al lor, sau orice alt multiplu comun.

Astfel fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ se pot scrie

$$(33) \qquad \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd};$$

și comparând noii numărători, vedem că

$$\text{dacă } ad > bc \text{ avem } \frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

$$\text{dacă } ad = bc \text{ avem } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$$\text{dacă } ad < bc \text{ avem } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

De aci rezultă că orice șir de fracții poate fi *ordonat*. E de ajuns să aducem toate fracțiile la același numitor și să le ordonăm după numărătorii lor.

EXEMPLU. Fiindcă fracțiile $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ și $\frac{7}{12}$ [82], sunt egale respectiv cu $\frac{10}{12}$, $\frac{8}{12}$ și $\frac{7}{12}$ și fiindcă $\frac{10}{12} > \frac{8}{12} > \frac{7}{12}$, avem $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{7}{12}$.

84. Teoreme. 1°. Dacă avem un șir de fracții *egale*, fracția, care are ca numărător *suma numărătorilor* și ca numitor *suma numitorilor*, este *egală cu fiecare dintre fracțiile date*.

Să considerăm fracțiile

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \quad \text{și} \quad \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}.$$

Dacă λ e valoarea comună a primelor rapoarte, avem

$$a = b\lambda, \quad a' = b'\lambda, \quad a'' = b''\lambda,$$

și adunând aceste egalități membru cu membru, deducem

$$a + a' + a'' = b\lambda + b'\lambda + b''\lambda = \lambda(b + b' + b'')$$

de unde, împărțind prin $b+b'+b''$, rezultă

$$(34) \qquad \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} = \lambda = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}.$$

Mai general, fiindcă

$$\frac{a}{b} = \frac{pa}{pb}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{qa'}{qb'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{ra''}{rb''},$$

rezultă că

$$\frac{pa+qa'+ra''}{pb+qb'+rb''} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

oricare ar fi numerele algebrice p, q, r.

2°. Dacă avem un șir de fracții *neegale*, fracția, care are ca numărător *suma numărătorilor* și ca numitor *suma numitorilor*, are o valoare *medie*, adică este *mai mare decât cea mai mică* și *mai mică decât cea mai mare* dintre fracțiile date.

Dacă

$$\frac{a}{b}=\lambda,\quad \frac{a'}{b'}=\mu,\quad \frac{a''}{b''}=\nu,\qquad \lambda<\mu<\nu,$$

avem

$$\lambda=\frac{a}{b}<\nu \text{ de unde } b\lambda=a<b\nu$$

$$\lambda<\frac{a'}{b'}<\nu \quad „ \quad „ \quad b'\lambda<a'<b'\nu$$

$$\lambda<\frac{a''}{b''}=\nu \quad „ \quad „ \quad b''\lambda<a''=b''\nu.$$

Adunând membru cu membru ultimele trei neegalități, deducem

$$\lambda(b+b'+b'')<a+a'+a''<\nu(b+b'+b'')$$

și împărțind cu $b+b'+b''$, rezultă

adică
$$\lambda<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\nu$$

(35)
$$\frac{a}{b}<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\frac{a''}{b''}.$$

3°. Când *adunăm acelaș număr* la ambii termeni ai unei fracții *fracția se mărește dacă e mai mică decât* 1 și *se micșorează dacă e mai mare decât* 1.

In adevăr fracția

$$\frac{a+n}{b+n}$$

rezultă din fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{n}{n}$, dacă adunăm numărătorii între ei și numitorii între ei și, după teorema 2°, ea are o valoare cuprinsă între $\frac{a}{b}$ și $\frac{n}{n}=1$. Deci

dacă $\frac{a}{b}<1$ avem $\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n}<\frac{n}{n}$;

dacă $\frac{a}{b}>1$ avem $\frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}>\frac{n}{n}$.

In amândouă cazurile *fracția se apropie de unitate.*

4°. Când *scădem acelaș număr* din ambii termeni ai unei fracții, *fracția se micșorează, dacă e mai mică decât* 1 și *se mărește, dacă e mai mare decât* 1.

In adevăr, după teorema 3°, fracția $\frac{a}{b}$ are o valoare cuprinsă între

$$\frac{a-n}{b-n} \quad \text{și} \quad \frac{n}{n}=1.$$

Deci

dacă $\frac{a}{b}<1$ avem $\frac{a-n}{b-n}<\frac{a}{b}<\frac{n}{n}$;

dacă $\frac{a}{b}>1$ avem $\frac{a-n}{b-n}>\frac{a}{b}>\frac{n}{n}$.

In amândouă cazurile *fracția se depărtează de unitate.*

85. Operațiile cu numere fracționare se definesc astfel ca să cuprindă și să generalizeze operațiile cu numere întregi.

Operațiile inverse rezultă din definiția operațiilor directe.

1°. Adunarea. *Dacă fracțiile au același numitor*, suma lor este o fracție, care are ca numărător *suma numărătorilor* fracțiilor date și ca numitor *numitorul lor comun.*

Astfel:

(XV) $$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}.$$

Dacă fracțiile n'au același numitor, *trebue să le aducem întâi la același numitor* [82] și apoi să le adunăm.

2°. Scăderea. *Dacă fracțiile au același numitor*, diferența lor este o fracție, care are ca numărător *diferența numărătorilor* fracțiilor date și ca numitor *numitorul lor comun.*

Astfel:

(XVI) $$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

In adevăr

$$\frac{a-b}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a-b+b}{n}=\frac{a}{n}.$$

Dacă fracțiile n'au același numitor, *trebue să le aducem întâi la același numitor* și apoi să le scădem.

3°. Inmulțirea. Produsul a două sau mai multe fracții este o fracție, care are ca numărător *produsul numărătorilor* și ca numitor *produsul numitorilor* fracțiilor date.

Astfel:

(XVII) $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

OBSERVARE. Fracția produs se poate simplifică, *înainte de a efectuà înmulțirile*, 1°. suprimând orice *factor*, care se găsește și la numărător și la numitor;

2º. împărțind prin același număr *un factor dela numărător* și *un factor dela numitor* (dacă împărțirile se pot face exact) și scriind în locul acestor factori câturile căpătate.

EXEMPLU:

$$\frac{14\times 23\times 6\times 15}{2\times 3\times 23\times 10}=\frac{14\times 15}{10}=\frac{14\times 3}{2}=7\times 3=21.$$

4º. Impărțirea. Ca să împărțim două fracții ordinare *înmulțim fracția întâia cu a doua răsturnată.*

Astfel:

(XVIII) $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

In adevăr

$$\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{acd}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

EXEMPLE:

Adunare.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{31}{35}.$$

Inmulțire.

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{5\times 7}=\frac{6}{35}.$$

Scădere.

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}.$$

Impărțire.

$$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{3\times 7}{5\times 2}=\frac{21}{10}.$$

86. Operațiile dintre întregi și fracții. Scriind orice număr întreg sub formă de fracție ordinară (cu numitorul 1), operațiile dintre întregi și fracții se reduc la operații între fracții.

Astfel:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c},\qquad a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c},$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c},\qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b},$$

$$\frac{b}{c}:a=\frac{b}{c}:\frac{a}{1}=\frac{b}{c}\times\frac{1}{a}=\frac{b}{ca}.$$

EXEMPLE:

$$5+\frac{2}{3}=\frac{5}{1}+\frac{2}{3}=\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=\frac{17}{3},\qquad 5\times\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{1\times 3}=\frac{10}{3},$$

$$5-\frac{2}{3}=\frac{5}{1}-\frac{2}{3}=\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\frac{13}{3},\qquad 5:\frac{2}{3}=\frac{5}{1}:\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2},$$

$$\frac{2}{3}:5=\frac{2}{3}:\frac{5}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

Toate regulele operațiilor cu fracții ordinare, cuprind în ele regulele date pentru operațiile cu numere întregi și păstrează toate legile fundamentale ale acestor operații.

Astfel avem:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{bd} \qquad (\textit{comutație}),$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \qquad (\textit{distribuție}),$$

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \qquad (\textit{raport}).$$

Observări pentru numerele *pozitive*:

1°. Când înmulțim un număr a cu un număr *întreg* n, produsul na este de n ori *mai mare* decât a.

2°. Când înmulțim un număr a cu o *fracție* λ, produsul λa este *mai mare* sau *mai mic* decât a, după cum fracția λ este mai mare sau mai mică decât 1.

3°. Când împărțim un număr a cu un număr *întreg* n, câtul $a:n$ este de n ori *mai mic* decât a.

4°. Când împărțim un număr a cu o *fracție* λ, câtul $a:\lambda$ este *mai mic* sau *mai mare* decât a, după cum fracția λ este mai mare sau mai mică decât 1.

EXEMPLE:

$12 \times 3 = 36$ de 3 ori *mai mare* decât 12 (3 *întreg*).

$12 \times \frac{2}{3} = \frac{12 \times 2}{3} = 8 < 12$ fiindcă *fracția* $\frac{2}{3} < 1$.

$12 \times \frac{4}{3} = \frac{12 \times 4}{3} = 16 > 12$ fiindcă *fracția* $\frac{4}{3} > 1$,

$12 : 3 = 4$ de 3 ori *mai mic* decât 12 (3 *întreg*),

$12 : \frac{2}{3} = \frac{12 \times 3}{2} = 18 > 12$ fiindcă *fracția* $\frac{2}{3} < 1$,

$12 : \frac{4}{3} = \frac{12 \times 3}{4} = 9 < 12$ fiindcă *fracția* $\frac{4}{3} > 1$.

87. Fracție din număr. In unele cazuri simple se calculează imediat cât face o *fracție* dintr'un număr. Astfel

$\frac{1}{2}$ (jumătate) din 12 este **6** sau $\frac{1}{2} \times 12 = \frac{12}{2}$,

$\frac{1}{3}$ (a treia parte) din 12 este **4** sau $\frac{1}{3} \times 12 = \frac{12}{3}$.

In general avem următoarea

Regulă. *Ca să calculăm o fracție dintr'un număr, înmulțim fracția cu numărul.*

EXEMPLU: 2 treimi din $105 = \frac{2}{3} \times 105 = \frac{210}{3} = 70$.

In adevăr,

1 treime din 105 este $\frac{105}{3}$,

2 treimi din 105 este $2 \times \frac{105}{3} = \frac{2}{3} \times 105 = 70$.

88. Fracții zecimale. O fracție ordinară, care are ca numitor o putere de-a lui 10 (1), se numește fracție *zecimală* și se scrie ca *număr zecimal* [9].

EXEMPLE:

$$\frac{375}{100} = 3{,}75\,; \qquad \frac{48}{10000} = 0{,}0048.$$

Invers, putem trece dela un număr zecimal la fracția ordinară corespunzătoare:

REGULĂ. *Ca să scriem un număr zecimal sub formă de fracție ordinară* punem ca numărător *numărul zecimal fără virgula zecimală*, iar ca numitor 1 *urmat de atâtea zeruri, câte cifre zecimale are numărul zecimal.*

EXEMPLE:

$$3{,}75 = \frac{375}{100} = \frac{15}{4}\,; \qquad 0{,}0048 = \frac{48}{10000} = \frac{3}{625}.$$

Orice *număr întreg* se poate scrie ca număr *zecimal*, dacă-i punem oricâte *zeruri* vrem ca cifre zecimale. Astfel: $54 = 54{,}000$.

89. Compararea fracțiilor zecimale se face mai ușor decât a fracțiilor ordinare:

1°. Dintre două numere zecimale, care au *părțile întregi diferite*, acela este mai mare, care are partea întreagă mai mare.

2°. Pentru două numere zecimale, care au *aceeași parte întreagă*, comparăm cifrele zecimale, care reprezintă *unități de același ordin*, începând dela virgula zecimală spre dreapta. Dacă *primele cifre diferite*, dela aceste numere, sunt cifrele zecimale de ordin n, acel număr este mai mare, care are cifra zecimală de ordin n mai mare.

EXEMPLE: $405{,}03 > 404{,}9875$ fiindcă $405 > 404$; $3{,}7195 > 3{,}718954$ fiindcă primele cifre zecimale diferite la aceste două numere sunt *miimile* 9 și 8 și cifra miimilor e mai mare la numărul întâi decât la al doilea.

90. Valori apropiate. Uneori în calcule nu putem sau nu trebue să ținem seama de toate cifrele zecimale ale unui număr. De exemplu, dacă dintr'un calcul am căpătat ca rezultat suma 27,6341 *lei*, o scriem numai cu două cifre zecimale: 27,63 sau 27,64.

(1) Adică 10, 100, 1000, etc.

Avem

$$27{,}63 < 27{,}6341 < 27{,}64$$

și diferențele dintre valoarea exactă și valorile luate sunt

$$27{,}6341 - 27{,}63 = 0{,}0041 < 0{,}01,$$
$$27{,}64 - 27{,}6341 = 0{,}0059 < 0{,}01.$$

De aceea numerele 27,63 și 27,64 se zic valorile *apropiate* ale sumei 27,6341 *cu aproximație mai mică decât* 0,01 (*o sutime*); 27,63 e apropiat *prin lipsă*, iar 27,64 e apropiat *prin exces* (sau *prin adaos*).

OBSERVARE. Dacă 3,4 e valoarea *exactă* a unui număr zecimal, putem scrie indiferent 3,4 sau 3,40 sau 3,400, ...

Nu e același lucru pentru valorile *apropiate*: când scriem 3,4, cunoaștem numai prima cifră zecimală exactă (aproximație $< 0{,}1$); când scriem 3,400, cunoaștem primele 3 cifre zecimale ale numărului (aproximație $< 0{,}001$).

91. Legile numerelor zecimale.

1°. Dacă mutăm virgula zecimală după n cifre *spre dreapta*, numărul zecimal se face *de* 10^n *ori mai mare* sau *se înmulțește cu* 10^n.

2°. Dacă mutăm virgula zecimală după n cifre *spre stânga*, numărul zecimal se face *de* 10^n *ori mai mic* sau *se împarte cu* 10^n.

In adevăr, astfel mărim sau micșorăm de 10^n ori valoarea unităților reprezentate de fiecare cifră [9].

EXEMPLE: $3{,}1752 \times 100 = 317{,}52$; $317{,}52 : 10 = 31{,}752$.

OBSERVARE. Cum orice număr întreg poate fi scris ca număr zecimal [88], aceste legi sunt adevărate și pentru numerele întregi.

EXEMPLE: $57 = 57{,}000$; $57 \times 1000 = 57000$; $57 : 1000 = 0{,}057$.

92. Operațiile cu numere zecimale. 1°. Adunarea și scăderea numerelor zecimale se fac ca și la numerele întregi. In scris, virgulele zecimale vin unele sub altele. Dacă e nevoe, mai ales la scădere, se complectează cifrele zecimale cu *zeruri*, pentru ca toate numerele să aibă totatâtea cifre zecimale (1).

2°. Regula pentru înmulțirea numerelor zecimale:

Operația I. *Suprimăm toate virgulele zecimale și înmulțim numerele întregi rămase.*

Operația II. *Despărțim la produs atâtea cifre zecimale, câte au avut toate numerele date.*

EXEMPLU. $5{,}72 \times 3{,}4$.

Operația I: $572 \times 34 = 19448$; operația II: 19,448 (2 zecimale).

(1) Prin aceasta aducem, de fapt, fracțiile *la același numitor.*

Regula rezultă din înmulțirea frac iilor ordinare:

$$5{,}72 \times 3{,}4 = \frac{572}{100} \times \frac{34}{10} = \frac{19448}{1000} = 19{,}448.$$

3°. Regulă pentru împărțirea unui număr zecimal printr'un număr *întreg*:

Operația I. Împărțim *partea întreagă* a deîmpărțitului prin împărțitor; obținem astfel *partea întreagă a câtului* (care poate fi și *zero*).

Operația II. Punem virgula zecimală la cât și continuăm împărțirea ca la numerele întregi, scoborînd la rest *câte una* toate cifrele zecimale dela deîmpărțit. *Pentru fiecare cifră zecimală scoborîtă la rest, trebue să scriem câte o cifră zecimală de acelaș ordin la cât.*

Dacă împărțirea nu se face exact, putem calculà câtul *cu aproximație* (cu n cifre zecimale), deoarece putem scrie deîmpărțitul cu oricâte cifre zecimale vrem, adăogându-i *zeruri* la dreapta părții zecimale, dacă e nevoe.

Restul împărțirii reprezintă unități *de ordinul ultimei cifre zecimale* scoborîte la rest *dela deîmpărțit* sau de ordinul *ultimei cifre zecimale aflate la cât.*

OBSERVARE. Aceeaș regulă se aplică pentru calcularea câtului cu aproximație și când deîmpărțitul e număr *întreg*, deoarece îl putem scrie ca număr zecimal, cu oricâte cifre zecimale vrem [88].

EXEMPLU.

336,218 | 24		Deîmpărțitul luat: 336,218000,
96 | 14,009083		Restul adevărat: 0,000008.
0218		Verificare:
200		$14{,}009083 \times 24 = 336{,}217992$
80		$+\ 0{,}000008$
8		$336{,}218000.$

In adevăr, dacă vrem să avem la cât *milionimi*, trebue să exprimăm deîmpărțitul în milionimi și avem:

336218000 milionimi : 24 = 14009083 milionimi
rest: 8 milionimi.

4°. Regulă pentru împărțirea unui număr zecimal printr'un număr *cu p cifre zecimale*:

Operația I. Suprimăm virgula zecimală dela împărțitor și mutăm virgula zecimală la deîmpărțit după p cifre zecimale spre dreapta (adică înmulțim și deîmpărțitul și împărțitorul cu 10^p) [**91**, 1].

Operația II. Împărțitorul devenind număr *întreg*, efectuăm împărțirea ca în cazul precedent [**92**, 3].

Prin operația I *câtul nu se schimbă*, iar restul se înmulțește cu 10^p; prin urmare *restul* împărțirii este restul dat de operația II *împărțit cu* 10^p [**60**, 4].

EXEMPLU. 203,7852 : 5,29.
Operația I: Inmulțim amândouă numerele cu 100.
Operația II: Efectuăm împărțirea

20378,52	529	Câtul adevărat: 38,52,
4508	38,52	Restul aflat: 1,44 [după 92, 3].
2765		Restul adevărat: 1,44 : 100 = 0,0144.
1202		Verificare: 38,52 × 5,29 = 203,7708
144		+ 0,0144
		203,7852.

93. Transformarea fracțiilor. Am văzut că orice fracție zecimală se poate scrie sub formă de fracție ordinară [88].

Invers: Orice *fracție ordinară* $\frac{a}{b}$ se poate scrie ca fracție *zecimală*.

In adevăr, fiindcă

$$\frac{a}{b} = a : b = c \qquad \text{(cât exact)},$$

problema se reduce la a calculà câtul c cu toate cifrele zecimale, care rezultă din această împărțire.

REGULĂ. *Ca să transformăm o fracție ordinară în fracție zecimală, împărțim numărătorul prin numitor.*

Distingem două cazuri:

1°. Dacă ajungem la un rest *nul*, împărțirea ne dă o fracție zecimală *exactă*.

2°. Dacă niciun rest nu e nul, împărțirea poate fi continuată *la infinit*. In acest caz căpătăm o fracție zecimală *cu o infinitate de cifre zecimale*, dar *o aceeaș grupă de cifre zecimale se reproduce la cât necontenit*. Grupa, care se repetă, se numește *perioadă* și fracția zecimală obținută se numește fracție zecimală *periodică*.

Dacă perioada sau *partea periodică* începe îndată după virgula zecimală, fracția se zice *periodică simplă*; dacă, după virgula zecimală, vine întâi o parte care nu se repetă și apoi începe partea periodică, fracția se zice *periodică mixtă*.

EXEMPLE:

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625 \qquad \text{(fracție zecimală exactă)},$$

$$\frac{9}{11} = 9 : 11 = 0{,}818181\ldots \qquad \text{(fracție periodică simplă)},$$

$$\frac{5}{22} = 5 : 22 = 0{,}2272727\ldots \qquad \text{(fracție periodică mixtă)}.$$

OBSERVARE. Fracția zecimală egală cu $\frac{a}{b}$, dacă nu e exactă, *trebue să fie periodică*, pentrucă resturile succesive ale împărțirii $a : b$ fiind toate întregi și mai mici decât b, nu pot fi decât cel mult b numere *diferite*. Dacă împărțirea continuă, trebue dar să se repete unul din resturile obținute și atunci și cifrele dela cât încep să se repete.

94. Operațiile cu fracții algebrice. Toate regulele date în paragrafele precedente, pentru operațiile *algebrice* cu numere întregi, se aplică și la operațiile algebrice cu fracții ordinare sau zecimale. Numai pentru calculele *aritmetice* vom ține seamă de regulele *speciale* date pentru fiecare fel de numere în parte.

EXEMPLE: $0{,}58 - 3{,}007 = -(3{,}007 - 0{,}58) = -2{,}427$,

$(+2{,}4) \times (-1{,}05) \times (-0{,}6) = +(2{,}4 \times 1{,}05 \times 0{,}6) = 1{,}312$,

$\left(+\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{7} - \frac{3}{5} = \frac{10}{35} - \frac{21}{35} = -\frac{11}{35}$,

$\left(+\frac{2}{7}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\left(\frac{2}{7} : \frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = -\frac{10}{21}$,

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{11} + \frac{7}{12} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{2}{11} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{12} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{12}{66} + \frac{22}{66} + \frac{55}{66}\right)$$

$$= \frac{10}{12} - \frac{89}{66} = \frac{110}{132} - \frac{178}{132} = -\frac{68}{132} = -\frac{17}{33}$$

95. Fracții generalizate. Numim astfel o expresie scrisă *sub formă de fracție ordinară*, dar care are ca numărător și ca numitor orice expresie algebrică.

EXEMPLE:

$$\frac{0{,}73}{1 - \frac{5}{3}}, \qquad \frac{\frac{a}{b} - 3c}{m^2 + \frac{p}{q}}, \qquad \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{5x+1}{-2}}.$$

REGULĂ. *Valoarea unei fracții generalizate* se calculează astfel:

Operația I. Calculăm separat valoarea *numărătorului* și valoarea *numitorului* fracției, reducând acești termeni la numere întregi, la fracții ordinare sau zecimale.

Operația II. Facem împărțirea numărătorului prin numitor.

EXEMPLE:

$\frac{0{,}73}{1 - \frac{5}{3}}$ Operația I. Numărătorul: $0{,}73$. Numitorul: $1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$. Operația II. $-\frac{0{,}73}{\frac{2}{3}} = -\frac{0{,}73 \times 3}{2} = -\frac{2{,}19}{2} = -1{,}095$.

$\frac{\frac{a}{b} - 3c}{m^2 + \frac{p}{q}}$; Numărătorul: $\frac{a - 3bc}{b}$. Numitorul: $\frac{m^2q + p}{q}$. Fracția: $\frac{(a - 3bc)q}{(m^2q + p)b}$.

Inversul unui număr λ *este numărul* $\frac{1}{\lambda}$ și avem

$$\lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Inversul unui număr întreg $a = \frac{a}{1}$ este fracția $\frac{1}{a}$.

Inversa unei fracții ordinare $\frac{a}{b}$ este fracția răsturnată $\frac{b}{a}$.

EXEMPLE: Inversul numărului 25 este $\frac{1}{25} = 0{,}04$ (1). Inversa fracției 0,04 sau $\frac{4}{100}$ este $\frac{100}{4} = 25$.

A împărți pe a cu b însemnează a înmulți pe a cu *inversul* lui b. In adevăr

$$a : b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

OBSERVARE. Orice *fracție* se poate scrie sub formă de *produs* și reciproc. Astfel, orice expresii algebrice ar fi α, β, γ, δ, avem:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \times \frac{1}{\beta}; \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma}; \qquad \alpha \times \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}}.$$

96. Egalități și neegalități cu fracții. Pentru adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea egalităților și a neegalităților, care conțin numere fracționare se aplică aceleași regule ca și pentru egalitățile și neegalitățile cu numere întregi.

Credem totuși necesar să facem observările următoare:

1°. Egalități. Din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{36}$$

înmulțind cu b ambii membri ai egalității, deducem

$$b \times \frac{a}{b} = b \times \frac{c}{d}$$

sau [după **59**, 1]

$$a = \frac{bc}{d}. \tag{37}$$

Tot din egalitatea (36) împărțind cu $a \neq 0$, deducem

$$\frac{1}{b} = \frac{c}{ad}.$$

REGULĂ. *Împărțitorul* sau *un factor dela numitorul unui membru al egalității* poate fi trecut în celălalt membru ca *înmulțitor* sau ca *factor la numărător* și reciproc: *înmulțitorul* sau *un factor dela numărătorul unui membru al egalității* poate fi tecut în celălalt membru ca *împărțitor* sau ca *factor la numitor*.

(1) TABLA III dela sfârșitul volumului ne dă inversele numerelor întregi dela 1 la 100.

EXEMPLE: Din $\frac{7}{2} = 3{,}5$ deducem $7 = 3{,}5 \times 2$;

din $\frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{9}{10}$ deducem $\frac{3 \times 6}{5} = \frac{9 \times 4}{10}$;

din $2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ deducem $2 = \frac{5}{3} : \frac{5}{6}$;

din $\frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{9}{10}$ deducem $\frac{3}{4 \times 5} = \frac{9}{10 \times 6}$.

2°. Neegalități. Din

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \tag{38}$$

înmulțind ambii membri ai neegalității cu b, deducem

$$\begin{aligned} a &> \frac{bc}{d} \quad \text{pentru} \quad b > 0, \\ a &< \frac{bc}{d} \quad \text{pentru} \quad b < 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Tot din neegalitatea (38), împărțind cu $a \neq 0$, obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &> \frac{c}{ad} \quad \text{pentru} \quad a > 0, \\ \frac{1}{b} &< \frac{c}{ad} \quad \text{pentru} \quad a < 0. \end{aligned}$$

Prin urmare aplicăm și la *neegalități* regula precedentă, dar trebue să fim atenți la *sensul* neegalității finale: dacă factorul, care se trece dintr'un membru în celălalt, e *pozitiv*, sensul neegalității se *păstrează*; dacă acest factor e *negativ*, sensul neegalității *se schimbă*.

EXEMPLU.

Din $\frac{4}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{28}$ deducem $\frac{1}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{4 \times 28}$;

din $\frac{4}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{28}$ deducem $4 < \frac{(-7) \times (-2) \times 10}{28}$.

97. Mulțimea numerelor raționale. Există *o infinitate de șiruri* de numere fracționare analoage cu șirul F_m [77]:

(F_1) $\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

(F_2) $\ldots, -\frac{n}{2}, \ldots, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{n}{2}, \ldots$

. . . . . .

(F_m) $\ldots, -\frac{n}{m}, \ldots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{n}{m}, \ldots$

. . . . . .

Șirurile F_1, F_2, ..., F_m, ... cuprind *toate numerele întregi și fracționare* (ordinare și zecimale) și formează la un loc *mulțimea numerelor raționale* (1).

Să presupunem că, luând o lungime ca unitate întreagă, însemnăm pe o axă Δ

1^0. toate punctele care corespund la diviziunile 1 (șirul F_1);

2^0. toate punctele care corespund la diviziunile $\frac{1}{2}$ (șirul F_2);

3^0. toate punctele care corespund la diviziunile $\frac{1}{3}$ (șirul F_3);

și așă mai departe. Obținem astfel *o infinitate de șiruri de puncte* F_1, F_2, ..., F_m, ... situate pe axa Δ.

Două sau mai multe puncte din șiruri *diferite* pot fi distincte sau pot coincide.

La fiecare număr rațional $\frac{a}{b}$ (întreg sau fracționar, pozitiv sau negativ) *corespunde un punct și unul singur pe axa* Δ.

Reciproca nu e adevărată: *La un punct de pe axa* Δ *sau corespund o infinitate de numere raționale egale* (2) [**80**, 3] *sau nu corespunde niciun număr rațional.*

EXEMPLE: La punctul cu abscisa 1 corespund *o infinitate* de numere raționale egale: $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots, \frac{n}{n}, \ldots$.

Din contra, dacă O e originea pe axa Δ și dacă segmentul OP este *diagonala pătratului cu latura* 1, la punctul P nu corespunde *niciun număr rațional* (3).

Toate punctele, de pe axa Δ, *la care corespund numere raționale, formează mulțimea punctelor raționale.*

98. Șirul numerelor raționale. Dacă două numere raționale λ și μ sunt *egale*, ele corespund la *același* punct P pe axa Δ (*fig.* 22, pag. 60) și avem $\lambda = \mu = \overline{OP}$.

Dacă $\lambda > \mu$ și dacă $\lambda = \overline{OP}$, $\mu = \overline{OQ}$, punctul P se găsește *la dreapta lui* Q.

Să presupunem că am însemnat pe axa Δ mulțimea tuturor punctelor raționale și că am scris în dreptul fiecărui punct rațional numărul rațional corespunzător. Cum la un punct rațional corespund o infinitate de fracții [**96**], toate *egale*, vom scrie în dreptul acelui punct fracția *nereductibilă* corespunzătoare [**81**].

---

(1) *Mulțime* = ensemble, aggregato, Menge.

(2) Din șiruri F_i diferite.

(3) Se demonstrează în Geometrie că în acest caz valoarea lungimei $\overline{OP}$ nu e un număr rațional.

Astfel toate fracțiile din șirurile F_1, F_2, ..., F_m, ... sunt așezate într'un singur șir *în ordine crescătoare*. Acest șir se numește *șirul numerelor raționale* sau *șirul* F (*fig.* 23).

OBSERVARE. Șirul F conține *toate numerele întregi și fracționare* (1).

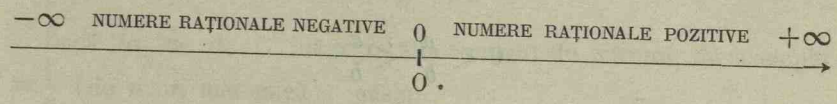


Fig. 23.

TEOREMĂ. *Intre două numere raționale neegale sunt cuprinse o infinitate de numere raționale distincte.*

In adevăr fie

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{6}.$$

Fracția

$$\frac{3+5}{7+6} = \frac{8}{13}$$

este *cuprinsă* între fracțiile date, fiindcă [după 84, 2] avem

$$\frac{3}{7} < \frac{8}{13} < \frac{5}{6}.$$

In acelaș fel găsim că fracțiile

$$\frac{3+8}{7+13} = \frac{11}{20} \quad \text{și} \quad \frac{8+5}{13+6} = \frac{13}{19}$$

sunt *cuprinse* între fracțiile date, fiindcă avem

$$\frac{3}{7} < \frac{11}{20} < \frac{8}{13} < \frac{13}{19} < \frac{5}{6}$$

și așă mai departe.

De aceea zicem că *mulțimea numerelor raționale* (adică *mulțimea* F) este *densă*.

OBSERVARE. Deși între două puncte raționale, oricât de apropiate ar fi ele pe axa Δ, se găsesc *o infinitate de alte puncte raționale*, totuși se găsesc, pe această axă, și puncte care *nu sunt raționale*, adică puncte care *nu fac parte din mulțimea* F.

COROLAR. *Oricât de mică ar fi o fracție cu termeni pozitivi* $\frac{a}{b}$, *există întotdeauna o altă fracție pozitivă mai mică decât ea.*

(1) Dacă o fracție $\frac{a}{b}$ este ***reductibilă***, valoarea ei figurează în șirul F prin fracția nereductibilă $\frac{a'}{b'}$ egală cu $\frac{a}{b}$. In acest sens zicem că și fracția $\frac{a}{b}$ se găsește în șirul F.

Numerele 0 și $\frac{a}{b}$ fiind raționale, rezultă, după teorema precedentă, că, între ele, se găsesc o infinitate de alte numere raționale.

Demonstrația se poate face și direct.

In adevăr, dacă luăm orice număr $b' > b$, avem

$$0 < \frac{a}{b'} < \frac{a}{b}.$$

Cum există o infinitate de numere b' mai mari decât b, găsim o *infinitate* de fracții $\frac{a}{b'}$ cuprinse între 0 și $\frac{a}{b}$.

In particular putem avea

$$\frac{a}{b'} < \frac{1}{10^n},$$

oricât de mare ar fi n. E de ajuns să luăm $a \cdot 10^n < b'$ sau $b' > a \cdot 10^n$

99. Mărimi comensurabile. Două mărimi *de același fel* se pot compară între ele [7]. Ele pot fi *egale* sau *neegale*. O mărime poate fi egală cu *suma* altor mărimi.

Vom zice că o mărime A se cuprinde de n ori *exact* într'o altă mărime B de același fel, dacă mărimea B este egală cu suma a n mărimi egale cu A. In acest caz B *este de n ori mai mare decât* A și *măsura lui* B *cu ajutorul lui* A *este n*, ceeace se scrie

(40) $$B = n \times A$$

sau

(41) $$\text{măs. } B = n \qquad (\text{pentru } A = 1).$$

Dacă mărimea A nu se cuprinde de un număr exact de ori în B, dar dacă există o a treia mărime C, care se cuprinde de a ori în A și de b ori în B, zicem că C este o *măsură comună* pentru mărimile A și B și scriem

(42) $$A = a \times C, \quad B = b \times C$$

sau

(43) $$\text{măs. } A = a, \quad \text{măs. } B = b \qquad (\text{pentru } C = 1).$$

In acest caz mărimile A și B se zic *comensurabile*.

DEFINIȚIE. *Raportul dintre două mărimi* A și B este raportul dintre *numerele*, care reprezintă *măsurile* acestor mărimi, determinate *cu aceeași unitate de măsură*.

Raportul dintre mărimile A și B se scrie $\frac{A}{B}$.

Avem dar, pentru egalitățile (43),

(44) $$\frac{A}{B} = \frac{\text{măs. A}}{\text{măs. B}} = \frac{a}{b} \qquad \text{(pentru C} = 1\text{)}.$$

Dacă în loc de C luăm o altă unitate de măsură, de exemplu $C' = \frac{C}{n}$ (de n ori mai mică), găsim

$$A = n \times a \times C', \quad B = n \times b \times C'$$

sau

$$\text{măs. A} = n \times a, \quad \text{măs. B} = n \times b \quad \text{(pentru C'} = 1\text{)},$$

și raportul

(45) $$\frac{A}{B} = \frac{n \times a}{n \times b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(pentru C'} = 1\text{)}.$$

Din egalitățile (44) și (45) rezultă că *valoarea raportului a două mărimi nu depinde de unitatea cu care măsurăm aceste mărimi.*

In particular, dacă alegem pe B ca unitate de măsură, din egalitatea (44) deducem

(46) $$\frac{A}{B} = \text{măs. A} = \frac{a}{b} \qquad \text{(pentru B} = 1\text{)}.$$

Prin urmare: *valoarea raportului* $\frac{A}{B}$ *este măsura lui* A *cu ajutorul lui* B.

OBSERVARE. Măsura lui B cu ajutorul lui A este $\frac{b}{a}$.

100. Mărimi incomensurabile. Dacă nu există nicio mărime C, care să se cuprindă de un număr exact de ori și în A și în B, mărimile A și B se zic *incomensurabile.*

In acest caz, pentru orice *parte alicotă* a lui B luată ca unitate de măsură, de exemplu pentru $C = \frac{B}{q}$, găsim un număr întreg p, pentru care avem

$$p \times C < A < (p+1) \times C$$

sau

$$p < \text{măs. A} < p+1 \qquad \text{(pentru C} = 1\text{)}.$$
$$\text{măs. B} = q$$

Prin urmare

(47) $$\frac{p}{q} < \frac{\text{măs. A}}{\text{măs. B}} = \frac{A}{B} < \frac{p+1}{q}.$$

In acest caz, *valoarea raportului* $\frac{A}{B}$ sau *măsura lui* A *cu ajutorul lui* B este un număr cuprins între fracțiile $\frac{p}{q}$ și $\frac{p+1}{q}$. Diferența dintre aceste fracții fiind $\frac{1}{q}$, zicem că fiecare din ele reprezintă măsura lui A (pentru B = 1) *cu aproximație mai mică decât* $\frac{1}{q}$; $\frac{p}{q}$ e o măsură apropiată *prin lipsă*, iar $\frac{p+1}{q}$ e o măsură apropiată *prin exces*.

In practică, luând pe q destul de mare, adică unitatea de măsură $\frac{B}{q}$ destul de mică, vom zice că măsura lui A cu ajutorul lui B este $\frac{p}{q}$ sau $\frac{p+1}{q}$.

EXEMPLU. Dacă A este *lungimea unei stofe* și B *lungimea unui metru* și dacă nici B, nici $\frac{B}{10}$, nici $\frac{B}{100}$ nu intră de un număr *exact* de ori în A, dar dacă $\frac{B}{100}$ se cuprinde de 345 ori în A și nu se cuprinde de 346 ori, vom zice că în lungimea A avem 345 *cm.* de stofă (sau 346), fără să ne mai gândim să măsurăm și diferența rămasă cu ajutorul fracției mai mici $\frac{B}{1000}$, adică cu *milimetrul*.

101. Unități practice de măsură. Pentru măsurarea mărimilor se întrebuințează unități *principale* și unități *secundare*: *multiplii* (unități superioare) și *submultiplii* (unități inferioare) unităților principale. Toate aceste feluri de unități se deduc, de obicei, unele din altele ca și unitățile din sistemul zecimal.

In practică avem două feluri de sisteme de măsuri: *sistemul metric* și *sistemul C. G. S.*

1°. Sistemul metric. Unitatea principală pentru *lungimi* este *metrul* (1 *m*), care e a zecea milioana parte din sfertul meridianului pământesc (1). Lungimea *metrului-etalon*, construit în platină, se păstrează la biuroul internațional de greutăți și măsuri din Sèvres (Franța). Avem metri *còpii-etalon* în toate capitalele țărilor, care au adoptat sistemul metric (2).

Multiplii metrului sunt:

1 *dam* (decametru) = 10 *m*; 1 *hm* (hectometru) = 100 *m*;

1 *km* (kilometru) = 1000 *m*; 1 *Mm* (miriametru) = 10000 *m*.

Submultiplii metrului sunt:

1 *dm* (decimetru) = 0,1 *m*; 1 *cm* (centimetru) = 0,01 *m*;

1 *mm* (milimetru) = 0·001 *m*; 1 μ (micron) = 0,000001 *m*.

Multiplii și submultiplii metrului merg *din zece în zece*.

---

(1) După măsurile a doi învățați franceji: DELAMBRE și MÈCHAIN. Sistemul metric a fost adoptat în Franța la 3 Noembie 1801 sub NAPOLEON I, dar a devenit obligator numai dela 1 Ianuar 1840.

(2) România a adoptat sistemul metric din anul 1884.

Cu decametrul se măsoară drumurile în *km* și *hm*. Măsura practică e un lanț sau o panglică lungă de 10 *m*. Aproximația e de 1 *dm*.

Cu metrul se măsoară stofele, dimensiunile clădirilor, ale materialelor de construcție, etc. Aproximația e de 1 *cm*.

Cu decimetrul sau dubludecimetrul, divizat în jumătăți de milimetru, se măsoară dimensiunile pieselor de mașini, ale figurilor dintr'un desemn, etc.

Micronul se întrebuințează pentru măsurile extrem de delicate din Fizică.

Un grad din meridianul pământesc (1) are lungimea de

$$\frac{10000}{90}\ km. = 111{,}111\ldots\ km.$$

In marină se întrebuințează: *mila marină*, care corespunde la a 60-a parte din grad sau la 1 minut din meridianul pământesc

$$1\ milă = \frac{111{,}111}{60}\ km = 1851{,}85\ m \text{ și } 1\ leghe = 3\ mile.$$

Iuțeala vapoarelor se exprimă în *noduri*. Un nod însemnează 30 *m* pe minut. Un vapor cu iuțeala de *n* noduri parcurge $n \times 30 \times 60 = n \times 1800 = n$ mile pe oră.

In Astronomie, pentru distanțele dintre astre, se întrebuințează ca unitate de lungime *raza medie a Pământului* = 6467 *km* sau *distanța medie dela Pământ la Soare* = aproape 150 milioane *km*.

Pentru *suprafețe* și *volume* nu avem unități de măsură etalon. Suprafața unei figuri și volumul unui corp se deduc *prin calcule*, măsurând anumite lungimi și aplicând formulele date de Geometrie (2). Măsurile se exprimă pentru suprafețe în *metri patrați* și pentru volume în *metri cubi* sau în multiplii și submultiplii acestor unități.

1 *mp* (metru patrat) este un patrat cu laturea de 1 *m*.

1 *mc* (metru cub) este un cub cu laturea de 1 *m*.

In acelaș fel se definesc și unitățile lor secundare. Multiplii și submultiplii metrului patrat merg *din sută în sută*. Multiplii și submultiplii metrului cub merg *din mie în mie*.

Pentru măsurarea câmpiilor se ia ca unitate *arul* (1 *a* = 1 *damp*) și *hectarul* (1 *ha* = 1 *hmp*).

Pentru suprafețele mari (județe, țări, etc.) se întrebuințează *kmp*; pentru hărțile geografice și desemnurile de precizie *mmp*.

Pentru lemne avem *sterul* (1 *st* = 1 *mc*) și *decasterul* (1 *dast* = 10 *mc*).

Pentru *capacități* unitatea de măsură este *litrul*. *Un litru este un decimetru cub*. Multiplii și submultiplii litrului merg *din zece în zece*.

OBSERVARE. Avem: 1 *kl* = 1 *mc*, 1 *l* = 1 *dmc* și 1 *ml* = 1 *cmc*.

Pentru *greutăți* unitatea de măsură e *kilogramul* (1 *kg*), greutate etalon de formă cilindrică depusă la biuroul de greutăți și măsuri din Sèvres: *kilogramul e greutatea unui decimetru cub de apă distilată*, cântărită în vid, la temperatura de +4° C.

(1) A 90-a parte din sfertul meridianului pământesc.

(2) V. FORMULELE la sfârșitul volumului.

Unitatea principală este *gramul* ($1\,g$) a mia parte din kilogram. Multiplii și submultiplii gramului merg *din zece în zece.*

Pentru greutățile mari se întrebuințează *quintalul* ($1\,q = 100\,kg$), *tona* ($1\,t = 1000\,kg$) și *vagonul* ($1\,v = 10000\,kg$).

In laboratoare și farmacii unitatea de greutate e gramul cu submultiplii lui până la miligram.

OBSERVARE. Avem pentru *apă*:

(48) $1\,mc = 1\,t, \quad 1\,dmc = 1\,kg, \quad 1\,cmc = 1\,g, \quad 1\,mmc = 1\,mg.$

Aceste egalități nu sunt adevărate pentru toate corpurile. Totuși convenim să zicem, în general, că unitățile din fiecare egalitate (48) sunt *unități corespunzătoare.*

2°. Sistemul C. G. S. In Fizică se întrebuințează numai trei unități de măsură fundamentale: *centimetrul* pentru lungime, *gramul* pentru massă și *secunda* pentru timp. Acest sistem, care n'are nicio unitate secundară, se numește *sistemul C. G. S.* după inițialele numelor celor trei unități, din care e compus.

Când numerele, care rezultă din măsurări, sunt prea mari, se întrebuințează notația prescurtată:

$$10^n = 1000 \ldots . 0 \text{ (1 urmat de } n \text{ zeruri)},$$
$$10^{-n} = 0{,}000 \ldots . 01 \text{ (1 precedat de } n \text{ zeruri)}.$$

EXEMPLE. Distanța medie dela Pământ la Soare $= 15 \times 10^{12}\ cm$; massa unei molecule de Hidrogen $= 0{,}\underset{1}{0}\underset{2}{0}0\,000 \ldots \underset{8}{0}01 = 10^{-24}\ g.$

102. Relația dintre volum și greutate. Raportul dintre greutatea unui corp și volumul lui, *exprimate în unități corespunzătoare* [**101**, 1], se numește *densitate.*

Se mai poate zice că *densitatea este greutatea unei unități de volum* exprimată în unități corespunzătoare.

EXEMPLE. Dacă 25 *cmc* de aur cântăresc 481,5 *g* (centimetrul cub și gramul fiind unități corespunzătoare), densitatea aurului este

$$D = \frac{481{,}5}{25} = \frac{1926}{100} = 19{,}26.$$

Prin urmare 1 *cmc* de aur cântărește 19,26 *grame.*

Dacă însemnăm cu V volumul, cu G greutatea și cu D densitatea unui corp, avem formulele:

(XIX) $$D = \frac{G}{V}, \quad G = VD, \quad V = \frac{G}{D}.$$

OBSERVARE. In aceste formule D e un număr *abstract*; greutatea G și volumul V trebue să fie exprimate în unități *corespunzătoare.*

V. — NUMERE COMPLEXE ARITMETICE.

103. Sisteme complexe. Când multiplii şi submultiplii unui sistem de unităţi de măsură nu sunt formaţi după sistemul zecimal (1), sistemul de măsură este *un sistem complex*, iar numărul, care rezultă din această măsură este un *număr complex* aritmetic [**10**] (2).

Prin astfel de numere complexe se exprimau măsurile cu *unităţile vechi* din toate ţările, înainte de întroducerea *sistemului metric*. Sistemul complex se mai păstrează şi azi pentru măsurile din Anglia şi Rusia, precum şi în Geometrie şi Astronomie, pentru măsurarea unghiurilor, a arcurilor şi a timpului.

1°. Unităţi vechi româneşti. Diferitele provincii româneşti fiindcă au aparţinut, înainte de unire, la state diferite, au avut şi unităţile vechi de măsură *diferite* (3).

Astfel pentru *lungimi* se întrebuinţă ca unitate principală de măsură *stânjenul*:

In *Ardeal*

$1\ st. = 1{,}90\ m = 6$ *urme* (u), $1\ u = 12$ *policari* (p).

In *Muntenia*

$1\ st. = 1{,}96\ m = 8$ *palme* (p), $1\ p = 12$ *degete* (d).

In *Moldova*

$1\ st. = 2{,}23\ m = 8$ *palme* (p), $1\ p = 8$ *palmace* (pc).

Măsura: 3 stânjeni 5 palme şi 9 degete se scrie

$$3\ st\ 5\ p\ 9\ d \qquad (\textit{număr complex}).$$

Un număr complex aritmetic este, de fapt, un număr fracţionar ordinar mai complicat. Astfel, fiindcă fiecare deget este *o zecime* din palmă, avem

$$5\ p\ 9\ d = 5 + \frac{9}{10}\ \textit{palme}$$

şi fiindcă fiecare palmă este *o optime* din stânjen, avem

$$3\ st\ 5\ p\ 9\ d = 3 + \frac{5 + \frac{9}{10}}{8}\ \textit{stânjeni}.$$

2°. Unităţi engleze (4). In Anglia unitatea principală de măsură pentru lungimi este *yardul* (y):

$1\ y = 0{,}914\ m = 3$ *picioare* (f), $1\ f = 12$ *degete* (i) (5).

(1) Adică nu merg *din zece în zece* sau *din sută în sută*, etc.

(2) Să nu se confunde aceste numere complexe din Aritmetică cu *numerele complexe* sau *imaginare* din Algebră.

(3) V. TABLA IV dela sfârşitul volumului.

(4) V. TABLA V dela sfârşitul volumului.

(5) In limba engleză *feet* (picioare) şi *inches* (degete).

Pentru valori unitatea principală e *livra sterling* (*L. st.*) (1):

1 *L. st.* = 25.22 lei *aur* = 20 *șilingi* (*s*), 1 *s* = 12 *dinari* (*d*). (2).

In loc de 15 livre sterlingi 8 șilingi și 7 dinari se scrie *L. st.* 15 . 8 . 7.

3°. Unități pentru arcuri, unghiuri și timp. Pentru arcuri se întrebuințează ca unitate principală de măsură *gradul*, care e a 360-a parte din *cerc* și ca submultiplii: *minutul* și *secunda*.

1 grad (1°) = 60 *minute*; 1 minut (1′) = 60 *secunde* (60″).

Unghiurile la centru, corespunzătoare acestor arcuri de cerc, sunt unitățile *cu același nume* pentru *unghiuri*.

Pentru *timp* unitatea de măsură este *ziua* (solară medie):
1 zi = 24 *ore*; 1 oră (1 *h*) = 60 *minute* (*m*); 1 *m* = 60 *secunde* (*s*).

EXEMPLE. Vom scrie dar

15 grade 42 minute și 25 secunde de *arc*: 15° 42′ 25″,
15 ore 42 minute și 25 secunde de *timp*: 15 *h* 42 *m* 25 *s*.

104. Transformările numerelor complexe. *Numărul, care ne arată câte unități de un ordin formează o unitate de ordin superior*, este *raportul dintre aceste două feluri de unități.*

Astfel raportul dintre *zile* și *ore* este 24; raportul dintre *grade* și *secunde* este 60 × 60 = 3600.

In toate problemele cu numere complexe intervin două feluri de operații: transformarea unor unități date în unități de ordin *inferior* lor sau în unități de ordin *superior*.

1°. Ca să transformăm niște unități date în unități de ordin *inferior*, *înmulțim* numărul unităților date prin raportul dintre aceste unități și unitățile inferioare cerute.

EXEMPLU: 5 zile câte ore fac? Raportul dintre *zile* și *ore* e 24 și 5 × 24 = 120 ore.

2°. Ca să transformăm niște unități date în unități de ordin *superior*, *împărțim* numărul unităților date prin raportul dintre unitățile superioare cerute și unitățile date.

EXEMPLU. 1 000 000 secunde câte zile fac? Raportul dintre *zile* și *secunde* este 86400 și 1 000 000 *s*: 86400 ne dau 11 zile și 49600 secunde.

105. Transformarea unui număr complex în număr întreg și viceversa. 1°. Orice număr complex conține, în toate unitățile care-l compun, un număr *întreg* de unități de ordinul *cel mai mic*.

---

(1) In românește se zice adesea 1 *liră* în loc de 1 *livră*. Nu există *lire* decât în Italia. In Anglia, în Turcia și în Egipt unitatea pentru valori este *livra* engleză, turcească sau egipteană.

(2) In englezește: 1 livră sterling = 1 *pound*; 1 șiling = 1 *shilling*; 1 dinar = 1 *penny*.

EXEMPLU. In $45\,z\ 8\,h\ 29\,m\ 14\,s$ avem $45 \times 24 + 8 = 1088$ *ore*;
$1088 \times 60 + 29 = 65309$ minute; $65309 \times 60 + 14 = 3918554$ secunde.

REGULĂ. Ca să transformăm un număr *complex* în număr *întreg, transformăm*, prin *înmulțiri* și *adunări* succesive, *unitățile de ordinul cel mai înalt în unități de ordin imediat inferior*; apoi *toate unitățile de acest ordin în unități de ordin imediat inferior lor* și așà mai departe până ce ajungem la unitățile de ordinul *cel mai mic*, care se găsesc în numărul complex dat.

2°. Uneori ni se dă *un număr întreg de unități de acelaș ordin* și vrem să știm *câte unități de ordine superioare* se găsesc în el.

E problema inversă celei precedente. In acest caz va trebui să facem un șir de împărțiri [**104**, 2].

EXEMPLU. In 3 918 554 secunde găsim prin împărțiri succesive:

$3918554 : 60 = 65309$ *minute* și un rest de $14\,s$;
în $65309\,m$ avem $65309 : 60 = 1088$ *ore* și un rest de $29\,m$;
în $1088\,h$ avem $1089 : 24 = 45$ *zile* și un rest de $8\,h$.

In practică aceste operații se așează în modul următor:

3918554 *s*	60		
318	65309 *m*	60	
185	530	1088 *h*	24
554	509	128	45 *z*
14 *s*	29 *m*	8 *h*	

Deci 3 918 554 secunde = 45 zile 8 ore 29 minute 14 secunde.

REGULĂ. Ca să transformăm un număr *întreg* în număr *complex* căutăm, prin *împărțiri* succesive, în unitățile date *câte unități avem de ordin imediat superior*; *apoi* în aceste noi unități, *câte unități avem de ordin imediat superior acestora* și așà mai departe până ajungem la unitățile de ordinul *cel mai înalt* ce putem eveà.

Ultimul cât și resturile împărțirilor efectuate sunt părțile care compun numărul complex căutat.

106. Transformarea unui număr complex în număr fracționar și viceversa. 1°. Intâlnim această transformare, când vrem să exprimăm *toate* unitățile, care compun un număr complex, cu ajutorul *unei singure unități, alta decât cea de ordinul cel mai mic.*

EXEMPLU. Să exprimăm $45\,z\ 8\,h\ 29\,m\ 14\,s$ în *ore*. Numărul căutat va conține evident o *parte întreagă* $45 \times 24 + 8 = 1088$ *ore* și o *parte fracționară* $29\,m\ 14\,s$, care e mai puțin decât o oră. Această parte exprimată în secunde este $29 \times 60 + 14 = 1754\,s$. Secunda fiind $\frac{1}{3600}$ din oră, 1754 secunde fac $\frac{1754}{3600}$ ore. Deci

$$45\,z\ 8\,h\ 29\,m\ 14\,s = 1088 + \frac{1754}{3600} \text{ ore} = 1088{,}4872 \text{ ore}.$$

REGULĂ pentru transformarea unui număr *complex* în număr *fracționar*:

Operația I. *Exprimăm în unitățile întregi cerute toate unitățile de ordin superior acestora* [**105**, 1]. Obținem astfel *partea întreagă* a numărului fracționar.

Operația II. *Transformăm în unitățile de ordinul cel mai mic toate unitățile inferioare unității întregi cerute și împărțim numărul obținut prin raportul dintre unitatea cerută și unitatea de ordinul cel mai mic.* Obținem astfel *partea fracționară* a numărului căutat.

OBSERVARE. Dacă vrem ca numărul fracționar să fie *zecimal*, transformăm partea fracționară obținută în fracție zecimală, împărțind numărătorul prin numitor [**93**].

2°. REGULĂ pentru transformarea unui număr *fracționar* în număr *complex*:

Operația I. *Înmulțim numărul fracționar dat cu raportul dintre unitatea lui întreagă și unitatea de ordinul cel mai mic.* Numărul fracționar devine astfel un număr *întreg* sau *fracționar* exprimat în unitățile de ordinul cel mai mic.

Operația II. Transformăm *partea întreagă* a acestui număr în *număr complex* [**105**, 2].

EXEMPLU. In 1088,4872 ore, fiindcă unitatea de ordinul cel mai mic e secunda și fiindcă raportul dintre *ore* și *secunde* este 3600, avem $1088{,}4872 \times 3600 = 3\,918\,553{,}92$ secunde și [după **105**, 2] găsim

$$1088{,}4872\,h = 45\,z\ 8\,h\ 29\,m\ 13{,}92\,s.$$

107. Operațiile cu numere complexe. Fiindcă un număr complex se poate transformà în număr *întreg* sau *fracționar*, operațiile cu numere complexe se reduc la operații cu numere întregi sau fracționare.

Totuși în unele cazuri, aceste operații se pot efectuà într'un mod mai simplu calculând direct cu numerele complexe.

Dăm acì câteva exemple, din care se deduc ușor regulele întrebuințate.

1°. *Adunarea.*

$$\begin{array}{r} 10^0\ 25'\ 39'' + \\ 28^0\ \ 7'\ 43'' + \\ \ \ 5^0\ 35'\ 14'' \\ \hline 43^0\ 67'\ 96'' \end{array}$$

dar

$$\begin{array}{l} 43^0 = 43^0 \\ 67' = \ \ 1^0\ 7' \\ 96'' = \ \ \ \ 1'\ 36'' \\ \hline \text{total: } 44^0\ 8'\ 36'' \end{array}$$

In practică se reținu în minte unitățile de ordin superior și se adună la suma următoare. Astfel vom zice: 14 cu 43 fac **54** și cu 39, 96″ adică 1′ și 36″. Se scrie **36 sub secunde**, iar 1′ se adună la coloana următoare.

2°. *Scăderea.*

$$\begin{array}{l} 46^0\ 35'\ 7'' - \\ 18^0\ 42'\ 19'' \\ \hline ? \end{array} \qquad \text{scriem} \qquad \begin{array}{l} 45^0\ 94'\ 67'' - \\ 18^0\ 42'\ 19'' \\ \hline \text{rest: } 27^0\ 52'\ 48'' \end{array}$$

adunând 1^0 sau $60'$ (din 46^0) la $35'$ și $1'$ sau $60''$ (din $35'$) la $7''$.

3°. *Inmulțirea* cu un număr *întreg.*

$$\begin{array}{l} 17^0\ 42'\ 32'' \times \\ \qquad 5 \\ \hline ? \end{array} \qquad \begin{array}{l} 32' \times 5 = 160'' = \quad 2'\ 40'' \\ 42' \times 5 = 210' = 3^0\ 30' \\ 17^0 \times 5 = 85^0 = 85^0 \\ \hline \text{produs: } 88^0\ 32'\ 40''. \end{array}$$

In practică se reține în minte unitățile de ordin superior ($2'$ sau 3^0) și se adună la produsul următor.

4°. *Impărțirea* printr'un număr *întreg.*

$$\begin{array}{l|l} 88^0\ 32'\ 40'' & 5 \\ 88^0 : 5 = \mathbf{17^0} & \hline 17^0\ 42'\ 32'' \text{ cât.} \\ 38 & \end{array}$$

$$3^0 \times 60 = 180'$$
$$+\ 32$$
$$\overline{212'} : 5 = \mathbf{42'}$$
$$12$$
$$2' \times 60 = 120''$$
$$+\ 40$$
$$\overline{160''} : 5 = \mathbf{32''}$$
$$10$$
$$0$$

Restul dela împărțirea gradelor se transformă în minute și restul dela împărțirea minutelor se transformă în secunde.

EXERCIȚII.

9. Ce valoare are produsul $-2x$, dacă x are una din valorile următoare:

1°. $x = 5 \times 14 - 8 - 7 \times 3 - 9$; 2°. $x = 5 \times (14 - 8) - 7 \times (3 - 9$;
3°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7) \times (3 - 9)$; 4°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7) \times 3 - 9$;
5°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7 \times 3 - 9)$; 6°. $x = 5 \times [14 - 8 - (7 \times 3 - 9)]$.

R. 1°. -64; 2°. -144; 3°. -60; 4°. $+48$; 5°. $+240$; 6°. $+60$.

10. Să se pue în evidență factorul comun în una din expresiunile următoare:

1°. $3x + (x+y)(x-y) + (x-y)^2 - 3y$;
2°. $2x + 3y + (5x+y)^2 + (5x+y)(5x-y) + 3x - 2y$;
3°. $2\pi r^2 h - 0{,}24\pi^2 r^2 + \frac{10}{29}\pi r$;
4°. $2{,}7 - 0{,}27 - 0{,}027 + 27 - 2700$.

R. 1°. $(2x+3)(x-y)$; 2°. $(10x+1)(5x+y)$; 3°. $2\pi r\left(rh-0{,}12\pi r+\frac{5}{29}\right)$;
4°. $27\times(0{,}1-0{,}01-0{,}001+1-100)=-27\times 98{,}911=-2670{,}597$.

11. Să se scrie expresiunile: 15, ax, $40x^2$, $\frac{8}{5}ab$, $\frac{7axy}{15}$, $2a-8b+5c$ ca produse 1°. cu factorul 2; 2°. cu factorul -5; 3°. cu factorul $-\frac{2}{5}$.

R. $2\times 7{,}5$; $2\times\frac{ax}{2}$; $(-5)\times(-8x^2)$; $(-5)\times\frac{-8}{25}ab$; $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{-7axy}{6}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-5a+20b-\frac{25}{2}c\right)$.

12. Să se adune fracțiile

1°. $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{9}{20}$; 2°. $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$;
3°. $\frac{\pi r^2\alpha}{90}$, $\frac{\pi r^2\beta}{60}$, $2\pi r^2$; 4°. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$;
5°. $\frac{x}{bc}$, $\frac{y}{ac}$, $\frac{z}{ab}$; 6°. $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$.

R. 1°. $\frac{228}{100}=2{,}28$; 2°. $\frac{6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{n(n^2+5)}{6}$;
3°. $\pi r^2\,\frac{2\alpha+3\beta+360}{180}$; 4°. $\frac{ab+bc+ca}{abc}$; 5°. $\frac{ax+by+cz}{abc}$; 6°. $\frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}$.

13. Să se scrie fracția, care are ca numărător suma numărătorilor și ca numitor suma numitorilor fracțiilor din fiecare exercițiu **12**.

R. 1°. $\frac{24}{59}$; 2°. $\frac{n}{9}(n^2-2n+2)$; 3°. $\frac{\pi r^2}{150}(\alpha+\beta+2)$; 4°. $\frac{3}{a+b+c}$;
5°. $\frac{x+y+z}{bc+ac+ab}$; 6°. $\frac{a+b+c}{b+c+a}=1$.

14. Să se înmulțească fracțiile din fiecare exercițiu **12**.

R. 1°. $\frac{189}{4000}$; 2°. $\frac{n^3(n-1)^2(n-2)}{12}$; 4°. $\frac{1}{abc}$; 5°. $\frac{xyz}{a^2b^2c^2}$; 6°. $\frac{abc}{abc}=1$.

15. Să se efectueze operațiile:

1°. $0{,}053289\times 10000$; 2°. $1{,}5729:10000$; 3°. $0{,}2\times 0{,}5\times 0{,}1$;
4°. $36{,}408\times 125000$; 5°. $0{,}007\times 0{,}02\times 0{,}009$; 6°. $1:0{,}07504$;
7°. $10:0{,}125$; 8°. $(1-0{,}72536):4$; 9°. $(-6+0{,}03289):5$.

R. 1°. $532{,}89$; 2°. $0{,}00015729$; 3°. 1; 4°. $36408000:8=4551000$;
5°. $0{,}000000126$; 6°. $\frac{6250}{469}=13{,}326$; 7°. $10:\frac{1}{8}=80$.

Căturile 8° și 9° se pot calculă în două feluri: sau efectuăm întâi diferențele din paranteze și apoi facem împărțirea; sau scriem, adunând și scăzând același număr,

8°. $(4-3{,}72536):4=1-0{,}93134=0{,}06866$;
9°. $(-10+4{,}03289):5=-2+0{,}80658=-1{,}19342$.

16. Să se calculeze valoarea numărului x, pentru care avem:

$1^0.\ 5\frac{1}{8} \times x = 3\frac{5}{6}$; $2^0.\ 0{,}546 : x = 1{,}2$; $3^0.\ x : 3{,}1415 = 0{,}0729$.

R. $1^0.\ x = \frac{92}{123}$; $2^0.\ x = 0{,}455$; $3^0.\ x = \frac{729}{31415} = 0{,}02323\ldots$

17. 1^0. *De câte ori* e mai mare fracţia $\frac{15}{7}$ decât $\frac{6009}{14021}$? *Cu cât* e mai mare?

R. $1^0.\ \frac{6009}{14021} \times x = \frac{15}{7}$; $x = \frac{15}{7} : \frac{6009}{14021} = \frac{15}{7} : \frac{3}{7} = 5$; deci *de 5 ori.*

$2^0.\ \frac{6009}{14021} + x = \frac{15}{7}$; $x = \frac{15}{7} - \frac{6009}{14021} = \frac{15}{7} - \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$; deci *cu* $\frac{12}{7}$.

18. 1^0. *De câte ori* e mai mică fracţia 0,002048 decât $\frac{1376}{15625}$? *Cu cât* e mai mică?

R. $1^0.\ \frac{1376}{15625} : x = \frac{2048}{1000000} = \frac{32}{15625}$; $x = \frac{1376}{32} = 43$; deci *de 43 ori.*

$2^0.\ \frac{1376}{15625} - x = \frac{32}{15625}$; $x = \frac{1376 - 32}{15625} = \frac{1344}{15625} = 0{,}086016$; deci *cu* 0,086016.

19. Cu cât creşte produsul $34507 \times 0{,}659$, când creştem fiecare factor cu 0,001?

R. Cu $0{,}001 \times 0\,659 + 0{,}001 \times 34507 + 0{,}001 \times 0{,}001 = 0{,}0041107$.

20. Să se simplifice fracţiile:

$1^0.\ \frac{1.2.3.\ldots 2n}{2.4.6.\ldots 2n}$; $2^0.\ \frac{1.2.3.\ldots (2n+1)}{1.3.5.\ldots (2n+1)}$; $3^0.\ \frac{1.3.5.\ldots (2n+1)}{2.4.6.\ldots (2n+2)}$.

R. $1^0.\ 1.3.5.\ldots (2n-1)$; $2^0.\ 2.4.6.\ldots 2n$; 3^0. avem pentru n nepăreche $\frac{(n+2)(n+4)\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.2.4.6.\ldots(n+1)}$; pentru n păreche $\frac{(n+3)(n+5)\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.2.4.6.\ldots n}$.

21. Să se aşeze în ordine de mărime fracţiile

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b},\ \frac{a+1}{b+1},\ \frac{a+2}{b+2},\ \ldots,\ \frac{a+n}{b+n},\ \frac{a+n+1}{b+n+1},\ \ldots$$

R. Şirul (α) e crescător pentru $a < b$ şi descrescător pentru $a > b$.

22. Într'un an sunt 365,2422 zile. Câte zile, ore, minute şi secunde sunt într'un an?

R. 365 *z* 5 *h* 48 *m* 46 *s*.

23. Pe un cadran un indicator descrie într'o oră un arc de $4^0\ 18'\ 37''$; ce arc va descrie el în 2 zile 9 ore 25 minute şi 41 secunde?

R. $4^0\ 18'\ 37'' = 15517''$; 2 *z* 9 *h* 25 *m* 41 *s* $= 57 + \frac{1541}{3600}$ *ore* $= \frac{2067{,}41}{36}$ *ore*,

şi $15517 \times \frac{2067{,}41}{36} = 891139'' = 247^0\ 32'\ 19''$.

CAPITOLUL III.

OPERAȚIILE DE TREAPTA A TREIA.

I. — RIDICAREA LA PUTERE.

108. Puterea unui număr. *A ridică pe a la puterea n* însemnează a efectuà produsul

$$(XX) \qquad a^n = a \times a \times \ldots \times a$$

format din n factori egali cu a [**49**].

Rezultatul acestei operații se numește *puterea a n-a* a lui a; a este *baza* iar n *exponentul* acestei puteri.

In această definiție n este un număr *întreg* și *pozitiv*; a poate fi orice expresie algebrică.

Adunarea este operația directă *de treapta întâia*; înmulțirea (adunare de numere egale) este operația directă *de treapta a doua*; ridicarea la putere (înmulțire de numere egale) este operația directă *de treapta a treia* și avem:

$$na = a + a + \ldots + a \qquad (n \text{ termeni } a),$$
$$a^n = a \times a \times \ldots \times a \qquad (n \text{ factori } a).$$

Observare. Un patrat, cu laturea de a centimetri, are suprafața de a^2 centimetri *patrați* (*fig.* 24); un cub, cu laturea de a centimetri, are volumul de a^3 centimetri *cubi*.

De aceea a^2 și a^3 se mai zic *a la patrat* și *a la cub*.

EXEMPLU. 1 metru = 10 decimetri (*dm*); 1 metru *patrat* = 10^2 *dmp* = 100 *dmp*; 1 metru *cub* = 10^3 *dmc* = 1000 *dmc*.

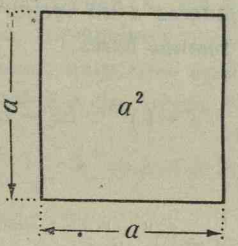
Puterea a n-a a unui număr întreg (pentru n întreg și pozitiv) e tot un număr *întreg* și se numește *putere perfectă*. In particular, patratul sau cubul unui număr întreg e un număr *întreg* și se numește *patrat* sau *cub perfect*.

Pentru înlesnirea calculelor practice se pot întrebuința *tablele*, care dau *patratele* și *cuburile* numerelor întregi (1):

Numere:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
Patrate:	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144 ...
Cuburi:	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728 ...

Din aceste table rezultă că numerele scrise cu 1 cifră au patratele lor formate din 1 sau 2 cifre și cuburile din 1, 2 sau 3 cifre. În general, numerele întregi scrise cu n cifre au patratele lor formate din $2n$ sau $2n-1$ cifre și cuburile formate din $3n$, $3n-1$ sau $3n-2$ cifre.

Un număr întreg terminat cu p zeruri are patratul terminat cu $2p$ zeruri și cubul terminat cu $3p$ zeruri.



lungimea a
lățimea a
suprafața a^2

Fig. 24.

OBSERVARE. Când vrem să scriem *puterea unei expresii algebrice* neefectuate (sumă, diferență, produs, etc.) *trebue să punem această expresie într'o paranteză* și să scriem exponentul sus și la dreapta acestei paranteze. Astfel:

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$ pe când $a+b^2 = a+bb$;
$(abc)^3 = abcabcabc$ pe când $abc^3 = abccc$.

EXEMPLE. $(3-5)^4 = (-2)^4 = 16$; $3-5^4 = 3-625 = -622$;
$[(-2)(+3)(-5)]^2 = [+30]^2 = 900$;
$(-2)(+3)(-5)^2 = (-2)(+3)(+25) = -150$.

109. Puterea unui număr algebric. Din definiția puterii unui număr [XX] și după regula dată pentru *semnul* unui produs de numere algebrice [**47**] rezultă că

1°. dacă a e *pozitiv*, oricare ar fi n întreg și pozitiv, a^n e *pozitiv*.

2°. dacă a e *negativ* și n *păreche*, a^n e *pozitiv*;
dacă a e *negativ* și n *nepăreche*, a^n e *negativ*.

1) TABLA III dela sfârșitul volumului.

EXEMPLE. $(+3)^2 = (+3).(+3) = +3^2 = +9$;
$(+3)^3 = (+3).(+3).(+3) = +3^3 = +27$;
$(-3)^2 = (-3).(-3) = +3^2 = +9$;
$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -3^3 = -27$.

In general, oricare ar fi a, avem

$$\text{(XXI)} \qquad \begin{aligned} (+a)^{2n} &= +a^{2n}, & (+a)^{2n+1} &= +a^{2n+1}, \\ (-a)^{2n} &= +a^{2n}, & (-a)^{2n+1} &= -a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Regulă pentru *semnul* puterei unui număr algebric, când exponentul e întreg şi pozitiv:

Dacă exponentul e păreche, puterea e un număr pozitiv; dacă exponentul e nepăreche, puterea are semnul bazei.

Fiindcă

$$(-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1,$$

putem scrie în toate cazurile

$$\text{(XXII)} \qquad (-a)^{\nu} = (-1)^{\nu}.a^{\nu}.$$

Pentru $\nu = 2n$ avem primele două formule (XXI); pentru $\nu = 2n+1$ avem pe celelalte două.

110. Puterea unei fracţii. 1°. Fracţie ordinară. *Ca să ridicăm o fracţie ordinară la o putere, ridicăm şi numărătorul şi numitorul ei la acea putere.* Astfel:

$$\text{(XXIII)} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

In adevăr

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{\underset{1}{b}} \times \frac{a}{\underset{2}{b}} \times \ldots \times \frac{a}{\underset{n}{b}} = \frac{a \times a \times \ldots \times a}{\underset{1}{b} \times \underset{2}{b} \times \ldots \times \underset{n}{b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Puterea a n-a a unei fracţii ordinare nereductibile este tot o fracţie ordinară *nereductibilă*.

Astfel în $\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^n}{3^n}$ avem la numărător n factori 2 şi la numitor n factori 3; numărătorul şi numitorul *n'au niciun factor comun* şi fracţia $\frac{2^n}{3^n}$ e *nereductibilă* ca şi $\frac{2}{3}$ [81].

OBSERVARE. Puterea a n-a a unei fracţii ordinare nereductibile *nu poate fi un număr întreg.*

Când ridicăm la *aceeaş putere* şi numărătorul şi numitorul unei fracţii, *valoarea fracţiei se schimbă* şi anume fracţia se face *mai mică*, dacă este subunitară şi *mai mare*, dacă este supraunitară. In amândouă cazurile fracţia *se depărtează de unitate.*

EXEMPLU.

$$\frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{1}{2} < 1 \quad \text{şi avem} \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1;$$

$$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} > \frac{3}{2} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{3}{2} > 1 \quad \text{şi avem} \quad 1 < \frac{3}{2} < \frac{9}{4}.$$

2°. Fracţie zecimală. Ca să ridicăm la puterea n un număr cu p cifre zecimale, *suprimăm virgula zecimală* şi *ridicăm la puterea n numărul întreg rămas*; *despărţim* apoi *la rezultat np cifre zecimale.*

In adevăr, dacă λ e un număr cu p cifre zecimale, produsul

$$\lambda^n = \lambda \times \lambda \times \ldots \times \lambda \qquad (n \text{ factori } \lambda)$$

are np cifre zecimale [92, 2].

111. Legile puterii. Din definiţia (XX) rezultă următoarele *legi* pentru puterile cu exponenţi *întregi* şi *pozitivi*:

1°. Ridicarea la putere este o operaţie întotdeauna *posibilă* şi *univocă.*

2°. *Dacă* $m = p+q$, *avem* $a^m = a^p . a^q$ şi *reciproc.*

In adevăr, înmulţirea fiind *asociativă* [51, 4], putem scrie

$$a^m = \underset{1}{a}.\underset{2}{a}.\underset{\ldots}{a} \ldots \underset{m}{a} = \underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{p}{a}.\underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{q}{a} = a^p . a^q,$$

şi reciproc

$$a^p . a^q = a^{p+q}. \tag{XXIV}$$

3°. Ridicarea la putere a unui *produs* este o operaţie *distributivă.* Adică avem

$$(a.b.c)^m = a^m . b^m . c^m. \tag{XXV}$$

In adevăr

$$(a.b.c)^m = \underset{1}{a}.\underset{1}{b}.\underset{1}{c}.\underset{2}{a}.\underset{2}{b}.\underset{2}{c}. \ldots . \underset{m}{a}.\underset{m}{b}.\underset{m}{c}$$

$$= \underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{m}{a}.\underset{1}{b}.\underset{2}{b} \ldots \underset{m}{b}.\underset{1}{c}.\underset{2}{c} \ldots \underset{m}{c} = a^m . b^m . c^m.$$

OBSERVARE. Ridicarea la putere *nu este o operaţie comutativă.*

Adică avem

(1) $$a^b \neq b^a \quad \text{dacă} \quad a \neq b.$$

EXEMPLU: $2^3 = 8$, $3^2 = 9$ deci $2^3 \neq 3^2$.

De aceea, dacă însemnăm cu a și b două numere date și cu x numărul care se caută, problemele inverse $a^x = b$ și $x^a = b$ sunt două probleme cu totul diferite.

112. Operațiile cu puteri. 1°. Ca să *adunăm* sau să *scădem* mai multe puteri, *trebue să efectuăm întâi fiecare putere* și apoi să facem operațiile de adunare sau de scădere între rezultatele obținute.

EXEMPLU: $3^5 + (-2)^3 - 5^4 = 243 + (-8) - 625 = -390$.

Prin urmare sume algebrice ca: $a^3 + b^3 + c^3$, $a^5 - b^5$, $a^2 + a^5 - a^4$ nu se pot efectuà, decât numai când cunoaștem valorile numerelor a, b, c.

Intr'un singur caz operația e posibilă: când în suma algebrică avem numai *puteri asemenea*, adică puteri cu *aceeaș bază* și *acelaș exponent*. Astfel

$$7^3 + 7^3 = 2 \cdot 7^3, \quad a^3 - a^3 = 0, \quad 2x^2 + 5x^2 - 3x^2 = (2 + 5 - 3)x^2 = 4x^2.$$

Intr'o sumă algebrică, orice *termen* are: 1°. un *semn*, care se scrie înaintea termenului; 2°. un *factor numeric* și 3°. unul sau mai mulți factori scriși cu *litere* ridicate la diferite puteri.

Semnul împreună cu factorul numeric formează *coeficientul*, iar literele cu exponenții lor formează *partea literală* a termenului.

Astfel în $-15a^2x^3$, -15 e coeficientul, iar a^2x^3 e partea literală.

Când un termen n'are niciun factor numeric, se subînțelege factorul 1. Astfel x^5y^2 are coeficientul 1 sau $+1$; $-x$ are coeficientul -1.

Doi sau mai mulți termeni se zic *asemenea*, când au *aceeaș parte literală* (adică au *aceleași litere* și fiecare literă are în toți termenii *acelaș exponent*).

OBSERVARE. Când numerele sunt scrise cu *litere*, *se pot efectuà numai sumele algebrice cu termeni asemenea.*

EXEMPLU. $$2a^2x^3 - \tfrac{1}{2}a^2x^3 - \tfrac{5}{4}a^2x^3 + \tfrac{1}{2}a^2x^3 = \left(2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}\right)a^2x^3$$
$$= \left(2 - \tfrac{5}{4}\right)a^2x^3 = \tfrac{3}{4}a^2x^3.$$

Această operație se numește *reducerea termenilor asemenea.*

REGULĂ. *Ca să reducem mai mulți termeni asemenea, scriem partea literală comună o singură dată și-i punem ca coeficient suma algebrică a coeficienților acestor termeni.*

EXEMPLU. Din $5x^2 - 3x + 7 = 2x^2 - 9x - 6$ rezultă [40, 7]

$$5x^2 - 3x + 7 - 2x^2 + 9x + 6 = 0 \quad \text{sau} \quad 3x^2 + 6x + 13 = 0.$$

2°. REGULĂ. *Ca să înmulțim mai multe puteri ale aceluiaș număr scriem numărul o singură dată și-i punem ca exponent suma exponenților puterilor date.*

Această regulă rezultă din formula (XXIV). Astfel:

$$a^p \cdot a^q \cdot a^r = a^{p+q} \cdot a^r = a^{p+q+r}. \tag{2}$$

EXEMPLU: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, $2a^3 \times 5a^4 \times (-4a^6) = -40a^{13}$.

3°. REGULĂ. *Ca să împărțim două puteri ale aceluiaș număr, scriem numărul o singură dată și-i punem ca exponent diferența exponenților* (scăzând exponentul împărțitorului din exponentul deîmpărțitului). Astfel:

$$a^p : a^q = a^{p-q}. \tag{XXVI}$$

In adevăr avem

$$a^{p-q} \cdot a^q = a^{p-q+q} = a^p.$$

Puterea a^{p-q} are un sens numai dacă p e *mai mare* decât q.

EXEMPLU: $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

113. Exponenți nuli și negativi. Formula (XXVI) capătă un sens în toate cazurile, dacă definim puterile cu exponenți *nuli* și *negativi* în modul următor.

Pentru $p = q$ formula (XXVI) ne dă

$$a^p : a^p = a^{p-p} = a^0.$$

Pe de altă parte avem evident $a^p : a^p = 1$. Trebue dar să considerăm

$$a^0 = 1, \tag{XXVII}$$

oricare ar fi $a \neq 0$.

EXEMPLE: $5^0 = 1$, $x^0 = 1$, $\left(-\frac{5}{7}\right)^0 = 1$, $(0{,}01)^0 = 1$.

Pentru $p < q$, de exemplu pentru $q = p + n$, formula (XXVI) ne dă

$$a^p : a^{p+n} = a^{p-p-n} = a^{-n}.$$

Pe de altă parte avem evident

$$a^p : a^{p+n} = \frac{a^p}{a^{p+n}} = \frac{a^p \cdot 1}{a^p \cdot a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trebue dar să considerăm

(XXVIII) $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Cu aceste *definițiuni* formulele (XXIV) și (XXVI) sunt aplicabile pentru *orice valori întregi algebrice* ale numerelor p și q.

In adevăr pentru p sau q *nule* găsim

$$a^0 . a^q = a^{0+q} = a^q, \quad a^p . a^0 = a^p, \quad a^0 . a^0 = a^0;$$
$$a^0 : a^q = a^{0-q} = a^{-q}, \quad a^p : a^0 = a^p, \quad a^0 : a^0 = a^0;$$

egalități evidente după formulele (XXVII) și (XXVIII).

Pentru p și q *negative*, de exemplu pentru $p = -m$, $q = -n$, formulele (XXIV) și (XXVI) ne dau

$$a^{-m} . a^{-n} = a^{(-m)+(-n)} = a^{-m-n};$$
$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n} = a^{n-m};$$

egalități adevărate, deoarece avem [după XXIII]

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

și

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Demonstrând în acelaș fel și pentru celelalte *cazuri*, vedem că formulele (XXIV) și (XXVI) sunt generale.

Observare. Avem în particular

$$a^1 = a, \quad a^0 = \frac{a}{a} = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a};$$
$$1^1 = 1, \quad 1^0 = \frac{1}{1} = 1, \quad 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1;$$
$$0^1 = 0, \quad 0^0 = \frac{0}{0} \text{ } n'are\ sens, \quad 0^{-1} = \frac{1}{0} \text{ } n'are\ sens \text{ [57, 2]}.$$

EXEMPLE. $2^3 = 8$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2{,}778$; $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$.
$10^4 = 10000$; $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$; $(0{,}1)^{-2} = \frac{1}{(0{,}1)^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$.

114. Putere de puteri. Avem două feluri de puteri de puteri: 1°. când *baza* este o putere; 2°. când *exponentul* este o putere.

1°. Puterea cu baza putere. In acest caz zicem că *avem de ridicat o putere la o altă putere* și scriem puterea bază *în paranteză.*

Regulă. *Ca să ridicăm puterea unui număr la o altă putere, ridicăm numărul la o putere egală cu produsul exponenților.* Adică:

(XXIX) $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

In adevăr avem

$$(a^m)^n = \underset{1}{a^m}.\underset{2}{a^m}.\ \dots\ .\underset{n}{a^m} = a^{\overset{1}{m}+\overset{2}{m}+\dots+\overset{n}{m}} = a^{mn}.$$

EXEMPLU: $(5^3)^2 = 5^{3\times 2} = 5^6 = 15625.$

In general putem scrie:

(XXX) $$\left[(a^p)^q\right]^r = a^{pqr}.$$

2°. Puterea cu exponentul putere. Când nu se scrie nicio paranteză, se înțelege că *exponentul* puterii este *o putere.* Prin urmare:

(XXXI) $$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

adică a e ridicat la puterea m^n.

EXEMPLU: $5^{3^2} = 5^{(3^2)} = 5^9 = 1953125.$

Avem, în general,

(XXXII) $$a^{p^{q^r}} = a^{\left[p^{(q^r)}\right]}.$$

Observare. Din definițiile și regulele precedente rezultă că

$$(a^b)^c = (a^c)^b \qquad \text{dar} \qquad a^{b^c} \neq a^{c^b}.$$

EXEMPLU: $(10^{10})^{10} = 10^{100}$ este 1 urmat de 100 de zeruri,
pe când $10^{10^{10}} = 10^{10000000000}$ este 1 urmat de 10 *miliarde* de zeruri.

115. Patratul unei sume: $(a+b)^2$. Oricare ar fi numerele algebrice [54] găsim

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

sau

(XXXIII) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

EXEMPLE: $(5+3)^2 = 5^2 + 2.5.3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$
sau $(5+3)^2 = 8^2 = 64$; $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

REGULĂ. *Patratul unei sume algebrice*, compusă din *două părți*, este o sumă algebrică formată din *trei părți* și anume:

1°. *partea întâia la patrat,*
2°. *de 2 ori partea întâia înmulțită cu partea a doua,*
3°. *partea a doua la patrat.*

Dacă numerele a și b sunt pozitive, egalitatea (XXXIII) este evidentă pe *figura* 25, observând că patratul construit pe latura $a+b$ se compune din 2 patrate (a^2 și b^2) și din 2 dreptunghiuri ($a.b$).

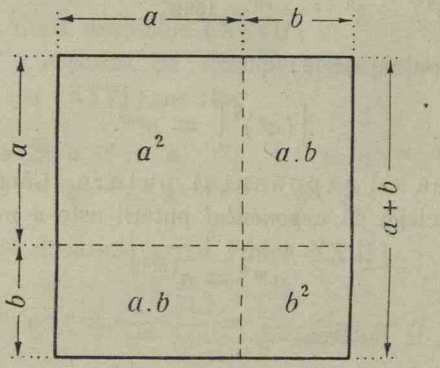


Fig. 25.

In acelaș fel găsim pentru *patratul unei diferențe*:

(XXXIV) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

egalitate, care rezultă și din formula (XXXIII), dacă observăm că diferența $a-b$ este suma algebrică $a+(-b)$.

EXEMPLE: $(5-3)^2 = 5^2 - 2.5.3 + 3^2 = 25 - 30 + 9 = 4$

sau $(5-3)^2 = 2^2 = 4$; $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

OBSERVĂRI. 1°. Patratul unui număr format din *zeci* și *unități* se compune din *trei* părți: *patratul zecilor*, *de 2 ori zecile înmulțite cu unitățile* și *patratul unităților*.

EXEMPLU: $58^2 = (50+8)^2 = 50^2 + 2.50.8 + 8^2$

$= 2500 + 800 + 64 = 3364$.

2°. Deoarece

(3) $$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

vedem că: *diferența dintre patratele a două numere întregi consecutive* este egală cu *de 2 ori numărul cel mai mic plus* 1.

EXEMPLU: $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23 = 2 \times 11 + 1$.

3°. Avem

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \quad \text{și} \quad (a-b)^2 \neq a^2 - b^2 \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0.$$

116. Produsul $(a+b)(a-b)$. Găsim prin înmulțire

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ab - bb,$$

de unde deducem

(XXXV) $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

REGULĂ. *Suma a două numere înmulțită cu diferența lor este egală cu diferența patratelor acestor numere.*

EXEMPLU: $(5+3) \times (5-3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
sau $(5+3) \times (5-3) = 8 \times 2 = 16$;
$(x+2) \times (x-2) = x^2 - 4$.

Invers: *diferența a două patrate* se poate scrie întotdeauna ca un *produs de doi factori*:

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b).$$

EXEMPLE:

$5^2 - 3^2 = (5+3) \times (5-3) = 8 \times 2$; $\quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

117. Patratul unei sume cu mai mulți termeni: $(a+b+c)^2$. Considerând suma dată ca o sumă formată numai din *două părți*:

$$a+b+c = (a+b) + c$$

și aplicând formula (XXXIII), putem scrie

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b).c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

Prin urmare avem:

(4) $$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

OBSERVARE. Când numerele a, b, c sunt *pozitive*, această egalitate e evidentă într'un *patrat* cu laturile egale cu $a+b+c$.

EXEMPLU:

$$(2-3+6)^2 = 2^2+(-3)^2+6^2+2.2.(-3)+2.2.6+2.(-3).6$$
$$= 4+9+36-12+24-36 = 25$$

sau pentrucă suma se poate efectuà: $(2-3+6)^2 = 5^2 = 25$.

GENERALIZARE. In acelaș fel putem calculà *patratul unei sume algebrice cu n termeni* și găsim [**55**]

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot \sum_{q=1}^{n} a_q = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_p\, a_q$$

sau

$$(5) \qquad (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = \Sigma a_p^2 + \Sigma a_p\, a_q\,,$$

unde, în suma întâia trebue să facem $p = 1, 2, \ldots, n$, iar în suma a doua $p = 1, 2 \ldots, n$, $q = 1, 2 \ldots, n$ cu $p \neq q$.

Cum $a_p\, a_q = a_q\, a_p$, produsele din suma a doua sunt două câte două *egale* între ele.

118. Cubul unei sume: $(a+b)^3$. Avem prin definiție

$$(a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b) = (a^2+2ab+b^2).(a+b).$$

Efectuând înmulțirea acestor două sume și observând că

găsim
$$ab^2+2ab^2 = 3ab^2,$$

$$(\text{XXXVI}) \qquad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

REGULĂ. *Cubul unei sume algebrice* compusă din *două părți* este o sumă algebrică formată din *patru părți* și anume:

1°. *partea întâia la cub,*

2°. *de 3 ori partea întâia la patrat înmulțită cu partea a doua,*

3°. *de 3 ori partea întâia înmulțită cu partea a doua la patrat,*

4°. *partea a doua la cub.*

EXEMPLE:

$$(5+4)^3 = 5^3+3.5^2.4+3.5.4^2+4^3 = 125+300+240+64 = 729$$

sau $(5+4)^3 = 9^3 = 729$; $\quad (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1.$

In acelaș fel găsim pentru *cubul unei diferențe*:

$$(\text{XXXVII}) \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

egalitate, care rezultă și din formula (XXXVI), dacă observăm că diferența $a-b$ este suma algebrică $a+(-b)$.

EXEMPLE:

$$(5-4)^3 = 5^3 - 3.5^2.4 + 3.5.4^2 + 4^3 = 125 - 300 + 240 - 64 = 1$$

sau $(5-4)^3 = 1^3 = 1$; $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

OBSERVĂRI. 1°. Cubul unui număr format din *zeci* și *unități* se compune din următoarele 4 părți: *cubul zecilor*; *de 3 ori patratul zecilor înmulțit cu unitățile*; *de 3 ori zecile înmulțite cu patratul unităților*; *cubul unităților*.

EXEMPLU: $58^3 = (50+8)^3 = 50^3 + 3.50^2.8 + 3.50.8^2 + 8^3$

$= 125\,000 + 60\,000 + 9600 + 512 = 195112.$

2°. Deoarece

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

vedem că: *diferența dintre cuburile a două numere întregi consecutive* este egală cu *de 3 ori patratul numărului mai mic plus de 3 ori acest număr plus* 1.

EXEMPLU: $12^3 - 11^3 = 1728 - 1331 = 397 = 3.11^2 + 3.11 + 1$.

3°. Avem

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3 \quad \text{și} \quad (a-b)^3 \neq a^3 - b^3 \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0.$$

Prin urmare, *ridicarea la putere a unei sume* sau *a unei diferențe nu e o operație distributivă* [**111**, 3], adică

$$(a+b+c)^m \neq a^m + b^m + c^m, \quad (a-b)^m \neq a^m - b^m.$$

119. Egalități și neegalități.

1°. Din $a = b$ rezultă $a^p = b^p$;
din $a = b$, $c = d$ rezultă $a^c = b^d$.

2°. Dacă a și b sunt două numere *pozitive*,
din $a > b$ rezultă $a^p > b^p$ pentru $p \neq 0$.

În adevăr, din $a > b$ deducem succesiv:

$$aa > ab, \quad ab > bb \quad \text{deci} \quad a^2 > b^2,$$
$$aa^2 > ab^2, \quad ab^2 > bb^2 \quad \text{deci} \quad a^3 > b^3,$$

și așa mai departe.

Pentru $p = 0$ avem $a^0 = b^0 = 1$.

3°. Dacă $p > q$ și $a > 0$, avem

$$a^p > a^q \quad \text{pentru} \quad a > 1,$$
$$a^p = a^q \quad \text{pentru} \quad a = 1,$$
$$a^p < a^q \quad \text{pentru} \quad a < 1.$$

In adevăr, din $a > 1$, înmulțind cu $a > 0$, deducem succesiv

$$a^2 > a, \quad a^3 > a^2, \quad \ldots, \quad a^{n+1} > a^n, \quad \ldots$$

Tot din $a > 1$, împărțind cu $a > 0$, deducem

$$1 > a^{-1}, \quad a^{-1} > a^{-2}, \quad \ldots, \quad a^{-n+1} > a^{-n}, \quad \ldots$$

Prin urmare avem:

$$(6) \qquad a^{n+1} > a^n \quad \text{pentru} \quad a > 1,$$

oricare ar fi exponentu n întreg (pozitiv, negativ sau nul).

Regulă. *Puterile unui număr mai mare decât* 1 *cresc, când exponentul crește.*

Pentru $a = 1$ avem $1^p = 1$, oricare ar fi p. Deci $1^p = 1^q$.

Pentru $a < 1$, înmulțind această neegalitate cu a *pozitiv*, deducem succesiv

$$a^2 < a, \quad a^3 < a^2, \quad \ldots, \quad a^{-n+1} < a^n, \quad \ldots$$

Tot din $a < 1$, împărțind cu $a > 0$, deducem

$$1 < a^{-1}, \quad a^{-1} < a^{-2}, \quad \ldots, \quad a^{-n+1} < a^{-n}, \quad \ldots$$

Prin urmare avem:

$$(7) \qquad a^{n+1} < a^n \quad \text{pentru} \quad 0 < a < 1,$$

oricare ar fi exponentul n întreg (pozitiv, negativ sau nul).

Regulă. *Puterile unui număr pozitiv mai mic decât* 1 *descresc, când exponentul crește.*

Pentru $a = 0$ avem $0^p = 0$, oricare ar fi $p > 0$.

Puterile 0^p pentru $p \leqq 0$, după definițiile precedente, *n'au nici un sens.*

4°. Dacă a și b sunt două numere *pozitive*,

din $a > b \geqq 1$ și $p > q$ rezultă $a^p > b^q$.

In adevăr [după **119**, 3] avem

$$a^p > b^p, \quad b^p \geqq b^q \quad \text{deci} \quad a^p > b^q.$$

5°. Puterile consecutive ale unui număr *negativ* sunt alternativ pozitive și negative. In acest caz regulele precedente se aplică numai la *puterile valorii absolute* a acestui număr.

EXEMPLU:

$$-3)^{-2}=+\frac{1}{9},\ (-3)^{-1}=-\frac{1}{3},\ (-3)^0=+1,\ (-3)^1=-3,\ (-3)^2=+9,\ \text{etc.}$$

II. — EXTRAGEREA RĂDĂCINII.

120. Insemnând cu a și n două numere date și cu x un număr necunoscut, următoarele *două* cazuri se prezintă ca *operații inverse de treapta a treia*:

$$1^0.\ x^n = a\ ; \qquad 2^0.\ n^x = a.$$

Valoarea lui x, pentru care avem egalitatea 1°, se numește *rădăcina a n-a* a lui a; valoarea lui x, pentru care avem egalitatea 2°, se numește *logaritmul lui a* în baza n.

Operațiile prin care rezolvim aceste probleme se numesc: în cazul 1° *extragerea rădăcinii*, iar în cazul 2° *aflarea logaritmului.*

EXEMPLE: Avem $x^3 = 729$ pentru $x = 9$, deci 9 este *rădăcina a 3-a* din 729; avem $3^x = 729$ pentru $x = 6$, deci 6 este *logaritmul* lui 729 *în baza* 3.

121. Extragerea rădăcinii. Definiția I. *A extrage rădăcina a n-a dintr'un număr a, înseamnează a găsi un alt număr b, care ridicat la puterea n să ne dea pe a.*

In acest caz zicem că b este *rădăcina a n-a exactă* din a și scriem

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Semnul $\sqrt{\ }$ se numește *radical*; a este *cantitatea de sub radical*; n este *indicele* radicalului.

$\sqrt[2]{\ }$ se scrie numai $\sqrt{\ }$ (fără indice) și se citește *rădăcina patrată*; $\sqrt[3]{a}$ se citește *rădăcina cubică*.

$\sqrt[1]{a}$ este a, fiindcă $a^1 = a$.

EXEMPLE: $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1$

fiindcă: $7^2 = 49$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $(0{,}1)^4 = 0{,}0001$.

Avem prin definiție

(XXXVIII) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{și} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

De aceea zicem că extragerea rădăcinii a n-a și ridicarea la puterea n sunt operații inverse, care *se distrug* una pe alta.

Observare. Extragerea rădăcinii poate fi *posibilă* sau *imposibilă* cu ajutorul numerelor *raționale*. Când această operație e posibilă, ne poate da *unul* sau *mai multe* rezultate.

Exemple. 1°. $\sqrt{3}$ nu e nici număr *întreg*, nici *fracționar*. Nu e număr întreg, fiindcă 3 nu e patrat perfect; nu e nici fracționar, fiindcă o fracție ordinară (nereductibilă) ridicată la patrat nu ne poate da un număr întreg [**110**, 1].

Prin urmare extragerea rădăcinii patrate exacte din 3, cu ajutorul numerelor raționale, este o operație *imposibilă*.

2°. $\sqrt{4}$ este $+2$ și -2, fiindcă

$$\text{și} \quad (+2)^2 = 4 \quad \text{și} \quad (-2)^2 = 4.$$

3°. $\sqrt[3]{8}$ este $+2$ și *nu* -2, fiindcă

$$(+2)^3 = +8 \quad \text{iar} \quad (-2)^3 = -8.$$

4°. $\sqrt[3]{-125}$ este -5 și *nu* $+5$, fiindcă

$$(-5)^3 = -125 \quad \text{iar} \quad (+5)^3 = +125.$$

5°. $\sqrt{-9}$ nu poate fi niciun număr algebric, fiindcă patratul oricărui număr pozitiv sau negativ e un număr *pozitiv*, deci nu poate fi -9.

122. Radicali aritmetici. Dacă a e un număr *pozitiv*, nu poate există decât un singur număr b *pozitiv* egal cu $\sqrt[n]{a}$.

In adevăr, dacă am avea pentru $\sqrt[n]{a}$ două valori pozitive b și c *diferite*, de exemplu $b > c$, ar rezultă $b^n > c^n$ [**119**, 2], neegalitate care contrazice ipoteza $b^n = a$, $c^n = a$.

Această valoare pozitivă *unică* se numește *valoarea aritmetică* a rădăcinii a n-a din a.

Când în calcule considerăm, pentru fiecare radical, numai valoarea lui aritmetică, zicem că operăm cu *radicali aritmetici*.

In acest capitol vom da regulele pentru calcularea rădăcinilor aritmetice ale numerelor pozitive și proprietățile acestor rădăcini.

123. Rădăcină cu aproximaţie. Să considerăm două şiruri de numere: 1°. şirul numerelor întregi pozitive (I); 2°. şirul puterilor a n-a ale acestor numere (P_n):

$$(I) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p,\ p+1,\ \ldots$$

$$(P_n) \qquad 0,\ 1,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots,\ p^n,\ (p+1)^n,\ \ldots$$

scrise astfel ca numărul p^n din şirul al doilea să corespundă numărului p din şirul întâi.

Toate numerele din şirul P_n se găsesc în şirul I; ele se numesc *puteri perfecte*. In general însă, numerele din şirul I nu se găsesc în şirul P_n.

De aceea, când căutăm $\sqrt[n]{a}$, pentru a pozitiv, două cazuri se pot întâmplà:

1°. sau a este un număr din şirul P_n, de exemplu $a = p^n$ şi atunci avem

$$\sqrt[n]{a} = p \qquad \text{(rădăcină } \textit{exactă}\text{)};$$

2°. sau a este cuprins între două numere consecutive din şirul P_n, de exemplu

$$p^n < a < (p+1)^n$$

şi atunci zicem că p este $\sqrt[n]{a}$ *cu aproximaţie de o unitate prin lipsă*, iar $p+1$ este $\sqrt[n]{a}$ cu aproximaţie de o unitate *prin exces* sau *prin adaos* şi scriem

$$(8) \qquad p < \sqrt[n]{a} < p+1.$$

Definiţia II. *A extrage rădăcina a n-a din a însemnează a găsì cel mai mare număr b, care ridicat la puterea n să ne dea un număr mai mic sau cel mult egal cu a.*

După această definiţie zicem că numărul p din neegalitatea (8) este $\sqrt[n]{a}$, iar diferenţa $a - p^n = r$ este restul acestei rădăcini (1).

124. Rădăcina patrată. Zicem că un număr întreg p este *rădăcina patrată* a lui a (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă), dacă avem

$$(9) \qquad p^2 < a < (p+1)^2$$

(1) Confuzia care poate rezultà, când numim *rădăcină* şi rădăcina *exactă* a unui număr şi rădăcina lui *cu aproximaţie prin lipsă*, este analoagă cu confuzia care rezultă la împărţire, când se numeşte *cât* şi câtul *exact* şi câtul *cu aproximaţie prin lipsă*.

și scriem

$$p < \sqrt{a} < p+1. \tag{10}$$

Diferența $a-p^2=r$ este *restul* rădăcinii patrate.
Când r e *nul*, avem

$$p = \sqrt{a} \quad \text{(rădăcină } \textit{exactă}\text{)}.$$

Neegalitățile (9) ne dau

$$r = a-p^2 < (p+1)^2 - p^2 = 2p+1$$

sau

$$r < 2p+1.$$

Prin urmare: *restul rădăcinii patrate a unui număr este cel mult egal cu dublul acestei rădăcini.*

OBSERVARE. Extragerea rădăcinii patrate exacte este o *împărțire particulară*, în care se dă numai deîmpărțitul și se cere ca *împărțitorul să fie egal cu câtul.*]

125. Aproximații fracționare. Dacă a e un număr *întreg* sau *fracționar*, putem calculă $\sqrt{a}$ întrebuințând șirurile următoare:

$$(F_m) \qquad 0,\ \frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \ldots,\ \frac{p}{m},\ \frac{p+1}{m},\ \ldots$$

$$(F_m^2) \qquad 0,\ \frac{1}{m^2},\ \frac{4}{m^2},\ \ldots,\ \frac{p^2}{m^2},\ \frac{(p+1)^2}{m^2},\ \ldots$$

Două cazuri se pot întâmplă: 1°. sau a se găsește în șirul F_m^2, de exemplu $a=\frac{p^2}{m^2}$, și atunci zicem că

$$\sqrt{a} = \frac{p}{m} \quad \text{(rădăcină fracționară } \textit{exactă}\text{)}; \tag{11}$$

2°. sau a este cuprins între două numere consecutive din șirul F_m^2, de exemplu

$$\frac{p^2}{m^2} < a < \frac{(p+1)^2}{m^2} \tag{12}$$

și în acest caz zicem că $\frac{p}{m}$ este $\sqrt{a}$ *cu aproximație de* $\frac{1}{m}$ *prin lipsă* (aproximație *fracționară*) și $\frac{p+1}{m}$ este $\sqrt{a}$ cu aproximație de $\frac{1}{m}$ *prin adaos* și scriem

$$\frac{p}{m} < \sqrt{a} < \frac{p+1}{m}. \tag{13}$$

In particular putem calculà rădăcina patrată a unui număr întreg sau fracţionar cu aproximaţie de 0,1, 0,01, 0,001, etc., prin lipsă sau prin adaos, adică putem calculà $\sqrt{a}$ cu 1, 2, 3, ... cifre zecimale exacte.

OBSERVARE. A calculà rădăcina patrată cu aproximaţie de o unitate prin lipsă, însemnează a calculà numai *partea întreagă* a rădăcinii patrate.

126. Numărul cifrelor rădăcinii patrate (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă). Din şirurile:

Numere: 1 1 sau 2 cifre **100** 3 sau 4 cifre **10000** 5 sau 6 cifre **1000000** ...
Rădăcini: 1 1 cifră 10 2 cifre 100 3 cifre 1000 ...

rezultă că numerele întregi cu 1 sau 2 cifre au rădăcina patrată formată *dintr'o singură cifră*; numerele cu 3 sau 4 cifre au rădăcina patrată formată din 2 *cifre* şi aşà mai departe.

REGULĂ. Ca să ştim *câte cifre are rădăcina patrată* (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă) a unui număr întreg, despărţim numărul în grupe de câte 2 cifre ultima grupă poate aveà 1 sau 2 cifre. *Numărul acestor grupe este numărul cifrelor rădăcinii.*

EXEMPLU. Numărul 3725892 descompus în grupe de câte 2 cifre (dela dreapta spre stânga) ne dă 4 grupe: 3.72.58.92. Prin urmare rădăcina patrată a acestui număr are 4 cifre.

127. Calculul rădăcinii patrate. Să presupunem că rădăcina patrată (exactă sau cu aproximaţie de o unitate prin lipsă) a unui număr pozitiv N ar fi un număr întreg ν format din *două cifre*: a şi b. Am aveà dar

$$(14) \qquad \nu^2 \leqq N < (\nu+1)^2 \quad \text{cu} \quad \nu = a.10 + b$$

sau, desvoltând patratele [**115**],

$$(15) \qquad a^2.100 + 2ab.10 + b^2 \leqq N < a^2.100 + 2a(b+1).10 + (b+1)^2.$$

Aceste neegalităţi ne arată că N conţine cel puţin a^2 *sute*. Prin urmare *zecile* (a) ale rădăcinii patrate se află căutând, care este *cel mai mare patrat perfect* (a^2), care se cuprinde în *sutele* numărului N.

Scăzând a^2 *sute* din fiecare membru al neegalităţilor (15) şi însemnând cu R diferenţa $N - a^2.100$, ne rămâne

$$(16) \qquad 2ab.10 + b^2 \leqq R < 2a(b+1).10 + (b+1)^2.$$

Prin urmare restul R conţine cel puţin $2ab$ *zeci*. Cifra a doua (b) a rădăcinii patrate, se află dar, împărţind *zecile* ($2ab$) ale restului R prin *de 2 ori numărul aflat la rădăcină* ($2a$).

Diferența

$$R_1 = R - (2ab.10 + b^2) \tag{17}$$

este *restul rădăcinii.*

Dacă $\sqrt{N}$ e un număr format din 3 sau mai multe cifre, grupa zecilor (a), oricâte cifre ar avea, este rădăcina patrată a *sutelor* numărului N, cu aproximație de o unitate prin lipsă, adică rădăcina patrată din numărul, care se obține, când ștergem 2 *cifre* dela dreapta lui N.

OBSERVARE. Scăzătorul $2ab.10 + b^2$ din diferența (17) se mai poate scrie $(2a.10 + b).b$. Pentru a-l formă e de ajuns, în practică, să scriem cifra b la dreapta numărului $2a$ și să înmulțim cu b.

REGULĂ PRACTICĂ *pentru calcularea rădăcinii patrate dintr'un număr întreg:*

Operația I. Despărțim numărul în grupe de câte 2 *cifre* dela dreapta spre stânga: grupa întâia (dela stânga) poate avea și o singură cifră.

Operația II. *Calculăm rădăcina patrată din grupa întâia* dela stânga (cu aproximație de o unitate prin lipsă); aceasta e *prima cifră a rădăcinii. Scădem patratul acestei cifre din grupa întâia a numărului* și obținem *restul întâi.*

Operația III. La dreapta acestui rest scoborîm *prima cifră din grupa a doua.* Formăm astfel *deîmpărțitul întâi*, pe care-l împărțim prin *de 2 ori cifra aflată la rădăcină.* Câtul obținut este *cifra a doua a rădăcinii* sau o cifră mai mare.

Scriem această cifră la dreapta împărțitorului și dedesubtul lui și înmulțind aceste două numere obținem *produsul întâi. Scoborîm la dreapta deîmpărțitului întâi și cifra a doua din grupa a doua* și *scădem* din acest număr *produsul întâi.* Dacă scăderea e posibilă, cifra a doua a rădăcinii este bună; în caz contrar, micșorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate face. Obținem astfel *restul al doilea.*

Operația IV. La dreapta restului al doilea scoborîm *prima cifră din grupa a treia* a numărului. Formăm astfel *deîmpărțitul al doilea, pe care-l împărțim prin de 2 ori numărul aflat la rădăcină* (format acum din 2 cifre). Câtul obținut este *cifra a treia a rădăcinii* sau o cifră mai mare.

Scriem această cifră la dreapta împărțitorului și dedesubtul lui și înmulțind aceste două numere obținem *produsul al doilea. Scoborîm a dreapta deîmpărțitului al doilea și cifra a doua din grupa a treia* și *scădem* din acest număr *produsul al doilea.* Dacă scăderea e posibilă, cifra

a treia a rădăcinii este bună; în caz contrar micşorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate face.

Continuăm astfel, pânăce am scoborît toate grupele numărului şi am calculat toate cifrele rădăcinii.

OBSERVARE. Fiecare *rest* al rădăcinii patrate *nu poate fi mai mare decât de* 2 *ori numărul aflat la rădăcină.*

EXEMPLU:

$\sqrt{3.48.75}$	**186**	
1		
24:2	$2 \times 1 = 2$	iau cifra 8
248	$29 \times$	$28 \times$
224	9	8
247:36	$261 > 248$	$224 < 248$ cifra **8** e bună.
2475	$2 \times 18 = 36$	iau cifra 6
2196	$367 \times$	$366 \times$
279	7	6
	$2569 > 2475$	$2196 < 2475$ cifra **6** e bună.

Avem $279 < 2 \times 186 + 1 = 373$; deci rădăcina patrată a numărului 34875, cu aproximaţie de o unitate prin lipsă, este **186**.

O *tablă*, care ne dă *patratele* tuturor numerelor întregi până la 10^n, ne dă deodată *primele n cifre dela stânga* ale rădăcinii patrate. Astfel, pentru $\sqrt{34875}$, TABLA III ne arată (în coloana a doua) că 348 este cuprins între $324 = 18^2$ şi $361 = 19^2$; prin urmare grupa zecilor rădăcinii căutate este **18**, fiindcă 18 este rădăcina patrată din 348 cu aproximaţie de o unitate prin lipsă.

128. Calculul rădăcinii de ordin *n*. Regula dată pentru extragerea rădăcinii patrate ne conduce la următoarea

REGULĂ GENERALĂ pentru extragerea *rădăcinii de ordin n*:

Operaţia I. Despărţim numărul în grupe de câte *n* cifre dela dreapta spre stânga; prima grupă dela stânga poate avea mai puţin ca *n* cifre. *Pentru fiecare din aceste grupe avem câte o cifră la rădăcină.*

Operaţia II. Calculăm rădăcina a *n*-a a grupei întâia dela stânga (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă). Aceasta e *prima cifră a rădăcinii*. Scădem puterea a *n*-a a acestei cifre din grupa întâia a numărului şi obţinem *restul întâi.*

Operaţia III. La dreapta acestui rest scoborîm *prima cifră a grupei a doua* a numărului. Formăm astfel *deîmpărţitul întâi*, pe care-l împărţim prin *de n ori rădăcina aflată ridicată la puterea* $n-1$. Câtul obţinut este *cifra a doua a rădăcinii* sau o cifră mai mare. Ca să o încercăm, calculăm puterea a *n*-a a numărului (de 2 cifre) găsit la rădăcină şi dacă această putere se poate scădea din *primele două grupe* dela stânga ale numărului de sub radical, cifra a doua este bună; în caz

contrariu micșorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate face. Obținem astfel *restul al doilea.*

Operația IV. Cu acest rest procedăm ca și cu restul întâi, pentru a afla *cifra a treia a rădăcinii.* Puterea a n-a a primelor 3 cifre dela rădăcină se scade din primele 3 grupe ale numărului de sub radical și așa mai departe.

Continuăm astfel până ce am întrebuințat toate grupele numărului dat.

129. Rădăcina cubică. Aplicând *regula generală*, găsim pentru $n = 3$:

$\sqrt[3]{10.421.528}$ = **218**

8

$2^3 = 8$

24 : 12

$3 \times 2^2 = \mathbf{12}$

10 421

9 261

$22^3 = 484 \times 22 = 10648 > 10421$, cifra 2 e prea mare.

$21^3 = 441 \times 21 = 9261 < 10421$, cifra **1** e bună.

1 1605 : 1323

$3 \times 21^2 = 3 \times 441 = \mathbf{1323}$

10 421 528

10 360 232

$218^3 = 10\,360\,232 < 10\,421\,528$ cifra **8** e bună.

61 296

Deci rădăcina cubică din 10 421 528, cu aproximație de o unitate prin lipsă, e 218.

Cu ajutorul unei *table*, care dă *cuburile* numerelor întregi până la 10^n, putem aveà deodată *primele n cifre dela stânga* ale rădăcinii cubice.

Astfel, pentru exemplul de mai sus, TABLA III ne arată (în coloana a treia) că

$$9261 < 10421 < 10648$$

sau

$$21^3 < 10421 < 22^3,$$

de unde deducem

$$21 < \sqrt[3]{10421} < 22.$$

Prin urmare rădăcina cubică a numărului 10 421 528 are 21 *zeci.*

130. Rădăcina dintr'o fracție. 1°. Fracție ordinară. Avem

(XXXIX) $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$ fiindcă $$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

REGULĂ. Ca să extragem rădăcina a n-a dintr'o *fracție ordinară*, extragem rădăcina a n-a *și din numărător și din numitor.*

EXEMPLU: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{\frac{a^3}{8}} = \frac{a}{2}$.

OBSERVARE. Când extragem aceeaş rădăcină şi din numărătorul şi din numitorul unei fracţii, valoarea fracţiei *se schimbă* şi anume fracţia se măreşte, dacă e subunitară şi se micşorează, dacă e supraunitară.

Astfel avem:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{1}{4} < 1;$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4} = \frac{80}{64} < \frac{125}{64} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{125}{64} > 1.$$

2°. Fracţie zecimală. Observăm că

$$\sqrt[n]{10^{np}} = 10^{p} \quad \text{fiindcă} \quad (10^{p})^{n} = 10^{np}. \tag{18}$$

De aci rezultă că *rădăcina a n-a* (exactă) *dintr'o fracţie zecimală f cu np cifre zecimale este o fracţie zecimală* φ *cu p cifre zecimale.*

In adevăr, fracţia zecimală f se scrie ca fracţie ordinară

$$f = \frac{a}{10^{np}},$$

unde a e un număr întreg şi dacă $\sqrt[n]{a}$ se poate extrage exact, avem $a = b^n$ (b întreg) şi

$$\sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\frac{a}{10^{np}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{10^{p}} = \frac{b}{10^{p}} = \varphi.$$

Prin urmare φ e o fracţie zecimală cu p cifre zecimale.

Regulă. Pentru a extrage rădăcina a n-a dintr'un număr *zecimal*, despărţim numărul în *grupe* de câte n cifre *începând dela virgula zecimală* spre stânga şi spre dreapta. Ultima grupă dela stânga poate să aibă mai puţin ca n cifre, dar *ultima grupă dela dreapta trebue să aibă totdeauna n cifre* (la nevoe o complectăm cu zeruri scrise la dreapta numărului zecimal).

Ştergem apoi virgula zecimală şi extragem rădăcina ca la numerele întregi. *Fiecare grupă de cifre dela număr ne dă câte o cifră la rădăcină.* Din partea întreagă a numărului rezultă partea întreagă a rădăcinii, iar din partea zecimală a numărului rezultă partea zecimală a rădăcinii.

Dacă rădăcina nu se poate calculà *exact*, adică dacă nici unul din resturi nu e nul, putem continuà operaţia la infinit şi *putem căpătà la rădăcină oricâte cifre zecimale vrem.*

De exemplu, pentru a aveà *primele p cifre zecimale* la rădăcina n-a a unui număr, e de ajuns să scriem acest număr cu np cifre zecimale (complectându-le cu zeruri, dacă e nevoe) şi să calculăm rădă-

cina întrebuințând toate aceste p grupe de câte n cifre zecimale. In acest caz zicem că am calculat rădăcina a n-a *cu aproximație de* $\frac{1}{10^p}$.

EXEMPLU: Să se calculeze $\sqrt{2,283}$ cu aproximație de 0,01.
Scriem $\sqrt{2,28.30}$ și calculăm

$\sqrt{2.28.30}$	151		rădăcina: 1,51
128	25 | 301		restul: 0,0029.
330	5 | 1		
29	125 | 301		

Despărțim la dreapta rădăcinii calculate 151 atâtea cifre zecimale câte *grupe de cifre zecimale* a avut numărul.

3°. Număr întreg. Orice număr *întreg* se poate scrie ca număr *zecimal*, punându-i la dreapta oricâte zeruri vrem *ca cifre zecimale*.

Prin urmare, dacă un număr întreg nu e putere perfectă, punându-i *zeruri* ca cifre zecimale, putem calculà rădăcina a n-a a lui, prin regula precedentă, cu orice aproximație vrem.

EXEMPLU. Să se calculeze $\sqrt{5}$ cu 3 cifre zecimale.
Scriem $\sqrt{5,00.00.00}$ și calculăm

$\sqrt{5.00.00.00}$	2236			rădăcina: 2,236
100	42 | 443	4466		restul: 0,000304
1600	2 | 3	6		
1329	84 | 1329	26796		
27100				
26796				
304				

131. Numere iraționale. Dacă un număr întreg a nu e o putere a n-a perfectă, $\sqrt[n]{a}$ nu poate fi un *număr întreg*; nu poate fi nici *o fracție*, fiindcă puterea unei fracții ordinare nereductibile e *o fracție ordinară nereductibilă* [**110**]. Prin urmare, în acest caz, operația inversă $\sqrt[n]{a}$ e *imposibilă* cu ajutorul numerelor raționale și pentru a o puteà efectuà suntem siliți să întroducem în Matematici numere noi.

In general, dacă a e un număr *pozitiv*, $\sqrt[n]{a}$

1°. sau se poate calculà exact sub formă de număr *întreg*;
2°. sau se poate calculà exact sub formă de număr *fracționar*;
3°. sau se poate calculà *cu aproximație*, cu oricâte cifre zecimale vrem. In acest caz numărul $\alpha = \sqrt[n]{a}$, se numește *număr irațional*.

EXEMPLE de numere *iraționale*:

$$\sqrt{2} = 1,4142135624\ldots, \quad \sqrt[6]{17576} = 5,0990195136\ldots$$

unde prin punctele puse la sfârşit arătăm că ar trebui să scriem un număr *infinit* de cifre zecimale.

Regula, după care găsim aceste cifre zecimale, e regula extragerii rădăcinii patrate [**127**] în exemplul întâi şi a rădăcinii a 6-a [**128**] în exemplul al doilea.

In general, vom zice că o expresie numerică e *raţională*, dacă conţine *radicali*.

EXEMPLE. Expresii numerice *raţionale*:

$$\sqrt[5]{17}, \quad \frac{5+\sqrt{2}}{3-\sqrt{7}}, \quad \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}.$$

132. Legile radicalilor. 1°. *Extragerea rădăcinii dintr'un produs este o operaţie distributivă.* Adică avem:

$$\text{(XL)} \qquad \sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.$$

In adevăr, ridicând la puterea n ambii membri ai acestei egalităţi, căpătăm rezultate *egale* [**121** şi **111**, 3]:

$$\left(\sqrt[n]{a.b.c}\right)^n = a.b.c \quad \text{şi} \quad \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}\right)^n = a.b.c.$$

Invers, avem

$$\text{(XLI)} \qquad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

REGULĂ. *Ca să înmulţim mai mulţi radicali, cari au acelaş indice, înmulţim cantităţile de sub radical* şi din produsul obţinut extragem rădăcina arătată de indicele comun.

Astfel avem

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2.a} = \sqrt[3]{a^3} = a, \qquad \sqrt{a}.\sqrt{x^2} = \sqrt{ax^2};$$

şi invers

$$\sqrt[3]{8ab^3c^2} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b^3}.\sqrt[3]{c^2} = 2.\sqrt[3]{a}.b.\sqrt[3]{c^2}$$

sau

$$\text{(19)} \qquad \sqrt[3]{8ab^3c^2} = 2b\sqrt[3]{ac^2}.$$

OBSERVARE. Când înlocuim expresia întâia prin expresia a doua din egalitatea (19), zicem că *am scos factorul* $8b^3$ *de sub radical*; când înlocuim expresia a doua prin expresia întâia din egalitatea (19), zicem că *am introdus factorul* $2b$ *sub radical*.

REGULĂ. *Putem scoate un factor de sub un radical, dacă extragem din acest factor rădăcina arătată de indicele radicalului.*

Putem introduce un factor sub un radical, dacă ridicăm acest factor la puterea arătată de indicele radicalului.

EXEMPLE: Scoatere de sub radical:

$$\sqrt{7a^2x} = a\sqrt{7x}, \quad \sqrt[3]{8xy} = 2\sqrt[3]{xy}, \quad \sqrt[n]{a^n b^p} = a\sqrt[n]{b^p}.$$

Introducere sub radical:

$$a\sqrt[n]{bc^2} = \sqrt[n]{a^n bc^2}, \quad 5x^2y\sqrt[3]{2y^2z} = \sqrt[3]{125x^6y^3 \cdot 2y^2z} = \sqrt[3]{250x^6y^5z}.$$

2°. *Dacă înmulțim exponentul cantității de sub radical cu un număr m, ridicăm rădăcina la puterea m.* Adică

$$\text{(XLII)} \qquad \sqrt[q]{a^{pm}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m.$$

In adevăr, dacă m e un număr întreg și pozitiv, avem

$$\sqrt[q]{a^{pm}} = \sqrt[q]{\underset{1}{a^p} \cdot \underset{2}{a^p} \cdots \underset{m}{a^p}} = \sqrt[q]{\underset{1}{a^p}} \cdot \sqrt[q]{\underset{2}{a^p}} \cdots \sqrt[q]{\underset{m}{a^p}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m.$$

3°. *Dacă înmulțim indicele unui radical cu un număr m, extragem rădăcina a m-a din acel radical.* Adică

$$\text{(XLIII)} \qquad \sqrt[qm]{a^p} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}.$$

In adevăr, prima expresiune ridicată la puterea qm ne dă a^p; a doua expresiune ridicată întâi la puterea m și apoi la puterea q (adică tot la puterea qm) ne dă succesiv

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}\right)^m = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{și} \quad \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p.$$

Expresiunile (XLIII) sunt *egale*, fiindcă ridicate la *aceeaș* putere (qm) ne dau rezultate *egale*.

DEFINIȚII. *A amplifică un radical* însemnează *a înmulți și indicele radicalului și exponentul cantității de sub radical cu un acelaș număr.*

A simplifică un radical însemnează *a împărți și indicele radicalului și exponentul cantității de sub radical cu un acelaș număr.*

4°. Dacă *amplificăm* sau *simplificăm* un radical, *valoarea radicalului nu se schimbă.*

In adevăr avem

$$\sqrt[qm]{a^{pm}} = \sqrt[q]{\sqrt[m]{a^{pm}}} \quad \text{și} \quad \sqrt[m]{a^{pm}} = \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^m = a^p.$$

Deci

$$\sqrt[qm]{a^{pm}} = \sqrt[q]{a^p} \tag{XLIV}$$

și *viceversa*.

EXEMPLE:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}, \quad \sqrt[1]{a} = \sqrt[n]{a^n} = a; \quad \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[1]{x^2} = x^2.$$

133. Aducerea radicalilor la același indice. Dacă avem mai mulți radicali cu indici *diferiți*, legea 4° ne permite să-i scriem cu *același indice*, fără să schimbăm valorile rădăcinilor date.

Să luăm, de exemplu,

$$\sqrt[p]{a}, \quad \sqrt[q]{b}, \quad \sqrt[r]{c}. \tag{20}$$

Dacă m e un *multiplu comun* al indicilor p, q, r și dacă $m:p = p'$, $m:q = q'$, $m:r = r'$, amplificând primul radical cu p', al doilea cu q', al treilea cu r' și observând că $pp' = m$, $qq' = m$, $rr' = m$, căpătăm radicalii cu *același indice*

$$\sqrt[m]{a^{p'}}, \quad \sqrt[m]{b^{q'}}, \quad \sqrt[m]{c^{r'}}, \tag{21}$$

care au valori respectiv *egale* cu rădăcinile (20).

Această operație se numește *aducerea radicalilor la același indice*.

In particular, se poate alege ca indice comun *cel mai mic multiplu comun* al indicilor radicalilor dați.

EXEMPLU: Să se aducă la același indice radicalii

$$\sqrt{x^3}, \quad \sqrt[3]{x^5}, \quad \sqrt[6]{x}.$$

Cel mai mic multiplu comun al indicilor 2, 3, 6 este **6**. Amplificând dar primul radical cu $6:2 = 3$ și al doilea radical cu $6:3 = 2$, obținem

$$\sqrt{x^3} = \sqrt[6]{x^9}, \quad \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[6]{x^{10}} \quad \text{și} \quad \sqrt[6]{x}.$$

134. Operațiile cu radicali.

1°. Adunarea și scăderea. Ca să calculăm o *sumă algebrică de mai mulți radicali*, calculăm întâi valoarea fiecărui radical și apoi facem suma algebrică a rezultatelor obținute.

EXEMPLU. $\sqrt{49}-\sqrt[3]{8}+\sqrt{\frac{1}{16}}=7-2+\frac{1}{4}=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$.

OBSERVARE. *Extragerea rădăcinii dintr'o sumă algebrică nu e o operație distributivă.* Adică avem, în general,

$$\sqrt[n]{a-b+c} \neq \sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}. \tag{22}$$

De exemplu

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0,$$

fiindcă, ridicând la patrat [85], membrul întâi ne dă $a+b$, iar membrul al doilea ne dă

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \neq a+b.$$

Doi sau mai mulți radicali se zic *asemenea*, când au *același indice* și *aceeași cantitate sub radical.*

REGULĂ. *O sumă algebrică de radicali asemenea se efectuează ca o sumă algebrică de termeni asemenea* [**112**].

EXEMPLU:

$$\sqrt{3}-2\sqrt{\frac{3}{25}}+\sqrt{12}=\sqrt{3}-2\frac{\sqrt{3}}{5}+\sqrt{3.4}=\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}\left(1-\frac{2}{5}+2\right)=\frac{13}{5}\sqrt{3}.$$

2°. Inmulțirea și împărțirea. REGULĂ. *Ca să înmulțim* (sau *să împărțim*) *doi radicali, aducem întâi radicalii la același indice; apoi înmulțim* (sau *împărțim*) *cantitățile de sub radicalii cu același indice* și din *produsul* (sau *câtul*) obținut *extragem rădăcina arătată de indicele comun.*

EXEMPLE:

$$\sqrt[3]{x^3}.\sqrt[6]{x^5}.\sqrt{x}=\sqrt[6]{x^9}.\sqrt[6]{x^{10}}.\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^9.x^{10}.x}=\sqrt[6]{x^{20}}=\sqrt[3]{x^{10}}.$$

$$\sqrt[6]{a^5}:\sqrt[15]{a^2}=\sqrt[30]{a^{25}}:\sqrt[30]{a^4}=\sqrt[30]{a^{25}:a^4}=\sqrt[30]{a^{21}}=\sqrt[10]{a^7}.$$

3°. Ridicarea la putere și extragerea rădăcinii. După *legile radicalilor* [**122**, 2 și 3], rezultă următoarea

REGULĂ. *Ca să ridicăm un radical la o putere, ridicăm la această putere cantitatea de sub radical* și apoi, din puterea obținută, extragem rădăcina arătată de indicele radicalului.

Ca să extragem o rădăcină dintr'un radical, extragem din cantitatea de sub radical *rădăcina arătată de produsul indicilor radicalilor.* Adică:

(XLV) $$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m = \sqrt[q]{a^{pm}}$$

și

(XLVI) $$\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[qm]{a^p}.$$

EXEMPLE: $\left(\sqrt[3]{a^5}\right)^2 = \sqrt[3]{a^{10}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{xy^2}} = \sqrt[6]{xy^2}$.

OBSERVARE. De aci rezultă că

(23) $$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}.$$

Invers, dacă avem $n = p.q.r$, rădăcina a n-a dintr'un număr se poate calculà *prin* 3 *extrageri de rădăcină consecutive* cu indicii p, q, r respectivi. Ordinea în care facem aceste trei operații e *indiferentă.*

Adică avem:

(24) $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[r]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}.$$

EXEMPLU: $\sqrt[6]{15625} = \sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \sqrt[3]{125} = 5$

sau $\sqrt[6]{15625} = \sqrt{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt{25} = 5$.

135. Exponenți fracționari. Am văzut că expresiunea $\sqrt[q]{a^p}$ nu-și schimbă valoarea prin *amplificare* sau *simplificare*; dar, prin aceste operații, nici raportul $\frac{p}{q}$ nu-și schimbă valoarea. De aceea putem zice că valoarea radicalului $\sqrt[q]{a^p}$ nu depinde de numerele p și q separat, ci numai de *raportul* lor $\frac{p}{q}$.

1°. Dacă p e *divizibil* prin q, avem

$$\frac{p}{q} = m \quad \text{sau} \quad p = qm \qquad (m \text{ întreg})$$

și putem scrie

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{pm}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m = a^{\frac{p}{q}}.$$

Așa dar un *radical* poate fi scris ca o *putere cu exponent fracționar.*

2°. Dacă p nu e divizibil prin q, expresiunea $a^{\frac{p}{q}}$ nu mai are sens Totuși, dacă *prin definiție* convenim să scriem, în toate cazurile,

$$(\text{XLVII}) \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

constatăm că operațiile cu *radicali aritmetici* se reduc la operații cu *puteri*, aplicând și la puterile cu *exponenți fracționari* toate regulele date pentru puterile cu exponenți întregi.

Astfel, pentru exponenții fracționari

$$\lambda = \frac{p}{q}, \quad \mu = \frac{r}{s}$$

avem

$$a^\lambda a^\mu = a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} . \sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\lambda+\mu}.$$

Prin urmare [**111**, 2] și în acest caz putem scrie

$$(\text{XXIV}) \qquad a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu}.$$

In acelaș fel se demonstrează că și celelalte formule dela paragrafele **112**, **113**, **114** se aplică la puterile cu exponenți fracționari.

DEFINIȚIE. *O putere cu exponent fracționar* este o *rădăcină*, în care *numitorul* exponentului fracționar este *indicele radicalului*, iar *numărătorul* exponentului fracționar este *exponentul cantității de sub radical.*

EXEMPLE: $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^3 = a^{\frac{3}{1}} = \sqrt[1]{a^3}$.

OBSERVARE. Avem

$$(8x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8x} = 2\sqrt[3]{x} \quad \text{dar} \quad 8x^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{x}.$$

Din definiția precedentă rezultă imediat operațiile de amplificare și simplificare ale radicalilor:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{pm}}.$$

136. Exponenți fracționari negativi. Generalizând formula (XXVIII) [pag. 96] vom scrie și în acest caz

$$(25) \qquad a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

EXEMPLU: $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.

OBSERVARE. Să nu se confunde exponenții *fracționari* cu exponenții *negativi*. Astfel

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad \text{pe când} \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

137. Fracții egale. Când avem un șir de fracții *egale* și *pozitive*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \lambda,$$

ridicându-le la puterea n, deducem [**84**, 1]

$$\lambda^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = \frac{a^n + c^n + e^n}{b^n + d^n + f^n}$$

și extragând apoi rădăcina a n-a, găsim

$$(26) \qquad \lambda = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{\sqrt[n]{a^n + c^n + e^n}}{\sqrt[n]{b^n + d^n + f^n}},$$

unde trebue să luăm pentru radicali valorile lor *aritmetice*.

In particular, pentru $n = 2$, putem scrie

$$(\text{XLVIII}) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + e^2}}{\sqrt{b^2 + d^2 + f^2}}.$$

138. Raționalizare. In calcule, ca să evităm împărțirile prin radicali, amplificăm *fracțiile, care au numitori iraționali*, cu o cantitate, care le transformă în fracții *egale* cu numitori *raționali*. Această transformare se numește *raționalizare*.

Expresiunile $a + \sqrt{b}$ cu $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ cu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se zic *conjugate*. Produsul lor [**116**] e rațional:

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b,$$
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

Prin urmare, când numitorul unei fracții are un factor *irațional* de această formă, raționalizarea se face amplificând fracția cu *conjugata* acestui factor.

1°. Din

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$$

înmulțind ambii termeni cu $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, deducem [**132**, 1]

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$$

EXEMPLE:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710\ldots; \quad \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0{,}77459\ldots$$

2°. Din

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

amplificând fracția cu conjugata numitorului, deducem

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

EXEMPLU: $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \frac{\sqrt{20}-\sqrt{12}}{2} = 0{,}50401\ldots$

139. Compararea radicalilor. Din definiția radicalilor aritmetici, rezultă că, dacă a și b sunt două numere pozitive,

$$\text{din } a > b \text{ rezultă } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b},$$

rădăcinile fiind calculate exact sau cu o aproximație suficientă.

Dacă radicalii n'au același indice, pentru a-i putea compară, *îi aducem întâi la același indice* și apoi comparăm cantitățile de sub radicali.

Vedem astfel că, și pentru exponenți *fracționari*

$$\lambda = \frac{p}{q}, \quad \mu = \frac{r}{s},$$

dacă numerele sunt *pozitive* [**119**, 2 și 3], putem zice că:

1°. din $a > b$ rezultă $a^\lambda > b^\mu$;

2°. din $\lambda > \mu$ rezultă

$$a^\lambda > a^\mu \text{ pentru } a > 1$$
$$a^\lambda = a^\mu \text{ pentru } a = 1$$
$$a^\lambda < a^\mu \text{ pentru } a < 1.$$

EXEMPLE: Avem $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ fiindcă $2 < 3$.

Ca să comparăm $\sqrt[3]{5}$ cu $\sqrt{3}$, vom scrie

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}, \quad \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

și fiindcă $25 < 27$, avem $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$ sau $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

140. Operațiile cu numere apropiate. Calculele cu radicali ne arată că există numere, pe care nu le putem scrie decât prin valori apropiate. In general, în practică, nu putem sau nu avem nevoe să luăm întotdeauna datele unei probleme cu toate cifrele lor zecimale și atunci căutăm să obținem și pentru rezultate *valori apropiate*, cu o aproximație *determinată* sau cu cea mai bună aproximație *posibilă*.

Dacă ν e valoarea *exactă* a unui număr și n valoarea lui *apropiată* [**90**], diferența

$$|\nu - n| = \varepsilon$$

se numește *eroare*. Dacă valoarea apropiată e mai mică decât valoarea exactă a numărului, zicem că eroarea e *prin lipsă*; în caz contrariu eroarea e *prin adaos* sau *prin exces*.

Sunt cazuri însă, când nu cunoaștem nici eroarea ce o facem și nici *sensul* acestei erori; știm numai că eroarea e *mai mică decât un număr* α (care se numește *limita superioară* a erorii). In acest caz avem

$$|\nu - n| < \alpha$$

și prin urmare [**41**, 3]

$$n - \alpha < \nu < n + \alpha.$$

De exemplu, când datele problemei sunt rezultatul unor *măsurări*, fie din cauza imperfecțiunei instrumentelor de măsură (balanța, termometrul, șurubul micrometric, etc.), fie din nedeprinderea noastră de a aprecià măsura cu preciziunea dorită, numerele căpătate prin aceste măsurări sunt valori *apropiate* cu erori necunoscute nici în valoare, nici în sens. Putem doar precizà o *limită superioară* a erorilor făcute.

Când calculăm cu valorile apropiate ale unor numere *cunoscute* (cum sunt numerele cu multe cifre zecimale), trebue să știm cu ce aproximație să luăm aceste valori apropiate, ca să fim siguri că obținem rezultatul cu aproximația *cerută*.

In cazul unei *sume algebrice*, din teorema cu privire la valorile absolute [**41**, 5] rezultă că: *eroarea sumei poate fi cel mult egală cu suma erorilor termenilor ei* (1).

(1) Exercițiul 7, pag. 31.

Prin urmare dacă avem o sumă de n termeni și dacă vrem să calculăm suma cu o eroare mai mică decât α, va fi deajuns să luăm fiecare termen cu o eroare mai mică decât $\frac{\alpha}{n}$.

EXEMPLE de calcule *cu radicali.*

1°. Să se calculeze produsul $8\times\sqrt{45}$ cu o eroare mai mică decât 0,00001. Observând că

$$\sqrt{45} = \sqrt{5\times 9} = 3\times\sqrt{5},$$

putem scrie

$$8\times\sqrt{45} = 8\times 3\times\sqrt{5} = 24\times\sqrt{5} = 24\times 2{,}23606 = 53{,}66544,$$

calculând $\sqrt{5}$ cu o eroare mai mică decât 0,00001 prin lipsă. Dar e evident că, prin *înmulțirea* cu 24, am mărit eroarea de 24 de ori, adică produsul e obținut cu o eroare prin lipsă mai mică decât

$$24\times 0{,}000\,01 = 0{,}000\,24 > 0{,}000\,01.$$

Pentru a nu mări eroarea făcută prin extragerea rădăcinii patrate, e mai bine *să introducem întâi toți factorii sub radical* [132, 1] și apoi să extragem rădăcina patrată cu aproximația cerută. Astfel găsim:

$$8\times\sqrt{45} = \sqrt{64\times 45} = \sqrt{2880} = 53{,}66563.$$

2°. Să se calculeze valoarea fracției

$$\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

cu o eroare mai mică decât 0,001.

Dacă luăm $\sqrt{3} = 1{,}7320$, $\sqrt{2} = 1{,}4142$ cu 4 cifre zecimale, găsim

$$\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{7}{1{,}7320-1{,}4142} = \frac{7}{0{,}3178} = 22{,}0264$$

necunoscând nici valoarea și nici sensul erorii rezultatului.

Făcând însă numitorul rațional:

$$\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 7(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{147}+\sqrt{98}$$

și calculând fiecare termen cu o eroare mai mică decât 0,0001 prin lipsă, suma

$$\sqrt{147}+\sqrt{98} = 12{,}1243+9{,}8994 = 22{,}0237$$

reprezintă rezultatul căutat cu o eroare prin lipsă mai mică decât

$$0{,}0002 < 0{,}001.$$

III. — NUMERE IRAȚIONALE.

141. Șiruri de numere. Să însemnăm cu

$$(\alpha) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

un *șir infinit* de numere (diferite sau egale între ele). Numărul a_n se zice *termenul* al n-lea al șirului sau termenul de *rang* n.

Un șir de numere e *determinat*, când putem scrie valoarea oricărui termen al șirului, de îndată ce ni se spune *rangul* acestui termen.

Astfel, șirurile

$$(27) \qquad 1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$$

$$(28) \qquad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$(29) \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

sunt determinate.

Termenul de rang n se mai numește *termenul general* al șirului. In exemplele luate, *toți* termenii șirului, se deduc din termenul general, dacă înlocuim pe n succesiv prin $1, 2, 3, \ldots$

Dacă avem

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

șirul e *crescător* și dacă avem

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

șirul e *descrescător*. Șirurile crescătoare și șirurile descrescătoare se zic șiruri *monotone*.

Șirul (27) e crescător; șirul (28) e descrescător. Pentru șirul (29) avem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

deci $a_n < a_{n+1}$, oricare ar fi n. Șirul (29) e crescător.

Șirurile (27), (28), (29) sunt *monotone*. Șirul

$$(30) \qquad \left(-\tfrac{1}{3}\right), \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2, \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n, \ldots$$

în care avem

$$-\tfrac{1}{3} < +\tfrac{1}{9} > -\tfrac{1}{27} < \cdots$$

nu e monoton. Acest șir se zice *alternat*, fiindcă termenii sunt în mod alternativ *pozitivi* și *negativi*.

Dacă reprezentăm pe o axă Δ (*fig.* 26) punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, care au abscisele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ respectiv, obținem *șirul de puncte* sau *mulțimea de puncte, care corespunde șirului* (α).

Dacă toți termenii șirului sunt *mai mari* decât un număr determinat A, zicem că șirul e *mărginit la stânga*; dacă toți termenii șirului sunt *mai mici* decât un număr determinat B, șirul e mărginit *la dreapta*.

Dacă avem un șir de numere mărginit și la dreapta și la stânga prin numerele A și B (*fig.* 26), punctele de pe axa Δ, care corespund acestui șir, sunt situate *toate* (în număr *finit* sau *infinit*) pe segmentul AB.

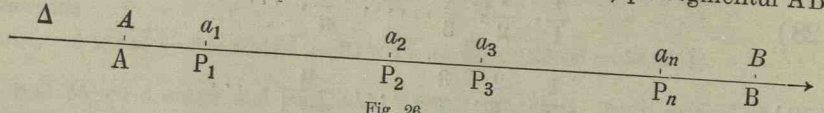


Fig. 26.

142. Cantități variabile. Când reprezentăm numerele prin litere, o literă oarecare a

1°. sau reprezintă un număr *determinat*,

2°. sau poate căpătă *diferite valori numerice*, de exemplu valorile unui șir de numere.

In cazul 1° a e o cantitate *constantă*; în cazul 2° a e o cantitate *variabilă*. A zice că a *variază*, însemnează a zice că a *trece dela o valoare numerică la alta*. Dacă a capătă succesiv valori *oricât de mari* din șirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$, zicem că a *crește la infinit*.

Intr'un șir de numere, termenul general a_n e o cantitate *variabilă*, care pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, p$ capătă respectiv valorile $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$.

143. Limite. Să considerăm un șir *infinit* de numere:

(A) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

1°. Dacă termenii șirului A devin *din ce în ce mai mici*, când rangul lor e din ce în ce mai mare, sau mai precis: *dacă, oricât de mic ar fi un număr* $\varepsilon > 0$, *găsim un număr* p, *așa ca să avem*

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către zero*, când n crește la infinit și scriem

$$a_n \to 0 \qquad (a_n \text{ tinde către } 0),$$

sau

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

adică *limita* lui a_n e *zero* pentru n *infinit*.

EXEMPLU: Șirul (28) *tinde către zero*, fiindcă luând $\varepsilon = \frac{1}{10^p}$, pentru $n > 10^p$ avem $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^p}$ adică $a_n < \varepsilon$.

2°. In general, vom zice că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către o limită* λ, *când* n *crește la infinit*, dacă valoarea termenului a_n *se apropie din ce în ce mai mult de numărul* λ (adică dacă diferența dintre a_n și λ devine *oricât de mică vrem*), când luăm termenul a_n de rang din ce în ce mai mare. Mai precis: *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către limita* λ *pentru* n *infinit, dacă oricât de mic ar fi un număr pozitiv* ε, *găsim un număr* p, *așa ca să avem*

$$|\lambda - a_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p.$$

In acest caz scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lambda \quad \text{sau} \quad a_n \to \lambda \quad \text{sau} \quad a_n = \lambda + \alpha$$

unde α e o cantitate (pozitivă sau negativă), care *tinde către zero*, când n crește la infinit.

EXEMPLU: Șirul (29) *tinde către* 1, deoarece, oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, adică pentru $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

3°. Dacă, *oricât de mare ar fi un număr* M, termenii șirului A, pentru n destul de mare, sunt *mai mari decât* M, adică *dacă, oricât de mare ar fi* M, *găsim un număr* p, *așa ca să avem*

$$a_n > M \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că *șirul* A *crește la infinit.*

Deși *infinitul* nu e un număr determinat, totuși prin generalizare vom zice, și în acest caz, că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către limita* $+\infty$, când n crește la infinit și vom scrie

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty \quad \text{sau} \quad a_n \to +\infty.$$

EXEMPLU. Șirul (27) *crește la infinit* cu n, deoarece, oricât de mare ar fi un număr M, dacă P e $\sqrt{M}$ cu aproximație de o unitate prin adaos, avem $P^2 > M$ și

$$a_n = n^2 > P^2 > M \quad \text{pentru} \quad n > P.$$

4°. Dacă, oricât de mic (1) ar fi un număr negativ $-M$, termenii șirului A sunt *mai mici decât* $-M$ pentru n destul de mare, zicem

(1) In sens algebric.

că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către* $-\infty$, când n crește la infinit și scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = -\infty \quad \text{sau} \quad a_n \to -\infty.$$

EXEMPLU: Șirul

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

tinde către $-\infty$, deoarece avem $a_n = -n < -M$ pentru $n > M$.

144. Număr limită. Dacă ne propunem să căutăm numărul x, care satisface la condițiunea

$$x^2 = 2 \quad \text{sau} \quad x = \sqrt{2},$$

găsim, prin metoda extragerii rădăcinii patrate cu aproximație de 0,1, 0,01, 0,001, etc., următoarele *valori apropiate*:

(A) $a_1 = 1{,}4$, $a_2 = 1{,}41$, $a_3 = 1{,}414$, $a_4 = 1{,}4142$, $a_5 = 1{,}41421$, ...

(B) $b_1 = 1{,}5$, $b_2 = 142$, $b_3 = 1{,}415$, $b_4 = 1{,}4143$, $b_5 = 1{,}41422$, ...

care ridicate la patrat, ne dau

$$(31) \qquad \begin{array}{ll} a_1^2 = \mathbf{1{,}96} < 2 & b_1^2 = \mathbf{2{,}25} > 2 \\ a_2^2 = \mathbf{1{,}9881} < 2 & b_2^2 = \mathbf{2{,}0164} > 2 \\ a_3^2 = \mathbf{1{,}999396} < 2 & b_3^2 = \mathbf{2{,}002225} > 2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

In general, dacă a_n și b_n sunt valorile numărului $\sqrt{2}$ apropiate *prin lipsă* și *prin exces* cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, avem

$$(32) \qquad a_n^2 < 2, \quad b_n^2 > 2,$$

$$(33) \qquad a_n < b_n \quad \text{și} \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Obținem astfel *două șiruri determinate de numere raționale* A și B, care au proprietățile următoare:

1°. Când n crește, *termenii șirului* A *cresc* (sau cel puțin *nu descresc*); *termenii șirului* B *descresc* (sau cel puțin *nu cresc*), adică avem, oricare ar fi n,

$$(34) \qquad a_n \leqq a_{n+1} \quad \text{și} \quad b_n \geqq b_{n+1}.$$

2°. Orice număr a_p din șirul A e mai mic decât orice număr b_q din șirul B.

In adevăr, dacă $p = q$ avem $a_p < b_p$;
dacă $p > q$ avem $a_p < b_p \leqq b_q$;
dacă $p < q$ avem $a_p \leqq a_q < b_q$.

3°. *Diferența dintre două numere* a_n și b_n, *de același rang, poate deveni oricât de mică vrem,* dacă luăm rangul n destul de mare.

In adevăr, avem

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}. \tag{35}$$

4°. *În șirul* A *nu există niciun număr mai mare decât toate numerele din șirul* A; *în șirul* B *nu există niciun număr mai mic decât toate numerele din șirul* B.

In adevăr, dacă un număr a_p din șirul A ar fi *cel mai mare* număr din acest șir, am avea $a_n = a_p$ pentru $n > p$. Prin urmare, extrăgând rădăcina patrată din 2, am găsi la rădăcină *zeruri* pentru *toate cifrele de rang mai mare decât* p.

In acest caz $\sqrt{2}$ ar fi numărul *rațional* a_p, rezultat evident absurd.

La un rezultat analog am ajunge, dacă am presupune că, în șirul B, există un număr b_q mai mic decât *toate* numerele din acest șir.

Observare. Din neegalitățile

$$a_n \leqq a_{n+p} < b_{n+p} \leqq b_n$$

și din egalitatea (35) rezultă neegalitățile

$$| a_{n+p} - a_n | < \frac{1}{10^n} \quad \text{și} \quad | b_{n+p} - b_n | < \frac{1}{10^n} \tag{36}$$

oricare ar fi numărul p întreg și pozitiv.

Neegalitățile (31) ne arată că niciun număr din șirurile A sau B nu îndeplinește condițiunea ca, ridicat la patrat, să ne dea *exact* pe 2. Totuși, când luăm pe n din ce în ce mai mare, *numerele raționale* a_n și b_n *se apropie din ce în ce mai mult de această condițiune.*

Mai precis, neegalitățile

$$a_n^2 < 2 < b_n^2,$$

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) < 2b_1(b_n - a_n)$$

și egalitatea (35), ne arată că diferențele

$$b_n^2 - a_n^2, \quad 2 - a_n^2 \quad \text{și} \quad b_n^2 - 2$$

tind către zero, când n crește la infinit. Prin urmare șirurile cu termenii a_n^2 și b_n^2 au ca *limită comună* numărul 2.

In acest caz convenim să zicem că termenii a_n și b_n au ca *limită numărul irațional* reprezentat prin simbolul $\sqrt{2}$ și scriem

$$a_n < \sqrt{2} < b_n$$

pentru orice valoare a lui n.

Numerele raționale a_n și b_n au primele lor n cifre *comune*; acestea sunt primele n cifre *exacte* ale numărului *limită* $\sqrt{2}$. Găsim astfel:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624 \ldots$$

număr *de formă zecimală*, dar scris cu o *infinitate de cifre zecimale*.

145. Numere definite prin șiruri. Să presupunem că avem două șiruri infinite de numere raționale:

(A) $$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$$

(B) $$b_1, \ b_2, \ b_3, \ \ldots, \ b_n, \ \ldots$$

în care termenii a_n și b_n *se pot calcula după o regulă determinată*, pentru orice valoare a lui n, și care *satisfac la condițiile următoare* (1):

(α) *Șirul* A *e crescător* (sau cel puțin *nu descrește*); *șirul* B *e descrescător* (sau cel puțin *nu crește*).

(β) *Pentru orice valoare a lui* n, *avem*

$$a_n < b_n.$$

(γ) *Oricât de mic ar fi un număr* $\varepsilon > 0$, *găsim un număr* p, astfel ca *pentru* $n > p$ *să avem*

$$| b_n - a_n | < \varepsilon,$$

adică: *diferența* $b_n - a_n$ *tinde către zero*, când n crește la infinit.

Cu aceste ipoteze: 1°. Dacă există un număr *rațional* λ, care să fie *cuprins* între a_n și b_n

(37) $$a_n \leqq \lambda \leqq b_n$$

pentru orice valoare a lui n, șirurile A și B *tind către limita* λ.

E de ajuns să arătăm că

$$(\lambda - a_n) \to 0 \quad \text{și} \quad (\lambda - b_n) \to 0$$

când n crește la infinit. Dar aceasta rezultă din neegalitățile (37) și din ipoteza (γ)

$$\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

(1) Condițiile 1°, 2° și 3°, la care satisfăceau șirurile particulare din paragraful precedent.

In acest caz zicem că șirurile A și B *definesc numărul rațional* λ și scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lambda.$$

2°. Dacă nu există *niciun număr rațional* λ, care să satisfacă la condiția (37), *oricare ar fi* n, vom zice că șirurile A și B definesc un număr *irațional* λ, care, *prin definiție*, rămâne cuprins între a_n și b_n

$$a_n < \lambda < b_n$$

pentru orice valoare a lui n și vom scrie și în acest caz că

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lambda \quad \text{(număr } \textit{irațional}\text{)}.$$

Un număr *rațional* sau *irațional* (pozitiv, nul sau negativ) se numește număr *real*. Toate numerele raționale și iraționale formează la un loc *mulțimea numerelor reale*.

Șirurile A și B, prin condițiunile impuse, admit în toate cazurile *ca limită comună* un număr *real*.

OBSERVARE. Dacă, dela un rang oarecare p, termenii a_n ai unui șir A satisfac la condiția

$$a_n = a_p \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că limita șirului A este numărul rațional a_p [**143**, 2], deoarece, oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$a_p - a_n = 0 < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p.$$

In particular șirul $m, m, \ldots, m, \ldots$ are ca limită numărul m.

146. Operații cu numere limită. Dacă avem un număr λ definit ca *limita comună* a două șiruri A și B, cu termenii generali a_n și b_n respectiv, care satisfac la condițiile (α), (β), (γ) [**145**], convenim să scriem *toate aceste ipoteze* prin egalitatea

$$\lambda = (a_n, b_n). \tag{38}$$

Să considerăm două numere reale

$$\lambda = (a_n, b_n) \quad \text{și} \quad \lambda' = (a'_n, b'_n) \tag{39}$$

A și B, A′ și B′ fiind șirurile, care definesc aceste numere.

Pentru orice valoare a lui n, avem [**145**]

$$a_n < \lambda < b_n, \quad a'_n < \lambda' < b'_n \tag{40}$$

și oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, *pentru n destul de mare*, avem

$$|b_n - a_n| < \varepsilon, \quad |b'_n - a'_n| < \varepsilon. \tag{41}$$

Dacă numerele λ și λ' sunt *raționale*, din neegalitățile (40) deducem prin adunare [**40**, 5]:

$$a_n + a'_n < \lambda + \lambda' < b_n + b'_n$$

cu

$$|(b_n + b'_n) - (a_n + a'_n)| = |(b_n - a_n) + (b'_n - a'_n)| < 2\varepsilon.$$

Prin urmare *șirurile cu termenii generali* $a_n + a'_n$ *și* $b_n + b'_n$ *satisfac la toate condițiile* (α), (β), (γ) *și definesc numărul rațional* $\lambda + \lambda'$, adică putem scrie

$$\lambda + \lambda' = (a_n + a'_n,\ b_n + b'_n). \tag{42}$$

Această egalitate, luată ca *definiție* a sumii a două numere *raționale*, ne servește și pentru definirea *sumii* a două numere *iraționale*.

Definiție. *Suma numerelor iraționale limită definite prin șirurile cu termenii generali* a_n, b_n *și* a'_n, b'_n *este numărul limită definit prin șirurile cu termenii generali* $a_n + a'_n$, $b_n + b'_n$.

In mod analog se definesc și celelalte operații cu numerele iraționale, observând că pentru λ și λ' *raționale* $(\lambda < \lambda')$, din neegalitățile (40) și (41), deducem

pentru scădere [**40**, 6]:

$$a'_n - b_n < \lambda' - \lambda < b'_n - a_n;$$

pentru înmulțire [**56**, 3]:

$$a_n a'_n < \lambda\lambda' < b_n b'_n;$$

pentru împărțire [**62**, 4]:

$$\frac{a'_n}{b_n} < \frac{\lambda'}{\lambda} < \frac{b'_n}{a_n},$$

presupunând, în ultimele două operații, că numerele a_n, b_n, a'_n și b'_n sunt toate *pozitive*.

Când n variază, șirurile astfel obținute satisfac în toate cazurile la condițiile (α), (β), (γ). Putem dar scrie, ca *definiții* pentru *diferența*, *produsul* și *câtul* a două numere reale raționale, următoarele *numere limită*:

$$\lambda' - \lambda = (a'_n - b_n,\ b'_n - a_n), \tag{43}$$

$$(44) \qquad \lambda\lambda' = (a_n a'_n,\ b_n b'_n),$$

$$(45) \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \left(\frac{a'_n}{b_n},\ \frac{b'_n}{a_n}\right),$$

definiții, care se extind și la numerele *iraționale* și care ne permit să calculăm, sub formă de *numere limită*, diferența, produsul și câtul a două numere *reale* oricare.

Puterea λ^m și *rădăcina* $\sqrt[m]{\lambda}$, pentru λ irațional, se definesc tot ca numere limită.

Astfel, dacă termenii a_n și b_n sunt pozitivi, pentru m întreg și pozitiv, vom zice că

$$\lambda^m = (a_n^m,\ b_n^m), \qquad \sqrt[m]{\lambda} = \left(\sqrt[m]{a_n},\ \sqrt[m]{b_n}\right),$$

rădăcinile $\sqrt[m]{a_n}$ și $\sqrt[m]{b_n}$ fiind calculate cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prima prin lipsă și a doua prin adaos.

OBSERVARE. Dacă $\lambda = (a_n,\ b_n)$, avem

$$-\lambda = (-b_n,\ -a_n), \qquad \lambda \times 0 = 0, \qquad \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{b_n},\ \frac{1}{a_n}\right),$$

egalități, care rezultă din definițiile (43), (44), (45), dacă observăm că numerele $\lambda' = 0$ și $\lambda' = 1$ pot fi definite, respectiv, prin șirurile cu termenii generali

$$a'_n = b'_n = 0 \quad \text{și} \quad a'_n = b'_n = 1.$$

147. Șiruri oarecare. Să considerăm două șiruri

$$(A) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

$$(A') \qquad a'_1,\ a'_2,\ a'_3,\ \ldots,\ a'_n,\ \ldots$$

monotone sau *nu*, dar *care tind fiecare către o limită determinată*

$$(46) \qquad \lim a_n = \lambda, \qquad \lim a'_n = \lambda'$$

pentru $n = \infty$. Putem dar scrie [**143**, 2]:

$$(47) \qquad a_n = \lambda + \alpha, \qquad a'_n = \lambda' + \alpha',$$

unde cantitățile (pozitive sau negative) α și α' *tind către zero*, când n crește la infinit.

In acest caz vedem că

$$(48)\qquad \begin{aligned} a_n + a'_n &= \lambda + \lambda' + [\alpha + \alpha'], \\ a_n - a'_n &= \lambda - \lambda' + [\alpha - \alpha'], \\ a_n a'_n &= \lambda\lambda' + [\alpha\lambda' + \alpha'\lambda + \alpha\alpha'], \\ \frac{a_n}{a'_n} &= \frac{\lambda}{\lambda'} + \left[\frac{\lambda+\alpha}{\lambda'+\alpha'} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right] = \frac{\lambda}{\lambda'} + \left[\frac{\alpha\lambda' - \alpha'\lambda}{(\lambda'+\alpha')\lambda'}\right]. \end{aligned}$$

Dacă presupunem în ultima egalitate $\lambda' \neq 0$, toate cantitățile din paranteze *tind către zero* (ca și α și α'), când n crește la infinit.

Prin urmare, egalitățile (46) și (48), pentru $n = \infty$, ne dau

$$(49)\qquad \begin{aligned} &\lim (a_n + a'_n) = \lambda + \lambda' = \lim a_n + \lim a'_n, \\ &\lim (a_n - a'_n) = \lambda - \lambda' = \lim a_n - \lim a'_n, \\ &\lim (a_n a'_n) = \lambda\lambda' = \lim a_n \cdot \lim a'_n, \\ &\lim \frac{a_n}{a'_n} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lim a_n}{\lim a'_n} \quad (\text{dacă } \lambda' \neq 0). \end{aligned}$$

TEOREME. 1°. *Limita sumei* a două cantități variabile este egală cu *suma limitelor* acestor cantități.

2°. *Limita diferenței* a două cantități variabile este egală cu *diferența limitelor* acestor cantități.

3°. *Limita produsului* a două cantități variabile este egală cu *produsul limitelor* acestor cantități.

4°. *Limita câtului* a două cantități variabile este egală cu *câtul limitelor* acestor cantități, *dacă limita împărțitorului e diferită de zero.*

EXEMPLU. Să luăm

$$a_n = \frac{2n-3}{n}, \quad a'_n = \frac{5n+1}{n}.$$

Putem scrie

$$a_n = 2 - \frac{3}{n} = \lambda + \alpha, \quad a'_n = 5 + \frac{1}{n} = \lambda' + \alpha',$$

unde $\lambda = 2$, $\alpha = -\frac{3}{n}$, $\lambda' = 5$, $\alpha' = \frac{1}{n}$; α și α' tind către zero când $n \to \infty$.

Prin urmare avem

$$\lim a_n = 2, \quad \lim a'_n = 5.$$

Către ce limită tinde produsul $a_n a'_n = \frac{(2n-3)(5n+1)}{n^2}$, când n crește la infinit?

Aplicând teorema precedentă

$$\lim (a_n a'_n) = \lim a_n \cdot \lim a'_n$$

găsim, pentru $n = \infty$,

$$\lim \frac{(2n-3)(5n+1)}{n^2} = 2 \times 5 = 10.$$

148. Simboluri cu o infinitate de cifre zecimale. Să considerăm un număr *de formă zecimală*, dar presupus scris *cu o infinitate de cifre zecimale*. Fie a_n numărul format din partea întreagă și primele n cifre zecimale ale numărului dat; b_n numărul care se obține din a_n, când mărim ultima cifră zecimală a lui a_n cu o unitate.

Șirurile A și B formate cu numerele a_n și b_n astfel determinate, fiindcă satisfac la condițiile (α), (β), (γ) dela paragraful **145**, definesc un număr real λ și avem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lambda.$$

Cu cât n este mai mare, cu atât numărul fracționar a_n (cu n cifre zecimale) se apropie mai mult de *valoarea adevărată* a numărului real λ.

In practică operațiile cu aceste simboluri se reduc la operații făcute cu valorile apropiate a_n.

Se pot prezentă următoarele cazuri:

1°. Dela un rang p, *toate cifrele zecimale,* ale numărului dat, *de rang mai mare decât* p sunt *zeruri.*

In acest caz avem $a_n = a_p$ pentru $n \geqq p$ și numărul limită $\lambda = a_p$ e *întreg* sau *fracționar zecimal* (număr *rațional*).

EXEMPLU. Pentru numărul $\lambda = 38{,}725\,000\,000\ldots$ avem
$a_1 = 38{,}7$, $a_2 = 38{,}72$, $a_3 = 38{,}725$, $a_n = a_3$ pentru $n \geqq 3$ și $\lambda = a_3 = 38{,}725$.

2°. In numărul dat există cifre *diferite de zero* de rang oricât de mare, dar *o aceeaș grupă de cifre zecimale se repetă la infinit.* In acest caz avem o fracție zecimală *periodică* simplă sau mixtă [**93**, 2] și numărul limită λ este o *fracție ordinară* (număr *rațional*).

EXEMPLE. a^0. Fracție periodică simplă: $\lambda = 0{,}783\,783\,783\ldots$
Grupa 783 este *perioada* și putem scrie

$$1000\,\lambda = 783{,}783\,783\,783\ldots$$
$$\lambda = \quad 0{,}783\,783\,783\ldots$$

Scăzând aceste egalități, membru cu membru, găsim

$$999\,\lambda = 783{,}000\,000\,000\ldots$$

de unde rezultă

$$\lambda = \frac{783}{999}.$$

b^0. Fracție periodică mixtă: $\lambda = 0{,}485\,37\,37\,37\,\ldots$
485 este *partea neperiodică*, 37 este *perioada* și avem

$$100\,000\,\lambda = 48537{,}37\,37\,37\,\ldots$$
$$1\,000\,\lambda = 485{,}37\,37\,37\,\ldots$$

Scăzând aceste egalități, membru cu membru, găsim

$$99\,000\,\lambda = 48052{,}00\,00\,00\,\ldots$$

de unde rezultă

$$\lambda = \frac{48\,052}{99\,000} = \frac{485\,37 - 485}{99\,000}.$$

3^0. Când numărul dat, *cu o infinitate de cifre zecimale*, nu e nici de catagoria 1^0, nici de categoria 2^0, ne găsim în cazul al doilea dela paragraful **146** și $\lim a_n = \lambda$ e un număr *irațional*, care se reprezintă printr'un *semn convențional* sau printr'o *literă* [**93**].

EXEMPLE de numere iraționale:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots, \quad e = 2{,}718281828459\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159265358979323846264 3\ldots$$
$$\beta = 0{,}12345678910111213141516171819\ldots$$

Succesiunea cifrelor zecimale e dată, pentru fiecare număr irațional, prin regula specială, după care se calculează valorile apropiate ale acestui număr *limită*.

149. Corespondența între numere și puncte. Pe o axă Δ (*fig.* 27), alegând un segment OA ca unitate de măsură, să fixăm punctele O și A, care corespund la numerele 0 și 1.

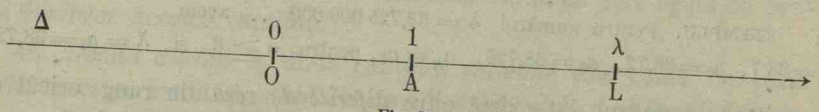


Fig. 27.

1^0. *La orice punct* L *de pe axa* Δ *corespunde un număr real* λ *și unul singur*. Acest număr e *valoarea algebrică a segmentului* $\overrightarrow{OL}$ măsurat pe axa Δ cu unitatea $\overline{OA}$. Numărul λ este *pozitiv* sau *negativ*, după cum segmentul $\overrightarrow{OL}$ are *același sens* sau are *sens contrar* cu axa Δ.

Dacă lungimea OL e comensurabilă cu OA, valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{OL}$ este un *număr algebric rațional*. Dacă lungimea OL e incomensurabilă cu OA, valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{OL}$ este un *număr algebric irațional* [**99** și **100**].

Acest număr λ e *abscisa* punctului L și se reprezintă prin $\overline{OL}$.

Convenim dar să deosebim pe axa Δ două feluri de puncte: *raționale* și *irraționale*, după cum ele corespund la numere raționale sau irraționale (1).

EXEMPLU. Dacă OL e lungimea semicercului cu raza $OA = 1$ (*fig.* 27), avem $\overline{OL} = \pi$; punctul L corespunde la numărul irațional π.

2°. *La orice număr real* λ *corespunde un punct și unul singur pe axa* Δ.

In adevăr orice număr real λ poate fi definit ca limita a două șiruri de numere raționale A și B satisfăcând la condițiile (α), (β), (γ) [**145**]. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ punctele de pe axa Δ, care corespund respectiv la numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ din șirurile A și B (*fig.* 28).

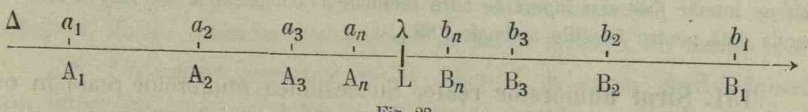


Fig. 28.

Toate punctele A_n *se găsesc la stânga tuturor punctelor* B_n.

Lungimea segmentului $\overline{A_nB_n} = b_n - a_n$ *tinde către zero,* când n crește la infinit.

Punctele A_n, mergând spre dreapta, *și punctele* B_n, mergând spre stânga, *se apropie din ce în ce mai mult de o poziție limită* L. Vom zice că L *e punctul care corespunde numărului limită* $\lambda = (a_n, b_n)$.

150. Compararea numerelor reale. Dacă la două numere reale λ și λ' corespunde *același punct limită* L, zicem că numerele λ și λ' sunt *egale* și scriem $\lambda = \lambda'$.

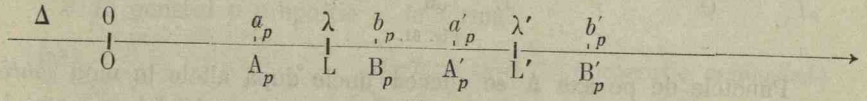


Fig. 29.

Dacă la numerele λ și λ' corespund punctele *distincte* L și L', vom zice că λ' e *mai mare* decât λ, dacă segmentul $\overline{OL'}$ e mai mare decât segmentul $\overline{OL}$, adică dacă punctul L' e *la dreapta* punctului L pe axa Δ (*fig.* 29).

(1) Aceste puncte sunt determinate pe axă, numai după ce s'a ales *unitatea* OA.

Dacă figurăm pe această axă punctele A_n, B_n și A'_n, B'_n, care corespund la șirurile care definesc numerele

$$\lambda = (a_n, b_n), \quad \lambda' = (a'_n, b'_n),$$

vedem că, dacă pentru un rang p, A'_p *coincide* cu B_p sau e *la dreapta* lui B_p, punctul L′ e *la dreapta* punctului L (*fig.* 29).

Prin urmare:

1°. Dacă, pentru un rang p, găsim $a'_p \geqq b_p$ avem $\lambda' > \lambda$.

2°. Dacă, pentru un rang p, găsim $b'_p \leqq a_p$ avem $\lambda' < \lambda$.

3°. Dacă, pentru *orice* rang n, găsim neegalitățile $a_n < b'_n$ și $a'_n < b_n$, avem $\lambda' = \lambda$.

OBSERVARE. Când numerele λ și λ' sunt scrise sub formă de fracții zecimale (cu un număr *finit* sau *infinit* de cifre zecimale), compararea lor se va face după regula dată pentru fracțiile zecimale [89].

151. Șirul numerelor reale. Succesiunea numerelor reale în ordinea, în care se găsesc pe axa Δ (*fig.* 30), formează *șirul numerelor reale*. Acest șir e *crescător*.

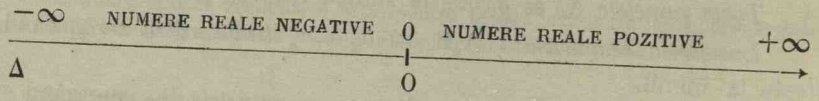


Fig. 30.

Fiindcă între două puncte de pe axa Δ există o infinitate de alte puncte, rezultă că *între două numere reale*, oricât de apropiate ar fi ele, *se găsesc cuprinse o infinitate de alte numere reale*. De aceea zicem că șirul numerelor reale este *dens*.

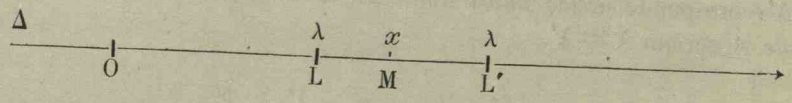


Fig. 31.

Punctele de pe axa Δ se succed unele după altele în mod *continuu*. Prin urmare, dacă un punct M se mișcă pe axa Δ, dela punctul L până la punctul L′ (*fig.* 31), abscisa punctului M, $x = \overline{OM}$, capătă succesiv *toate* valorile posibile cuprinse între numerele λ și λ'. Toate aceste valori sunt numere *reale*. De aceea convenim să zicem că șirul numerelor reale este un *șir continuu*.

Mulțimea tuturor numerelor reale, cuprinse între λ și λ', formează *intervalul* (λ, λ'). Când punctul M se mișcă între L și L′, zicem că $x = \overline{OM}$ *variază în intervalul* (λ, λ').

OBSERVARE. La un punct A *fix* pe axa Δ, corespunde o abscisă *constantă* a; la un punct M *mobil* pe axa Δ, corespunde o abscisă *variabilă* x.

IV. — PROPORȚIONALITATEA.

152. Rapoarte. Dacă a și b reprezintă două numere:

1°. Diferența $a-b$ este *raportul aritmetic* dintre a și b;

2°. Câtul exact $a:b$ sau $\frac{a}{b}$ este *raportul geometric* dintre a și b [**75**].

Numerele a și b sunt *termenii* raportului.

EXEMPLE. Raportul *aritmetic* dintre 15 și 5 este $15-5=10$; raportul *geometric* dintre 15 și 5 este $15:5=3$.

Legile rapoartelor. 1°. *Un raport aritmetic nu-și schimbă valoarea, dacă-i adunăm sau scădem la ambii termeni un același număr.*

2°. *Un raport geometric nu-și schimbă valoarea, dacă-i înmulțim sau împărțim ambii termeni cu un același număr.*

Aceste proprietăți rezultă din legile scăderii [**22**, 5] și din legile împărțirii exacte [**60**, 3].

153. Proporții. Egalitatea a două rapoarte *de același fel* formează o *proporție*. Proporția e *aritmetică* sau *geometrică*, după felul rapoartelor cu care e formată.

EXEMPLE. Proporții *aritmetice*:

$18-7=14-3$; $\quad 6{,}16-5{,}84=1{,}24-0{,}92$; $\quad \frac{29}{21}-\frac{5}{7}=\frac{22}{15}-\frac{4}{5}$.

Proporții *geometrice*:

$$\frac{5}{8}=\frac{35}{56}; \quad \frac{3}{2{,}5}=\frac{5{,}64}{4{,}7}; \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{108}}{2\sqrt{12}}.$$

In general o proporție e de forma

$$a-b=c-d \qquad \text{(proporție } \textit{aritmetică}\text{)} \tag{50}$$

sau

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \text{(proporție } \textit{geometrică}\text{)}. \tag{51}$$

Orice proporție are *patru termeni*. In proporțiile (50) și (51) termenii sunt a, b, c, d; primul și ultimul termen (a și d) se numesc *externi* sau *extremi*; termenul al doilea și al treilea (b și c) se numesc *interni* sau *mezi*.

154. Proporții aritmetice. 1°. In orice proporție aritmetică *suma mezilor e egală cu suma extremilor.*

In adevăr, din

$$a-b=c-d \tag{52}$$

adunând pe $b+d$ la ambii membri, deducem

$$a+d=b+c. \tag{53}$$

Invers, din egalitatea (53) rezultă proporția aritmetică (52).

OBSERVARE. Intr'o proporție aritmetică se pot schimbà *mezii între ei* sau *extremii între ei* sau *amândoi mezii cu amândoi extremii*, deoarece prin oricare din aceste schimbări egalitatea (53) rămâne *aceeaș*.

2°. Când cunoaștem trei termeni a, b, c ai unei proporții aritmetice, putem calculà *termenul al patrulea* al ei.

In adevăr, însemnând cu x termenul necunoscut, din

$$a-b=c-x$$

deducem $a+x=b+c$ și

$$x=b+c-a. \tag{54}$$

3°. Dacă într'o proporție aritmetică

$$a-m=m-b \quad \text{sau} \quad m-a=b-m \tag{55}$$

mezii sunt *egali* (sau *extremii* sunt *egali*), valoarea lor comună m se numește *media aritmetică* a celorlalte două numere a și b.

Din egalitatea (55) deducem $2m=a+b$ și

$$m=\frac{a+b}{2} \quad \text{(media } \textit{aritmetică}\text{)}. \tag{XLIX}$$

Prin urmare: *media aritmetică a două numere e semisuma lor.*

GENERALIZARE. Media aritmetică a n numere $a, b, c, \ldots, l$ este *suma acestor numere împărțită prin numărul lor:*

$$m=\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}. \tag{L}$$

EXEMPLU. Măsurând, prin zece determinări succesive, cu ajutorul unei *mașini de divizat*, distanța dintre două diviziuni de pe un tub termometric (dela 20^0 până la 50^0), am găsit rezultatele următoare:

		Măsurări.			*Diferențe.*	
1-a	măsurare:	262,11	— 262,08	=	+ 0,03	
a 2-a	„	261,99				— 0,09
a 3-a	„	262,20			+ 0,12	
a 4-a	„	262,07				— 0,01
a 5-a	„	261,98				— 0,10
a 6-a	„	262,13			+ 0,05	
a 7-a	„	262,00				— 0,08
a 8-a	„	261,96				— 0,12
a 9-a	„	262,15			+ 0,07	
a 10-a	„	262,23			+ 0,15	
	Total:	2620,82 *mm.*			+ 0,42	— 0,40

Media aritmetică: $\frac{2620,82}{10} = 262,082$. Valoarea *medie*: **262,08** *mm.*

Pentru 30^0 avem 262,08 *mm.*; pentru 1^0 avem $262,08 : 30 = 8,736$ *mm.*

155. Proporții geometrice. 1°. In orice proporție geometrică *produsul mezilor e egal cu produsul extremilor.*

In adevăr, din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{56}$$

înmulțind ambii membri cu bd, deducem

$$ad = bc. \tag{57}$$

Invers, din egalitatea (57) rezultă proporția geometrică (56).

OBSERVARE. Într'o proporție geometrică se pot schimbà *mezii între ei* sau *extremii între ei* sau *amândoi mezii cu amândoi extremii*, deoarece prin oricare din aceste schimbări egalitatea (57) rămâne *aceeaș.*

2°. Când cunoaștem trei termeni a, b, c ai unei proporții geometrice, putem calculà *termenul al patrulea* al ei.

In adevăr, din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

deducem $ax = bc$ și

$$x = \frac{bc}{a} \qquad (a \textit{ patra proporțională}). \tag{58}$$

3°. Dacă într'o proporție geometrică

$$\frac{a}{\mu} = \frac{\mu}{b} \quad \text{sau} \quad \frac{\mu}{a} = \frac{b}{\mu} \tag{59}$$

mezii sunt *egali* (sau *extremii* sunt *egali*), valoarea lor comună μ se numește *media geometrică* a celorlalte două numere a și b.

Din egalitatea (59) deducem $\mu^2 = ab$ și

(LI) $$\mu = \sqrt{ab} \qquad \text{(media } \textit{geometrică}\text{)}.$$

Prin urmare: *media geometrică a două numere e rădăcina patrată din produsul lor.*

Generalizare. Media geometrică a n numere $a, b, c, \ldots, l$ este *rădăcina a n-a din produsul lor:*

(LII) $$\mu = \sqrt[n]{a.b.c \ldots l}.$$

Observare. Media aritmetică a două numere e *mai mare* decât media geometrică a lor. Adică avem

(60) $$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad \text{sau} \quad m > \mu.$$

In adevăr, înmulțind cu 2 și ridicând la patrat, neegalitatea (60) devine

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad \text{sau} \quad (a-b)^2 > 0,$$

ultima neegalitate fiind evident adevărată.

4°. *Media armonică* a două numere a și b este numărul ξ, care satisface la egalitatea

(LIII) $$\frac{2}{\xi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad \text{(media } \textit{armonică}\text{)}.$$

De aci deducem

$$\frac{2}{\xi} = \frac{a+b}{ab} \quad \text{sau} \quad ab = \frac{a+b}{2} \cdot \xi$$

adică

(LIV) $$\mu^2 = m \cdot \xi \quad \text{sau} \quad \frac{\mu}{\xi} = \frac{m}{\mu}.$$

Prin urmare: *media geometrică* a două numere (a și b) este medie geometrică între *media aritmetică* și *media armonică* a acestor numere. Neegalitatea (60) ne arată că rapoartele (LIV) sunt supraunitare; adică avem:

$$\xi < \mu < m.$$

OBSERVARE. Media armonică a numerelor a și b satisface la următoarele proporții (una aritmetică și una geometrică):

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{b}; \qquad \frac{a-\xi}{\xi-b}=\frac{a}{b}.$$

Când vom zice numai *raport* sau *proporție*, fără să specificăm *felul* lor, vom înțelege *raport geometric* și *proporție geometrică*.

156. Teoreme. 1°. *In orice proporție suma* (sau *diferența*) *numărătorilor împărțită prin suma* (sau *diferența*) *numitorilor formează un raport egal cu fiecare dintre rapoartele proporției.* Adică avem

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}. \tag{61}$$

Pentru *sumă* demonstrația a fost dată la paragraful 84, 1°; pentru *diferență* se înlocuește adunarea egalităților prin scădere.

2°. *Din proporția*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{sau} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \tag{62}$$

putem deduce proporțiile următoare:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}; \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}; \tag{63}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}; \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}; \tag{64}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \tag{65}$$

In adevăr, proporțiile (63) scrise sub forma

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \qquad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

și proporțiile (64) scrise

$$1+\frac{b}{a}=1+\frac{d}{c}, \qquad 1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}$$

sunt evidente pentru numerele, care formează proporțiile (62); împărțind membru cu membru egalitățile (63) sau (64) deducem egalitatea (65).

157. Mărimi proporționale. Valoarea unei mărimi *depinde*, în general, *de valoarea altei mărimi.*

Astfel: *suprafața* unui patrat depinde de *lungimea* laturii lui; *costul* unei cantități de făină depinde de *greutatea* ei.

1°. Când dependența este astfel că, dacă una din mărimi devine *de n ori mai mare* și cealaltă mărime devine tot *de n ori mai mare*, aceste două mărimi se zic *direct proporționale.*

EXEMPLE. *Costul* unei stofe și *lungimea* ei; *volumul* unui corp și *greutatea* lui [**102**].

Dacă două mărimi A și B sunt *direct* proporționale și dacă a_1 și $a_2 = na_1$ sunt măsurile a două cantități din mărimea A, b_1 și $b_2 = nb_1$ măsurile cantităților corespunzătoare din mărimea B, între aceste patru numere avem proporția:

$$(D) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

2°. Când dependența dintre două mărimi este astfel că, dacă una din ele devine *de n ori mai mare*, cealaltă mărime devine *de n ori mai mică*, aceste două mărimi se zic *invers proporționale.*

EXEMPLE. *Iuțeala* unui tren cu *timpul* în care trenul parcurge un drum determinat; *volumul* unui gaz cu *presiunea* la care e supus gazul, când temperatura rămâne aceeași.

In acest caz, între valorile a_1 și $a_2 = na_1$ (pentru mărimea A) și valorile corespunzătoare b_1 și $b_2 = b_1 : n$ (pentru mărimea B), avem proporția:

$$(I) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{sau} \quad a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

Dacă se dau numai trei termeni din aceste proporții și se cere să aflăm pe al patrulea, avem de rezolvat o problemă de *regulă de trei* simplă, *directă* în cazul (D) și *inversă* în cazul (I).

158. Numere direct proporționale. Dacă ni se dau două șiruri de numere

$$(A) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

$$(B) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

astfel că între două numere *de același rang* a_i, b_i să avem

$$(66) \qquad b_i = \lambda a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din șirul B sunt *proporționale* sau, mai corect, *direct proporționale* cu numerele din șirul A.

Egalitățile (66) se mai pot scrie:

$$(67) \qquad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = \lambda .$$

Numărul λ, cu care trebue să înmulțim numerele din șirul A, ca să căpătăm numerele din șirul B, se numește *coeficient de proporționalitate* sau *constanta de proporționalitate.*

EXEMPLU. Numerele

$$(\alpha) \qquad 4,\ 11,\ 17,\ 36,\ 81$$

sunt direct proporționale cu numerele

$$(\beta) \qquad 0{,}8,\ 2{,}2,\ 3{,}4,\ 7{,}2,\ 16{,}2$$

fiindcă avem

$$\frac{4}{0{,}8} = \frac{11}{2{,}2} = \frac{17}{3{,}4} = \frac{36}{7{,}2} = \frac{81}{16{,}2} = 5 .$$

Coeficientul de proporționalitate este 5. Invers și numerele din șirul (β) sunt proporționale cu numerele din șirul (α); în acest caz coeficientul de proporționalitate est 0,2 sau $\frac{1}{5}$.

OBSERVARE. Dacă numerele din șirurile A și B sunt direct proporționale, între două numere oricare a_p, a_q din șirul A și numerele corespunzătoare b_p, b_q din șirul B, avem proporția:

$$(68) \qquad \frac{a_p}{b_p} = \frac{a_q}{b_q} \quad \text{sau} \quad \frac{a_p}{a_q} = \frac{b_p}{b_q} .$$

EXEMPLU. Dacă un *mobil* M se mișcă pe o dreaptă AB cu o mișcare *uniformă* de v cm. pe secundă [**46**], spațiul s, parcurs de mobil în t secunde, este dat de formula $s = vt$. In timpurile $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mobilul parcurge spațiile

$$s_1 = vt_1,\quad s_2 = vt_2,\quad \ldots,\quad s_n = vt_n$$

și avem

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \cdots = \frac{s_n}{t_n} = v .$$

Prin urmare: într'o mișcare *uniformă*, *spațiile* parcurse de mobil sunt *direct proporționale* cu *timpurile* întrebuințate pentru a le parcurge. Coeficientul de proporționalitate, în acest caz, este *iuțeala* mobilului.

Dacă între două numere de acelaș rang a_i, b_i din șirurile A și B avem relația

$$\frac{b_i}{a_i^p} = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \lambda a_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele b_i din șirul B sunt direct proporționale *cu puterile p* ale numerelor a_i din șirul A.

EXEMPLE. 1°. Dacă un corp greu cade în vid și dacă s este spațiul parcurs prin cădere în timpul t, iar $g = 9{,}809\ m.$ *intensitatea gravitației*, formula din Mecanică $s = \frac{1}{2} g t^2$ ne arată că, în căderea corpurilor, *spațiile* parcurse sunt proporționale cu *pătratele timpurilor* corespunzătoare. Coeficientul de proporționalitate este $\frac{1}{2} g$.

2°. Volumul unei *sfere* e dat prin formula $V = \frac{3}{4} \pi r^3$. Prin urmare: *volumurile sferelor* sunt proporționale cu *cuburile razelor* lor. Coeficientul de proporționalitate este $\frac{3}{4} \pi$.

159. Impărțirea în părți proporționale. Un număr A se poate împărți *în n părți* într'o infinitate de feluri. Insemnând aceste părți cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, trebue să avem în toate cazurile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A.$$

Dacă vrem ca părțile să fie *egale*, luăm

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{A}{n}.$$

Să presupunem însă, că vrem ca părțile să fie *direct proporționale cu n numere date* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. In acest caz trebue să avem

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} \tag{69}$$

și problema e rezolvată, dacă putem determină *coeficientul de proporționalitate* sau *valoarea comună* a acestor rapoarte.

Fiindcă cunoaștem suma numărătorilor $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A$ și putem calculă și suma numitorilor $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, avem [84, 1]:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{A}{S}.$$

Prin urmare:

$$x_1 = \frac{A}{S} \cdot a_1, \quad x_2 = \frac{A}{S} \cdot a_2, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{A}{S} \cdot a_n. \tag{70}$$

EXEMPLU. Literele dela tipografie sunt formate dintr'un aliaj de 80 părți *plumb* (Pb) și 20 părți *antimoniu* (Sb). Cât Pb și cât Sb se găsește în 2500 *kg.* de litere de tipografie?

Din proporția dată $\frac{Pb}{80} = \frac{Sb}{20} = \frac{2500}{100} = 25$ deducem:

$$Pb = 80 \times 25 = 2000\ kg; \quad Sb = 20 \times 25 = 500\ kg.$$

160. Numere invers proporționale. Dacă ni se dau două șiruri de numere

$$(A) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

$$(B) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

astfel ca, între numerele de același rang a_i, b_i să avem relația

$$(71) \qquad a_i b_i = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \frac{\lambda}{a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din șirul B sunt *invers proporționale* cu numerele din șirul A.

Fiindcă egalitățile (71) se mai pot scrie

$$(72) \qquad \frac{b_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{b_2}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}} = \lambda,$$

vedem că, în acest caz, numerele din șirul B sunt *direct proporționale* cu *inversele* numerelor din șirul A.

OBSERVARE. Dacă numerele din șirul A sunt *invers* proporționale cu numerele din șirul B, între două numere oricare a_p, a_q din șirul A și numerele corespunzătoare b_p, b_q din șirul B, avem relația

$$(73) \qquad a_p b_p = a_q b_q \quad \text{sau} \quad \frac{a_p}{a_q} = \frac{b_q}{b_p}.$$

EXEMPLU. Să se împartă numărul 620 în trei părți *invers proporționale* cu numerele 2, 3 și 5.

Însemnând cu x, y, z părțile căutate, trebue să avem

$$x \times 2 = y \times 3 = z \times 5.$$

De aci deducem

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{z+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{620}{\frac{31}{30}} = \frac{620 \times 30}{31} = 600$$

și $x = \frac{1}{2} \times 600 = 300$, $y = \frac{1}{3} \times 600 = 200$, $z = \frac{1}{5} \times 600 = 120$.

Verificare: $300 + 200 + 120 = 620$ și $300 \times 2 = 200 \times 3 = 120 \times 5 = 600$.

Dacă între două numere de același rang a_i, b_i din șirurile A și B avem relația

$$(74) \qquad b_i a_i^p = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \frac{\lambda}{a_i^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din șirul B sunt invers proporționale *cu puterile* p ale numerelor din șirul A.

161. Proporționalitatea în Geometrie. 1°. O dreaptă paralelă cu una din laturile unui triunghiu, taie celelalte două laturi în segmente *proporționale* [**99**].

2°. Dacă tăiem laturile unui unghiu prin mai multe drepte *paralele*, segmentele determinate pe una din laturile unghiului sunt *direct proporționale* cu segmentele corespunzătoare determinate pe cealaltă latură a unghiului.

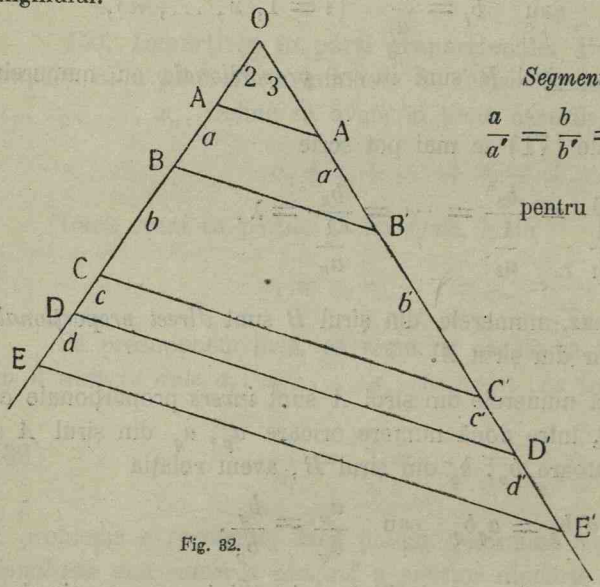


Fig. 32.

Segmente proporționale

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{2}{3},$$

pentru coeficientul $\frac{2}{3}$.

De aci rezultă că, dacă vrem să construim niște segmente a', b', c', d' proporționale cu alte segmente date a, b, c, d și *cu un coeficient de proporționalitate dat* de exemplu 2/3, e deajuns să construim un unghiu EOE' (*fig.* 32) și să luăm pe latura OE segmentele $OA = 2$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ și pe latura OE' segmentul $OA' = 3$; să ducem apoi dreapta AA' și *prin punctele* B, C, D, E *drepte paralele cu* AA'; dacă aceste drepte taie latura OE' în punctele B', C', D', E', segmentele căutate sunt $a' = A'B'$, $b' = B'C'$, $c' = C'D'$, $d' = D'E'$.

3°. Două *poligoane* cu același număr de laturi, ABC...L și A'B'C'...L' sunt *asemenea*, dacă au *unghiurile respectiv egale*:

$$A = A', \quad B = B', \quad \ldots, \quad L = L'$$

și *laturile omoloage proporționale*:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = \frac{LA}{L'A'} = \lambda.$$

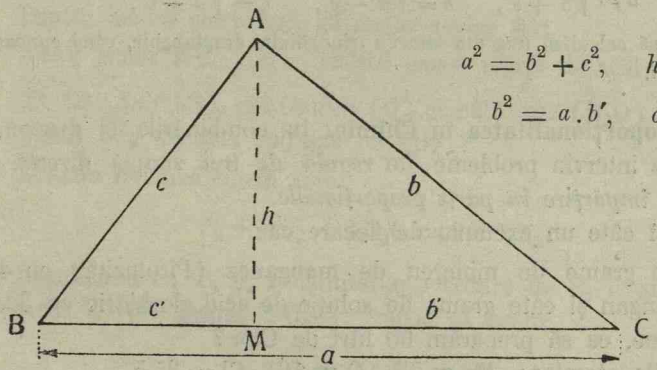
Coeficientul de proporționalitate λ se numește *raport de asemănare.*

Două triunghiuri, care au *laturile proporționale*, sunt *asemenea* (adică au și unghiurile respectiv egale).

Două triunghiuri, care au *unghiurile* respectiv *egale*, sunt *asemenea* (adică au și laturile omoloage proporționale).

4°. Toate *triunghiurile dreptunghice*, care au un *același unghiu ascuțit*, sunt *asemenea* (fiindcă au toate unghiurile respectiv egale).

OBSERVARE. Oricât am mări un triunghiu dreptunghic, dacă unul din unghiurile lui ascuțite rămâne *același*, laturile triunghiului se schimbă, dar *rapoartele dintre laturi rămân neschimbate.* Această observare este baza Trigonometriei.



$$a^2 = b^2 + c^2, \quad h^2 = c' \cdot b'$$
$$b^2 = a \cdot b', \quad c^2 = a \cdot c'$$

Fig. 33.

5°. Triunghiu dreptunghic. Intr'un triunghiu ABC, însemnăm *unghiurile* prin literele mari dela vârfuri A, B, C; iar *lungimile laturilor* prin literele mici a, b, c corespunzătoare literelor dela unghiurile opuse, adică

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{AB}.$$

Intr'un triunghiu *dreptunghic* (*fig.* 33) însemnăm *unghiul drept* cu A. Prin urmare *ipotenuza* e a, iar *catetele* sunt b și c.

Perpendiculara $AM = h$, dusă din vârful unghiului drept pe ipotenuză, împarte ipotenuza în două segmente $\overline{BM} = c'$ și $\overline{MC} = b'$.

Triunghiurile dreptunghice ABC, MBA și MAC sunt *asemenea*. Din proporționalitatea laturilor lor omoloage rezultă relațiile următoare:

(LV) $$h^2 = c' \cdot b'; \quad c^2 = a \cdot c'; \quad b^2 = a \cdot b'.$$

TEOREMA I. *Intr'un triunghiu dreptunghic înălțimea* (h), *corespunpunzătoare unghiului drept, este medie geometrică între segmentele* (b' și c') *determinate de ea pe ipotenuză* [**153**, 3].

TEOREMA II. *O catetă* (b sau c) *este medie geometrică între ipotenuza întreagă* (a) *și segmentul alăturat* (b' sau c').

Adunând ultimele două egalități (LV), obținem

$$b^2 + c^2 = a.b' + a.c' = a(b' + c') = a.a = a^2$$

sau

(LVI) $$a^2 = b^2 + c^2.$$

TEOREMA III. In orice triunghiu dreptunghic *patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor.*

Din egalitatea (LVI) rezultă următoarele trei formule:

(75) $$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

care ne permit să calculăm una din laturile triunghiului dreptunghic, când cunoaștem pe celelalte două.

162. Proporționalitatea în Chimie. In combinările și descompunerile chimice intervin probleme de *regulă de trei* simplă *directă* sau *inversă* și de *împărțire în părți proporționale.*

Dăm acì câte un exemplu de fiecare caz.

1°. Câte grame de minereu de manganez (Piroluzită) cu 45% bioxid de Mangan și câte grame de soluție de acid clorhidric cu 32,5% acid, ne trebue, ca să preparăm 60 litri de Clor?

Greutățile atomice: Mn = 55, O = 16, Cl = 35,5.

Ecuația preparației Clorului este

$$\underset{(87)}{Mn O_2} + 4\,H Cl = \underset{(146)}{Mn Cl_2} + 2\,H_2O + \underset{(71)}{Cl_2}.$$

Se știe că

1 mol.-gram de Clor (Cl_2) cântărește $2 \times 35,5 = 71$ grame
1 „ „ $Mn O_2$ „ $55 + 2 \times 16 = 87$ „
1 „ „ $H Cl$ „ $1 + 35,5 = 36,5$ „

Se mai știe că 1 moleculă-gram de Clor (71 g) ocupă un volum de 22,3 litri, la temperatura de 0° și la presiunea de 760 mm.

Pentru a determină cantitatea de bioxid de Mangan necesară pentru prepararea a 60 l Clor, avem de rezolvat o regulă de trei simplă *directă* [**157**, 1]:

grame $Mn O_2$	litri Cl
x	60
87	22,3.

Scriind rapoartele așà cum se prezintă, obținem:

$$\frac{x}{87} = \frac{60}{22,3} \quad \text{și} \quad x = \frac{87 \times 60}{22,3} = 234,1 \text{ grame } MnO_2.$$

Pentru a determinà cantitatea de minereu de manganez, care conține 234,1 *g* de bioxid de Mangan, avem de rezolvat o regulă de trei simplă *inversă* [**157**, 2]:

grame minereu	bioxid %
y	45
234,1	100.

Egalăm raportul întâi cu *inversul* raportului al doilea și obținem:

$$\frac{y}{234,1} = \frac{100}{45} \quad \text{și} \quad y = \frac{234,1 \times 100}{45} = 520,2 \text{ grame de minereu.}$$

Pentru acidul clorhidric, găsim în aceleș fel:

392,8 grame HCl și 1208,6 grame soluție de acid de 32,5%.

2°. Cât *Sulf* (S), cât *Oxigen* (O) și câtă *apă* (H_2O) ne trebue, ca să obținem 1 *kg* de *acid sulfuric* (SO_4H_2)?

Ecuația chimică finală este

$$S_2 + 3O_2 + 2H_2O = 2SO_4H_2.$$

Insemnând cu x, y, z cantitățile necesare de S, O și H_2O pentru prepararea a 1000 grame SO_4H_2, trebue să avem

$$x + y + z = 1000.$$

Pe de altă parte, greutățile atomice ale S, O și H fiind respectiv 32, 16 și 1, numerele x (S_2), y ($3O_2$) și z ($2H_2O$) trebue să fie *direct proporționale* cu 64, 96 și 36; adică trebue să avem [**159**]:

$$\frac{x}{64} = \frac{y}{96} = \frac{z}{36} = \frac{1000}{196},$$

de unde deducem

$$x = \frac{64 \times 1000}{196} = 326,5\ g.; \quad y = 489,8\ g.; \quad z = 183,7\ g.$$

Verificare: $326,5 + 489,8 + 183,7 = 1000$; $\frac{326,5}{64} = \frac{489,8}{96} = \frac{183,7}{36} = 5,1$ aproximativ.

163. Probleme de amestec. Sunt două feluri de probleme de amestec: 1°. *probleme directe*, când se dau *cantitățile* și *calitățile* substanțelor care se amestecă și se cere *calitatea amestecului*; 2°. *probleme inverse*, când se dau *calitățile substanțelor care se amestecă* și *calitatea*

amestecului și se întreabă cât trebue să luăm din fiecare substanță, ca să obținem o cantitate determinată de acest amestec.

1°. Problemă directă. Se amestecă trei feluri de soluții de acid sulfuric și anume: 2 *kg* à 78%, 1,5 *kg* à 94% și 400 *g* à 40%. Să se determine *calitatea* soluției obținute.

Problema se rezolvă astfel:

Cantități		*Calități*		SO_4H_2
2000 grame	×	0,78	=	1560 grame
1500 „	×	0,94	=	1410 „
400 „	×	0,38	=	152 „
In 3900 grame soluție avem				3122 grame *acid sulfuric.*

Calitatea soluției 3122 : 3900 = 0,8005; procentul *mediu*: 80%.

Verificare: 3900 × 0,80 = 3120; 3900 × 0,8005 = 3121,95.

2°. Problemă inversă. Avem două calități de vin à 40 lei și à 25 lei litrul și se întreabă: cât trebue să luăm din fiecare calitate, ca să obținem 3000 litri de vin à 32 lei litrul (fără perdere nici câștig)?

Vânzând vinul cu 32 lei litrul, la fiecare litru de calitatea 1-a perdem câte 40 − 32 = 8 lei și la fiecare litru de calitatea a 2-a, câștigăm câte 32 − 25 = 7 lei. Luând dar x litri de calitatea 1-a și y litri de calitatea a 2-a, trebue să avem

câștigul		*perderea*
$x \times 8$	=	$y \times 7$.

Soluția evidentă este $x = 7\lambda$, $y = 8\lambda$ (λ un număr *oricare*); prin urmare numerele x și y trebue să fie *proporționale* cu diferențele 7 și 8.

Scriind

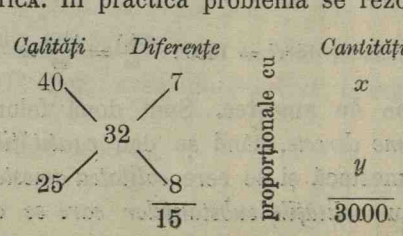
$$\frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{3000}{15} = 200,$$

deducem

$$x = 7 \times 200 = 1400; \quad y = 8 \times 200 = 1600.$$

Verificare: $1400 + 1600 = 3000$ și $\frac{1400}{7} = \frac{1600}{8} = 200$.

Regula practică. In practică problema se rezolvă astfel:



OBSERVARE. Problema e *imposibilă*, dacă prețul amestecului nu e un preț *mediu* (cuprins *între* prețurile date).

In problemele de amestec calitatea *apei* se exprimă prin prețul 0 sau prin procentul 0%.

Când avem de amestecat mai multe substanțe, problema se rezolvă în acelaș fel. Pentru calcularea *diferențelor*, se scrie: calitatea cerută *la mijloc*; *toate* calitățile inferioare *de o parte*, *toate* calitățile superioare *de cealaltă parte* și *se repetă*, dacă e nevoe, una sau mai multe din aceste calități, așa ca numărul calităților inferioare să fie *egal* cu numărul calităților superioare.

EXEMPLU. Avem trei soluții de acid sulfuric à 78%, à 94% și à 40% și se întreabă cât trebue să luăm din fiecare, ca să obținem 3900 gr. de soluție à 80%.

Formăm tabloul următor:

Calități	*Diferențe*		*Cantități*
94	40	42	x
94	2		
80			
78	14		y
40	14		z
	70		3900

proporționale cu

Scriind

$$\frac{x}{42} = \frac{y}{14} = \frac{z}{14} = \frac{3900}{70} = \frac{390}{7}$$

deducem

$$x = \frac{42 \times 390}{7} = 2340\,g\,; \quad y = 780\,g\,; \quad z = 780\,g.$$

Verificare: $2340 + 780 + 780 = 3900$ și

$2340 \times 0{,}94 = 2199{,}60$; $780 \times 0{,}78 = 608{,}40$; $780 \times 0{,}40 = 312$;

$2199{,}60 + 608{,}40 + 312 = 3120$ iar $3120 : 3900 = 0{,}80$.

Putem luà de m ori calitatea 1-a, de p ori calitatea a 2-a și de q ori calitatea a 3-a, cu condiția $m = p + q$. Avem dar o infinitate de soluții.

164. Probleme de aliaj. Se numește *titlul* unui aliaj, cantitatea de *metal fin*, care se găsește în *unitatea de greutate* a aliajului.

Dacă însemnăm cu G greutatea totală a aliajului, cu T titlul lui și cu g greutatea metalului fin *pur* din acest aliaj, trebue să avem:

$$g = G \times T \quad \text{sau} \quad T = \frac{g}{G}.$$

EXEMPLU. Cât aur *pur* se găsește într'un *napoleon* francez?

Napoleonul are greutatea $G = 6{,}452$ grame, titlul $T = 0{,}900$. Prin urmare, greutatea aurului pur este $g = 6{,}452 \times 0{,}900 = 5{,}807$ grame.

Problemele de aliaj *directe* și *inverse* se rezolvă ca și problemele de amestec, înlocuind, în acest caz, prețurile sau procentele prin *titluri*.

EXERCIȚII.

24. Diferența dintre patratele a două numere întregi consecutive este 3851. Care sunt aceste numere?

R. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 = 3851$. Deci $2n = 3850$ și $n = 3850 : 2$

$$n = 1925, \quad n+1 = 1926.$$

25. Cu ce număr trebue să înmulțim pe $6\,103\,515\,625 = 5^{14}$, ca să capătăm pe 5^{19}? 2°. Dar ca să căpătăm pe 5^{10}?

R. 1°. Cu $5^5 = 3125$. 2°. Cu $5^{-4} = 0{,}0016$.

26. Dacă $\frac{1}{x} = 0{,}2$, ce valoare au expresiunile: x; $0{,}001 \times x^5$; x^{-2}; $10x^{-3}$?

R. Avem $\frac{1}{x} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Deci:

$x = 5$; $\quad 0{,}001 \times x^5 = 3{,}125$; $\quad x^{-2} = 0{,}04$; $\quad 10x^{-3} = 0{,}08$.

27. Să se scrie sub formă de produse expresiunile următoare:

1°. $\frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^7}$; $\quad$ 2°. $\frac{n^7}{(n+1)^9} - \frac{n^8}{(n+1)^{10}}$; $\quad$ 3°. $x^{n-1} + 2x^n + x^{n+1}$.

R. 1°. $\frac{a+1}{a^7} = (a+1).a^{-7}$; $\quad$ 2°. $n^7 (n+1)^{-10}$; $\quad$ 3°. $x^{n-1}(1+x)^2$.

28. Să se calculeze: 1°. $[(0{,}0625)^{0{,}5}]^2$; $\quad$ 2°. $(0{,}0625)^{(0{,}5)^2}$.

R. 1°. $(0{,}0625)^1 = 0{,}0625$; $\quad$ 2°. $(0{,}0625)^{0{,}25} = (0{,}625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{0{,}0625}} = 0{,}5$.

29. Să se demonstreze că, pentru $a > b$, avem

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}},$$

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

R. Ridicând la patrat ambii membri ai acestor egalități obținem expresiuni egale.

30. Să se calculeze și să se compare: 1°. $\sqrt{9+4+36}$ cu $\sqrt{9}+\sqrt{4}+\sqrt{36}$;

2°. $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}$ cu $\sqrt{\frac{1}{9}}+\sqrt{\frac{1}{16}}$; $\quad$ 3°. $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{16}}$ cu $\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{1}{16}}$.

R. 1°. $\sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$; $\quad \sqrt{9}+\sqrt{4}+\sqrt{36} = 3+2+6 = 11 > 7$.

2°. $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{144}} = \frac{5}{12}$; $\quad \sqrt{\frac{1}{9}}+\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{5}{12}$.

3°. $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16-9}{144}} = \frac{\sqrt{7}}{12} = \frac{2{,}6\ldots}{12}$; $\quad \sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12} < \frac{\sqrt{7}}{12}$.

31. Să se efectueze sumele:

1°. $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$; 2°. $\sqrt{6}-\left(\frac{27}{8}\right)^{-0,5}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{27}}$.

R. 1°. $2\sqrt[3]{5.8}+3\sqrt[3]{4.27}+\sqrt[3]{4.125}-\sqrt[3]{5.64}-2\sqrt[3]{4.343}$

$$=4\sqrt[3]{5}+9\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{5}-14\sqrt[3]{4}=0.$$

2°. $3\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{7}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(3+\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{28}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

32. Să se calculeze:

1°. $100^{1,5}$; 2°. $\sqrt[5]{17^2}.\left(\sqrt[5]{17}\right)^2.17^{\frac{1}{5}}-15^{\frac{5}{12}}.\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}}.\sqrt[6]{\sqrt{5}}$.

3°. $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-1,25}$; 4°. $\sqrt{1\frac{13}{36}}:\sqrt[5]{0,00032}$.

R. 1°. $100^{1,5}=100^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{100}\right)^3=10^3=1000$.

2°. $\sqrt[5]{17^2}.\sqrt[5]{17^2}.\sqrt[5]{17}-\sqrt[12]{15^5}.\sqrt[12]{3}.\sqrt[12]{5}=\sqrt[5]{17^5}-\sqrt[12]{15^6}=17-\sqrt{15}$.

3°. $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-1,25}=\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{5}{4}}=\left(\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$.

4°. $\sqrt{\frac{49}{36}}:\sqrt[5]{(0,2)^5}=\frac{7}{6}:\frac{2}{10}=\frac{7}{6}\times 5=\frac{35}{6}$.

33. Care e cel mai mare dintre numerele:

1°. 2,34750929 și 2,347518; 2°. 0,545455445... și 0,545545445...;

2°. $203+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{2}{8^4}+\frac{1}{8^5}$ și $203+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{2}{8^3}+\frac{7}{8^4}+\frac{3}{8^5}$.

R. În cazurile 1° și 2° e mai mare numărul al doilea; în cazul 3° e mai mare numărul întâiu.

34. Să se găsească limita către care tinde numărul

$$a_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

când n crește la infinit.

R. Numărul dat se mai poate scrie

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

și când $n\to\infty$, a_n tinde către 1.

35. Trei asociați A, B, C pun într'o întreprindere: (A) 5000 lei; (B) 8000 lei; (C) 2000 lei. Primul asociat își retrage capitalul după 4 luni, al doilea după 6 luni. La sfârșitul anului se constată că această întreprindere a produs un câștig total de 4600 lei. Să se calculeze câștigul fiecărui asociat.

R. Câștigurile sunt proporționale cu produsele:

$$5000 \times 4 = 20\,000, \quad 8000 \times 6 = 48\,000, \quad 2000 \times 12 = 24\,000.$$

Trebue dar să împărțim numărul 4600 în părți direct proporționale cu numerele 20 000, 48 000 și 24 000 și găsim: (A) 1000 lei; (B) 2400 lei; (C) 1200 lei.

36. Dintre două triunghiuri asemenea, unul are laturile de 6,60 *cm*, 9,02 *cm* și 11,55 *cm*; celălalt are perimetrul de 12,35 *cm*. Să se determine laturile triunghiului al doilea.

R. Însemnând cu a, b, c laturile triunghiului al doilea, trebue să avem

$$\frac{a}{6,60} = \frac{b}{9,02} = \frac{c}{11,55} = \frac{12,35}{27,17} = \frac{5}{11}.$$

Prin urmare: $a = \frac{6,60 \times 5}{11} = 3\ cm$; $b = 4,10\ cm$; $c = 5,25\ cm$.

37. Prețurile bucăților de diamant sunt direct proporționale cu patratele greutăților lor. Un diamant, care valorà 24500 lei, s'a spart în 3 bucăți. Știind că una din aceste bucăți cântărește $\frac{1}{7}$ și alta $\frac{2}{5}$ din greutatea totală a diamantului, se cere să se calculeze cu cât s'a depreciat valoarea acestui diamant prin spargere.

R. Prețurile bucății întregi și a celor trei părți obținute sunt direct proporționale cu patratele numerelor 1, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{5}$ și $\frac{16}{35}$. Cele trei părți valorează 500, 3920 și 5120 lei. Deprecierea este de $24500 - 9540 = 14\,960$ lei.

38. Câte grame de clorură de sodiu ne trebue pentru a precipità tot argintul dintr'o monedă de 5 lei, sub forma de clorură de argint?

Greutăți atomice: Ag = 108; Na = 23; Cl = 35,5.

Ecuația chimică: $Az\,O_3\,Ag + Na\,Cl = Ag\,Cl + Az\,O_3\,Na$.

R. Titlul aliajului dintr'o monedă veche de 5 lei de argint e: 0,900; greutatea monedei: 25 grame. Argintul pur: $0,900 \times 25 = 22,5\ g$.

Greutatea moleculară a clorurei de sodiu (Na Cl): $23 + 35,5 = 58,5\ g$. Ea precipită 108 *g* argint (Ag). Regula de trei simplă directă

Ag	Na Cl
108	58,5
22,5	x

ne dă

$$x = \frac{22,5 \times 58,5}{108} = 12,19\ g \quad \textit{clorură de sodiu.}$$

39. Avem două aliaje de aur: 450 *g* cu titlul 0,92 și 350 *g* cu titlul 0,84. Cât cupru trebue să mai punem, ca să obținem un aliaj cu titlul 0,860?

R. Titlul cuprului e 0. Topirea primelor două aliaje ne dă 800 *g* aliaj aur cu titlul 0,885. O problemă indirectă, cu titlurile date 0,885 și 0 și titlul cerut 0,860, pentru 800 *g* aliaj ne dă Cu = 232,5 *g*.

CAPITOLUL IV.

CALCULUL ALGEBRIC.

I. — OPERAȚIILE ALGEBRICE.

165. Expresii algebrice. In Algebră numerele se reprezintă prin *litere* și operațiile se arată prin *semne*. Intrebuințarea literelor și a semnelor simplifică și *generalizează* raționamentele și calculele.

Un grup de numere și de litere, legate între ele prin semne de operații, formează o *expresie algebrică*.

O expresie algebrică poate fi: *rațională* sau *irațională*, *fracționară* sau *întreagă*.

O expresie algebrică se zice *irațională*, când conține *litere* sub *radicali*. In caz contrariu expresia e *rațională*.

EXEMPLE. Expresii raționale:

$$5a^2b, \quad \frac{x+y}{7xy}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+(bx-c)^3.$$

Expresii iraționale:

$$\sqrt[3]{5ab}, \quad \frac{x+\sqrt{y}}{7xy}, \quad \frac{3\sqrt{a}}{2}+(bx-\sqrt{c})^3.$$

O expresie algebrică rațională e *fracționară*, când conține *litere* la *numitor*. In caz contrariu expresia e *întreagă*.

EXEMPLE. Expresii întregi:

$$5a^2b, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+(bx-c)^3, \quad (a+x)\left(2a^3-\frac{5}{7}xy\right).$$

Expresii fracționare:

$$\frac{x+y}{7xy}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{(bx-c)^3}, \quad \frac{2a^3-5xy}{(a+x)(b-y\sqrt{2})}.$$

166. Valoare numerică. Dacă într'o expresie algebrică înlocuim literele prin niște *numere* date și facem toate operațiile arătate de semne,

numărul, pe care-l obţinem ca rezultat final, se numeşte *valoarea numerică* a acestei expresii *pentru valorile date literelor.*

EXEMPLU. Valoarea numerică a expresiei $6x^2(y-3)$

pentru $x=2$, $y=4$ este $6\times 2^2\times(4-3)=24$,

pentru $x=3$, $y=1$ este $6\times 3^2\times(1-3)=-108$.

Dacă însemnăm cu u valoarea expresiei $6x^2(y-3)$, formula

$$u=6x^2(y-3) \tag{1}$$

ne arată cum se calculează valoarea lui u, când cunoaştem valorile numerice ale literelor x şi y. Valorile variabilelor x şi y pot fi luate în mod arbitrar [**142**], pe când valoarea lui u rezultă, în fiecare caz, prin formula (1); de aceea zicem că x şi y sunt *variabile independente*, iar u e variabilă *dependentă* sau *funcţie* de x şi y.

In general, vom zice că orice *expresie algebrică*, sau valoarea u a ei, este o *funcţie* de literele (*variabile*) cu care e scrisă această expresie.

EXEMPLE. 1°. Volumul unei sfere cu raza r este $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

2°. Suprafaţa laterală a unui cilindru drept cu bază circulară, cu raza x şi înălţimea y, este $S=2\pi xy$.

3°. Greutatea unui litru de gaz (exprimată în *grame*) este

$$g=\frac{1{,}293}{1+kt}\cdot\frac{pd}{760}, \qquad k=0{,}003665$$

unde p e presiunea (în *mm*), d densitatea şi t temperatura gazului.

Aceste formule ne arată că: în exemplul 1°, V e funcţie de r; în exemplul 2°, S e funcţie de x şi y; în exemplul 3°, g e funcţie de variabilele p, d, t, iar k e un coeficient *constant.*

Pentru a arătă că o variabilă u este funcţie de una sau mai multe alte variabile x, y, z, putem scrie numai

$$u=f(x) \quad [u \text{ egal } f \text{ de } x],$$

sau $$u=f(x,y,z) \quad [u \text{ egal } f \text{ de } x, y, z],$$

însemnând prin f toate operaţiile, pe care trebue să le facem asupra valorilor variabilelor independente x sau x, y, z, ca să capătăm valoarea corespunzătoare a lui u.

Valoarea numerică a unei funcţii $f(x)$ pentru $x=a$ se scrie $f(a)$.

EXEMPLU. Pentru funcţia $f(x)=2x^2-5x+7$ avem

pentru $x=a$ $\quad f(a)=2a^2-5a+7$;

pentru $x=3b$ $\quad f(3b)=2.(3b)^2-5.(3b)+7=18b^2-15b+7$.

167. Egalități algebrice. Valorile numerice a două expresii algebrice pot fi *egale* sau *neegale* pentru niște valori date literelor. Astfel, pentru $a = 2$, $x = 5$, avem

(2) $(a+x)(a-x) = a^2-x^2$ fiindcă $(2+5)(2-5) = 4-25$;

(3) $2ax^2 = 4x+7a^3+24$ „ $2.2.25 = 4.5+7.8+24$;

(4) $8a+x \neq a\sqrt{5x}-7$ „ $8.2+5 \neq 2.5-7$.

Două expresii algebrice *egale* formează o *egalitate algebrică*.

Egalitatea se zice *identitate*, când e adevărată pentru *orice valori numerice* date literelor.

EXEMPLE. Egalitatea (2) este o *identitate*; egalitatea (3) nu e o identitate, fiindcă, de exemplu, pentru $a = 0$, $x = 0$, avem

$$2ax^2 = 0, \quad 4x+7a^3+24 = 24 \quad \text{și} \quad 0 \neq 24.$$

In general o egalitate algebrică e adevărată *numai pentru niște valori anumite* date literelor. In acest caz zicem că egalitatea e o *ecuație*. Valorile particulare, care puse în locul literelor fac ca membrul întâi al ecuației să fie *egal* cu membrul al doilea al ei, se numesc *rădăcinile* sau *soluțiile* ecuației.

EXEMPLU. Egalitatea $2x = 17$ e satisfăcută numai pentru $x = 8{,}5$. Această egalitate e o *ecuație*, care are o singură *rădăcină*: $x = 8{,}5$.

168. Monom. O expresie algebrică, în care numerele și literele nu sunt despărțite *între ele* prin semnele + sau −, se numește *monom*.

EXEMPLE. $4x^2y^3$, $-\frac{a^2x}{5bc^3}$.

Orice monom are:

1°. Un *semn*: + sau −, care e scris înaintea monomului. Când înaintea unui monom nu e scris niciun semn, se subînțelege semnul +.

2°. Un *coeficient*: factorul numeric împreună cu semnul. Când nu e scris niciun factor numeric, se subînțelege factorul 1.

3°. O *parte literală*: partea formată din toate literele monomului cu exponenții lor.

Astfel monomul $4x^2y^3$ are semnul +, coeficientul +4 și partea literală x^2y^3.

Monomul $-\frac{a^2x}{5bc^3} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{a^2x}{bc^3}$ are semnul −, coeficientul $-\frac{1}{5}$ și partea literală $\frac{a^2x}{bc^3}$.

OBSERVARE. Orice monom, care nu e întreg [**165**], se poate scrie *sub formă întreagă*, dacă aplicăm formula (XXVIII) [pag. 96] pentru literele, care se găsesc la numitor. Astfel putem scrie

$$-\frac{a^2x}{5bc^3} = -\frac{1}{5}\cdot a^2xb^{-1}c^{-3}.$$

Gradul unui monom, scris sub formă întreagă, este *suma exponenților tuturor literelor lui.*

EXEMPLE. $4x^2y^3$ e un monom întreg de grad 5. Monomul $-\frac{1}{5}a^2xb^{-1}c^{-3}$ e de grad $2+1-1-3=-1$.

Când o literă n'are exponent, se subînțelege exponentul 1.

Când o literă lipsește într'un monom, putem zice că figurează cu exponentul 0 [**113**]. Astfel $-3x$ e un monom întreg în x și y de grad 1, fiindcă se poate scrie $-3x^1y^0$.

169. Polinom. O sumă algebrică de *două* monoame e un *binom*; de *trei* monoame e un *trinom*; de *mai multe* monoame e un *polinom.*

Monoamele componente se numesc *termenii* polinomului.

Gradul unui polinom e cel mai mare dintre gradele termenilor lui.

EXEMPLU. $5x^6-2xy^3+x^3-3y$ e un polinom întreg în x și y de grad 6, format din 4 termeni: $5x^6$, $-2xy^3$, $+x^3$ și $-3y$.

Un polinom se zice *omogen*, când toți termenii lui sunt de *același grad.*

EXEMPLU. $5x^2y^3-3x^4y+2x^5$ e un polinom omogen de grad 5.

170. Termeni asemenea. Doi sau mai mulți termeni, care au *aceeași parte literală*, se numesc *termeni asemenea.* Suma lor se poate *reduce* la un singur termen [**112**, 1].

Astfel polinomul $3xy^2-5xy^2+8xy^2$ are trei termeni asemenea și, punând partea literală în factor comun, putem scrie

$$3xy^2-5xy^2+8xy^2=(3-5+8)xy^2=6xy^2.$$

Un polinom, care n'are termeni asemenea, e un polinom *redus.*

EXEMPLU. Polinomul

$$\underline{5x^2y}-\underline{\underline{3x^3}}+2xy^2-\underline{\underline{4x^3}}-\underline{xy}+xy^2+\underline{7x^2y}+\underline{\underline{x^3}}$$

se reduce la

$$11x^2y-6x^3+3xy^2.$$

Reducerea se face astfel:

1°. Se subliniază toți termenii asemenea cu $5x^2y$; se face reducerea lor; se scrie rezultatul $11x^2y$ și se taie toți termenii reduși.

2°. Se subliniază apoi toți termenii asemenea cu $-3x^3$; se face reducerea lor; se scrie rezultatul $-6x^3$ și se taie și acești termeni reduși.

Se continuă astfel până ce s'au redus și s'au tăiat toți termenii polinomului dat.

171. Polinom ordonat. Un polinom fiind o sumă algebrică, valoarea lui nu se schimbă [**166**], dacă shimbăm *ordinea* termenilor.

Un polinom redus se zice *ordonat în raport cu o literă*, dacă termenii lui sunt așezați astfel, ca *exponenții* acestei litere să meargă *numai crescând* (sau *numai descrescând*) dela primul termen până la ultimul termen al polinomului.

EXEMPLE. 1°. Să se ordoneze polinomul $11x^2y-6x^3+3xy^2$ după puterile *crescătoare* ale lui x. Vom scrie; $3xy^2+11x^2y-6x^3$.

2°. Să se ordoneze polinomul

$$2x^5-7a^2+b^2x^3+b^3+5a^2x^3-3ax^5+2abx-7abx^3-3$$

după puterile *descrescătoare* ale lui x. Vom scrie:

$$(2-3a)x^5+(5a^2-7ab+b^2)x^3+2abx-7a^2+b^3-3.$$

In acest caz zicem că x e litera *ordonătoare*.

Un polinom ordonat, de grad n, e *complect*, când conține *toate puterile literei ordonătoare* dela n până la 0 incluziv.

Astfel $2x^5-3x^4+x^3-5x^2-7x+10$ e un polinom întreg în x, de grad 5, *ordonat* și *complect*.

Un polinom întreg de grad n în x este de forma

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Dacă un termen de un grad oarecare lipsește, putem zice că figurează cu coeficientul 0.

Un polinom *complect* de grad n trebue să conțină termeni de grad $0, 1, 2, \ldots, n$; în total $n+1$ termeni.

EXEMPLU. $4x^3-2x+7$ e un polinom de grad 3 *necomplect*. Complectat se va scrie: $4x^3+0.x^2-2x+7$. El e de forma $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ unde $a_0=4$, $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_3=+7$.

Un polinom întreg în x se poate reprezentă, în mod prescurtat, prin simbolul $P(x)$ sau numai P.

Operațiile cu polinoamele sunt operații cu *sume algebrice*. Dacă, după efectuarea unei operații, polinomul *rezultat* conține termeni asemenea, facem întotdeauna *reducerea* lor [**170**].

In toate calculele algebrice egalitățile dintre operațiile neefectuate și rezultatele acestor operații sunt *identități*.

172. Adunarea polinoamelor. REGULĂ. *Ca să adunăm mai multe monoame sau polinoame, le scriem unele după altele cu semnele lor* [**34**].

EXEMPLU. Să se adune polinoamele:

$$P = 3a + 5ax^2 - 3ab, \qquad Q = 7ax^2 + ab - 3a^2.$$

Scriem

$$P + Q = 3a + 5ax^2 - 3ab + 7ax^2 + ab - 3a^2$$
$$= 3a + 12ax^2 - 2ab - 3a^2;$$

sau punând termenii asemenea unii sub alţii

$$\begin{array}{rl} P = & 3a + 5ax^2 - 3ab \\ Q = & \quad 7ax^2 + ab - 3a^2 \\ \hline \text{Suma:} & P + Q = 3a + 12ax^2 - 2ab - 3a^2. \end{array}$$

173. Scăderea polinoamelor. REGULĂ. *Ca să scădem două polinoame scriem, după descăzut, termenii polinomului scăzător cu toate semnele schimbate* [**38**].

EXEMPLU. Pentru polinoamele din exemplul precedent, avem

$$P - Q = 3a + 5ax^2 - 3ab - 7ax^2 - ab + 3a^2$$
$$= 3a - 2ax^2 - 4ab + 3a^2;$$

sau scriind termenii asemenea unii sub alţii şi *schimbând semnele la scăzător*, avem

$$\begin{array}{rl} P = & 3a + 5ax^2 - 3ab \\ -Q = & \quad -7ax^2 - ab + 3a^2 \\ \hline \text{Diferenţa:} & P - Q = 3a - 2ax^2 - 4ab + 3a^2. \end{array}$$

174. Inmulţirea polinoamelor.

1°. Inmulţirea monoamelor e o înmulţire de *produse algebrice* [**52**], la care se aplică *legea inmulţirii puterilor* [**111**, 2]:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$

REGULĂ. *Ca să înmulţim două sau mai multe monoame:*

Inmulţim coeficienţii, ţinând seamă de regula semnelor [**45**].

Scriem literele din toţi factorii unele după altele, luând fiecare literă *numai o singură dată.*

La fiecare literă punem ca exponent suma exponenţilor, pe care-i are această literă în toţi factorii.

EXEMPLU: $3ab^2 \times (-5a^3bc) \times \left(-\frac{abc^2}{2}\right) = +\frac{15}{2}a^5b^4c^3.$

In adevăr produsul neefectuat fiind *comutativ*, îl putem scrie

$$3.(-5).\left(-\frac{1}{2}\right).a.a^3.a.b^2.b.b.c.c^2.$$

Produsul efectuat are: *coeficientul*: $3\times(-5)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$; *literele*: abc; *exponenții*: pentru a, $1+3+1=5$; pentru b, $2+1+1=4$; pentru c, $1+2=3$.

Gradul produsului este egal cu *suma gradelor factorilor*.

2°. Înmulțirea unui polinom cu un monom e înmulțirea unei *sume algebrice* cu un *număr* [**51**, 3].

REGULĂ. *Ca să înmulțim un polinom cu un monom, înmulțim fiecare termen al polinomului cu monomul și facem suma algebrică a produselor astfel obținute.*

EXEMPLU. Să se înmulțească polinomul $5ax^2-3a^2x+4x^3-6a^3$ cu monomul $-2a^2$. Aplicând regula precedentă obținem:

$$\begin{aligned}
5ax^2\times(-2a^2) &= -10a^3x^2\\
-3a^2x\times(-2a^2) &= +6a^4x\\
+4x^3\times(-2a^2) &= -8a^2x^3\\
-6a^3\times(-2a^2) &= +12a^5\\
\hline
\textit{Produsul total:}\quad & -10a^3x^2+6a^4x-8a^2x^3+12a^5.
\end{aligned}$$

3°. Înmulțirea polinoamelor e o înmulțire de *sume algebrice* [**54**].

REGULĂ. *Ca să înmulțim două polinoame, înmulțim polinomul deînmulțit cu fiecare termen al polinomului înmulțitor și facem suma algebrică a produselor astfel obținute.*

Operația fiind *comutativă* [**51**, 2], putem alege ca înmulțitor polinomul, care are mai puțini termeni.

Înmulțirea se simplifică, dacă *ordonăm* întâi polinoamele în raport cu aceeaș literă și scriem produsele parțiale, astfel ca termenii asemenea să vie unii sub alții.

EXEMPLU. Să se înmulțească polinoamele

$$P=5ax^2-3a^2x+4x^3-6a^3,\qquad Q=-2a^2+ax-x^2.$$

Ordonându-le după puterile descrescătoare ale lui x, scriem:

Deînmulțitul	$P=$	$4x^3+5ax^2-3a^2x-6a^3$
Înmulțitorul	$Q=$	$-x^2+ax-2a^2$
produsul cu $-x^2$		$-4x^5-5ax^4+3a^2x^3+6a^3x^2$
produsul cu $+ax$		$+4ax^4+5a^2x^3-3a^3x^2-6a^4x$
produsul cu $-2a^2$		$-8a^2x^3-10a^3x^2+6a^4x+12a^5$
Produsul total:	$P.Q=$	$-4x^5-ax^4-7a^3x^2+12a^5$

Gradul produsului este egal cu *suma* gradelor factorilor.

OBSERVARE. *Termenul de gradul cel mai mare* (sau cel mai mic) *al produsului* provine fără reducere din înmulțirea *termenilor de gradul cel mai mare* (sau cel mai mic) *dela polinoamele factori.*

Ca să înmulțim mai multe polinoame, înmulțim polinomul întâi cu al doilea, produsul obținut cu polinomul al treilea și așà mai departe.

175. Puterea unui polinom. Pentru n întreg și pozitiv avem

$$P^n = P \times P \times \ldots \times P \qquad (n \text{ factori}).$$

Patratul unui polinom este patratul unei *sume* algebrice [**117**].

In particular vom aplicà formulele:

(XXXIII) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

(XXXIV) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

(XXXV) $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

și în general

(LVII) $$(\Sigma a_p)^2 = \Sigma a_p^2 + 2\Sigma a_p a_q$$

$$p = 1, 2, \ldots, n; \quad q = p+1, p+2, \ldots, n.$$

EXEMPLE.

1°. $(ax^2+bx+c)^2 = (ax^2)^2 + (bx)^2 + c^2 + 2(ax^2)(bx) + 2(ax^2).c + 2(bx).c$
$= a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx$
$= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bcx + c^2.$

2°. $x^4 - a^4 = (x^2-a^2)(x^2+a^2) = (x-a)(x+a)(x^2+a^2).$

3°. $x^4 + 4a^4 = x^4 + \underline{4a^2x^2} + 4a^4 - \underline{4a^2x^2} = (x^2+2a^2)^2 - 4a^2x^2$
$= (x^2+2a^2-2ax)(x^2+2a^2+2ax).$

Pentru cub aplicăm formula

(5) $$(\Sigma a_p)^3 = (\Sigma a_p)^2 \times (\Sigma a_p) \qquad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Astfel găsim:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Pentru puterea a n-a avem:

(LVIII) $$(\Sigma a_p)^n = (\Sigma a_p)^{n-1} \times (\Sigma a_p)$$

176. Identitatea lui Lagrange. Avem:

$$(\text{LIX}) \qquad (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2 \equiv (a\beta-b\alpha)^2.$$

In adevăr, efectuând operațiile din membrul întâi, găsim

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) &= a^2\alpha^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2+b^2\beta^2\\ -(a\alpha+b\beta)^2 &= -a^2\alpha^2 \qquad -b^2\beta^2-2ab\,\alpha\beta\\ \hline (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2 &= \qquad b^2\alpha^2+a^2\beta^2 \qquad -2ab\,\alpha\beta.\end{aligned}$$

expresie identic egală cu membrul al doilea

$$(a\beta-b\alpha)^2 = (a^2\beta^2-2ab\,\alpha\beta+b^2\alpha^2.$$

In acelaș fel se verifică identitatea mai generală:

$$(\text{LX}) \qquad \begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2 \equiv\\ &(a\beta-b\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2.\end{aligned}$$

Identitățile (LIX) și (LX) se numesc *identitățile lui Lagrange.*

177. Impărțirea polinoamelor. Dacă P și Q sunt două expresii algebrice, *câtul exact* al împărțirii lor e o a treia expresie algebrică C, care ne dă *identitatea*:

$$P \equiv Q \times C.$$

Acest cât se poate reprezentă printr'o *fracție algebrică* [**76**]:

$$P:Q = \frac{P}{Q} \quad \text{și avem} \quad \frac{P}{Q}\times Q = P.$$

1°. Impărțirea a două monoame. Regulă. *Câtul a două monoame e o fracție, care are ca numărător monomul deîmpărțit și ca numitor monomul împărțitor.*

Semnul câtului e dat de regula semnelor [**76**]. Monoamele fiind niște produse, fracția se simplifică suprimând orice *factor comun* dela numărător și dela numitor [**59**, 3].

EXEMPLU: $(-15a^2b^3c):3ab^4d^2 = \dfrac{-15a^2b^3c}{3ab^4d^2} = -\dfrac{5ac}{bd^2}$,

observând că factorii 3, a și b^3 se găsesc și la numărător și la numitor.

2°. Impărțirea unui polinom printr'un monom e împărțirea unei sume algebrice printr'un număr [**59**, 2].

Regulă. *Ca să împărțim un polinom printr'un monom, împărțim fiecare termen al polinomului prin monom și facem suma algebrică a câturilor obținute.*

EXEMPLU : $(2ab^3 - 3a^2b^2 + ab - 7) : 3ab = \frac{2ab^3}{3ab} - \frac{3a^2b^2}{3ab} + \frac{ab}{3ab} - \frac{7}{3ab}$

$$= \frac{2}{3}b^2 - ab + \frac{1}{3} - \frac{7}{3ab}.$$

3°. Împărţirea a două polinoame. Dacă P şi Q sunt două *polinoame*, avem prin definiţie

$$P : Q = \frac{P}{Q} \quad (\textit{cât exact}).$$

Fracţia $\frac{P}{Q}$ se poate simplifică prin orice număr sau expresie, care se găseşte ca *factor* şi la numărător şi la numitor.

EXEMPLU :

Dar $$(a^3 - b^3 + ab^2 - a^2b) : (a^4 - b^4) = \frac{a^3 - b^3 + ab^2 - a^2b}{a^4 - b^4}.$$

$$a^3 - b^3 + ab^2 - a^2b \equiv a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \equiv a^2(a-b) + b^2(a-b)$$
$$\equiv (a^2 + b^2)(a-b);$$
$$a^4 - b^4 \equiv (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \equiv (a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

Prin urmare, câtul căutat se poate scrie

$$\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{1}{a+b}.$$

178. Împărţirea polinoamelor ordonate.

1°. Împărţire exactă. Dacă P şi Q sunt două polinoame întregi în x, gradul lui P fiind mai mare decât gradul lui Q, zicem că împărţirea $P : Q$ se face *exact*, dacă găsim un al treilea polinom C, întreg în x, care să ne dea

(6) $$P \equiv Q \times C.$$

Ca să calculăm câtul C ordonăm întâi polinoamele date după puterile descrescătoare ale lui x.

Să luăm, de exemplu, polinoamele

$$P = 10x^5 - 29x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 7x + 20,$$
$$Q = 5x^3 - 7x^2 + x - 4.$$

După identitatea (6), produsul (P) fiind de gradul 5 şi unul din factori (Q) fiind de gradul 3, celălalt factor (C) trebue să fie de gradul $5 - 3 = 2$.

Gradul câtului este diferența dintre gradul deîmpărțitului și gradul împărțitorului. Avem dar, pentru exemplul luat,

$$C = ax^2 + bx + c$$

și trebue să determinăm coeficienții a, b, c.

După o proprietate a înmulțirii polinoamelor ordonate [174, 3], termenul întâi al produsului ($10x^5$) provine, fără reducere, din înmulțirea primilor termeni ($5x^3$ și ax^2) dela deînmulțit și înmulțitor. Avem dar

$$10x^5 = 5x^3 \times ax^2 \quad \text{sau} \quad 10x^5 : 5x^3 = ax^2.$$

Operația I. *Împărțim primul termen al deîmpărțitului prin primul termen al împărțitorului; obținem astfel primul termen al câtului.*

$$ax^2 = 10x^5 : 5x^3 = 2x^2.$$

Identitatea (6) ne dă

$$(7) \qquad P \equiv Q \times (2x^2 + bx + c) \equiv Q \,.\, 2x^2 + Q(bx + c).$$

Să însemnăm cu R_1 diferența $P - Q \,.\, 2x^2$. Cum

$$\begin{aligned} P &= 10x^5 - 29x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 7x + 20 \\ -Q \,.\, 2x^2 &= -10x^5 + 14x^4 - 2x^3 + 8x^2 \\ \hline \text{găsim} \qquad R_1 &= \qquad -15x^4 - 4x^3 + 32x^2 + 7x + 20. \end{aligned}$$

Operația II. *Înmulțim primul termen al câtului cu polinomul împărțitor; acest produs e primul produs parțial. Scădem acest produs din deîmpărțit și obținem restul întâi.*

Din identitatea (7) rezultă

$$(8) \qquad R_1 \equiv P - Q \,.\, 2x^2 \equiv Q(bx + c)$$

adică

$$-15x^4 - 4x^3 + 32x^2 + 7x + 20 \equiv (5x^3 - 7x^2 + x - 4)(bx + c).$$

Prin urmare $bx + c$ este *câtul* împărțirii restului întâi R_1 prin împărțitor. Termenul bx se capătă prin operația I.

Operația III. *Împărțim primul termen al restului întâi prin primul termen al împărțitorului; obținem astfel al doilea termen al câtului.*

$$bx = -15x^4 : 5x^3 = -3x,$$

Identitatea (8) ne dă

$$(9) \qquad R_1 \equiv Q(-3x+c) \equiv Q.(-3x) + Q.c.$$

Să însemnăm cu R_2 diferența $R_1 - Q.(-3x)$. Găsim

$$R_2 = -25x^3+35x^2-5x+20.$$

Operația IV. *Înmulțim al doilea termen al câtului cu polinomul împărțitor; acest produs e al doilea produs parțial. Scădem acest produs din restul întâi și obținem restul al doilea.*

Continuăm astfel împărțirea până când ajungem la un rest nul.

Din identitatea (9) rezultă

$$(10) \qquad R_2 \equiv R_1 - Q.(-3x) \equiv Q.c$$

adică

$$-25x^3+35x^2-5x+20 \equiv (5x^3-7x^2+x-4).c.$$

Prin urmare, după operația I, avem

$$c = -25x^3 : 5x^3 = -5.$$

Scăzând produsul $Q.(-5)$ din restul R_2 obținem un *rest nul*. Câtul aflat este dar

$$C = 2x^2-3x-5.$$

In practică împărțirea se așează în felul următor:

$$\begin{array}{lll} (P) & 10x^5-29x^4-2x^3+24x^2+7x+20 & \left|\begin{array}{l} 5x^3-7x^2+x-4 \quad (Q) \\ \hline 2x^2-3x-5 \qquad (C) \end{array}\right. \\ & -10x^5+14x^4-2x^3+8x^2 & \\ \hline (R_1) & \quad -15x^4-4x^3+32x^2+7x+20 & \\ & \quad +15x^4-21x^3+3x^2-12x & \\ \hline (R_2) & \quad -25x^3+35x^2-5x+20 & \\ & \quad +25x^3-35x^2+5x-20 & \\ \hline (R) & \quad 0 & \end{array}$$

OBSERVARE. Când împărțirea se face exact, ultimul termen al deîmpărțitului e egal cu produsul ultimilor termeni ai câtului și împărțitorului.

In exemplul luat avem: $+20 = (-5).(-4)$.

Când împărțirea polinoamelor $P:Q$ se face *exact*, zicem că P e *divizibil* prin Q; P e un *multiplu* al lui Q și Q e un *divizor* al lui P.

2°. Impărțire neexactă. Oricare ar fi polinoamele P și Q întregi în x, ordonate după puterile descrescătoare ale lui x, dacă gra-

dul polinomului P e *mai mare* sau *cel puțin egal* cu gradul polinomului Q, operațiile date pentru împărțirea $P:Q$ se pot efectuà. Cum gradele resturilor R_1, R_2, ... sunt numere întregi, pozitive și *descrescătoare*, operația nu se poate continuà la infinit.

Ori ajungem la un rest *nul* și atunci împărțirea se face *exact.*

Ori ajungem la un rest $R \neq 0$, *al cărui grad e mai mic decât gradul împărțitorului* Q. In acest caz zicem că împărțirea *nu se face exact.* Polinomul C, aflat la cât, se numește *câtul* împărțirii, iar polinomul R (ultimul rest) e *restul* împărțirii.

Deoarece restul R se obține scăzând din deîmpărțit, rând pe rând, toate produsele împărțitorului cu diferiții termeni ai câtului C, rezultă că la o *împărțire neexactă* avem:

$$P - Q.C \equiv R$$

sau

(LXI) $$P \equiv Q.C + R.$$

EXEMPLU. Impărțire neexactă:

$$\begin{array}{rl|l} (P) & 12x^5 - 24x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 3x + 1 & 3x^4 - x^2 + 2 \quad (Q) \\ & -12x^5 \quad + 4x^3 \quad - 8x & \hline 4x - 8 \quad (C) \\ \hline & -24x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 11x + 1 & \\ & +24x^4 \quad - 8x^2 \quad + 16 & \\ \hline (R) & \quad - 6x^3 - x^2 - 11x + 17 & \end{array}$$

Verificarea:

$$\begin{array}{l} (3x^4 - x^2 + 2) \times (4x - 8) \\ \hline 12x^5 \quad - 4x^3 \quad + 8x \\ \quad - 24x^4 \quad + 8x^2 \quad - 16 \\ \hline QC = 12x^5 - 24x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 8x - 16 \\ +R = \quad - 6x^3 - x^2 - 11x + 17 \\ \hline 12x^5 - 24x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 3x + 1 \equiv P. \end{array}$$

3°. Cât exact. Impărțind prin Q ambii membri ai identității (LXI), obținem identitatea

(LXII) $$\frac{P}{Q} \equiv C + \frac{R}{Q}.$$

$\frac{P}{Q}$ este o *fracție algebrică rațională.* Ea reprezintă *câtul exact* al împărțirii $P:Q$. Dacă gradul numărătorului e *mai mic* decât gradul numitorului, fracția $\frac{P}{Q}$ e *proprie.* In caz contrariu fracția e *improprie.*

Din identitatea (LXII) rezultă următoarea

REGULĂ. *Orice fracție algebrică rațională improprie* $\frac{P}{Q}$ *se poate descompune într'un polinom întreg* C *și o fracție proprie* $\frac{R}{Q}$.

C e *câtul* împărțirii $P:Q$, iar R e *restul* acestei împărțiri.

EXEMPLU. Din împărțirea

$$\begin{array}{r|l} x^5-x^4+x^3+2x^2 \quad +1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -x^5+x^4-x^3 & x^3+2 \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 2x^2 \quad +1 & \\ \qquad\qquad -2x^2+2x-2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad 2x-1 & \end{array}$$

rezultă identitatea:

$$\frac{x^5-x^4+x^3+2x^2+1}{x^2-x+1} \equiv x^3+2+\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

4⁰. Polinoame ordonate după puterile crescătoare. Dacă polinoamele P și Q sunt ordonate după puterile *crescătoare* ale variabilei, împărțirea $P:Q$ se face tot după regula dată la împărțirea *exactă* (**177**, 1, Operațiile I, II, III, IV, ...).

In acest caz însă câtul se găsește ordonat după puterile *crescătoare* ale variabilei, iar gradele resturilor R_1, R_2, ... merg *crescând*.

Dacă ajungem la un rest *nul*, împărțirea se face *exact* și *gradul câtului e diferența dintre gradul deîmpărțitului și gradul împărțitorului*.

In cazul contrariu împărțirea e *neexactă* și operația se poate continuă la infinit.

EXEMPLU. Variabila poate fi însemnată prin orice literă. Astfel avem:

$$\begin{array}{r|l} 1 \quad +2u^2+u^3-u^4+u^5 & 1-u+u^2 \\ \cline{2-2} -1+u-u^2 & 1+u+2u^2+2u^3-u^4 \\ \cline{1-1} \qquad +u+u^2+u^3-u^4+u^5 & \\ \qquad -u+u^2-u^3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 2u^2 \quad -u^4+u^5 & \\ \qquad\qquad -2u^2+2u^3-2u^4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad 2u^3-3u^4+u^5 & \\ \qquad\qquad\qquad -2u^3+2u^4-2u^5 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad\qquad -u^4-u^5 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +u^4-u^5+u^6 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2u^5+u^6 & \end{array}$$

Operația se poate continuă la infinit.

OBSERVARE. Când împărțirile *parțiale*, care dau termenii câtului, nu se pot face exact, se scrie la cât numai *raportul* monoamelor corespunzătoare.

EXEMPLU.

$$\begin{array}{r|l} 6 - 5u^2 + u^3 & 2 - u \\ \cline{2-2} -6 + 3u & 3 + \frac{3}{2}u - \frac{7}{4}u^2 \\ \cline{1-1} 3u - 5u^2 + u^3 & \\ -3u + \frac{3}{2}u^2 & \\ \cline{1-1} -\frac{7}{2}u^2 + u^3 & \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

179. Impărțirea unui polinom prin $x-a$. Să însemnăm cu $P(x)$ un polinom întreg în x, ordonat după puterile *descrescătoare* ale lui x, Impărțind polinomul $P(x)$ prin $x-a$ (a pozitiv), obținem un cât $C(x)$ și un rest R.

Restul R (având gradul mai mic decât al împărțitorului $x-a$) trebue să fie de grad 0, adică o *constantă*.

Identitatea (LXII) ne dă, *pentru orice valoare a lui* x,

$$P(x) \equiv (x-a)\ C(x) + R.$$

In particular pentru $x = a$ găsim

$$P(a) = (a-a)\ C(a) + R$$

și, fiindcă $a-a = 0$, rămâne

$$P(a) = R.$$

TEOREMĂ. *Restul împărțirii prin $x-a$ a unui polinom întreg în x, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x, este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $x = a$.*

OBSERVARE. Dacă $P(a) = 0$ împărțirea $P(x) : (x-a)$ se face *exact*. Dacă $P(a) \neq 0$, împărțirea nu se face exact și restul acestei împărțiri e $P(a)$.

EXEMPLE. $(5x^3 - 2x + 3) : (x-3)$. Impărțitorul $x-3$ fiind de forma $x-a$, cu $a = 3$, restul acestei împărțiri este

$$R = 5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 3 = 132.$$

Prin urmare $5x^3 - 2x + 3$ nu e divizibil prin $x-3$.

180. Impărțirea prin $x+a$. Dacă însemnăm cu $C(x)$ și R câtul și restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $x+a$ (a pozitiv), din identitatea

$$P(x) \equiv (x+a)\ C(x) + R$$

deducem, pentru $x = -a$,

$$P(-a) = (-a+a)\ C(-a) + R$$

sau

$$P(-a) = R.$$

TEOREMĂ. *Restul împărţirii prin $x+a$ a unui polinom întreg în x, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x, este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $x=-a$.*

EXEMPLU. Polinomul $P(x)=5x^3-2x+3$ e *divizibil* prin $x+1$, fiindcă restul acestei împărţiri este $P(-1)=5.(-1)^3-2.(-1)+3=0$.

181. Aplicaţii. 1°. $(x^5-a^5):(x-a)$ dă restul $a^5-a^5=0$. Prin urmare x^5-a^5 *e divizibil prin* $x-a$. Efectuând împărţirea găsim:

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$$

Câtul este un polinom *omogen* în a şi x de grad 4, *complect* şi *fără niciun coeficient numeric* scris (adică toţi coeficienţii sunt egali cu $+1$). Exponenţii lui a merg *crescând*, iar exponenţii lui x *descrescând* cu câte o unitate, dela un termen la altul.

In acelaş fel vedem că $(x^m-a^m):(x-a)$ dă restul $a^m-a^m=0$. Prin urmare x^m-a^m *e divizibil prin* $x-a$, oricare ar fi m şi avem:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1},$$

câtul fiind un polinom omogen şi complect, de grad $m-1$ în a şi x.

2°. $(x^m+a^m):(x-a)$ dă restul $a^m+a^m=2a^m$. Prin urmare x^m+a^m *nu e divizibil prin* $x-a$.

EXEMPLU. Efectuând împărţirea găsim

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4+\frac{2a^5}{x-a}.$$

3°. $(x^m-a^m):(x+a)$ dă restul $(-a)^m-a^m$.

Dacă m e păreche, avem $(-a)^m=a^m$; restul împărţirii este $a^m-a^m=0$ şi x^m-a^m *e divizibil prin* $x-a$.

Dacă m e nepăreche, avem $(-a)^m=-a^m$; restul împărţirii este $-a^m-a^m=-2a^m\neq 0$ şi x^m-a^m *nu e divizibil prin* $x+a$.

EXEMPLU. Efectuând împărţirile găsim

$$\frac{x^4-a^4}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3.$$

$$\frac{x^5-a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4-\frac{2a^5}{x+a}.$$

4°. $(x^m+a^m):(x+a)$ dă restul $(-a)^m+a^m$.

Dacă m e pereche, avem $(-a)^m = a^m$; restul e $a^m + a^m = 2a^m \neq 0$ și $x^m + a^m$ *nu e divizibil prin* $x+a$.

Dacă m e nepereche, avem $(-a)^m = -a^m$; restul e $-a^m + a^m = 0$ și $x^m + a^m$ *e divizibil prin* $x+a$.

EXEMPLE.

$$\frac{x^8+1}{x+1} = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{2}{x+1}.$$

$$\frac{x^5+32}{x+2} = \frac{x^5+2^5}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

5°. Dacă m e *pereche*, $x^m - a^m$ e divizibil și prin $x-a$ și prin $x+a$, adică prin $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$.

EXEMPLU. $(x^6 - a^6) : (x^2 - a^2) = x^4 + a^2x^2 + a^4$.

OBSERVARE. 1°. Când împărțim pe $x^m \pm a^m$ prin $x-a$, obținem câtul

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}. \tag{11}$$

2°. Când împărțim pe $x^m \pm a^m$ prin $x+a$, obținem câtul

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + (-1)^{m-1}a^{m-1} \tag{12}$$

cu semnele *alternate* dela un termen la altul.

Cazul 2° se cuprinde în cazul 1°, dacă observăm că $x + a = x - (-a)$ și că polinomul (12) se poate scrie

$$x^{m-1} + (-a)x^{m-2} + (-a)^2x^{m-3} + \ldots + (-a)^{m-1}.$$

182. Descompunerea unui polinom în factori. *Dacă un polinom* $P(x)$, de grad m, *se anulează pentru* $x = a$, *acest polinom e divizibil prin* $x-a$ [**179**] și putem scrie

$$P(x) \equiv (x-a)\,Q(x), \tag{13}$$

unde $Q(x)$ e un polinom întreg în x de grad $m-1$.

Dacă $P(x)$ se anulează și pentru $x = b \neq a$, identitatea (13) pentru $x = b$ ne dă

$$P(b) = 0 = (b-a)\,Q(b)$$

și cum $b-a \neq 0$, factorul $Q(b)$ trebue să fie *nul*. Prin urmare polinomul $Q(x)$ e divizibil prin $x-b$ și avem $Q(x) = (x-b)\,Q_1(x)$, iar

$$P(x) \equiv (x-a)(x-b)\,Q_1(x), \tag{14}$$

unde $Q_1(x)$ e un polinom întreg în x de grad $m-2$. Identitatea (14) ne arată că $P(x)$ *e divizibil prin produsul* $(x-a)(x-b)$.

In general, dacă polinomul $P(x)$ se anulează pentru p valori *diferite* $a, b, ..., l$ date lui x $(p \leqq m)$, $P(x)$ e *divizibil prin produsul* $(x-a)(x-b) \ldots (x-l)$ *şi putem scrie*

$$P(x) \equiv (x-a)(x-b) \ldots (x-l)\, C(x), \tag{15}$$

câtul $C(x)$ fiind un polinom întreg în x de grad $m-p$.

Numerele $a, b, ..., l$, pentru care valoarea polinomului $P(x)$ e *zero*, se numesc *rădăcinile* acestui polinom.

Teorema I. *Dacă pentru un polinom* $P(x)$, *redus şi de grad* m, *cunoaştem* m *rădăcini* $a, b, ..., l$ *diferite, putem scrie*

$$P(x) \equiv A(x-a)(x-b) \ldots (x-l), \tag{16}$$

A fiind coeficientul termenului de gradul cel mai mare din $P(x)$.

In adevăr, identitatea (15) pentru $p = m$ devine

$$P(x) \equiv C(x-a)(x-b) \ldots (x-l), \tag{17}$$

unde C e o *constantă* şi fiindcă, la înmulţirea polinoamelor ordonate, termenul de gradul cel mai mare al produsului provine, fără reducere, din înmulţirea termenilor de gradul cel mai mare dela fiecare factor, în produsul (17) trebue să avem

$$Ax^m \equiv C.\underset{1}{x}.\underset{2}{x}. \ldots \underset{m}{x} \equiv Cx^m \quad \text{sau} \quad C = A.$$

Exemplu. Polinomul $3x^3 - 12x^2 - 21x + 30$ se anulează pentru $x = 1$, $x = 5$ şi $x = -2$. Avem dar *identitatea*

$$3x^3 - 12x^2 - 21x + 30 \equiv 3(x-1)(x-5)(x+2).$$

183. Polinom identic nul. Zicem că o expresie algebrică $f(x)$ e *identic nulă*, când valoarea ei numerică e *zero* pentru *orice valoare a lui* x.

Teorema II. *Un polinom întreg în* x, *de grad* m *şi redus, dacă are* $m+1$ *rădăcini, are toţi coeficienţii nuli şi polinomul e identic nul.*

In adevăr, fie

$$P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m \tag{18}$$

un polinom întreg în x, redus şi ordonat, care se anulează pentru $m+1$ valori *diferite*: $a, b, ..., l, r$ date lui x.

Luând întâi numai primele m rădăcini, $a, b, ..., l$, putem scrie după teorema I:

$$P(x) \equiv A_0(x-a)(x-b) \ldots (x-l).$$

Dar acest polinom se anulează și pentru $x = r$; trebue dar să avem

$$P(r) = A_0(r-a)(r-b) \ldots (r-l) = 0$$

și cum r nu e egal nici cu a, nici cu b, ..., nici cu l, rezultă că A_0 trebue să fie *nul* și polinomul dat se reduce la

$$P(x) = A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m.$$

Acest polinom de grad $m-1$ având m rădăcini diferite, un raționament analog ne arată că $A_1 = 0$ și așà mai departe. Găsim dar

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$$

și polinomul $P(x)$ e *identic nul.*

184. Polinoame identice. Zicem că două polinoame $P(x)$ și $P'(x)$ sunt *identice*, când sunt formate din *aceiași termeni.*

Corolar. *Dacă două polinoame întregi în x, reduse și de grad cel mult egal cu m, au valorile respectiv egale pentru $m+1$ valori diferite date lui x, aceste polinoame sunt identice.*

In adevăr, dacă două polinoame, *ordonate* și *reduse*,

$$(19) \qquad \begin{aligned} P(x) &= Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Ex^p + \ldots + L \\ P'(x) &= A'x^p + \ldots + H' \qquad (p \leqq m) \end{aligned}$$

au valorile *egale* pentru $m+1$ valori date lui x, diferența lor $P(x)-P'(x)$ are $m+1$ rădăcini și, după teorema II, această diferență e *identic nulă*:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + (E-A')x^p + \ldots + L - H' \equiv 0.$$

De aci rezultă

$$A = 0,\ B = 0,\ \ldots,\ E - A' = 0,\ \ldots,\ L - H' = 0$$

sau

$$A = 0,\ B = 0,\ \ldots,\ E = A',\ \ldots,\ L = H'.$$

Prin urmare polinoamele (19) sunt de *același grad* și au termenii asemenea *identici.* Putem dar scrie, *pentru orice valoare a lui x*,

$$P(x) \equiv P'(x).$$

185. Rădăcini multiple. Dacă a e o *rădăcină* a unui polinom $P(x)$, avem $P(a) = 0$ și

$$(20) \qquad P(x) \equiv (x-a)\,Q(x).$$

Dacă polinomul $Q(x)$ nu se anulează pentru $x=a$, zicem că a e o rădăcină *simplă* a polinomului $P(x)$. Dacă $Q(a)=0$, putem scrie

$$(21) \qquad Q(x) \equiv (x-a)\, Q_1(x) \quad \text{și} \quad P(x) \equiv (x-a)^2\, Q_1(x).$$

In acest caz zicem că a este o rădăcină *multiplă* a polinomului $P(x)$.

Dacă $Q_1(a) \neq 0$, a e o rădăcină *dublă* sau *de ordinul* 2 a lui $P(x)$. Dacă $Q_1(a)=0$, a e o rădăcină multiplă *de ordin mai mare decât* 2 a lui $P(x)$ și putem scrie

$$(22) \qquad Q_1(x) \equiv (x-a)\, Q_2(x) \quad \text{și} \quad P(x) \equiv (x-a)^3\, Q_2(x).$$

Dacă $Q_2(a) \neq 0$, a este o rădăcină *triplă* a lui $P(x)$.

Dacă $Q_2(a)=0$, a e o rădăcină multiplă a lui $P(x)$, *de ordin mai mare decât* 3.

In general, dacă avem

$$(23) \qquad P(x) \equiv (x-a)^p\, Q(x) \quad \text{și} \quad Q(a) \neq 0,$$

zicem că a este o *rădăcină multiplă* a lui $P(x)$ *de ordin* p.

De aci rezultă că, dacă a, b, ..., l sunt niște rădăcini de ordin α, β, ..., λ respectiv, ale unui polinom $P(x)$ de grad m, putem scrie

$$(24) \qquad P(x) \equiv (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-l)^{\lambda}\, C(x),$$

unde câtul $C(x)$ e un polinom de grad $m-\alpha-\beta- \ldots -\lambda$.

Dacă $\alpha+\beta+ \ldots +\lambda = m$, $C(x)$ e o *constantă* și, observând că termenul de gradul cel mai mare din $(x-a)^{\alpha}$ este x^{α}, un raționament analog cu cel dela paragraful **182** ne dă pentru termenul de gradul cel mai mare al produsului (24):

$$Ax^m = C.x^{\alpha}.x^{\beta}. \ldots x^{\lambda} = Cx^m \quad \text{sau} \quad C=A.$$

Avem dar

$$(25) \qquad P(x) \equiv A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-l)^{\lambda},$$

unde A e coeficientul termenului de gradul cel mai mare din $P(x)$.

EXEMPLU. Polinomul $P(x)=7x^3-21x^2+28$ se anulează pentru $x=-1$; e divizibil dar prin $x+1$ și găsim

$$P(x) \equiv (x+1)(7x^2-28x+28) \equiv 7(x+1)(x^2-4x+4)$$

sau

$$P(x) \equiv 7x^3-21x^2+28 \equiv 7(x+1)(x-2)^2.$$

7 e coeficientul termenului de gradul cel mai mare, -1 e o rădăcină *simplă*, $+2$ e o rădăcină *dublă* a polinomului $P(x)$.

OBSERVARE. Descompunerea unui polinom întreg în factori de forma $x-a$, este analoagă cu descompunerea unui număr în factori primi [74, 3].

Numim *divizor comun* al mai multor polinoame P, Q, R, polinomul care *împarte exact* pe fiecare dintre aceste polinoame.

Numim *multiplu comun* al mai multor polinoame P, Q, R, polinomul, care *se împarte exact* prin fiecare dintre aceste polinoame.

Numim *cel mai mare divizor comun* și *cel mai mic multiplu comun* al mai multor polinoame date, divizorul comun *de gradul cel mai mare* și multiplul comun *de gradul cel mai mic* al lor.

186. Polinoame cu aceleași rădăcini.

TEOREMA III. *Dacă două polinoame, reduse, au același grad și aceleași rădăcini; dacă fiecare rădăcină are același ordin de multiplicitate în ambele polinoame și dacă suma acestor ordine este egală cu gradul polinoamelor, coeficienții termenilor asemenea din aceste polinoame sunt proporționali.*

In adevăr, dacă

$$(26)\qquad \begin{aligned} P(x) &= A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m \\ Q(x) &= B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m \end{aligned}$$

și dacă a, b, ..., l sunt rădăcinile *comune* ale acestor polinoame, cu ordinile de multiplicitate α, β, ..., λ respectiv și cu

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

după identitatea (25), putem scrie

$$(27)\qquad \begin{aligned} P(x) &\equiv A_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda} \equiv A_0\,C(x), \\ Q(x) &\equiv B_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda} \equiv B_0\,C(x). \end{aligned}$$

unde

$$(28)\qquad C(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda} = x^m + C_1x^{m-1} + \ldots + C_m.$$

Din identitățile (27), în care $P(x)$, $Q(x)$ și $C(x)$ sunt polinoamele (26) și (28), rezultă

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0, \quad A_1 = A_0C_1, \quad A_2 = A_0C_2, \quad \ldots, \quad A_m = A_0C_m. \\ B_0 &= B_0, \quad B_1 = B_0C_1, \quad B_2 = B_0C_2, \quad \ldots, \quad B_m = B_0C_m, \end{aligned}$$

și împărțind membru cu membru aceste egalități, deducem

$$(29)\qquad \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \ldots = \frac{A_m}{B_m}.$$

187. Extragerea rădăcinii. Dacă f reprezintă o expresie algebrică, $\sqrt[n]{f}$ este o altă expresie algebrică φ, care ridicată la puterea n ne dă expresia f.

Legile radicalilor [**132**] și *operațiile cu radicali* [**134**] se extind și la calculele cu rădăcini din expresii algebrice. De aci rezultă că:

1°. Rădăcina a n-a dintr'un monom se poate calculà *extrăgând rădăcina a n-a din fiecare factor* al monomului și înmulțind rezultatele obținute.

EXEMPLU: $\sqrt{3x^2y^6z} = \pm xy^3\sqrt{3z}$.

2°. Rădăcina dintr'un polinom nu se poate calculà extrăgând rădăcina din fiecare termen; în acest caz se ordonă polinomul după puterile descrescătoare ale variabilei și se aplică niște regule analoage cu cele date pentru extragerea rădăcinii dintr'un număr format din mai multe cifre [**128**].

Un exemplu ne va arătà cum se găsește fiecare termen al *rădăcinii patrate* dintr'un *polinom*, aplicând regula dată pentru extragerea *rădăcinii patrate aritmetice* dintr'un număr [**127**].

EXEMPLU:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9x^4-6x^3+31x^2-10x+25} & 3x^2-x+5 \\ -9x^4 & \\ \hline -6x^3+31x^2-10x+25 & 6x^2-x \\ +6x^3-x^2 & -x \\ \hline 30x^2-10x+25 & -6x^3+x^2 \\ -30x^2+10x-25 & \hline 6x^2-2x+5 \\ \hline 0 & 5 \\ & \hline & 30x^2-10x+25 \end{array}$$

Termenul întâi: $\sqrt{9x^4} = 3x^2$

termenul al doilea: $-6x^3 : 2.(3x^2) = -x$

termenul al treilea: $30x^2 : 2.(3x^2) = 5$

Rezultă: $\sqrt{9x^4-6x^3+31x^2-10x+25} = \pm (3x^2-x+5)$.

II. — FRACȚII ALGEBRICE.

188. Expresii algebrice fracționare. O expresie de forma $\frac{f}{\varphi}$, unde f și φ sunt două expresii algebrice, se numește *expresie algebrică fracționară* sau *fracție algebrică*.

Dacă expresiile f și φ sunt raționale, zicem că $\frac{f}{\varphi}$ este o *fracție rațională*. In particular, f și φ pot fi două polinoame întregi.

Valoarea numerică a unei expresii algebrice fracționare este câtul dintre valoarea numerică a numărătorului și valoarea numerică a numitorului ei, dacă aceste valori sunt *finite* și *diferite de zero*.

In Aritmetică operațiile cu fracțiile ordinare se reduc la operații cu numere întregi. In Algebră operațiile cu fracțiile raționale se reduc la operații cu *polinoame întregi.*

Regulele date pentru operațiile cu fracții ordinare numerice se aplică și la operațiile cu expresii fracționare algebrice. Astfel:

1°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și numărătorul și numitorul unei expresii fracționare* $\frac{P}{Q}$ *cu o aceeaș expresie algebrică* R, *obținem o altă expresie fracționară identic egală cu* $\frac{P}{Q}$. In acest caz zicem că *amplificăm* sau *simplificăm* fracția $\frac{P}{Q}$ cu R [80, 3]. Toate fracțiile, pe care le obținem amplificând sau simplificând o aceeaș fracție algebrică, sunt *echivalente* între ele.

EXEMPLU. Avem

$$\frac{u^2-v^2}{u^2+2uv+v^2} = \frac{(u-v)(u+v)}{(u+v)^2} = \frac{u-v}{u+v},$$

pentru orice valori am pune în locul literelor u și v.

OBSERVARE. Se exceptează *unele valori* ale variabilelor, pentru care — fără alte convenții — valoarea corespunzătoare a fracției algebrice n'are niciun sens.

Astfel, în exemplul luat, nu putem calculà nici valoarea fracției date, nici a fracției simplificate, pentru $u = -v$.

2°. *Mai multe fracții algebrice pot fi aduse la același numitor* [82]. Se poate luà ca *numitor comun* produsul tuturor numitorilor fracțiilor date sau orice alt multiplu comun, în particular cel mai mic multiplu comun al acestor numitori.

3°. *Suma* (sau *diferența*) *unor fracții algebrice cu același numitor, este fracția, care are ca numărător suma* (sau *diferența*) *numărătorilor acestor fracții, iar ca numitor numitorul lor comun.*

Ca să *adunăm* sau să *scădem* mai multe fracții algebrice, care n'au același numitor, *trebue să le aducem întâi la același numitor.*

4°. *Ca să înmulțim mai multe fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.*

5°. *Ca să împărțim două fracții algebrice, înmulțim fracția întâia cu fracția a doua răsturnată.*

6°. *Ca să ridicăm la o putere o fracție algebrică, ridicăm și numărătorul și numitorul ei la acea putere.*

OBSERVARE. Toate aceste operații făcute asupra unor fracții raționale ne dau ca rezultate tot fracții raționale.

Orice polinom întreg se poate scrie ca expresie fracționară, punând ca numărător polinomul, iar ca numitor 1. Astfel operațiile între polinoame și fracții se reduc la operații între fracții.

EXEMPLE.

1°. $\frac{x-a}{x^2+a^2}+\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(x^2-a^2)+2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}=\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}.$

2°. $\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}-\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}-\frac{2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}$

$=\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^4-a^4}=\frac{(x^2-a^2)(x-a)}{x^4-a^4}=\frac{x-a}{x^2+a^2}.$

3°. $\frac{x-a}{x^2+a^2}\times\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{2x(x-a)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{2x^2-2ax}{x^4-a^4}.$

4°. $\frac{2x^2-2ax}{x^4-a^4}:\frac{x-a}{x^2+a^2}=\frac{2x(x-a)}{x^4-a^4}\times\frac{x^2+a^2}{x-a}=\frac{2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}=\frac{2x}{x^2-a^2}.$

5°. $x^2-ax+a^2-\frac{2a^3}{x+a}=\frac{(x^2-ax+a^2)(x+a)-2a^3}{x+a}=\frac{x^3-a^3}{x+a}.$

Orice expresie fracționară rațională se poate reduce la raportul a două polinoame întregi $\frac{P}{Q}$. Această *fracție rațională* poate să fie *proprie* sau *improprie* [**178**, 3].

Orice fracție rațională *improprie* $\frac{P}{Q}$ este suma unui *polinom întreg* C și a unei fracții *proprii* $\frac{R}{Q}$. Polinomul C este câtul împărțirii $P:Q$, iar R e restul acestei împărțiri.

EXEMPLU.

$$\frac{\frac{t-3}{t+3}+\frac{6t}{t^2-9}}{\frac{2}{t+3}-\frac{1}{t-3}}=\frac{\frac{(t-3)^2+6t}{t^2-9}}{\frac{2(t-3)-(t+3)}{(t+3)(t-3)}}=\frac{t^2+9}{t^2-9}\times\frac{t^2-9}{t-9}$$

$$=\frac{t^2+9}{t-9}=t+9+\frac{90}{t-9}.$$

189. Fracții iraționale. Când avem o fracție *cu numitor irațional*, putem, printr'o amplificare convenabilă, să o transformăm într'o fracție *echivalentă* cu numitor *rațional*.

Întrebuințăm, în general, identitatea $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, în care expresiile $a+b$ și $a-b$ se zic *conjugate*.

Să însemnăm cu f, g, h, l niște expresii algebrice raționale.

1°. Dacă fracția e de forma $\frac{f}{\sqrt{g}}$, o amplificăm cu $\sqrt{g}$ și găsim

$$\frac{f}{\sqrt{g}}=\frac{f\sqrt{g}}{g}. \tag{30}$$

2°. Dacă fracțiile sunt de forma $\frac{f}{g\pm\sqrt{h}}$ sau $\frac{f}{\sqrt{g}\pm\sqrt{h}}$, le amplificăm cu *conjugata numitorului* $g\mp\sqrt{h}$ sau $\sqrt{g}\mp\sqrt{h}$. Găsim astfel:

$$\frac{f}{g+\sqrt{h}}=\frac{f(g-\sqrt{h})}{g^2-h}, \qquad \frac{f}{\sqrt{g}-\sqrt{h}}=\frac{f(\sqrt{g}+\sqrt{h})}{g-h}. \tag{31}$$

Dacă fracția e de forma $\frac{l}{\sqrt{f}\pm\sqrt{g}\pm\sqrt{h}}$, repetăm de câte ori e nevoe operația din cazul precedent.

Astfel pentru $\frac{l}{\sqrt{f}-\sqrt{g}+\sqrt{h}}$, amplificăm întâi cu $\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g}$ și găsim

$$\frac{l}{\sqrt{f}+\sqrt{h}-\sqrt{g}}=\frac{l(\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g})}{(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2-g}=\frac{l(\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g})}{f+h-g+2\sqrt{fh}}.$$

Amplificăm apoi noua fracție cu $f+h-g-2\sqrt{fh}$.

190. Valori singulare. Când o cantitate v capătă succesiv toate valorile reale cuprinse între două numere a și b, zicem că v *variază în intervalul* (a, b) [**151**].

Dacă v, variind, capătă valori din ce în ce mai apropiate de a, sau, mai precis, dacă *diferența* $|v-a|$ *ajunge și rămâne mai mică decât orice număr pozitiv* ε *oricât de mic* [**143**, 2], zicem că v *tinde către* a și scriem: $v\to a$ sau $\lim v=a$.

O cantitate variabilă v *tinde către* $+\infty$ (plus infinit) *sau* $-\infty$ (minus infinit), *când, oricât de mare ar fi un număr* N *pozitiv, valoarea lui* v *ajunge și rămâne mai mare decât* N sau *mai mică decât* $-N$ [**143**, 3 și 4].

Dacă valoarea unei variabile v depinde de valoarea altei variabile x, zicem că v e o *funcție* de x și scriem $v=f(x)$ [**166**]. În acest caz putem vorbi despre *limita* către care tinde variabila v sau $f(x)$, când x tinde către o valoare a.

OBSERVARE. Ca să calculăm această *limită*, putem să înlocuim pe x prin $a+h$ și să căutăm ce devine valoarea $f(a+h)$, când h tinde către *zero*.

În general vom observă că avem

$$\lim_{h=0} f(a+h)=f(a) \qquad (h \text{ pozitiv sau negativ}). \tag{32}$$

In acest caz zicem că funcţia $f(x)$ e *continuă* peutru $x=a$. Sunt şi cazuri, când egalitatea (32) nu e adevărată.

EXEMPLU. Trinomul $v=f(x)=x^2+2x-9$ tinde către 6, când x tinde către 3. In adevăr, pentru $x=3+h$ avem

$$f(3+h)=(3+h)^2+2(3+h)-9=9+6h+h^2+6+2h-9=6+8h+h^2$$

şi când h (pozitiv sau negativ) tinde către zero, ultimii doi termeni *tind către zero*; avem dar: $\lim f(3+h)=6=f(3)$ şi funcţia e *continuă* pentru $x=3$. Putem constată că un *polinom* $P(x)$ e o funcţie continuă pentru orice valoare a lui x.

Dacă pentru $x=a$ expresiile $f(x)$ şi $g(x)$ capătă respectiv valorile $f(a)=m$ şi $g(a)=n$, *finite* şi *diferite de zero*, expresiile

$$(33) \qquad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x).g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

pentru $x=a$, capătă respectiv valorile $m+n$, $m-n$, $m.n$, $\frac{m}{n}$ bine determinate, *finite* şi *diferite de zero*.

Dar dacă $f(x)$ sau $g(x)$ *tind către zero* sau *către* $\pm\infty$, când x tinde către a, valorile numerice ale expresiilor (33) *pot să nu aibă sens* pentru $x=a$. In acest caz convenim să definim aceste valori *singulare* ca valori *limită*: pentru a le determină calculăm valorile expresiilor (33) pentru $x\neq a$ $(x=a+h)$ şi căutăm *ce devin aceste valori, când x tinde către a* (sau când h tinde către *zero*).

Teoremele relative la limita sumei, diferenţei, produsului şi câtului, demonstrate pentru limitele *şirurilor* [147], se aplică şi la limitele *expresiilor algebrice*.

1°. Dacă $f(a)=0$ şi $g(a)=m\neq 0$ şi *finit*, avem

$$f(a)+g(a)=0+m=m,\quad f(a)-g(a)=0-m=-m,$$

$$f(a).g(a)=0\times m=0,\qquad \frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{m}=0.$$

2°. După definiţia împărţirii, fracţia $\frac{m}{0}$ n'are sens [57]. Considerând însă fracţia $\frac{m}{v}$ şi dând lui v valori din ce în ce mai mici, fracţia $\frac{m}{v}$ devine din ce în ce *mai mare* în valoare absolută; astfel oricât de mare ar fi un număr N, pentru $|v|<\frac{|m|}{N}$ avem $\left|\frac{m}{v}\right|>N$. De aceea zicem că $\left|\frac{m}{v}\right|$ *creşte la infinit, când v tinde către zero* [143, 3] şi în acest sens scriem

$$(34) \qquad \frac{m}{0}=\infty.$$

OBSERVARE. Putem avea $+\infty$ sau $-\infty$, după cum fractia $\frac{m}{v}$ devine *infinită* prin valori *pozitive* sau prin valori *negative* [143, 3 şi 4].

Dacă, pentru $h=0$, avem

$$\lim f(a+h)=f(a)=m \quad \text{şi} \quad \lim g(a+h)=g(a)=0,$$

zicem că

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{m}{0} = \pm\infty, \qquad \text{(valoare } \textit{singulară}\text{)}$$

$+\infty$ sau $-\infty$ după cum raportul $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$ rămâne *pozitiv* sau *negativ* pentru h destul de mic.

EXEMPLU. Fracția $\frac{x}{x-1}$ pentru $x=0$ are valoarea $\frac{0}{-1}=0$; pentru $x=1$ are valoarea $\frac{1}{0}=\infty$. Pentru $x=1\pm h$ $(h>0)$ avem $\frac{x}{x-1}=\frac{1\pm h}{\pm h}$. Când h e foarte mic, numărătorul e pozitiv și semnul raportului e dat de numitor. Deci, când $x\to 1$ prin valori *mai mici decât* 1 (sau când $x=1-h$ și $h\to 0$), raportul rămâne *negativ* și tinde către $-\infty$; când $x\to 1$ prin valori *mai mari decât* 1 ($x=1+h$ și $h\to 0$), raportul rămâne *pozitiv* și tinde către $+\infty$.

3°. Când v crește la *infinit*, expresiile $v+m$, $v-m$, $v.|m|$, $\frac{v}{|m|}$ devin din ce în ce mai mari și *cresc la infinit*, diferența $m-v$ *descrește spre* $-\infty$, iar fracția $\frac{m}{v}$ *tinde către zero* [**143**].

Dacă $f(x)\to\infty$ când $x\to a$, convenim să scriem $f(a)=\infty$.

Dacă $f(a)=\infty$ și $g(a)=m\neq 0$ și *finit*, zicem că

$$f(a)+g(a)=\infty+m=\infty, \quad f(a)-g(a)=\infty-m=\infty,$$
$$g(a)-f(a)=m-\infty=-\infty, \quad f(a).g(a)=\infty.m=\pm\infty,$$
$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{m}=\pm\infty, \qquad \frac{g(a)}{f(a)}=\frac{m}{\infty}=0.$$

Dacă $f(a)=\infty$ și $g(a)=0$, avem

$$f(a).g(a)=\infty.0 \qquad \text{(}\textit{formă nedeterminată}\text{)}.$$
$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{0}=\infty, \qquad \frac{g(a)}{f(a)}=\frac{0}{\infty}=0.$$

4°. Dacă $f(a)=0$ și $g(a)=0$, avem

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0} \qquad \text{(}\textit{formă nedeterminată}\text{)},$$

5°. Dacă $f(a)=\infty$ și $g(a)=\infty$, zicem că

$$f(a)+g(a)=\infty+\infty=\infty, \quad f(a).g(a)=\infty.\infty=\infty;$$
$$f(a)-g(a)=\infty-\infty \qquad \text{(}\textit{formă nedeterminată}\text{)},$$
$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{\infty} \qquad \text{(}\textit{formă nedeterminată}\text{)}.$$

REZUMAT. *Valori singulare.*

1°. Pentru $a>0$ și *finit* avem:

$$a+\infty=+\infty, \quad a-\infty=-\infty, \quad a.0=0, \quad a.\infty=\infty.$$
$$\frac{0}{a}=0, \quad \frac{a}{0}=\infty, \quad \frac{\infty}{a}=\infty, \quad \frac{a}{\infty}=0.$$

2°. *Cazuri particulare*:

$$0.0=0, \quad \infty.\infty=\infty, \quad \frac{0}{\infty}=0, \quad \frac{\infty}{0}=\infty.$$

3°. *Forme nedeterminate*:

$$\infty-\infty, \quad 0.\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

191. Forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Dacă $P(x)$ și $Q(x)$ sunt două polinoame întregi în x și dacă a este o *rădăcină* de ordin p pentru $P(x)$ și de ordin q pentru $Q(x)$ avem

$$(35) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)}, \qquad \begin{matrix} P_1(a)\neq 0, \\ Q_1(a)\neq 0. \end{matrix}$$

Pentru $x=a$ valoarea acestei fracții se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ (*nedeterminare*), dar pentru $x\neq a$ fracția (35) are o valoare bine determinată, oricât de apropiat ar fi x de a. Distingem trei cazuri:

1°. Dacă $p=q$, suprimând factorul $(x-a)^p$, pentru $x\neq a$, avem

$$(36) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^p Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Când $x\to a$ (x tinde către a), valoarea acestei fracții tinde către $\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$. De aceea zicem că $\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$ e *valoarea adevărată* a fracției (36) pentru $x=a$.

2°. Dacă $p>q$, de exemplu $p=q+r$, suprimând factorul $(x-a)^q$, pentru $x\neq a$, avem

$$(37) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^{q+r}P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)}=\frac{(x-a)^r P_1(x)}{Q_1(x)}$$

și când x tinde către a, valoarea fracției *tinde către zero.*

3°. Dacă $q>p$, de exemplu $q=p+r$, suprimând factorul $(x-a)^p$, pentru $x\neq a$, avem

$$(38) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^{p+r}Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^r Q_1(x)}$$

și când x tinde către a, valoarea numitorului tinde către *zero*, iar valoarea absolută a fracției *crește la infinit* [**190**, 2].

EXEMPLE. Să se determine valorile adevărate ale fracțiilor

1°. $\frac{(x^2+1)(x^3-1)}{x^5-1}$ pentru $x=1$;

2°. $\frac{(t^2+3)t^4}{(t-5)^2-(t+5)^2}$ pentru $t=0$;

3°. $\frac{u^2-4}{u^3+3u^2-4}$ pentru $u=-2$.

Toate sunt *nedeterminări* de forma $\frac{0}{0}$.

1°. Impărțind x^3-1 și x^5-1 prin $x-1$, găsim pentru $x=1$

$$\left[\frac{(x^3+1)(x^2+x+1)}{x^4+x^3+x^2+x+1}\right]_1=\frac{6}{5}.$$

2°. Făcând diferența dela numitor și suprimând factorul t, găsim pentru $t=0$

$$\left[\frac{(t^2+3)t^3}{-10}\right]_0=\frac{0}{-10}=0.$$

3°. Impărțind numărătorul și numitorul prin $u+2$, găsim pentru $u=-2$

$$\left[\frac{u-2}{u^2+u-2}\right]_{-2}=\frac{-4}{0}=\infty.$$

Dacă facem $u=-2+\varepsilon$, fracția devine

$$\frac{(-2+\varepsilon)-2}{(-2+\varepsilon)^2+(-2+\varepsilon)-2}=\frac{\varepsilon-4}{\varepsilon(\varepsilon-3)}=\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon(3-\varepsilon)}.$$

Pentru $\varepsilon>0$ și mai mic decât 3, fracția e *pozitivă*; pentru $\varepsilon<0$ fracția e *negativă*. De aceea, când $\varepsilon\to 0$ prin valori pozitive, fracția tinde către $+\infty$; când $\varepsilon\to 0$ prin valori negative, fracția tinde către $-\infty$.

In mod analog putem găsi valoarea adevărată a unei expresii *iraționale* de forma $\frac{0}{0}$.

EXEMPLU. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{x-a}$, pentru $x=a$, e de forma $\frac{0}{0}$.

Amplificând fracția cu conjugata numărătorului, putem scrie

$$f(x)=\frac{x^3-a^3}{(x-a)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}\right)}$$

și fiindcă $(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2$, găsim pentru $x=a$

$$\left[\frac{x^2+ax+a^2}{\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}}\right]_a=\frac{3a^2}{2\sqrt{a^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{a}.$$

192. Valoarea unui polinom pentru $x=\pm\infty$. Un polinom întreg în x

$$P(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

se poate scrie, pentru orice valoare *finită* a lui x,

$$x^m\left[A_0+\frac{A_1}{x}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{A_m}{x^m}\right].$$

Când x tinde către $\pm\infty$, factorul x^m devine *infinit* în valoare absolută, iar expresia din paranteză *tinde către* A_0, deoarece toți termenii, cari conțin pe x la numitor, tind către *zero*. Avem dar

$$\lim_{x=\infty} P(x) = \lim_{x=\infty} A_0 x^m = \pm\infty. \tag{39}$$

EXEMPLE. Polinomul $3x^2 - 5x + 2$, pentru $x = +\infty$ sau $x = -\infty$, are aceeaș valoare ca și $3x^2$, adică $+\infty$.

Polinomul $-2x^3 + 4x^2 - 1$, pentru x *infinit*, are aceeaș valoare ca și $-2x^3$, adică $+\infty$ pentru $x = -\infty$ și $-\infty$ pentru $x = +\infty$.

193. Forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$. Raportul a două polinoame

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_p}{B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \cdots + B_q} \tag{40}$$

pentru $x = \infty$ se prezintă sub forma *nedeterminată* $\frac{\infty}{\infty}$. Putem însă determină *valoarea adevărată* a acestei fracții în felul următor:

1°. Dacă $p = q$, împărțind și numărătorul și numitorul prin x^p găsim, pentru x *finit*,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_p}{x^p}}{B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_p}{x^p}}$$

și când $x \to \infty$, avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{B_0}. \tag{41}$$

2°. Dacă $p > q$, de exemplu dacă $p = q + r$, împărțind ambii termeni ai fracției (40) prin x^q, găsim pentru x finit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \cdots + \frac{A_p}{x^q}}{B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_q}{x^q}}$$

și când $x \to \infty$, avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_0 x^r}{B_0} = \pm\infty. \tag{42}$$

3°. Dacă $q > p$, de exemplu dacă $q = p + r$, împărțind ambii termeni ai fracției (40) prin x^p, găsim pentru x finit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_p}{x^p}}{B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \cdots + \frac{B_q}{x^p}}$$

și când $x \to \infty$, avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_0}{B_0 x^r} = 0. \tag{43}$$

REGULĂ. *Valoarea adevărată a raportului a două polinoame întregi în x, pentru $x = \infty$, este:*

1°. *egală cu raportul coeficienților termenilor de gradul cel mai mare dela numărător și numitor,* dacă polinoamele sunt *de același grad.*

2°. *infinită,* dacă gradul numărătorului e *mai mare* decât gradul numitorului.

3°. *nulă,* dacă gradul numărătorului e *mai mic* decât gradul numitorului.

EXEMPLE. Avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 4} = \frac{3}{2}; \quad \lim_{x=\infty} \frac{2x^4 - 1}{5x^3 + 2x - 7} = \infty; \quad \lim_{x=\infty} \frac{x^3 + 1}{x^5 - x^2 + 3} = 0.$$

OBSERVARE. Când, pentru $x = a$, valoarea raportului a două fracții raționale se prezintă sub forma $\frac{\infty}{\infty}$, îl putem reduce la forma $\frac{0}{0}$.

EXEMPLU. Pentru $x = 1$, valoarea fracției

$$\frac{x + \frac{3}{x^2 - 1}}{\frac{5x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}} \quad \text{este} \quad \frac{1 + \frac{3}{0}}{\frac{4}{0}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Dar, pentru $x \neq 1$, putem scrie

$$\frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1} : \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 1)(5x^3 - 1)},$$

care pentru $x = 1$ se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Simplificând cu $x - 1$ și făcând apoi $x = 1$, găsim pentru fracție valoarea $\frac{3}{2}$.

194. Forma $0 \times \infty$. Dacă avem două expresii algebrice $f(x)$ și $g(x)$ și dacă $f(a) = 0$ și $g(a) = \infty$, valoarea produsului $f(x).g(x)$ pentru $x = a$ se prezintă sub *forma nedeterminată* $0 \times \infty$.

Observăm însă că, pentru $x \neq a$, putem scrie

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

și această fracție, pentru $x = a$, se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ [**191**].

195. Forma $\infty - \infty$. Dacă pentru două fracții raționale $f(x)$ și $g(x)$ avem $f(a) = \infty$, $g(a) = \infty$, valoarea diferenței $f(x) - g(x)$, pentru $x = a$, se prezintă sub forma $\infty - \infty$.

Efectuând scăderea, diferența $f(x) - g(x)$ se reduce la *raportul a două polinoame întregi în* x și valoarea acestei expresii se determină ca în cazurile precedente.

EXEMPLU. Să se determine valoarea diferenței

$$\frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \quad \text{pentru } x = 2.$$

Pentru $x = 2$ expresiunea capătă forma $\infty - \infty$. Dar observând că avem

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1), \quad (x^2-3x+2) = (x-2)(x-1)$$

și efectuând diferența dată, pentru $x \neq 2$, găsim

$$\frac{7-2x}{(x-2)(x+1)} - \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{-2x^2+8x-8}{(x-2)(x^2-1)} = \frac{-2(x-2)^2}{(x-2)(x^2-1)}$$

$$= \frac{-2(x-2)}{x^2-1}$$

iar pentru $x = 2$, expresiunea are valoarea 0.

196. Raport independent de x. 1°. *Pentru ca raportul*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{a'x+b'} \tag{44}$$

să aibă aceeaș valoare numerică pentru toate valorile lui x, *trebue și e de ajuns să avem:*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \tag{45}$$

In adevăr pentru $x = 0$, valoarea raportului (44) este $\frac{b}{b'}$; pentru $x = \infty$, valoarea raportului e $\frac{a}{a'}$ [**193**]. *Trebue dar să avem* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Invers, dacă avem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \rho,$$

putem scrie $a = \rho a'$, $b = \rho b'$ și

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{\rho(a'x+b')}{a'x+b'} = \rho$$

oricare ar fi x. Valoarea raportului e *independentă de valoarea lui* x.

2°. *Pentru ca raportul a două polinoame întregi în* x *și de același grad,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \cdots + kx + l}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + k'x + l'} \tag{46}$$

să aibă aceeași valoare numerică pentru toate valorile lui x, *trebue și e deajuns să avem:*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \cdots = \frac{k}{k'} = \frac{l}{l'}. \tag{47}$$

In adevăr, pentru $x = 0$, valoarea raportului (46) este $\frac{l}{l'}$. Deci, *oricare ar fi* x, ar trebui să avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{l}{l'} \quad \text{de unde} \quad \frac{P(x)-l}{Q(x)-l'} = \frac{l}{l'}$$

sau, simplificând cu x,

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + k}{a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + \cdots + k'} = \frac{l}{l'}.$$

Făcând din nou $x = 0$ găsim

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k}{k'} = \frac{l}{l'}$$

și așă mai departe. Condiția e dar *necesară.*

Ea e și *suficientă*, fiindcă, însemnând cu ρ valoarea comună a rapoartelor (47), putem scrie

$$a = \rho a', \quad b = \rho b', \quad \ldots, \quad l = \rho l'$$

și avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\rho(a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + l')}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + l'} = \rho$$

pentru orice valoare a lui x.

III. — ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÂI.

197. Ecuații și rădăcini. Dacă $f(x, y, z)$ și $g(x, y, z)$ sunt două expresii algebrice, egalitatea

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) \tag{48}$$

se numește o *ecuație* [**167**]. Literele x, y, z sunt *necunoscutele* ecuației.

Când înlocuim literele x, y, z cu niște numere date a, b, c, valorile numerice $f(a, b, c)$ și $g(a, b, c)$ pot fi *egale* sau *neegale*.

Dacă avem

$$f(a, b, c) = g(a, b, c) \tag{49}$$

zicem că valorile a, b, c *satisfac ecuația* (48) sau că a, b, c sunt *rădăcinile* acestei ecuații.

O ecuație poate să aibă una sau mai multe necunoscute. O ecuație cu o necunoscută poate să aibă una sau mai multe rădăcini.

A *rezolvà* o ecuație însemnează a-i calculà *rădăcinile* ei, adică a găsì numerele, care puse în locul necunoscutelor, să ne dea *valoarea membrului întâi egală cu valoarea membrului al doilea.*

EXEMPLE. Ecuația $3x^2 + 1 = 5x + 3$ are o singură necunoscută x și *două* rădăcini $x = 2$ și $x = -\frac{1}{3}$.

Ecuația $5(x - y) = 3x + 7y - 4$ are *două* necunoscute x și y și are rădăcinile: $x = 1$, $y = 3$; $x = 4$, $y = 1$; $x = 16$, $y = 3$; $x = -14$, $y = -2$; etc.

198. Ecuații echivalente prin adunare sau scădere. Două ecuații se zic *echivalente*, dacă admit *aceleași rădăcini*, adică dacă *toate* rădăcinile ecuației întâia sunt rădăcini și ale ecuației a doua și reciproc, dacă *toate* rădăcinile ecuației a doua sunt rădăcini și ale ecuației întâia.

1°. TEOREMA I. *Dacă adunăm la ambii membri ai unei ecuații o aceeaș cantitate finită, obținem o ecuație echivalentă cu cea dintâi.*

Astfel dacă $f(x), g(x)$ și $h(x)$ sunt trei expresii algebrice, ecuația

$$f(x) = g(x) \tag{50}$$

este *echivalentă* cu ecuația

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x), \tag{51}$$

dacă pentru orice valoare a lui x finită, valoarea expresiei $h(x)$ e *finită*.

In adevăr, dacă $x = a$ e o rădăcină a ecuației (50), din

$$f(a) = g(a) \tag{52}$$

rezultă

$$f(a) + h(a) = g(a) + h(a); \tag{53}$$

deci $x = a$ este o rădăcină și a ecuației (51).

Reciproc, dacă a este o rădăcină a ecuației (51), din egalitatea (53), dacă numărul $h(a)$ e *finit*, rezultă egalitatea (52). Deci a este o rădăcină și a ecuației (50).

Se demonstrează în același fel că: *Dacă scădem o aceeași cantitate finită din ambii membri ai unei ecuații, obținem o ecuație echivalentă cu cea dintâi.*

COROLAR. Rădăcinile unei ecuații nu se schimbă, dacă trecem un termen al ecuației dintr'un membru în celălalt, *cu semnul schimbat.*

EXEMPLU. Din ecuația $2x^3+6=7x^2+8x$, scăzând din ambii membri pe $8x$, deducem o ecuație *echivalentă*:

$$\begin{array}{r} 2x^3+6 = 7x^2+8x \\ -8x \qquad -8x \\ \hline 2x^3+6-8x = 7x^2. \end{array}$$

OBSERVĂRI. 1°. Se pot schimbă semnele *la toți termenii* unei ecuații. Aceasta revine la a trece toți termenii din membrul întâi în membrul al doilea și toți termenii din membrul al doilea în membrul întâi.

2°. Se poate suprimă un termen, care se găsește și în membrul întâi și în membrul al doilea *cu același semn.*

3°. Se pot trece toți termenii unei ecuații într'un singur membru.

EXEMPLU. In loc de $3x^2-5x=7x-2$ putem scrie $3x^2-5x-7x+2=0$ sau $3x^2-12x+2=0$. Reducem astfel ecuația la forma $f=0$.

Gradul unei ecuații. Dacă o ecuație a fost redusă la forma $f=0$ și dacă f e un *polinom întreg* și *redus*, gradul polinomului f este *gradul ecuației.*

Astfel ecuația $3x^2-12x+2=0$ este de grad 2 și are o singură necunoscută x; ecuația $5xy^3+2x^2y-x+7=0$ este de grad 4 și are două necunoscute x și y.

199. Ecuații echivalente prin înmulțire sau împărțire.

1°. TEOREMA II. *Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu o aceeași cantitate diferită de zero și care nu conține necunoscutele ecuației, obținem o ecuație echivalentă cu cea dintâi.*

In adevăr, să comparăm ecuația

(54) $$f(x)=g(x) \quad \text{sau} \quad f(x)-g(x)=0$$

cu ecuația

(55) $$f(x).h=g(x).h \quad \text{sau} \quad h.[f(x)-g(x)]=0.$$

Dacă $x=a$ e o rădăcină a ecuației (54), avem $f(a)-g(a)=0$; deci și $h[f(a)-g(a)]=0$; adică a e o rădăcină și a ecuației (55).

Reciproc, dacă $x = a$ e o rădăcină a ecuației (55) și dacă h e *diferit de zero*, din $h[f(a) - g(a)] = 0$ rezultă și $f(a) - g(a) = 0$.

2°. Dacă multiplicatorul h *conține necunoscuta* x, ecuația (55) *poate să nu mai fie echivalentă* cu ecuația (54).

In adevăr, orice valoare $x = a$, care anulează diferența

(56) $$f(x) - g(x)$$

anulează și produsul

(57) $$h(x)[f(x) - g(x)],$$

dacă factorul $h(a)$ e *finit*.

Dacă $h(a) = \infty$, produsul (57), pentru $x = a$, se prezintă sub forma nedeterminată $\infty . 0$ [**194**] și adevărata lui valoare *poate fi diferită de zero*. In acest caz ecuația (54), prin înmulțirea cu $h(x)$, *perde rădăcina* $x = a$.

Reciproc, orice valoare $x = b$, care anulează produsul (57), anulează și diferența (56), dacă factorul $h(b)$ e *diferit de zero*.

Dacă $h(b) = 0$, produsul (57) poate fi nul, *fără ca* celălalt factor adică *diferența* (56) *să fie nulă*. In acest caz ecuația (54), prin înmulțirea cu $h(x)$, *câștigă rădăcina* $x = b$.

Așa dar: dacă înmulțim ambii membri ai unei ecuații cu o aceeaș expresie, *care conține necunoscuta* (sau *necunoscutele*), ecuația nouă obținută poate să aibă *mai multe* sau *mai puține* rădăcini decât ecuația dată și anume: *prin înmulțire, ecuația dată poate câștigă, ca rădăcini străine, valorile care anulează multiplicatorul* sau *poate perde, dintre rădăcinile ei, pe acelea, care fac multiplicatorul infinit.*

EXEMPLU. Ecuația $x^2 + 2 = x(2x + 1)$ are rădăcinile 1, -1 și 2, ceeace se poate verifică ușor. Inmulțind ambii membri cu expresia $x^2 - 9$, noua ecuație

$$(x^2 - 9)(x^2 + 2) = x(x^2 - 9)(2x + 1)$$

are pe lângă rădăcinile vechi 1, -1 și 2 și *rădăcinile noi* $+3$ și -3, care anulează multiplicatorul $x^2 - 9$.

Valorile $+3$ și -3 se zic *rădăcini străine*, introduse prin înmulțirea ecuației date cu $x^2 - 9$.

3°. Un raționament analog ne arată că orice rădăcină a ecuației

(58) $$f(x) = g(x) \quad \text{sau} \quad f(x) - g(x) = 0$$

este o rădăcină și a ecuației

(59) $$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{sau} \quad \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0,$$

dacă pentru această valoare împărțitorul $h(x)$ *e diferit de zero.*

Reciproc, orice rădăcină a ecuației (59) este o rădăcină și a ecuației (58), *dacă pentru această valoare împărțitorul* $h(x)$ *este finit.*

Prin urmare: Dacă împărțim ambii membri ai unei ecuații cu aceeaș expresie, *care conține necunoscuta* (sau *necunoscutele*), ecuația nouă obținută poate să nu mai fie echivalentă cu ecuația dată și anume *prin împărțire, ecuația dată poate perde dintre rădăcini pe acelea care anulează împărțitorul* sau *poate câștigà ca rădăcini străine valorile, care fac împărțitorul infinit.*

EXEMPLU. Ecuația $(x-3)(x^3+2)=x(x-3)(2x+1)$ are rădăcinile 1, -1, 2 și 3. Împărțită cu $\frac{x-3}{x+5}$, devine

$$(x+5)(x^3+2)=x(x+5)(2x+1),$$

care are rădăcinile 1, -1, 2 și 5. Ecuația dată, prin împărțire, a perdut dar rădăcina $x=3$, care *anulează* împărțitorul, și a câștigat o nouă rădăcină $x=5$, care face împărțitorul *infinit.*

200. Alungarea numitorilor. Când o ecuație conține numitori, *putem face să dispară numitorii, dacă înmulțim ambii membri ai ecuației cu un multiplu comun al tuturor numitorilor ei.* Prin această operație zicem că *alungăm numitorii.*

Noua ecuație, astfel obținută, poate să aibă ca rădăcini *străine*, valorile care anulează multiplul comun al numitorilor, cu care am înmulțit.

EXEMPLE. 1°. *Numitorii nu conțin necunoscutele.* Fie ecuația

$$2x-\frac{5x^2}{8}=\frac{3}{7}+\frac{x}{4}-6,$$

cu numitorii 8, 7 și 4. Fiindcă 8 e divizibil prin 4, un multiplu comun al numitorilor este $7\times 8=56$. Înmulțind ambii membri ai ecuației cu 56 găsim

$$56.2.x-\frac{56.5.x^2}{8}=\frac{56.3}{7}+\frac{56.x}{4}-56.6.$$

Simplificând fracțiile și făcând operațiile, obținem o ecuație *echivalentă* cu cea dată, dar *scrisă sub formă întreagă,*

$$112x-35x^2=24+14x-336.$$

2°. *Numitorii conțin necunoscutele.* Să luăm ecuația

$$\frac{5}{(x+1)(x-3)}-\frac{10}{(x-3)(x+5)}=\frac{3}{x-1}. \tag{60}$$

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este

$$(x+1)(x-1)(x-3)(x+5) \tag{61}$$

și înmulțind cu acest produs ambii membri ai ecuației date, obținem ecuația *întreagă*

$$5.(x-1)(x+5)-10.(x^2-1)=3.(x+1)(x-3)(x+5), \tag{62}$$

care e satisfăcută de *toate rădăcinile ecuației date*, dar poate să aibă ca rădăcini *străine*, valorile care anulează multiplicatorul (61), adică valorile -1, $+1$, 3 sau -5.

Verificând, vedem că, dintre aceste patru numere, numai $x=3$ satisface ecuația (62). Înlocuind în ecuația (60) pe x prin 3, găsim că membrul întâi e de forma *nedeterminată* $\infty-\infty$, iar membrul al doilea are valoarea $\frac{3}{2}$.

Ca să determinăm adevărata valoare a membrului întâi a ecuației (60) pentru $x=3$, efectuăm scăderea și obținem fracția

$$\frac{5(x+5)-10(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+5)}=-\frac{5(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+5)}=-\frac{5}{(x+1)(x+5)}.$$

Pentru $x=3$ această fracție are valoarea $-\frac{5}{32}\neq\frac{3}{2}$. Prin urmare $x=3$ *nu satisface ecuația* (60); ea e o rădăcină *străină* introdusă prin alungarea numitorilor.

201. Operații generale pentru rezolvarea unei ecuații. Din teoremele precedente și corolarele lor rezultă că, dacă avem o ecuație

$$f(x,y,z)=g(x,y,z),$$

în care expresiile f și g sunt *raționale*, o putem reduce la forma cea mai simplă întrebuințând următoarele operații, care ne dau, în general, ecuații *echivalente*:

Operația I. *Facem să dispară parantezele.*

Operația II. *Punem ecuația sub formă întreagă*, alungând numitorii.

Operația III. *Trecem toți termenii cu necunoscutele în membrul întâi și termenii cunoscuți în membrul al doilea.*

Operația IV. *Facem reducerea termenilor asemenea.*

202. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută. Să presupunem că, după toate operațiile I, II, III, IV, am ajuns la o *ecuație de gradul întâi cu o singură necunoscută* x.

1°. Dacă toți coeficienții sunt *numerici*, ecuația se reduce întotdeauna la forma

$$ax=b \tag{63}$$

unde a și b sunt două numere cunoscute.

2°. Dacă coeficienții conțin și *litere*, *punem pe* x *în factor comun* în membrul întâi și ecuația se reduce la forma

$$ax=b, \tag{64}$$

unde a și b sunt două *expresii algebrice*, formate cu literele care reprezintă numere presupuse cunoscute.

Rezolvarea ecuației. Dacă a e *diferit de zero*, împărțind prin a ambii membri ai ecuației (63) sau (64), găsim

(LXIII) $$x = \frac{b}{a}$$ *rădăcina ecuației* $ax = b$.

OBSERVARE. *O ecuație de gradul întâi cu o singură necunoscută are o singură rădăcină.*

EXEMPLE. 1°. Ecuație numerică. Să se rezolve ecuația

(65) $$x^2(x-1) - \frac{7x^2+6}{14} = x^3 - \frac{3}{2}\left[x^2 + \frac{2x+1}{7}\right].$$

Facem să dispară parantezele, observând că

$$x^2(x-1) = x^3 - x^2, \quad \frac{3}{2}\left[x^2 + \frac{2x+1}{7}\right] = \frac{3x^2}{2} + \frac{6x+3}{14}$$

și ecuația dată se scrie

$$x^3 - x^2 - \frac{7x^2+6}{14} = x^3 - \frac{3x^2}{2} - \frac{6x+3}{14}.$$

Suprimând termenul x^3 din ambii membri; înmulțind toți termenii cu 14 (cel mai mic multiplu comun al numitorilor) și făcând scăderile arătate de semnele — puse înaintea fracțiilor, obținem

$$-14x^2 - 7x^2 - 6 = -21x^2 - 6x - 3.$$

Trecem toți termenii cu necunoscuta în membrul întâi și termenii cunoscuți în membrul al doilea:

$$-14x^2 - 7x^2 + 21x^2 + 6x = 6 - 3$$

și reducând termenii asemenea, ne rămâne ecuația

$$6x = 3,$$

care e de gradul *întâi*. Împărțind ambii membri cu 6, obținem pentru x valoarea

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

OBSERVARE. Când după un șir de operații, care ne dau ecuații *echivalente*, am ajuns la o ecuație, care are în membrul întâi numai x, iar în membrul al doilea un număr cunoscut c, zicem că *am rezolvat ecuația* și că *rădăcina ecuației* e $x = c$.

Verificare. Inlocuind în ecuația dată pe x prin rădăcina găsită și făcând toate operațiile arătate de semne, dacă valoarea membrului întâi e egală cu valoarea membrului al doilea, zicem că rădăcina găsită *verifică ecuația.*

2°. Ecuație literală. Să se rezolve ecuația

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{2}{c}\right) + 5 = 3\left(\frac{x}{a} + 2\right)$$

în care literele a, b, c reprezintă numere presupuse cunoscute.

Facem să dispară parantezele:

$$\frac{ax}{b} - \frac{2a}{bc} + 5 = \frac{3x}{a} + 6.$$

Alungăm numitorii, înmulțind toată ecuația cu abc:

$$a^2cx - 2a^2 + 5abc = 3bcx + 6abc.$$

Trecem termenii cu x în membrul întâi și cei fără x în membrul al doilea

$$a^2cx - 3bcx = 2a^2 - 5abc + 6abc.$$

Scoatem pe x în factor comun și facem reducerile:

$$(a^2c - 3bc)\,x = 2a^2 + abc.$$

Împărțim, în fine, cu coeficientul lui x și obținem *rădăcina*:

$$x = \frac{2a^2 + abc}{a^2c - 3bc} = \frac{a(2a + bc)}{c(a^2 - 3b)}.$$

203. Discuție. La rezolvarea unei ecuații de gradul întâi

(66) $$ax = b$$

se pot prezentă mai multe cazuri:

1°. *Cazul general* $a \neq 0$, $b \neq 0$. Împărțind ambii membri cu a găsim rădăcina

(67) $$x = \frac{b}{a}$$

binedeterminată, finită și diferită de zero.

2°. $a \neq 0$, $b = 0$. Ecuația e de forma $ax = 0$ și are rădăcina $x = 0$.

3°. $a = 0$, $b = 0$. Când a e *nul*, nu mai putem împărți membrii ecuației cu a. Dar dacă ecuația e de forma $0x = 0$, ea e satisfăcută de *orice valoare a lui* x. In acest caz zicem că rădăcina ecuației e *nedeterminată*.

4°. $a = 0$, $b \neq 0$. Avem ecuația $0x = b$, care nu admite *nici o rădăcină*, fiindcă orice număr înmulțit cu 0 ne dă 0 și valoarea membrului întâi nu poate fi egală cu membrul al doilea $b \neq 0$. In acest caz zicem că ecuația e *imposibilă*.

Observare. Dacă în ecuația $ax = b$, cu $b \neq 0$, facem coeficientul a din ce în ce *mai mic*, rădăcina $x = \frac{b}{a}$ devine din ce în ce *mai mare* și *crește la infinit, când a tinde către zero* [**143**, 1]. In acest sens zicem că ecuația (66), pentru $a = 0$, are rădăcina *infinită*.

EXEMPLU. Ecuația $(m-1)x = m+3$ are rădăcina $x = \frac{m+3}{m-1}$.

1°. Dacă m nu are nici valoarea 1, nici -3, x e un număr binedeterminat, finit și diferit de zero. 2°. Pentru $m = -3$, avem $x = 0$. 3°. Pentru $m = 1$, avem $x = \infty$.

204. Ecuație cu mai multe necunoscute. Orice ecuație de gradul întâi cu mai multe necunoscute x, y, z, cu ajutorul operațiilor generale dela paragraful **201**, se poate reduce la forma *normală*:

$$ax + by + cz = d, \tag{68}$$

unde a, b, c, d sunt *numere cunoscute* sau *expresii algebrice formate cu litere, care reprezintă numere presupuse cunoscute.*

Dacă niște numere x_1, y_1, z_1 puse respectiv în locul literelor x, y, z, satisfac egalitatea (68), zicem că x_1, y_1, z_1 formează *un sistem de rădăcini* sau de *soluții* al ecuației (68).

Punând în locul literelor y și z două numere *arbitrare*, ecuația (68) se poate rezolvà în raport cu x și ne dă

$$x = \frac{d-by-cz}{a}. \tag{69}$$

Cum putem luà pentru y și z o infinitate de valori arbitrare y_1, z_1; y_2, z_2; ..., formula (69) ne dă pentru x o infinitate de valori corespunzătoare x_1, x_2, ... Găsim dar pentru ecuația (68) o *infinitate de soluții*: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ... .

REGULĂ. *O ecuație de gradul întâi cu mai multe necunoscute admite o infinitate de sisteme de soluții. Valorile tuturor necunoscutelor, afară de una, pot fi luate în mod arbitrar; la aceste valori corespunde o valoare și una singură pentru necunoscuta rămasă, care se obține rezolvind ecuația dată în raport cu această necunoscută.*

EXEMPLU. Ecuația

$$3(x-y+1)-z = 3z-2(y+2x) \tag{70}$$

se scrie sub forma normală

$$7x-y-4z = -3. \tag{71}$$

Rezolvată în raport cu x ne dă

$$x = \frac{y+4z-3}{7}. \tag{72}$$

Pentru $y = 0$, $z = 1$ această formulă ne dă $x = \frac{1}{7}$; pentru $y = 1$, $z = 3$, avem $x = \frac{10}{7}$ și așà mai departe. Valorile astfel obținute

$$x_1 = \tfrac{1}{7},\ y_1 = 0,\ z_1 = 1; \quad x_2 = \tfrac{10}{7},\ y_2 = 1,\ z_2 = 3; \quad \ldots$$

sunt *sisteme de soluții* pentru ecuația (71) sau pentru ecuația (70) echivalentă cu (71).

205. Sistem de ecuații. Dacă niște numere $x_1, y_1, z_1, \ldots$ trebue să fie *soluții comune* la mai multe ecuații (E), cu necunoscutele $x, y, z, \ldots$, zicem că (E) formează *un sistem de ecuații simultane.*

Două sisteme de ecuații sunt *echivalente*, dacă au *aceleași sisteme de soluții.* A *rezolvà* un sistem de ecuații însemnează a-i afla *soluțiile* lui.

Dacă ecuațiile sunt de gradul întâi, le putem scrie întotdeauna sub formă *normală*:

$$\begin{aligned} &ax + by + cz + \ldots = l \\ &a'x + b'y + c'z + \ldots = l' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{73}$$

în fiecare ecuație având în membrul întâi numai termeni cu necunoscutele, iar în membrul al doilea un termen cunoscut.

206. Două ecuații cu două necunoscute. Un sistem de două ecuații cu două necunoscute se reduce la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \tag{74}$$

unde a, b, c, a', b', c' sunt numere cunoscute.

Pentru a rezolvà acest sistem observăm că prima ecuație (74), luată separat, admite o infinitate de soluții [**203**].

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_n, y_n;\ \ldots \tag{α}$$

A doua ecuație (74), luată separat, admite, în general, o *altă* infinitate de soluții

$$x'_1, y'_1;\ x'_2, y'_2;\ \ldots;\ x'_n, y'_n;\ \ldots \tag{β}$$

Dacă există un sistem de valori x, y, care să figureze și în șirul (α) și în șirul (β), aceste valori satisfac la *ambele* ecuații (74). Numai aceste valori sunt *soluțiile sistemului* (74).

Pentru găsirea acestor soluții *comune*, reducem rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute la rezolvarea unei ecuații cu o singură necunoscută. Această ultimă ecuație, împreună cu una dintre ecuațiile date, trebue să formeze un sistem de ecuații *echivalent* cu sistemul dat.

Când am obținut această ecuație cu o singură necunoscută, zicem că *am eliminat pe cealaltă necunoscută* între ecuațiile date.

Astfel să presupunem că, eliminând pe x între ecuațiile (74), am obținut ecuația

$$my = n, \tag{75}$$

care împreună cu

$$ax + by = c \tag{76}$$

formează un sistem echivalent cu (74). Ecuația (75) ne dă o singură rădăcină $y = \frac{n}{m}$; înlocuind această valoare a lui y în ecuația (76), obținem ecuația de gradul întâi, cu o singură necunoscută,

$$ax + b\frac{n}{m} = c, \tag{77}$$

care, rezolvată în raport cu x, ne dă o singură valoare pentru x.

Prin urmare *un sistem de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute admite*, în general, *un singur sistem de soluții.*

207. Eliminarea prin comparare. Eliminarea necunoscutei x între ecuațiile

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \tag{74}$$

se poate face astfel: Considerând pe y cunoscut, fiecare din aceste ecuații ne dă câte o formulă pentru calcularea valorii lui x

$$x = \frac{c - by}{a} \tag{78}$$

și

$$x = \frac{c' - b'y}{a'}. \tag{79}$$

In general, pentru o *aceeaș* valoare a lui y, valorile lui x date de aceste formule sunt *diferite*. Pentru ca valorile lui x să fie și ele *egale*, trebue să avem

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}. \tag{80}$$

Ajungem astfel la o ecuație *cu o singură necunoscută.*

Fiindcă am *comparat* valorile lui x date de ecuațiile (74) și le-am egalat în ecuația (80), zicem, în acest caz, că *am eliminat necunoscuta x prin comparare.*

OBSERVARE. Sistemul (74) e evident echivalent cu sistemul (78), (79); iar acest sistem e echivalent cu sistemul format din ecuația (80) și una oricare dintre ecuațiile (78) sau (79) [**204**].

In adevăr dacă valorile x_0, y_0 sarisfac la ecuațiile (78), (79), y_0 satisface la ecuația (80) și reciproc, dacă x_0, y_0 satisfac la ecuațiile (78) și (80)

din $x_0 = \frac{c - by_0}{a}$ și $\frac{c - by_0}{a} = \frac{c' - b'y_0}{a'}$ rezultă $x_0 = \frac{c' - b'y_0}{a'}$

adică numerele x_0, y_0 sunt soluții și ale sistemului (78), (79).

Dacă y_0 este rădăcina ecuației (80) și dacă x_0 e valoarea lui x dată de una din formulele (78) sau (79), numerele x_0, y_0 sunt *soluțiile sistemului de ecuații* (74).

REGULĂ. Ca să eliminăm necunoscuta x prin comparare:

1°. *rezolvăm fiecare ecuație în raport cu* x, presupunând că y ar fi cunoscut;

2°. *egalăm valorile lui* x *astfel obținute.*

Ca să eliminăm pe y între ecuațiile (74), rezolvăm fiecare ecuație în raport cu y și egalăm valorile lui y astfel obținute.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 11 \\ 3x + 4y &= 5. \end{aligned} \tag{81}$$

Rezolvând fiecare ecuație în raport cu x și egalând valorile lui x, obținem ecuația cu o singură necunoscută

$$\frac{5y+11}{2} = \frac{-4y+5}{3}, \tag{82}$$

care rezolvată în raport cu y ne dă $y = -1$. Valoarea lui x e valoarea comună a rapoartelor (82) pentru $y = -1$. Găsim $x = -3$.

208. Eliminarea prin substituție. Reluând sistemul

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned} \tag{74}$$

dacă scoatem valoarea lui x din ecuația întâia

$$x = \frac{c-by}{a} \tag{83}$$

și o punem în locul lui x în ecuația a doua, obținem o ecuație *cu o singură necunoscută*

$$a'\frac{c-by}{a} + b'y = c'. \tag{84}$$

Fiindcă, pentru a obține ecuația (84), am *substituit*, în a doua ecuație (74), pe x prin valoarea lui dată de prima ecuație, zicem, că am *eliminat* necunoscuta x *prin substituție.*

OBSERVARE. Sistemul (74) e echivalent cu sistemul (83), (84).

În adevăr, dacă x_0, y_0 sunt soluțiile comune ale ecuațiilor (74), x_0, y_0 satisfac și la ecuația (83) și fiindcă avem

$$a'x_0 + b'y_0 = c' \quad \text{cu} \quad x_0 = \frac{c - by_0}{a},$$

rezultă că y_0 satisface la ecuația (84).

Reciproc, dacă x_0, y_0 satisfac la ecuațiile (83) și (84), avem

$$x_0 = \frac{c - by_0}{a} \quad \text{și} \quad a' \frac{c - by_0}{a} + b'y_0 = c'$$

sau $ax_0 = c - by_0$ și $a'x_0 + b'y_0 = c'$, adică x_0, y_0 satisfac și la sistemul (74).

Dacă y_0 este rădăcina ecuației (84) și dacă x_0 e valoarea lui x dată de formula (83) pentru $y = y_0$, numerele x_0, y_0 sunt *soluțiile sistemului* (74).

REGULĂ. Ca să eliminăm necunoscuta x prin substituție:

1°. *scoatem valoarea lui x din una din ecuații*, presupunând pe y cunoscut; obținem astfel pentru x o expresie, care conține necunoscuta y.

2°. *punem expresia găsită în locul lui x în cealaltă ecuație.*

Ca să eliminăm pe y între ecuațiile (74), scoatem valoarea lui y din una din ecuații și o punem în locul lui y în cealaltă ecuație.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 11 \\ 3x + 4y &= 5. \end{aligned} \tag{85}$$

Rezolvând prima ecuație în raport cu x, obținem

$$x = \frac{11 + 5y}{2} \tag{86}$$

și punând această expresie în locul lui x în ecuația a doua, obținem ecuația cu o singură necunoscută

$$3\frac{11 + 5y}{2} + 4y = 5 \quad \text{sau} \quad 33 + 15y + 8y = 10 \quad \text{sau} \quad 23y = -23, \tag{87}$$

care ne dă $y = -1$. Înlocuind în (86) pe y cu -1, găsim $x = -3$.

209. Eliminarea prin reducere. Reluând sistemul

$$\begin{array}{l|c|c} ax + by = c & b' & -a' \\ a'x + b'y = c' & -b & a \end{array} \tag{74}$$

observăm că necunoscuta y se mai poate elimină și în felul următor:

1°. Dacă avem $b = -b'$ (sau $b = b'$), termenii cu y dispar, când *adunăm* (sau *scădem*) ecuațiile date membru cu membru.

2°. Dacă b e *diferit* de b' în valoare absolută, putem aduce sistemul (74) la forma 1° înmulțind prima ecuație cu b' și a doua cu $-b$; obținem astfel un sistem *echivalent* cu cel dat, dar în care coeficienții lui y sunt *egali* și *cu semne contrarii*:

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ -ba'x - bb'y &= -bc'. \end{aligned}$$

Adunând aceste ecuații membru cu membru, termenii în y *dispar* și rămâne o ecuație cu o singură necunoscută

$$(88) \qquad (ab'-ba')x = cb'-bc',$$

care, pentru $ab'-ba' \neq 0$, ne dă rădăcina

$$(89) \qquad x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Valoarea necunoscutei y se poate obține pe aceeaș cale, făcând ca termenii cu x să aibă coeficienții *egali* și *cu semne contrarii*. Pentru aceasta înmulțim prima ecuație cu $-a'$ și a doua cu a. Adunând ecuațiile obținute, membru cu membru, dispar termenii în x și obținem ecuația

$$(90) \qquad (ab'-ba')y = ac'-ca',$$

care, pentru $ab'-ba' \neq 0$, ne dă rădăcina

$$(91) \qquad y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Formulele (89) și (91) ne dau *soluțiile sistemului* (74).

In acest caz zicem că am întrebuințat *eliminarea prin reducere*.

REGULĂ. Ca să eliminăm necunoscuta y prin reducere:

1°. *Dacă coeficienții lui* y, în ambele ecuații, *sunt egali și cu semne contrarii, adunăm ecuațiile membru cu membru.*

2°. *Dacă coeficienții lui* y *sunt egali și cu aceleași semne, scădem ecuațiile membru cu membru.*

3°. *Dacă coeficienții lui* y *sunt diferiți, înmulțim ambii membri ai ecuației întâia cu coeficientul lui* y *din ecuația a doua și ambii membri ai ecuației a doua cu coeficientul lui* y, *cu semnul schimbat, din ecuația întâia. Adunăm apoi ecuațiile membru cu membru* (1).

EXEMPLE. 1°.
$$x+y=2$$
$$x-y=12.$$

Adunând ecuațiile obținem $2x=14$ și $x=7$. Scăzând ecuația a doua din întâia obținem $2y=-10$ și $y=-5$. Soluțiile sistemului sunt $x=7$, $y=-5$.

Verificare: $7+(-5)=7-5=2$; $7-(-5)=7+5=12$.

2°. Să se rezolve sistemul
$$2x-5y=11$$
$$3x+4y=5.$$

---

(1) Operația aceasta e analoagă cu *aducerea a două fracții la același numitor* [82]. Dacă M e un *multiplu comun* al numerelor b, b' și dacă $M:b=b_1$ și $M:b'=b_1'$, înmulțind ecuația întâia cu b_1 și ecuația a doua cu $-b_1'$ coeficienții lui y devin M și $-M$.

M poate fi cel mai mic multiplu comun al numerelor b, b'.

Ca să eliminăm pe y, înmulțim prima ecuație cu 4, a doua cu 5 și *adunând* obținem

$$\begin{array}{l|l} 2x-5y=11 & 4 \\ 3x+4y=5 & 5 \\ \hline 23x \quad =69 & \text{de unde } x=3. \end{array}$$

Ca să eliminăm pe x, înmulțim prima ecuație cu 3, a doua cu -2 și *adunând* obținem

$$\begin{array}{l|l} 2x-5y=11 & 3 \\ 3x+4y=5 & -2 \\ \hline -23y=23 & \text{de unde } y=-1. \end{array}$$

Soluțiile sistemului sunt $x=3$, $y=-1$.

Verificare: $2.3-5.(-1)=6+5=11$; $3.3+4.(-1)=9-4=5$.

210. Discuție. 1°. Dacă diferența $ab'-ba'$ e *diferită de zero*, sistemul

(74)
$$\begin{aligned} &(I) \quad ax+by=c \\ &(II) \quad a'x+b'y=c' \end{aligned}$$

admite un singur sistem de soluții, finite și bine determinate, date prin formulele

(92)
$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

2°. Dacă $ab'-ba'=0$ dar unul dintre membrii ai doilea ai ecuațiilor (88) sau (90) e *diferit de zero*, ecuațiile (74) *nu admit soluții comune* sau sunt *incompatibile*. Sistemul (74) e *imposibil*.

De exemplu dacă $cb'-bc'\neq 0$, ecuația (88) [**209**] e *imposibilă*. Condițiile $ab'=ba'$ dar $bc'\neq cb'$ sau $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ne arată că, în acest caz, *coeficienții necunoscutelor sunt proporționali*.

EXEMPLU. Sistemul
$$\begin{aligned} &6x+3y=1 \\ &2x+y=4, \end{aligned}$$

în care numai coeficienții lui x și y sunt proporționali, e *imposibil*. In adevăr, înmulțind a doua ecuație cu 3, obținem

$$\begin{aligned} &6x+3y=1 \\ &6x+3y=12 \end{aligned}$$

și e evident că ambele ecuații nu pot fi verificate de un *același* sistem de soluții.

3°. Dacă $ab'-ba'=0$ și $cb'-bc'=0$, avem

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \quad \text{și} \quad \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \quad \text{deci} \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

adică *toți* coeficienții dela ecuația (74, I) sunt *proporționali* cu coeficienții dela ecuația (74, II).

Avem dar și $ac' - ca' = 0$ și soluțiile sistemului (74) sau (88) și (90) sunt *nedeterminate*. Dacă unul din coeficienții lui y, de exemplu b e *diferit de zero*, valoarea *unei* necunoscute (x) poate fi luată în mod *arbitrar*, iar valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute (y) e bine-determinată prin ecuația $ax + by = c$. In acest caz zicem că sistemul e *nedeterminat de ordinul* 1.

4°. Dacă *toți* coeficienții necunoscutelor a, b, a', b' sunt *nuli*, sistemul (74) se reduce la

$$0 = c \quad \text{și} \quad 0 = c'.$$

Dacă unul din coeficienții c sau c' *e diferit de zero, sistemul e imposibil.*

Dacă $c = c' = 0$, sistemul e satisfăcut de *orice numere* puse în locul necunoscutelor x și y. In acest caz zicem că sistemul e *nedeterminat de ordinul* 2 (1).

211. Regula lui Cramer. Diferența $ab' - ba'$ are un rol important în determinarea rădăcinilor sistemului (74). Ea e formată *numai cu coeficienții necunoscutelor* din ambele ecuații și se mai reprezintă în mod convențional prin notația

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

coeficienții a, b, a', b' fiind așezați în acest tablou în aceeași ordine ca și în sistemul (74).

Expresia D se numește un *determinant* de gradul *al doilea*; numerele a, b, a', b' sunt *elementele* determinantului. Acest determinant are *două linii* ($ab, a'b'$) și (*două coloane* aa', bb'). *Valoarea* lui, prin definiție, e dată de egalitatea:

(LXIV) $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \quad (\textit{determinant gr. 2}).$$

Soluțiile sistemului (74) sunt date sub formă fracționară prin formulele (92). Amândouă valorile (și x și y) au ca numitor *determinantul D*. Numărătorii din formulele (92) sunt și ei niște *determinanți* și-i vom însemnă cu D_x și D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc', \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'.$$

Numărătorul D_x din formula (92), care dă pe x, se obține din determinantul D dela numitor, dacă înlocuim elementele a, a' (*coeficienții lui* x) prin c, c' (*cantitățile* corespunzătoare *din membrul al doilea*).

(1) C. Bourlet, *Leçons d'algèbre élémentaire*, Paris, 1896, pag. 184.

In mod analog numărătorul D_y din formula (92), care dă pe y, se obține, dacă înlocuim în D pe b, b' (*coeficienții lui* y) prin c, c' (*cantitățile* corespunzătoare *din membrul al doilea*).

REGULĂ. *Soluțiile sistemului*

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c',$$

dacă determinantul $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ e *diferit de zero, sunt date prin formulele*

$$(\text{LXV}) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D},$$

în care fiecare fracție are ca numitor determinantul coeficienților necunoscutelor, iar ca numărător determinantul ce se obține din numitor, când înlocuim coeficienții necunoscutei, pe care o căutăm, din ecuațiile date, prin termenii corespunzători din membrii ai doilea.

Aceasta e regula lui Cramer.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(93) \qquad 2x + y = 5$$
$$3x - 2y = -3.$$

Fiindcă determinantul coeficienților necunoscutelor este

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-2) - 3.1 = -4 - 3 = -7 \neq 0,$$

sistemul (93) admite soluții *binedeterminate* și cum

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 15 = -21,$$

soluțiile *unice*, date prin *regula lui Cramer*, sunt

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

212. Două ecuații cu trei necunoscute. Când ni se dă să rezolvăm un sistem de *două ecuații* cu *trei necunoscute*

$$(94) \qquad ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$

dacă dunul dintre determinanții formați cu coeficienții a *două* necunoscute e diferit de *zero*, sistemul e *nedeterminat* de ordin 1.

In adevăr, dacă $ab' - ba' \neq 0$, luând pentru z o valoare *arbitrară* z_0, reducem sistemul la *două* ecuații cu *două* necunoscute x și y. Rezol-

vând acest sistem, obținem pentru x și y două valori x_0, y_0. Valorile x_0, y_0, z_0, astfel determinate, sunt *soluțiile sistemului* (94).

Cum aceste operații se pot repetă plecând dela *orice valoare a lui* z, vedem că sistemul (94) *admite o infinitate de soluții.*

EXEMPLU. Ca să rezolvăm sistemul

$$(95)\qquad \begin{aligned} 2x-5y+3z &= 7\\ 4x+8y-z &= 1, \end{aligned}$$

luăm pentru z o valoare *arbitrară*, de exemplu $z=2$ și sistemul se reduce la

$$(96)\qquad \begin{aligned} 2x-5y+6 &= 7\\ 4x+8y-2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 2x-5y &= 1\\ 4x+8y &= 3, \end{aligned}$$

care admite soluțiile $x=\frac{23}{36}$, $y=\frac{1}{18}$. Un sistem de soluții al sistemului (95) este dar $x=\frac{23}{36}$, $y=\frac{1}{18}$, $z=2$.

Luând o altă valoare pentru z, găsim un alt sistem de soluții pentru ecuațiile (95), și așă mai departe.

213. Trei ecuații cu trei necunoscute. Ca să rezolvăm un sistem de *trei ecuații* cu *trei necunoscute*, de gradul *întâi*, îl scriem sub formă *normală*:

$$(97)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) && ax+by+cz=d\\ &(\mathrm{II}) && a'x+b'y+c'z=d'\\ &(\mathrm{III}) && a''x+b''y+c''z=d'' \end{aligned}$$

și, *eliminând una sau două necunoscute*, căutăm să reducem problema la rezolvarea unui sistem de *două ecuații cu două necunoscute* sau a *unei ecuații cu o singură necunoscută.*

1°. Dacă $ab'-ba'\neq 0$, considerând în ecuațiile (97, I și II) pe z ca o cantitate *cunoscută*, scriem aceste două ecuații sub forma

$$(98)\qquad \begin{aligned} ax+by &= d-cz\\ a'x+b'y &= d'-c'z \end{aligned}$$

și rezolvându-le după *regula lui Cramer* obținem pentru x și y soluțiile

$$(99)\qquad x=\frac{(d-cz).b'-b.(d'-c'z)}{ab'-ba'},$$

$$(100)\qquad y=\frac{a.(d'-c'z)-(d-cz).a'}{ab'-ba'}.$$

Valoarea luată pentru z și valorile corespunzătoare ale necunoscutelor x și y date de formulele (99) și (100), trebue să satisfacă și la ecuația (97, III), adică trebue să avem

$$(101)\qquad a''\frac{(d-cz)b'-b(d'-c'z)}{ab'-ba'}+b''\frac{a(d'-c'z)-(d-cz)a'}{ab'-ba'}+c''z=d''.$$

Obținem astfel o ecuație cu o singură necunoscută (z), care pusă sub formă normală, se reduce la

$$(102)\qquad (ab'c''+bc'a''+ca'b''-a''b'c-b''c'a-c''a'b)z = ab'd''+bd'a''+da'b''-a''b'd-b''d'a-d''a'b.$$

Sistemul (97) e *echivalent* cu sistemul format din ecuațiile (99) (100) și (102). Dacă ecuația (102) se poate rezolvà și dacă z_0 este o soluție a ei, formulele (99) și (100), pentru $z=z_0$, ne dau câte o valoare x_0 și y_0 pentru x și y. Numerele x_0, y_0, z_0, astfel obținute, sunt soluțiile sistemului (97).

2°. Sistemul (97) se mai poate rezolvà și în modul următor:

Dacă $a \neq 0$, ecuația (97, I) ne dă

$$(103)\qquad x=\frac{d-by-cz}{a}$$

și înlocuind, în ecuațiile (97, II și III), pe x prin această expresie, obținem un sistem de *două ecuații cu două necunoscute* (y și z)

$$(104)\qquad \begin{aligned} a'\frac{d-by-cz}{a}+b'y+c'z&=d'\\ a''\frac{d-by-cz}{a}+b''y+c''z&=d'', \end{aligned}$$

care, pus sub formă întreagă și normală, se scrie

$$(105)\qquad \begin{aligned} (ab'-ba')y+(ac'-ca')z&=ad'-da'\\ (ab''-ba'')y+(ac''-ca'')z&=ad''-da''. \end{aligned}$$

Dacă sistemul (105) se poate rezolvà și dacă y_0 și z_0 sunt soluțiile lui, formula (103), pentru $y=y_0$ și $z=z_0$, ne dă o valoare x_0 pentru x. Numerele x_0, y_0, z_0, astfel obținute, sunt soluțiile sistemului (97).

214. Determinant. Să însemnăm cu D coeficientul lui z din ecuația (102):

$$(106)\qquad D=ab'c''+bc'a''+ca'b''-a''b'c-b''c'a-c''a'b.$$

Această expresie, care joacă un rol analog cu expresia D dela paragraful **211**, este un *determinant* de gradul *al treilea*. El e format *numai cu coeficienții necunoscutelor* din ecuațiile (97) și se reprezintă în mod convențional prin tabloul

$$(107)\qquad D=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad (\textit{determinant} \text{ gr. } 3)$$

în care coeficienții necunoscutelor sunt scriși în ordinea, în care se găsesc în ecuațiile (97).

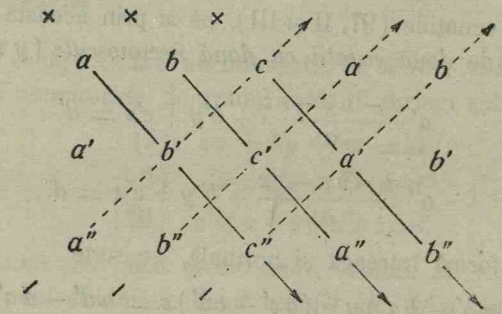
Acest determinant are 9 *elemente* așezate în 3 *linii* (abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$) și 3 *coloane* ($aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$). *Valoarea* lui, prin definiție, e dată de egalitatea:

$$(\text{LXVI}) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b.$$

Suma algebrică din membrul al doilea se obține ușor, din tabloul D, prin regula lui Sarrus:

REGULĂ. *Ca să calculăm valoarea unui determinant de gradul al treilea, scriem determinantul sub forma* (107) *și la dreapta lui repetăm încăodată coloanele întâia și a doua*; formăm astfel tabloul

(108)



1°. *Luăm cu semnul* + *produsele elementelor din prima diagonală* ($ab'c''$) *și din celelalte două linii paralele cu ea* ($bc'a''$, $ca'b''$).

2°. *Luăm cu semnul* — *produsele elementelor din diagonala a doua* ($a''b'c$) *și din celelalte două linii paralele cu ea* ($b''c'a$, $c''a'b$).

3°. *Facem suma algebrică a tuturor produselor astfel obținute.*

EXEMPLU. Ca să calculăm valoarea determinantului *de gradul al treilea*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

formăm tabloul

4	3	2	4	3
3	2	−4	3	2
2	1	3	2	1

și aplicând regula lui Sarrus obținem

$$\Delta = 4.2.3 + 3.(-4).2 + 2.3.1 - 2.2.2 - 1.(-4).4 - 3.3.3 = -13.$$

Determinant minor. Dacă suprimăm *o linie* și *o coloană* din determinantul (107), obținem un determinant de gradul al doilea, [211], care se numește *determinantul minor* corespunzător elementului comun liniei și coloanei suprimate.

EXEMPLU. Dacă suprimăm *linia a treia* și *coloana a treia* din determinantul D, obținem determinantul $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, care e *minorul* corespunzător elementului c''.

Determinant nul. Determinantul D e *nul*, dacă are *toate elementele dintr'o coloană* (sau *dintr'o linie*) *nule*.

In adevăr, dacă toate elementele unei coloane (de exemplu a, a', a'') sunt *nule* sau dacă toate elementele unei linii (de exemplu a', b', c') sunt *nule*, formula (LXVI) ne dă $D = 0$.

215. Regula lui Cramer. Am văzut că, eliminând necunoscutele x și y între ecuațiile (97) [**213**], obținem ecuația (102), care se mai poate scrie

$$D.z = D_z \tag{109}$$

dacă punem

$$D = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b$$
$$D_z = ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - a''b'd - b''d'a - d''a'b$$

sau

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}. \tag{110}$$

Determinantul D_z se obține din determinantul D, dacă înlocuim coeficienții lui z din ecuațiile (97) (c, c', c'') prin cantitățile corespunzătoare din membrii ai doilea ($d, d' d''$).

Dacă eliminăm necunoscutele y și z sau x și z între ecuațiile (97), obținem în mod analog ecuațiile

$$D.x = D_x \quad \text{și} \quad D.y = D_y, \tag{111}$$

în care D_x și D_y sunt *determinanți* analogi cu D_z,

$$D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}. \tag{112}$$

De aci rezultă, și în acest caz, regula lui Cramer [**211**]:

REGULĂ. *Soluțiile sistemului*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned} \tag{97}$$

— *dacă determinantul D, format cu toți coeficienții necunoscutelor, e diferit de zero — sunt date prin formulele:*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{LXVII}$$

în care, fiecare fracție are ca numitor determinantul D, iar ca numărător determinantul ce se obține din D, când înlocuim coeficienții necunoscutei, p e c a r e o c ă u t ă m, *prin termenii cunoscuți corespunzători din ecuațiile date.*

OBSERVARE. Pentru aplicarea acestor formule, termenul cunoscut dela fiecare ecuație trebue să fie scris *în membrul al doilea.*

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 4x+3y+2z &= 11 \\ 3x+2y+4z &= -17 \\ 2x+\ y+3z &= 26{,}5. \end{aligned}$$

găsim

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0; \qquad D_x=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 2 \\ -17 & 2 & -4 \\ 26{,}5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -195,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 11 & 2 \\ 3 & -17 & -4 \\ 2 & 26{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 260, \qquad D_z=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & -17 \\ 2 & 1 & 26{,}5 \end{vmatrix} = -71{,}5$$

și soluțiile sistemului dat sunt

$$x=\frac{-195}{-13}=15, \qquad y=\frac{260}{-13}=-20, \qquad z=\frac{-71{,}5}{-13}=5{,}5.$$

216. Discuție. 1°. Dacă determinantul D (110) e *diferit de zero*, ecuațiile (97) admit *un sistem de soluții și unul singur* dat prin *formulele lui Cramer* (LXVII).

2°. Dacă $D=0$, dar *dacă unul dintre determinanții lui minori de gradul al doilea e diferit de zero*, sistemul e *imposibil* sau *nedeterminat*. De exemplu dacă $ab'-ba' \neq 0$, eliminând necunoscutele x și y prin metoda 1° [**213**], obținem pentru z ecuația

$$D.z = D_z. \tag{109}$$

Dacă $D_z \neq 0$, ecuația (109) e *imposibilă* și sistemul (97) e *imposibil*. Dacă $D_z = 0$, valoarea lui z e *nedeterminată* și poate fi luată în mod *arbitrar*, iar valorile corespunzătoare ale celorlalte două necunoscute (x și y) sunt determinate prin formulele (99) și (100). Sistemul (97) e *nedeterminat de ordinul* 1.

3°. Dacă D e *nul* și *toți* determinanții lui minori *de gradul al doilea* sunt *nuli*, dar dacă *un element din D e diferit de zero*, sistemul poate iarăș fi *imposibil* sau *nedeterminat*. De exemplu, dacă $a \neq 0$, întrebuințând metoda 2° [**213**], obținem sistemul (105).

Dacă unul din determinanții $ad' - da'$ sau $ad'' - da''$ e *diferit de zero*, sistemul (105) e *imposibil*. Deci și sistemul (97) e *imposibil*.

Dacă $ad' - da' = ad'' - da'' = 0$, sistemul (105) e *nedeterminat*. Valorile a *două* necunoscute (y și z) pot fi luate în mod *arbitrar*, iar valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute (x) e determinată prin formula (103). Sistemul (97) e *nedeterminat de ordinul* 2.

4°. Dacă *toți coeficienții necunoscutelor sunt nuli*, ecuațiile (97) se reduc la

$$0.x+0.y+0.z = d, \quad 0.x+0.y+0.z = d', \quad 0.x+0.y+0.z = d''.$$

Dacă una dintre cantitățile d, d', d'' e *diferită de zero*, sistemul e *imposibil*. Dacă $d = d' = d'' = 0$, valorile tuturor necunoscutelor pot fi luate *arbitrar*. Sistemul e *nedeterminat de ordinul* 3; nedeterminarea e *completă*.

217. Trei ecuații cu două necunoscute. Când avem de rezolvat un sistem de ecuații, *dacă ecuațiile admit soluții comune*, zicem că sunt *compatibile* și sistemul e *posibil*; în cazul contrariu ecuațiile se zic *incompatibile* și sistemul e *imposibil*.

Am văzut, pentru sistemele formate din ecuații cu două sau trei necunoscute, că, dacă *numărul ecuațiilor e egal cu numărul necunoscutelor* [**206, 213**], rezolvarea sistemului e, în general, *posibilă* și ecuațiile admit un sistem *unic* de soluții comune.

Dacă avem *mai puține ecuații decât necunoscute* [**204, 212**], sistemul e, în general, *nedeterminat*.

Când avem *mai multe ecuații decât necunoscute*, sistemul e, în general, *imposibil* și, *pentru ca toate ecuațiile să fie compatibile, trebue ca anumite condiții să fie îndeplinite*.

Să considerăm sistemul de *trei* ecuații de gradul întâi cu *două* necunoscute:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad ax + by = c \\ &(\mathrm{II}) \quad a'x + b'y = c' \\ &(\mathrm{III}) \quad a''x + b''y = c''. \end{aligned} \tag{113}$$

și să presupunem că *unul* dintre determinanții de gradul al doilea

$$ab' - ba', \quad a'b'' - b'a'', \quad a''b - b''a \tag{114}$$

formați cu *coeficienții necunoscutelor* din *două* ecuații, e *diferit de zero*.

Dacă

$$\delta = ab' - ba' \neq 0, \tag{115}$$

ecuațiile (I) și (II) admit soluțiile *unice*

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \tag{116}$$

date prin *regula lui Cramer*. Pentru ca aceste soluţii să satisfacă şi ecuaţia (III), *trebue să avem*:

$$a'' \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} + b'' \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = c'',$$

egalitate, care — pusă sub formă întreagă — se poate scrie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0. \tag{117}$$

Prin urmare: *Pentru ca trei ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute să poată fi compatibile, trebue ca determinantul format cu toţi coeficienţii ecuaţiilor să fie* nul.

Discuţie. 1°. Dacă determinantul Δ (117) e *diferit de zero*, sistemul (113) e *imposibil*.

2°. Dacă determinantul Δ e *nul* şi dacă *unul dintre determinanţii* (114), formaţi cu coeficienţii necunoscutelor din două ecuaţii, *e diferit de zero* [de exemplu dacă $\delta \neq 0$ (115)], ecuaţiile sunt *compatibile* şi admit *un singur sistem de soluţii*, care se obţine rezolvând cele două ecuaţii corespunzătoare determinantului δ.

3°. Dacă *toţi* determinanţii (114) sunt *nuli*, sistemul poate fi *imposibil* sau *nedeterminat*.

Astfel, dacă toţi determinanţii (114) sunt *nuli*, dar a e *diferit de zero*, rezolvând ecuaţia (113, I) în raport cu x şi punând această valoare în locul lui x în ecuaţiile (113, II şi III), vedem că sistemul e *posibil* numai dacă

$$ac' - ca' = 0 \quad \text{şi} \quad ac'' - ca'' = 0.$$

In acest caz valoarea lui y e *arbitrară*, iar valoarea corespunzătoare a lui x e determinată de ecuaţia (I).

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} &(I) \quad 2x - 3y = 8 \\ &(II) \quad x + y = -1 \\ &(III) \quad 2x + y = 0. \end{aligned} \tag{118}$$

Ecuaţiile (II) şi (III) sunt cele mai simple şi fiindcă avem

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

sistemul dat e *posibil* şi admite un singur sistem de soluţii date de ecuaţiile (II) şi (III). Găsim astfel: $x = 1$, $y = -2$.

OBSERVARE. Pentru ca un sistem format din mai multe ecuaţii cu două necunoscute să fie *posibil*, trebue şi e deajuns ca *două* dintre ecuaţii, împreună cu *fiecare* dintre celelalte, să fie compatibile.

218. Ecuații liniare și omogene. O ecuație *de gradul întâi* se mai zice și *liniară*. O ecuație e *liniară* și *omogenă*, când are *numai termeni de gradul întâi*.

EXEMPLU. Ecuația $2x+3y-5z=0$ e *liniară* și *omogenă*; ecuația $7x-8y=5$ e liniară dar *neomogenă*; ecuația $2x^3+x-4=0$ e *neliniară*.

Două ecuații cu două necunoscute. Sistemul

$$(119)\qquad \begin{aligned} &(I)\quad ax+by=0\\ &(II)\quad a'x+b'y=0 \end{aligned}$$

e un sistem de două ecuații liniare și omogene cu două necunoscute. Pentru rezolvarea lui putem aplică regulele date pentru sistemul (74) [**206—211**], observând că, în acest caz, avem $c=c'=0$.

După discuția făcută la paragraful **210**, rezultă că:

1°. *Dacă determinantul*

$$(120)\qquad D=\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$$

e diferit de zero, ecuațiile (119) *admit numai soluțiile* $x=0$, $y=0$, date prin *regula lui Cramer* [**211**].

In adevăr, pentru $c=c'=0$, determinanții

$$D_x=cb'-bc',\qquad D_y=ac'-ca'$$

sunt *nuli* și formulele (LXV) ne dau soluțiile *unice*: $x=0$, $y=0$.

2°. *Dacă determinantul D e nul,* în toate cazurile posibile, *sistemul* (119) *e nedeterminat.*

Astfel dacă $a\neq 0$, y e *arbitrar*, iar x e determinat de ecuația (I). Dacă *toți* coeficienții necunoscutelor sunt *nuli*, amândouă valorile x și y sunt *arbitrare*; nedeterminarea e *completă*.

OBSERVARE. In cazul 2° și numai în acest caz, sistemul (119) admite și soluții *care nu sunt toate nule.*

Trei ecuații cu trei necunoscute. Sistemul

$$(121)\qquad \begin{aligned} &(I)\quad ax+by+cz=0\\ &(II)\quad a'x+b'y+c'z=0\\ &(III)\quad a''x+b''y+c''z=0 \end{aligned}$$

e un sistem de trei ecuații liniare și omogene cu trei necunoscute. Pentru rezolvarea lui aplicăm regulele date pentru sistemul (97) [**213**], observând că, în acest caz, avem $d=d'=d''=0$.

După discuția făcută la paragraful **216**, rezultă că:

1°. *Dacă determinantul*

$$(122)\qquad D=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

e diferit de zero, ecuațiile (121) *admit sistemul* unic *de soluții comune* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, dat prin regula lui Cramer [**215**].

In adevăr, pentru $d = d' = d'' = 0$, toți determinanții D_x, D_y, D_z sunt *nuli*, ca având o coloană formată din elemente *nule* [**214**].

2°. *Dacă determinantul* D *e nul*, în toate cazurile posibile [**216**, 2°, 3° și 4°], *sistemul* (121) *e nedeterminat* (de ordinul 1, 2 sau 3).

OBSERVARE. In acest caz sistemul (121) admite și soluții, *care nu sunt toate nule.*

EXEMPLU. Să să rezolve sistemul liniar și omogen:

$$(123)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x - 3y + 2z = 0\\ &(\mathrm{II}) \quad 4x - 12y + 8z = 0\\ &(\mathrm{III}) \quad 3x - 9y + 6z = 0. \end{aligned}$$

Determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -12 & 8 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix}$$

precum și *toți determinanții lui minori* de gradul al doilea [**214**] fiind *nuli*, sistemul (123) e *nedeterminat* de ordinul 2. Luând valorile a două necunoscute (y și z) *arbitrare*, valoarea corespunzătoare a necunoscutei a treia (x) e dată de una dintre ecuații, de exemplu de ecuația (I): $x = 3y - 2z$.

Astfel pentru $y = 7$, $z = -5$ găsim $x = 26$; pentru $y = -3$, $z = 8$ găsim $x = -25$ și așà mai departe.

Din amândouă observările precedente, rezultă următoarea

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de două ecuații liniare și omogene cu două necunoscute* sau *de trei ecuații liniare și omogene cu trei necunoscute* să admită soluții, *care să nu fie toate nule*, este ca *determinantul format de toți coeficienții necunoscutelor să fie* nul.

219. Permutări circulare. Dacă presupunem că n litere $a, b, c, \ldots, k, l$ sunt scrise pe un cerc (*fig.* 34), le putem citi, unele după altele, începând dela orice literă vrem. Obținem astfel n grupe (G) diferite:

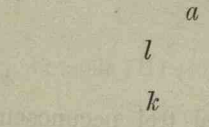


Fig. 34.

$$(G)\qquad \begin{aligned} &abc \ldots kl,\\ &bc \ldots kla,\\ &c \ldots klab,\\ &\ldots\ldots\\ &labc \ldots k. \end{aligned}$$

Trecem dela o grupă (G) la grupa următoare înlocuind fiecare literă prin litera care urmează pe cerc. In acest caz zicem că facem *permutări circulare.*

OBSERVARE. La permutările circulare ale literelor $abc \ldots kl$, litera care vine după l e a.

Tot astfel dacă din două șiruri de litere

$$a, b, c, \ldots, k, l \quad \text{și} \quad a', b', c', \ldots, k', l'$$

formăm expresii ca

$$(124) \qquad ac'+b-l',\ bd'+c-a',\ ce'+d-b',\ \ldots,$$

pe care le obținem înlocuind fiecare literă dintr'un șir prin litera *următoare* din acest șir (după l și l' urmând respectiv a și a') zicem că deducem toate expresiile (124) *din cea dintâi* prin *permutări circulare*.

220. Două ecuații omogene cu trei necunoscute. Dacă avem un sistem de două ecuații *liniare* și *omogene* cu trei necunoscute

$$(125) \qquad \begin{aligned} ax+by+cz&=0\\ a'x+b'y+c'z&=0, \end{aligned}$$

și *dacă determinantul* $ab'-ba'$ *e diferit de zero*, scriind ecuațiile sub forma

$$a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}=-c$$

$$a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}=-c'$$

și aplicând regula lui Cramer [**211**], obținem pentru rapoartele $\frac{x}{z}$ și $\frac{y}{z}$ valorile *unice*

$$\frac{x}{z}=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

De aci rezultă că

$$(126) \qquad \frac{x}{bc'-cb'}=\frac{y}{ca'-ac'}=\frac{z}{ab'-ba'}.$$

Prin urmare, în acest caz, sistemul (125) e *nedeterminat* și valorile necunoscutelor x, y, z sunt *proporționale* cu determinanții de gradul al doilea, pe care-i obținem din $ab'-ba'$ permutând *circular* coeficienții a, b, c și a', b', c'.

La fiecare necunoscută corespunde un determinant format cu coeficienții celorlalte două necunoscute din sistemul (125).

EXEMPLU. Sistemul

$$\begin{aligned} x-10y-5z&=0\\ 3x+12y-z&=0 \end{aligned}$$

admite o *infinitate* de soluții x, y, z *proporționale* cu determinanții

$$\begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}=70, \qquad \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-14, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=42.$$

Avem dar $\frac{x}{70}=\frac{y}{-14}=\frac{z}{4}=\lambda$ sau $x=70\lambda$, $y=-14\lambda$, $z=4\lambda$, unde valoarea lui λ e *arbitrară*.

221. Sistem de n ecuaţii cu n necunoscute. In general, *când ni se dă să rezolvăm un sistem* (E) *de* n *ecuaţii cu* n *necunoscute* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *eliminăm* $n-1$ *necunoscute între ecuaţiile date şi reducem problema la rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută.*

Astfel, întrebuinţând metoda eliminării prin substituţie [208], dacă una dintre ecuaţiile (E) se poate rezolvà în raport cu x_1, deducem

$$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{127}$$

şi, punând această expresie în locul lui x_1 *în toate celelalte* $n-1$ *ecuaţii*, obţinem un sistem (F) de $n-1$ ecuaţii cu $n-1$ necunoscute $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Sistemul (E) se înlocueşte prin *sistemul* (F) şi *formula* (127).

In acelaş fel eliminăm o a doua necunoscută x_2 între ecuaţiile (F) şi aşa mai departe, până când ajungem la o ecuaţie cu o singură necunoscută. Rezolvarea sistemului (E) se reduce la rolvarea *unei ecuaţii* (L) *cu o singură necunoscută* x_n şi la $n-1$ *formule*, analoage cu (127),

$$x_{n-1} = \chi(x_n), \ \ldots, \ x_2 = g(x_3, \ \ldots, \ x_n), \ x_1 = f(x_2, x_3, \ \ldots, \ x_n),$$

care, pentru fiecare rădăcină x_n a ecuaţiei (L), ne dau succesiv valorile corespunzătoare ale celorlalte necunoscute $x_{n-1}, \ \ldots, \ x_2, x_1$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(E)\quad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) && x+2y-z-3u+v=11\\ &(\mathrm{II}) && 6x+4z-u+2v=12\\ &(\mathrm{III}) && x-3y+z=-6\\ &(\mathrm{IV}) && y+2z-3u+5v=25\\ &(\mathrm{V}) && z+u+3v=14, \end{aligned}$$

format din 5 ecuaţii liniare cu 5 necunoscute x, y, z, u, v.

Necunoscuta x se găseşte numai în ecuaţiile (I), (II) şi (III). Ecuaţia (III), care e cea mai simplă, ne dă

$$x = 3y - z - 6 \tag{128}$$

şi înlocuind pe x, în toate *celelalte* ecuaţii, prin expresia $3y-z-6$, obţinem 4 ecuaţii cu 4 necunoscute

$$(F)\quad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 5y-2z-3u+v=17\\ &(\mathrm{II}) && 18y-2z-u+2v=48\\ &(\mathrm{IV}) && y+2z-3u+5v=25\\ &(\mathrm{V}) && z+u+3v=14, \end{aligned}$$

care împreună cu ecuaţia (128), formează un sistem *echivalent* cu (E).

În acelaș fel, eliminând necunoscutele y, z și v, găsim că

(129) $y = -2z + 3u - 5v + 25$ (din F, IV) ne dă (G) (I) $z - u + 2v = 9$; (II) $38z - 53u + 88v = 402$; (V) $z + u + 3v = 14$;

(130) $z = u - 2v + 9$ (din G, I) ne dă (H) (II) $-5u + 4v = 20$; (V) $2u + v = 5$

(131) $v = 5 - 2u$ (din H, V) ne dă (L) (II) $-13u = 0$.

Ultima ecuație are o singură rădăcină $u = 0$ și valorile corespunzătoare ale celorlalte necunoscute v, z, y și x sunt date, în mod succesiv, de formulele (131), (130), (129) și (128). Găsim astel, pentru ecuațiile (E), sistemul *unic* de soluții comune: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $u = 0$, $v = 5$.

222. Metode particulare. In unele cazuri soluțiile unui sistem de ecuații se pot obține mai ușor prin *metode particulare* impuse de *forma* sistemului. Dăm aci două exemple.

EXEMPLUL 1°. Să se rezolve sistemul

$$x + y + z = 15$$
$$y + z + u = 14$$
$$z + u + x = 9$$
$$u + x + y = 1.$$

Adunând ecuațiile, membru cu membru, obținem

$$3x + 3y + 3z + 3u = 39 \quad \text{sau} \quad x + y + z + u = 13.$$

Scăzând din această ecuație pe *fiecare dintre ecuațiile date*, deducem

$$\begin{array}{r} x+y+z+u = 13 \\ x+y+z \quad\; = 15 \\ \hline u = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x+y+z+u = 13 \\ \quad y+z+u = 14 \\ \hline x \quad\quad = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y+z+u = 13 \\ x \quad +z+u = 9 \\ \hline y \quad\quad = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x+y+z+u = 13 \\ x+y \quad\; +u = 1 \\ \hline z \quad\quad = 12. \end{array}$$

EXEMPLUL 2°. Să se rezolve sistemul

$$2x - 5y = 0, \quad 7y = 3z, \quad x + y + z = 1400.$$

Scriem primele două ecuații sub formă de *proporții*

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}, \quad \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$$

și împărțind prima ecuație cu 3 și a doua cu 2, deducem [84, 1 și 159]

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{6} = \frac{z}{14} = \frac{x+y+z}{15+6+14} = \frac{1400}{35} = 40.$$

Prin urmare: $x = 15 \times 40 = 600$, $y = 6 \times 40 = 240$, $z = 14 \times 40 = 560$.

223. Semnul binomului $ax+b$. Rădăcina ecuației $ax+b=0$ fiind $x=-\frac{b}{a}=x'$, putem scrie, pentru orice valoare a lui x,

$$ax+b \equiv a\left(x+\frac{b}{a}\right) \equiv a(x-x'),$$

De aci rezultă că:

1°. *Pentru* $x>x'$, diferența $x-x'$ fiind *pozitivă*, *valoarea binomului* $ax+b$ *are semnul lui* a.

2°. *Pentru* $x<x'$, diferența $x-x'$ fiind *negativă*, *valoarea binomului* $ax+b$ are semnul lui $-a$ (*contrar cu semnul lui* a).

EXEMPLU. Binomul $2-3x$ are rădăcina $x=\frac{2}{3}$. Pentru $x<\frac{2}{3}$ e *pozitiv*; pentru $x=\frac{2}{3}$ e *nul*; pentru $x>\frac{2}{3}$ e *negativ*. In adevăr, putem scrie

$$2-3x \equiv -3x+2 \equiv -3\left(x-\tfrac{2}{3}\right), \quad [a=-3,\ b=2].$$

224. Neegalități. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sau $f(x,y,z)$ și $g(x,y,z)$ sunt două expresii algebrice, o relație de forma

$$f>g \tag{132}$$

e o *neegalitate* algebrică. Ea are *doi membri* și una sau mai multe *necunoscute* x, y, z. Valorile, care, puse în locul necunoscutelor, satisfac neegalitatea (132) sunt *soluțiile* acestei neegalități.

Două neegalități sunt *echivalente*, când *toate* soluțiile neegalității întâi satisfac și neegalitatea a doua și reciproc.

Teoremele [**198**, **199**], prin care se obțin ecuații echivalente, se pot aplică și la *neegalități*, dar în acest caz trebue se determinăm și *sensul* neegalității obținute.

TEOREMA I. *Dacă adunăm la ambii membri ai unei neegalități*, sau *dacă scădem din ambii membri, o aceeaș cantitate finită, obținem o neegalitate de acelaș sens și echivalentă cu cea dată.*

In adevăr, pentru $h(x)$ *finit*, neegalitățile

$$f(x)>g(x) \quad \text{și} \quad f(x)\pm h(x)>g(x)\pm h(x),$$

sunt *echivalente*, deoarece amândouă se reduc la $f(x)-g(x)>0$ [**40**, 1].

COROLAR. Intr'o neegalitate *putem trece un termen dintr'un membru în celălalt, cu semnul schimbat.*

EXEMPLU. Din $5x^3-3x^2+8>7x^2+2$ putem deduce neegalitățile *echivalente*: $5x^3-3x^2-7x^2>2-8$ sau $5x^3-10x^2>-6$ sau $5x^3-10x^2+6>0$.

Gradul unei neegalități. Putem precizà gradul unei neegalități numai dupăce am adus-o la forma $f>0$ sau $f<0$. In acest caz, dacă f e un polinom întreg în x de grad n, zicem că *neegalitatea e de grad* n.

TEOREMA II. *Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei neegalități cu o aceeaș cantitate h, finită și diferită de zero, obținem o neegalitate echivalentă cu cea dată și de același sens* pentru h *pozitiv* (*de sens contrariu* pentru h *negativ*).

În adevăr neegalitatea $f(x) > g(x)$ sau $f(x) - g(x) > 0$ e echivalentă cu neegalitatea

$$[f(x) - g(x)]\,h(x) > 0 \quad \text{sau} \quad fh > gh \quad \text{pentru} \quad h(x) > 0$$

și cu neegalitatea

$$[f(x) - g(x)]\,h(x) < 0 \quad \text{sau} \quad fh < gh \quad \text{pentru} \quad h(x) < 0.$$

EXEMPLU. Când înmulțim neegalitatea

(133) $$2x^3 + 3x^2 > 5x - 4$$

cu $2x - 1$, trebue să observăm că binomul $2x - 1$ e *pozitiv* pentru $x > \frac{1}{2}$, *nul* pentru $x = \frac{1}{2}$ și *negativ* pentru $x < \frac{1}{2}$. Prin urmare, din neegalitatea (133), deducem

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) > (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x > \tfrac{1}{2};$$

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) = (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x = \tfrac{1}{2};$$

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) < (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x < \tfrac{1}{2}.$$

COROLAR. 1°. Când avem o neegalitate între două expresii *întregi* (neegalitate *întreagă*) putem schimbă semnele la toți termenii ei, *dacă schimbăm și sensul neegalității.*

Aceasta revine la a înmulți ambii membri ai neegalității cu -1.

2°. Când neegalitatea conține expresii *fracționare* (neegalitate *fracționară*) putem face să dispară numitorii (1), dacă înmulțim ambii membri ai neegalității cu un *multiplu comun al tuturor numitorilor* ei [200].

In acest caz însă, trebue să fim atenți la *sensul* neegalității obținute, care depinde de *semnul* pe care-l poate avea *numitorul comun* ales.

EXEMPLU. Neegalitatea *fracționară*

(134) $$\frac{8x}{x-2} + 6x + 1 > \frac{2x^2 - 7}{3(x-2)},$$

înmulțită cu $3(x-2)$, ne dă neegalitatea *întreagă*

$$24x + 3(6x + 1)(x - 2) > 2x^2 - 7,$$

care e echivalentă cu (134) *numai pentru* $x - 2 > 0$ adică pentru $x > 2$.

Dacă înmulțim însă neegalitatea (134) cu $3(x-2)^2$ (cantitate, care nu poate fi *negativă*), obținem neegalitatea întreagă

(135) $$8x(x-2) + 3(6x+1)(x-2)^2 > (2x^2 - 7)(x-2)$$

echivalentă cu (134) pentru *toate* valorile lui $x \neq 2$.

(1) Să *alungăm numitorii.*

Neegalitatea (135) se mai poate scrie, trecând toți termenii în membrul întâi,

$$(136) \qquad (x-2)(16x^2-25x+1) > 0.$$

225. Neegalități de gradul întâi cu o necunoscută.

1°. O singură neegalitate. O neegalitate *de gradul întâi* cu *o necunoscută* se poate reduce la una din formele:

$$(I) \quad ax > b \qquad \text{sau} \qquad (II) \quad ax < b.$$

In cazul (I), împărțind ambii membri cu $a \neq 0$, găsim soluțiile

$$x > \frac{b}{a} \quad [\text{de } \textit{acelaș sens} \text{ cu (I)}] \quad \text{dacă } a \text{ e } \textit{pozitiv}$$

și

$$x < \frac{b}{a} \quad [\text{de } \textit{sens contrariu} \text{ cu (I)}] \quad \text{dacă } a \text{ e } \textit{negativ}.$$

In mod analog rezolvăm și neegalitatea (II).

2°. Mai multe neegalități. Pentru a rezolvà *n neegalități* cu *o singură necunoscută*, le reducem întâi la forma normală:

$$(137) \qquad a_1x > b_1, \quad a_2x < b_2, \quad \ldots, \quad a_nx > b_n.$$

Rezolvăm apoi fiecare neegalitate în parte și luăm valorile lui x, care satisfac la *toate* aceste neegalități.

1°. Dacă toate neegalitățile (137) se reduc la forma

$$(138) \qquad x > c_1, \quad x > c_2, \quad \ldots, \quad x > c_n$$

și dacă c e *cel mai mare* dintre numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sistemul (137) e echivalent cu neegalitatea $x > c$.

2°. Dacă toate neegalitățile (137) se reduc la forma

$$(139) \qquad x < c_1, \quad x < c_2, \quad \ldots, \quad x < c_n$$

și dacă d e *cel mai mic* dintre numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sistemul (137) e echivalent cu neegalitatea $x < d$.

3°. Dacă neegalitățile (137) *nu sunt toate de același sens*, de exemplu, dacă p neegalități sunt de forma

$$(140) \qquad x > \alpha_1, \quad x > \alpha_2, \quad \ldots, \quad x > \alpha_p$$

și q de forma

$$141) \qquad x < \beta_1, \quad x < \beta_2, \quad \ldots, \quad x < \beta_q \qquad (p+q=n),$$

și dacă α e *cel mai mare* dintre numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ și β *cel mai mic*

dintre numerele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, sistemul neegalităților date e echivalent cu

(142) $$x > \alpha, \quad x < \beta.$$

Dacă $\alpha \geqq \beta$, condițiile (142) *nu sunt compatibile* și sistemul (137) e *imposibil*. Dacă $\alpha < \beta$, sistemul (137) e *posibil* și soluțiile lui sunt toate valorile lui x, care satisfac la condiția $\alpha < x < \beta$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul de neegalități:

(143) $$3x+1 > \frac{5-x}{2}, \quad \frac{x-3}{x+4} < 0, \quad \frac{x}{2} - \frac{3x}{5} > x-8.$$

Rezolvăm întâi fiecare neegalitate separat. Neegalitatea întâi ne dă

$$6x+2 > 5-x \quad \text{sau} \quad 7x > 3; \quad \text{deci} \quad x > \frac{3}{7}.$$

Neegalitatea a doua (143), se descompune în

$$(\alpha) \quad x-3 > 0, \quad x+4 < 0 \quad \text{sau} \quad (\beta) \quad (x-3) < 0, \quad x+4 > 0.$$

Sistemul (α) $x > 3$, $x < -4$ e *imposibil*. Sistemul (β) ne dă $-4 < x < 3$.

Neegalitatea a treia (143) ne dă succesiv:

$$5x - 6x > 10x - 80, \quad -11x > -80, \quad 11x < 80; \quad \text{deci} \quad x < \frac{80}{11}.$$

Trebue dar să avem: $-4 < \frac{3}{7} < x < 3 < \frac{80}{11}$. De aci rezultă că soluțiile sistemului (143) sunt *toate valorile lui x cuprinse între* $\frac{3}{7}$ și 3.

226. Probleme. Ca să rezolvăm o problemă de algebră:

1°. Insemnăm cu $x, y, z, \ldots$ *necunoscutele* problemei.

2°. *Punem problema în ecuații*, adică scriem sub formă de *egalități* relațiile (care rezultă din enunțul problemei) între cantitățile *date* și cantitățile *necunoscute*.

3°. *Rezolvăm ecuațiile* obținute.

4°. Luând datele problemei sub forma cea mai generală, *discutăm* diferitele cazuri posibile și cercetăm, dacă soluțiile găsite au *un sens* din punct de vedere *practic*.

PROBLEMA I. *Două trenuri pleacă, în acelaș timp, unul din Cluj spre Brașov și celălalt din Brașov spre Cluj. Primul tren face 75 km. pe oră, al doilea face 45 km. pe oră. Știind că dela Cluj până la Brașov sunt 330 km. de cale ferată, se întreabă: la ce distanță de Cluj se vor întâlni aceste trenuri?*

1°. Necunoscuta. Insemnăm cu x distanța în km. dela Cluj până la locul unde se întâlnesc aceste trenuri.

2°. Punerea problemei în ecuație. Primul tren parcurge x km. în $\frac{x}{75}$ ore; trenul al doilea parcurge $330-x$ km. în $\frac{330-x}{45}$ ore.

Aceste timpuri trebuind să fie *egale*, avem ecuația

$$(144) \qquad \frac{x}{75} = \frac{330-x}{45}.$$

3°. Rezolvarea ecuației. Din (144) deducem succesiv

$$45x = 75.(330-x), \quad 3x = 5.(330-x), \quad 8x = 1650,$$

$$x = \frac{1650}{8} = 206{,}25.$$

Trenurile se întâlnesc la 206,25 km. dela Cluj.

4°. Generalizarea și discuția. Presupunând, în general, că primul tren ar plecă dela stația A (spre B) și ar face p km. pe oră; al doilea tren ar plecă dela stația B (spre A) și ar face q km. pe oră și că dela A până la B ar fi r km., am avea ecuația

$$(145) \qquad \frac{x}{p} = \frac{r-x}{q},$$

care admite în toate cazurile soluția *unică*

$$(146) \qquad x = \frac{pr}{p+q}.$$

Dacă $p < q$, avem $\frac{p}{p+q} < \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$ și $x < \frac{r}{2}$; trenurile se întâlnesc într'un loc mai apropiat de stația A decât de B. Dacă $p > q$ (cazul problemei date), avem $x < \frac{r}{2}$. Dacă $p = q$, avem $x = \frac{r}{2}$.

Problema II. *Ni se dau două aliaje și anume:*

primul aliaj cu 75 *gr. aur și* 105 *gr. cupru* — *total* 180 *gr.*
al doilea „ „ 150 „ „ „ 120 „ „ — „ 270 „

și se întreabă: câte grame trebue să luăm din fiecare aliaj, ca să formăm un alt aliaj, care să conțină 100 *gr. aur și* 150 *gr. cupru?*

1°. Necunoscutele. Insemnăm cu x și y numărul de grame, cât trebue să luăm din fiecare aliaj, ca să formăm aliajul cerut.

2°. Punerea problemei în ecuații. In primul aliaj

la	180	gr.	aliaj	avem	75	gr.	aur	și	105	gr.	cupru
„	1	„	„	„	$\frac{75}{180}$	„	„	„	$\frac{105}{180}$	„	„
„	x	„	„	„	$\frac{75x}{180}$	„	„	„	$\frac{105x}{180}$	„	„

In acelaș fel vedem că din al doilea aliaj

la y gr. aliaj avem $\frac{150y}{270}$ gr. aur și $\frac{120y}{270}$ gr. cupru.

Scriind că x gr. din aliajul întâi și y gr. din aliajul al doilea formează aliajul cerut, avem ecuațiile:

pentru *aur* pentru *cupru*

$$\frac{75x}{180}+\frac{150y}{270}=100, \qquad \frac{105x}{180}+\frac{120y}{270}=150.$$

Simplificând și punând ecuațiile sub formă întreagă, obținem

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 720 \\ 21x+16y &= 5400. \end{aligned} \tag{147}$$

3°. Rezolvarea. Aplicând regula lui Cramer, găsim

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 21 & 16 \end{vmatrix}=-36, \quad D_x=\begin{vmatrix} 720 & 4 \\ 5400 & 16 \end{vmatrix}=-10080, \quad D_y=\begin{vmatrix} 3 & 720 \\ 21 & 5400 \end{vmatrix}=1080,$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-10080}{-36}=280; \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{1080}{-36}=-30.$$

Observare. Deși sistemul de ecuații (147) admite soluții *bine determinate* și *unice*, totuși *în practică* problema dată e *imposibilă*.

In adevăr, ca să formăm aliajul cerut, ar trebui să luăm: *280* gr. din aliajul întâi, care are numai 180 gr. (*imposibilitate*); *— 30* gr. din aliajul al doilea (cantitate *negativă*), în practică *fără sens*.

4°. Generalizarea. Să presupunem că primul aliaj are a gr. aur și b gr. cupru; că al doilea aliaj are a' gr. aur și b' gr. cupru și că se cere să formăm din ele un aliaj, care să conțină α gr. aur și β gr. cupru.

Raționând ca mai sus, găsim ecuațiile

pentru *aur* pentru *cupru*

$$\frac{ax}{a+b}+\frac{a'y}{a'+b'}=\alpha, \qquad \frac{bx}{a+b}+\frac{b'y}{a'+b'}=\beta, \tag{148}$$

și avem:

$$D=\frac{ab'-ba'}{(a+b)a'+b')}, \qquad D_x=\frac{ab'-\beta a'}{ab'-ba'}, \qquad D_y=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'},$$

$$x=\frac{ab'-\beta a'}{ab'-ba'}(a+b), \qquad y=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'}(a'+b'). \tag{149}$$

DISCUȚIA. Cazul I. Dacă $ab'-ba'\neq 0$, sistemul (148) admite un singur sistem de soluții date prin formulele (149). Totuși din punct de vedere *practic* problema e *posibilă*, numai dacă aceste soluții sunt *amândouă pozitive*. Pentru aceasta *trebue ca diferențele*

$$ab'-\beta a', \qquad a\beta-b\alpha, \qquad ab'-ba'$$

să fie toate de același semn, adică să avem

$$\text{sau} \quad (\text{I}) \quad \frac{a}{b} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a'}{b'} \qquad \text{sau} \quad (\text{II}) \quad \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a'}{b'}.$$

Cazul II. Dacă $ab' - ba' \neq 0$, dar sau condiția (I), sau condiția (II) nu e realizată, cel puțin una dintre soluțiile (149) e *negativă* și problema e *imposibilă*.

Cazul III. Dacă $ab' - ba' = 0$, cum a, b, a', b' nu sunt toate nule, dacă avem

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \neq \frac{\alpha}{\beta},$$

sistemul (148) e *imposibil*; problema dată *nu admite soluții*.

Cazul IV. Dacă avem

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\alpha}{\beta},$$

sistemul (148) e *nedeterminat*; problema admite *o infinitate de soluții*. Nedetermina rea e de ordinul întâi.

EXERCIȚII.

40. Să se rezolve ecuațiile:

1°. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$; 2°. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$;

3°. $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3) = 43 - 5x$; 4°. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4\frac{8}{9}$

5°. $\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+a}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}$; 6°. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) + 54$;

7°. $2\lambda x - 3 + x = \lambda x + 2x + 2$; 8°. $(a^{5x+1})^5 = (a^{7x-1})^7 \times (a^{x-6})^9$.

R. 1°. $x = 6$; 2°. $x = 8$; 3°. $x = 6$; 4°. $x = 5$; 5°. $x = \frac{5ab - a^2 + 2b^2}{a+b}$;

6°. Ecuație *imposibilă*; 7°. Avem $(\lambda - 1)x = 5$; pentru $\lambda \neq 1$, găsim $x = \frac{5}{\lambda - 1}$; când λ tinde către 1, x *crește la infinit*; pentru $\lambda = 1$, ecuația e *imposibilă*.

8°. Ecuația se poate scrie $a^{5(5x+1)} = a^{7(7x-1)+9(x-6)}$, de unde deducem ecuația liniară $5(5x+1) = 7(7x-1) + 9(x-6)$, care admite soluția $x = 2$.

41. Să se rezolve ecuațiile:

1°. $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x-1}{x-4} = 2$; 2°. $\frac{9x+10}{11x-12} - \frac{8+5x}{40} = \frac{12}{13} - \frac{x}{8}$;

3°. $b = \frac{t-a}{1+at}$; 4°. $\frac{u+2a}{2b-u} + \frac{u-2a}{2b+u} = \frac{4ab}{4b^2-u^2}$.

R. 1°. $x = 22$; 2°. $x = 7$; 3°. $t = \frac{a+b}{1+ab}$; 4°. $u = \frac{ab}{a+b}$.

42. Să se rezolve sistemele de două ecuații liniare cu două necunoscute:

1°. $x - y = 1$, $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 5$; 2°. $5(x-2) = y+2$, $x + 5 = 3(y-5)$; 3°. $a(x+y) + b(x-y) = 1$, $b(x-y) + a(x+y) = 1$

R. 1°. $x=5$, $y=4$; 2°. $x=4$, $y=8$; 3°. Pentru $a^2-b^2\neq 0$ găsim soluțiile $x=\frac{1}{a+b}$, $y=0$; pentru $a=b$ sistemul e nedeterminat; pentru $a=-b$, sistemul e imposil. Se pot luà ca necunoscute și $u=x+y$, $v=x-y$.

43. Să se rezolve sistemele de trei ecuații cu trei necunoscute:

1°. $4x+3y+2z=11$, $3x+2y-4z=-17$, $2x+y+3z=26{,}5$;

2°. $2u-3v+4w=7$, $3u+2v-5w=8$, $5u-v-w=15$;

3°. $10m+4n-3p=0$, $20n+5m-4p=0$, $27p-124n+20m=0$.

R. 1°. Avem $D=-13\neq 0$ și găsim $x=15$, $y=-20$, $z=5{,}5$.

2°. Avem $D=0$ și găsim $u=\frac{38+7w}{13}$, $v=\frac{22w-5}{13}$, w arbitrar.

3°. Avem $D=0$. Sistemul admite o infinitate de soluții m, n, p proporționale cu numerele

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 20 & -4 \end{vmatrix}=44, \quad \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}=55, \quad \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 20 \end{vmatrix}=220,$$

sau cu 4, 5, 20. Avem dar $m=4\lambda$, $n=5\lambda$, $p=20\lambda$ (λ arbitrar).

44. Un tată are 41 ani, fiul lui are 17 ani. După câți ani vrâsta tatălui va fi 1°. *de* 2 *ori*; 2°. *de* 3 *ori*; 3°. *de* $\frac{8}{7}$ *ori* vrâsta fiului?

R. Peste x ani tatăl având $41+x$ ani, iar fiul $17+x$ ani, va trebui să avem:

1°. $41+x=2(17+x)$; $x=7$. De 2 ori, *va fi* peste 7 ani.

2°. $41+x=3(17+x)$; $x=-5$. De 3 ori, *a fost* acum 5 ani.

3°. $41+x=\frac{8}{7}(17+x)$; $x=151$. De $\frac{8}{7}$ ori, e *imposibil*.

45. Se dau două numere întregi sau fracționare pozitive α și β ($\alpha<\beta$) și se cere să se găsească două numere *întregi* p și q, care să ne dea neegalitățile

$$(1)\qquad \alpha<\frac{2p+1}{2q+1}<\frac{2p+1}{2q}<\beta.$$

R. Presupunând q cunoscut, numărul p trebue să satisfacă la

$$(2)\qquad \begin{aligned} &2p+1>(2q+1)\alpha \quad \text{sau} \quad p>\frac{(2q+1)\alpha-1}{2}=\lambda \\ &2p+1<2q\beta \quad \text{sau} \quad p<\frac{2q\beta-1}{2}=\mu \end{aligned} \qquad \lambda<p<\mu.$$

Ca să existe un număr *întreg* p cuprins între λ și μ, trebue să avem $\mu-\lambda\geqq 1$ adică $\frac{2q\beta-(2q+1)\alpha}{2}=\frac{2q(\beta-\alpha)-\alpha}{2}\geqq 1$; de unde deducem

$$(3)\qquad q\geqq\frac{2+\alpha}{2(\beta-\alpha)}.$$

Neegalitățile (2) și (3) ne arată că există o infinitate de numere *întregi* p și q, care satisfac la neegalitățile (1).

CAPITOLUL V.

ECUAȚII NELINIARE.

I. — NUMERE IMAGINARE.

227. Rădăcina patrată din numere negative. Am văzut că o ecuație de gradul întâi (*liniară*) cu o singură necunoscută

$$(1) \qquad ax = b \qquad (a \neq 0)$$

admite întotdeauna o rădăcină *unică* și *reală* $x = \frac{b}{a}$.

Nu putem spune același lucru pentru o ecuație *de grad mai mare decât* 1 sau *neliniară*. In adevăr, pentru a rezolvà cea mai simplă ecuație de gradul *al doilea*

$$(2) \qquad x^2 = m,$$

trebue să extragem *rădăcina patrată* din m, operație care nu e întotdeauna posibilă cu ajutorul numerelor *reale*.

1°. Dacă m e un număr *pozitiv*, $\sqrt{m}$ (în sens *aritmetic*) [**122, 131**] se poate extrage și ne dă un număr *real* α, rațional sau irațional. In acest caz, ecuația (2) admite *două rădăcini reale* și *distincte* $x' = +\alpha$ și $x'' = -\alpha$, fiindcă avem $(+\alpha)^2 = (-\alpha)^2 = m$. De aceea zicem că, pentru $m > 0$, $\sqrt{m}$ *algebrică* are *două determinări* $\pm\alpha$, pe care le putem însemnà cu $+\sqrt{m}$ și $-\sqrt{m}$.

EXEMPLU. $\sqrt{9}$ e ± 3 și convenim să scriem $+\sqrt{9} = 3$ și $-\sqrt{9} = -3$.

2°. Dacă m e un număr *negativ*, $\sqrt{m}$ nu se poate exprimà cu *niciun număr real*, fiindcă orice număr real ridicat la patrat ne dă un număr *pozitiv*, deci *diferit* de $m < 0$; prin urmare ecuația (2), pentru $m < 0$, *nu admite rădăcini reale*.

EXEMPLU. $\sqrt{9}$ nu e nici $+3$, nici -3 și *niciun număr real* α.

Pentru a face posibilă extragerea rădăcinii patrate şi din numere *negative*, trebue să introducem în algebră numere noi.

Convenim să scriem

$$\sqrt{-1} = i. \tag{3}$$

Acest număr i e *unitatea imaginară* şi satisface, prin definiţie, la condiţia:

$$i^2 = -1. \tag{4}$$

Un număr de forma ni (n real) conţine n unităţi imaginare şi se numeşte *număr imaginar*.

Cu această convenţie, rădăcina patrată *algebrică* dintr'un număr negativ $-m$ se va scrie

$$\sqrt{-m} = \sqrt{(-1).m} = \sqrt{-1}.\sqrt{m} = i\sqrt{m} = \pm ai, \tag{5}$$

unde $a = \sqrt{m}$ (rădăcină *aritmetică*) e un număr *real* pozitiv.

228. Numere complexe. Un număr de forma $a+bi$, unde a şi b sunt numere reale, se numeşte *număr complex* sau *număr imaginar* de formă generală. El conţine a unităţi *reale* şi b unităţi *imaginare* şi se mai poate scrie

$$a + bi = a.1 + b.i \quad (\textit{număr complex}). \tag{6}$$

Numerele reale a şi b pot fi *pozitive*, *nule* sau *negative*; a e *partea reală*, b e *coeficientul lui* i.

Pentru $b = 0$ avem numărul a (*real*); pentru $a = 0$ avem numărul bi (*imaginar pur*).

OBSERVARE. *Mulţimea numerelor complexe* cuprinde în ea mulţimea tuturor numerelor *reale*.

Un număr complex se poate scrie şi cu o singură literă: $\alpha = a+bi$.

Zicem că numărul $\alpha = a+bi$ e *nul* şi scriem $\alpha = 0$, dacă avem şi $a = 0$ şi $b = 0$ (1).

Zicem că două numere complexe $\alpha = a+bi$ şi $\alpha' = a'+b'i$ sunt *egale* şi scriem $\alpha = \alpha'$, dacă avem $a = a'$ şi $b = b'$ (2).

Două numere complexe $a+bi$ şi $a-bi$, care au părţile reale *egale* şi coeficienţii lui i *simetrici*, se zic *imaginare conjugate*.

Două cantităţi de forma $a+bi$ şi $-a-bi$ se zic *simetrice*. Dacă avem $a+bi = \alpha$, vom scrie $-a-bi = -\alpha$.

(1) In acest caz numărul n'are nici unităţi reale, nici unităţi imaginare.

(2) Numerele α şi α' au acelaş număr de unităţi reale şi acelaş număr de unităţi imaginare.

Cantitatea reală $\sqrt{a^2+b^2}$ se numește *modulul* numărului imaginar $\alpha = a+bi$ și se mai scrie

$$(7) \qquad |\alpha| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad (\textit{modul}).$$

Două cantități imaginare conjugate au același modul.

Dacă avem $\sqrt{a^2+b^2} = 0$, avem și $a = 0, b = 0$, deci $a+bi = 0$ și reciproc.

229. Operațiile cu numere complexe. Operațiile cu numerele complexe se definesc astfel ca, aplicate la numerele reale, să se reducă la operațiile aritmetice sau algebrice definite pentru numerele reale.

In general, în toate operațiile, simbolurile de forma $a+bi$, $a'+b'i$ se consideră ca *binoame algebrice* ordinare; unitatea imaginară i se consideră ca o *literă algebrică*, cu singura condiție că, în toate rezultatele, *puterea* i^2 *se înlocuește prin* -1.

1°. Adunarea. *Suma* a două numere complexe $\alpha = a+bi$ și $\alpha' = a'+b'i$ este

$$(8) \qquad \alpha+\alpha' = a+bi+a'+b'i = (a+a')+(b+b')i = c+di = \sigma,$$

în care avem

$$c = a+a', \qquad d = b+b'.$$

EXEMPLU. $(3+5i)+(4-8i) = (3+4)+(5-8)i = 7-3i.$

Suma a n numere complexe

$$\alpha_1 = a_1+b_1i, \quad \alpha_2 = a_2+b_2i, \quad \ldots, \quad \alpha_n = a_n+b_ni$$

este

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = (a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)i.$$

2°. Scădere a. *Diferența* numerelor complexe $\alpha = a+bi$ și $\alpha' = a'+b'i$ este

$$(9) \qquad \alpha-\alpha' = a+bi-(a'+b'i) = (a-a')+(b-b')i = c+di = \delta,$$

în care avem

$$c = a-a', \qquad d = b-b'.$$

OBSERVARE. Din $\alpha-\alpha' = \delta$, rezultă $\delta+\alpha' = \alpha$.
Din $\alpha = \alpha'$, rezultă $\alpha-\alpha' = 0$.

EXEMPLU. $(7-3i)-(4-8i) = (7-4)+[(-3)-(-8)]i = 3+5i$
sau $(7-3i)-(4-8i) = 7-3i-4+8i = (7-4)+(8-3)i = 3+5i.$

3°. Inmulțirea. Avem, prin definiție,

$$\alpha.\alpha' = (a+bi)(a'+b'i) = aa'+a'bi+ab'i+bb'i^2,$$

sau, înlocuind pe i^2 cu -1,

$$(10) \qquad \alpha.\alpha' = (aa'-bb')+(a'b+ab')i = \beta.$$

Produsul β e, în general, un număr complex. Pentru două cantităţi imaginare *conjugate*, avem

$$(11) \qquad (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \qquad (\text{număr } \textit{real}).$$

Produsul a mai multor numere complexe se defineşte şi se calculează ca produsul a mai multor binoame de forma $a+bi$.

TEOREMĂ. *Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulurilor acestor numere.*

In adevăr numerele $\alpha = a+bi$ şi $\alpha' = a'+b'i$ au modulurile $\sqrt{a^2+b^2}$ şi $\sqrt{a'^2+b'^2}$ respectiv. Produsul

$$\alpha\alpha' = (aa'-bb')+(a'b+ab')i$$

are modulul $\sqrt{(aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2}$ şi se verifică uşor că avem

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2.$$

Putem dar scrie:

$$(12) \qquad |\alpha.\alpha'| = |\alpha|.|\alpha'|$$

şi în general, pentru un produs de n numere complexe,

$$(13) \qquad |\alpha_1.\alpha_2.\ \ldots\ \alpha_n| = |\alpha_1|.|\alpha_2|.\ \ldots\ |\alpha_n|.$$

COROLAR. *Pentru ca produsul a mai multor cantităţi imaginare să fie nul, trebue şi e de ajuns ca unul dintre factori să fie nul.*

In adevăr, produsul numerelor complexe $\alpha\beta\gamma$ e *nul*, dacă $|\alpha\beta\gamma| = 0$ [**228**] sau dacă produsul numerelor *reale* $|\alpha|.|\beta|.|\gamma| = 0$ şi reciproc [**47**, Observare].

EXEMPLU. $1^0.\ (3+5i)\times(4-8i) = 12+20i-24i-40i^2$

$$= 12+20i-24i+40 = 52-4i.$$

$$2^0.\ (3+5i)\times(3-5i) = 3^2-5^2i^2 = 3^2+5^2 = 9+25 = 34.$$

4^0. Ridicarea la putere. Pentru m întreg şi pozitiv avem

$$(14) \qquad \alpha^m = (a+bi)^m = \underset{1}{(a+bi)}\underset{2}{(a+bi)}\ \ldots\ \underset{m}{(a+bi)}.$$

In particular, pentru unitatea imaginară i, avem

$$(15) \qquad i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n, \qquad i^{2n+1} = i^{2n}.i = (-1)^n.i$$

adică

$$(16) \qquad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i^4.i = i, \text{ etc.}$$

TEOREMĂ. *Modulul puterii a m-a a unei cantităţi complexe este egal cu puterea a m-a a modulului acestei cantităţi.*

In adevăr, după formula (13), avem:

$$(17) \qquad |\alpha^m| = |\underset{1}{\alpha}.\underset{2}{\alpha}\ \ldots\ \underset{m}{\alpha}| = |\underset{1}{\alpha}|.|\underset{2}{\alpha}|.\ \ldots\ |\underset{m}{\alpha}| = |\alpha|^m.$$

5°. Impărțirea e operația inversă a înmulțirii. Vom zice dar că $x+yi$ e *câtul* cantităților imaginare $a+bi$ și $a'+b'i$ și vom scrie

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = x+yi, \tag{18}$$

dacă avem

$$a+bi = (x+yi)(a'+b'i).$$

Efectuând produsul în membrul al doilea, obținem

$$a+bi = (a'x-b'y)+(a'y+b'x)i,$$

de unde rezultă egalitățile [228]:

$$\begin{aligned} a'x-b'y &= a \\ b'x+a'y &= b. \end{aligned} \tag{19}$$

Rezolvând acest sistem obținem partea reală și coeficientul lui i din câtul $x+yi$ (18). Cum determinantul coeficienților necunoscutelor e $a'^2+b'^2 \neq 0$, sistemul (19) admite un sistem *unic* de soluții, dat prin *regula lui Cramer* [211]:

$$x = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}, \qquad y = \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}. \tag{20}$$

Găsim dar

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = x+yi = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\,i \tag{21}$$

și zicem că numărul imaginar din membrul al doilea e *valoarea raportului* sau a *fracției* din membrul intâi.

OBSERVARE. Raportul (21) e *real*, dacă y e *nul*, adică dacă avem

$$a'b-ab'=0 \quad \text{sau} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Legile operațiilor cu numere algebrice se extind și la operațiile cu numere complexe. In particular o expresie de forma

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{a+bi}{a'+b'i},$$

care e o *fracție* cu termeni *imaginari*, se poate *amplifică* sau *simplifică* fără să-și schimbe valoarea.

De aceea, în practică, pentru a efectuà împărțirea (18) *amplificăm fracția cu conjugata numitorului ei*:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2} = x+yi.$$

Regăsim astfel pentru x și y valorile (20).

EXEMPLU.

$$\frac{52-4i}{4-8i}=\frac{(52-4i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)}=\frac{240+400i}{80}=3+5i.$$

230. Corespondența dintre numere și puncte în plan. Să luăm două axe OX și OY perpendiculare una pe alta și cu sensurile pozitive dela O spre X și dela O spre Y respectiv (*fig.* 35). Alegând și segmentul *unitate* OU = 1, știm că la fiecare *punct* de pe axa OX sau OY corespunde câte un *număr real* și reciproc [**149**].

Să luăm un punct M în planul XOY. Ducând din M perpendiculara MP pe axa OX, obținem *două segmente*: $\overrightarrow{OP}$ (cu originea în O) și $\overrightarrow{PM}$ (cu originea în P). Dacă $x=\overline{OP}$ și $y=\overline{PM}$ sunt *valorile algebrice* ale acestor segmente ($\overline{OP}$ măsurat pe axa OX, $\overline{PM}$ măsurat pe o axă paralelă și de același sens cu OY) [**25**], zicem că numerele x și y sunt *coordonatele* punctului M; x e *abscisa*, iar y e *ordonata* lui M.

Prin acest procedeu *la orice punct* M *din planul* XOY *corespund două numere algebrice* x și y.

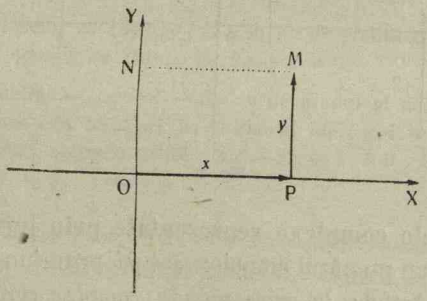


Fig. 35.

Reciproc: *la orice pereche de numere algebrice* (x, y) *corespunde un punct și unul singur în planul* XOY.

Pentru a determină acest punct:

1°. Luăm pe axa OX un segment $\overline{OP}=x$ (dela O *spre dreapta*, dacă x e *pozitiv*; dela O *spre stânga*, dacă x e *negativ*).

2°. Ducem în P perpendiculara pe OX.

3°. Luăm pe această perpendiculară un segment $\overline{PM}=y$ (*deasupra* axei OX, dacă y e *pozitiv*; *dedesubtul* axei OX, dacă y e *negativ*).

Punctul M astfel determinat are coordonatele (x, y).

Axele OX și OY se numesc *axe de coordonate*; punctul O e *originea coordonatelor*. OX e *axă absciselor*; OY *axa ordonatelor*.

Punctele de pe axa OX au *ordonata nulă*; punctele de pe axa OY au *abscisa nulă*; originea O are *amândouă coordonatele nule*.

OBSERVARE. Cu aceste convenții, dacă un punct M are coordonatele $x = a$, $y = b$, vom puteà zice: *punctul* M sau *punctul* (a, b).

Când reprezentăm un punct prin coordonatele lui, convenim să scriem întâi *abscisa* și apoi *ordonata* punctului.

EXEMPLU. Punctul $(3, 0)$ e pe axa OX și la dreapta axei OY; punctul $(0, -2)$ e pe axa OY și dedesubtul axei OX.

Pe figura 36 avem reprezentate punctele

$$A(1,2), \quad B(-1,3), \quad C(-4,-2).$$

Acest procedeu, de a determinà poziția *unui punct* în plan prin *două numere*, a fost imaginat de DESCARTES (1); de aceea aceste numere se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului (2).

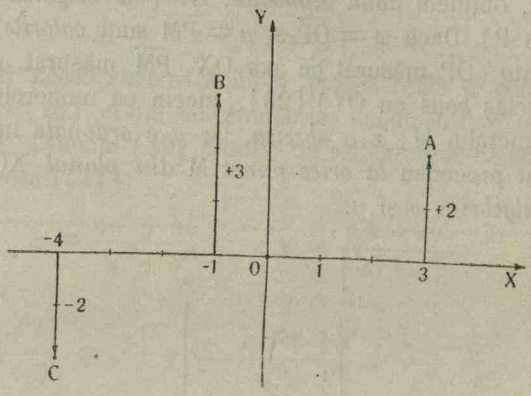


Fig. 36.

231. Numerele complexe reprezentate prin puncte. Convenim să reprezentăm în plan numărul complex $x+yi$ printr'un punct M cu coordonatele x și y. Astfel: *la orice număr complex corespunde un singur punct în plan* și *reciproc*.

EXEMPLE. La numărul complex $-1+3i$ corespunde *punctul* B cu coordonatele $x = -1$, $y = 3$ (*fig.* 36). La punctele A $(3, 2)$ și C $(-4, -2)$ corespund *numerele imaginare* $3+2i$ și $-4-2i$.

Construind triunghiul dreptunghic OPM (*fig.* 35), avem

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2.$$

Prin urmare *distanța dintre punctul* M și *origine*

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

reprezintă *modulul* numărului imaginar $x+yi$.

(1) DESCARTES, matematician, fizician și filosof francez (1596—1650).

(2) Uneori coordonatele carteziene ale punctului M se definesc prin segmentele $\overline{NM}$ și $\overline{PM}$ (*fig.* 35).

OBSERVĂRI. La un număr *real* a sau $a+0i$ corespunde un punct $(a, 0)$ *pe axa* OX; la un număr *imaginar pur* bi sau $0+bi$ corespunde un punct $(0, b)$ *pe axa* OY.

La două numere *imaginare conjugate* $a+bi$, $a-bi$ corespund două puncte (a, b), $(a, -b)$ *simetrice față de axa* OX.

La două numere *simetrice* $a+bi$ și $-a-bi$ corespund două puncte (a, b), $(-a, -b)$ *simetrice față de origine.*

II. — ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA.

232. Definiții. Orice ecuație de gradul al doilea, cu o singură necunoscută [198], se poate reduce la forma

$$ax^2+bx+c=0, \tag{22}$$

în care x e *necunoscuta*, iar a, b, c sunt *numere cunoscute.*

Expresia ax^2+bx+c e un *trinom de gradul al doilea.* Numerele a, b, c *cu semnele lor* sunt *coeficienții* trinomului: a e coeficientul lui x^2, b e coeficientul lui x, c e termenul cunoscut.

OBSERVARE. Pentru ca ecuația (22) să fie de gradul al doilea, trebue să avem $a \neq 0$. Pentru $a=0$ ecuația se reduce la $bx+c=0$.

EXEMPLU. Ecuația $-2x=5-3x^2$ e de gradul al doilea. Ca să o scriem sub forma (22), *trecem toți termenii în membrul întâi și-i ordonăm după puterile descrescătoare ale lui* x; obținem astfel: $3x^2-2x-5=0$ si coeficienții trinomului sunt $a=3$, $b=-2$, $c=-5$.

A *rezolvà* ecuația (22) însemnează a găsì *numerele*, care puse în locul lui x, fac ca membrul întâi să aibă valoarea *zero*. Aceste numere sunt *rădăcinile* ecuației.

233. Cazuri particulare. Vom considerà mai întâi cazurile simple, când în ecuația (22) avem $b=0$ sau $c=0$.

1°. $b=0$. Ecuația (22) se reduce la forma

$$ax^2+c=0. \tag{23}$$

De acì deducem

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

și extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, găsim, în general, *două* soluții:

$$x'=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{și} \quad x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}. \tag{24}$$

Discuție. Dacă numerele a și c sunt *de semne contrarii* ($ac < 0$), cantitatea $-\frac{c}{a}$ e *pozitivă* și rădăcinile date de formulele (24) sunt *reale* și *simetrice*.

Dacă a și c au *aceleași semne* ($ac > 0$), cantitatea $-\frac{c}{a}$ e *negativă* și rădăcinile x' și x'' sunt *imaginare conjugate*.

Dacă c e *nul*, avem $x' = x'' = 0$.

EXEMPLE. 1°. Ecuația $9x^2 - 1 = 0$ sau $9x^2 = 1$ are rădăcinile

$$x' = \frac{1}{3}, \quad x'' = -\frac{1}{3} \qquad (\textit{reale și simetrice}).$$

2°. Ecuația $x^2 + 2 = 0$ sau $x^2 = -2$ are rădăcinile

$$x' = i\sqrt{2}, \quad x'' = -i\sqrt{2} \qquad (\textit{imaginare conjugate}).$$

2°. $c = 0$. Ecuația (22) e de forma

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{sau} \quad x(ax + b) = 0. \tag{25}$$

Pentru ca produsul din membrul întâi să fie *nul*, trebue ca *unul din factori să fie nul*. Prin urmare ecuația (25) se descompune în

$$x = 0 \quad \text{și} \quad ax + b = 0 \quad \text{sau} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Obținem asfel *două* rădăcini *reale*:

$$x' = 0 \quad \text{și} \quad x'' = -\frac{b}{a}. \tag{26}$$

EXEMPLU. Ecuația $2x^2 - 3x = 0$ se scrie $x(2x - 3) = 0$ și se descompune în $x = 0$ și $2x - 3 = 0$; prin urmare are rădăcinile $x' = 0$, $x'' = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

234. Cazul general: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Avem ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{22}$$

Inmulțind toți termenii cu $4a$, obținem ecuația *echivalentă*:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0. \tag{27}$$

Primii doi termeni

$$4a^2x^2 + 4abx = (2ax)^2 + 2.2ax.b$$

sunt primii doi termeni din desvălirea patratului $(2ax + b)^2$. Adunând dar b^2 la ambii membri ai ecuației (27), o putem scrie

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

sau

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \tag{28}$$

Extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, deducem

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

și rezolvarea ecuației (22) se reduce la rezolvarea a *două ecuații de gradul întâi*:

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{și} \quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac},$$

care ne dau respectiv rădăcinile:

$$(29)\qquad x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{și} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

REGULĂ. *Rădăcinile ecuației de gradul al doilea*

$$(22)\qquad ax^2+bx+c=0$$

sunt numerele date de formula

$$(\text{LXVIII})\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Această formulă cuprinde amândouă valorile x' și x'' date de expresiile (29).

DISCUȚIE. In practică putem avea următoarele *trei* cazuri:

1°, $b^2-4ac>0$. Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuația (22) *două rădăcini* x' și x'' *reale* și *distincte*, de forma

$$(30)\qquad x'=\alpha+\beta, \qquad x''=\alpha-\beta,$$

în care

$$(31)\qquad \alpha=-\frac{b}{2a}, \qquad \beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

OBSERVARE. Dacă în ecuația $ax^2+bx+c=0$ coeficienții a și c sunt de semne *contrarii*, avem $b^2-4ac>0$ și rădăcinile sunt *reale* și *distincte*.

EXEMPLU. Pentru ecuația $2x^2+5x-3=0$, în care avem $a=2$, $b=5$, $c=-3$, $ac<0$, formula (LXVIII) ne dă rădăcinile reale

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.2.(-3)}}{2.2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm7}{4}$$

adică

$$x'=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5; \qquad x''=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3.$$

Verificare. Inlocuind pe x prin $\frac{1}{2}$ sau prin -3 în ecuația dată, vedem că primul membru capătă valoarea *zero*:

$$2.\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+5.\tfrac{1}{2}-3=\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}-3=0,$$

$$2.(-3)^2+5.(-3)-3=18-15-3=0.$$

2°. $b^2-4ac=0$. Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuația (22) *o singură rădăcină reală*:

$$(32)\qquad x=-\frac{b}{2a}.$$

In acest caz zicem că cele două rădăcini ale ecuației (22) se reduc la una singură sau că ecuația (22) admite *două rădăcini reale* și *egale*

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuația $4x^2 - 12x + 9 = 0$, formula (LXVIII) ne dă

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.4.9}}{2.4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Găsim dar rădăcinile *reale* și *egale*: $x' = x'' = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

3°. $b^2 - 4ac < 0$. In acest caz putem scrie:

$$b^2 - 4ac = -(4ac - b^2), \qquad 4ac - b^2 > 0$$

și $$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}, \qquad [i = \sqrt{-1}].$$

Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuația (22) *două rădăcini* x' și x'' *imaginare conjugate* [228],

(33) $$x' = \alpha + \beta i, \qquad x'' = \alpha - \beta i,$$

în care

(34) $$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuația $5x^2 + 2x + 1 = 0$, formula (LXVIII) ne dă

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.5.1}}{2.5} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5}.$$

Găsim dar două rădăcini *imaginare conjugate*:

$$x' = \frac{-1 + 2i}{5} \quad \text{și} \quad x'' = \frac{-1 - 2i}{5}.$$

OBSERVARE. Felul rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ depinde de *semnul cantității de sub radical* din formula (LXVIII). Această cantitate ($b^2 - 4ac$) se numește *discriminantul* ecuației.

REZUMAT. Pentru ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ putem avea următoarele trei cazuri:

Discriminant	*Rădăcinile* x' *și* x''	*Rădăcini reale*
$b^2 - 4ac > 0$	*reale* și *neegale*	2
$b^2 - 4ac = 0$	*reale* și *egale*	1
$b^2 - 4ac < 0$	*imaginare conjugate*	0

235. Forme particulare. 1°. Când coeficientul lui x e un număr *pereche*, ecuația e de forma

(35) $$ax^2 + 2b'x + c = 0, \qquad (b = 2b').$$

In acest caz formula (LXVIII), care ne dă

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a},$$

se poate simplifică prin 2 și se reduce la

(LXIX) $$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

EXEMPLU. Aplicând formula (LXIX) la ecuația $5x^2 + 2x + 1 = 0$ găsim:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{5} \quad \text{adică} \quad x' = \frac{-1+2i}{5}, \quad x'' = \frac{-1-2i}{5}.$$

2°. Când coeficientul lui x^2 este 1, ecuația (22) e de forma

(36) $$x^2 + px + q = 0$$

și formula de rezolvare (LXVIII) se poate scrie:

(LXX) $$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{sau} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

EXEMPLU. Ecuația $x^2 - 8x + 15 = 0$ fiind de forma (36), formula (LXX) ne dă

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 \quad \text{adică} \quad x' = 5, \quad x'' = 3.$$

236. Relații între rădăcini și coeficienți. 1°. *Adunând* cele două valori ale rădăcinilor

(37) $$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{și} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

date de formula (LXVIII) [**234**], obținem

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

dacă observăm că radicalii dela numărători, fiind *egali* dar *cu semne contrarii*, se reduc.

2°. *Înmulțind* valorile rădăcinilor x' și x'' găsim

$$x' \cdot x'' = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

dacă observăm că la numărător avem de înmulțit *suma* a două cantități $\left[-b \text{ și } \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$ cu *diferența* lor [**116**].

REGULĂ. *Suma și produsul rădăcinilor ecuației de gradul al doilea*

(38) $$ax^2+bx+c=0$$

sunt date de formulele:

(LXXI) $$x'+x''=-\frac{b}{a},$$

(LXXII) $$x'x''=\frac{c}{a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuația $2x^2+5x-7=0$ avem $a=2$, $b=5$, $c=-7$ și fără să cunoaștem rădăcinile x' și x'', putem scrie *suma* și *produsul* lor:

$$x'+x''=-\frac{5}{2}, \qquad x'.x''=-\frac{7}{2}.$$

OBSERVARE. Dacă ecuația de gradul al doilea e de forma

(39) $$x^2+px+q=0,$$

formulele (LXXI) și (LXXII) ne dau

(40) $$x'+x''=-p, \qquad x'.x''=q.$$

PROBLEMĂ. Să se găsească *două numere*, știind că *suma* lor e S și *produsul* lor e P.

Formăm o ecuație de gradul al doilea $x^2+px+q=0$, care să aibă ca *rădăcini* numerele căutate. Formulele (40) ne arată, că trebue să avem

$$S=-p, \quad P=q \qquad \text{sau} \qquad p=-S, \quad q=P$$

și ecuația este

(41) $$x^2-Sx+P=0.$$

EXEMPLU. Să să găsească două numere m și n, știind că suma lor e 7 și produsul lor e 12. Aceste numere sunt rădăcinile ecuației $x^2-7x+12=0$. Rezolvând această ecuație găsim că numerele căutate sunt 4 și 3.

237. Semnele rădăcinilor. Când rădăcinile ecuației (38) sunt *reale*, formulele (LXXI) și LXXII) ne permit, *numai după semnele coeficienților* a, b, c, să determinăm *semnul* fiecărei rădăcini.

Știm că, dacă două numere x' și x'' au *același semn*, produsul lor e *pozitiv*, iar suma lor are semnul comun. Dacă x' și x'' sunt de semne *contrarii*, produsul lor e *negativ*, iar suma lor are semnul numărului celui mai mare în valoare absolută [32].

Dacă x' și x'' sunt rădăcinile ecuației $ax^2+bx+c=0$, observăm că:

1°. *Dacă* $ac>0$, formula (LXXII) ne dă $x'x''>0$; *rădăcinile au același semn* și *semnul lor comun* e semnul sumei $x'+x''$, adică *semnul cantității* $-\frac{b}{a}$ [formula (LXXI)].

2°. *Dacă* $ac < 0$, avem $x'x'' < 0$; *rădăcinile sunt de semne contrarii* și *rădăcina cea mai mare* (în valoare absolută) are semnul sumei $x' + x''$, adică *semnul cantității* $-\frac{b}{a}$.

EXEMPLU. Ecuația $2x^2 + 5x - 7 = 0$, cu $b^2 - 4ac = 81 > 0$, are rădăcinile *reale* și *neegale*. Coeficienții 2 și -7 (a și c) fiind de semne contrarii, rădăcinile sunt de semne *contrarii*; raportul $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$ fiind negativ, rădăcina cea mai mare, în valoare absolută, e *negativă*.

In adevăr, rezolvând ecuația găsim $x' = 1$, $x'' = -\frac{7}{2} = -3{,}5$.

OBSERVARE. In practică putem considera întotdeauna $a > 0$. Dacă a e *negativ*, putem înmulți toată ecuația cu -1.

REZUMAT. *Semnele rădăcinilor ecuației* $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a > 0$.

b	c	$x' + x''$	$x'x''$	x'	x''	*Rădăcina cea mai mare în valoare absolută*
+	+	−	+	−	−	
−	+	+	+	+	+	
+	−	−	−	+	−	negativă
−	−	+	−	+	−	pozitivă

238. Trinomul de gradul al doilea. Dacă scriem

(42) $$y = ax^2 + bx + c,$$

pentru orice valoare a variabilei x, formula (42) ne dă o valoare și una singură pentru y. De aceea zicem că y e o *funcție* de x exprimată în mod *explicit* prin trinomul $ax^2 + bx + c$.

Reciproc: alegând o valoare arbitrară y_0, ne întrebăm dacă există valori pentru x, care să dea trinomului $ax^2 + bx + c$ valoarea y_0. Aceste valori sunt rădăcinile ecuației

(43) $$y_0 = ax^2 + bx + c \quad \text{sau} \quad ax^2 + bx + c - y_0 = 0.$$

Găsim dar 2, 1 sau 0 valori *reale* x, care să satisfacă la condiția cerută [234], după cum discriminantul ecuației (43) e *pozitiv*, *nul* sau *negativ*.

In particular valorile x' și x'', pentru care y e *nul*, adică rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, se numesc *rădăcinile trinomului* $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLU. Fie $y = x^2 - 8x + 7$. Pentru fiecare valoare a lui x, acest trinom are o valoare y bine determinată. Astfel găsim:

x	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1	$1{,}5$	2	$\sqrt{15}$	5	7	10
y	40	16	12,78	7	0	−2,75	−5	−8,98	−8	0	27

Reciproc. Trinomul x^2-8x+7 ia valoarea 50 pentru x egal cu rădăcinile ecuației $x^2-8x+7=50$ sau $x^2-8x-43=0$. Aceste rădăcini sunt

$$x=4\pm\sqrt{59} \quad \text{sau} \quad x'=11{,}68,\ x''=-3{,}68.$$

239. Trinomul ca produs. Teoremă. *Orice trinom de gradul al doilea,* ax^2+bx+c, *se poate scrie ca un produs de trei factori:*

(LXXIII) $$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x''),$$

în care a *e coeficientul lui* x^2, *iar* x' *și* x'' *sunt rădăcinile trinomului.*

In adevăr, punând pe a în factor comun, avem

(44) $$ax^2+bx+c \equiv a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

și dacă x' și x'' sunt rădăcinile acestui trinom, formulele (LXXI) și (LXXII) [**236**] ne dau

$$\frac{b}{a}=-(x'+x''), \qquad \frac{c}{a}=x'x''$$

și trinomul (44) se poate scrie

$$a[x^2-(x'+x'')x+x'x''] \equiv a[x^2-xx'-xx''+x'x'']$$
$$\equiv a[x(x-x')-x''(x-x')] \equiv a(x-x')(x-x'').$$

EXEMPLU. Trinomul $3x^2-24x+21$, care are rădăcinile $x'=1$, $x''=7$, se poate scrie ca *produs*: $3(x-1)(x-7)$.

240. Alte forme ale trinomului ax^2+bx+c.

Vom considerà cele trei cazuri posibile [**234**].

1°. Dacă $b^2-4ac>0$, rădăcinile trinomului sunt *reale* și *neegale*, de forma

$$x'=\alpha+\beta, \quad x''=\alpha-\beta \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a}, \quad \beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

Inlocuind pe x' și x'' prin aceste valori în produsul (LXXIII) găsim

$$a(x-\alpha-\beta)(x-\alpha+\beta)=a[(x-\alpha)^2-\beta^2]$$

și trinomul se poate scrie sub forma

(45) $$ax^2+bx+c \equiv a[(x-\alpha)^2-\beta^2]$$

adică: a înmulțit cu *diferența a două patrate.*

2°. Dacă $b^2-4ac=0$, rădăcinile trinomului sunt *reale* și *egale*:

$$x'=x''=\alpha \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a}\right].$$

Produsul (LXXIII) se reduce la $a(x-\alpha)^2$ și trinomul se poate scrie sub forma

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)^2 \tag{46}$$

adică: a înmulțit cu un *patrat perfect.*

3°. Dacă $b^2-4ac<0$, rădăcinile trinomului sunt *imaginare conjugate*

$$x'=\alpha+\beta i, \quad x''=\alpha-\beta i \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a}, \quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right].$$

Produsul (LXXIII) devine

$$a(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=a[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

și trinomul se poate scrie sub forma

$$ax^2+bx+c \equiv a[(x-\alpha)^2+\beta^2] \qquad (\alpha, \beta \text{ } \textit{reale}) \tag{47}$$

adică: a înmulțit cu *suma a două patrate.*

EXEMPLE. 1°. Trinomul $x^2-8x+15$ are rădăcinile *reale* și *neegale* $x'=3$, $x''=5$; avem dar $x^2-8x+15 \equiv (x-3)(x-5)$.

2°. Trinomul $-5x^2+2x-1$ are rădăcinile imaginare $x=\frac{1\pm 2i}{5}$; avem dar $-5x^2+2x-1 \equiv -5\left[\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}\right]$.

241. Semnul trinomului de gradul al doilea. Pentru fiecare valoare reală a lui x, dela $-\infty$ până la $+\infty$, trinomul

$$y=ax^2+bx+c \tag{48}$$

are câte o valoare *reală* bine determinată. Ne întrebăm: când această valoare e *pozitivă* și când e *negativă*?

Dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *distincte* x' și x'' $(x'<x'')$, aceste rădăcini împart mulțimea numerelor reale în trei intervale:

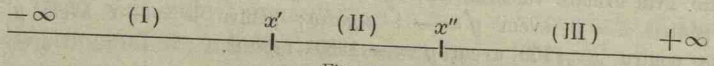


Fig. 37.

intervalul (I) dela $-\infty$ până la x'; intervalul (II) dela x' până la x''; intervalul (III) dela x'' până la $+\infty$ (*fig.* 37).

Când x e în intervalul (II) zicem că e *cuprins între rădăcini*; când x e în intervalul (I) sau (III) zicem că e *în afară de rădăcini.*

TEOREMĂ. 1°. *Dacă trinomul* ax^2+bx+c *are rădăcini reale și neegale, valorile trinomului au semnul lui* a *pentru* x *în afară de rădăcini și semn contrar cu* a *pentru* x *cuprins între rădăcini.*

2°. *Dacă trinomul* ax^2+bx+c *are rădăcini reale și egale sau rădăcini imaginare, valorile trinomului au totdeauna semnul lui* a.

In adevăr, dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *neegale* x' și x'' $(x'<x'')$, avem

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x''). \tag{49}$$

Pentru $x<x'$ (intervalul I, *fig.* 37) avem și $x<x''$; factorii $x-x'$ $x-x''$ sunt amândoi *negativi*. Pentru $x>x''$ (intervalul III) avem și $x>x'$; factorii $x-x'$ și $x-x''$ sunt amândoi *pozitivi*. Deci pentru x în afară de rădăcini produsul $(x-x')(x-x'')$ e *pozitiv* și trinomul (49) are *semnul lui* a.

Pentru $x'<x<x''$ (intervalul II) factorul $x-x'$ e *pozitiv*, factorul $x-x''$ e *negativ*. Deci pentru x cuprins între rădăcini produsul $(x-x')(x-x'')$ e *negativ* și trinomul (49) are semnul *contrar cu* a.

Dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *egale*, avem $x'=x''$ și

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')^2. \tag{50}$$

Dacă trinomul are rădăcini *imaginare*, putem scrie

$$ax^2+bx+c \equiv a[(x-\alpha)^2+\beta^2] \qquad (\alpha, \beta \text{ reale}). \tag{51}$$

In amândouă cazurile, pentru orice valoare reală a lui x, factorul al doilea $(x-x')^2$ sau $(x-\alpha)^2+\beta^2$ e *pozitiv* și trinomul (50) sau (51) are *semnul lui* a.

EXEMPLE. 1°. Trinomul $y=x^2-x+15$ are rădăcinile *reale* și *neegale* $x'=3$, $x''=5$; coeficientul $a=1$ e *pozitiv*. Prin urmare acest trinom are valori *pozitive* pentru $x<3$ și $x>5$ și valori *negative* pentru x cuprins între 3 și 5.

Astfel pentru $x=0<3$ avem $y=15$ *pozitiv*; pentru $x=10>5$ avem $y=35$ *pozitiv*; pentru $x=4$ $(3<4<5)$ avem $y=-1$ *negativ*.

2°. Trinomul $y=-5x^2+2x-1$ are rădăcinile *imaginare*; coeficientul $a=-5$ e *negativ*. Prin urmare valoarea trinomului e *negativă* pentru orice valoare a lui x. Astfel pentru $x=0$ avem $y=-1$ *negativ*; pentru $x=-2$ avem $y=-25$ *negativ*; pentru $x=100$ avem $y=-49801$ *negativ*.

OBSERVARE. Pentru x în valoare absolută destul de mare trinomul ax^2+bx+c are întotdeauna *semnul lui* a.

Această observare, care e un corolar al teoremei precedente, se poate stabili și în mod direct. Avem

$$ax^2+bx+c=x^2\left[a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right]$$

și pentru $|x|$ destul de mare termenii $\frac{b}{x}$ și $\frac{c}{x^2}$ sunt foarte mici; cantitatea din paranteză are semnul lui a, x^2 e pozitiv și semnul produsului e *semnul lui* a.

242. Aplicații. Să se studieze, după diferitele valori ale parametrului m, felul rădăcinilor trinomului

(52) $$9x^2 - 6mx + 3m + 4.$$

Coeficientul lui x fiind *pereche*, discriminantul trinomului [**234** și **235**, 1] e

(53) $$b'^2 - ac = (3m)^2 - 9(3m + 4) = 9(m^2 - 3m - 4).$$

Felul rădăcinilor trinomului (52) depinde de *semnul* discriminantului (53). Dar acest discriminant e și el un *trinom de gradul al doilea* în m. Ecuația $m^2 - 3m - 4 = 0$ având rădăcinile -1 și 4, trinomul (53) e *pozitiv* pentru $m < -1$ și $m > 4$ și *negativ* pentru m cuprins între -1 și 4. De aci rezultă următorul tablou:

Valorile lui m.	Discriminantul $9(m^2 - 3m - 4)$	Felul rădăcinilor trinomului $9x^2 - 6mx + 3m + 4$.
$-\infty \leqq m < -1$	pozitiv	*reale* și *neegale*
$m = -1$	*nul*	*reale* și *egale*
$-1 < m < 4$	negativ	*imaginare conjugate*
$m = 4$	*nul*	*reale* și *egale*
$4 < m \leqq +\infty$	pozitiv	*reale* și *neegale*

243. Neegalități de gradul al doilea. Numim astfel neegalitățile, care se pot reduce la forma

(54) $$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{sau} \quad (55) \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

Să considerăm neegalitatea (54). *A rezolvà această neegalitate, înseamnă a aflà toate valorile lui x, pentru care trinomul $ax^2 + bx + c$ e pozitiv.*

1°. Dacă rădăcinile trinomului (54) sunt *reale* și *neegale* $x' < x''$, trinomul are semnul lui a pentru $x < x'$ și $x > x''$ și semn contrar cu a pentru $x' < x < x''$ [**241**, 1]. Prin urmare: dacă $a > 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru $x < x'$ și $x > x''$; dacă $a < 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru $x' < x < x''$.

2°. Dacă rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$ sunt *reale* și *egale* sau *imaginare*, trinomul are întotdeauna semnul lui a [**241**, 2]. Prin urmare, dacă $a > 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru *orice valoare a lui* x (1); dacă $a < 0$, neegalitatea (54) nu e satisfăcută de nici o valoare a lui x.

Neegalitatea (55) se rezolvă și se discută în mod analog.

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea $x^2 - 3x - 4 < 0$.

Ecuația $x^2 - 3x - 4 = 0$ are rădăcinile $x' = -1$, $x'' = 4$. Coeficientul lui x^2 fiind pozitiv, trinomul $x^2 - 3x - 4$ e *negativ* pentru toate valorile lui x cuprinse între -1 și 4 și numai pentru aceste valori.

(1) Se excepteză numai rădăcina dublă $x = x'$, pentru care trinomul e *nul*.

244. Neegalități raționale. I. Neegalitate întreagă.

REGULĂ. *Ca să rezolvăm o neegalitate de forma*

$$f.g.h > 0, \tag{56}$$

1°. *Rezolvăm fiecare dintre ecuațiile*

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0.$$

2°. Așezăm *în ordine crescătoare* toate rădăcinile *reale* ale acestor ecuații: $\alpha < \beta < \gamma < \ldots < \lambda$.

3°. Determinăm *semnul fiecărui factor* f, g, h în intervalele

$$-\infty, \alpha; \quad \alpha, \beta; \quad \beta, \gamma; \quad \ldots; \quad \lambda, +\infty.$$

4°. Deducem *semnul produsului* fgh în fiecare din aceste intervale și *soluțiile neegalității* (56) *sunt valorile lui* x *din intervalele în care produsul* fgh *e pozitiv.*

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea

$$(2x^2-9x+10)(x^2+1)(x^2-2x-3)(5x-24) < 0. \tag{57}$$

Factorul $f = 2x^2-9x+10$ are rădăcinile *reale* 2 și $\frac{5}{2}$; e *negativ* între rădăcini și *pozitiv* în afară.

Factorul $g = x^2+1$ are rădăcinile *imaginare* și rămâne *pozitiv.*

Factorul $h = x^2-2x-3$ are rădăcinile *reale* -1 și 3; e *negativ* între rădăcini și *pozitiv* în afară.

Factorul $k = 5x-24$ are rădăcina reală $x = \frac{24}{5}$; e *negativ* pentru $x < \frac{24}{5}$ și *pozitiv* pentru $x > \frac{24}{5}$.

Așezând aceste cinci rădăcini în ordine crescătoare obținem șirul:

$$-\infty, \quad -1, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \quad 3, \quad \frac{24}{5}, \quad +\infty,$$

care împarte șirul numerelor reale în 6 intervale. Inscriind într'un tablou *semnul fiecărui factor* f, g, h, k pentru x cuprins în fiecare din aceste intervale, deducem *semnul produsului* $fghk$ după regula semnelor [47].

x	$-\infty$		-1		2		$\frac{5}{2}$		3		$\frac{24}{5}$		$+\infty$
f		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
g		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
h		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
k		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$fghk$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Neegalitatea (57) e verificată pentru $x < -1$, $2 < x < \frac{5}{2}$ și $3 < x < \frac{24}{5}$.

II. Neegalitate fracționară. In mod analog se rezolvă și o neegalitate *fracționară*. Trecând toți termenii în membrul întâi, o reducem la forma

$$\frac{f}{g} > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{f}{g} < 0. \tag{58}$$

OBSERVARE. Aceste neegalități sunt respectiv echivalente cu neegalitățile *întregi* $fg > 0$ sau $fg < 0$.

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea

$$2 + \frac{x}{x-1} > \frac{2x+9}{x+1}. \tag{59}$$

Trecând toți termenii în membrul întâi obținem

$$2 + \frac{x}{x-1} - \frac{2x+9}{x+1} > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x^2-6x+7}{x^2-1} > 0.$$

Trinomul x^2-6x+7 are rădăcinile reale $3+\sqrt{2}$ și $3-\sqrt{2}$; binomul x^2-1 are rădăcinile reale $+1$ și -1. Aceste patru rădăcini ne dau șirul

$$-\infty, \quad -1, \quad 1, \quad 3-\sqrt{2}, \quad 3+\sqrt{2}, \quad +\infty$$

și tabloul:

x	$-\infty$		-1		1		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-6x+7		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Raportul		$+$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	

Neegalitatea (59) e satisfăcută pentru $x<-1$, $1<x<3-\sqrt{2}$ și $x>3+\sqrt{2}$.

245. Ecuații obținute prin ridicare la putere *Când ridicăm la o aceeași putere ambii membri ai unei ecuații, obținem o nouă ecuație, care are toate rădăcinile ecuației vechi, dar care poate avea și rădăcini străine.*

Astfel dacă f și g sunt două expresii algebrice, orice soluții a ecuației

$$f = g \quad \text{sau} \quad f-g=0 \tag{60}$$

satisfac și la ecuația

$$f^2 = g^2 \quad \text{sau} \quad f^2-g^2=0 \quad \text{sau} \quad (f-g)(f+g)=0. \tag{61}$$

Reciproca însă nu e adevărată. Ecuația (61) se descompune în $f-g=0$ și $f+g=0$ și rădăcinile ecuației $f+g=0$ sau $f=-g$ satisfac ecuația (61) dar *nu satisfac ecuația* (60) pentru $g \neq 0$.

EXEMPLU: $2x-3=1$. Ridicând la patrat obținem

$$4x^2-12x+9=1 \quad \text{sau} \quad 4x^2-12x+8=0,$$

ecuație, care are rădăcinile $x=1$ și $x=2$. Dintre acestea *numai* $x=2$ *satisface la ecuația dată*; $x=1$ e o rădăcină *străină* introdusă prin ridicare la patrat.

246. Ecuații iraționale. Numim astfel o ecuație, care conține necunoscuta sub *radicali*. Pentru a o rezolvà o aducem la forma *rațională*, făcând *să dispară radicalii* prin ridicări la putere convenabil efectuate.

Vom considerà câteva cazuri elementare:

Cazul I. *Ecuația conține un singur radical.* In acest caz:

1°. *Izolăm radicalul*, adică lăsăm termenul cu radicalul într'un membru al ecuației, iar pe toți ceilalți termeni îi trecem în celălalt membru.

2°. *Ridicăm ambii membri ai ecuației la puterea egală cu indicele radicalului.* Astfel ecuația devine *rațională*.

3°. *Rezolvăm ecuația rațională obținută.*

4°. Cercetăm, *care* dintre soluțiile găsite *satisfac ecuația irațională* dată.

EXEMPLU: $3x+\sqrt{x-2}=6$.

Izolând radicalul avem $\sqrt{x-2}=6-3x$.

Ridicând la patrat ambii membri, deducem ecuația *rațională*

$$x-2=36-36x+9x^2 \quad \text{sau} \quad 9x^2-37x+38=0,$$

care are *două* rădăcini: $x=2$ și $x=\frac{19}{9}$.

Dintre acestea, *numai* $x=2$ *satisface la ecuația irațională dată*; cealaltă valoare $\frac{19}{9}$ e o rădăcină *străină* introdusă prin ridicarea la patrat.

Cazul II. *Ecuația conține două rădăcini patrate.* In acest caz:

1°. *Izolăm un radical* și ridicăm ambii membri ai ecuației la puterea arătată de indicele acestui radical. Astfel radicalul izolat *dispare*.

2°. *Izolăm și pe al doilea radical* și printr'o operație analoagă *facem să dispară și acest radical.*

EXEMPLU: $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=3$.

Izolând primul radical găsim $\sqrt{x-3}=3-\sqrt{x-6}$.

Ridicând la patrat avem: $x-3=9-6\sqrt{x-6}+x-6$.

Izolând și termenul cu al doilea radical, găsim

$$6\sqrt{x-6}=6 \quad \text{sau} \quad \sqrt{x-6}=1$$

și ridicând la patrat, obținem ecuația *rațională* $x-6=1$, care are rădăcina $x=7$. Se verifică ușor că $x=7$ satisface ecuația *irațională* dată.

Cazul III. *Ecuația conține mai mulți radicali.* Problema e mult mai complicată și ca să facem să dispară radicalii, trebue să întrebuințăm *metode speciale* pentru fiecare caz.

EXEMPLU: $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}+\sqrt[3]{u-3}=0$ se scrie $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}=-\sqrt[3]{u-3}$.

Ridicând ambii membri la cub, obținem

$$u+3\sqrt[3]{u^2(u-1)}+3\sqrt[3]{u(u-1)^2}+u-1=-u+3$$

sau

$$u+3\sqrt[3]{u(u-1)}\left[\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}\right]+u-1=-u+3$$

și înlocuind pe $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}$ prin cantitatea egală $-\sqrt[3]{u-3}$, ajungem la ecuația

$$3\sqrt[3]{u(u-1)(u-3)} = 3u-4,$$

care conține un singur radical (cazul I).

III. — ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR.

247. Ecuația bipatrată. Numim ecuație *bipatrată* o ecuație de gradul al patrulea de forma

$$ax^4+bx^2+c=0. \tag{62}$$

Punând $x^2=y$, obținem o ecuație de gradul al doilea în y:

$$ay^2+by+c=0, \tag{63}$$

care se numește *rezolvanta* ecuației bipatrate (62).

REGULĂ. Ca să rezolvăm o ecuație bipatrată:

1°. Calculăm rădăcinile y' și y'' ale *rezolvantei*.

2°. Înlocuim în $x^2=y$ pe y succesiv prin y' și y'' și formăm ecuațiile $x^2=y'$ și $x^2=y''$.

3°. Rezolvăm aceste două ecuații și rădăcinile lor

$$x_1=+\sqrt{y'},\quad x_2=-\sqrt{y'},\quad x_3=+\sqrt{y''},\quad x_4=-\sqrt{y''}$$

sunt rădăcinile ecuației bipatrate.

FORMULĂ. Rădăcinile rezolvantei (63) fiind

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

toate rădăcinile ecuației bipatrate sunt cuprinse în formula:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \tag{LXXIV}$$

EXEMPLU. Să se rezolve ecuația $x^4-2x^2-3=0$. Punând $x^2=y$, obținem rezolvanta $y^2-2y-3=0$, care are rădăcinile $y'=3$ și $y''=-1$.

Rezolvând apoi ecuațiile $x^2=3$ și $x^2=-1$, obținem rădăcinile ecuației bipatrate: $x_1=+\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=i$, $x_4=-i$.

DISCUȚIE. Cazul I: $b^2-4ac>0$. Rădăcinile y' și y'' ale rezolvantei sunt *reale* și *neegale*.

1°. Dacă $\frac{c}{a}>0$, valorile y' și y'' sunt *de același semn* [237].

Dacă $\frac{b}{a}<0$, y' și y'' sunt *pozitive* și ecuația bipatrată are 4 *rădăcini reale* de forma $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Dacă $\frac{b}{a}>0$, y' și y'' sunt *negative* și ecuația bipatrată are 4 rădăcini *imaginare pure* de forma $\pm\alpha i$, $\pm\beta i$.

2°. Dacă $\frac{c}{a} < 0$, valorile y' și y'' sunt *de semne contrarii*. Ecuația bipatrată are 2 rădăcini *reale simetrice* (de forma $\pm\alpha$) și 2 rădăcini *imaginare pure simetrice* (de forma $\pm\beta i$).

3°. Dacă $\frac{c}{a} = 0$, b e *diferit de zero* și *una dintre rădăcinile rezolvantei e nulă*. Dacă $\frac{b}{a} < 0$, cealaltă rădăcină a rezolvantei e *pozitivă* și ecuația bipatrată are 1 rădăcină *nulă* dublă și 2 rădăcini *reale* simetrice; dacă $\frac{b}{a} > 0$, cealaltă rădăcină a rezolvantei e *negativă* și ecuația bipatrată are 1 rădăcină *nulă* dublă și 2 rădăcini *imaginare pure* simetrice.

Cazul II: $b^2 - 4ac = 0$. Rădăcinile y' și y'' ale rezolvantei sunt *reale* și *egale* ($y' = y''$). In acest caz trebue să avem $ac > 0$ sau $\frac{c}{a} > 0$.

Dacă $\frac{b}{a} < 0$, y' e *pozitiv* și ecuația bipatrată are 2 rădăcini *reale* simetrice *duble*; dacă $\frac{b}{a} > 0$, y' e *negativ* și ecuația bipatrată are 2 rădăcini *imaginare pure* simetrice *duble*.

Dacă $\frac{b}{a} = 0$, y' e *nul* ecuația se reduce la $ax^4 = 0$ și are o singură rădăcină $x = 0$ *de ordinul* 4 de multiplicitate (*cuadruplă*).

Cazul III: $b^2 - 4ac < 0$. Rădăcinile rezolvantei sunt *imaginare*; ecuația bipatrată are 4 *rădăcini imaginare* conjugate două câte două.

248. Descompunerea trinomului bipatrat în factori.

Un polinom de forma

$$t = ax^4 + bx^2 + c \tag{64}$$

e un *trinom bipatrat*. Făcând substituția $x^2 = y$ obținem un trinom de gradul al doilea în y: $ay^2 + by + c$.

Dacă y' și y'' sunt rădăcinile ecuației $ay^2 + by + c = 0$, avem

$$ay^2 + by + c \equiv a(y - y')(y - y'')$$

și reînlocuind pe y prin x^2, găsim identitatea

$$t \equiv ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 - y')(x^2 - y'') \tag{65}$$

sau

$$t \equiv a(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})(x + \sqrt{y''}). \tag{66}$$

TEOREMĂ. *Orice trinom bipatrat se poate scrie sub formă de produs de doi factori de gradul al doilea* sau de *patru factori de gradul întâi.*

OBSERVARE. In identitățile (65) sau (66) y' și y'', $\sqrt{y'}$ și $\sqrt{y''}$ pot fi numere *reale* sau *imaginare*.

249. Factori reali. Iată cum putem să descompunem un trinom bipatrat într'un produs de factori de gradul *întâi* sau *al doilea* cu coeficienți *reali*.

Să considerăm:

Ecuația bipatrată	*Substituția*	*Trinomul bipatrat*
$ax^4+bx^2+c=0$	$x^2=y$	ax^4+bx^2+c
Ecuația rezolvantă	*Rădăcinile rezolvantei*	*Trinomul rezolvantei*
$ay^2+by+c=0$	y' și y''	$ay^2+by+c.$

DISCUȚIE. Cazul I: Rădăcinile y', y'' *reale* și *neegale*. Avem

$$ay^2+by+c \equiv a(y-y')(y-y'').$$

1°. $y'>0$, $y''>0$. Punând $y'=\alpha^2$, $y''=\beta^2$ (α, β reale), trinomul bipatrat $t=ax^4+bx^2+c$ se poate scrie

$$t \equiv a(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2) \equiv a(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta),$$

cu toți factorii cu coeficienți *reali*.

2°. $y'y''<0$, de exemplu $y'>0$, $y''<0$. Punând $y'=\alpha^2$, $y''=-\beta^2$ avem

$$t \equiv a(x^2-\alpha^2)(x^2+\beta^2) \equiv a(x-\alpha)(x+\alpha)(x^2+\beta^2).$$

3°. $y'<0$, $y''<0$. Punând $y'=-\alpha^2$ $y''=-\beta^2$, găsim

$$t \equiv a(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2).$$

Cazul II: y', y'' *reale* și *egale*. Trinomul rezolvantei se poate scrie

$$ay^2+by+c \equiv a(y-y')^2.$$

1°. Pentru $y'>0$, $y'=\alpha^2$, avem $t \equiv a(x^2-\alpha^2)^2 \equiv a(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$.
2°. Pentru $y'<0$, $y'=-\alpha$, avem $t=a(x^2+\alpha^2)^2$.
3°. Pentru $y'=0$ avem $t \equiv ax^4$.

Cazul III: y', y'' *imaginare*. În acest caz avem $b^2-4ac<0$ și $ac>0$. Punând $\frac{c}{a}=\lambda^2$ (λ real) putem scrie

$$t \equiv a\left[x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}\right] \equiv a\left[x^4+\frac{b}{a}x^2+\lambda^2\right]$$

sau, adunând și scăzând pe $2\lambda x^2$,

$$t \equiv a\left[x^4+\underline{2\lambda x^2}+\lambda^2+\frac{b}{a}x^2-\underline{2\lambda x^2}\right]$$
$$\equiv a\left[(x^2+\lambda)^2-\left(2\lambda-\frac{b}{a}\right)x^2\right].$$

Pe de altă parte $b^2<4ac$ ne dă

$\frac{b^2}{a^2}<4\frac{c}{a}$ sau $\frac{b^2}{a^2}<4\lambda^2$ de unde $\frac{b}{a}<2\lambda$ sau $2\lambda-\frac{b}{a}>0$.

Punând dar $2\lambda-\frac{b}{a}=\mu^2$ (μ real), găsim

$$t \equiv a[(x^2+\lambda)^2-\mu^2x^2] \equiv a(x^2+\lambda+\mu x)(x^2+\lambda-\mu x)$$

și trinomul bipatrat e încă descompus într'un produs de doi factori de gradul al doilea cu coeficienți *reali*.

EXEMPLE. 1°. x^4-14x^2+45. Rezolvanta $y^2-14y+45=0$ are rădăcinile $y'=9$, $y''=5$. Deci

$$x^4-14x^2+45\equiv(x^2-9)(x^2-5)\equiv(x-3)(x+3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}).$$

2°. $9x^4+5x^2-4$. Rădăcinile rezolvantei sunt $y'=\frac{4}{9}$, $y''=-1$. Deci

$$9x^4+5x^2-4\equiv 9\left(x^2-\frac{4}{9}\right)(x^2+1)\equiv(3x-2)(3x+2)(x^2+1).$$

3°. $2x^4+7x^2+3$. Rezolvanta are rădăcinile $y'=-3$, $y''=-\frac{1}{2}$. Deci

$$2x^4+7x^2+3\equiv 2(x^2+3)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\equiv(x^2+3)(2x^2+1).$$

4°. $9x^4-30x^2+25$. Rezolvanta are o rădăcină *dublă*: $y'=\frac{5}{3}$. Deci

$$9x^4-30x^2+25\equiv 9\left(x^2-\frac{5}{3}\right)^2\equiv(9x^2-5)^2.$$

5°. x^4+1. Rezolvanta $y^2+1=0$ are rădăcinile *imaginare*: $y'=i$, $y''=-i$. Scriem

$$x^4+1\equiv x^4+2x^2+1-2x^2\equiv(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$$

și găsim produsul

$$x^4+1\equiv(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2}).$$

OBSERVARE. Această descompunere reduce rezolvarea unei ecuații *bipatrate* la rezolvarea unor ecuații *de gradul întâi* sau *de gradul al doilea.*

250. Ecuații reciproce. O ecuație întreagă $f(x)=0$, în care polinomul $f(x)$ e ordonat, se zice *reciprocă* în două cazuri:

1°. *Dacă termenii extremi și termenii egal depărtați de extremi au coeficienții egali și de același semn.*

2°. *Dacă termenii extremi și termenii egal depărtați de extremi au coeficienții egali și de semne contrare.*

OBSERVARE. În cazul al doilea, dacă polinomul $f(x)$, presupus *complect*, e de grad *pereche* (adică are un număr nepereche de termeni), termenul dela mijloc trebue să fie *nul.*

EXEMPLE. Ecuațiile $5x^3-7x^2-7x+5=0$ și $x^4-8x^3+8x-1=0$ sunt ecuații *reciproce*; prima e de forma 1° și cealaltă e de forma 2°.

1°. Pentru a rezolvà ecuațiile reciproce de gradul *întâi* și *al doilea* n'avem nevoe de metode speciale.

2°. O ecuație reciprocă de gradul *al treilea* e de forma

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \tag{67}$$

sau

$$ax^3+bx^2-bx-a=0. \tag{68}$$

Să considerăm prima ecuație. Grupând, câte doi, termenii cu coeficienți egali, obținem

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$$

și fiindcă avem $x^3+1 \equiv (x+1)(x^2-x+1)$, ecuația se poate scrie

$$(x+1)[ax^2-(a-b)x+a]=0,$$

și rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuațiilor

$$x+1=0 \quad \text{și} \quad ax^2-(a-b)x+a=0.$$

Printr'o transformare analoagă ecuația (68) se poate scrie

$$(x-1)[ax^2+(a+b)x+a]=0$$

și rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuațiilor

$$x-1=0 \quad \text{și} \quad ax^2+(a+b)x+a=0.$$

EXEMPLU: $3x^3-13x^2+13x-3=0$ e o ecuație *reciprocă* de forma (68). Grupând termenii cu coeficienți egali (în valoare absolută), o scriem

$$3(x^3-1)-13x(x-1)=0 \quad \text{sau} \quad (x-1)(3x^2-10x+3)=0$$

și ecuația se descompune în $x-1=0$ și $3x^2-10x+3=0$, care ne dau rădăcinile $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$.

3°. O ecuație reciprocă de gradul *al patrulea* e de forma

(69) $$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

sau

(70) $$ax^4+bx^3-bx-a=0,$$

deoarece, în cazul al doilea, termenul dela mijloc trebue să lipsească.

Grupând câte doi termenii egal depărtați de extremi, ecuația (69) se scrie

$$a(x^4+1)+b(x^3+x)+cx^2=0$$

și, împărțind ecuația cu x^2, deducem

(71) $$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Punând apoi

(72) $$x+\frac{1}{x}=y$$

obținem

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \quad \text{sau} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

și ecuația (71) se transformă într'o ecuație de gradul al doilea în y

(73) $$a(y^2-2)+by+c=0 \quad \text{sau} \quad ay^2+by+c-2a=0,$$

care se numește *rezolvanta* ecuației reciproce (69).

Inlocuind în relația

$$x+\frac{1}{x}=y \quad \text{sau} \quad x^2-xy+1=0$$

pe y, succesiv, prin rădăcinile y' și y'' ale ecuației rezolvante (73), obținem două ecuații de gradul al doilea

$$(74) \qquad x^2-xy'+1=0 \quad \text{și} \quad x^2-xy''+1=0,$$

care, rezolvate, ne dau cele patru rădăcini ale ecuației reciproce (69).

OBSERVARE. Fiindcă produsul rădăcinilor fiecărei ecuații (74) e egal cu 1, rădăcinile ecuației reciproce sunt de forma: $x_1=\alpha$, $x_2=\frac{1}{\alpha}$; $x_3=\beta$, $x_4=\frac{1}{\beta}$.

Pentru a rezolvà ecuația (70), o scriem

$$a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$$

sau, punând x^2-1 ca factor comun, găsim

$$(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$$

și problema se reduce la rezolvarea a două ecuații de gradul al doilea:

$$x^2-1=0 \quad \text{și} \quad ax^2+bx+a=0.$$

EXEMPLU: $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$.

Ecuația e *reciprocă* de forma (69). Grupând termenii egal depărtați de extremi

$$x^4+1-3(x^3+1)-2x^2=0$$

și împărțind cu x^2, ecuația se scrie

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

Punând apoi $x+\frac{1}{x}=y$ și $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, obținem *rezolvanta*:

$$y^2-3y-4=0,$$

care are rădăcinile $y'=4$ și $y''=-1$.

Inlocuind pe y prin aceste valori în $x^2-xy+1=0$, obținem ecuațiile

$$x^2-4x+1=0 \quad \text{și} \quad x^2+x+1=0,$$

care ne dau rădăcinile ecuației reciproce:

$$x_1=2+\sqrt{3}, \quad x_2=2-\sqrt{3}; \quad x_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

OBSERVARE. Rădăcinile, două câte două, sunt *una inversa celeilalte*, fiindcă avem

$$x_2=2-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{x_1},$$

$$x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{2(-1+i\sqrt{3})}=\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{1}{x_3}.$$

4°. O ecuație reciprocă de gradul *al cincilea* e de forma

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{75}$$

sau

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0. \tag{76}$$

Ecuația (75) admițând rădăcina $x=-1$, membrul întâi al ei e divizibil prin $x+1$; prin urmare ecuația se poate scrie

$$(x+1)[ax^4-(a-b)x^3+(a-b+c)x^2-(a-b)x+a]=0$$

și se descompune în $x+1=0$ și

$$ax^4-(a-b)x^3+(a-b+c)x^2-(a-b)x+a=0.$$

Reducem astfel rezolvarea ecuației (75) la rezolvarea unei ecuații reciproce de gradul *al patrulea.*

In mod analog se rezolvă și ecuația (76), observând că polinomul din membrul întâi se anulează pentru $x=1$, deci e divizibil prin $x-1$.

251. Ecuații binome. Se numește *ecuație binomă* o ecuație de forma

$$Ax^p+Bx^q=0, \tag{77}$$

în care membrul întâi e un *binom* întreg în x.

Dacă $p>q$, de exemplu $p=q+m$, punând x^q în factor, ecuația se poate scrie

$$x^q(Ax^m+B)=0 \tag{78}$$

și se descompune în $x^q=0$ și

$$Ax^m+B=0 \quad \text{sau} \quad x^m=-\frac{B}{A}. \tag{79}$$

Ecuația $x^q=0$ ne dă q rădăcini *nule.* Celelalte rădăcini ale ecuației (77) sunt date de ecuația (79), care e de forma

$$x^m=a \qquad \left[a=-\frac{B}{A}\right]. \tag{80}$$

Rădăcinile ecuației binome (80) sunt rădăcinile a m-a *algebrice* (1) ale numărului a, adică valorile algebrice, care ridicate la puterea m ne dau pe a. Ecuația fiind de grad m, admite m rădăcini [182]:

Există dar m numere algebrice (reale sau imaginare), *care se pot reprezentă prin simbolul* $\sqrt[m]{a}$.

---

(1) Aci se confundă cele două înțelesuri ale cuvântului *rădăcină*: 1°. rădăcina sau soluția unei ecuații și 2°. rădăcina dela extragerea rădăcinii dintr'un număr.

OBSERVARE. Dacă a e *real* și *pozitiv*, există un număr și numai *unul* real și pozitiv $\alpha = \sqrt[m]{a}$, care se numește rădăcina a m-a *aritmetică* a lui a [122].

Pentru rădăcinile *algebrice* ale unui număr *real* a, avem următoarea

REGULĂ. 1°. Dacă m e *nepăreche*, ecuația $x^m = a$ admite *o rădăcină reală* și *numai una*; ea e *de același semn cu* a. Celelalte $m-1$ rădăcini sunt imaginare.

2°. Dacă m e *păreche* și a *pozitiv*, ecuația $x^m = a$ admite *două rădăcini reale* simetrice: $x_1 = +\sqrt[m]{a}$ (rădăcina aritmetică) și $x_2 = -\sqrt[m]{a}$; celelalte $m-2$ rădăcini sunt imaginare.

3°. Dacă m e *păreche* și a *negativ*, ecuația $x^m = a$ *nu admite nicio rădăcină reală*; toate rădăcinile ei sunt imaginare.

EXEMPLE. 1°. $x^4 - 9 = 0$ sau $x^4 = 9$. Rădăcina *aritmetică* e $x_1 = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Rădăcinile *algebrice reale* sunt $x_1 = +\sqrt{3}$ și $x_2 = -\sqrt{3}$; celelalte două rădăcini sunt *imaginare*.

2°. $32x^5 - 243 = 0$ sau $x^5 = \frac{243}{32}$. Rădăcina aritmetică adică $x_1 = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}$ e singura rădăcină *reală*; celelalte 4 rădăcini sunt imaginare.

3°. $x^5 + 243 = 0$ sau $x^5 = -243$ are o singură rădăcină *reală* $x_1 = \sqrt[5]{-243} = -3$; celelalte 4 rădăcini sunt imaginare.

4°. $3x^8 + 5 = 0$ sau $x^8 = -\frac{5}{3}$ are toate rădăcinile *imaginare*.

Rezolvarea complectă. Pentru a găsi *toate* rădăcinile, reale și imaginare, ale unei ecuații binome de forma

$$x^m = a, \tag{80}$$

căutăm să descompunem binomul $x^m - a$ într'un produs de factori, cari, egalați cu 0, să ne dea ecuații pe care să le putem rezolvà.

Dacă cunoaștem o rădăcină $x = \alpha$ a ecuației (80), avem $\alpha^m = a$ și punând

$$x = \alpha y, \tag{81}$$

ecuația binomă devine $\alpha^m y^m = \alpha^m$ sau

$$y^m = 1. \tag{82}$$

Astfel rezolvarea ecuației (80) se reduce la rezolvarea ecuației (82) și la înmulțirea (81).

REGULĂ. *Dacă* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *sunt rădăcinile a* m*-a ale unității* (rădăcinile ecuației $y^m = 1$) *și dacă* α *e o rădăcină a* m*-a a numărului* a, *toate rădăcinile a* m*-a ale numărului* a (adică *toate rădăcinile ecuației binome* $x^m = a$) *sunt*:

$$x_1 = \alpha y_1, \quad x_2 = \alpha y_2, \quad \ldots, \quad x_m = \alpha y_m.$$

EXEMPLU. Ca să rezolvăm ecuația binomă $x^3+27=0$ sau $x^3=-27$, *care are rădăcina* $x_1=-3$, e deajuns să rezolvăm ecuația $y^3=1$ sau $y^3-1=0$, adică să calculăm *rădăcinile cubice ale unității.*

Fiindcă avem $y^3-1\equiv(y-1)(y^2+y+1)$, ecuația $y^3-1=0$ se descompune în $y-1=0$ și $y^2+y+1=0$ și ne dă rădăcinile

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad y_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Inmulțind cu -3 fiecare din aceste numere, găsim

$$x_1=-3,\quad x_2=\frac{3-3i\sqrt{3}}{2},\quad x_3=\frac{3+3i\sqrt{3}}{2},$$

care sunt rădăcinile ecuației $x^3+27=0$.

Rădăcinile unității se pot calculà ușor în următoarele cazuri:

1°. $x^3-1=0$. Binomul x^3-1 se anulează pentru $x=1$, deci e *divizibil* prin $x-1$ și efectuând împărțirea găsim

$$x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1);$$

prin urmare ecuația $x^3-1=0$ are o rădăcină reală $x_1=1$ și două rădăcini imaginare conjugate, date de ecuația $x^2+x+1=0$.

2°. $x^3+1=0$. In mod analog găsim

$$x^3+1\equiv(x+1)(x^2-x+1).$$

Ecuația are o rădăcină reală $x_1=-1$ și două rădăcini imaginare conjugate, date de ecuația $x^2-x+1=0$.

3°. $x^4-1=0$. Avem $x^4-1\equiv(x^2-1)(x^2+1)$.

Ecuația are două rădăcini reale $+1$ și -1 date de $x^2-1=0$ și două rădăcini imaginare $+i$ și $-i$ date de $x^2+1=0$.

4°. $x^4+1=0$. Putem scrie

$$x^4+1\equiv x^4+2x^2+1-2x^2\equiv(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$$
$$\equiv(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Ecuația are 4 rădăcini imaginare, conjugate două câte două, date de ecuațiile

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0\quad\text{și}\quad x^2-x\sqrt{2}+1=0.$$

5°. $x^5-1=0$. Avem $x^5-1\equiv(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Ecuația are 1 rădăcină reală $x_1=1$ și 4 rădăcini imaginare, care se obțin rezolvând ecuația *reciprocă*: $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ [**250**, 3].

6°. $x^5+1=0$. Avem $x^5+1\equiv(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.

Ecuația are 1 rădăcină reală $x_1=-1$ și 4 rădăcini imaginare, care se obțin rezolvând ecuația *reciprocă*: $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

7°. In acelaș fel observând că avem identitățile:

$$x^6-1 \equiv (x^3-1)(x^3+1), \quad x^8-1 \equiv (x^4-1)(x^4+1),$$
$$x^{10}-1 \equiv (x^5-1)(x^5+1),$$

rezolvările complecte ale ecuațiilor binome

$$x^6-1=0, \quad x^8-1=0, \quad x^{10}-1=0$$

se reduc la rezolvările unor ecuații binome din cazurile precedente.

252. Ecuații trinome. Se numește ecuație *trinomă* o ecuație de forma

$$ax^p+bx^q+cx^r=0, \tag{83}$$

în care membrul întâi e un *trinom*, pe care-l presupunem ordonat după puterile descrescătoare ale lui x.

Dacă avem $p-q=q-r=n$, deducem

$$q=r+n, \quad p=q+n=r+2n$$

și ecuația trinomă (83) se poate scrie

$$ax^{r+2n}+bx^{r+n}+cx^r=0 \tag{84}$$

sau

$$x^r(ax^{2n}+bx^n+c)=0$$

și se descompune în $x^r=0$ și

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \tag{85}$$

Prin urmare ecuația (84) are r rădăcini *nule* și alte $2n$ rădăcini, care se obțin rezolvând ecuația (85).

Punând

$$x^n=y \quad \text{deci} \quad x^{2n}=y^2 \tag{86}$$

ecuația (85) devine o ecuație *de gradul al doilea* în y

$$ay^2+by+c=0 \tag{87}$$

și, pentru fiecare rădăcină y' și y'' a ecuației (87), ecuațiile binome $x^n=y'$ și $x^n=y''$ ne dau câte n rădăcini pentru ecuația trinomă (85).

REGULĂ. *Ca să rezolvăm o ecuație trinomă de forma*

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

1°. Punând $x^n=y$ *formăm ecuația de gradul al doilea*

$$ay^2+by+c=0;$$

2°. *Căutăm soluțiile* y' *și* y'' *ale acestei ecuații;*

3°. *Rezolvăm ecuațiile binome* $x^n = y'$, $x^n = y''$.

EXEMPLU: $x^7 - 19x^4 - 216x = 0$. Punând pe x în factor comun, ecuația se scrie $x(x^6 - 19x^3 - 216) = 0$ și se descompune în $x = 0$ și $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$. Făcând substituția $x^3 = y$, ultima ecuație devine $y^2 - 19y - 216 = 0$ și admite rădăcinile $y' = 27$, $y'' = -8$. Rămâne dar să rezolvăm ecuațiile binome

$$(\alpha) \quad x^3 = 27, \qquad (\beta) \quad x^3 = -8.$$

Rădăcinile cubice ale *unității* fiind

$$(\gamma) \quad 1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

o rădăcină a ecuației (α) fiind $\sqrt[3]{27} = 3$; o rădăcină a ecuației (β) fiind $\sqrt[3]{-8} = -2$; rădăcinile ecuațiilor binome (α) și (β) sunt numerele (γ) înmulțite respectiv cu 3 și -2. Prin urmare rădăcinile ecuației *trinome* date sunt

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{2};$$
$$x_5 = -2, \quad x_6 = 1 - i\sqrt{3}, \quad x_7 = 1 + i\sqrt{3}.$$

IV. — SISTEME DE ECUAȚII NELINIARE.

253. O ecuație cu mai multe necunoscute. Să considerăm o ecuație de gradul al doilea cu *două* necunoscute x și y, de forma cea mai generală

$$(88) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Membrul întâi e un *polinom* de gradul *al doilea* în x și y. Valoarea numerică a lui depinde de valorile, pe care le dăm variabilelor x și y. Dacă pentru $x = x_0$ și $y = y_0$ membrul întâi al ecuației (88) are valoarea *zero*, zicem că numerele x_0 și y_0 formează *un sistem de soluții* al acestei ecuații.

REGULĂ. Ca să găsim *un sistem de soluții* pentru o ecuație cu *două* necunoscute, procedăm în modul următor:

1°. *Luăm pentru* x *o valoare arbitrară* x_0.

2°. *Înlocuim în ecuație, pe* x *prin* x_0 și obținem o ecuație *cu o singură necunoscută* y.

3°. *Rezolvăm această ecuație.*

Dacă ecuația e de gradul al doilea în y, găsim, în general, *două* rădăcini y' și y'' (reale sau imaginare). Perechile de valori x_0, y' și x_0, y'', astfel obținute, sunt două sisteme de soluții pentru ecuația dată.

In particular, ecuația (88) pentru $x = x_0$ devine

$$cy^2 + (bx_0 + e)y + ax_0^2 + dx_0 + f = 0 \tag{89}$$

și formula

$$y = \frac{1}{c}\left[-(bx_0 + e) \pm \sqrt{(bx_0 + c)^2 - 4c(ax_0^2 + dx_0 + f)}\right] \tag{90}$$

ne dă pentru y două valori corespunzătoare y_0' și y_0''.

Inlocuind pe x_0 succesiv prin $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, obținem astfel pentru ecuația (88) *o infinitate de sisteme de soluții*:

$$x_0, y_0'; \quad x_0, y_0''; \quad x_1, y_1'; \quad x_1, y_1''; \quad \ldots; \quad x_n, y_n'; \quad x_n, y_n''; \quad \ldots$$

OBSERVARE. Dacă ecuația (80) are coeficienții *reali* și dacă se caută numai soluțiile *reale*, se pot întâmpla *trei cazuri*.

Pentru un număr real $x = x_0$ (*dat* sau ales *arbitrar*) cantitatea de sub radical din formula (90) poate fi: 1°. *pozitivă*; 2°. *nulă*; 3°. *negativă*.

In fiecare din aceste cazuri, valorile lui y sunt: 1°. *reale* și *neegale* (y_0', y_0''); 2°. *reale* și *egale* (y_0); 3°. *imaginare*; și ecuația (88), pentru $x = x_0$,

în cazul 1° admite *două* sisteme de soluții *distincte* x_0, y_0'; x_0, y_0'';

în cazul 2° admite *un singur* sistem de soluții x_0, y_0;

în cazul 3° nu admite niciun sistem de soluții *reale*.

EXEMPLU. Ecuația $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$, ordonată după puterile lui y se scrie $y^2 - 2y + x^2 - x + 1 = 0$ și ne dă

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - (x^2 - x + 1)} = 1 \pm \sqrt{x(1 - x)}. \tag{91}$$

Pentru fiecare valoare reală a lui x *cuprinsă între* 0 *și* 1 cantitatea de sub radical e *pozitivă* și formula (91) ne dă pentru y *două* valori *reale* și *distincte*. Astfel, pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $y_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ și $y_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Pentru $x = 0$ sau $x = 1$ cantitatea de sub radical e *nulă* și găsim $y = 1$.

Pentru $x < 0$ și pentru $x > 1$ cantitatea de sub radical e *negativă* și valorile lui y sunt *imaginare*.

GENERALIZARE. Ca să rezolvăm *o ecuație cu mai multe necunoscute*

$$f(x, y, z, \ldots) = 0, \tag{92}$$

procedăm în mod analog:

1°. Luăm pentru toate necunoscutele $(y, z, \ldots)$, *afară de una* (x), valori *arbitrare* $(y_0, z_0, \ldots)$.

2°. *Formăm ecuația cu o singură necunoscută* $f(x, y_0, z_0, \ldots) = 0$.

3°. *Rezolvăm această ecuație.*

Dacă $f(x, y, z, \ldots)$ e un polinom de grad n în x, rezolvând ecuația $f(x, y_0, z_0, \ldots) = 0$ găsim p rădăcini distincte $x_1, x_2, \ldots, x_p$

$(1 \leqq p \leqq n)$ (1), care *asociate cu* $y_0, z_0, \ldots$ ne dau p sisteme de soluții pentru ecuația (92):

$$x_1, y_0, z_0, \ldots; \quad x_2, y_0, z_0, \ldots; \quad x_p, y_0, z_0, \ldots$$

La fiecare sistem de valori $y_0, z_0, \ldots$, *date* sau luate *arbitrar* pentru necunoscutele $y, z, \ldots$, corespund cel puțin *unul* și cel mult n sisteme de soluții pentru ecuația (92). Prin urmare: *o ecuație întreagă cu mai multe necunoscute admite o infinitate de sisteme de soluții.*

254. Sistem de ecuații neliniare. Dacă avem *două* ecuații cu *două* necunoscute

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0, \tag{93}$$

fiecare ecuație, luată separat, admite câte o *infinitate* de sisteme de soluții; dar — în general — un sistem de soluții al uneia dintre ecuații *nu satisface și pe cealaltă ecuație.*

Totuși se pot găsi, ca și la ecuațiile liniare [208], sisteme de soluții *comune* pentru *ambele ecuații*: acestea sunt *soluțiile sistemului de ecuații* (93). A *rezolvà* sistemul însemnează a găsi aceste soluții *comune.*

Vom considerà două cazuri:

I. Când sistemul dat e format dintr'o *ecuație de gradul al doilea* și *o ecuație de gradul întâi.*

II. Când sistemul e format din *două ecuații de gradul al doilea.*

Cazul I. Avem

$$\begin{aligned} &(I) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ &(II) \quad mx + ny + p = 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Sistemul se poate rezolvà prin metoda *substituției* [208]. Ecuația (II), *de gradul întâi*, ne dă

$$y = \frac{-mx - p}{n} \tag{95}$$

și substituind această expresie în locul lui y în ecuația (I), obținem o ecuație *cu o singură necunoscută* x, de gradul *al doilea* cel mult, adică de forma

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0. \tag{96}$$

Discuție. 1°. Dacă $\alpha \neq 0$ și $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, ecuația (96) este de gradul al doilea și are *două* rădăcini x' și x''; formula (95), pentru

(1) Dacă ecuația are o rădăcină *multiplă* de ordin n, avem $p = 1$; dacă toate rădăcinile sunt *simple* avem $p = n$; dacă ecuația are rădăcini multiple *de ordin mai mic decât* n, avem $1 < p < n$ [185].

$x = x'$ și $x = x''$, ne dă pentru y *două* valori corespunzătoare y' și y''. Sistemul (94) admite dar *două sisteme de soluții*: x', y' și x'', y''.

2°. Dacă $\alpha \neq 0$ și $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ecuația (96) e tot de gradul al doilea, dar are *o singură rădăcină* x' (dublă).

3°. Dacă $\alpha = 0$ și $\beta \neq 0$, ecuația (96) e de gradul *întâi* și are o singură rădăcină x'.

In amândouă cazurile 2° și 3° formula (95), pentru $x = x'$, ne dă o singură valoare $y = y'$ și sistemul (94) admite *un singur sistem de soluții*: x', y'.

4°. Dacă $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dar $\gamma \neq 0$, ecuația (96) nu admite soluții și sistemul (94) e *imposibil*.

5°. Dacă și $\alpha = 0$ și $\beta = 0$ și $\gamma = 0$, ecuația (96) e o *identitate*; luând pentru x o valoare *arbitrară* x_0 și pentru y valoarea corespunzătoare y_0 [dată de formula (95) pentru $x = x_0$], perechile de valori x_0, y_0 sunt soluții ale sistemului (94). In acest caz sistemul (94) admite *o infinitate de sisteme de soluții*.

EXEMPLU. Să considerăm sistemul

$$(97) \qquad \begin{aligned} &(I) \quad 3x^2 - 2xy - y^2 + x - 1 = 0, \\ &(II) \quad px - y - 6 = 0, \end{aligned}$$

în care p e un număr presupus cunoscut.

Ecuația (II) ne dă $y = px - 6$ și substituind această expresie în locul lui y în ecuația (I), obținem o ecuație de gradul al doilea în x

$$(98) \qquad -(p^2 + 2p - 3)x^2 + (12p + 13)x - 37 = 0.$$

Trinomul $p^2 + 2p - 3$ (1) se anulează pentru $p = 1$ și $p = -3$. Prin urmare pentru p diferit de 1 și -3 ecuația (96) e de gradul *al doilea*.

De exemplu, *pentru* $p = -1$, ecuația (98) devine $4x^2 + x - 37 = 0$ și admite rădăcinile $x' = 2{,}92$, $x'' = -3{,}17$. Ecuația (97, II) devine $-x - y - 6 = 0$ și ne dă pentru y valorile corespunzătoare $y' = -8{,}92$, $y'' = -2{,}83$. Sistemul (97) admite *două sisteme de soluții*: $x' = 2{,}92$, $y' = -8{,}92$ și $x'' = -3{,}17$, $y'' = -2{,}83$.

Pentru $p = 1$, ecuația (98) e de gradul *întâi* și admite rădăcina $x' = 1$. Ecuația (97, II) devine $x - y - 6 = 0$ și ne dă pentru y valoarea $y' = -5$. Sistemul (97) admite *un singur sistem de soluții*: $x' = 1$, $y' = -5$.

CAZUL II. Avem

$$(99) \qquad \begin{aligned} &(I) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ &(II) \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0. \end{aligned}$$

In acest caz putem formă un sistem *echivalent* cu sistemul dat, dar în care o ecuație să fie de gradul *întâi* în raport cu *una* dintre necunoscute.

---

(1) Care ne determină valoarea a a coeficientului lui x^2.

In adevăr, înmulțind ecuația (I) cu c', ecuația (II) cu $-c$ și adunând, termenii în y^2 *se reduc* [**209**] și obținem o ecuație de forma

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0,$$

care asociată cu una dintre ecuațiile (99), de exemplu cu ecuația (I), ne dă sistemul mai simplu

$$(100)\qquad \begin{aligned} &(I)\quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,\\ &(II)\quad (\beta x + \delta)y + \alpha x^2 + \gamma x + \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

echivalent cu sistemul (99).

Rezolvarea sistemului. 1°. Dacă $\beta = 0$ și $\delta = 0$, ecuația (100, II) conține numai necunoscuta x; fie x_1 și x_2 rădăcinile ei.

Inlocuind în ecuația (100, I) pe x prin x_1 și x_2 succesiv, obținem două ecuații de gradul al doilea în y. Prima (pentru $x = x_1$) ne dă două rădăcini y_1', y_1''; a doua (pentru $x = x_2$) ne dă alte două rădăcini y_2', y_2''. Găsim astfel pentru sistemul (99) *patru* sisteme de soluții:

$$x_1, y_1'; \quad x_1, y_1''; \quad x_2, y_2'; \quad x_2, y_2''.$$

OBSERVARE. Numărul sistemelor de soluții distincte *e mai mic decât* 4, când cel puțin una dintre ecuațiile auxiliare de gradul al doilea (numai în x sau numai în y) are rădăcinile *egale*.

2°. Dacă numerele β și δ *nu sunt amândouă nule*, putem elimină necunoscuta y, între ecuațiile (100), prin *substituție* [**208**].

Ecuația (100, II) ne dă

$$(101)\qquad y = \frac{-\alpha x^2 - \gamma x - \varepsilon}{\beta x + \delta}$$

și substituind această expresie în locul lui y în ecuația (100, I) obținem o ecuație, care, sub formă întreagă, e — în general — de gradul *al patrulea* în x.

Dacă rădăcinile ei sunt x_1, x_2, x_3, x_4, formula (101) ne dă, pentru fiecare valoare a lui x, câte o valoare pentru y: y_1, y_2, y_3, y_4 și sistemul (100) admite sistemele de soluții:

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3; \quad x_4, y_4.$$

EXEMPLU. Să considerăm sistemul

$$(102)\qquad \begin{aligned} &(I)\quad 8x^2 - 54xy - 11y^2 + 30x + 54y - 27 = 0,\\ &(II)\quad -4x^2 + y^2 + 12x - 9 = 0. \end{aligned}$$

Adunând ecuația întâi cu a doua înmulțită cu 11, obținem o ecuație de gradul *întâi* în y

$$(103)\qquad 2x^2 + 3xy - 9x - 3y + 7 = 0,$$

care se mai poate scrie

$$(x-1)(3y+2x-7)=0$$

și care asociată cu ecuația (102, II), ne dă un sistem echivalent cu (102).

Noul sistem se descompune în

$$(104)\quad \begin{matrix} -4x^2+y^2+12x-9=0 \\ x-1=0 \end{matrix} \qquad \text{și} \qquad (105)\quad \begin{matrix} -4x^2+y^2+12x-9=0 \\ 3y+2x-7=0. \end{matrix}$$

A doua ecuație (104) ne dă $x=1$; prima ecuație (104), pentru $x=1$, devine $y^2-1=0$ și ne dă pentru y valorile 1 și -1.

Din a doua ecuație (105) scoțând valoarea lui y și substituind-o în ecuația întâi, deducem o ecuație de gradul al doilea în x

$$2x^2-5x+2=0,$$

care admite rădăcinile 2 și $\frac{1}{2}$. Valorile lui y corespunzătoare sunt 1 și 2.

Sistemul (102) admite dar *patru* sisteme de soluții:

$$x_1=1,\ y_1=1;\quad x_2=1,\ y_2=-1;\quad x_3=2,\ y_3=1;\quad x_4=\tfrac{1}{2},\ y_4=2.$$

255. Sisteme particulare. 1°. Sistemul

$$(106)\quad \begin{matrix} (I) & x+y=a \\ (II) & xy=b. \end{matrix}$$

Ecuația (I) ne dă $x=a-y$ și înlocuind în ecuația (II) pe x prin $a-y$, obținem o ecuație de gradul al doilea

$$(107)\quad y^2-ay+b=0,$$

care ne dă *două* rădăcini: y_1 și y_2 (diferite sau egale). Valorile corespunzătoare ale lui x sunt $x_1=a-y_1$ și $x_2=a-y_2$.

OBSERVARE. In acest caz, cunoscând suma a a soluțiilor și produsul lor b, soluțiile x și y sunt rădăcinile ecuației $z^2-az+b=0$ [**236**, Problemă]. Găsim astfel următoarele două sisteme de soluții: $x_1=z'$, $y_1=z''$ și $x_2=z''$, $y_2=z'$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{matrix} x+y=-\frac{3}{2}, \\ xy=-10. \end{matrix}$$

Valorile necunoscutelor x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2+\tfrac{3}{2}z-10=0 \quad \text{sau} \quad 2z^2+3z-20=0,$$

care ne dă $z'=2{,}5$, $z''=-4$ și soluțiile sistemului sunt:

$$x_1=2{,}5,\ y_1=-4;\quad x_2=-4,\ y_2=2{,}5.$$

2°. Sistemul

$$(108)\quad \begin{matrix} (I) & x-y=a, \\ (II) & xy=b, \end{matrix}$$

se poate rezolvă prin *substituție* ca și sistemul (106).

3°. Sistemul

$$(109)\qquad \begin{aligned} &(I) \quad x+y=a,\\ &(II) \quad x^2+y^2=b. \end{aligned}$$

Scoțând valoarea lui x din ecuația întâi și substituind-o în ecuația a doua, obținem

$$(110)\qquad (a-y)^2+y^2=b \quad \text{sau} \quad 2y^2-2ay+a^2-b=0.$$

Această ecuație ne dă pentru y *două* valori: y_1 și y_2 (diferite sau egale). Valorile corespunzătoare ale necunoscutei x sunt $x_1=a-y_1$ și $x_2=a-y_2$ (și ele diferite sau egale).

Observare. Sistemul (109) se mai poate rezolvă și în modul următor: Ridicând la patrat ambii membri ai ecuației (109, I), obținem

$$(111)\qquad x^2+2xy+y^2=a^2.$$

Fiindcă ecuația (109, II) ne dă $x^2+y^2=b$, ecuația (111) se mai poate scrie $2xy=a^2-b$ și, împreună cu ecuația (I), ne dă sistemul *echivalent cu* (109):

$$x+y=a,$$
$$xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Reducem astfel problema la cazul 1° [sistemul (106)].

Exemplu. Sistemul

$$(112)\qquad \begin{aligned} &(I) \quad x+y=4,\\ &(II) \quad x^2+y^2=14. \end{aligned}$$

Scoțând valoarea $y=4-x$ din ecuația (I) și substituind-o în ecuația (II), obținem $x^2-4x-1=0$. De aci deducem $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$ și relația $y=4-x$ ne dă $y_1=2-\sqrt{3}$, $y_2=2+\sqrt{3}$.

4°. Sistemul

$$(113)\qquad \begin{aligned} &(I) \quad x^2-y^2=a,\\ &(II) \quad x+y=b. \end{aligned}$$

Impărțind ecuația (I), $(x-y)(x+y)=a$, prin ecuația (II), membru cu membru, deducem

$$(III)\qquad x-y=\frac{a}{b}.$$

Sistemul (II), (III), echivalent cu (I), (II), e de gradul *întâi* [**209**, Exemplul 1°]. Adunând și scăzând ecuațiile (II) și (III) obținem

$$2x=b+\frac{a}{b},\quad 2y=b-\frac{a}{b} \quad \text{sau} \quad x=\frac{b^2+a}{2b},\quad y=\frac{b^2-a}{2b}.$$

In mod analog se rezolvă sistemul

(114)
$$x^2 - y^2 = a,$$
$$x - y = b.$$

5°. Sistemul

(115)
$$(I) \quad x^2 + y^2 = a,$$
$$(II) \quad xy = b.$$

Ridicând la patrat ambii membri ai ecuației (II), deducem

$$(III) \quad x^2y^2 = b^2$$

și sistemul (I), (III), mai general decât (I), (II), ne dă *suma* și *produsul* cantităților x^2, y^2. Procedând ca în cazul 1°, dacă z' și z'' sunt rădăcinile ecuației

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

avem $x^2 = z'$, $y^2 = z''$ sau $x^2 = z''$, $y^2 = z'$; prin urmare

$$x = \pm\sqrt{z'}, \quad y = \pm\sqrt{z''} \quad \text{sau} \quad x = \pm\sqrt{z''}, \quad y = \pm\sqrt{z'}.$$

Primul grup ne dă 4 sisteme de soluții; al doilea grup ne dă alte 4. Ecuațiile (I), (III) admit dar în total 8 sisteme de soluții. Dintre acestea *numai* 4 *sisteme de soluții satisfac la ecuația* $xy = b$; celelalte 4 sunt soluții *străine*, introduse prin ridicarea la patrat (1).

EXEMPLU. Ca să rezolvăm sistemul

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$xy = 12,$$

luăm $x^2 + y^2 = 25$, $x^2y^2 = 144$. Ecuația $z^2 - 25z + 144 = 0$ are rădăcinile $z' = 9$, $z'' = 16$ și ne dă $x^2 = 9$, $y^2 = 16$ sau $x^2 = 16$, $y^2 = 9$, adică $x = \pm 3$, $y = \pm 4$ sau $x = \pm 4$, $y = \pm 3$. Dintre acestea numai 4 sisteme de soluții satisfac la ecuația $xy = 12$ și anume:

$$x_1 = 3, \ y_1 = 4; \quad x_2 = -3, \ y_2 = -4; \quad x_3 = 4, \ y_3 = 3; \quad x_4 = -4, \ y_4 = -3.$$

256. Maxime și minime. Zicem că o cantitate variabilă trece printr'un *maxim* sau printr'un *minim*, când capătă o valoare *mai mare* sau *mai mică* decât toate valorile pe care le ia imediat înainte și imediat după această valoare.

Astfel dacă am considerà un relief geografic, *altitudinea* solului e o cantitate *variabilă*, în general, dela un loc la altul. Vârfurile munților și fundurile văilor sunt puncte unde această altitudine e *maximă* sau *minimă*.

(1) Sunt soluțiile sistemului $x^2 + y^2 = a$, $xy = -b$.

TEOREMA I. *Produsul a două numere variabile — dar cu suma constantă — e* maxim *când numerele sunt egale.*

In adevăr, dacă pentru două numere reale x și y avem

$$x+y=c \quad \text{(constant)}, \qquad xy=v \quad \text{(variabil)},$$

x și y sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$z^2-cz+v=0$$

și deducem

$$x=\frac{c+\sqrt{c^2-4v}}{2}, \qquad y=\frac{c-\sqrt{c^2-4v}}{2}.$$

Când numerele x și y sunt *reale*, avem $c^2 \geqq 4v$ sau

$$v \leqq \frac{c^2}{4}. \tag{116}$$

Produsul v are valoarea *maximă* $\frac{c^2}{4}$ pentru $x=y=\frac{c}{2}$.

OBSERVARE. Și identitatea

$$4xy \equiv (x+y)^2-(x-y)^2$$

ne arată că, dacă $x+y=c$ (constant), avem

$$4xy=c^2-(x-y)^2<c^2 \qquad \text{pentru} \qquad x-y \neq 0$$

adică pentru $x \neq y$. Produsul xy are valoarea *cea mai mare* (*maximă*), când diferența $x-y$ e *nulă*, adică pentru $x=y=\frac{c}{2}$.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile, *care au același perimetru*, patratul închide aria maximă.

In adevăr, dacă înșemnăm cu x lungimea, cu y lățimea și cu p perimetrul unuia dintre aceste dreptunghiuri, avem $2x+2y=p$ sau $x+y=\frac{p}{2}$ (constant) și, după teorema I, aria xy e *maximă*, când $x=y=\frac{p}{2}$ sau când dreptunghiul devine *patrat*.

TEOREMA II. *Suma a două numere variabile — dar cu produsul constant — e* minimă *când numerele sunt egale.*

In adevăr, dacă avem

$$x+y=v \quad \text{(variabil)}, \qquad xy=c \quad \text{(constant)},$$

x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2-vz+c=0$$

și deducem

$$x=\frac{v+\sqrt{v^2-4c}}{2}, \qquad y=\frac{v-\sqrt{v^2-4c}}{2}.$$

Pentru ca numerele x și y să fie *reale* și *pozitive*, trebue să avem

$$v^2 \geqq 4c \quad \text{sau} \quad v \geqq 2\sqrt{c}. \tag{117}$$

Suma v are valoarea *minimă* $2\sqrt{c}$ pentru $x = y = \frac{v}{2} = \sqrt{c}$.

OBSERVARE. Și identitatea

$$(x+y)^2 \equiv 4xy + (x-y)^2$$

ne arată că, dacă $xy = c$ (constant), avem

$$(x+y)^2 = 4c + (x-y)^2 > 4c \quad \text{pentru } x-y \neq 0$$

adică pentru $x \neq y$. Suma $x+y$ are valoarea *cea mai mică* (*minimă*), când diferența $x-y$ e *nulă*, adică pentru $x = y = 2\sqrt{c}$.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile, *care au aceeaș arie* patratul are perimetrul minim.

In adevăr, după teorema II, toate aceste dreptunghiuri având aria $xy = a$ (constantă), perimetrul $2(x+y)$ e *minim*, când $x = y = \sqrt{a}$ sau când dreptunghiul devine *patrat*.

257. Extragerea rădăcinii din numere complexe. Zicem că un număr *complex* (imaginar) $x+yi$ e *rădăcină patrată* a unui număr complex dat $a+bi$, dacă avem $(x+yi)^2 = a+bi$ sau

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

Această egalitate se descompune în [228]:

$$\begin{aligned} &(\text{I}) \quad x^2 - y^2 = a, \\ &(\text{II}) \quad 2xy = b. \end{aligned} \tag{118}$$

Prin urmare: *pentru a extrage rădăcina patrată din numărul complex* $a+bi$ *trebue să rezolvăm sistemul* (118).

1°. Dacă $a = 0$ și $b = 0$, găsim $x = 0$, $y = 0$ și $x+yi = 0$.

2°. Dacă $b = 0$, numărul $a+bi$ se reduce la a (real); ecuația (118, II) ne dă sau $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă a e *pozitiv*, găsim în ambele cazuri 2 rădăcini patrate *reale* $x+yi = \pm\sqrt{a}$; dacă a e *negativ*, $(a = -a')$, găsim 2 rădăcini patrate *imaginare pure* $x+yi = \pm i\sqrt{a'}$.

3°. Dacă $b \neq 0$, ecuația (118, II) ne dă

$$y = \frac{b}{2x} \tag{119}$$

și substituind această expresie în locul lui y în ecuația (118, I), obținem o ecuație bipatrată [247]

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Punând $x^2 = z$ această ecuație se transformă într'o ecuație de gradul al doilea: $4z^2 - 4az - b^2 = 0$ și ne dă pentru z valorile

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \qquad z'' = \frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Cum $x = \pm\sqrt{z}$ trebue să fie un număr *real* și cum z' e *pozitiv* dar z'' e *negativ*, găsim pentru x numai *două soluții reale*:

$$x_1 = \sqrt{z'} \quad \text{și} \quad x_2 = -\sqrt{z'}.$$

Formula (119) ne dă pentru y valorile corespunzătoare

$$y_1 = \frac{b}{2\sqrt{z'}} \quad \text{și} \quad y_2 = -\frac{b}{2\sqrt{z'}}$$

și deducem pentru $\sqrt{a+bi}$ *două* valori complexe *simetrice*:

$$x_1 + y_1 i = \sqrt{z'} + \frac{bi}{2\sqrt{z'}} \quad \text{și} \quad x_2 + y_2 i = -\sqrt{z'} - \frac{bi}{2\sqrt{z'}}.$$

EXEMPLU. Să se calculeze $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. Insemnând cu $x + yi$ această rădăcină, trebue să avem $(x+yi)^2 = 1 - i\sqrt{3}$ sau

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{și} \quad 2xy = -\sqrt{3}. \tag{120}$$

De aci deducem $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ și găsim ca rădăcini patrate valorile complexe *simetrice*

$$x_1 + y_1 i = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4} i \quad \text{și} \quad x_2 + y_2 i = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{4} i.$$

258. Probleme de gradul al doilea.

PROBLEMA I (ARITMETICĂ COMERCIALĂ). *Doi asociați au să-și împartă o sumă de 90275 lei, în care se cuprind și capitalurile și câștigurile lor. Capitalul depus de primul asociat e de 25000 lei și câștigul celui de-al doilea e de 18525 lei. Se întreabă care e capitalul celui de-al doilea și câștigul celui dintâi, știind că beneficiile sunt mai mici decât capitalurile depuse.*

Insemnând cu x capitalul asociatului al doilea și cu y câștigul asociatului întâi, avem

	Capital	*Câștig*
Asociatul I	25000	y
„ *II*	x	18525

Din enunțul problemei rezultă două egalități.

1°. Suma capitalurilor și a câștigurilor e de 90275 lei:

$$25000 + x + y + 18525 = 90275. \tag{I}$$

2°. Câștigurile sunt proporționale cu capitalurile depuse:

$$(II) \qquad \frac{25000}{y} = \frac{x}{18525}.$$

De aci deducem sistemul de gradul al doilea

$$(121) \qquad \begin{matrix} (I) & x+y = 46750 \\ (II) & xy = 463\,125\,000, \end{matrix}$$

și necunoscutele x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2 - 46750z + 463\,125\,000 = 0,$$

adică $z' = 32500$, $z'' = 14250$.

Problema algebrică admite *două* sisteme de soluții:

$x_1 = 32500$, $y_1 = 14250$ și $x_2 = 14250$, $y_2 = 32500$.

Cum ni se spune însă că beneficiile sunt *mai mici* decât capitalurile respective, numai primele valori x_1, y_1 sunt soluțiile problemei date.

Problema II (Fizică și Chimie). *Intr'o eprubetă gradată, așezată într'o cuvetă cu apă, se introduce aer, care ocupă o înălțime de* 25 cm. *la temperatura apei* (15°) *și la presiunea exterioară* (750 mm.). *Nivelul apei e același în cuvetă și în eprubetă.*

Se absoarbe apoi oxigenul cu ajutorul fosforului și se cere să se determine înălțimea gazului rămas, dacă se presupune că temperatura și presiunea exterioară n'au variat în timpul experienței.

Tensiunea maximă a vaporilor de apă la 15° este 12,6 mm.
Densitatea mercurului 13,6. Nivelul apei în cuvetă se consideră invariabil.

Dacă s e suprafața secțiunei eprubetei, volumul *aerului* din eprubetă este $25s$ cmc. și conține $0{,}79 \times 25s$ cmc. *azot* și $0{,}21 \times 25s$ cmc. *oxigen* la presiunea $750 - 12{,}6 = 737{,}4$ mm. (1).

După ce se absoarbe oxigenul, rămâne numai *azot saturat de vapori de apă* și mercurul se ridică în eprubetă cu x cm. Gazul rămas ocupă un volum de $(25-x)s$ cmc., la presiunea anterioară micșorată cu presiunea reprezentată de coloana de x cm. de *apă* sau de

$$\frac{x}{13{,}6} \text{ cm.} = \frac{x}{1{,}36} \text{ mm. } \textit{mercur.}$$

Avem dar

$$V_1 = 0{,}79 \times 25s, \quad P_1 = 737{,}4; \quad V_2 = (25-x)s, \quad P_2 = 737{,}4 - \frac{x}{1{,}36}$$

(1) In 100 cmc. de *aer* sunt 79 cmc. *azot* și 21 cmc. *oxigen*.

și legea lui Mariotte $V_1P_1 = V_2P_2$ ne dă egalitatea:

$$0{,}79 \times 25\,s \times 737{,}4 = (25-x)\,s\left(737{,}4 - \frac{x}{1{,}36}\right)$$

de unde deducem ecuația de gradul al doilea în x

$$x^2 - 1027{,}8\,x + 5766{,}5 = 0,$$

care are rădăcinile $x' = 5{,}7$ și $x'' = 1022{,}1$.

Soluția problemei e numai $x = 5{,}7$ cm. < 25 cm.

Problema III (Geometrie). *Să se înscrie într'o sferă cu raza r un cilindru, a cărui suprafață totală să fie de m ori suprafața sferei.*

Reprezentăm pe *fig.* 38 o secțiune făcută în sferă și cilindru printr'un plan, care trece prin axa cilindrului. Secțiunea *în sferă* e un cerc cu centrul în O și cu raza r (centrul și raza sferei), iar *în cilindru* e un dreptunghiu ABCD.

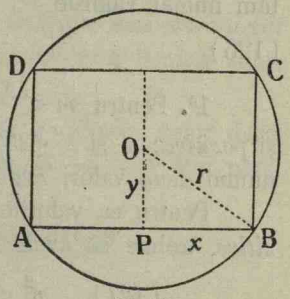


Fig. 38.

1°. Necunoscutele. Insemnăm: diametrul bazei cilindrului $AB = 2\,PB = 2x$; înălțimea cilindrului $AD = 2\,PO = 2y$.

2°. Scrierea ecuațiilor. Triunghiul dreptunghic BOP ne dă

$$(I) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

egalitate, care exprimă că cilindrul e *înscris* în sferă.

A doua ecuație e dată de relația dintre suprafața totală a cilindrului și suprafața sferei:

$$2\pi x^2 + 2\pi x.2y = m.4\pi r^2$$

sau

$$(II) \qquad x^2 + 2xy = 2mr^2 \qquad (m \text{ pozitiv}).$$

Avem astfel, pentru a determină pe x și y, un sistem de două ecuații de gradul al doilea cu două necunoscute.

3°. Rezolvarea. Ecuația (II) ne dă

$$(122) \qquad y = \frac{2mr^2 - x^2}{2x};$$

înlocuind pe y prin această expresie în ecuația (I) obținem

$$(123) \qquad 5x^4 - 4r^2(m+1)x^2 + 4m^2r^4 = 0$$

sau, făcând $x^2 = z$,

$$(124) \qquad 5z^2 - 4r^2(m+1)z + 4m^2r^4 = 0,$$

Dacă z' și z'' sunt rădăcinile ecuației (124), deducem pentru x patru valori $\pm\sqrt{z'}$ și $\pm\sqrt{z''}$ și formula (122) ne dă pentru y alte patru valori corespunzătoare. Acestea sunt soluțiile *algebrice* ale sistemului (I), (II). Dintre acestea numai sistemele de soluții x și y *reale* și *pozitive* pot aveà un sens pentru problema *geometrică* dată.

Discuție. Rădăcinile ecuației (124) sunt *reale*, dacă avem

(125) $4r^4(m+1)^2 - 20m^2r^4 \geqq 0$ sau $4m^2 - 2m - 1 \leqq 0$.

Trinomul $4m^2 - 2m - 1$, care se anulează pentru $m = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, e *negativ* pentru m cuprins între aceste rădăcini. Rămâne dar să discutăm numai valorile

(126) $$0 < m \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1°. Pentru $m < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ecuația în z (124) admite 2 rădăcini *reale* și *pozitive*: z' și z'' [237]. Fie $z' < z''$. Aceste rădăcini ne dau pentru x numai *două* valori *reale* și *pozitive*: $x_1 = \sqrt{z'}$ și $x_2 = \sqrt{z''}$.

Pentru ca valorile lui y, date de formula (122), să fie și ele *pozitive*, trebue să avem

(127) $x^2 < 2mr^2$ sau (128) $z < 2mr^2$.

Inlocuind pe z prin $2mr^2$ în ecuația (124), obținem pentru membrul întâi al ei valoarea

(129) $$8r^4 . m(2m-1),$$

care e *negativă* pentru $0 < m < \frac{1}{2}$ și *pozitivă* pentru $m > \frac{1}{2}$.

Prin urmare, dacă $0 < m < \frac{1}{2}$, avem $z' < 2mr^2 < z''$ [241, 1] și numai rădăcina z' satisface la neegalitatea (128); găsim dar *un singur sistem de soluții reale și pozitive* pentru sistemul (I), (II).

Dacă $\frac{1}{2} < m < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $2mr^2$ se găsește *în afară* de rădăcinile z' și z''. Dar nu putem aveà $2mr^2 < z' < z''$, căci ar rezultà $z'z'' > 4m^2r^4$, pe când ecuația (124) ne dă $z'z'' = \frac{4}{5}m^2r^4 < 4m^2r^4$. Avem dar $z' < z'' < 2mr^2$, adică neegalitatea (128) e satisfăcută și pentru $z = z'$ și pentru $z = z''$ și găsim *două sisteme de soluții* x și y, *reale* și *pozitive*, pentru sistemul (I), (II).

Pentru $m = \frac{1}{2}$, ecuația (124) devine $5z^2 - 6r^2z + r^4$ și admite rădăcinile $z' = r^2$, $z'' = \frac{r^2}{5}$. Valoarea $z = r^2$ ne dă $x_1 = r$, $y_1 = 0$; e cazul limită, când înălțimea cilindrului înscris se reduce la *zero*. Valoarea $z = \frac{r^2}{5}$ ne dă $x_2 = \frac{r}{\sqrt{5}}$, $y_2 = \frac{2r}{\sqrt{5}}$; înălțimea cilindrului e de două ori mai mare decât diametrul bazei.

2°. Pentru $m = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, ecuația în z (124) are o singură rădăcină (dublă): $z = \frac{5+\sqrt{5}}{10} r^2$ și găsim, pentru sistemul (I), (II), *un singur sistem de soluții reale și pozitive*:

$$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \qquad y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}.$$

PROBLEMA IV (ARITMETICĂ COMERCIALĂ). *O persoană a pus la o bancă, cu dobândă de 8%, suma de 662 000 lei în două rate: rata întâi la 1 Mai și rata a doua la 2 Iulie același an. După un timp constată că dispune la bancă de un capital de 683 600 lei.*

Știind că dobânda produsă de rata întâi e de 5 ori mai mare decât dobânda ratei a doua, se cere să se calculeze: a) valoarea fiecărei rate; b) data evaluării capitalului format la bancă (1).

1°. Necunoscutele. Insemnăm cu x și y valorile celor două rate și cu t (zile) timpul corespunzător ratei *întâi* (dela 1 Mai până la data evaluării).

2°. Ecuațiile. Știm că suma ratelor e 662 000 lei:

$$(I) \qquad x + y = 662\,000.$$

Ca să calculăm dobânda, trebue să știm *timpul* și *divizorul fix*. Timpul corespunzător ratei întâi e t. Dela 1 Mai până la 2 Iulie fiind 62 de zile, timpul corespunzător ratei a doua e $t-62$. Pentru procentul 8 divizorul fix e 4500. Scriind că dobânda ratei întâi e de 5 ori mai mare decât dobânda ratei a doua, avem

$$\frac{xt}{4500} = 5 . \frac{y(t-62)}{4500}$$

sau

$$(II) \qquad xt = 5y(t-62).$$

In fine *capitalul total* constituit la bancă fiind 672 800 lei și *suma ratelor* depuse fiind 662 000 lei, *suma dobânzilor* produse este $672\,800 - 662\,000 = 21\,600$ lei. Prin urmare:

$$\frac{xt}{4500} + \frac{y(t-62)}{4500} = 21\,600$$

sau

$$(III) \qquad xt + y(t-62) = 97\,200\,000.$$

Avem dar un sistem de trei ecuații (I), (II), (III) cu trei necunoscute x, y, t.

---

(1) La calcularea numărului zilelor *între două date*, ziua inițială nu se socotește, pe când ziua finală se socotește. Astfel dela 1 Mai până la 2 Iulie avem: din Mai 30 zile, din Iunie 30, din Iulie 2; în total 62 zile.

3°. Rezolvarea sistemului. Sistemul se poate scrie:

$$(130)\qquad \begin{aligned} &(I) && x+y=662\,000,\\ &(II) && xt-5yt=-310y,\\ &(III) && xt+yt=62y+97\,200\,000. \end{aligned}$$

Adunând ecuația (II) cu ecuația (III) înmulțită cu 5, obținem

$$6xt=486\,000\,000$$

sau

$$(II)'\qquad xt=81\,000\,000.$$

Scăzând ecuația (II) din (III), deducem

$$6yt=372y+97\,200\,000$$

sau

$$(III)'\qquad yt=62y+16\,200\,000$$

și sistemul (I), (II), (III) se poate înlocui prin sistemul echivalent

$$(131)\qquad \begin{aligned} &(I) && x+y=662\,000,\\ &(II) && xt=81\,000\,000,\\ &(III) && yt=62y+16\,200\,000. \end{aligned}$$

Rămâne să rezolvăm acest sistem. Ecuația (131, I) ne dă

$$(132)\qquad y=662\,000-x;$$

ecuația (131, II) ne dă

$$(133)\qquad t=\frac{81\,000\,000}{x}$$

și înlocuind pe y și t prin aceste expresii în ecuația (131, III), obținem ecuația cu o singură necunoscută:

$$62x^2-138\,244\,000x+53\,622\,000\,000\,000=0,$$

care admite rădăcinile

$$x'=500\,000 \quad \text{și} \quad x''=\frac{53\,622\,000}{31}=1\,729\,741{,}94,$$

Formula (132), pentru $x=x'$ și $x=x''$, ne dă valorile lui y:

$$y'=162\,000, \quad y''=-\frac{33\,100\,000}{31}=-1\,067\,741{,}94$$

iar formula (133) ne dă valorile lui t corespunzătoare:

$$t'=162, \quad t''=\frac{15500}{331}=46{,}8.$$

Problema algebrică admite *două* sisteme de soluții:

$$x', y', t' \quad \text{și} \quad x'', y'', t'',$$

dar ratele x și y trebuind să fie amândouă *numere pozitive*, problema aritmetică dată admite *o singură soluție*:

$$x = 500\,000, \quad y = 162\,000, \quad t = 162.$$

Data evaluării capitalului este *10 Octombrie* același an.

EXERCIȚII.

46. Să se rezolve ecuațiile:

1°. $(2x-5)^2 = (x-1)(2x+3) - 7x + 4$;

2°. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1) = (3b^2+a^2)(x^2+x+1)$;

3°. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$; 4°. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

5°. $5(x+3) = \sqrt{2x^2+3x-9}$; 6°. $2\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 5$.

R. 1°. $x' = 3$, $x'' = 4$; 2°. $x' = \frac{a-b}{a+b}$, $x'' = \frac{a+b}{a-b}$;

3°. $x_1 = 3$, $x_2 = +\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$; 4°. $x_1 = a+b$, $x_2 = \frac{2ab}{a+b}$;

5°. Obținem ecuația $23x^2 + 147x + 234 = 0$, care are rădăcinile $x' = -3$, $x'' = -\frac{78}{23}$. Dintre acestea numai $x = -3$ e rădăcina ecuației iraționale.

6°. Găsim ecuația $4x^2 - 9x - 9 = 0$, care are rădăcinile $x' = 3$, $x'' = -\frac{3}{4}$. Amândouă aceste valori sunt rădăcini ale ecuației iraționale.

47. Să se discute felul rădăcinilor ecuației

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda = 0,$$

când λ ia toate valorile reale dela $-\infty$ până la $+\infty$.

R. Găsim tabloul următor:

Valorile lui λ	*Discriminantul* $\lambda(3-2\lambda)$	$x'+x'' = \frac{2\lambda}{\lambda-1}$	$x'x'' = \frac{3\lambda}{\lambda-1}$	*Felul rădăcinilor*
$\lambda < 0$	$-$	$+$	$+$	imaginare
$\lambda = 0$	0	0	0	$x' = x'' = 0$
$0 < \lambda < 1$	$+$	$-$	$-$	reale și de semne contrarii
$\lambda = 1$	$+$	∞	∞	ecuația e de gr. I: $x = \frac{3}{2}$
$1 < \lambda < \frac{3}{2}$	$+$	$+$	$+$	reale și pozitive
$\lambda = \frac{3}{2}$	0	$+$	$+$	$x' = x'' = 3$
$\frac{3}{2} < \lambda$	$-$	$+$	$+$	imaginare.

Când λ tinde către 1, o rădăcină crește la infinit.

48. O persoană cumpărând un obiect și în urmă vânzându-l cu 72 lei, are o perdere *la sută* egală cu a treia parte din costul obiectului. Cât a costat obiectul?

R. Problema are două soluții: 180 lei și 120 lei.

49. Ecuația $3x^2+2xy-5y^2-10x-2y+7=0$ ne dă, în general, pentru fiecare valoare a lui x câte două valori pentru y și pentru fiecare valoare a lui y câte două valori pentru x. Să se precizeze: când aceste valori sunt: 1°. reale și neegale; 2°. reale și egale; 3°. imaginare?

R. Ecuația în x are rădăcinile *reale* și *neegale* pentru orice valoare a lui y. Ecuația în y are rădăcinile *reale* și *neegale* pentru $x<1$ și $x>2{,}25$; *reale* și *egale* pentru $x=1$ și $x=2{,}25$; *imaginare* pentru $1<x<2{,}25$.

50. Să se rezolve ecuațiile:

$$1^0.\ \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0;$$

$$2^0.\ x^6(x^6+8x^3+63)=8(x^9+8).$$

R. 1°. Problema se reduce la rezolvarea ecuației bipatrate $3x^4-58x^2+244=0$ și găsim: $x_1=13{,}1$; $x_2=-13{,}1$; $x_3=6{,}2$; $x_4=-6{,}2$ (cu aproximație de 0,1).

2°. Ecuația e trinomă: $x^{12}+63x^6-64=0$. Problema se reduce la rezolvarea ecuațiilor binome: $x^6-1=0$ și $x^6+64=0$. Prima [**251**, 7] are rădăcinile

$$x_1=1,\ x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ x_4=-1,\ x_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ x_6=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ecuația a doua are ca rădăcini valorile precedente înmulțite cu $\sqrt[6]{-64}=2i$.

51. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$1^0.\ x+y=a,\ x^3+y^3=b^3;\quad 2^0.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=1.$$

$$3^0.\ 3x^2+4xy+3y^2-15x+9y=0,\ x^2-2xy+y^2-10x+2y=0.$$

R. 1°. Găsim $xy=\frac{a^3-b^3}{3a}$ și $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b^3-a^3}{12a}}$, $y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4b^3-a^3}{12a}}$.

$$2^0.\ x=\frac{a^2b^2m\pm a^2n\sqrt{a^2n^2+b^2m^2-a^2b^2}}{a^2n^2+b^2m^2},\quad y=\frac{a^2b^2n\mp b^2m\sqrt{a^2n^2+b^2m^2-a^2b^2}}{a^2n^2+b^2m^2}.$$

$$3^0.\ x_1=0,\ y_1=0;\ x_2=1,\ y_2=3;\ x_3=3,\ y_3=-3;\ x_4=6,\ y_4=-2.$$

52. Să se determine laturile unui triunghiu dreptunghic, care are perimetrul $2p$ și suprafața $\frac{p^2}{6}$.

R. Trebue să rezolvăm sistemul

$$x+y+z=2p,\quad xy=\frac{p^2}{3},\quad x^2+y^2=z^2.$$

Eliminând pe z între ecuația întâia și a treia, deducem $x+y=\frac{7p}{6}$ și găsim $x=\frac{2p}{3}$, $y=\frac{p}{2}$, $z=\frac{5p}{6}$.

53. Să se determine *cifra* α și *baza* β a sistemului de numerație, în care numerele 2736 și 1741824 se scriu respectiv $1\alpha00$ și $\alpha0000$.

R. Trebue să rezolvăm sistemul

$$\beta^3+\alpha\beta^2=2736,\qquad \alpha\beta^5=1\,741\,800.$$

Găsim un singur sistem de soluții *reale*, *pozitive* și *întregi*: $\alpha=7$, $\beta=12$.

CAPITOLUL VI.

REPREZENTAREA GRAFICĂ.

I. — FUNCȚII ȘI CURBE.

259. Funcții explicite. Dacă avem două cantități variabile x și y, *care depind una de alta*, așă că la fiecare valoare a lui x să corespundă o valoare pentru y, zicem că y e funcție de x [**166**].

EXEMPLE. Formulele

$$(1) \qquad y=2x+3, \quad y=x^2-5x+7, \quad y=\sqrt{x-1}$$

definesc pe y ca funcție de x. Primele două funcții au valori *reale* pentru orice valoare reală a lui x; funcția a treia $\sqrt{x-1}$ e *reală* pentru $x \geqq 1$ și *imaginară* pentru $x < 1$.

Ca să arătăm că y e funcție de x, scriem în general

$$(2) \qquad y=f(x),$$

unde prin simbolul f reprezentăm șirul de operații, pe care ar trebui să le facem asupra lui x, ca să căpătăm valoarea lui y.

Formulele (1) sau (2), care sunt ecuații cu *două* necunoscute x și y, *rezolvate în raport cu* y, definesc pe y ca funcție *explicită* de x.

Când vrem să reprezentăm în mod simbolic mai multe funcții diferite, întrebuințăm simboluri *diferite*. Astfel egalitățile

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

ne arată că x, y, z sunt trei funcțiuni explicite de t.

In general, formule ca

$$(3) \qquad u=x^2+2y^3, \qquad u=3x+y^2-5\sqrt{z-4}$$

sau, în mod simbolic,

$$(4) \qquad u=f(x,y), \qquad u=\varphi(x,y,z)$$

oricare ar fi şirurile de operaţii reprezentate prin simbolurile f sau φ, ne definesc pe u ca *funcţie explicită de mai multe variabile independente*: x, y sau x, y, z [**166**, Exemple].

260. Funcţii implicite. Am văzut că orice ecuaţie întreagă cu *două* sau *mai multe* necunoscute, ca

(5) $$3x+y+6=0, \qquad x^2+2xy-y^2+4=0$$

sau, în general,

(6) $$f(x, y)=0$$

admite *o infinitate de sisteme de soluţii* [**204**, **253**].

Valoarea variabilei y *depinde de valoarea lui* x şi anume *pentru fiecare valoare arbitrară* x_0 a lui x, *ecuaţia în* y

$$f(x_0, y)=0,$$

prin rădăcinile ei, *ne determină una sau mai multe valori pentru* y. In acest caz, zicem că ecuaţiile (5) sau (6), *care nu sunt rezolvate în raport cu* y, definesc pe y ca funcţie *implicită* de x.

Tot astfel e ecuaţia de forma

$$f(x, y, t)=0,$$

unde f e un polinom întreg în x, y, t, defineşte pe *una* dintre variabilele x, y sau t ca funcţie implicită de celelalte două.

OBSERVARE. Ecuaţiile (5) sau (6) definesc şi pe x ca funcţie de y. Astfel din prima ecuaţie (5) putem deduce în mod *explicit*:

$$\text{sau} \quad y=3x+6 \quad \text{sau} \quad x=\frac{y-6}{3}.$$

In general, dacă o ecuaţie de forma (6), rezolvată în raport cu y ne dă $y=\varphi(x)$ şi rezolvată în raport cu x ne dă $x=\psi(y)$, zicem că ψ e *funcţia inversă* a lui φ.

261. Funcţii uniforme şi multiforme. 1°. Dacă la fiecare valoare a lui x, dintr'un interval (a, b), ecuaţia $f(x, y)=0$ ne dă numai *câte o singură valoare pentru* y, zicem că y, definit de această ecuaţie, e o funcţie *uniformă* de x în intervalul (a, b).

EXEMPLU. Ecuaţia $x^2-5y-4x+19=0$ rezolvată în raport cu y ne dă:

$$y=\frac{x^2-4x+19}{5} \qquad \text{(o singură determinare)}.$$

Prin urmare y e funcţie *uniformă* de x în orice interval.

2°. Dacă la fiecare valoare a lui x dintr'un interval (a, b), ecuaţia $f(x, y)=0$ ne dă (în general) *mai multe valori pentru* y, zicem că y, definit de această ecuaţie, e o funcţie *multiformă* de x sau o funcţie *cu mai multe determinări* în intervalul (a, b).

EXEMPLU. Ecuația $x^2 - 5y - 4x + 19 = 0$ rezolvată în raport cu x ne dă:

$$x = 2 \pm \sqrt{5(y-3)} \qquad \text{(două determinări)}.$$

Prin urmare x e funcție *multiformă* de y. Cum avem $y - 3 > 0$ pentru $y > 3$, $y - 3 = 0$ pentru $y = 3$ și $y - 3 < 0$ pentru $y < 3$, cele două determinări ale lui x sunt *reale* și *neegale* pentru $y > 3$; *reale* și *egale* pentru $y = 3$; *imaginare* pentru $y < 3$ [227, 2].

262. Funcție definită prin șiruri. Legătura dintre două cantități variabile se poate stabili și fără existența unei formule matematice. Astfel măsurând *timpul* t în ore (cu ajutorul unei pendule) și *temperatura aerului* θ în grade (cu ajutorul unui termometru) și înscriind valorile găsite pe două șiruri corespunzătoare:

(I)	t	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	*ore*
(II)	θ	4,3	5,0	5,9	6,4	6,7	8,0	8,6	9,0	9,2	8,8	8,5	8,1	7,6	*grade*

constatăm că la fiecare valoare a lui t corespunde o valoare bine determinată pentru θ. Prin urmare *temperatura aerului e o funcție de timp* definită prin șirurile (I) și (II) (1).

Convenim să zicem, și în acest caz, că între variabilele θ și t există o relație de forma

$$\theta = f(t) \qquad \text{sau} \qquad F(\theta, t) = 0,$$

deși nu cunoaștem *expresia analitică* a funcției f, adică șirul de operații matematice, pe care trebue să le facem asupra valorii timpului t, ca să determinăm *a priori* (2) temperatura aerului θ.

263. Lege naturală și expresie matematică. Studiul fenomenelor din natură (fizice, mecanice, chimice, etc.) au întrodus și vor întroduce mereu în Matematici numeroase exemple de *funcții.*

Se știe că un fenomen fizic (chimic, etc.) se poate studia din două puncte de vedere: *calitativ* și *cantitativ*. In primul caz se cercetează numai cauzele care produc fenomenul, care-i variază intensitatea sau care-l împedică să se producă; obținem astfel *legi calitative*. In cazul al doilea, un fenomen se caracterizează printr'o *mărime măsurabilă* z.

De exemplu starea de mai cald sau mai rece a unui corp pusă în legătură cu dilatarea corpurilor la căldură, s'a putut caracterizà prin măsurarea unei *lungimi*. In particular observația că o coloană fină de mercur se lungește sensibil pentru o variație foarte mică de temperatură, a permis construirea *termometrului*.

Cauzele fenomenului se caracterizează și ele prin mărimi *măsurabile*: x, y, ... Se construesc aparate speciale pentru măsurarea mări-

(1) In intervalul de timp în care a fost studiată.

(2) *Mai dinainte* adică înainte de a există și de a o puteà măsurà în mod direct.

milor cauze şi a mărimii efect şi după un număr oarecare de *experienţe* şi de *măsurări*, putem înscrie pe mai multe şiruri orizontale valorile cantităţilor z şi $x, y, \ldots$ corespunzătoare fiecărui caz. Obţinem astfel o tablă, care ne va da în viitor (fără altă experienţă) valoarea mărimii z pentru valorile mărimilor $x, y, \ldots$ studiate. Trecând apoi dela *abstract* la *concret*, deducem starea fenomenului efect, care corespunde la stările considerate pentru fenomenele cauză.

Această legătură dintre valorile simultane ale mărimilor z şi $x, y, \ldots$ constitue o *lege cantitativă*. Ea defineşte în mod *numeric* pe z ca funcţie de variabilele independente $x, y, \ldots$ Astfel sunt legile gravitaţiei, legile lui Kepler, legea lui Mariotte, legea lui Joule, etc.

Pentru enunţarea acestor legi ştiinţele experimentale caută în Analiza Matematică nişte *expresii analitice* adică nişte *formule* simple, nişte *funcţii* elementare, care prin combinaţiile lor să poată exprimà — cu o cât mai bună aproximaţie — legătura reală dintre mărimile cauze şi mărimea efect, adică legea cantitativă.

OBSERVARE. Să nu se confunde *legea naturală* cu *formulele aproximative* ce se introduc în Ştiinţă pentru exprimarea legei în mod analitic. Legea adevărată poate fi exprimată în mod riguros numai prin şirurile de numere simultane date de *experienţă*. De accea avem tot interesul ca aparatele de măsură să fie cât mai perfecţionate şi măsurările să fie făcute cu cea mai mare preciziune.

EXEMPLU. Să luăm ca exemplu legea lui Mariotte, care leagă *presiunea* cu *volumul* unui gaz, când temperatura rămâne constantă.

Se comprimă o cantitate de gaz într'un tub, cu ajutorul unui piston, şi se observă că, dacă presiunea P creşte, volumul V al gazului se micşorează. Mariotte a precizat faptul zicând că, dacă presiunea se măreşte de un număr oarecare de ori, volumul gazului se micşorează *de acelaş număr de ori*. Astfel, dacă volumul şi presiunea gazului au avut la început valorile V_0, P_0, când aplicăm asupra gazului o presiune $P = n\,P_0$, volumul lui devine $V = \frac{V_0}{n}$.

Prin urmare: *Produsul dintre presiune şi volum rămâne constant* şi avem

$$VP = V_0 P_0 \quad \text{sau} \quad \frac{V_0 P_0}{VP} = 1.$$

Experienţele ulterioare făcute de Régnault, cu mai multă preciziune, asupra *aerului* şi *hidrogenului*, au dat următoarele rezultate:

Pentru aer

P	$\frac{V_0 P_0}{VP}$
1476,25 mm.	1,001414
4209,48	1,002765
8177,48	1,003253
8404,11	1,003336
13483,48	1,004286

Pentru hidrogen

P	$\frac{V_0 P_0}{VP}$
1173,17 mm.	0,998584
4431,14	0,996121
18490,47	0,992933
20879,18	0,992327

Deci pentru *aer* produsul VP, vecin de V_0P_0, merge *descrescând*, pe când pentru *hidrogen* acest produs *crește*, când presiunea P crește.

O lege fizică (chimică, etc.) scrisă sub formă analitică, deși e o egalitate matematică, nu e riguros exactă din punct de vedere fizic (chimic, etc.): ea e numai — dintre relațiile simple — funcția *cea mai apropiată* de aceea, care ar trebui să exprime legea cantitativă adevărată a fenomenului considerat.

Pe de altă parte, în teoria matematică a diferitelor ramuri ale Științei și „*ipoteza* joacă un rol capital, în lipsă de alte date mai solide; or, pe cât ipoteza este de prețioasă ca ajutor în cercetările noastre, pe atât ne oferă mari primejdii, mai ales când ne lăsăm duși de ispita, ce pare firească, de a considerà o ipoteză, creată *a priori*, ca o *realitate efectivă*, deși ea e numai *fructul imaginației noastre*" (1).

264. Coordonate. Dacă luăm într'un plan două *axe de coordonate* Ox și Oy, perpendiculare una pe alta [230] și o lungime ca unitate de măsură, orice sistem de *două numere* reale x și y determină *un punct* M în plan (*fig.* 39) și invers, fiecare punct M din planul xOy, prin *coordonatele* lui $x = \overline{OP}$, $y = \overline{PM}$, determină *două numere algebrice* reale x și y.

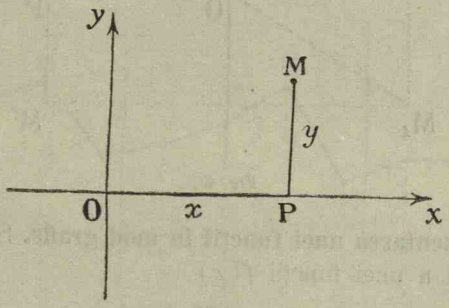
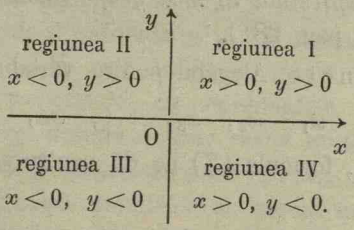


Fig. 39.

x e *abscisa*, y e *ordonata*, iar linia frântă OPM e *conturul coordonatelor* punctului M.

Vom considerà, în general, axa Ox ca *orizontală* și cu sensul pozitiv *spre dreapta*, iar axa Oy ca *verticală* și cu sensul pozitiv *în sus* (2).

Planul xOy e împărțit de axele de coordonate Ox, Oy în patru *regiuni*:



(1) C. A. Laisant, *La mathématique, philosophie — enseignement*, p. 22 (Georges Carré et C. Naud, Paris).

(2) De fapt axa Ox poate avea orice direcție, iar axa Oy e perpendiculară pe Ox.

1°. Punctul origine O are coordonatele $x = 0$, $y = 0$ (*fig.* 40).

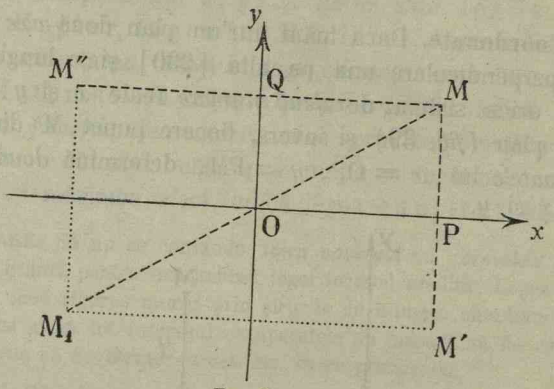
2°. Toate punctele de pe axa Ox au *ordonata nulă* ($y = 0$).

3°. Toate punctele de pe axa Oy au *abscisa nulă* ($x = 0$).

4°. Două puncte M, M′ *simetrice față de* Ox ($PM = PM'$) au *abscisele egale* și *ordonatele simetrice* (1).

5°. Două puncte M, M″ *simetrice față de axa* Oy ($QM = QM''$) au *ordonatele egale* și *abscisele simetrice.*

6°. Două puncte M, M_1 *simetrice față de origine* ($OM = OM_1$) au și *abscisele* și *ordonatele simetrice.*



Frg. 40.

265. Reprezentarea unei funcții în mod grafic. Să însemnăm cu y valoarea variabilă a unei funcții $f(x)$

(7) $$y = f(x)$$

și să presupunem că, pentru $a \leqq x \leqq b$, la fiecare valoare reală a lui x formula (7) ne dă câte o valoare pentru y. Dacă această valoare e *reală*, putem reprezentă în planul xOy punctul M cu coordonatele

$$x = \overline{OP}, \qquad y = \overline{PM} = f(x).$$

Segmentul $\overline{PM}$ *reprezintă în mod grafic valoarea funcției* $f(x)$ *pentru* $x = \overline{OP}$ (*fig.* 43, pag. 281).

1°. Șir de puncte. Alegând pentru variabila x un șir de valori

(α) $$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n,$$

cuprinse între a și b, formula (7) ne dă pentru y un alt șir de valori corespunzătoare:

(β) $$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_n.$$

(1) Egale în valoare absolută dar cu semne contrarii.

La fiecare pereche de numere x_i, y_i corespunde în planul xOy, un punct M_i cu coordonatele (x_i, y_i). Unind punctele censecutive

$$(\gamma) \qquad M_1, \ M_2, \ M_3, \ \ldots, \ M_n$$

prin linii drepte: M_1M_2, M_2M_3, etc., obținem o *linie frântă*, care, prin ordonatele vârfurilor ei, reprezintă în mod grafic *succesiunea valorilor funcției* $f(x)$ pentru valorile lui x din șirul (α) și ne permite, prin comparare, să constatăm dacă aceste valori merg *crescând* sau *descrescând* și în care puncte funcția are *valoarea cea mai mare* sau *cea mai mică*.

EXEMPLU. Determinând, cu ajutorul unui termometru, temperatura unui bolnav la diferite ore (de exemplu la orele 4, 10, 16 și 22), în mai multe zile consecutive, putem însemnă pe o axă Ot *timpul* t (în ore) și, pe niște perpendiculare la această axă, *temperatura* corespunzătoare θ (în grade). Obținem astfel la fiecare înregistrare câte un *punct* M cu coordonatele (t, θ).

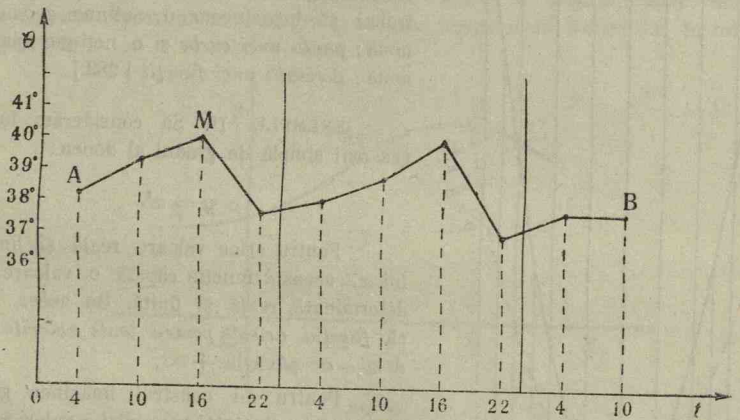


Fig. 41.

Unind aceste puncte prin linii drepte, linia frântă AMB (*fig.* 41) ne arată *mersul temperaturii bolnavului* în zilele și orele înregistrate.

2°. Linie continuă. Să presupunem că funcția $y = f(x)$ capătă valori *reale* pentru toate valorile lui x cuprinse între a și b. Când abscisa $x = \overline{OP}$ variază și ordonata $y = \overline{PM}$ *variază* (*fig.* 43, pag. 281). Când x crește dela a la b, punctul P, se mișcă în mod continuu *pe axa* Ox dela a la b; punctul M, cu coordonatele (x, y), se mișcă *în plan* în mod continuu și descrie *o linie curbă continuă* AMB.

Această linie e *imaginea geometrică a funcției* $y = f(x)$ între a și b. Ea ne arată, prin *ordonatele* punctelor ei, modul în care se succed valorile funcției $f(x)$, când x crește dela a la b; de aceea zicem că arcul AMB sau linia C e *curba*, care reprezintă în mod grafic *variația funcției* $f(x)$ în intervalul (a, b).

In practică nu putem determină, prin măsurări succesive, *toate* punctele curbei C dela A la B. Putem reprezentă însă un număr de puncte destul de apropiate unele de altele, în cât curba *continuă*, care le unește, să rezulte fără ezitare. Această curbă ne permite să evaluăm, cu o aproximație suficientă pentru practică, valoarele funcției $f(x)$ și în celelalte puncte din intervalul (a, b) (1).

OBSERVARE. E evident că oricât de apropiate ar fi două puncte A și B ale unei curbe necunoscute C, arcul AB, cuprins între ele, poate aveà o infinitate de forme. Totuși, când am determinat un șir de puncte, care se succed destul de apropiat unele după altele, *sentimentul continuității* ne indică, în general, mersul probabil al curbei prin punctele determinate.

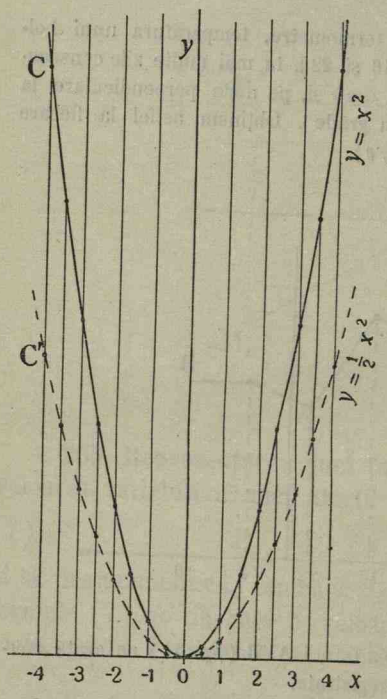


Fig. 42.

Pentru a construi cu mai multă siguranță imaginea geometrică a unei funcții, va trebui să introducem o noțiune geometrică nouă: *panta unei curbe* și o noțiune analitică nouă: *derivata unei funcții* [283].

EXEMPLE. 1°. Să considerăm funcția cea mai simplă de gradul al doilea:

$$y = x^2.$$

Pentru orice valoare reală și finită a lui x, această funcție capătă o valoare bine determinată, reală și finită. De aceea zicem că *funcția există pentru toate valorile lui* x dela $-\infty$ până la $+\infty$.

Pentru a-i construi imaginea geometrică, putem da întâi variabilei x valori *întregi*, plecând dela $x = 0$, în amândouă sensurile, (pozitiv și negativ). Dacă luăm pentru $x > 0$ valori crescătoare, constatăm că valorile funcției $y = x^2$ *cresc*; pentru $x < 0$, din contra, când x crește, valoarea absolută a lui x descrește și $y = x^2$ *descrește*. Pentru $x = 0$, avem $y = 0$.

Inscriind într'un rând orizontal valorile variabilei x și într'un alt rând orizontal valorile corespunzătoare ale funcției y, obținem tabloul următor:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

Reprezentând punctele (x, y) corespunzătoare, față de două axe: Ox orizontală și Oy verticală, și unind aceste puncte printr'o linie continuă, obținem o curbă C (*fig.* 42), care reprezintă variația funcției $y = x^2$. Această curbă e o *parabolă*.

(1) Adică și în punctele, care n'au fost determinate prin măsurări directe.

Dacă, între două puncte consecutive, nu suntem siguri de mersul adevărat al curbei, putem luă pentru x valori *intermediare* (în acest caz *fracționare*). Astfel între $x=-1$ și $x=+1$ găsim pentru curbă următoarele puncte:

x	...	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	...
y	...	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	...

Curba e tangentă la axa Ox în punctul O.

2°. Imaginea geometrică a funcției $y=\frac{1}{2}x^2$ (curba punctată C' din *fig.* 42) se poate obține pe aceeaș cale sau se poate deduce din curba C, observând că linia C' trece prin *mijloacele* tuturor ordonatelor curbei C.

3°. Curba temperaturii. Dacă pentru determinarea variației temperaturii unui bolnav, în loc să facem observațiile și înregistrările la fiecare 6 ore (*fig.* 41), le-am face *la fiecare oră* sau *la fiecare minut*, punctele M corespunzătoare ar fi mult mai apropiate unele de altele și dacă — printr'un mijloc oarecare (1) — putem înregistrà temperatura *în mod continuu*, punctul variabil M descrie *o linie curbă continuă* C, care reprezintă în mod grafic variația temperaturii bolnavului în tot timpul înregistrării.

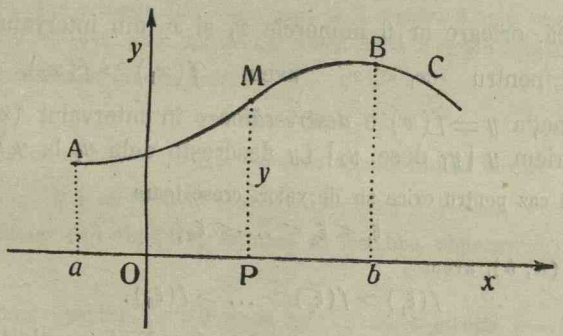


Fig. 43.

266. Funcții definite prin curbe. Putem considerà problema inversă: Să desemnăm în planul xOy o *linie curbă* C, care să fie întâlnită numai într'un punct de orice dreaptă paralelă cu axa Oy (*fig.* 43).

La fiecare valoare a lui $x=\overline{OP}$, corespunde pe figură o ordonată $y=\overline{PM}$ și un punct M pe curbă. *Ordonata y e o funcție de x definită prin curba* C.

Dacă putem găsi o expresie analitică $f(x)$ (2), astfel ca, pentru fiecare valoare a lui $x=\overline{OP}$, formula $y=f(x)$ să ne dea pentru y tocmai valoarea algebrică a segmentului $\overline{PM}$ corespunzător, dat de curba C, zicem că $y=f(x)$ e *ecuația curbei* C.

(1) Cu un *termometru înregistrator*, care înseamnă temperatura în fiecare moment pe o bandă de hârtie

(2) De exemplu: o expresie algebrică.

Funcţia y astfel determinată, e definită în mod *grafic* prin *curba* C şi în mod *analitic* prin *expresia* $f(x)$ sau prin *ecuaţia* $y=f(x)$.

267. Funcţie crescătoare şi descrescătoare. Fie $y=f(x)$ o funcţie, care capătă valori *reale* pentru $a \leqq x \leqq b$. Dacă dăm lui x două valori diferite x_1 şi x_2, funcţia y capătă şi ea, în general, două valori diferite

$$y_1 = f(x_1), \qquad y_2 = f(x_2).$$

1°. Dacă, oricare ar fi numerele x_1 şi x_2, cuprinse între a şi b,

$$\text{pentru} \quad x_1 < x_2 \quad \text{avem} \quad f(x_1) < f(x_2),$$

zicem că funcţia $y=f(x)$ e *crescătoare* în intervalul (a, b) şi convenim să scriem $y\,[y_1 \text{ cr. } y_2]$ (y creşte dela y_1 la y_2).

In acest caz pentru orice şir de valori crescătoare

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n,$$

din intervalul (a, b), avem

$$f(\xi_1) < f(\xi_2) < \ldots < f(\xi_n).$$

2°. Dacă, oricare ar fi numerele x_1 şi x_2 din intervalul (a, b),

$$\text{pentru} \quad x_1 < x_2 \quad \text{avem} \quad f(x_1) > f(x_2),$$

zicem că funcţia $y=f(x)$ e *descrescătoare* în intervalul (a, b) şi convenim să scriem $y\,[y_1 \text{ desc. } y_2]$ (y descreşte dela y_1 la y_2).

In acest caz pentru orice şir de valori crescătoare

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n,$$

din intervalul (a, b), avem

$$f(\xi_1) > f(\xi_2) > \ldots > f(\xi_n).$$

3°. Dacă, oricare ar fi două numere x_1 şi x_2 din intervalul (a, b), avem

$$f(x_1) = f(x_2),$$

zicem că funcţia $f(x)$ e *constantă* în intervalul (a, b).

In oricare din aceste cazuri, când x creşte dela x_1 la x_2, funcţia $y=f(x)$ trece dela valoarea y_1 la valoarea y_2. Diferenţa $x_2-x_1=h$ se numeşte *creşterea variabilei* x, iar diferenţa $y_2-y_1=k$ se numeşte *creşterea funcţiei* y; creşterea k poate fi *pozitivă*, *negativă* sau *nulă*.

Creşterile Δx şi Δy. Uneori e mai comod să însemnăm creşterea variabilei x cu Δx şi creşterea funcţiei y cu Δy. In acest caz la valorile x şi $x+\Delta x$ ale variabilei independente corespund pentru funcţie valorile

(8) $$y = f(x)$$

şi

(9) $$y+\Delta y = f(x+\Delta x).$$

Scăzând egalitatea (8) din (9), membru cu membru, deducem

(LXXV) $$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$ (*creșterea funcției*).

OBSERVARE. Să nu se confunde Δx cu $\Delta \times x$ și Δy cu $\Delta \times y$. Simbolurile Δx și Δy sunt niște *semne convenționale*: Δx, ca și h, reprezintă cantitatea cu cât crește x; Δy, ca și k, reprezintă cantitatea (algebrică) cu cât crește y.

EXEMPLE. 1°. Să considerăm funcția $y = x^2$.

Pentru $x_1 = 1$ și $x_2 = 1{,}3$ găsim $y_1 = 1$ și $y_2 = 1{,}69$; adică pentru

$h = 1{,}3 - 1 = 0{,}3$ avem $k = 1{,}69 - 1 = 0{,}69$ *pozitiv.*

Pentru $x_1 = -4$, $x_2 = -3{,}9$ găsim $y_1 = 16$ și $y_2 = 15{,}21$; adică

pentru $h = (-3{,}9) - (-4) = 0{,}1$

avem $k = 15{,}21 - 16 = -0{,}79$ *negativ.*

In general, pentru două valori x_1 și x_2 găsim

$$k = y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = h(x_2 + x_1).$$

Pentru $x_1 < x_2 < 0$ avem $h = x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 < 0$ și $k < 0$ sau $y_1 > y_2$; deci y *descrește*, când x crește dela $-\infty$ până la 0. Pentru $0 < x_1 < x_2$ avem $h > 0$, $x_2 + x_1 > 0$ și $k > 0$ sau $y_1 < y_2$; deci y *crește*, când x crește dela 0 până la $+\infty$.

2°. Să considerăm funcția liniară

(I) $$y = 3x + 5.$$

Când dăm lui x o creștere Δx, valoarea acestei funcții devine

II) $$y + \Delta y = 3(x + \Delta x) + 5 = 3x + 5 + 3\,\Delta x$$

și scăzând egalitatea (I) din (II), membru cu membru, obținem

$$\Delta y = 3\,\Delta x.$$

Prin urmare: pentru $\Delta x > 0$ avem $\Delta y > 0$ adică funcția $y = 3x + 5$ *crește*, când x crește dela $-\infty$ până la $+\infty$.

OBSERVARE. *O funcție poate fi necontenit crescătoare, fără ca valoarea ei să crească până la* $+\infty$.

Astfel funcția $y = \dfrac{x-1}{x}$ ne dă

$$y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1}, \qquad y_2 = \frac{x_2 - 1}{x_2}$$

și pentru $0 < x_1 < x_2$ găsim

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2} - \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

adică y crește, când $x > 0$ crește. Dar când $x \to \infty$, $\dfrac{1}{x}$ tinde către *zero* și $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ *tinde către* 1. Deci y *nu crește la infinit.*

Tot astfel, *o funcție poate fi necontenit descrescătoare, fără ca valoarea ei să descrească până la* $-\infty$.

Funcţia $y = x^2$ creşte şi ea, când $x > 0$ creşte; dar când $x \to +\infty$, $y = x^2$ creşte *la infinit.*

In adevăr, pentru $x > 0$ şi destul de mare, y poate deveni *oricât de mare.* Astfel pentru ca y să fie mai mare decât 1000 000 e de ajuns să luăm $x > \sqrt{1000\,000}$ adică $x > 1000$. Pentru ca y să fie mai mare decât un număr N, oricât de mare, e de ajuns să luăm $x > \sqrt{N}$.

Funcţie mărginită. Zicem că o funcţie $f(x)$ e *mărginită* într'un interval (a, b), când, pentru orice valoare a lui x din acest interval, *valoarea funcţiei* $f(x)$ *rămâne cuprinsă între două numere fixe* A şi B, adică dacă

$$\text{pentru} \quad a \leqq x \leqq b \quad \text{avem} \quad A \leqq f(x) \leqq B.$$

Zicem că o funcţie e *mărginită în vecinătatea unei valori* (sau *unui punct*) x_1, când e mărginită într'un interval $x_1 - \varepsilon$, $x_1 + \varepsilon$, numărul ε putând fi oricât de mic, dar *determinat.*

EXEMPLE. 1°. Funcţia $y = x^2$ pentru x cuprins între -2 şi $+3$ capătă valorile următoare:

x	-2		-1		0		1		2		3
y	4	*desc.*	1	*desc.*	0	*cr.*	1	*cr.*	4	*cr.*	9

deci pentru $-2 \leqq x \leqq 3$ avem $0 \leqq y \leqq 9$. Funcţia $y = x^2$ e *mărginită* în intervalul $(-2, 3)$.

2°. Funcţia $y = \frac{1}{x}$ pentru x cuprins între -1 şi $+1$ capătă valorile următoare:

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
y	-1	-10	-100	$-\frac{1}{\varepsilon}$	$-\infty \mid +\infty$	$+\frac{1}{\varepsilon}$	100	10	1

Când $\varepsilon > 0$ tinde către *zero*, fracţia $\frac{1}{\varepsilon}$ creşte *la infinit.* Prin urmare: când x tinde către zero prin valori *negative* $(-\varepsilon)$, $y = \frac{1}{x}$ tinde către $-\infty$; când x tinde către zero prin valori *pozitive* $(+\varepsilon)$, y tinde către $+\infty$.

Funcţia $y = \frac{1}{x}$, devenind *infinită* în intervalul $(-1, +1)$, *nu e mărginită* în acest interval.

268. Pantă. Să considerăm un triunghiu dreptunghic OPM (*fig.* 44) în care o catetă OP să fie *orizontală* şi cealaltă catetă PM *verticală.*

Ipotenuza OM are o *aplecare* sau o *pantă* faţă de cateta orizontală şi convenim să măsurăm această pantă prin raportul

$$\frac{\text{PM}}{\text{OP}}$$

dintre cateta verticală şi cateta orizontală.

Mai general, dacă M e un punct oarecare cu coordonatele x și y, față de două axe de coordonate Ox *orizontală* și Oy *verticală*, convenim să numim panta segmentului OM *valoarea algebrică a raportului*

$$\frac{y}{x}.$$

EXEMPLU. Dacă pe figura 44 avem OP = 25 mm. și PM = 15 mm., coordonatele punctului M sunt $x = 25$, $y = 15$ și panta segmentului OM este

$$\frac{y}{x} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \qquad \text{(pantă } \textit{pozitivă}\text{)}.$$

Coordonatele punctului M′ (simetricul punctului M față de axa Ox) fiind $x = 25$, $y = -15$, panta segmentului OM′ este

$$\frac{y}{x} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5} \qquad \text{(pantă } \textit{negativă}\text{)}.$$

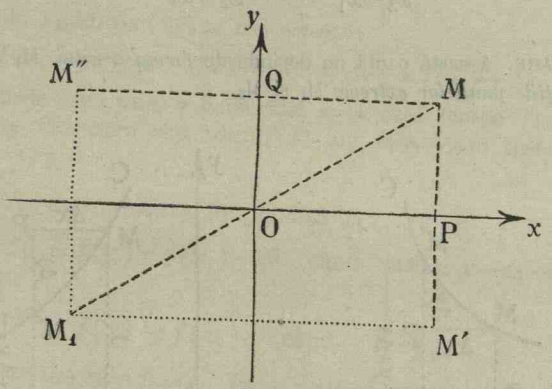


Fig. 44.

Dacă luăm punctele M″ și M_1, simetricele punctelor M și M′ față de axa Oy, constatăm că panta segmentului OM_1 e egală cu panta segmentului OM și panta segmentului OM″ e egală cu panta segmentului OM′ (*fig.* 44).

269. Pantă mijlocie. Fie C (*fig.* 45 sau 46) *curba*, care reprezintă în mod grafic variația unei funcții

$$y = f(x)$$

și fie M și M′ două puncte vecine, pe această curbă, cu coordonatele (x, y) și $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ respectiv.

Dacă P e punctul unde dreapta MP, paralelă cu axa Ox, întâlnește ordonata punctului M′, avem

$$MP = \Delta x, \qquad PM' = \Delta y = (y+\Delta y) - y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Raportul acestor creşteri

$$(10) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

care e *panta segmentului* MM′ faţă de axa orizontală $\overrightarrow{MP}$, se numeşte *panta mijlocie a curbei* C între punctele M şi M′.

In general, dacă avem pe curba C două puncte

$$M_1(x_1, y_1) \quad \text{şi} \quad M_2(x_2, y_2),$$

panta mijlocie a curbei C *între* M_1 *şi* M_2 *este raportul dintre diferenţa ordonatelor şi diferenţa absciselor acestor puncte*:

$$(\text{LXXVI}) \qquad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (\textit{pantă mijlocie}).$$

OBSERVARE. Această pantă nu depinde de *forma arcului* M_1M_2; ea depinde numai de *poziţiile punctelor extreme* M_1 şi M_2.

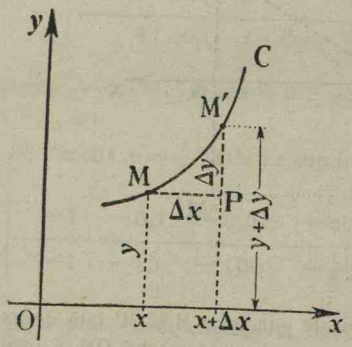


Fig. 45.

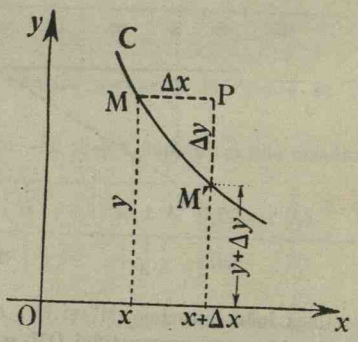


Fig. 46.

Pentru $\Delta x > 0$:

1°. Dacă funcţia y e *crescătoare* dela x la $x+\Delta x$, creşterea Δy e *pozitivă* (*fig.* 45); panta mijlocie a curbei între M şi M′ e *pozitivă* şi curba C e *urcătoare* dela M la M′.

2°. Dacă funcţia y e *descrescătoare* dela x la $x+\Delta x$, creşterea Δy e *negativă* (*fig.* 46); panta mijlocie a curbei între M şi M′ e *negativă* şi curba C e *scoborîtoare* dela M la M′.

OBSERVARE. Deşi în cazul al doilea valoarea funcţiei *se micşorează*, când trece dela y la $y+\Delta y$ (Δy negativ), convenim să zicem, şi în acest caz, că Δy e *creşterea* funcţiei y (creştere *negativă*).

270. Funcție continuă. Creșterea funcțiunii

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

depinde de *două variabile* independente: x și Δx. Putem lăsă pe x constant și să facem să varieze numai Δx. In acest caz, pentru unele funcțiuni (de exemplu pentru funcțiile reprezentate în figurile 45 și 46) vedem că, dacă luăm creșterea Δx din ce în ce mai mică, și creșterea Δy *devine din ce în ce mai mică.*

Să considerăm, în general, o funcție $y = f(x)$ și să însemnăm cu x_1 o valoare *determinată* a variabilei independente x. Pentru

(11) $$\Delta x = x - x_1 \quad \text{avem} \quad \Delta y = f(x) - f(x_1).$$

Dacă creșterea funcțiunii (Δy) *tinde către zero, când creșterea variabilei* ($\Delta x = x - x_1$) *tinde către zero,* prin valori pozitive sau negative, *zicem că funcția* $f(x)$ *e continuă pentru valoarea* x_1 sau *continuă în punctul* x_1.

OBSERVARE. Egalitățile (11) se mai pot scrie

(12) $$x = x_1 + \Delta x \quad \text{și} \quad f(x) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + \Delta y.$$

Când Δx tinde către zero, x tinde către x_1 și, dacă funcția $f(x)$ e *continuă* în punctul x_1, Δy tinde către zero, adică $f(x)$ sau $f(x_1 + \Delta x)$ *tinde către* $f(x_1)$ [**190**, *Observare*].

CONDIȚIA DE CONTINUITATE în punctul x_1:

(LXXVII) $$\Delta y = f(x) - f(x_1) \to 0 \quad \text{când} \quad \Delta x = x - x_1 \to 0,$$

sau

(LXXVIII) $$f(x) \to f(x_1) \quad \text{când} \quad x \to x_1.$$

Se mai poate zice că o funcție $f(x)$ e *continuă* pentru $x = x_1$, dacă, la orice număr pozitiv ε, *oricât de mic,* putem face să corespundă un număr pozitiv η, așa că pentru

$$|\Delta x| = |x - x_1| < \eta \quad \text{să avem} \quad |\Delta y| = |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

sau pentru

$$x_1 - \eta < x < x_1 + \eta \quad \text{să avem} \quad f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon.$$

O funcție e *continuă într'un interval* (a, b), când e continuă *pentru fiecare valoare a lui* x *din acest interval.*

EXEMPLE. 1°. Un binom de gradul întâi $y = ax + b$ e o funcție *continuă* pentru orice valoare a lui x.

In adevăr, avem

$$f(x) = ax + b, \quad f(x_1) = ax_1 + b$$

și diferența

$$\Delta y = f(x) - f(x_1) = a(x - x_1) = a\,\Delta x$$

tinde către zero, când Δx tinde către zero.

2°. Un trinom de gradul al doilea

$$y = ax^2 + bx + c \tag{13}$$

e o funcție *continuă* pentru orice valoare a lui x.

In adevăr, când dăm lui x o creștere Δx, funcția capătă valoarea

$$y + \Delta y = a(x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2) + b(x + \Delta x) + c. \tag{14}$$

Scăzând egalitatea (13) din (14), deducem

$$\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a\Delta x^2$$

și, când Δx tinde către zero, Δy *tinde către zero*, oricare ar fi x.

3°. Se poate constată în mod analog că, dacă $P(x)$ e un polinom întreg în x, funcția $y = P(x)$ e *continuă* pentru orice valoare a lui x.

Observări. Orice funcție definită printr'o *curbă continuă* într'un interval (a, b) e o funcție continuă în acest interval (*fig.* 43, pag. 281).

O funcție $f(x)$ reală și continuă într'un interval (a, b), când trece dela valoarea $f(a)$ la valoarea $f(b)$, *capătă* succesiv *toate valorile reale cuprinse între* $f(a)$ *și* $f(b)$.

271. Funcție discontinuă. Dacă pentru o funcție, mărginită în vecinătatea unei valori x_1, condiția de continuitate (LXXVII) sau (LXXVIII) nu e realizată pentru $x = x_1$, zicem că funcția e *discontinuă în punctul* x_1.

De asemenea, dacă o funcție $f(x)$ *crește la infinit* $(+\infty)$ sau *descrește spre* $-\infty$, când x tinde către o valoare determinată a, zicem că funcția $f(x)$ e *discontinuă în punctul* a.

EXEMPLU. Funcția rațională [188]

$$y = \frac{1}{x - a} \tag{15}$$

e reală pentru orice valoare reală a lui x. Pentru $x < a$, y e *negativ*; pentru $x > a$, y e *pozitiv*; pentru $x = a$, y e *infinit*.

Pentru $x = a - \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$ foarte mic) avem $y = \frac{1}{-\varepsilon}$, negativ și *foarte mare* în valoare absolută; prin urmare, când $\varepsilon \to 0$, y tinde către $-\infty$.

Pentru $x = a + \varepsilon$, avem $y = \frac{1}{\varepsilon}$, pozitiv și *foarte mare*, dacă ε e destul de mic. Prin urmare, când $\varepsilon \to 0$, y tinde către $+\infty$.

Funcția rațională (15) e *discontinuă* în punctul a. In acest caz zicem că y trece dela $-\infty$ la $+\infty$, când x trece prin valoarea a.

272. Maxim și minim. Dacă există trei numere a, b, c $(a \leqq c \leqq b)$ astfel ca funcția $y = f(x)$, reală în intervalul (a, b), să fie *crescătoare*, când x variază dela a la c și *descrescătoare*, când x variază dela c la b [1], zicem că funcția $f(x)$ *trece printr'un maxim, când* x *trece prin valoarea* c sau că funcția $f(x)$ e *maximă* pentru $x = c$.

---

[1] Intervalul (a, b) poate fi *oricât de mic*.

In acest caz valoarea $f(c)$, pe care o ia funcția $f(x)$ în punctul c, e *mai mare* decât valoarea funcției în oricare alt punct din intervalul (a, b).

EXEMPLE. 1°. Funcția

$$y = 1 - x^2$$

e egală cu 1 pentru $x = 0$ și *mai mică decât* 1 pentru $x \neq 0$; y trece printr'un *maxim* ($y = 1$) pentru $x = 0$.

Oricare ar fi un număr pozitiv ε, când x variază dela $-\varepsilon$ la 0, funcția $y = 1 - x^2$ *crește* dela $1 - \varepsilon^2$ până la 1 și când x variază dela 0 la $+\varepsilon$, y *descrește* dela 0 până la $1 - \varepsilon^2$.

2°. Funcția y definită de curba C (*fig.* 47) e crescătoare dela 0 la a, descrescătoare dela a la b; prin urmare e *maximă* pentru $x = a$. Valoarea maximă a lui y în intervalul $(0, b)$ e M_1.

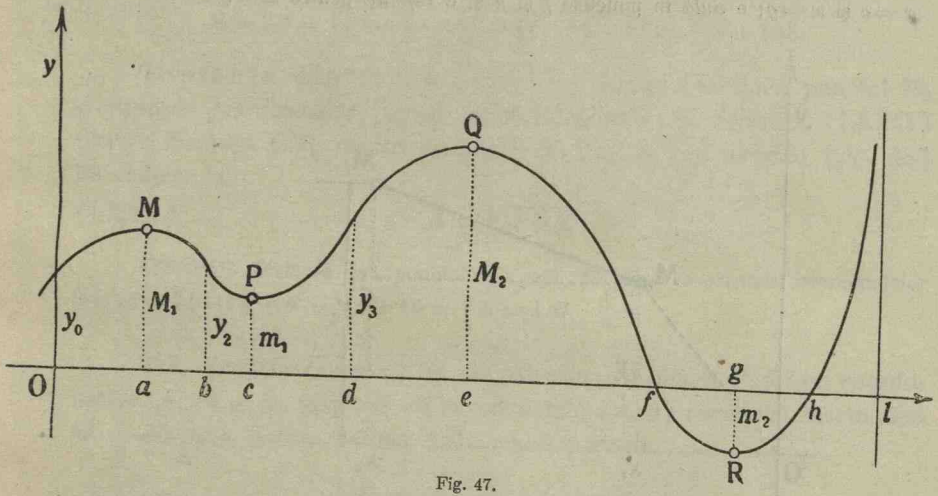


Fig. 47.

Dacă există trei numere a, b, c $(a \leqq c \leqq b)$ astfel ca funcția $y = f(x)$ să fie *descrescătoare*, când x variază dela a la c și *crescătoare*, când x variază dela c la b, zicem că *funcția* $f(x)$ *trece printr'un minim, când* x *trece prin valoarea* c sau că funcția $f(x)$ e *minimă* pentru $x = c$.

In acest caz valoarea $f(c)$, pe care o ia funcția $f(x)$ în punctul c, e *mai mică* decât valoarea funcției în oricare alt punct din intervalul (a, b).

EXEMPLE. 1°. Funcția $y = x^2 + 3$ e egală cu 3 pentru $x = 0$ și *mai mare decât* 3 pentru $x \neq 0$. Când x variază dela -1 până la 0, y descrește dela 4 la 3; când x variază dela 0 până la 2, y crește dela 3 la 7. Prin urmare funcția $y = x^2 + 3$ e *minimă* pentru $x = 0$. Valoarea minimă a funcției e $y = 3$.

2°. Funcția y definită de curba C (*fig.* 47) e descrescătoare când x variază dela b la c și crescătoare când x variază dela c la d; prin urmare e *minimă* pentru $x = c$. Valoarea minimă a lui y în intervalul (b, d) e m_1.

273. Variația unei funcții. A studia *variația unei funcții* $y = f(x)$ însemnează a determină valorile lui x sau intervalele, în care funcția y e: 1°. *reală* sau *imaginară*; 2°. *crescătoare*; 3°. *descrescătoare*; 4°. *maximă* sau *minimă*; 5°. *nulă*; 6°. *infinită*; în general *modul cum se succed valorile lui y*, în intervalele unde y e real, *când x variază dela* $-\infty$ *până la* $+\infty$.

EXEMPLU. Variația funcției y definită în mod grafic prin curba C (*fig.* 47) între $x = 0$ și $x = l$ se poate rezumă în tabloul următor:

x	0	a	b	c	d	e	f	g	h	l
y	y_0 cr.	M_1 desc.	y_2 desc.	m_1 cr.	y_3 cr.	M_2 desc.	0 desc.	m_2 cr.	0 cr.	∞

Funcția are două *maxime* pentru $x = a$ și $x = e$; are două *minime* pentru $x = c$ și $x = g$; e *nulă* în punctele f și h și e *infinită* pentru $x = l$.

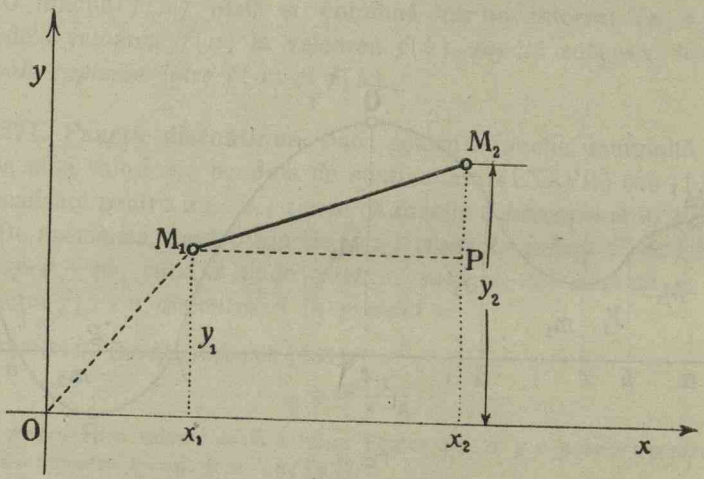


Fig. 48.

274. Distanța dintre două puncte. Să considerăm în planul xOy două puncte: M_1 cu coordonatele x_1, y_1 și M_2 cu coordonatele x_2, y_2 (*fig.* 48). Ducând prin M_1 o dreaptă paralelă cu Ox și prin M_2 o dreaptă paralelă cu Oy, construim un triunghiu dreptunghic M_1PM_2 cu unghiul drept în P.

Coordonatele punctului P sunt $x = x_2$, $y = y_1$ și avem

$$M_1P = x_2 - x_1, \qquad PM_2 = y_2 - y_1.$$

Distanța d dintre punctele M_1 și M_2, adică *ipotenuza* triunghiului dreptunghic M_1PM_2, se poate calculă când cunoaștem coordonatele acestor puncte. In adevăr, formula elementară

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1P}^2 + \overline{PM_2}^2$$

ne dă

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

și, extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, obținem formula fundamentală:

(LXXIX) $d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ (*distanța dintre două puncte*).

OBSERVARE. In această formulă, sensul în care luăm diferențele dintre abscise sau dintre ordonate (x_1-x_2, y_1-y_2 sau x_2-x_1, y_2-y_1) e *indiferent*, deoarece aceste diferențe *se ridică la patrat*.

REGULĂ. *Distanța dintre două puncte e egală cu rădăcina patrată din suma patratelor diferenței abscielor și a diferenței ordonatelor acestor puncte.*

EXEMPLU. Distanța dintre punctele A (3, −5) și B (−2, 4) este

$$d = AB = \sqrt{[3-(-5)]^2+[(-1)-4]^2} = \sqrt{89} = 9{,}43.$$

Distanța dintre un punct și origine. Dacă punctul M_2 e *originea coordonatelor*, avem $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ și formula (LXXIX) pentru *distanța* OM_1 *dintre un punct* M_1 (x_1, y_1) *și origine* (*fig.* 48) se reduce la

(LXXX) $$d = \sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

EXEMPLU. Distanța dela punctul M (−2, 4) până la originea coordonatelor este $d = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4{,}47$.

275. Ecuația cercului. Să considerăm: un punct P *fix* cu coordonatele (a, b) și un punct M cu coordonatele (x, y) *variabile*. Insemnând cu d distanța dintre aceste două puncte, avem

$$d^2 = (x-a)^2+(y-b)^2.$$

Toate punctele M, care se găsesc la o distanță determinată de punctul P, $d = r$, sunt așezate *pe un cerc* C, cu *centrul* în P și cu *raza* r (*fig.* 49, pag. 292). Când punctul M se mișcă *pe cerc*, coordonatele lui (x, y) variază, dar între aceste coordonate avem întotdauna relația

(16) $$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2,$$

care ne exprimă că distanța MP e egală cu r.

OBSERVARE. Dacă punctul M e *în afară* de cercul C, avem

$$d > r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 > r^2.$$

Dacă M e *în interiorul* cercului C, avem

$$d < r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2.$$

Dacă M e *pe cercul* C, avem

$$d = r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

Prin urmare: *dacă* M *e un punct de pe cercul* C (1), *coordonatele lui*, x şi y, *formează un sistem de soluţii al ecuaţiei* (16) şi reciproc, *dacă numerele* x şi y *formează un sistem de soluţii al ecuaţiei* (16), *punctul* M cu coordonatele (x, y) *se găseşte pe cercul* C.

De aceea zicem că ecuaţia

$$(16) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

reprezintă *un cerc* şi anume e *ecuaţia cercului* C *cu centrul în punctul* (a, b) *şi cu raza* r.

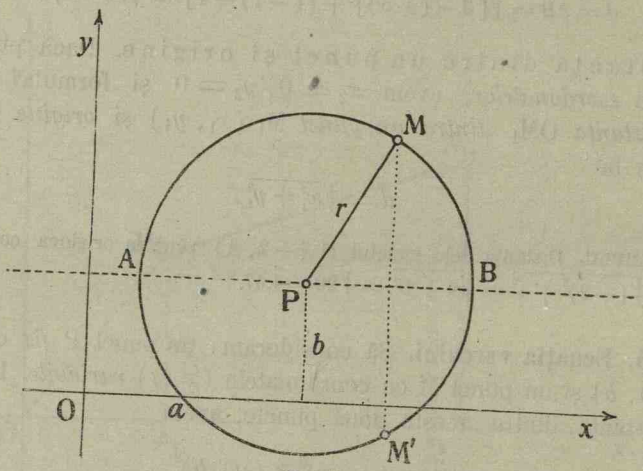


Fig. 49.

EXEMPLE. 1°. Ecuaţia

$$(x-1)^2+(y+5)^2 = 3,$$

în care avem $a=2$, $b=-5$, $r^2=3$, reprezintă un cerc cu centrul în punctul $(2, -5)$ şi cu raza $\sqrt{3}$.

2°. Ecuaţia cercului cu centrul în punctul $(1, 0)$ şi cu raza 1 este

$$(x-1)^2+(y-0)^2 = 1 \quad \text{sau} \quad x^2+y^2-2x = 0.$$

Ecuaţia (16) ne defineşte pe y ca funcţie implicită de x. Ecuaţia fiind de gradul al doilea, pentru fiecare valoare a lui x, ne dă în general *două* valori pentru y. Funcţia e deci multiformă (cu două determinări). Variaţia ei e reprezentată în mod grafic prin *cercul* C.

(1) Adică de pe linia curbă C.

Dacă ducem prin centru o dreaptă AB paralelă cu axa Ox, obținem două semicercuri, unul *superior* AMB, altul *inferior* AM'B. Aceste semicercuri corespund la cele două determinări ale funcției.

In adevăr ecuația (16) rezolvată în raport cu y ne dă

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \tag{17}$$

și

$$y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}. \tag{18}$$

Ecuația $y = b$ reprezintă *dreapta* AB [278, 1]. Expresia (17) cu $y > b$ corespunde la *semicercul superior* și expresia (18) cu $y < b$ corespunde la *semicercul inferior*. Aceste două semicercuri sunt așezate simetric față de dreapta $y = b$.

OBSERVARE. Funcțiile definite prin ecuațiile (17) și (18) sunt *uniforme* și *reale* pentru $a - r \leqq x \leqq a + r$. Variația lor e reprezentată în mod grafic prin semicercurile AMB și AM'B. Pentru $x = a$ funcția (17) e *maximă* ($y = b + r$), iar funcția (18) e *minimă* ($y = b - r$).

II. — FUNCȚII LINIARE.

276. Binomul $ax+b$. Cea mai simplă funcție de x e funcția *liniară* sau *binomul de gradul întâi*:

$$y = ax + b, \tag{19}$$

unde x e variabila independentă, iar a și b sunt două numere date.

1°. Pentru orice valoare reală și finită a lui x, binomul $ax+b$ capătă o valoare *bine determinată, reală* și *finită*.

2°. Dacă a e diferit de zero, *oricare ar fi numărul* y_0, *găsim întotdeauna o valoare și una singură* $x = x_0$, *pentru care binomul* $ax+b$ *capătă valoarea* y_0.

Această valoare se obține rezolvând ecuația

$$ax + b = y_0$$

și găsim

$$x = \frac{y_0 - b}{a} = x_0 \qquad \text{(valoare unică)}.$$

EXEMPLU. Binomul $y = 3x - 5$ capătă valoarea -8 pentru

$$x = \frac{-8+5}{3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

3°. Semnul binomului. Dacă $x = x'$ e rădăcina ecuației

$$ax + b = 0,$$

avem $x' = -\frac{b}{a}$ și putem scrie, pentru orice valoare a lui x,

$$y = ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right) \equiv a(x - x'). \tag{20}$$

Diferența $x - x'$ e *negativă* pentru $x < x'$, *nulă* pentru $x = x'$ și *pozitivă* pentru $x > x'$.

Egalitatea (20) ne arată că y are *același semn* sau *semn contrariu* cu $x - x'$, după cum a e *pozitiv* sau *negativ*.

EXEMPLU. Binomul $y = 3x - 5$ are rădăcina $x = \frac{5}{3}$ și coeficientul $a = 3 > 0$. Prin urmare y e negativ pentru $x < \frac{5}{3}$, nul pentru $x = \frac{5}{3}$ și pozitiv pentru $x > \frac{5}{3}$.

4°. Funcția $ax + b$ e *crescătoare* dacă a e *pozitiv* și *descrescătoare* dacă a e *negativ*.

In adevăr, dacă pentru două valori x_1 și x_2 avem

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b,$$

deducem

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1). \tag{21}$$

Prin urmare: dacă a e *pozitiv*, pentru

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \text{avem} \quad y_2 - y_1 > 0$$

adică, pentru $x_1 < x_2$, avem

$$y_1 < y_2 \quad \text{sau} \quad ax_1 + b < ax_2 + b$$

și funcția $y = ax + b$ e *crescătoare* [**267**, 1].

Dacă a e *negativ*, egalitatea (21) pentru

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \text{ne dă} \quad y_2 - y_1 < 0$$

adică, pentru $x_1 < x_2$ avem

$$y_1 > y_2 \quad \text{sau} \quad ax_1 + b > ax_2 + b$$

și funcția $y = ax + b$ e *descrescătoare* [**267**, 2].

Dacă a e *nul* avem $y = b$ pentru orice valoare a lui x; binomul $ax + b$ se reduce la o *constantă*.

5°. Dacă a e diferit de zero, *când x tinde către $\pm\infty$, valoarea binomului $ax + b$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$*, având aceeași limită ca și produsul ax.

In adevăr, pentru

$$|x| > \left|\frac{b}{a}\right| \quad \text{avem} \quad |ax| > |b|$$

și semnul binomului $ax + b$ e semnul produsului ax.

Pe de altă parte, când $|x| \to \infty$, atât ax cât și $ax+b$ *cresc la infinit* în valoare absolută.

Prin urmare, dacă a e *pozitiv*:

$$ax+b \to +\infty \quad \text{când} \quad x \to +\infty,$$
$$ax+b \to -\infty \quad \text{când} \quad x \to -\infty;$$

iar dacă a e *negativ*:

$$ax+b \to -\infty \quad \text{când} \quad x \to +\infty,$$
$$ax+b \to +\infty \quad \text{când} \quad x \to -\infty.$$

EXEMPLU. Pentru binomul $y = -4x+7$

$y \to -\infty$ când $x \to +\infty$ și $y \to +\infty$ când $x \to -\infty$.

277. Variația funcției $y = ax+b$. Presupunând $b > 0$, variația funcției $y = ax+b$ se poate rezumă în tablourile următoare:

1^0. $y = ax+b, \quad a > 0.$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	crește	0	crește	b	crește	$+\infty$

2^0. $y = ax+b, \quad a < 0.$

x	$-\infty$		0		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	descrește	b	descrește	0	descrește	$-\infty$

In mod analog se discută cazurile 1^0 și 2^0 pentru $b < 0$.

3^0. $y = b \quad (a = 0).$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	b	b	b	b	b

278. Reprezentarea grafică. Pentru a găsi *linia* prin care se reprezintă în mod grafic variația funcției

(19) $$y = ax+b,$$

vom începe cu cazurile cele mai simple.

CAZUL 1^0. $a = 0$. Ecuația (19) se reduce la

(22) $$y = b,$$

adică, oricare ar fi x, ordonata y are mereu *aceeaș lungime* b. Astfel

pentru $x = OP_1$ avem punctul M_1 ($P_1M_1 = b$) (*fig.* 50);
pentru $x = OP_2$ avem punctul M_2 ($P_2M_2 = b$);
pentru $x = OP_3$ avem punctul M_3 ($P_3M_3 = b$)

și așă mai departe.

Obținem dar un șir de puncte *situate* toate *pe o aceeaș dreaptă* D *paralelă cu axa* Ox și la distanța b de această axă.

Invers, orice punct de pe dreapta D (*fig.* 50) are ordonata egală cu b, adică *satisface la condiția* $y = b$. De aceea zicem că

$y = b$ *e ecuația unei drepte paralele cu axa* Ox.

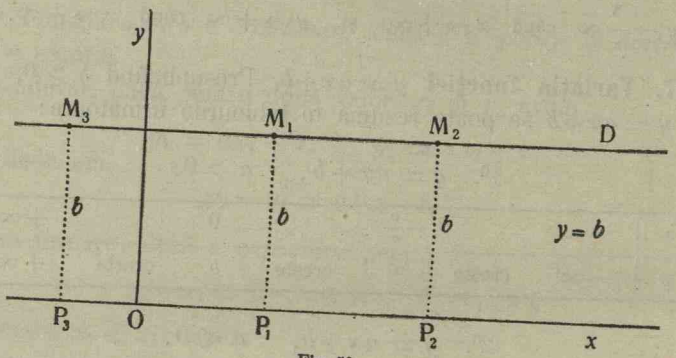


Fig. 50.

Un raționament analog ne arată că toate punctele, care au *aceeaș abscisă* a se găsesc pe o *aceeaș dreaptă* D′ *paralelă cu axa* Oy și la distanța a de această axă.

Invers, toate punctele de pe dreapta D′ satisfac la condiția $x = a$. De aceea zicem că

$x = a$ *e ecuația unei drepte paralele cu axa* Oy.

Cazul 2°. $b = 0$. Ecuația (19) se reduce la

(23) $$y = ax,$$

care pentru fiecare valoare a lui x ne dă câte o valoare pentru y și câte un punct M în plan cu coordonatele (x, y).

Dacă a e *pozitiv*, pentru $x < 0$ avem $y < 0$ și punctele M corespunzătoare se găsesc în regiunea (III) față de axele Ox, Oy [263]; pentru $x > 0$ avem $y > 0$ și punctele M se găsesc în regiunea (I).

Dacă a e *negativ*, pentru $x < 0$ avem $y > 0$ și punctele corespunzătoare se găsesc în regiunea (II); pentru $x > 0$ avem $y < 0$ și punctele se găsesc în regiunea (IV).

TEOREMĂ. *Toate punctele* M, *ale căror coordonate satisfac la o aceeaș ecuație de forma* $y = ax$, *sunt situate pe o aceeaș dreaptă, care trece prin origine.*

Fie M_1 (*fig.* 51) un punct cu coordonatele

$$x_1 = OP_1, \qquad y_1 = P_1M_1,$$

care satisfac la condiția $y_1 = ax_1$ și fie D dreapta OM_1, care trece prin *origine* și prin punctul M_1.

Vom demonstră că *orice alt punct* M, *ale cărui coordonate* (x, y) *satisfac la ecuația* $y = ax$, *se găsește pe dreapta* D.

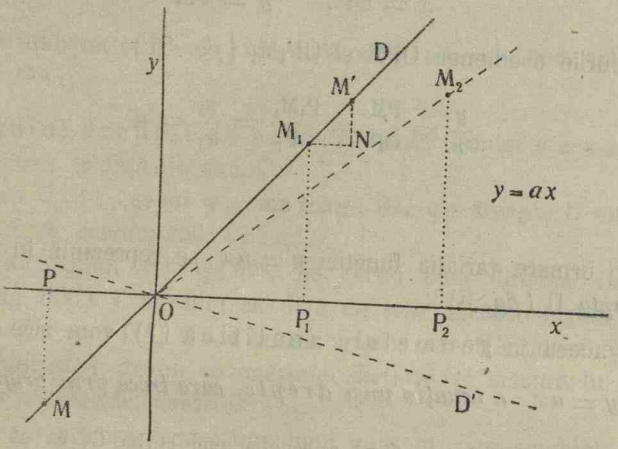


Fig. 51.

In adevăr, dacă M_2 ($x_2 = OP_2$, $y_2 = P_2M_2$) e un punct ale cărui coordonate satisfac la ecuația (23) și care e situat în aceeaș regiune cu M_1 față de axele Ox, Oy, din egalitățile

$$y_1 = ax_1 \qquad \text{și} \qquad y_2 = ax_2$$

deducem

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \text{sau} \qquad \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{P_2M_2}{OP_2}.$$

Prin urmare triunghiurile dreptunghice OP_1M_1 și OP_2M_2 sunt *asemenea*; unghiurile M_1OP_1 și M_2OP_2 sunt *egale* și cum ele au o latură comună (Ox), un vârf comun (O) și laturile necomune OM_1 și OM_2 așezate *de aceeaș parte* a axelor Ox și Oy, rezultă că *direcția* OM_2 *se confundă cu* OM_1 sau că *punctul* M_2 *se găsește pe dreapta* D.

Dacă punctele M_1 (x_1, y_1) și M (x, y), ale căror coordonate satisfac la condițiile

$$y_1 = ax_1 \qquad \text{și} \qquad y = ax,$$

sunt situate în regiuni *opuse*, un raționament analog ne arată că unghiurile P_1OM_1 și POM sunt egale și cum laturile OP și OP_1 sunt în prelungire, rezultă că și laturile OM și OM_1 sunt în prelungire și *punctul* M *e tot pe dreapta* D.

Reciproc. Dacă D e dreapta, care trece prin origine și prin punctul $M_1(x_1, y_1)$ și dacă însemnăm cu a raportul $\frac{y_1}{x_1}$, *coordonatele* (x, y) *ale oricărui punct* M *de pe dreapta* D *satisfac la ecuația* $y = ax$.

In adevăr, dacă M e un punct situat pe dreapta OM_1 (D), avem

$$x = OP, \qquad y = PM$$

și triunghiurile asemenea OPM și OP_1M_1 (*fig.* 51), ne dau

$$\frac{y}{x} = \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{y_1}{x_1} = a$$

sau

$$y = ax.$$

Prin urmare variația funcției $y = ax$ se reprezintă în mod grafic prin *dreapta* D (*fig.* 51).

De aceea în geometria analitică (1) vom zice că

$y = ax$ *e ecuația unei drepte, care trece prin origine.*

OBSERVARE. Dacă $y = f(x)$ e ecuația unei curbe C, ca să putem spune dacă un punct $M_1(x_1, y_1)$ se găsește (sau nu) pe curba C, e deajuns să căutăm dacă coordonatele x_1, y_1 satisfac (sau nu) la ecuația $y = f(x)$.

Astfel *originea* se găsește pe dreapta $y = ax$ (sau dreapta $y = ax$ *trece prin origine*), fiindcă coordonatele originei, $x = 0$, $y = 0$, satisfac la ecuația $y = ax$.

Panta dreptei. Să luăm pe dreapta D (*fig.* 51) două puncte $M_1(x_1, y_1)$ și $M'(x', y')$. *Raportul dintre diferența ordonatelor*

$$y' - y_1 = \Delta y = NM'$$

și diferența absciselor

$$x' - x_1 = \Delta x = M_1N$$

adică

$$p = \frac{y' - y_1}{x' - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{24}$$

este *panta mijlocie a dreptei* D *între punctele* M_1 *și* M' [269].

(1) In geometria analitică se înlocuește fiecare *figură* printr'o *ecuație* și se stabilesc proprietățile figurilor din studiul ecuațiilor corespunzătoare.

Dar, oricare ar fi punctele M_1 și M' pe dreapta D, triunghiul dreptunghic M_1NM' e *asemenea* cu OP_1M_1 și avem

$$\frac{NM'}{M_1N} = \frac{P_1M_1}{OP_1}$$

sau

$$p = \frac{y' - y_1}{x' - x_1} = \frac{y_1}{x_1} = a.$$

Raportul acesta constant a se numește *panta dreptei* D.

Ecuația $y = ax$ reprezintă *o dreaptă, care trece prin origine și are panta a.*

EXEMPLU. Ecuația $y = 3x$ reprezintă o dreaptă care trece prin origine și are panta 3 sau $\frac{3}{1}$.

Unghiul dreptei cu axa Ox. Panta dreptei $y = ax$ ne determină *aplecarea* ei față de axa Ox.

Pentru $x = 1$, avem $y = a$. Există dar, pe dreapta D cu panta a, un punct A *cu coordonatele* $(1, a)$.

Fie α unghiul $xOA \leqq 90^0$, pe care-l face direcția OA cu Ox (*fig.* 52, pag. 300). Convenim să dăm un *sens* acestui unghiu și anume sensul *dela* Ox *spre* OA. Ox e latura *origine* iar OA latura *extremitate*. Astfel unghiul xOA devine o mărime *dirijată* și măsura lui se reprezintă printr'un *număr algebric*.

Pentru a precizà *sensul* unghiului α, vom zice unghiul xOA sau unghiul (Ox, OA), spunând, ca și la segmentele dirijate, întâi originea și apoi extremitatea [24].

Dacă sensul, în care s'ar roti o semidreaptă $O\Delta$ în jurul punctului O, ca să descrie unghiul α dela *origine* (Ox) spre *extremitate* (OA), e *contrar* cu sensul de rotație al ácelor unui ceasornic, zicem că unghiul α e *pozitiv*; în cazul contrariu unghiul e *negativ*.

EXEMPLE. Pe figura 52 unghiul xOD sau (Ox, OD) e *pozitiv* și egal cu $+30^0$, pe când unghiul xOD' sau (Ox, OD') e *negativ* și egal cu -40^0.

Relația dintre pantă și unghiu. Dacă a e panta unei drepte reprezentată prin ecuația

$$y = ax,$$

la fiecare valoare a numărului a, dela $-\infty$ până la $+\infty$, corespunde câte *un punct* A cu coordonatele $(1, a)$, *o direcție* OA și *un unghiu* (Ox, OA) cu valoarea α.

Pentru $a = 0$ avem $\alpha = 0$; direcția OA se confundă cu Ox,

Pentru $a > 0$ unghiul α e *pozitiv*; semidreapta OA e deasupra axei Ox (*fig* 52). Când a crește și α crește.

Pentru $a = 1$ triunghiul OPA e isoscel; avem $OP = PA = 1$ și $\alpha = 45^0$. Direcția OA e bisectoarea unghiului xOy.

Când a tinde către $+\infty$, direcția OA tinde să se confunde cu Oy: unghiul α tinde către 90^0.

Pentru $a < 0$ unghiul α e *negativ*; semidreapta OA e dedesubtul axei Ox (direcția OD′ pe *fig.* 52). Când a crește în valoare absolută și α negativ crește în valoare absolută.

Pentru $a = -1$ avem $\alpha = -45^0$; OA e bisectoarea unghiului xOy'.

Când a tinde către $-\infty$, direcția OA tinde să se confunde cu Oy': unghiul α tinde către -90^0.

Coeficientul a, care ne determină unghiul α, pe care-l face dreapta $y = ax$ cu axa Ox, se mai numește *coeficientul unghiular* al acestei drepte.

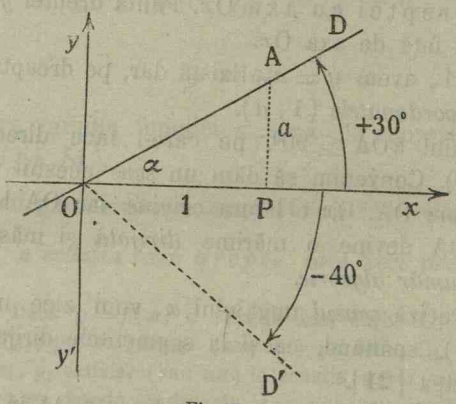


Fig. 52.

Construcția dreptei. Ca să construim dreapta

(D) $$y = ax$$

e de ajuns să determinăm *două puncte* ale ei.

Un punct e *originea* coordonatelor O ($x = 0$, $y = 0$). Ca al doilea punct poate fi luat punctul A ($x = 1$, $y = a$) sau oricare alt punct M_1 ($x = x_1$, $y = ax_1$). Unind originea O cu punctul A (sau cu M_1) avem direcția dreptei D.

Dacă panta a e *pozitivă*, dreapta D e *urcătoare* (direcția OD, *fig.* 52); dacă panta a e *negativă* dreapta D e *scoborîtoare* (direcția OD′).

Observări. Dreptele reprezentate prin ecuațiile

$$y = ax \quad \text{și} \quad y = -ax$$

sunt *simetrice* față de axa Ox.

Dreapta $y = x$, având panta 1, e bisectoarea unghiului xOy.
Dreapta $y = -x$, având panta -1, e bisectoarea unghiului xOy'.

Dacă dreapta D ($y = ax$) e construită pe o hârtie milimetrică, ea ne determină în mod grafic *produsul numărului a cu orice număr real.*

In adevăr, dacă n e un număr real, luând pe axa Ox abscisa $OP = n$ și ducând prin P o paralelă la Oy, determinăm pe dreapta D un punct M cu abscisa n. Produsul an se obține măsurând *lungimea ordonatei* PM.

279. Cazul general: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Avem ecuația

(25) $$y = ax + b.$$

Pentru $x = 0$ avem $y = b$. Prin urmare linia reprezentată prin ecuația (25) trece prin punctul N $(0, b)$, adică taie axa Oy la distanța b dela origine.

Pentru orice altă valoare a lui x, ordonata y se compune din *două părți*: ax și b. Valorile produsului ax sunt date de ordonatele dreptei D' ($y = ax$). Fie D'' dreapta $y = b$ (*fig.* 53).

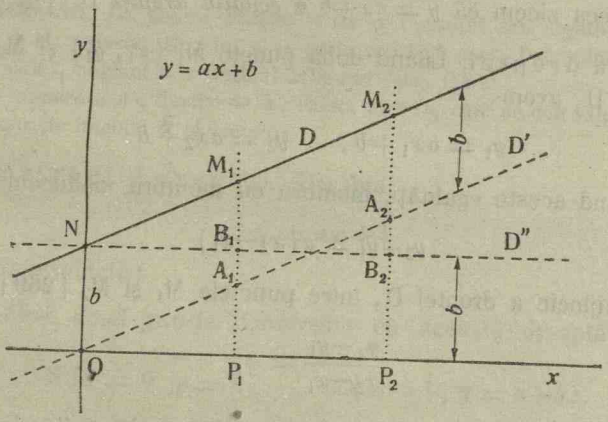


Fig. 53.

Pentru a construi ordonata y_1 a unui punct M_1 de pe linia (25), care corespunde la $x = x_1$, observăm că, în suma

$$y_1 = ax_1 + b$$

ax_1 e ordonata punctului A_1 de pe dreapta D' și b e ordonata punctului corespunzător B_1 de pe dreapta D''; trebue dar să adunăm la segmentul $P_1A_1 = ax_1$, segmentul $A_1M_1 = P_1B_1 = b$.

De aci rezultă că segmentele ON și A_1M_1 sunt *egale* și *paralele*; patrulaterul NOA_1M_1 e un *paralelogram* și *dreapta* NM_1 *e paralelă cu* D'.

In acelaș fel se determină oricare alt punct M_2 cu coordonatele x_2, y_2, care satisfac la egalitatea $y_2 = ax_2 + b$. Dreapta NM_2 e și ea paralelă cu D' și, cum trece tot prin N, *se confundă cu dreapta* NM_1.

De aci rezultă următoarea

Teoremă. *Toate punctele, ale căror coordonate satisfac la ecuația* $y = ax+b$ *sunt situate pe o aceeaș dreaptă, care taie axa* Oy *la distanța* b *dela origine și care e paralelă cu dreapta* $y = ax$.

Reciproc. Fie D′ dreapta $y = ax$ și D dreapta *paralelă* cu D′, dusă prin punctul N cu coordonatele $(0, b)$.

Coordonatele oricărui punct de pe dreapta D *satisfac la ecuația*

$$y = ax + b.$$

In adevăr, dacă $M_2\ (x_2, y_2)$ e un punct situat pe dreapta D și dacă ordonata P_2M_2 e tăiată de dreapta D′ în punctul A_2, avem

$$P_2A_2 = ax_2, \qquad A_2M_2 = ON = b,$$

deci

$$y_2 = P_2M_2 = ax_2 + b.$$

De aceea zicem că $y = ax+b$ e *ecuația dreptei* D (*fig.* 53).

Panta dreptei. Luând două puncte $M_1\ (x_1, y_1)$ și $M_2\ (x_2, y_2)$ pe dreapta D, avem

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b.$$

Scăzând aceste egalități, membru cu membru, deducem

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

și panta mijlocie a dreptei D, între punctele M_1 și M_2 [**269**] este

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a. \tag{26}$$

Dacă punctele M_1 și M_2 sunt pe o *linie curbă* C și dacă, lăsând punctul M_1 fix, mișcăm punctul M_2 pe curba C apropiindu-l sau depărtându-l de M_1, panta mijlocie a curbei între M_1 și M_2 *variază*, în general, *cu poziția punctului* M_2.

Dar dacă punctele M_1 și M_2 sunt pe o *linie dreaptă* D, egalitatea (26) ne arată că *panta mijlocie a dreptei* D *păstrează aceeaș valoare* a, oricare ar fi punctele M_1 și M_2.

De aceea zicem că

$$a \text{ e } \textit{panta dreptei } y = ax+b.$$

Coeficientul b, care e ordonata punctului N, unde dreapta D taie axa Oy, se numește *ordonata la origine* a dreptei.

Unghiul dreptei cu axa Ox. Dreapta

(D) $$y = ax + b$$

fiind paralelă cu

(D′) $$y = ax$$

face cu axa Ox același unghiu ca și D′.

Ecuația unei alte drepte D_1 paralelă cu D′, dar care taie axa Oy la distanța b_1 dela origine, este

(D_1) $$y = ax + b_1.$$

Dreptele D_1 și D fiind paralele cu D′ sunt *paralele între ele.*

Prin urmare: *toate dreptele paralele între ele* adică *toate dreptele, care fac același unghiu cu axa* Ox, *au aceeași pantă* și reciproc *toate dreptele, care au aceeași pantă* a, *fac același unghiu* α *cu axa* Ox.

De aceea a se mai numește *coeficientul unghiular* al dreptei D.

OBSERVARE. *La fiecare valoare a lui* a (pozitivă sau negativă) *corespunde un unghiu* α *și reciproc.* Unghiul α se poate construi ușor. Determinând punctul A ($x = 1$, $y = a$), unghiul α e unghiul xOA sau (Ox, OA).

Prin urmare a e o funcție de α. Există table, care ne dau valoarea pantei a, când se cunoaște unghiul α și reciproc.

Construcția dreptei. Dreapta

(D) $$y = ax + b$$

poate fi determinată:

1°. *Prin două puncte.* Observăm că această dreaptă trece prin punctele

$$N(x = 0,\ y = b), \qquad M(x = 1,\ y = a + b).$$

Dreapta D e dreapta NM.

In loc de punctele N și M putem luă oricare alte două puncte de pe dreapta D

$$M_1(x_1,\ y_1 = ax_1 + b), \qquad M_2(x_2,\ y_2 = ax_2 + b).$$

2°. *Printr'un punct și o dreaptă paralelă cu ea.* Putem luă ca *punct* punctul N(0, b) de pe axa Oy sau oricare alt punct $M_1(x_1,\ y_1 = ax_1 + b)$ de pe dreapta D și ca *paralelă* dreapta D′ cu ecuația $y = ax$.

Dreapta D e dreapta paralelă cu D′ dusă prin punctul N (sau prin M_1).

OBSERVARE. Când panta a variază, dreapta D *se rotește în jurul punctului* N.

Când b variază, dreapta D se mișcă în plan rămânând *paralelă cu ea însăși*, fiindcă e necontenit paralelă cu D′.

EXEMPLU. Ecuația

(27) $$y = \frac{5}{8}(x+1)$$

reprezintă o *dreaptă*. Dacă facem pe $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sau $x = -1, -2, \ldots$ și calculăm valorile lui y date de ecuația (27), obținem coordonatele și punctele următoare:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{15}{8}$	2,5	...
Punctul	...	A	B	C	D	E	F	...

Toate aceste puncte sunt așezate în *linie dreaptă* (*fig.* 54).

Dreapta reprezentată de ecuația (27) e dreapta AF. Ea taie axa Ox în punctul B $(-1, 0)$ și axa Oy în punctul C $\left(0, \frac{5}{8}\right)$.

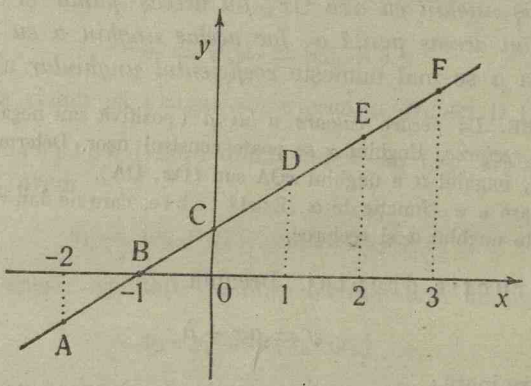


Fig. 54.

Panta ei este coeficientul lui x, adică $\frac{5}{8}$. *Unghiul* α al dreptei cu axa Ox este unghiul ascuțit B dela baza triunghiului dreptunghic BOC $\left(BO = 1, OC = \frac{5}{8}\right)$ sau unghiul ascuțit B dela baza unui triunghiu dreptunghic BPM cu unghiul drept în P, cu cateta verticală $PM = 5$ și cu cateta orizontală $BP = 8$.

Panta $\frac{5}{8}$ fiind *pozitivă*, unghiul α e *pozitiv*; dreapta e *urcătoare* și funcția y e *crescătoare*. y e pozitiv pentru $x > -1$, nul pentru $x = -1$ și negativ pentru $x < -1$.

280. Ecuația generală de gradul întâi. Să considerăm ecuația generală de gradul întâi cu două necunoscute

(28) $$Ax + By + C = 0.$$

Dacă B e *diferit de zero*, ecuația se poate rezolvà în rapot cu y și ne dă funcția explicită

(29) $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

care e de forma

(30) $$y = ax + b \quad \text{cu} \quad a = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}.$$

Prin urmare reprezentarea grafică a funcției y, definită prin ecuația (28), este o *dreaptă* D cu panta $-\frac{A}{B}$ și cu ordonata la origine $-\frac{C}{B}$ [279].

Orice punct M, *ale cărui coordonate* (x, y) *satisfac la ecuația* (28) *se găsește pe dreapta* D și reciproc *coordonatele oricărui punct de pe dreapta* D *satisfac la ecuația* (30) și prin urmare *și la ecuația* (28).

De aceea zicem că

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{e } \textit{ecuația unei drepte.}$$

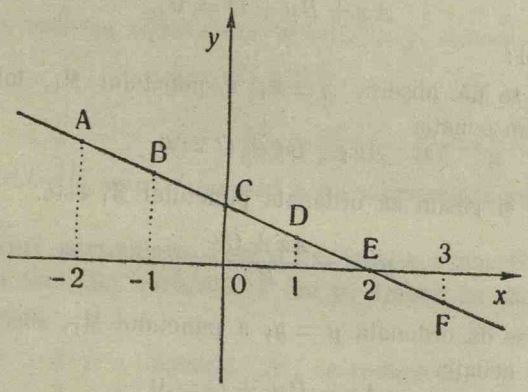


Fig. 55.

EXEMPLU. Ecuația

(31) $$2x + 5y - 4 = 0$$

reprezintă o linie *dreaptă*. Înțelegem că, dacă dăm variabilei x diferite valori și calculăm valorile corespunzătoare ale lui y, *date de ecuația* (31),

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	1.6	1.2	0.8	0.4	0	-0.4	...
Punctul	...	A	B	C	D	E	F	...

toate punctele A $(-2, 1.6)$, B $(-1, 1.2)$, ..., cu coordonatele astfel obținute, sunt situate *pe o aceeași linie dreaptă* (*fig.* 55).

Ecuația (31) e de forma (28), în care avem

$$A = 2, \qquad B = 5, \qquad C = -4.$$

Rezolvată în raport cu y ne dă funcția explicită

(32) $$y=-\frac{2x}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2}{5}(2-x),$$

care ne arată că dreapta (31) are

$$\text{panta } -\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}$$

și

$$\text{ordonata la origine } \frac{4}{5}=0{,}8.$$

Unghiul α, pe care-l face această dreaptă cu axa Ox, este unghiul MOx, pe care-l obținem luând punctul M cu abscisa 5 (numitorul pantei) și cu ordonata -2 (numărătorul pantei) și unind punctul M cu O.

Panta dreptei (32) e *negativă*, unghiul α e *negativ*; dreapta e *scoborîtoare*, funcția y e *descrescătoare*.

y e pozitiv pentru $x<2$, nul pentru $x=2$ și negativ pentru $x>2$.

Punct pe dreaptă. Ca să găsim coordonatele unui punct M_1 de pe dreapta

(D) $$Ax+By+C=0,$$

procedăm astfel:

Dacă ni se dă abscisa $x=x_1$ a punctului M_1, înlocuind pe x prin x_1 rezolvăm ecuația

$$Ax_1+By+C=0$$

în raport cu y și găsim că ordonata punctului M_1 este

$$y=-\frac{Ax+C}{B}=y_1.$$

Dacă ni se dă ordonata $y=y_1$ a punctului M_1, abscisa lui se obține rezolvând ecuația

$$Ax+By_1+C=0$$

în raport cu x.

In particular, *punctul unde dreapta taie axa* Ox se obține înlocuind în ecuația dreptei pe y prin 0 și rezolvând ecuația $Ax+C=0$.

Găsim astfel $x=-\frac{C}{A}$, $y=0$.

Punctul unde dreapta taie axa Oy se obține înlocuind în ecuația dreptei pe x prin 0 și rezolvând ecuația $By+C=0$.

Găsim astfel $x=0$, $y=-\frac{C}{B}$.

Construcția dreptei. Ca să construim dreapta dată printr'o ecuație de forma

(28) (D) $$Ax+By+C=0,$$

e de ajuns să-i determinăm *două puncte* ale ei. Putem, de exemplu, să căutăm punctele unde dreapta taie axele de coordonate, adică punctele de pe dreapta D, care au sau abscisa sau ordonata *nulă*.

EXEMPLU. Ecuația

(31) $$2x+5y-4=0$$

pentru $x=0$ ne dă $y=\frac{4}{5}=0{,}8$ adică punctul C pe axa Oy (*fig.* 55);

pentru $x=1$ ne dă $y=\frac{2}{5}=0{,}4$ adică punctul D.

Dreapta reprezentată prin ecuația (31) este dreapta CD. Ea taie axa Ox în punctul E $(2,0)$ și axa Oy în punctul C $\left(0, \frac{4}{5}\right)$.

OBSERVARE. Două ecuații liniare în x și y cu coeficienți *proporționali*

(33) $$Ax+By+C=0$$

și

(34) $$pAx+pBy+pC=0$$

reprezintă *aceeași dreaptă.*

In adevăr, rezolvând aceste ecuații în raport cu y, obținem

(35) $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

și

(36) $$y=-\frac{pA}{pB}x-\frac{pC}{pB}=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Aceste două drepte, având aceeași pantă și aceeași ordonată la origine, *se confundă.*

281. Cazuri particulare. Pentru ca ecuația generală (28) să conțină cel puțin una din variabile, x sau y, trebue ca sau A sau B să fie *diferit de zero.*

1°. $A=0$, $B\neq 0$. Ecuația (28) se reduce la

(37) $$By+C=0 \quad \text{sau} \quad y=-\frac{C}{B}=y_0.$$

Dreapta e paralelă cu axa Ox [278, 1] și la distanța y_0 dela această axă (1). Unghiul, pe care-l face dreapta (37) cu axa Ox, e *nul* și panta dreptei e *nulă.*

2°. $B=0$, $A\neq 0$. Ecuația (28) se reduce la

(38) $$Ax+C=0 \quad \text{sau} \quad x=-\frac{C}{A}=x_0.$$

Dreapta e paralelă cu axa Oy [278, 1] și la distanța x_0 dela această axă. Unghiul, pe care-l face dreapta (37) cu axa Ox e de 90° și panta dreptei e *infinită.*

(1) Înțelegem la distanța $|y_0|$ dela axa Ox: *deasupra* acestei axe dacă y_0 e pozitiv și *dedesubt* dacă y_0 e negativ.

3°. $C = 0$, $B \neq 0$. Ecuația (28) se reduce la

(39) $$Ax + By = 0 \quad \text{sau} \quad y = -\frac{A}{B}x = mx.$$

Dreapta trece prin origine [278, 2] și are panta $m = -\frac{A}{B}$.

282. Tangenta la cerc. Să considerăm un *cerc* cu centrul în O. Fie A și B două puncte de pe cerc; dreapta AB sau AS, care taie cercul în punctele A și B, e o *secantă* (*fig.* 56).

Cât timp punctele A și B sunt *distincte*, direcția secantei AS e perfect determinată, cel puțin teoretic.

E evident că în practică, dacă distanța dintre punctele A și B e foarte mică (de ex. de 1 mm. sau de 0,1 mm.) direcția AS e cu totul nedeterminată.

In *teorie* însă, oricât de mică ar fi distanța AB, îndată ce nu e riguros *nulă*, direcția AB se consideră ca perfect de bine determinată.

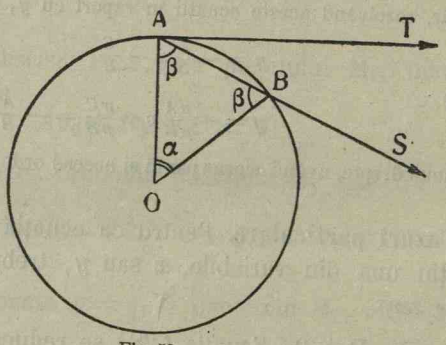


Fig. 56.

Să lăsăm punctul A fix și să mișcăm punctul B pe cerc, *apropiindu-l de* A. In fiecare poziție a punctului B (diferit de A) direcția AS e bine determinată.

Când B *tinde către* A, *direcția secantei* AS *tinde către direcția limită* AT, care e *tangenta la cerc în punctul* A.

OBSERVARE. Când se consideră tangenta AT ca o dreaptă ce trece prin două puncte A și B *confundate*, direcția ei e nedeterminată. Când se consideră însă ca *limita* pozițiilor succesive ale secantei AS, când B tinde către A, poziția tangentei în punctul A e perfect determinată.

In cazul *cercului*, dacă dreapta AB e o secantă, în triunghiul isoscel AOB (*fig.* 56) avem

$$\alpha + 2\beta = 180^0.$$

Când punctul B tinde către A, unghiul α tinde către *zero* și unghiul $OAS = \beta$ tinde către 90^0. Prin urmare: *poziția limită* a secantei AS adică *tangenta* AT, *e perpendiculară pe raza* OA.

283. Panta unei curbe într'un punct. Fie C o curbă reprezentată prin ecuația

(40) $$(C) \quad y = f(x).$$

Să luăm pe această curbă două puncte apropiate

$$M_1(x_1, y_1) \quad \text{și} \quad M_2(x_2, y_2).$$

Dreapta M_1M_2 e o *secantă* la curba C (*fig.* 57).

Panta ei e raportul

(41) $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\textit{panta secantei})$$

dacă coordonatele punctului M_2 sunt $x_2 = x_1 + \Delta x$ și $y_2 = y_1 + \Delta y$.

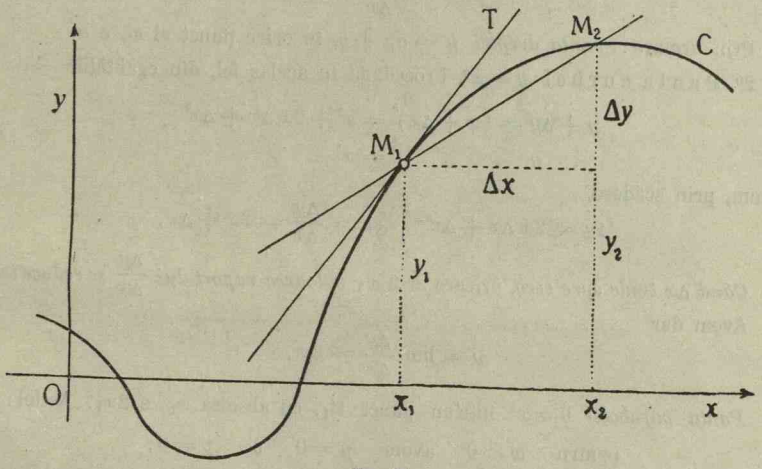


Fig. 57.

Să lăsăm punctul M_1 fix și să mișcăm punctul M_2 pe curba C apropiindu-l de M_1.

Când M_2 *tinde către* M_1, *direcția secantei* M_1M_2 *tinde către o poziție limită* M_1T, care se numește *tangenta la curbă în punctul* M_1; diferențele Δx și Δy tind fiecare către *zero*, dar raportul lor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tinde către *panta tangentei* M_1T, pe care o vom însemna-o cu p.

Avem dar

(LXXXI) $$p = \textit{panta tangentei} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

când Δx tinde către *zero*.

Panta secantei M_1M_2 e *panta mijlocie* a curbei C între punctele M_1 și M_2; ea variază, în general, când M_2 variază.

Limita acestei pante, când M_2 tinde către M_1, adică *panta tangentei* M_1T, se numește *panta curbei în punctul* M_1.

EXEMPLE. 1°. Panta unei drepte într'un punct al ei.

Ca să determinăm panta unei drepte $y = ax + b$ într'un punct al ei $M(x, y)$, luăm pe această dreaptă un punct vecin $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$, și căutăm *limita raportului* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *când* Δx *tinde spre zero.*

Din egalitățile

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$
$$y = ax + b$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = a\,\Delta x \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ având valoarea constantă a pentru orice valoare a creșterii Δx, rezultă că și pentru $\Delta x \to 0$ avem

(42) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Prin urmare: *panta dreptei* $y = ax + b$, în orice punct al ei, e a.

2°. Panta curbei $y = x^2$. Procedând în acelaș fel, din egalitățile

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$
$$y = x^2$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \quad \text{și} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Când Δx *tinde spre zero,* oricare ar fi x, *valoarea raportului* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *se reduce la* $2x$. Avem dar

(43) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

Panta parabolei $y = x^2$ într'un punct M_1, cu abscisa x_1, e $2x_1$. Astfel:

pentru	$x = 0$	avem	$y = 0$	și $p = 0$;
pentru	$x = 1$	avem	$y = 1$	și $p = 2$,
pentru	$x = 2$	avem	$y = 4$	și $p = 4$, etc.

Derivată. Curba C (*fig.* 57) are o *ordonată* y și o *pantă* p în fiecare punct al ei. Când x variază și ordonata și panta variază, în general:

y și p sunt *funcții* de x.

Funcția y e definită prin expresia $f(x)$. Funcția p e definită prin

(LXXXI) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

când Δx *tinde spre zoro.* Această limită se numește *derivata* funcției $y = f(x)$ și se reprezintă prin simbolul y' sau $f'(x)$.

EXEMPLE. Din exemplele precedente rezultă că

derivata funcției $y = ax + b$ e $y' = a$;
derivata funcției $y = x^2$ e $y' = 2x$.

REGULĂ. Când ni se dă ecuația $y = f(x)$ a unei curbe C, *ordonata* și *panta* curbei C, într'un punct M, cu abscisa x, se calculează prin formulele următoare:

$$\begin{aligned} &\textit{ordonata} && y = f(x), \\ &\textit{panta tangentei} && p = y' = f'(x). \end{aligned}$$

III. — FUNCȚII NELINIARE.

284. Funcția $y = x^2$. Am văzut (pag. 272) că funcția $y = x^2$ e reală și finită pentru orice valoare reală a lui x dela $-\infty$ până la $+\infty$ și că imaginea ei geometrică e o *parabolă* C (*fig.* 58).

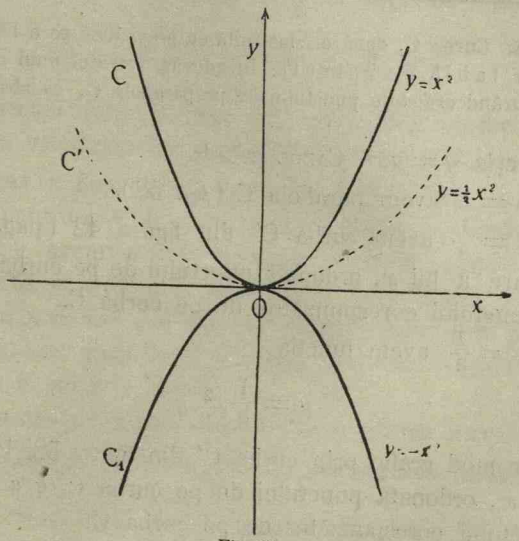


Fig. 58.

Panta acestei parabole variază cu valoarea lui x și e dată de formula

$$p = 2x.$$

Când x variază dela $-\infty$ până la 0, funcția $y = x^2$ *descrește* dela $+\infty$ până la 0, panta p e *negativă* și curba e *scoborîtoare*.

Pentru $x = 0$ avem $y = 0$ și $p = 0$.

Când x crește dela 0 până la $+\infty$, funcția y *crește* dela 0 până la $+\infty$, panta e *pozitivă* și curba e *urcătoare*.

Funcția $y = x^2$ are o valoare *minimă* $y = 0$ pentru $x = 0$, adică în *origine*. In acest punct parabola C e *tangentă la axa* Ox.

Pentru două valori simetrice ale variabilei x, valorile lui y sunt *egale* și punctele corespunzătoare ale curbei sunt așezate simetric față de axa Oy. De aceea zicem că Oy e o *axă de simetrie* a curbei C.

Punctul O se numește *vârful* parabolei. Curba C, având forma din figura 58, vom zice că *își întoarce concavitatea spre y pozitiv.*

Toată această discuție se poate rezumă în tabloul următor:

$$y = x^2, \quad p = 2x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	descrește	0 minim	crește	$+\infty$
p		$-$	0	$+$	

OBSERVARE. Curba C, dacă e construită cu preciziune pe o hârtie milimetrică, ne poate folosi ca tablă de patrate. In adevăr, patratul unui număr real α se poate obține măsurând *ordonata* punctului de pe parabola C, cu abscisa α.

285. Funcția $y = ax^2$. CAZUL $a > 0$.

Pentru $a = 1$ avem parabola C (*fig.* 58).

Pentru $a = \frac{1}{2}$ avem curba C′ din figura 42 (pag. 280). Pentru o aceeaș valoare a lui x, ordonata punctului de pe curba C′ e *jumătate* din ordnata punctului corespunzător de pe curba C.

Pentru $a = \frac{1}{3}$ avem funcția

(44) $$y = \frac{1}{3}x^2$$

reprezentată în mod grafic prin curba C′ din figura 58. Pentru o aceeaș valoare a lui x, ordonata punctului de pe curba C′ e *a treia parte* din ordonata punctului corespunzător de pe curba C.

In general, pentru $a = \frac{1}{n}$ avem ecuația

$$y = \frac{1}{n}x^2$$

care reprezintă o curbă ale cărei ordonate sunt a *a n-a parte* din ordonatele punctelor corespunzătoare de pe curba C. Toate aceste curbe sunt *parabole.*

Funcțiile $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, ... și în general

(45) $$y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a > 0 \ .$$

sunt reprezentate tot prin *parabole* analoage cu C, în care ordonatele punctelor de pe curba C sunt dublate, triplate, ..., în general înmulțite cu a.

OBSERVARE. Prin înmulțirea cu $a<1$ toate ordonatele ($\neq 0$) *se micșorează* și curba corespunzătoare e așezată între curba C și axa Ox.

Prin înmulțirea cu $a>1$ toate ordonatele ($\neq 0$) *se măresc* și curba corespunzătoare e așezată *deasupra* curbei C.

Panta curbei. Din egalitățile

$$y+\Delta y = a(x+\Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\,\Delta x + \Delta x^2$$
$$y = ax^2$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = 2ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2$$

și

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\,\Delta x.$$

Când Δx tinde spre zero, obținem expresia *limită*:

$$(46) \qquad p = y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax,$$

care e *derivata* funcției $y=ax^2$ sau *panta* curbei corespunzătoare, pentru orice valoare a lui a *pozitivă* sau *negativă*.

Variația funcției. Dacă a e pozitiv, pentru $x=-\infty$ avem $y=+\infty$; pentru $x<0$ panta (46) e *negativă*, curba e *scoborîtoare*; pentru $x=0$ avem $y=0$ și panta e *nulă*; pentru $x>0$ panta e *pozitivă*, curba e *urcătoare*; pentru $x=+\infty$ avem $y=+\infty$.

Funcția $y=ax^2$ (cu $a>0$) *descrește* dela $+\infty$ până la 0, când x variază dela $-\infty$ până la 0 și *crește* apoi dela 0 până la $+\infty$, când x variază dela 0 până la $+\infty$.

Funcția are o valoare *minimă* $y=0$ pentru $x=0$, adică *în origine*.

Toată discuția precedentă se poate rezumà în tabloul următor:

$$y=ax^2, \quad y'=2ax, \quad a>0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	descrește	0 minim	crește	$+\infty$
$y'=p$		$-$	0	$+$	

In toate cazurile, *imaginea geometrică a funcției*

$$y=ax^2 \qquad \text{cu} \qquad a>0$$

e o parabolă cu vârful în originea coordonatelor, cu concavitatea întoarsă spre y pozitiv (în sus), *simetrică față de axa Oy* și *tangentă în origine la axa Ox*.

Cazul $a < 0$. Pentru $a = -1$ avem funcția

$$y = -x^2.$$

Dacă C_1 (*fig.* 58, pag. 311) e imagineaei geometrică, fiindcă pentru fiecare valoare a lui x ordonatele curbelor

$$(C) \quad y = x^2 \quad \text{și} \quad (C_1) \quad y = -x^2$$

sunt *simetrice* (egale și de semne contrare), curba C_1 e *o parabolă simetrică cu parabola* C *față de axa* Ox.

Să considerăm, în general, funcția

$$(47) \qquad y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a < 0.$$

Panta curbei corespunzătoare e dată de formula (46)

$$p = y' = 2ax.$$

Variația funcției. Pentru $x = -\infty$ avem $y = -\infty$; pentru $x < 0$ panta e *pozitivă*, curba e *urcătoare*; pentru $x = 0$ avem $y = 0$ și panta e *nulă*; pentru $x > 0$ panta e *negativă*, curba e *scoborîtoare*; pentru $x = -\infty$ avem $y = -\infty$.

Funcția $y = ax^2$ (cu $a < 0$) *crește* dela $-\infty$ până la 0, când x variază dela $-\infty$ până la 0 și *descrește* apoi dela 0 până la $-\infty$, când x variază dela 0 până la $+\infty$.

Funcția are o valoare *maximă* $y = 0$ pentru $x = 0$ adică *în origine*.

Toată discuția precedentă se poate rezumà în tabloul următor:

$$y = ax^2, \qquad y' = 2ax, \qquad a < 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	crește	0 maxim	descrește	$-\infty$
$y' = p$		$+$	0	$-$	

OBSERVARE. Pentru $a < -1$ curba $y = ax^2$ e așezată *dedesubtul* curbei C_1; pentru $-1 < a < 0$ curba e așezată între axa Ox și curba C_1 (*fig.* 58).

In toate cazurile, *imaginea geometrică a funcției*

$$y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a < 0$$

e o parabolă cu vârful în originea coordonatelor, cu concavitatea întoarsă spre y *negativ* (în jos), *simetrică față de axa* Oy *și tangentă în origine la axa* Ox.

286. Funcția $y = ax^2+bx+c$. Să considerăm acum cazul general, când avem o funcție reprezentată printr'un *trinom de gradul al doilea*:

(48) $$y = ax^2 + bx + c.$$

Pentru $a = 0$ trinomul se reduce la funcția *liniară* $y = bx + c$ și imaginea geometrică e o *linie dreaptă* [**279**].

Vom presupune dar coeficientul $a \neq 0$.

1°. Pentru orice valoare reală și finită dată variabilei x, trinomul ax^2+bx+c capătă o valoare *bine determinată, reală* și *finită*.

2°. y_0 fiind un număr dat în mod arbitrar, ne întrebăm dacă există una sau mai multe valori reale, care puse în locul lui x să deà trinomului (48) valoarea y_0.

Pentru a găsi aceste valori, e de ajuns să rezolvăm ecuația de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = y_0$$

sau

(49) $$ax^2 + bx + c - y_0 = 0.$$

Discuție. Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *pozitiv* [**234**], ecuația (49) admite *două* rădăcini reale și neegale x_0' și x_0'' și pentru fiecare dintre aceste valori trinomul (48) capătă valoarea y_0.

Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *nul*, ecuația (49) admite o singură rădăcină reală (dublă: $x_0' = x_0''$) și există numai *o singură* valoare x_0' pentru care trinomul (48) capătă valoarea y_0.

Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *negativ*, ecuația (49) are rădăcinile *imaginare*; prin urmare nu găsim niciun număr real x, pentru care y să capete valoarea y_0.

3°. Derivata funcției. Ca să determinăm *derivata* funcției

(50) (I) $$y = ax^2 + bx + c$$

sau *panta* curbei reprezentată prin această ecuație, facem următoarele operații:

Operația I: Dăm lui x o creștere Δx și calculăm valoarea corespunzătoare a funcțiunii

$$y + \Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c$$

sau

(II) $$y + \Delta y = ax^2 + 2ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2 + bx + b\,\Delta x + c.$$

Operația II. Scădem egalitatea (I) din (II) și obținem creșterea funcțiunii y

$$\Delta y = (2ax+b)\,\Delta x + a\,\Delta x^2,$$

Operaţia III. Impărţim ambii membri ai acestei egalităţi cu Δx şi găsim raportul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + x\Delta x.$$

Operaţia IV. *Căutăm valoarea limită a acestui raport, când* Δx *tinde către zero*:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b.$$

Prin urmare, *derivata* funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ este

(51) $$y' = 2ax + b.$$

Panta tangentei în orice punct al curbei (I) e dată prin formula

(52) $$p = y' = 2ax + b.$$

4°. Punctele de pe axa Ox. Punctele curbei situate pe axa Ox au *ordonata nulă*. Abscisele lor sunt valorile lui x pentru care y e *nul*, adică rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

5°. Punctele de pe axa Oy. Punctele curbei situate pe axa Oy au *abscisa nulă*. Ordonatele lor sunt valorile lui y pentru care x e *nul*. Făcând $x = 0$, găsim $y = c$. Prin urmare c e *ordonata la origine* a curbei.

6°. Variaţia funcţiei. Ca să studiem *variaţia* funcţiei

$$y = ax^2 + bx + c,$$

o scriem sub forma

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a[(x-\alpha)^2 \mp \beta^2]$$

punând, pentru prescurtare,

(53) $$\frac{b}{2a} = -\alpha \qquad \text{şi} \qquad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm\beta^2$$

şi luând înaintea lui β^2, în egalitatea (53), semnul + sau − după cum $b^2 - 4ac$ e *pozitiv* sau *negativ*. Avem astfel

(54) $$y = az \qquad \text{cu} \qquad z = (x-\alpha)^2 \mp \beta^2.$$

Derivata (51) se poate scrie şi ea sub forma

(55) $$p = y' = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 2a(x-\alpha) \qquad \text{cu} \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}.$$

In funcţia z (54) variază numai termenul $(x-\alpha)^2$.

Trinomul y are *acelaș semn* sau *semn contrar* cu z, după cum a e *pozitiv* sau *negativ*.

Pentru $x=\alpha-h$ și $x=\alpha+h$ diferența $x-\alpha$ capătă respectiv valorile $-h$ și $+h$ iar $(x-\alpha)^2$ are valoarea h^2. Prin urmare pentru două valori ale lui x *simetrice față de* α (adică pentru $\alpha-h$ și $\alpha+h$) z și y au valori *egale*: curba e *simetrică față de dreapta* $x=\alpha$.

Cazul $a>0$. Pentru $x=-\infty$ sau $x=+\infty$ formulele (54) ne dau $z=+\infty$ și $y=+\infty$.

Când x variază dela $-\infty$ până la α, $(x-\alpha)^2$ descrește dela $+\infty$ până la 0; z descrește dela $+\infty$ până la $\mp\beta^2$ și funcția $y=az$ *descrește* dela $+\infty$ până la $\mp a\beta^2$.

Când x variază dela α până la $+\infty$, $(x-\alpha)^2$ crește dela 0 până la $+\infty$; z crește dela $\mp\beta^2$ până la $+\infty$ și $y=az$ *crește* dela $\mp a\beta^2$ până la $+\infty$.

Formula (55) ne arată că pentru $x<\alpha$ panta curbei e *negativă*: curba e *scoborîtoare*; pentru $x>\alpha$ panta curbei e *pozitivă* și curba e *urcătoare* (*fig.* 59, 60, 61; pag. 318).

Imaginea geometrică a funcției

$$y=ax^2+bx+c \qquad \text{cu} \qquad a>0$$

e o *parabolă, care își întoarce concavitatea spre y pozitiv* (în sus).

Funcția are o valoare *minimă*

$$y_1=\mp a\beta^2 \qquad \text{pentru} \qquad x_1=\alpha=-\frac{b}{2a}. \tag{56}$$

Punctul cu coordonatele x_1, y_1 e *vârful* parabolei. Abscisa vârfului e rădăcina ecuației

$$y'=0 \qquad \text{sau} \qquad 2ax+b=0;$$

prin urmare: în vârf panta parabolei e *nulă* și tangenta la curbă e *paralelă cu axa* Ox.

Toată această discuție se poate rezumă în tabloul următor:

$y=ax^2+bx+c$, $a>0$; $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\mp\beta^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
y	$+\infty$	descrește	$\mp a\beta^2$ minim	crește	$+\infty$
$p=y'$		$-$	0	$+$	

Distingem trei cazuri: 1°. $b^2-4ac>0$. Rădăcinile ecuației

$$ax^2+bx+c=0 \tag{50}$$

sunt *reale* și *neegale*. In formula (53) trebue să luăm semnul — înaintea lui β^2 și formula (56) ne dă

$$y_1 = -a\beta^2 < 0.$$

Vârful parabolei e *sub axa* Ox (*fig.* 59). Curba e tăiată de axa Ox în *două* puncte (M', M''), care au ca abscise rădăcinile ecuației (50).

2°. $b^2 - 4ac = 0$. Rădăcinile ecuației (50) sunt *reale* și *egale*.

Avem $\beta = 0$ și $y_1 = 0$. Parabola e *tangentă la axa* Ox în vârful ei $A(x_1 = \alpha, y_1 = 0)$. Curba se găsește *deasupra axei* Ox (*fig.* 60).

3°. $b^2 - 4ac < 0$. Rădăcinile ecuației (50) sunt *imaginare*. In formula (53) trebue să luăm semnul — înaintea lui β^2 și formula (56) ne dă

$$y_1 = a\beta^2 > 0.$$

Vârful parabolei (A) e *deasupra* axei Ox (*fig.* 61). Curba rămâne toată deasupra axei Ox.

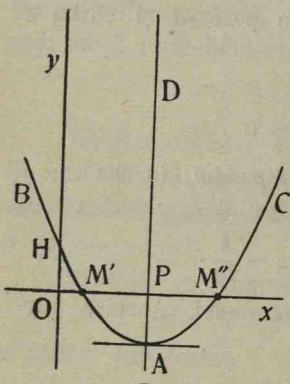


Fig. 59.

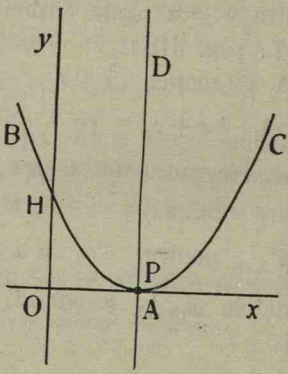


Fig. 60.

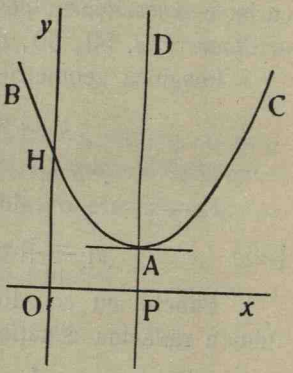


Fig. 61.

EXEMPLU. Ecuația $y = x^2 - 5x + 4$ cu $a = 1 > 0$ reprezintă o *parabolă* cu concavitatea întoarsă spre $y > 0$ (în sus). Avem $y' = 2x - 5$.

Rezolvând ecuația $y = 0$ sau $x^2 - 5x + 4 = 0$ găsim că parabola taie axa Ox în punctele $x = 1$ și $x = 4$. Făcând $x = 0$ găsim că parabola taie axa Oy în punctul $y = 4$.

Rezolvând ecuația $y' = 0$ sau $2x - 5 = 0$ găsim că vârful parabolei are abscisa $x = \frac{5}{2}$ și ordonata

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{9}{4}.$$

Parabola e simetrică față de dreapta $x = \frac{5}{2}$.

Cazul $a < 0$. Pentru $x = -\infty$ sau $x = +\infty$ formulele (54) ne dau $z = +\infty$ și $y = -\infty$.

Când x variază dela $-\infty$ până la α, z descrește dela $+\infty$ până la $\mp\beta^2$ și funcția $y = az$ *crește* dela $-\infty$ până la $\mp a\beta^2$.

Când x variază dela α până la $+\infty$, z crește dela $\mp\beta^2$ până la $+\infty$ și $y = az$ *descrește* dela $\mp a\beta^2$ până la $-\infty$.

Formula (55) ne arată că pentru $x < \alpha$ panta curbei e *pozitivă*: curba e *urcătoare*; pentru $x > \alpha$ panta e *negativă* și curba e *scoborîtoare*.

Imaginea geometrică a funcției

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{cu} \qquad a < 0$$

e o *parabolă, care își întoarce concavitatea spre y negativ* (în jos).

Funcția are o valoare *maximă*

$$y_1 = \mp a\beta^2 \qquad \text{pentru} \qquad x_1 = \alpha = -\frac{b}{2a}. \tag{57}$$

Punctul cu coordonatele x_1, y_1 e *vârful* parabolei. Abscisa vârfului e rădăcina ecuației

$$y' = 0 \qquad \text{sau} \qquad 2ax + b = 0;$$

prin urmare: în vârf panta parabolei e *nulă* și tangenta la curbă e *paralelă cu axa* Ox.

Toată această discuție se poate rezumà în tabloul următor:

$y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$; $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\mp\beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
y	$-\infty$	crește	$\mp a\beta^2$ maxim	descrește	$-\infty$
$p = y'$		$+$	0	$-$	

Distingem trei cazuri: 1°. $b^2 - 4ac > 0$. Rădăcinile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{50}$$

sunt *reale* și *neegale*. In formula (53) trebue să luăm semnul $-$ înaintea lui β^2 și formula (57) ne dă $y_1 = -a\beta^2 > 0$.

Vârful parabolei e *deasupra* axei Ox. Curba e tăiată de axa Ox în *două* puncte, care au ca abscise rădăcinile ecuației (50).

2°. $b^2 - 4ac = 0$. Rădăcinile ecuației (50) sunt *reale* și *egale*.

Avem $\beta = 0$ și $y_1 = 0$. Parabola e tangentă la axa Ox în vârful ei. Curba se găsește *dedesubtul axei* Ox.

3°. $b^2 - 4ac < 0$. Rădăcinile ecuației (50) sunt *imaginare*. In formula (53) trebue să luăm semnul $+$ înaintea lui β^2 și formula (57) ne dă

$$y_1 = a\beta^2 < 0.$$

Vârful parabolei e *dedesubtul* axei Ox. Curba rămâne toată dedesubtul axei Ox.

EXEMPLU. Ecuația $y = 3 + 7x - 5x^2$ cu $a = -5 < 0$ reprezintă o *parabolă* cu concavitatea întoarsă spre $y < 0$ (în jos). Avem $y' = -10x + 7$.

Rezolvând ecuația $y = 0$ sau $-5x^2 + 7x + 3 = 0$ găsim rădăcinile *imaginare*; prin urmare curba nu taie axa Ox.

Făcând $x = 0$ găsim că parabola taie axa Oy în punctul $y = 3$.

Rezolvând ecuația $y' = 0$ sau $-10x + 7 = 0$ găsim că vârful parabolei are abscisa $x = \frac{7}{10} = 0{,}7$ și ordonata

$$y = 3 + 7 \cdot (0{,}7) - 5 \cdot (0{,}7)^2 = 5{,}45.$$

Parabola e simetrică față de dreapta $x = 0{,}7$.

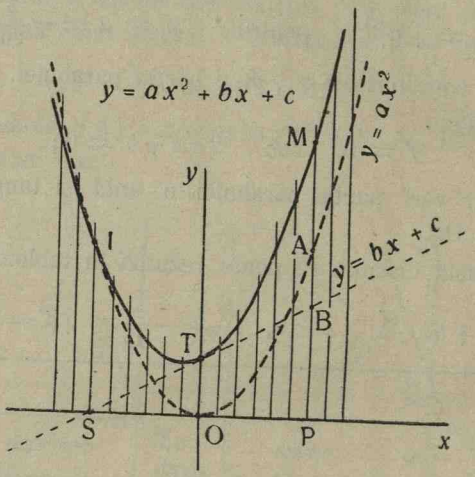


Fig. 62.

OBSERVARE. Dacă avem construită parabola

$$(P') \quad y = ax^2,$$

ca să deducem din ea parabola

$$(58) \quad (P) \quad y = ax^2 + bx + c$$

e de ajuns să construim dreapta

$$(D) \quad y = bx + c.$$

Și să observăm că, dacă M, A și B sunt trei puncte, corespunzătoare la o aceeași valoare a lui x, situate pe liniile (P), (P') și (D) respectiv (*fig.* 62), egalitatea

$$y = (ax^2) + (bx + c)$$

ne dă construcția:

$$PM = PA + PB.$$

La punctul O corespunde punctul T, unde parabola (P) e tangentă la dreapta (D). La punctul S, intersecția dreptei (D) cu axa Ox, corespunde punctul I, intersecția parabolelor (P) și (P').

La dreapta ordonatei SI parabola (P) e *deasupra* parabolei (P'); la stânga ordonatei SI parabola (P) e *dedesubtul* parabolei (P').

VERIFICAT 2007
VERIFICAT 2017