BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE“
No. XVII.

CULEGERE
DE
PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE
A. G. IOACHIMESCU
INGINER, PROFESOR
Membru fondator al Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

PARTEA II

EDIȚIA IV-a

REVĂZUTĂ ȘI MĂRITĂ

BUCUREȘTI
TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII S. A.
19, STRADA ARISTIDE BRIAND, 19
1939

RPR

BIBLIOTECA CENTRALA
A
UNIVERSITAŢII
DIN
BUCUREŞTI

No. Curent 83 Format V

No. Inventar L 2750 Anul

Secţia Mat. Raftul

5 lei

CULEGERE

DE

PROBLEME DE ALGEBRĂ

BIBLIOTECA
CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE“
No. XVII.

CULEGERE
DE
PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE
A. G. IOACHIMESCU
INGINER. PROFESOR
Membru fondator al Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

PARTEA II

EDIȚIA IV-a

REVĂZUTĂ ȘI MĂRITĂ

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII S. A.
19, STRADA ARISTIDE BRIAND, 19
1939

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREȘTI

C/956

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI
COTA 21 525

Rc 179/06

B.C.U. Bucuresti
G2750

21525
Dublet

PREFAȚĂ

Partea a doua a **„Culegerii de probleme de Algebră"** *care formează obiectul volumului de față, se referă la chestiuni de un ordin ceva mai special și mai înalt. Ea cuprinde aplicațiuni asupra* **Combinărilor, Funcțiuni de variabile, Derivate, Variațiuni de funcțiuni, Maximă și minimă, Determinanți, Fracțiuni continui, Serii,** *în fine un șir de capitole privitoare la* **Ecuațiile algebrice, proprietățile și rezoluția lor numerică,** *precum și un capitol relativ la* **rezoluția unor ecuații transcendente.** *Această ultimă parte, într'o ediție anterioară, a făcut obiectul unui volum deosebit.*

La fiecare capitol sunt un număr de chestiuni, care pot fi studiate și rezolvate de elevii de liceu, altele cu cunoștințe mai întinse, acestea se adresează în special celor care fac din matematici un studiu de specializare, unele pot da loc la studii detailate și cercetări interesante. In ceiace privește aranjamentul general s'a păstrat dispozițiile anterioare.

Ca și prima parte, lucrarea de față este exclusivă a D-lui **Ovidiu N. Țino,** *profesor la Școala Politechnică din Timișoara, cu colaborarea D-lui* **C. Ionescu-Bujor,** *profesor secundar. Domniile lor au revăzut, complectat și îndreptat cele cuprinse în edițiile anterioare. I-am rugat să accepte că acest fapt să fie menționat chiar pe coperta volumului, așa cum se cuvenea, dar D-nii* **Țino** *și* **Ionescu-Bujor** *nu au primit, de aceea sunt cu atât mai mult dator, să le exprim — în numele meu și al celor ce vor folosi acest volum — vii mulțumiri pentru munca depusă, care nu a fost ușoară.*

A. G. Ioachimescu

8 Ianuarie 1939

PREFAȚA EDIȚIEI II*)

In 1901 împreună cu colegii **I. Ionescu, G. Țițeica** *și* **V. Cristescu** *am publicat o Culegere de probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie; în această culegere — care s'a epuizat de mult timp — partea de algebră cuprindea, calculul algebric, ecuațiile de gradul întâi și al doilea, progresiuni, logaritmi, funcțiuni continui, derivate, combinări, determinanți, serii și alte chestiuni conexe cu acestea. In 1904, ca urmare la precedenta, am publicat o culegere de probleme asupra «Teoriei Ecuațiilor», care și aceasta s'a epuizat.*

Pentru prima parte pregătisem manuscrisul de reimprimare încă din 1915, acest manuscris s'a perdut cu ocazia evenimentelor de războiu și a trebuit să fie refăcut; între timp epuizându-se și volumele din Teoria Ecuațiilor s'a crezut util să se cuprindă într'un singur volum tot ceiace privește problemele de algebră, urmând a se scoate în volume separate Culegerile de probleme privitoare la Aritmetică, la Geometrie și la Trigonometrie.

Experiența făcută cu publicațiile anterioare de acest gen, ne-a arătat că planul după care ele au fost întocmite era bine alcătuit, de aceia a fost păstrat întocmai și în această nouă ediție; am păstrat de asemenea neschimbată nomenclatura capitolelor. In afară de acest fond lăsat neschimbat, multe capitole au suferit modificări și complectări și chestiunile revizuite atât în ceiace privește enunțurile cât și răs-

*) *Prefața ed. I și a ed. III se află în partea I.*

punsurile. Revizuirea a fost făcută cât mai amănunțit, dar într'un număr de aproape două mii probleme — din care unele necesitând calcule laborioase — a mai putut totuși să scape câte o erorare de calcul sau imprimare, sper că în afară de acelea menționate în «Erată» altele nu mai sunt, și în orice caz, dacă mai sunt vreunele, cititorul le va putea îndrepta și singur.

Această lucrare a necesitat muncă multă — mai ales că cea mai mare parte a trebuit făcută de două ori din cauza manuscrisului pierdut — probabil că nu aș fi putut să o termin curând dacă nu aș fi fost foarte mult ajutat de D-l Inginer **C. Mititelu,** *membru în comitetul de redacție al «Gazetei matematice» și de D-l* **D. V. Ionescu,** *eminentul corespondent al Gazetei; țin cu această ocazie să exprim D-lor Mititelu și Ionescu cele mai vii mulțumiri pentru concursul ce mi-au dat.*

A. G. Ioachimescu

20 Septembre 1921

EXPLICAŢII

La început s'au pus enunţurile împărţite pe capitole numerotate cu cifre romane, iar chestiunile fiecărui capitol sunt numerotate independent cu cifre arabe.

După enunţuri vin răspunsurile şi indicaţiile. Cifrele romane ce se găsesc la începutul fiecărui aliniat şi în capul fiecărei pagini din partea răspunsurilor, indică capitolul la care se referă indicaţiile; cifrele arabe grase, ce se găsesc în corpul aliniatului şi se succed în ordinea naturală, indică problemele din acest capitol.

Dacă la un răspuns se găseşte o prescurtare de forma (7) înseamnă că trebue să ne referim la problema 7 din acelaş capitol, sau prescurtarea (IV. 20) înseamnă că trebue să ne referim la problema 20 din capitolul IV.

Prescurtările de forma P. S. A. P. sau P. S. A. I, înseamnă: chestiunea a fost propusă la examenele dela Şcoala de Poduri şi Şosele, anul preparator sau anul I; deasemenea prescurtările de forma F. S. B. sau F. S. I, înseamnă chestiuni propuse la examenele dela facultăţile de Ştiinţe din Bucureşti sau Iaşi, iar A. G. se referă la chestiunile propuse la examenele de admitere la Şcoala de Artilerie şi Geniu.

Problemele ale căror soluţii au fost publicate în *Gazeta Matematică* au răspunsurile lor urmate de iniţialele G. M. şi anul respectiv, cele publicate în *Revista Matematică din Timişoara* au răspunsurile urmate de iniţialele R. M. T. şi anul respectiv, iar cele publicate în *Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice* îşi închee răspunsurile cu S. E. G. M. şi numărul volumului din care au fost extrase.

ERATA

Pagina 71 problema 31 se va scrie după determinant «=0».

» 96 » 18 membrul I al egalității este «$tg\,x$».

» 130 » 5 rândul 2 se scrie înainte de semnul = «*Observăm, după* (4) *că* $C_{n-1}^{m}+C_{n-2}^{m-1}+\ldots+C_{n-m-1}^{0}=$».

» 130 » 12 rândul 5 de jos, în loc de 25 $(n-2)(n-3)$ se va scrie «25 $(n-1)(n-2)$».

» 132 » 26 în loc de $+\frac{1}{60}$, se va scrie «$=\frac{1}{60}$».

» 136 » 17 rândul 4, în a 2 egalitate ultimul factor este $F_2(y, x)$.

» 137 » 12 în loc de $\lim_{x\to a} E$, se va scrie «$\lim_{x\to a\sqrt{2}} E$».

» 143 » 45 ultimul rând în loc de m^m se va scrie «n^m».

» 146 » 50 rândul 6 la sfârșit «q_j» în loc de q.

» 152 » 8 rândul 10 în loc de mare se scrie «*mică*».

» 154 » 15 în loc de $(arc\,tg\,x)^m$, «$(arc\,tg\,x^n)^m$».

» 160 » 39 rândul 4 de jos, prima egalitate are membrul II $\cos\theta$ în loc de θ.

» 170 » 24 în tablou, y' în loc de x'.

» 173 » 32 rândul 2, al doilea termen la numărător are exponentul $2p$ în loc de p.

» 173 » 32 rândul 4 de jos, valoarea lui u are exponentul p.

» 188 » 14 rândul 4 în loc de «*dela a*» se scrie «*dela 0 la a*».

» 189 » 20 în loc de $\frac{4}{sin^2\varphi}$ se scrie $\frac{4}{sin^2 2\varphi}$.

» 190 » 23 rândul 10 ultima literă i' este în loc de i.

» 191 » 24 penultimul rând în loc de *ecuația* se scrie *condiția*.

» 192 » 6 se scrie $X\,i$ în loc de X_i.

» 192 » 7 înaintea radicalului din rândul 3 se pune semnul $\pm$.

» 198 » 23 primul rând, după cubică se adaugă *complexă*.

» 214 » 30 rândul 3 dela sfârșit, în valoarea lui Δ se adaugă factorul «$(a+b+c+d)$».

» 214 » 32 ultimul rând $\varepsilon=3$.

» 220 » 50 în al doilea factor al valorii lui D numitorul este $y+b$.

» 222 » 54 $ph=qn$ în loc de $ph=q$.

» 243 » 48 în penultimul rând sub primul Σ se scrie $a_{k,k}$ în loc de $a_{k,l}$; iar în ultimul rând sub primul Σ, al doilea factor este $\overline{x_k}$.

Pagina 248 problema 25 $\frac{1}{x'}$ în loc de $\frac{1}{x}$.

» 249 » 28 ultimul rând: $y=$ în loc de $y-$.

» 255 » 8 rândul 13 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ în loc de $\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

» 268 » 26 rândul 2 numărătorul primei fracții este $1-e^x+xe^x$.

» 280 » 7 rândul 6, $x=-i$, în loc de $x=i$.

» 281 » 9 rândul 5 după cuvântul *număr* se adaugă «*de valori*».

» 281 » 9 rândul 8 în prima egalitate se scrie $-k\varphi$.

» 297 » 27 ultimul rând: «$q=-\alpha^3$» în loc de $=-\alpha^3$.

» 301 » 17 rândul 7 de jos, după A_2 se scrie $=$.

» 305 » 27 rândul 3, după $\Sigma(x_1+x_2)^m$ se scrie «$=$», iar rândul 7 în loc de p^n se scrie p_n.

» 305 » 28 se va scrie $S_n=n$.

» 306 » 32 ultimul element este S_{m+n-nr}.

» 308 » 37 în primul rând p_n^2 în loc de p_2^2.

» 310 » 8 în ultimul rând se va scrie «*ecuație*» în loc de *rădăcină*.

» 322 » 24 ultimul rând $\equiv$ în loc de $\geq$.

» 324 » 5 ultimul rând «*reale*» în loc de egale.

» 331 » 16 în loc de $r-a$ se va scrie $r-x$.

» 335 » 11 rândul 3 se va scrie 4π în loc de 2π.

» 350 » 32 rândul 8 de jos se va scrie A_0 în loc de A_1.

» 353 » 3 $X_5=-4$ în loc de 4.

» 353 » 4 rândul 5 $x=-\infty$.

» 355 » 12 la rândul 4 se adaugă după are: «*două rădăcini reale. Când* $(\alpha^3+\beta^2)^3-625\,\beta^3=0$, *ecuația are.*

» 360 » 2 se scrie $(-2, -1)$ în loc de $(-1, -2)$.

» 370 » 3 rândul 3 de jos $\cos x_1$ în loc de $\cos x$.

» 372 » 10 penultimul rând se va scrie *pozitivă* în loc de *reală*.

» 375 » 22 rândul 4 se va pune $-$ înainte de $\frac{\pi}{2}$.

» 379 » 9 în loc α se scrie x.

» 391 » 14 ultimul rând, se scrie b^2 în loc de a^2.

» 395 » 13 primul rând în al 4-lea numitor se înlocuește λ prin μ.

» 398 » 1 rândul 2 se înlocuește f' prin f.

» 401 » 9 al doilea rând exponentul 4 al lui x^2+mx+n se înlocuiește prin «2».

» 404 » 29 rândul 5 trebue $f[f(x)]-x$ în loc de $f[f(x)]$.

Obs. Nu s'au semnalat erorile de tipar care pot fi ușor îndreptate.

TABLA DE MATERII

	Pag.
Prefața	V
Prefața ediției II	VII
Explicații	IX
Erata	XI

		Pag. la care încep: Enunțurile	Răspunsurile	Numărul Problemelor
Cap.	I. Aranjări, permutări, combinări	1	117	35
»	II. Puteri, rădăcini	4	123	37
»	III. Sumări de combinări și de numere similare	6	129	32
»	IV. Funcțiuni de una sau mai multe variabile	9	134	17
»	V. Limite	10	136	67
»	VI. Continuitate	16	149	23
»	VII. Derivate	16	156	61
»	VIII. Variațiuni de funcțiuni. Maxima și minima	21	162	54
»	IX. Probleme de maximă și minimă	24	185	24
»	X. Numere complexe	27	191	32
»	XI. Determinanți	30	201	57
»	XII. Inmulțirea determinanților. Aplicarea determinanțiior la teoria ecuațiilor lineare	38	224	48
»	XIII. Fracțiuni continui. Analiza nedeterminată	45	244	43
»	XIV. Serii	48	253	45
»	XV. Funcțiuni exponențiale și logaritmice. Limite. Serii	53	266	71
				646

		Pag. la care încep: *Enunţurile*	*Răspunsurile*	*Numărul problemelor*
				646
Cap.	XVI. Proprietăţi generale ale polinoamelor şi ecuaţiilor algebrice .	58 . .	279 . .	20
»	XVII. Transformări de ecuaţii	61 . .	285 . .	22
»	XVIII. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi	63 . .	288 . .	33
»	XIX. Funcţiuni simetrice	67 . .	298 . .	37
»	XX. Divizori comuni	72 . .	309 . .	25
»	XXI. Rădăcini multiple	75 . .	316 . .	24
»	XXII. Proprietăţi relative la rădăcinile reale ale ecuaţiilor algebrice .	78 . .	323 . .	22
»	XXIII. Teorema lui Descartes	80 . .	329 . .	16
»	XXIV. Ecuaţii binoame	81 . .	332 . .	19
»	XXV. Teorema lui Rolle	84 . .	337 . .	39
»	XXVI. Teorema lui Sturm	87 . .	352 . .	22
»	XXVII. Limitele rădăcinilor. Calculul rădăcinilor raţionale	89 . .	360 . .	32
»	XXVIII. Calculul rădăcinilor iraţionale .	91 . .	364 . .	21
»	XXIX. Diferenţe şi interpolări	93 . .	366 . .	19
»	XXX. Ecuaţii transcendente	95 . .	369 . .	30
»	XXXI. Eliminări. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice	98 . .	378 . .	26
»	XXXII. Transformări de ecuaţii. Ecuaţii reductibile	101 . .	385 . .	25
»	XXXIII. Rezolvări particulare ale ecuaţiilor algebrice	103 . .	388 . .	22
»	XXXIV. Descompunerea fracţiunilor raţionale	105 . .	392 . .	23
»	XXXV. Chestiuni diverse	108 . .	398 . .	42
			Total . . .	1165

ALGEBRA

I. ARANJĂRI, PERMUTĂRI, COMBINĂRI.

1. In câte moduri se pot schimba între ele literele cuvântului *Roman?*

2. Să considerăm literele alfabetului *A, B, C, D. E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z;* în câte moduri se pot forma cu aceste litere cuvinte de câte trei litere diferite cea din mijloc fiind în totdeauna litera *O.*

3. Câte aranjări de câte trei litere putem forma cu literele *a, b, c, d, e, f,* şi în care literele să se urmeze în ordinea alfabetică?

4. In câte moduri se pot aşeza, de aceeaşi parte a unei mese drepte, 12 persoane, în ipotezele următoare: 1) la masă încap deodată toate persoanele; 2) la masă nu încap deodată decât 6 persoane; 3) la masă nu încap decât 6 persoane şi nu se ţine seamă de ordinea în care sunt aşezate?

5. In câte moduri se pot aşeza n persoane în jurul unei mese circulare?

6. In aranjările de n litere luate câte m, câte conţin o literă determinată; câte încep cu o literă determinată?

7. Câte numere diferite de câte una, două, . . ., zece cifre, toate diferite, putem forma cu cifrele 0, 1, 2, . . . , 9?

8. Să se găsească numărul aranjărilor de n litere luate câte m, care încep cu 2, 3, . . . , p litere determinate. Se va examina când acele litere sunt într'o ordine dată şi cazul când sunt într'o ordine oarecare.

9. Se permută cifrele 1, 2, 3, 4, 5 în toate modurile po-

sibile; să se găsească, în sistemul zecimal, suma numerelor formate de aceste permutări.

10. In câte moduri se poate descompune produsul de factori literali $a\ b\ c\ d$ într'un produs de doi factori?

Să se generalizeze.

11. Să se găsească numărul patrulaterelor în care poate fi descompus un poligon de n laturi.

12. Să se găsească numărul total al punctelor de intersecţie al diagonalelor unui poligon convex de n laturi.

13. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n puncte în plan, din care *3* oarecare nu sunt în linie dreaptă, nici *4* oarecare pe două drepte paralele. Să se găsească care este numărul cel mai mare al punctelor de intersecţie (distincte de punctele date) al tuturor dreptelor ce unesc acele puncte.

14. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n puncte în plan, din care trei oarecare nu sunt pe aceeaşi dreaptă, nici patru oarecare pe acelaşi cerc. Să se găsească care este numărul cel mai mare al punctelor de intersecţie (distincte de punctele date) al tuturor cercurilor ce trec prin câte *trei* din aceste puncte, presupunând că *două* oarecare din aceste cercuri se taie în *două* puncte.

15. Să se găsească numărul permutărilor ce putem face cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, astfel ca suma cifrelor egal depărtate de extremi să fie aceeaşi. Să se generalizeze.

16. Se consideră toate permutările ce se pot face cu n litere $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Intr'o permutare oarecare se zice că avem o inversiune ori de câte ori o literă cu indice mai mare vine înaintea altei litere cu un indice mai mic. Să se găsească numărul total al inversiunilor din toate permutările a n litere.

17. Să se găsească numărul permutărilor ce putem face cu n litere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel ca primele p litere să nu aibă nici o inversiune. (F. S. B. 902).

18. Să se găsească numărul valorilor distincte, pe care le ia expresiunea: $F = x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots + x_{2n-1} x_{2n}$, când se permută literele $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ în toate modurile posibile; $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ fiind $2n$ numere arbitrare.

19. Aceeași chestiune pentru expresiunea:
$F=x_1+x_2x_3+x_4x_5x_6+\ldots+x_{m-n+1}x_{m-n+2}\ldots x_m$, $m=\frac{1}{2}n(n+1)$.

20. Știind că numărul aranjărilor de n obiecte luate câte 6 este egal cu de 12 ori numărul aranjărilor aceloraşi obiecte luate câte 4, să se găsească n.

21. Știind că numărul aranjărilor de n obiecte luate câte p este egal cu de m ori numărul aranjărilor aceloraşi obiecte luate câte $p-2$, să se găsească n. Cum trebue să fie n ca problema să fie posibilă şi în acest caz câte soluții avem?

22. Să se determine m astfel ca să avem:

$$A_m^6-24mC_m^4=11A_m^4.$$

23. Să se arate că dacă avem: $C_m^r=C_m^s$, vom avea $r=s$, sau $r+s=m$.

24. Știind că numărul combinărilor de n litere luate câte $p-p'$ este egal cu numărul combinărilor aceloraşi litere luate câte $p+p'$, să se găsească n.

25. Știind că numărul combinărilor de n obiecte luate câte p este egal cu numărul combinărilor aceloraşi litere luate câte $p+1$, iar raportul între numărul combinărilor de n obiecte luate câte p către numărul combinărilor aceloraşi obiecte luate câte $p-1$ este $(a+1):a$, să se găsească n şi p.

26. n, p, q şi n', p', q' fiind două grupe de numere întregi descrescătoare, cuprinse între numerele m şi r, să se stabilească relația:

$$\frac{C_m^n C_n^p C_p^q C_q^r}{C_m^{n'} C_{n'}^{p'} C_{p'}^{q'} C_{q'}^r}=\frac{(m-n')!(n'-p')!(p'-q')!(q'-r)!}{(m-n)!(n-p)!(p-q)!(q-r)!}.$$

27. Să se găsească numărul termenilor unui polinom omogen de gradul al patrulea, în raport cu 5 litere. Să se generalizeze, găsindu-se numărul termenilor unui polinom omogen de gradul m în raport cu n litere.

28. Să se găsească numărul termenilor unui polinom neomogen de gradul m, în raport cu n litere.

29. Câte permutări distincte se pot forma cu literele cuvintelor *București, papagal?*

30. Fie a, e, i, o, u, 5 vocale; b, c, d, f, g, 5 consune; în

câte moduri se pot permuta aceste *10* litere, astfel ca să nu fie niciodată *2* vocale sau *2* consune alăturate?

31. Să se determine numărul de cuvinte, ce se pot forma cu *19* consune şi *5* vocale, fiecare cuvânt având trei consune diferite şi *2* vocale diferite, şi excluzând cuvintele care au *două* consune consecutive.

32. O urnă conţine *8* bile albe şi *5* negre; se scot *4* bile la întâmplare; care este probabilitatea ca *2* să fie albe şi *2* negre?

33. Pe o masă se aruncă n zaruri; care este probabilitatea ca fiecare să dea numărul *1*?

34. Se aruncă *2* zaruri de două ori; care este probabilitatea a avea cel puţin odată numărul *1*?

35. La un examen la care sunt de învăţat m chestiuni, elevii convin să înveţe fiecare n chestiuni la întâmplare. Examinatorul pune fiecărui elev p chestiuni şi lasă corigenţi pe aceia care nu răspund la q chestiuni. Dacă N este numărul elevilor, care va fi numărul probabil de corigenţi?

II. PUTERI, RĂDĂCINI

— Să se desvolte binoamele:

1. $(x+a)^9$. 2. $(x-a)^{11}$. 3. $(1+i)^8$; $i=\sqrt{-1}$.
4. $(1-i)^{13}$. 5. $(5-4x)^5$. 6. $\left(2\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{10}$.
7. $(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6$.
8. Să se găsească al 7-lea termen al desvoltării lui $(1-i)^{40}$
9. Să se găsească al 12-lea termen al desvoltării lui $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{36}$.
10. Să se găsească coeficientul termenului în x^{2r+1} din desvoltarea lui $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

11. Fie $A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$; să se arate că avem:

$$A_{n+p}^{m}=(A_n+A_p)^{(m)},$$

cu condiție ca în desvoltarea lui $(A_n+A_p)^{(m)}$ să înlocuim pe $(A_n)^i$ prin $A_n{}^i$.

12. Să se determine m întreg pozitiv, astfel ca al *10*-lea termen al desvoltării lui $(3+m)^m$ să fie cel mai mare.

13. Să se găsească: patru coeficienți binomiali consecutivi formând o proporție; 2) trei coeficienți binomiali consecutivi în progresiune aritmetică.

14. Să se găsească suma patratelor coeficienților binomului $(x+a)^n$.

15. Să se verifice identitățile:

$$C^1_{m+n}=C^1_m+C^1_n,$$
$$C^2_{m+n}=C^2_m+C^1_mC^1_n+C^2_n,$$
$$C^3_{m+n}=C^3_m+C^2_mC^1_n+C^1_mC^2_n+C^3_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C^p_{m+n}=C^p_m+C^{p-1}_mC^1_n+C^{p-2}_mC^2_n+\dots+C^p_n.$$

16. Să se demonstreze identitatea:

$$(x+a)^n-(x+b)^n+C^1_n[(x+a)^{n-1}b-(x+b)^{n-1}a]+$$
$$C^2_n[(x+a)^{n-2}b^2-(x+b)^{n-2}a^2]+\dots+C^{n-1}_n[(x+a)b^{n-1}-$$
$$(x+b)a^{n-1}]+b^n-a^n=0.$$

17. Să se găsească suma produselor câte doi a coeficienților din desvoltarea $(x+a)^p$.

18. Se notează:

$$(a, r)_n=a(a+r)(a+2r)\dots(a+\overline{n-1}\,r),$$

să se demonstreze că avem:

$$(a+b, r)_n=(a, r)_n+C^1_n(a, r)_{n-1}(b, r)_1+\dots+(b, r)_n.$$

— Să se extragă rădăcina patrată a polinoamelor:

19. $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$.

20. $x^6-20x^5+162x^4-680x^3+1561x^2-1860x+900$.

21. $x^4+2(a+b)x^3+(a^2+3ab+b^2)x^2+ab(a+b)x+\frac{1}{4}a^2b^2$.

22. $x^6-6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6$.

23. $4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2$.

24. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

25. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{4x^2}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{2x}-\dfrac{3}{4}$.

26. $9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-24\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+34.$

27. $(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$

28. $\frac{1}{2}\Sigma a^2(b-c)^2\,(ab+ac-2bc)^2.$

29. Să se găsească condiţiunea pentru ca polinomul:

$$a^2x^4+ax^3+bx^2+cx+c^2$$

să fie un patrat perfect.

30. Să se determine a şi b astfel ca polinomul:

$$x^4+4ax^3+6x^2+4bx+b,$$

să fie un patrat perfect.

31. Să se găsească condiţiunile pentru ca polinomul: $Ax^2+2Bxy+Cy^2$, să poată fi pus subt forma:

$$(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2.$$

— Să se extragă rădăcina cubică a polinoamelor:

32. $x^6+3x^5-5x^3+3x-1.$

33. $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8.$

34. $8x^6-36cx^5+102c^2x^4-171c^3x^3+204c^4x^2-144c^5x+64c^6.$

— Să se desvolte:

35. $(a_1+a_2+a_3)^3$; $(a_1+a_2+a_3+a_4)^3$;...; $(a_1+a_2+...+a_n)^3$.

36. $(a_1+a_2+a_3)^4$; $(a_1+a_2+a_3+a_4)^4$;...; $(a_1+a_2+...+a_n)^4$.

37. $(a_1+a_2+a_3)^5$; $(a_1+a_2+a_3+a_4)^5$;...; $(a_1+a_2+...+a_n)^5$.

III. SUMĂRI DE COMBINĂRI ŞI DE NUMERE SIMILARE

1. Să se arate că avem: $A_n^p=A_{n-1}^p+pA_{n-1}^{p-1}$;

$A_n^p-A_p^1A_n^{p-1}+A_p^2A_n^{p-2}-...+(-1)^pA_p^p=A_{n-1}^p$,

A_n^p reprezentând numărul aranjărilor de n obiecte luate câte p.

2. Să se arate că:

$$C_n^1C_n^2C_n^3...C_n^{n-1}=\frac{(n!)^{n-1}}{(1!2!3!...(n-1)!)^2}$$

C_n^p reprezentând numărul combinărilor de n obiecte luate câte p.

3. Să se verifice formulele:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} = C_{n-3}^m + 3C_{n-3}^{m-1} + 3C_{n-3}^{m-2} + C_{n-3}^{m-3} = \ldots = C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + C_p^2 C_{n-p}^{m-2} + \ldots + C_{n-p}^{m-p}.$$

4. Să se stabilească egalitatea:

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n-k}^{m-k} = C_{n+1}^m.$$

5. Să se arate, că:

$$\sum_{k=0}^{m} A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m C_n^m,$$

$$\sum_{k=0}^{m} (k+1) A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_{n+1}^m C_n^m.$$

6. Să se stabilească relația:

$$\sum_{0}^{n} k!\,(n-k)!\,(C_n^k)^3 = n!\,C_{2n}^n.$$

7. Să se arate că avem:

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_m^i C_{m-i}^{p-i} = 0.$$

— Să se calculeze sumele:

8. $\sum_{n=1} n(n+1)(n+2)$. 9. $\sum_{n=1} (2n-1)n(2n+1)$.

10. $\sum_{n=1} (2n-1)(2n+1)(2n+3)$. 11. $\sum_{n=1} (6n-5)(6n-3)(6n-1)$.

12. $\sum_{n=1} (n^4-1)$. 13. $\sum_{n=1} (n^5-n^2+1)$. (F. S. B. 1903).

14. $1.n+2.(n-1)+3.(n-2)+\ldots+n.1$;
$1.(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\ldots+(n-1).3+n.1$.

15. $1^2.n^2+2^2.(n-1)^2+\ldots+n^2.1^2$;
$1^2.(2n-1)^2+2^2.(2n-3)^2+\ldots+(n-1)^2.3^2+n^2.1^2$.

16. $\sum_{n=1} n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)$.

17. Suma celor n^2 numere întregi, care urmează pe cele dintâi n numere, este egală cu îndoitul sumei celor dintâi n cuburi.

18. Împătritul sumei:

$$(n^3+1)+(n^3+2)+(n^3+3)+\ldots+(n+1)^3$$

este egal cu produsul unei sume de trei pătrate printr'o sumă de trei cuburi.

19. Un număr de forma a^2+ab+b^2, a și b numere întregi, este egal cu o sumă de trei numere triunghiulare.

20. Diferența între cubul sumei și suma cuburilor celor dintâi n numere fără soț, este un patrat perfect.

21. Să se găsească suma numerelor cuprinse în primele n linii și n coloane ale *triunghiului lui Pascal* (fără coloana unităților).

22. Pentru ce valori ale lui x suma patratelor a $n+1$ numere consecutive, din care cel din urmă este x, este egală cu suma patratelor a n numere următoare?

23. Să se efectueze produsul:
$(1+2)(3+4+5)(6+7+8+9)\ldots[C_{n+1}^2+(C_{n+1}^2+1)+.+(C_{n+2}^2-1)]$,
compus din n factori.

— Fie $S_\alpha=1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\ldots+n^\alpha$, α întreg pozitiv. Să se arate că:

24. $5\,S_4=S_2(6S_1-1)$. 25. $S_5=\frac{4}{3}S_1^2(S_1-1)+S_3$.

26. Fie $S_{\alpha,n}=1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha$. Să se calculeze sumele:
$S_{2,1}+S_{2,2}+\ldots+S_{2,n}$; $S_{3,1}+S_{3,2}+S_{3,3}+\ldots+S_{3,n}$.

27. Șirul $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, m^3, \ldots$ se împarte în grupe, astfel ca grupa de ordinul n să aibă n termeni; să se găsească suma numerelor din această grupă.

28. O cantitate de ghiulele sferice se așează tangent una la alta, astfel că ele formează o piramidă, a cărei bază este un triunghiu echilateral. Să se găsească numărul ghiulelelor așezate într'o asemenea piramidă, știind că pe latura triunghiului echilateral de la bază s'au așezat n ghiulele.

29. Să se găsească numărul punctelor de contact al ghiulelelor sferice din problema precedentă.

30. Să se arate că

$$\sum_{p=1}^{n}(C_p^2)^2+\tfrac{1}{2}(C_{n+1}^2)^2=\tfrac{1}{20}(3n^2+3n+4)S_2,$$

S_2 este suma patratelor primelor n numere și C_p^2 este numărul combinărilor de p obiecte câte 2.

31. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fiind termenii unei progresiuni aritmetice de rație r, să se calculeze suma:
$S=a_1+a_2(a_1+a_2)+a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots+a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

32. a fiind un număr mai mare ca 1, să se arate că avem:

$$a^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}>\sqrt[n]{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)}.$$

IV. FUNCȚIUNI DE UNA SAU MAI MULTE VARIABILE

1. Fie $f(x)=ax+b$, să se formeze $f(\alpha x+\beta)$.

2. Fie $f(x)=\frac{ax+b}{a'x+b'}$, » » » $f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}\right)$.

3. Fie $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, să se formeze $f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}\right)$.

4. Fie $f(x)=x^{10}-x+1$, » » » $f(x+1)$.

5. Fie $f(x)=log\frac{1+x}{1-x}$, să se formeze $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

6. Fie $f(x)=log\frac{1+x}{1-x}$, să se formeze:

$$f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)-f(x);\quad f\left(\frac{a+b+x+abx}{1+ab+ax+bx}\right)-f(x),$$

aceste diferențe sunt independente de x.

7. Fie $f(x)=sin\,x+cos\,x$; să se arate că:

$$f^2(x)=1+f(2x)-f(x)f(-x).$$

8. Fie $f(x,y)=x^2+y^2-r^2$, să se formeze $f(x+h, y+k)$.

9. Fie $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$; să se formeze $f(x+h, y+k)$ și să se arate că:

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+f(h, k)+P(x, y),$$

$P(x,y)$ reprezentând un polinom neomogen de gradul întâi în raport cu x și y.

10. Fie $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$, să se formeze:

$f(x+y, y+z, z+x)-2f(x,y,z)$ și $f(x+h, y+k, z+l)$.

11. Fie $f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+$
$+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D$, să se formeze:
$f(x+h,\ y+k,\ z+l)$ și să se arate că vom avea:
$f(x+h, y+k, z+l)=f(x,y,z)+f(h,k,l)+P(x,y,z)$, $P(x,y,z)$ fiind un polinom neomogen de gradul întâi în raport cu x, y, z.

12. Fie $f(x,y,z)=x^5+y^5+z^5-3xyz$, să se formeze:

$$f(x+1, y+1, z+1).$$

13. Fie $f(n)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ să se arate că avem:

$$nf(n)=(n+1)f(n-1)-f(n-2).$$

14. Fie $f(n)=\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1} a_n}+\frac{1}{a_n a_{n+1}}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fiind numere în progresie geometrică de raţie b; să se arate că avem:

$$b^2 f(n)=(b^2+1) f(n-1)-f(n-2).$$

15. Să se găsească un polinom întreg $f(x)$, astfel ca:

$$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\equiv x.$$

16. Să se determine o fracţiune raţională $f(x)$, egală cu câtul a două polinoame de gradul al doilea, ştiind că:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)\equiv\frac{1}{f(x)},\ f(1-x)\equiv f(x-1).$$

17. Fie $F(x, y)$ o fracţiune raţională în raport cu x şi y. Să se arate că putem întotdeauna determina trei polinoame $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ întregi şi simetrice în raport cu x şi y, astfel încât să avem:

$$F(x, y)=\frac{P(x, y)+(x-y) Q(x, y)}{R(x, y)}.$$

V. LIMITE

— Să se găsească limitele către care tind expresiunile:

1. $\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ când x tinde către 1.
2. $\frac{x^{11}-1}{x^3-5x^2+2x+2}$ când x tinde către 1.
3. $\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+x^2-x-1}$ când x tinde către -1.
4. $\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$ când x tinde către -1.
5. $\frac{x^m-a^m}{x-a}$ când x tinde către a.
6. $\frac{(x^m-a^m)(x^n-a^n)}{(x-a)^2}$ când x tinde către a.
7. $\frac{(x^m-a^m)(x^n-a^n)(x^p-a^p)}{(x-a)^3}$ când x tinde către a.

8. $\dfrac{(x^{m_1}-a^{m_1})(x^{m_2}-a^{m_2})\ldots(x^{m_n}-a^{m_n})}{(x-a)^n}$ când x tinde către a.

9. $\dfrac{(x^m-1)-m(x-1)}{(x-1)^2}$ când x tinde către 1.

10. $\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+2x-1}$ când x tinde către 1.

11. $\dfrac{nx^n-(n+1)x^{n-1}-x+2}{x^3-x^2-x+1}$ când x tinde către 1.

12. $\dfrac{(x^2-a^2)^5-5a^2(x^2-a^2)^4+10a^4(x^2-a^2)^3-10a^6(x^2-a^2)^2+5a^8x^2-6a^{10}}{(x^2+a^2)^4-12a^2(x^2+a^2)^3+54a^4(x^2+a^2)^2-108a^6x^2-27a^8}$

când x tinde către $a\sqrt{2}$.

13. $\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ când x tinde către a. (P. S. A. P. 97).

14. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-3}{x-1}$ când x tinde către 1.

15. $\dfrac{\sqrt{x^2+5x+3}-3}{x-1}$ când x tinde către 1.

16. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x-1}$ când x tinde către 1.

17. $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2+6}-\sqrt{6-x-x^2}}{x^3+4-\sqrt{5x^2+9x+11}}$ când x tinde către 1.

18. $\dfrac{x^3-2x^2+x-1+\sqrt[3]{x^4+3x^3-2x^2+x-7}-\sqrt{4x^2-x+2}}{x-3+\sqrt{3x^2-5x-1}}$

când x tinde către 2.

— Să se găsească relațiile de condiție pentru ca expresiunile ce urmează, să tindă către o limită finită, când x tinde către *1*.

19. $\dfrac{a(x^2-1)+b(x^3-1)}{(x-1)^2}$. 20. $\dfrac{a(x^m-1)+b(x^n-1)}{(x-1)^2}$.

21. $\dfrac{a_1(x^{m_1}-1)+a_2(x^{m_2}-1)+\ldots+a_n(x^{m_n}-1)}{(x-1)^2}$.

22. $\dfrac{m(\sqrt{x}-1)+n(\sqrt[3]{x}-1)+p(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}$.

23. $\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)+m(\sqrt{x}-1)^2+n(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[6]{x}-1)^3}$.

— Să se găsească limita expresiunilor următoare, când x tinde către 1.

24. $\dfrac{(x^m-1)(x^n-1)-mn(x-1)^2}{(x-1)^3}$.

25. $\dfrac{(x^m-1)(x^n-1)(x^p-1)-mnp(x-1)^3}{(x-1)^4}$.

26. $\dfrac{(x^{m_1}-1)(x^{m_2}-1)\ldots(x^{m_n}-1)-m_1 m_2 \ldots m_n (x-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$.

— Presupunând că x crește nemărginit, să se găsească limitele către care tind expresiunile următoare:

27. $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$.

28. $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$.

29. $\dfrac{ax^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{bx^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$.

30. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3-1}+\sqrt{x-1}}$.

31. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{\sqrt[8]{x^4-5x^2+1}}$.

32. $\dfrac{\sqrt[3]{x+7a}-2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{x+a}-\sqrt[5]{2a}}$.

33. $\sqrt{x^2+x+1}-x$.

34. $\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a'x^2+b'x+c'}$.

35. $\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x$.

36. $\sqrt[3]{a^3x^3+a^3x^2+1}-ax$.

37. $\sqrt[3]{(x+1)^3+1}-\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}$ (P. S. A. P. 908).

38. $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

39. $\sqrt[m]{x^m+1}-x$.

— Să se găsească condițiile, ca expresiunile ce urmează să tindă către limite finite și diferite de zero, când x crește nemărginit.

40. $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-px$.

41. $\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a'x^2+b'x+c'}-px-q$, $a>0$, $a'>0$.

42. $\sum_{i=1}^{k} \sqrt[n_i]{P_{n_i}(x)} - px$ în care $P_{n_i}(x) = x^{n_i} + x^{n_i-1} + \ldots + x + 1$.

43. $\sqrt[m]{P(x)} - \sqrt[n]{Q(x)}$.

$P(x)$ și $Q(x)$ reprezentând două polinoame întregi în x.

— Fie $S_\alpha = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$, α fiind întreg pozitiv.

44. Să se calculeze limita raportului $(S_2^2 : S_1^3)$, când n crește nemărginit.

45. Să se calculeze limitele expresiunilor:

$$n\left(\frac{S_1}{n^2} - \frac{1}{2}\right);\ n\left(\frac{S_2}{n^3} - \frac{1}{3}\right);\ldots;\ n\left(\frac{S_m}{n^{m+1}} - \frac{1}{m+1}\right)$$

când n crește nemărginit.

46. Fie $f(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$; să se arate că $f(n)$ crește când n crește și tinde către o limită determinată când n crește nemărginit.

47. Aceeași chestiune pentru expresiunea:

$$f(n) = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ fiind numere în progresiune aritmetică, toate diferite de zero.

48. Fie $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, $S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$; $S_i = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}$; să se arate că pentru expresiunea

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$$

limita sumei este egală cu suma limitelor, când n crește nemărginit.

49. Fie p și q două numere pozitive date; p_1 media lor aritmetică, p_2 media aritmetică între p și p_1; p_3 media aritmetică între p_1 și p_2; etc. Să se găsească $lim\ p_n$ când n crește nemărginit. Aceeași chestiune când se înlocuește media aritmetică prin media geometrică.

50. Fie p și q două numere pozitive date, p_1 și q_1 media lor aritmetică și geometrică, p_2 și q_2 media aritmetică și geometrică între p_1 și q_1, etc.; să se arate că avem:

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > p_n > \ldots$$
$$q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < q_n < \ldots$$

$p_i > q_j$ oricare ar fi i și j; $\lim (p_n - q_n) = 0$, când n crește nemărginit.

51. Aceeași chestiune când se înlocuește media geometrică prin media armonică $\left(\frac{2pq}{p+q}\right)$; numerele p_i și q_i se bucură de aceleași proprietăți, iar $\lim p_n = \lim q_n = \sqrt{pq}$, când n crește nemărginit.

52. Se consideră două numere pozitive a și b, precum și media lor geometrică m; să se găsească limita raportului $(a-m):(b-m)$ când a tinde către b.

53. Să se găsească limita către care tinde expresiunea: $a - \sqrt{a^2 - b^2}$, când a și b cresc nemărginit, însă raportul $b^2 : a$ păstrează o valoare finită egală cu $2p$.

54. Să se găsească limita expresiunii:

$$\frac{2y^2 - 7xy^2 + x^2 - 2}{y^3 + (x+3)y + x^2 - 4},$$

când x tinde către *zero* și y tinde către 1, x și y verificând relația: $3y^4 - 5xy^3 + (6x^2 - 5x + 1)y^2 + x^4 - 3x^2 + x - 4 = 0$.

55. Să se arate că expresiunea:

$$A_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}},$$

tinde către o limită determinată, când numărul radicalilor suprapuși crește nemărginit; a este un număr pozitiv dat. Pentru ce valori ale lui a limita precedentă este rațională și întreagă? Să se arate că dacă a tinde către zero, A tinde către 1.

56. Să se găsească, când x tinde către 1, limita expresiunii

$$\frac{\sqrt[n]{2x - \sqrt[n]{2x - \ldots - \sqrt[n]{x}}} - 1}{x - 1},$$

numărul radicalelor suprapuse fiind p.

57. Fie r și a raza și apotema unui poligon regulat; r' și a' raza și apotema unui poligon regulat de același perimetru cu

precedentul, dar cu un număr îndoit de laturi; să se găsească limita raportului $(r'-a'):(r-a)$ când $(r-a)$ tinde către zero.

58. Un con de rotație este tangent la o sferă și are ca bază planul în care se găsește cercul de contact. Se cere să se găsească limita către care tinde raportul între suprafața laterală a conului și zona care îi este interioară, când planul cercului de contact tinde a deveni tangent la sferă.

59. Intr'o sferă se înscrie un cilindru circular drept; să se găsească către ce tinde raportul între suprafața laterală a cilindrului și suprafața zonei, care are aceeași bază cu cilindrul și îi este exterioară, când înălțimea cilindrului tinde către diametrul sferei.

60. Fie AB diametrul unui cerc de lungime L. Intre A și B se ia un punct C, iar pe BC și AC ca diametre se descriu două cercuri; fie L_1 și L_2 lungimile lor. Cu cele două segmente BC și AC se operează în același fel ca și cu AB; se obțin patru cercuri de lungimi L_3, L_4, L_5, L_6 și așa mai departe, nemărginit. Fie L_p, L_{p+1}, ... L_q lungimile cercurilor obținute după a n_a operație; să se arate că în expresiunea $L_p+L_{p+1}+...+L_q$ limita sumei nu este egală cu suma limitelor.

— Să se găsească limitele expresiunilor următoare:

61. $tg\frac{x}{2}:\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi-x}\right)^2}$, când x tinde către π.

62. $\frac{1}{x}-cotg\,x$, când x tinde către 0.

63. $\frac{1-cos^n x}{x^2}$ » x » » 0.

n fiind întreg pozitiv.

64. $\frac{1-cos^3 x}{x\,sin\,x\,cos\,x}$, când x tinde către 0.

65. $\frac{sin^n px}{sin^p nx}$, când x » » 0.

66. $\frac{arctg(a+x)-arc\,tg(a-x)}{tg(a+x)-tg(a-x)}$, când x tinde către 0.

67. Fie $P_n=cos\alpha\,cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots cos\frac{\alpha}{2^n}$,

să se arate că dacă α tinde către *zero*, limita produsului este egală cu produsul limitelor *și* când n crește nemărginit.

VI. CONTINUITATE

— Să se arate că funcţiunile reale următoare sunt continue, oricare ar fi x real:

1. $y=x^2$. 2. $y=x^3$. 3. $y=x^m$ (m întreg pozitiv).
4. $y=\sin x$. 5. $y=\cos x$. 6. $y=\sin^2 x^2$.
7. $y=\sin^m x^n$ (m şi n întregi pozitivi).
8. $y=arc\sin x$. 9. $y=arc\cos x$. 10. $y=arc\,tg\,x$.
11. $y=\sqrt{x}$. 12. $y=\sqrt[3]{x}$. 13. $y=\sqrt[m]{x^n}$ (m, n întregi pozitivi).
14. $y=arctg\sqrt{x}$. 15. $y=(arctg\,x^n)^m$ (m şi n întregi pozitivi).

— Să se găsească valorile lui x, pentru care funcţiunile următoare sunt discontinue şi să se arate pentru fiecare intervalele de continuitate:

16. $y=\frac{1}{x-1}$. 17. $y=\frac{x}{x^2-1}$. 18. $y=tg\,x$.
19. $y=\frac{1}{\sin x}$. 20. $y=tg\,x-cotg\,x$. 21. $y=tg\frac{1}{x}$.

22. Fie $I(x)$, numărul întreg, egal sau imediat mai mare ca un număr dat x; să se arate că funcţiunea y este discontinuă la dreapta ori care ar fi valoarea întreagă a lui x.

23. Fie $y=f(x)=\Sigma p^2$, în care p ia toate valorile întregi pozitive, mai mici ca x; să se arate că funcţiunea y este *discontinuă la dreapta* oricare ar fi valoarea întreagă a lui x.

VII. DERIVATE

1. Fie $y=\sqrt[3]{x}$, pornind de la valoarea $x=8$, se mai dă lui x o creştere h; fie k creşterea corespunzătoare a lui y şi $a=lim\frac{k}{h}$, când h tinde către *zero*. Să se determine un interval $(-\alpha_1,+\alpha_1)$ aşa încât h rămânând cuprins în acest interval, să avem $a-\frac{k}{h}<0{,}001$, diferenţa fiind luată în valoare absolută. (Concurs G. M. 1912).

— Să se calculeze prima derivată a funcţiunilor următoare:

2. $y=x^2(a+x)^3(b-x)^4$. 3. $y=(a+x)^m(b+x)^n(c+x)^p$.

4. $y=\frac{a-x}{x}$. 5. $y=\frac{1+x}{1-x}$. 6. $y=\frac{1+x^2}{1+x^3}$.

7. $y=\frac{x^n}{(1+x)^p}$. 8. $y=\frac{a}{\sqrt{x}}$. 9. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $y=\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 11. $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

12. $y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 13. $y=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y=\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right]^n$. 15. $y=\frac{\sin^m nx}{\sin^n mx}$.

16. $y=(a^2+x^2)\,arctg\frac{x}{a}$. 17. $y=\frac{arc\sin x}{\sin x}$.

18. $y=arctg\frac{2x}{1+x^2}$. 19. $y=arc\sin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

20. $y=arc\sec\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 21. $y=arcty\,(n\,tg\,x)$.

22. $y=arc\sin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}$. 23. $y=arc\,tg\,(x+\sqrt{1-x^2})$.

24. $y=arc\,tg\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. 25. $y=arc\sin(\sqrt{\sin x})$.

26. $y=arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 27. $y=arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

28. $y=arctg\sqrt{\frac{a+bx}{b-a}}$. 29. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-arcsin\,x$.

30. $y=arcsin\,2x\sqrt{1-x^2}$. Această funcțiune are aceeași derivată ca și funcțiunea $z=2\,arcsin\,x$; să se verifice că diferența sau suma lor este independentă de x.

31. $y=arctg\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}$; să se explice rezultatul.

(P. S. A. P. 1901).

G 2750
2750
BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

32. $y = arctg \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; să se explice rezultatul.

(P. S. A. P. 1907).

33. Să se calculeze derivata funcţiunii:

$$y = arcsin \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2};$$

şi să se verifice că dacă se pune $z = 4\,arctg\,x$, avem: $y \mp z =$ C-ta.

34. Să se calculeze derivata funcţiunii:

$$y = arctg \frac{2x^2+\sqrt{1-x^2}-1}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}.$$

35. Să se arate că funcţiunile:

$$y = arctg \frac{1}{2(x+1)^2},\quad z = arctg \frac{1}{2x+1} - arctg \frac{1}{2x+3}$$

au aceeaşi derivată. Să se explice rezultatul.

36. Să se calculeze derivatele funcţiunilor:

$$y = arctg \frac{a+x}{1-ax},\quad z = arctg \frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx};$$

aceste două funcţiuni au aceeaşi derivată cu o funcţiune cunoscută, să se explice rezultatul.

37. Să se calculeze derivata funcţiunii:

$$y = 3\,arctg \frac{a+2x-ax^2}{1-2ax-x^2} - 2\,arctg \frac{b+3x-3bx^2-x^3}{1-3bx-3x^2+bx^3};$$

să se explice rezultatul.

38. Să se calculeze derivatele funcţiunilor:

$$y = arcsin \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha+\beta x},\quad z = arctg \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha x+\beta};$$

să se explice rezultatele găsite.

39. Să se calculeze derivatele funcţiunilor:

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} arctg\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}\right)\right];$$

$$z = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}} arctg\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} tg\,\frac{x}{2}\right)\right];$$

$$u=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)\right];$$

să se explice rezultatele găsite.

40. Fie $y=arctg\,x$, $y_1=\frac{1}{2}arctg\,u_1$; să se determine u_1 astfel încât să avem $y'_1=y'$. Valorile lui u_1 depind de o constantă, pe care putem să o luăm după voe; alegând convenabil această constantă, se găsește că una din valorile lui u_1 este $\frac{2x}{1-x^2}$.

Pornind dela această valoare, să se găsească o funcțiune u_2 astfel că punând $y_2=\frac{1}{2^2}arctg\,u_2$, să avem $y'_2=y'_1=y'$.

Să se generalizeze. (Concursul G. M. 1913).

41. Fie $f(x)=\frac{1}{x^2}$; să se calculeze derivata funcțiunii:

$$z=f(\alpha x+\beta).$$

42. Fie $f(x)=\frac{ax+b}{a'x+b'}$; să se calculeze derivata funcțiunii:

$$z=f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}\right).$$

43. Fie $f(x)=\sin x^2$; să se calculeze derivata funcțiunii:

$$z=f(2x).$$

44. Fie $f(x)=\sin x+\cos x$; să se calculeze derivata funcțiunii:

$$z=f(arcsin\,x).$$

45. Fie $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=\frac{2t}{1+t^2}$; să se calculeze derivata lui y în raport cu x.

46. Fie $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$; să se calculeze derivata lui y în raport cu x.

47. Fie $x=a\theta-a\sin\theta$, $y=a-a\cos\theta$; să se calculeze derivata lui y în raport cu x.

48. Fie $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$; să se calculeze derivatele parțiale ale lui f în raport cu x și y.

49. Fie $f(x, y, z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D$; să se calculeze derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, y, z.

50. Fie $f(x, y)=\sqrt{1-x^2}.\cos y+\sqrt{1-y^2}\sin x$; să se calculeze derivatele parţiale ale lui f în raport cu x şi y.

51. Fie $f(x, y, z)=tg(ax+by-cz)+tg(bx-cy+az)+tg(-cx+ay+bz)$; să se calculeze derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, y, z.

52. Fie $f(x. y)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$; să se calculeze derivata lui y în raport cu x.

53. Fie $f(x, y)\equiv x^3+y^3-3axy=0$; să se calculeze derivata lui y în raport cu x.

54. Aceeaşi chestiune pentru funcţiunea:

$$f(x, y)\equiv x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=0.$$

— Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcţiunilor:

55. $y=ax^m$. 56. $y=\frac{1}{x}$. 57. $y=\sqrt{1-x}$. 58. $y=\sin x$.

59. Având $f(x)=(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2$ şi $g(x)=(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)+(a-b)(x-a)(x-b)$, să se arate fără a efectua înmulţirile că $f(x)$ şi $g(x)$ nu depind de x şi că $f(x)\equiv g(x)$.

60. Dacă avem: $f(t^a x, t^b y, t^c z)=t^m f(x, y, z)$, vom avea şi

$$axf'_x+byf'_y+czf'_z=mf(x, y, z).$$

Să se generalizeze.

61. Din identitatea:

$$a+a^2x+a^3x^2+\ldots+a^{n+1}x^n=\frac{a^{n+2}x^{n+1}-a}{ax-1},$$

să se deducă valoarea sumei:

$$\Sigma=2ax+3a^2x^2+4a^3x^3+\ldots+(n+1)a^n x^n.$$

VIII. VARIAȚIUNI DE FUNCȚIUNI. MAXIMA ȘI MINIMA

— Să se studieze cu ajutorul teoriei derivatelor și cu ajutorul proprietăților trinomului de gradul al doilea, variațiunile funcțiunilor următoare:

1. $y=2x^2-5x+3$.
2. $y=-x^2+x+1$.
3. $y=\frac{x^2+x+2}{x-1}$. (A. G. 908).
4. $y=\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+3}$.
5. $y=\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.
6. $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$.
7. $y=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x-2}$. (B. F. B. 99).
8. $y=\frac{3x^2-x-1}{2x^2+x-1}$.
9. $y=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$.
10. $y=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-2)(x^2-3)}$
11. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$.
12. $y=\frac{x^2-2ax+3b}{x^2+ax-2b}$

— Să se găsească între ce limite poate varia x și y în expresiunile:

13. $x^2-2xy+y^2-4x-6y+1=0$.
14. $2x^2-2xy+y^2+2x-4y-1=0$.
15. $3x^2-6xy-2y^2+4x-8y-2=0$.

16. Să se determine a și b, astfel ca maximul și minimul funcțiunei

$$y=\frac{x^2+ax-5}{2x^2-bx+1},$$

să aibă respectiv loc pentru $x=2$ și $x=3$.

17. Fie $y=\frac{x^2-2ax-1}{x^2-4ax+2}$; să se determine a astfel ca produsul valorilor lui x, pentru care y este maximum sau minimum, să fie egal cu produsul valorilor maxime și minime ale lui y.

18. Care este condițiunea ca funcțiunea

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

să nu aibă nici maximum, nici minimum.

— Să se studieze variațiunile funcțiunilor:

19. $y = -x^4+2x^2+5$. 20. $y=5x^4-3x^2+7$.

21. $y=x^3-3x^2+3x+7$. 22. $y=(x-3)(2x+1)(3x-1)$.

23. $y=x^5-5x^4+5x^3-1$. 24. $y=(x-1)^4(x+2)^3$.

25. $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. 26. $y=x^4-10x^3+25x^2-36$.

27. $y=x^m(x-a)^n$; m, n întregi pozitivi și $a>0$.

28. $y=x^3-px+q$.

29. $y=x^4-6a^2x^2+8a^3x+b^4$ și $z=x^4-6a^2x^2-8a^3x+c^4$; să se găsească condițiunile ca maximele și minimele acestor funcțiuni să fie egale cu zero. (Concursul G. M. 911).

30. $y=x^m+\frac{1}{x^n}$, m și n numere întregi pozitive. (Concursul G. M. 909).

31. $y=\frac{x^4-3x^3+3x+1}{x^4+2x^3-2x+1}$.

32. $y=\left(\frac{x^n+a}{x^n+b}\right)^p+\left(\frac{x^n+b}{x^n+a}\right)^p \quad (a\neq b)$,

n și p fiind numere întregi.

33. $y=\sqrt{2x}-\sqrt{3x+1}$. 34. $y=x\sqrt{x}\sqrt[3]{1-x^2}$.

35. $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$. 36. $y=\sin x+\cos x$.

37. $y=2\sin^3 x\cos x$. (A. G. 910).

38. $y=\frac{tg^3 x}{tg\,3x}$.

39. $y=\frac{1}{1}\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x$.

40. $y=\frac{\sin^2 x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

41. $y=-(\pi x)^3\cos\pi x+(\pi x)^2[3\sin\pi x+\pi\cos\pi x]+$
$+2\pi x[(3+2\pi^2)\cos\pi x-\pi\sin\pi x]-2[(3+2\pi^2)\sin\pi x+$
$+\pi(1+2\pi^2)\cos\pi x]$. (P. S. A. I. 99).

42. Să se arate că dacă p este număr întreg pozitiv, funcțiunile $y=\sin^{2p}x-\cos^{2p}x+1$ și $u=1-\cos 2x$ au maximele și minimele pentru aceleași valori ale lui x. Să se traseze curbele reprezentative ale variațiunilor lor.

43. Produsul xy fiind constant și egal cu a^2, să se găsească maximul și minimul expresiunei:

$$z=\frac{x^4(x+5y)+y^4(y+5x)}{x^3+y^3-a^2(x+y)}.$$

44. Suma x^3+y^3 fiind constantă și egală cu a^3, să se găsească maximul și minimul lui $z=x+y$.

45. Știind că $x^3+y^3-3axy=0$, să se găsească maximul lui $z=x^2+y^2$.

46. Care este maximul raportului:

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n}$$

când variabilele $x_1, x_2 \ldots x_n$ sunt toate pozitive?

47. Să se deducă din reprezentarea variațiunei funcțiunii

$$y=2x^3+9x^2+12x+\alpha$$

numărul rădăcinilor reale ale ecuațiunii

$$2x^3+9x^2+12x+\alpha=0.$$

48. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală

$$y=x^{2n}+A \quad (n \text{ întreg pozitiv; A real} \neq 0)$$

și să se deducă numărul rădăcinilor reale pe care le are ecuațiunea binomă

$$x^{2n}+A=0.$$

49. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală

$$y=x^{2p+1}+A \quad (p \text{ întreg pozitiv, A real} \neq 0)$$

și să se deducă din reprezentarea variațiunii că ecuațiunea binoamă:

$$x^{2p+1}+A=0$$

are totdeauna o singură rădăcină reală.

50. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală

$$y=x^n-x^{n-1}-1 \quad (n \text{ întreg} \geqq 2)$$

și să se deducă din reprezentarea acestei variațiuni numărul rădăcinilor reale ale ecuațiunii:

$$x^n-x^{n-1}-1=0.$$

51. Fie

$$y=\frac{tgu}{tg(a+u)}.$$

Punând $tgu=x$ și $tga=f>0$, să se studieze variația lui y când x variază dela O până la $u_1=\frac{1}{2}\pi-a$.

Să se construiască pe o foaie milimetrică și cât mai exact posibil, curba care reprezintă variațiunea lui y în cazul când $f=0{,}15$. (Concursul G. M. 922).

52. Să se studieze variațiunea rădăcinilor ecuației: $x^2-2x-m=0$, când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

53. Se dă $tg\alpha=m$, să se formeze ecuația care dă pe $tg\frac{\alpha}{4}=x$; să se arate că ecuația formată are toate rădăcinile sale reale și să se studieze algebriceşte variațiunea fiecărei rădăcini, când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

54. Fie $I(x)$ un număr întreg mai mic sau cel mult egal cu x; să se găsească ce fel de funcțiune reprezintă expresiunea

$$y=x^2+I(x),$$

și să se construiască curba reprezentativă, când x variază în mod continuu dela 0 la 10. (Concursul G. M. 923).

IX. PROBLEME DE MAXIMĂ ȘI MINIMĂ

1. Tăiem o sferă de rază R cu un plan P; pentru care poziţiune a planului P produsul suprafeţelor celor două zone, separate pe sferă de acest plan, este maxim? (B. F. B. 1903).

2. O sferă de rază R și un con circular drept, a cărui bază e un cerc de rază r și a cărui înălțime este egală cu diametrul sferei, sunt situate pe același plan orizontal. Să se studieze variațiunea raportului dintre secțiunea sferei și aceea a conului, printr'un plan orizontal. (P. S. A. P. 1901).

3. Să se găsească maximul și minimul funcțiunei, care se obține scăzând din volumul unui cilindru, volumul unui trunchiu de con, cele două corpuri având o bază comună cu raza egală cu l, aceeași înălțime x, iar diametrul celeilalte baze a trunchiului de con fiind tot x.

4. Să se afle suprafața unui triunghiu în funcțiune de mediane; presupunând două mediane fixe, iar a treia variabilă, să se studieze variațiunea suprafeței.

5. Pe o dreaptă AB luăm un punct C. Descriem un cerc cu centrul în punctul C și cu rază CB, iar din A ducem o tangentă AD la acest cerc, punctul de contact fiind D. Să se afle maximul suprafeței ACD, când C variază.

6. ABC fiind un triunghiu dreptunghiu, cu unghiul drept în A, ducem din B o dreaptă care taie pe AC în D. Să se găsească maximul suprafeței triunghiului ABD cunoscând lungimea $\overline{BC}=a$ și știind că $\overline{AB}=\overline{CD}$. (B. F. B. 1903).

7. Pe o dreaptă AB luăm un punct C; apoi descriem un cerc cu centrul în C și rază CB, care taie pe AB în F. Din A ducem la acest cerc o tangentă, punctul de contact fiind D. Să se afle: 1) maximul suprafeței descrisă de segmentul $\overline{AD}$, în rotația lui în jurul axei AB; 2) maximul volumului născut de triunghiul ADF în aceeași rotație.

8. Să se găsească maximul sau minimul suprafeței unui triunghiu dreptunghic ABC, în care suma unei catete și a ipotenuzei este constantă.

9. Fie un cerc cu centrul în O, un diametru fix $\overline{AB}$ al lui și un punct P mobil pe cerc. Fie M și N intersecțiile dreptelor BP și AP cu tangentele în A și B la cerc. Să se găsească: 1) *minimul* perimetrului trapezului $AMNB$; 2) *minimul* volumului născut prin rotația trapezului $AMNB$ în jurul diametrului fix AB; 3) *maximul* lungimei perpendicularei OD scoborâtă din O pe MN.

10. Fie yox un unghiu drept, M un punct în interiorul unghiului. Să se găsească cel mai mic segment determinat de laturile unghiului în raport cu toate dreptele ce trec prin M.

11. Un vas are forma unei calote sferice. Fie x raza sferei și y înălțimea calotei. Să se afle, în funcțiune de x și y, suprafața și capacitatea vasului. Suprafața aflată fiind egală cu aceea a unei sfere de rază r, să se exprime capacitatea numai în funcțiune de x. Să se arate ce valori poate lua variabila x și să se studieze variațiunea capacității vasului.
(B. F. B. 1910).

12. Fie un cerc O, trei puncte fixe pe el B, A, B' și un punct M variabil pe cerc. Să se găsească pozițiunile lui M

pentru care $\overline{BM}+\overline{B'M}-\overline{AM}$ devine maximă sau minimă. Caz particular $\overline{AB}=\overline{AB'}$.

13. Fie ABC un triunghiu de suprafaţă dacă a^2. Pe laturile acestui triunghiu ca diametre descriem trei sfere; ele au două puncte comune. Unind unul din aceste puncte cu vârfurile triunghiului, formăm o piramidă. Să se determine triunghiul ABC astfel ca volumul piramidei să fie *maximum*.

14. Pe feţele unui tetraedru regulat construim patru piramide cu feţele laterale triunghiuri isoscele egale. Suprafaţa totală a solidului format fiind dată, să se studieze variaţiunea volumului lui.

15. Fiind date două puncte şi o dreaptă, să se studieze variaţiunea raportului distanţelor unui punct mobil, de pe dreapta dată, la aceste două puncte date.

16. Fiind date două sfere exterioare una alteia, de raze R şi r, să se studieze variaţiunea sumei zonelor văzute dintr'un punct aşezat pe linia centrelor, între cele două sfere.

17. Fie un cerc O de rază R şi o tangentă la cerc AB cu punctul de contact în A şi având lungimea AB egală cu R. Ducem prin B o secantă $\overline{BCD}$. Să se găsească maximul suprafeţei triunghiului ACD.

18. Printre toate triunghiurile dreptunghiuri de acelaşi perimetru, să se găsească acela pentru care cercul înscris este maximum.

19. Dintr'un carton cu forma dreptunghiulară să se taie o cutie paralelipipedică, al cărei volum să fie maximum.

20. Un trunchiu de piramidă regulată este circumscris unei sfere de rază R. Să se studieze variaţiunea volumului acestui trunchiu, când înclinarea feţelor laterale pe bază variază.

21. Să se găsească maximul suprafeţei totale a unui paralelipiped drept, în care suma lungimilor muchiilor este o constantă.

22. Două mobile M şi N se mişcă uniform pe două drepte perpendiculare OX şi OY; primul dela O spre X cu viteza a pe minut, al doilea pe OY către O cu viteza b pe minut. Să se determine minimul distanţei lor.

23. In două puncte A și B se află câte o sorginte luminoasă, având respectiv intensitățile i și i'. Să se studieze variațiunea cantității de lumină primită de un punct M, ce parcurge un cerc având centrul în mijlocul lui $\overline{AB}$, și situat în același plan cu AB.

24. Un rezervoriu cilindric are un capac conic circular isoscel și un fund semisferic. Dacă suprafața rezervorului este cunoscută, când volumul închis este maximum?

X. NUMERE COMPLEXE

1. In ce caz modulul sumei sau diferenței a două numere complexe $a+bi$ și $a'+b'i$, este egal cu suma sau diferența modulelor acestor numere?

2. Să se efectueze produsul $(1+i)(1+2i)(1+3i)(1+4i)(1+5i)$.

3. Să se calculeze $(1+i)^n$.

4. Să se calculeze:

$$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3p} \text{ și } \left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3p\pm1};$$

p întreg și pozitiv.

5. In ce caz produsul $(1+\alpha i)(1+\beta i)(1+\gamma i)(1+\delta i)$ este real?

6. In ce caz produsul $(x+\alpha_1 i)(x+\alpha_2 i)..(x+\alpha_n i)$ este real, x fiind real; în ce caz este de forma Xi, X fiind real?

7. In ce caz $(1+\alpha i)^5$ este real sau de forma ki? In aceste cazuri să se determine α.

8. In ce caz $(1+\alpha i)^n$ este real sau de forma ki?

9. Fie $z_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$; $z_2=r[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$ și: $z_3=r[\cos(\alpha+2\beta)+i\sin(\alpha+2\beta)]$;
să se găsească condițiunile ca să avem:

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

10. Fie:

$$z_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad z_2=r[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)],$$
$$z_3=r[\cos(\alpha+2\beta)+i\sin(\alpha+2\beta)]$$

şi: $$z_4 = r[cos(\alpha+3\beta)+i\,sin(\alpha+3\beta)]$$

să se găsească condiţiunile ca să avem:

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0.$$

11. Fie $z_k = r[cos[\alpha+(k-1)\beta]+i\,sin[\alpha+(k-1)\beta]]$ $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Să se găsească condiţiile ca să avem

$$\sum_1^n z_k = 0.$$

12. Dacă punem:

$$A+Bi=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)(a_3+b_3i)\ldots$$

avem

$$arc\,tg\,\frac{B}{A}=arc\,tg\,\frac{b_1}{a_1}+arc\,tg\,\frac{b_2}{a_2}+arc\,tg\,\frac{b_3}{a_3}+\ldots$$

13. Modulul sumei a două numere al căror modul este mai mare ca 2, este inferior modulului produsului lor.

14. Se consideră cantitatea complexă $z=x+iy$. Să se găsească valorile lui x şi y pentru care z^n să fie real şi mai mare decât a, n fiind întreg pozitiv.

15. Să se găsească suma coeficienţilor binomului lui *Newton* luaţi din 4 în 4.

16. Să se dividă $(1+i)^3$ prin $(1-i)^3$.

17. Să se dividă $(1+i)^m$ prin $(1-i)^n$; în care caz câtul este real?

18. Să se găsească condiţiunea ca un număr complex $a+bi$ să se poată pune sub forma $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, λ real.

19. Pentru ce valori, complexe sau reale ale lui λ, expresiunea

$$\frac{a+ib+\lambda(a-ib)}{1+\lambda}$$

este o câtime reală, a şi b fiind reali.

20. Să se extragă rădăcina patrată şi rădăcina a 4-a din i.

21. Să se calculeze $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[5]{i}$.

22. α fiind o rădăcină cubică complexă a unităţei, să se arate că avem:

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

23. Să se arate că dacă n este fără soț și prim cu 3, expresiunea: $(x+y)^n-x^n-y^n$ este divizibilă cu x^2+xy+y^2.

24. Să se arate că ecuația:

$$(x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1=0,$$

admite ca rădăcini, rădăcinile cubice complexe ale unității.

25. Să se calculeze valoarea expresiunilor:

$$u=1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots+x^n\cos n\theta$$
$$v=\quad x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+\ldots+x^n\sin n\theta.$$

26. Să se găsească legea de formațiune a coeficienților în produsul infinit:

$$f(x)=(1+xi)(1+x^2i)(1+x^4i)\ldots(1+x^{2^n}i),$$

27. Să se arate cu ajutorul imaginarelor că ecuația:

$$f(tgx)\equiv tgmx-k=0$$

unde k este un număr real, are toate rădăcinile reale.

28. Fie $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$, $z+z'=k+k'i$; când punctul care figurează pe z descrie o curbă (C), punctul care figurează pe z' va descrie o curbă (C'); care este curba (C') când (C) este o linie dreaptă?

29. Aceiași chestiune presupunând $zz'=k$, k real.

30. Aceiași chestiune presupunând $zz'=k+k'i$ și că curba (C) este cercul $x^2+y^2=1$.

31. Fie $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$; dacă:

$$z'=\frac{a+ibz}{c+idz}$$

atunci z descriind o dreaptă sau un cerc și z' va descrie o dreaptă sau un cerc. Cantitățile a, b, c, d sunt reale.

32. Să se determine numerele α, β, α', β' care satisfac egalitățile următoare:

$$\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=1;\ \alpha\bar{\alpha'}+\beta\bar{\beta'}=0;\ \alpha'\bar{\alpha'}+\beta'\bar{\beta'}=1.$$

Numerele $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha'}$ $\bar{\beta'}$ sunt imaginarele conjugate ale numerelor α, β, α', β'. Să se deducă cazul particular când numerele sunt reale.

XI. DETERMINANȚI

Să se calculeze determinanţii:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 2 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 3 & 3 & 3 & 4 \ldots n \\ 4 & 4 & 4 & 4 \ldots n \\ \ldots\ldots\ldots \\ n & n & n & n \ldots n \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

să se generalizeze.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n\text{-}1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 \ldots n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \ldots 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \ldots 1 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n\text{-}1 & n & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \\ n & 1 & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \ldots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$.

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ C_n^1 & C_{n-1}^1 & C_{n-2}^1 \ldots C_{n-k+1}^1 \\ C_n^2 & C_{n-1}^2 & C_{n-2}^2 \ldots C_{n-k+1}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n^{k-1} & C_{n-1}^{k-1} & C_{n-2}^{k-1} \ldots C_{n-k+1}^{k-1} \end{vmatrix}.$$

13. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 2 & 3 \ldots n \\ 1.2 & 2.3 & 3.4 \ldots n(n+1) \\ \vdots & & \\ 1.2..n & 2.3..(n+1) & 3.4..(n+2). \ldots .n(n+1)..(2n-1) \end{vmatrix}.$$

14. $$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \ldots & n! \\ 2! & 3! & 4! \ldots & (n+1)! \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ n! & (n+1)! & (n+2)!\ldots & (2n-1)! \end{vmatrix}.$$

15. $$\begin{vmatrix} (k+1)! & (k+2)! & \ldots & (k+n)! \\ (k+2)! & (k+3)! & \ldots & (k+n+1)! \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ (k+n)! & (k+n+1)! & \ldots & (k+2n+1)! \end{vmatrix}.$$

16. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} \cdots & \frac{1}{(n-k)!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} \end{vmatrix}.$$

17. $$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}.$$ 18. $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}.$$

19. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 2 & c+\frac{1}{c} & b+\frac{1}{b} \\ c+\frac{1}{c} & 2 & a+\frac{1}{a} \\ b+\frac{1}{b} & a+\frac{1}{a} & 2 \end{vmatrix}$.

21. Să se descompună în factori determinantul:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 \\ (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$$

— Să se calculeze determinanții:

22. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \dots a_n \\ a_1 & x & a_2 \dots a_n \\ a_1 & a_2 & x \dots a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots x \end{vmatrix}$.

(F. S. B. 901).

24. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \\ x & a_2 & x & x \\ x & x & a_3 & x \\ x & x & x & a_4 \end{vmatrix}$. 25. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \dots x \\ x & a_2 & x & x \dots x \\ x & x & a_3 & x \dots x \\ x & x & x & a_4 \dots x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x \dots a_n \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} a & x & x & x & x & b \\ x & a & x & x & b & x \\ x & x & a & b & x & x \\ x & x & b & a & x & x \\ x & b & x & x & a & x \\ b & x & x & x & x & a \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+ac+bc & abc \\ 1 & a+b+d & ab+ad+bd & abd \\ 1 & a+c+d & ac+ad+cd & acd \\ 1 & b+c+d & bc+bd+cd & bcd \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots a_n^n \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^6 & b^6 & c^6 & d^6 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} b_1 & a_1^{n-3} b_1^2 \dots b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} b_2 & a_2^{n-3} b_2^2 \dots b_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} b_n & a_n^{n-3} b_n^2 \dots b_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+x)^3 & (b+x)^3 & (c+x)^3 \\ (a+2x)^3 & (b+2x)^3 & (c+2x)^3 \end{vmatrix}$.

35. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$,

36. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \dots x^{n-1} \\ x & x^2 & x^3 \dots 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 \dots x \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & 1 & x \dots x^{n-2} \end{vmatrix}$.

37. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma & \sin\delta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta \\ \sin\beta & \sin\alpha & \sin\delta & \sin\gamma \\ \cos\beta & \cos\alpha & \cos\delta & \cos\gamma \end{vmatrix}$.

39. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin 40^0 & \cos 40^0 & tg\ 40^0 & cotg\ 40^0 \\ \sin 220^0 & 0 & \cos 50^0 & tg\ 50^0 & cotg\ 50^0 \\ \cos 220^0 & \cos 130^0 & 0 & tg\ 60^0 & cotg\ 60^0 \\ tg\ 140^0 & tg\ 130^0 & tg\ 120^0 & 0 & cotg\ 70^0 \\ cotg\ 140^0 & cotg\ 130^0 & cotg\ 120^0 & cotg\ 110^0 & 0 \end{vmatrix}.$$

40. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1-u^2}{1+u^2} & \dfrac{1-v^2}{1+v^2} & \dfrac{1-w^2}{1+w^2} \end{vmatrix}$$

descompunându-l în factori.

Din calculul lui D să se deducă valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\dfrac{x}{2} & \sin^2\dfrac{y}{2} & \sin^2\dfrac{z}{2} \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \end{vmatrix}$$

41. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3-x & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1-x & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

(F. S. R. 900).

42. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} a^2-x & ab & ac \\ ba & b^2-x & bc \\ ca & bc & c^2-x \end{vmatrix} = 0.$$

43. Dacă $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n, \ldots l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ sunt n grupe oarecare de câte n numere consecutive din şirul lui *Fibonacci* ($n \geqslant 3$):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

atunci determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots . & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots . & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & l_3 \ldots . & l_n \end{vmatrix}$$

are valoarea zero.

44. a, b, c fiind laturile unui triunghiu, să se arate că dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{vmatrix}$$

este nul, triunghiul este isoscel și reciproc.

45. Se dau numerele:

$$k_r^s = s\,k_{r-1}^s + k_{r-1}^{s-1} \qquad k_r^s = 0 \begin{cases} s=0 \\ s>r \end{cases}$$

$$k_r^r = 1$$

Să se calculeze determinanții:

$$\begin{vmatrix} k_2^1 & k_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_3^1 & k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^1 & k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^1 & k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^1 & k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}.$$

Să se generalizeze. (Concursul G. M. 923).

46. a, b, c, d, e, f, x fiind cantități reale, iar $i^2+1=0$, să se arate că valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x & a+ix & b+ix & c+ix \\ a-ix & x & d+ix & e+ix \\ b-ix & d-ix & x & f+ix \\ c-ix & e-ix & f-ix & x \end{vmatrix}$$

este independentă de i.

47. Să se demonstreze egalitățile:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+y+z)\,(x+y-z)\,(x-y+z)\,(-x+y+z).$$

48. Să se verifice egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{c} & \frac{c}{a} & \frac{a}{b} \\ a & b & c \\ \frac{c}{b} & \frac{a}{c} & \frac{b}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{2abc}[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2].$$

49. Să se arate, fără să se desvolte, că determinantul:

$$\begin{vmatrix} x-a & x-b & a-b \\ x-b & x-c & b-c \\ x-c & x-a & c-a \end{vmatrix}$$

este nul. Să se deducă identitatea:

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)=(x-b)(x-c)\times (b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b).$$

50. Să se arate că dacă avem $abc=xyz=1$, vom avea și

$$\begin{vmatrix} \frac{xy(z-c)}{z+c} & -y & 1 \\ 1 & \frac{yz(x-a)}{x+a} & -z \\ -x & 1 & \frac{xz(y-b)}{y+b} \end{vmatrix} = 0.$$

51. Se consideră funcțiunile:

$$F(x)=\begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1 & x & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & x \end{vmatrix}, \quad f(x)=\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & x & x^2 \end{vmatrix}.$$

Avem relația $F(x)=f(x^2)$.

52. Să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots\ldots\ldots, & a_1^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2a_1 & 3a_1^2 \ldots (2n-1)a_1^{2n-2} & \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \ldots\ldots & a_2^{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & 1 & 2a_n & 3a_n^2 \ldots (2n-1)a_n^{2n-2} & \end{vmatrix} = \prod_{i,k=1}^{n} (a_i-a_k)^{2^2}.$$

Să se generalizeze.

53. Să se determine p astfel încât să avem:

$$\begin{vmatrix} C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 \dots & C_n^{i-1} & C_n^i \dots C_n^n \\ -C_n^1 & C_n^2 & C_p^3 & C_p^4 \dots & C_p^{i-1} & C_p^i \dots C_p^n \\ -C_n^1 & -C_n^2 & C_n^3 & C_p^4 \dots & C_p^{i-1} & C_p^i \dots C_p^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_n^1 & -C_n^2 & -C_n^3 & -C_n^4 \dots & C_n^{i-1} & C_p^i \dots C_p^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_n^1 & -C_n^2 & -C_n^3 & -C_n^4 \dots & -C_n^{i-1} & -C_n^i \dots C_n^n \end{vmatrix} = \frac{2^{2n-2}(n!)^n}{p\,[1!\,2!\dots(n-1)!]^2}$$

54. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta = |\, ih+k \,|;$$

în care i și k ia valorile întregi $0, 1, 2, \dots (n-1)$; rămânând i neschimbat pentru elementele unei linii, iar k pentru elementele unei coloane; k este un număr întreg dat; numerele $ih+k \geqslant n$ se înlocuesc cu resturile diviziunii lor prin n.

55. Să se găsească numărul termenilor determinantului:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 \dots\dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 \dots\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots -1\ a_n \end{vmatrix}.$$

56. Pentru ca valoarea unui determinant să nu se schimbe când mărim fiecare din elemente cu λ este necesar și suficient ca suma tuturor minorilor de primul ordin să fie nulă.

57. Dacă x, y, z, t sunt niște cătimi pozitive variabile care satisfac relațiile:

$$A_1 x^a y^b z^c t^d + A_2 x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} t^{d_1} = A,$$

$$B_1 x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} t^{d_2} + B_2 x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3} t^{d_3} = B,$$

să se determine valorile lor astfel ca produsul $P = x^m y^n z^p t^q$ să fie maxim.

XII. INMULȚIREA DETERMINANȚILOR. APLICAREA DETERMINANȚILOR LA TEORIA ECUAȚIILOR LINEARE

— Să se multiplice determinanții:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ y' & z' & x' \\ z' & x' & y' \end{vmatrix}$

3. Să se determine coeficienții $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ pentru ca produsul determinanților:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ a_2 & x & b_2 \\ a_3 & b_3 & x \end{vmatrix}$$

să fie determinantul:

$$\begin{vmatrix} x^2+4 & 5x+2 & 4x+2 \\ 3x+6 & x^2+12 & 4x+6 \\ 3x+3 & 5x+3 & x^2+6 \end{vmatrix}$$

4. Fie:

$$\begin{aligned} a_1 &= a+bi, & \alpha_1 &= a'+b'i, \\ a_2 &= c+di, & \alpha_2 &= c'+d'i, \\ b_1 &= -c+di, & \beta_1 &= -c'+d'i, \\ b_2 &= a-bi, & \beta_2 &= a'-b'i; \end{aligned}$$

să se multiplice determinanții:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

și să se deducă:

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) &= (aa'-bb'+cc'-dd')^2+ \\ &+(ab'+ba'-cd'-dc')^2+(ac'-bd'-ca'+db')^2+ \\ &+(ad'+bc'+cb'+da')^2. \end{aligned}$$

5. Știind că:

$$x'^2+y'^2=x''^2+y''^2=x'''^2+y'''^2=R^2 \text{ și}$$
$$x'x''+y'y''=R^2-\tfrac{1}{2}c^2,\ x'x'''+y'y'''=R^2-\tfrac{1}{2}b^2,$$
$$x''x'''+y''y'''=R^2-\tfrac{1}{2}a^2;$$

să se calculeze produsul:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & R \\ x'' & y'' & R \\ x''' & y''' & R \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & -R \\ x'' & y'' & -R \\ x''' & y''' & -R \end{vmatrix}$$

— Să se ridice la patrat determinanții:

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots. & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots. & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots. & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

8. Să se arate că patratul unui determinant de ordin par se poate pune sub forma unui determinant simetric stâng.

9. Fie:

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1=n_2p_3+n_3p_2,\ \Delta_2=n_3p_1+n_1p_3,\ \Delta_3=n_1p_2+n_2p_1.$

Să se arate că avem:

$$A^2.B^2=\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_2m_1 & a_2m_2 & a_2m_3 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_2m_1 & b_2m_2 & b_2m_3 \\ a_2m_1 & b_2m_1 & 2n_1p_1 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ a_2m_2 & b_2m_2 & \Delta_3 & 2n_2p_2 & \Delta_1 \\ a_2m_3 & b_2m_3 & \Delta_2 & \Delta_1 & 2n_3p_3 \end{vmatrix}.$$

10. Din ridicarea la patrat a tabloului:

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \\ \cos\gamma & \sin\gamma \end{Vmatrix}$$

să se deducă:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos(\gamma-\beta) \\ \cos(\alpha-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Să se arate că:

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \\ \cos\gamma & \sin\gamma \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \sin\alpha' & \cos\alpha' \\ \sin\beta' & \cos\beta' \\ \sin\gamma' & \cos\gamma' \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\alpha') & \sin(\beta+\alpha') & \sin(\gamma+\alpha') \\ \sin(\alpha+\beta') & \sin(\beta+\beta') & \sin(\gamma+\beta') \\ \sin(\alpha+\gamma') & \sin(\beta+\gamma') & \sin(\gamma+\gamma') \end{vmatrix} = 0.$$

12. Din:

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{Vmatrix}^2$$

să se deducă: $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) =$

$$\left[\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\right]^2 + \left[\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}\right]^2 +$$

$$+ \left[\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}\right]^2 + (aa'+bb'+cc'+dd')^2.$$

13. Să se formeze patratul tabloului:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a & b & \ldots\ldots & l \\ a^2 & b^2 & \ldots\ldots & l^2 \end{Vmatrix}.$$

14. Să se descompună în factori determinanți de ordinul III, determinantul:

$$\begin{vmatrix} (a-a')^2 & (a-b')^2 & (a-c')^2 \\ (b-a')^2 & (b-b')^2 & (b-c')^2 \\ (c-a')^2 & (c-b')^2 & (c-c')^2 \end{vmatrix}$$

15. Să se arate, folosind regula lui *Laplace* pentru desvoltare, că determinantul:

$$\begin{vmatrix} a & b & a^4 & a^4 \\ a & b & -b^4 & -b^4 \\ 1 & 1 & a^3 & -ab^2 \\ 1 & 1 & -a^2b & b^3 \end{vmatrix}$$

are valoarea $a^8 - b^8$.

16. Să se descompună în factori ireductibili raționali expresia:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^6 & a^4 \\ 1 & a^6 & 0 & a^2 \\ 1 & a^4 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + 4a^{10}.$$

17. Să se înmulțească determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 \dots a_n & pa_1 \\ a_3 & a_4 \dots pa_1 & pa_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_n & pa_1 \dots pa_{n-2} & pa_{n-1} \end{vmatrix}$$

cu determinantul

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \dots \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \dots \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \dots \alpha_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \dots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sunt rădăcinile ecuației: $\alpha^n - \frac{1}{p} = 0$ și să se deducă că Δ este produsul a n factori lineari în raport cu $a_1, a_2, \dots a_n$.

18. Să se arate că determinantul:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & tg\,\alpha & cotg\,\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) & 0 & tg\,\beta & cotg\,\beta \\ tg(\pi-\alpha) & tg(\pi-\beta) & 0 & cotg\,\gamma \\ cotg(\pi-\alpha) & cotg(\pi-\beta) & cotg(\pi-\gamma) & 0 \end{vmatrix}$$

este patrat perfect.

19. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \dots \\ \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \frac{1}{(n-2)!} & \dots \\ 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \frac{1}{(n-2)!} & 0 & \dots \\ \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \frac{1}{(n-2)!} & 0 & \frac{1}{(n-3)!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ordinul determinantului fiind $p+1$; există o valoare a lui $p>0$ pentru care determinantul este nul?

20. Să se calculeze direct, fără desvoltare, valoarea derivatei determinantului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(x) & f(nx) \\ 1 & g(x) & g(nx) \end{vmatrix}.$$

21. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} a_0^r & (a_0+1)^r & (a_0+2)^r \dots (a_0+r)^r \\ a_1^r & (a_1+1)^r & (a_1+2)^r \dots (a_1+r)^r \\ \dots & \dots & \dots \\ a_r^r & (a_r+1)^r & (a_r+2)^r \dots (a_r+r)^r \end{vmatrix},$$

r număr întreg.

22. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} f_{(1)} & f_{(2)} & \dots & f_{(n+1)} \\ f'_{(1)} & f'_{(2)} & \dots & f'_{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(n)}_{(1)} & f^{(n)}_{(2)} & \dots & f^{(n)}_{(n+1)} \end{vmatrix}$$

$f(x)$ fiind un polinom algebric de gradul n, iar accentele însemnând derivare.

23. $F_1(x)$, $F_2(x)$.... $F_n(x)$ fiind polinoame în x de gradul $n-1$, să se arate că determinantul:

$$\begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) \ldots . & F_n(x) \\ F_1'(x) & F_2'(x) \ldots & F_n'(x) \\ F_1''(x) & F_2''(x) \ldots & F_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) \ldots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

este independent de x.

— Să se rezolve cu ajutorul determinanților sistemele de ecuații următoare:

24. $x+y-z=1$, $x-y+z=2$, $-x+y+z=3$.

25. $2x-3y+5z=4$, $3x+y-2z=1$, $x-4y+z=2$.

26. $x+2y=1$, $2y+3z=2$, $3z+4u=3$, $4u+5x=4$.

27. $x+ay+a^2z=ax+a^2y+z=a^2x+y+az=1$.

28. $x+y+z=1$, $ax+by+cz=\alpha$, $a^2x+b^2y+c^2z=\alpha^2$.

29. $a_1^i x_1+a_2^i x_2+\ldots+a_n^i x_n=\alpha^i$, $[i=0, 1, 2\ldots(n-1)]$.

30. $x+y+z=a$, $y+z+u=b$, $z+u+x=c$, $u+x+y=d$.

31. $x+2y+3z=sx$, $2x+3y+z=sy$, $3x+y+2z=sz$,
$x^2+y^2+z^2=1$. (F. S. B. 99).

32. $x+y+z+t=ax+by+cz+dt=a^2x+b^2y+c^2z+d^2t=0$,
$x^2+y^2+z^2+t^2=1$. (F. S. B. 902).

33. Să se discute sistemul:
$ax+by+cz=1$, $bx+cy+az=1$, $cx+ay+bz=1$.

34. Să se formeze relația de condiție pentruca sistemul:
$(a-s)x+by+c=a^2x+(b^2-s)y+c^2=a^3x+b^3y+(c^3-s)=0$,
să fie compatibil; cum trebue să fie a, b, c pentruca sistemul să fie compatibil pentru $s=0$? (F. S. B. 98).

35. Să se găsească condițiunile ca sistemul:
$4x+3y+z=5$, $x+5y-3z=4$, $\alpha x+\beta y-2z=\alpha+\beta$, să fie:
a) incompatibil; *b)* nedeterminat.

36. Să se discute sistemul:

$$x\sin\theta+y+z\cos\theta=0$$
$$x+y\cos\theta+z\sin\theta=0$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta+z=1$$

și să se rezolve în cazul când este determinat.

37. Să se discute sistemul:
$ax+by+\lambda z=1$, $bx+ay-\lambda z=2$, $x+y+(a+b)z=\lambda$.

Presupunând că a şi b sunt coordonatele unui punct din plan, să se arate care sunt punctele planului pentru care sistemul este determinat, incompatibil sau nedeterminat.

38. Să se pună sub formă de rapoarte egale, numărătorii fiind x, y, z, t, ecuaţiile:

$$ax+by+cz+dt=a'x+b'y+c'z+d't=a''x+b''y+c''z+d''t=0.$$

39. Să se arate, prin trigonometrie, că un triunghiu dreptliniar nu este determinat când se cunosc numai cele trei unghiuri, şi că toate triunghiurile, care corespund la aceleaşi valori date unghiurilor, sunt asemenea.

40. Să se găsească condiţia de compatibilitate a sistemului:

$$x+2y=a,\quad 2x+4y=b,\quad 3x+6y=c.$$

41. Să se elimine x între ecuaţiile:

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}=\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}=\frac{a_3x+b_3}{c_3x+d_3}.$$

42. Să se elimine x, y, z între ecuaţiile:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0.$$

Fie $D=0$ rezultatul eliminării, să se arate că D este divizibil cu:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

să se găsească câtul diviziunii. (Concursul G. M. 911).

— Să se elimine x, y, z între ecuaţiile:

43. $x^2=a(x-y)(x-z),\quad y^2=b(y-x)(y-z),$
$z^2=c(z-x)(z-y).$

44. $x^2=a(x+y)(x+z),\quad y^2=b(y+x)(y+z),$
$z^2=c(z+x)(z+y).$

45. Se consideră ecuaţiile:

$$ax+by+cz=k,\quad a'x+b'y+c'z=k',\quad a''x+b''y+c''z=k'';$$

se pune:

$$x=\alpha t+\beta u+\gamma v,\quad y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v,\quad z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v$$

se obțin astfel trei ecuații în t, u, v; să se calculeze numitorul comun al necunoscutelor.

46. Aceiași chestiune pentru sistemul:

$$a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\ldots+a_{i,n}x_n=k_i$$

în care se pune:

$$x_h=a_{h,1}y_1+\alpha_{h,2}y_2+\ldots+\alpha_{h,n}y_n,$$

$(i, h=1, 2, 3\ldots n)$.

47. Din sistemul:

$$\Sigma x_i=0,\ \Sigma a_i x_i=0\ldots\Sigma a_i^{n-2}x_i=0,\ \Sigma a_i^{n-1}x_i=1.$$

$(i=1, 2\ldots n)$, să se deducă identitatea:

$$\sum_{m=1}^{m=n}\frac{a_m^n-1}{(a_m-1)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_n)}=1.$$

48. Fie sistemul de ecuațiuni:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\lambda x_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\lambda x_2 \quad (a_{kl}=a_{lk})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\lambda x_n.
\end{aligned}$$

Să se arate că există n valori reale pentru λ pentru care sistemul are soluțiuni nu toate nule.

XIII. FRACȚIUNI CONTINUI. ANALIZA NEDETERMINATA

— Să se desvolte în fracțiuni continui numerele:

1. $\frac{347}{124}$. 2. $\frac{3117}{24512}$. 3. 3,141592. 4. $\sqrt{2}$.
5. $\sqrt{3}$. 6. $\sqrt{7}$. 7. $\sqrt{11}$. 8. $\sqrt{13}$.
9. $\sqrt{19}$. 10. $\sqrt{31}$. 11. $\sqrt{101}$. 12. $\sqrt{200}$.
13. $\sqrt{a^2+1}$. 14. $\sqrt{a^2+2}$. 15. $\sqrt{a^2-1}$. 16. $\sqrt{a^2-2}$.
17. $\sqrt{a^2+a}$. 18. $\sqrt{4a^2+a}$. 19. $\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$, $a>b$.

20. Să se arate că numărătorii a două reduse consecutive sunt primi între ei; deasemenea și numitorii.

21. Fie $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ trei reduse consecutive ale unei fracţiuni continue; să se arate că:

$$(p_1 - p_3)q_2 = (q_1 - q_3)p_2.$$

22. $p_n : q_n$ reprezentând redusa de ordinul n, să se arate că:

$$\left(\frac{p_{n+2}}{p_n} - 1\right)\left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right).$$

23. Să se arate că o redusă oarecare $p_n : q_n$ este egală cu:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

24. Fie $p_n : q_n$ redusa de ordinul n, a desvoltării unui număr în fracţiune continuă; să se calculeze câturile incomplete ştiind că între numărătorii şi numitorii a patru reduse consecutive avem relaţia:

$$(p_{n+2} + p_{n+1})q_n + p_{n+3}q_{n+1} = (q_{n+2} + q_{n+1})p_n + q_{n+3}p_{n+1}.$$

25. Se dă fracţiunea continuă periodică:

$$x = (a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots),$$

şi se cere să se găsească relaţiunea ce trebue să existe între redusele sale de ordinul n şi $n-1$, aşa că răsturnând ordinea câturilor incomplete, adică luând:

$$x' = (a_n, a_{n-1}, \ldots a_1; a_n, a_{n-1}, \ldots a_1; \ldots),$$

să avem $x' = x$.

26. Fie $p_{n-1} : q_{n-1}$ şi $p_n : q_n$ două reduse consecutive; a_n câtul incomplet următor; se consideră fracţiunile:

$$\frac{p_{n-1} + \lambda p_n}{q_{n-1} + \lambda q_n}, \text{ în care } \lambda = 1,2,\ldots a_n;$$

să se arate că fracţiunile astfel obţinute — care se numesc fracţiuni convergente intermediare — se bucură de proprietăţile următoare: *a)* ele sunt ireductibile; *b)* dacă o fracţiune $p : q$ se apropie mai mult de numărul care a dat naştere fracţiunei continui considerate, termenii săi sunt mai puţin simpli ca ai fracţiunei convergente; *c)* dacă n este par, fracţiunile convergente intermediare merg necontenit crescând, iar dacă n este impar, ele merg necontenit descrescând.

— Să se rezolve în numere întregi ecuaţiile:

27. $9x-11y=8$. 28. $7x+10y=297$.

29. $2x-3y+5z=1$.

30. $2x+5y-z=1$, $3x-2y+5z=4$.

31. $9x+16y+15z=181$, $3x+2y+z=27$.

— Să se găsească soluțiile ecuațiilor următoare în numere întregi, pozitive:

32. $13x+19y=1170$.

33. $5x+4y+z=272$, $8x+9y+3z=656$.

34. $3xy-4y+3x=14$.

35. Fracția continuă:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdot}}}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot+\frac{1}{a_n}$$

se poate exprima cu ajutorul determinantului:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1\ a_n \end{vmatrix} = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n).$$

36. Fiind dată ecuația $ax+by=c$, să se găsească condiția pentruca soluțiile pentru care suma patratelor lor este un minimum să fie întregi.

37. Să se găsească numărul care divizat cu 28 dă restul 21, iar divizat cu 19 dă restul 17.

38. Să se găsească cel mai mic număr, care divizat cu 2, 3, 4, 5, 6 dă resturile 1, 2, 3, 4, 5.

39. Să se găsească 2 numere întregi, astfel că diferența lor să fie egală cu de două ori raportul lor.

40. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 se fac toate permu-

tările posibile; să se găsească numărul permutărilor în care suma primelor patru cifre este egală cu suma ultimelor patru.

41. Să se împartă 100 lei la 100 persoane, bărbaţi, femei şi copii, dând fiecărui bărbat câte 3 lei, fiecărei femei câte 2 lei şi fiecărui copil câte 0,50 lei; câţi bărbaţi, câte femei şi câţi copii sunt?

42. In anul 1905, într'un atelier, lucrătorii sunt plătiţi cu ziua, nu însă cu acelaş preţ. Ei sunt împărţiţi în trei categorii: preţul pe zi pentru cei din categoria a 2-a este cu 20% mai mare ca al celor din categoria a 3-a şi cu 25% mai mic ca al celor din categoria I-a. Să se determine numărul lucrătorilor din fiecare categorie, ştiind că într'o zi de lucru fiecărei categorii i s'a cuvenit aceaşi sumă, câte 200 lei, că numărul total al lucrătorilor este mai mic ca 120, şi că nici unui lucrător nu i s'a cuvenit mai mult de 8 lei, nici mai puţin de 4 lei pe zi.

43. Se zice că un poligon regulat este o dală a planului când un plan indefinit poate fi acoperit cu poligoane egale cu acesta, care se unesc fără goluri şi fără suprapuneri. Să se găsească poligoanele regulate care sunt dale ale planului.

XIV. SERII

— Să se găsească suma celor dintâi n termeni ai seriilor următoare şi să se deducă convergenţa lor:

1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$

3. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

4. $\frac{1}{1.p}+\frac{1}{2(p+1)}+\frac{1}{3(p+2)}+\ldots+\frac{1}{n(p+n-1)}+\ldots$

5. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

6. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)(n+4)}+\ldots$

7. $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\ldots+\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots$

8. $\frac{1.2.3}{4.5.6.7.8}+\frac{2.3.4}{5.6.7.8.9}+\ldots$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}+\ldots$$

9. Să se arate convergența seriei:

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(2m+2)}+\ldots$$

$$+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(n+m)(n+m+1)\ldots(n+2m+1)}+\ldots$$

și să se găsească suma.

10. Să se afle suma seriei:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha+i\beta}{(a+ir)\ldots[a+(m+i)r]}.$$

— Să se arate că seriile următoare sunt convergente și să se găsească suma lor:

11. $\frac{C_2^2}{2^2}+\frac{C_3^2}{2^3}+\ldots+\frac{C_n^2}{2^n}+\ldots$

12. $\frac{C_p^p}{a^p}+\frac{C_{p+1}^p}{a^{p+1}}+\ldots+\frac{C_n^p}{a^n}+\ldots \quad (a>1).$

13. $\frac{1.2}{1.2.3}+\frac{2.2^2}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{n.2^n}{1.2.3\ldots(n+2)}+\ldots$

14. Să se stabilească natura seriilor care au termenul general

$$u_n=\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \text{ sau } v_n=(-1)^n\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

C_{2n}^n este numărul combinărilor fără repetiție a $2n$ obiecte luate câte n.

— Să se arate că seriile următoare sunt convergente:

15. $\sum_1^{\infty}\frac{n^4-5n+1}{n^6+1}.$ 16. $\sum_1^{\infty}\frac{n^2-n}{n^4+n+1}.$

17. Dacă termenul general al unei serii se poate pune sub forma $\frac{f(n)}{F(n)}$, $f(n)$ și $F(n)$ fiind două polinoame întregi în raport cu n, din care $F(n)$ nu se anulează pentru vre-o valoare întreagă și pozitivă a lui n, pentru ca seria $\sum_1^\infty \frac{f(n)}{F(n)}$ să fie convergentă, este necesar și suficient ca gradul numitorului să fie cu cel puțin două unități mai mare ca al numărătorului.

— Să se studieze natura seriilor:

18. $1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{3^p}+\frac{8}{4^p}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^p}+\ldots$

19. $\frac{1}{(log\,2)^p}+\frac{1}{(log\,3)^p}+\ldots+\frac{1}{(log\,n)^p}+\ldots$

20. $\frac{1}{(log 2)^2}+\frac{1}{(log 3)^3}+\ldots+\frac{1}{(log\,n)^n}+\ldots$

21. $1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{5}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

22. Să se studieze natura seriei:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^n (y^{n+1}-x^{n+1})}{(x^n+y^n)(x^{n+1}+y^{n+1})(x^{n+2}+y^{n+2})}$$

și să se afle suma în cazul convergenței.

23. Fie $S_i=\sum_1^\infty \frac{1}{m(m+i)}$; să se calculeze S_1, S_2, S_3... și să se arate că dacă n crește nemărginit, seria:

$$S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots$$

este divergentă, iar seria: $S_1-S_2+S_3-S_4+\ldots\pm S_n\mp\ldots$ este convergentă.

24. Se consideră seria armonică $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ în care se schimbă semnele în modul următor: se ia primii p termeni cu $+$, apoi la q termeni care urmează li se dă semnul $-$; după aceia iar p termeni cu $+$ și q termeni cu $-$; se continuă astfel nemărginit luând câte p termeni cu $+$ și q

termeni cu —. Să se arate că dacă $p=q$ seria este convergentă, iar dacă $p\neq q$ seria obținută este divergentă. (Concursul G. M. 1911).

— Să se studieze natura seriilor:

25. $2\,cotg\,2x+tg\,x+\frac{1}{2}\,tg\,\frac{1}{2}\,x+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\,\frac{1}{2^n}x+\ldots$

26. $arctg\,\frac{1}{2}+arctg\,\frac{1}{8}+arctg\,\frac{1}{18}+\ldots+arctg\,\frac{1}{2n^2}+\ldots$

— Să se arate că seriile următoare sunt convergente:

27. $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^2\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}}$.

28. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$.

29. Seria: $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{\pi}{n}+\ldots$

este divergentă.

30. Să se sumeze seria:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\ldots+\frac{2x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}+\ldots$$

31. Pentru ce valori ale lui x seria:

$$1+\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)+\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^n+\ldots$$

este convergentă? (P. S. A. P. 900).

32. Să se găsească condiția de convergență a seriei:

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+(n+1)^2x^n+\ldots,$$

și să se găsească suma ei, în cazul când este convergentă.

33. Aceiași chestiune pentru seria:

$$\sum_{1}^{\infty}P(n)\,x^n,$$

$P(n)$ reprezentând un polinom întreg în raport cu n.

Să se indice un procedeu pentru calculul sumei acestei serii.

34. Să se arate că seria:

$$\frac{1}{1+z}+\frac{z}{(1+z)(1+z^2)}+\frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}+\ldots$$

$$+\frac{z^{2^{n-1}}}{(1+z)(1+z^2)...(1+z^{2^n})}+...$$

este convergentă şi să se găsească suma ei.

35. Seria cu termeni pozitivi: $u_0+u_1+...+u_n+...$ fiind divergentă, să se arate că seria:

$$\frac{u_0}{u_0+1}+\frac{u_1}{(u_0+1)(u_1+1)}+\frac{u_2}{(u_0+1)(u_1+1)(u_2+1)}+...$$

$$+\frac{u_n}{(u_0+1)(u_1+1)...(u_n+1)}+...$$

este convergentă şi are ca sumă pe 1.

36. Să se studieze seria al cărei termen general este:

$$\frac{n^\alpha}{1+bn}.$$

37. Fie $S_n=\sum_1^n \frac{1}{2n+1}$, $S_n'=\sum_1^n \frac{n}{2n^2+1}$, să se arate că dacă n creşte nemărginit, S_n şi S'_n cresc deasemenea nemărginit, dar diferenţa $S_n'-S_n$ tinde către o limită finită.
(F. S. B. 903).

38. Să se arate că diferenţa:

$$\sum_{n=1}^{n=p}\left(\frac{n^2+n+3}{n(n+1)}\right)-\frac{(p+1)^2}{p}$$

tinde către o limită determinată, când p tinde către infinit.

39. Fie:

$$S_n=\sum_{p=3}^n tg\frac{\pi}{p},\quad S_n'=\sum_{p=3}^n sin\frac{\pi}{p}.$$

Să se arate că n tinzând către infinit, S_n şi S_n' tind către infinit, dar S_n-S_n' tinde către o limită finită. Cum trebue să fie α pentruca aceiaşi proprietate să subsiste pentru sumele:

$$S_n=\sum_{p=3}^n tg^\alpha\frac{\pi}{p} \text{ şi } S_n'=\sum_{p=3}^n sin^\alpha\frac{\pi}{p}?$$

(Concursul G. M. 923).

40 Fie $x'Ox$ şi $y'Oy$ două drepte ce se întâlnesc în O. Pe Ox se ia segmentele $OA_1>OA_2>OA_3>...>OA_n>...$; se unesc apoi punctele $A_1, A_2,... A_n,...$ cu un punct C situat

în unghiul $x'Oy$ sau xOy' din planul determinat de dreptele xOx' și yOy', fie $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ punctele unde $CA_1, CA_2, \ldots$ $CA_n, \ldots$ întâlnesc pe Oy. Să se arate că seriile:

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n} + \ldots$$

și

$$\overline{OB_1} + \overline{OB_2} + \ldots + \overline{OB_n} + \ldots$$

sunt de aceiași natură. Să se aplice în cazurile când $\overline{OA_n} = sin\frac{\pi}{n}$ și $\overline{OA_n} = sin^2\frac{\pi}{n}$, iar punctul C se depărtează la infinit. (Concursul G. M. 910).

— Să se caute limitele expresiunilor următoare când n crește nemărginit:

41. $\sqrt[n]{n}$. 42. $\sqrt[n]{n!}$. 43. $\sqrt[n]{log\, n}$.

44. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

45. $\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, p oarecare.

XV. FUNCȚIUNI EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE. LIMITE. SERII

— Să se calculeze derivatele funcțiunilor:

1. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 2. $y = e^x(1 - x^3)$.

3. $y = e^{e^x}$. 4. $y = e^{(a+x)^2} sin\, x$

5. $y = x\,\mathrm{L}x$. 6. $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2})$.

7. $y = \mathrm{L}\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$. 8. $y = \mathrm{L}\, cotg\, x$.

9. $y = \mathrm{L}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. 10. $y = \mathrm{L}\frac{a + b\, tg\frac{x}{2}}{a - b\, tg\frac{x}{2}}$.

11. $y = \mathrm{L}\frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $y=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\mathrm{L}\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right]$.

13. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{L}\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arc\sin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$.

14. $y=\mathrm{L}(e^x+e^{-x})$, 15. $y=\mathrm{L}[\mathrm{L}(a+bx^n)]$.

16. $y=\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$. 17. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

18. Să se calculeze derivatele funcţiunilor în raport cu tgx:

$$y=(\sin x)^{\cos x};\ y=(\cos x)^{\sin x}.$$

— Să se găsească derivatele de ordinul n ale funcţiunilor:

19. $y=e^{ax}$. 20. $y=xe^{ax}$. 21. $y=\mathrm{P}(x)e^x$, unde $\mathrm{P}(x)$ este un polinom de gradul m.

22. $y=\mathrm{L}x$. 23. $y=f(e^x)$.

— Să se găsească limitele expresiunilor:

24. $\mathrm{E}=(1-\sin x)^{\cot g x}$ când x tinde către zero.

25. $\mathrm{E}=\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$ când x tinde către a.

26. $\mathrm{E}=\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$ când x tinde către 0.

27. $\mathrm{E}=x^{\mathrm{L}(x-1)}$ când x tinde către 1.

28. $\mathrm{E}=(\sin x+\cos x)^{tg x}$ când x tinde către $\frac{\pi}{2}$.

29. $\mathrm{E}=(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ când x tinde către 0.

30. $\mathrm{E}=(\cos ax)^{(\mathrm{cosec}\, bx)^2}$ când x tinde către 0.

31. $\mathrm{E}=\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2}$ când x tinde către ∞.

32. $\mathrm{E}=\left(\cos\frac{\alpha}{n}+x\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n$ când n tinde către ∞.

33. Să se găsească limita expresiunii

$$\mathrm{E}=\frac{y^2\sin(x-a)+x^2\sin(y-b)}{ytg(x-a)+xtg(y-b)}$$

pentru $x=a$, $y=b$ soluţiuni ale ecuaţiunii: $e^{x-a}+e^{y-b}+x^2+y^2-a^2-b^2-2=0$.

— Să se găsească limitele expresiilor:

34. $\mathrm{E}=n(\sqrt[n]{a}-1)$ când n tinde către ∞.

35. $E = n(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})$ când n tinde către ∞.

36. $E = \left[\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$ » n » » ∞.

37. $E = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=p} \sqrt[n]{a_i}}{p}\right]^n$ » n » » ∞.

38. $E = (n \Sigma a_i + \Sigma b_i) L\left[1 + \Sigma \frac{1}{n a_i + b_i}\right]$ când n tinde către ∞.
$(i = 1, 2, \ldots p)$.

39. $E = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$ când n tinde către ∞.

40. $E_1 = \sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}$ și $E_2 = \sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-p]{(n-p)!}$ când n tinde către ∞.

41. $E = \frac{(\log n)^p}{n}$ când n tinde către ∞.

42. $E = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}$ când n tinde către ∞.

43. Să se determine m, n, p astfel ca, expresiunile:
$E = (\sin x - tg x) x^m$; $E = (x - \sin x) x^n$; $E = \frac{x - \sin x}{e^x - \cos x} \cdot x^p$, să aibă limite finite și diferite de zero, când x tinde către *zero*.

44. Să se arate că:

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - m\, e \right\} = -\frac{e}{2}.$$

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ m^2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - m^2 e + \frac{me}{2} \right\} = \frac{11\, e}{24}.$$

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ m^3 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - m^3 e + \frac{m^2 e}{2} - \frac{11}{24} me \right\} = -\frac{21 e}{48}.$$

— Să se studieze variațiunea funcțiunilor:

45. $y = L\sqrt{1+x^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$. (P. S. A. I. 95).

46. $y = x + \frac{3x^2 - x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2} L(1+x^2) - \frac{1}{2} arctg x$. (P.S.A.I.96).

47. $y=1+\mathrm{L}\sqrt{x^2+4}+\frac{3}{8}\mathrm{L}\frac{x-1}{(x+1)^2}-\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}$ (P.S.A.I.97).

48. $y=\frac{x(2x^2+3x+1)}{1+x^2}-3\mathrm{L}(1+x^2)-arctg\,x.$ (» 900).

49. $y=1+x^2-5x-\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\mathrm{L}(x^2+x+1)+$

$\frac{14}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (P. S. A. I. 904).

50. $y=\mathrm{L}\sqrt{1+x^2}+8\,arctg\,x+5\frac{2x+1}{x^2+1}+\mathrm{C},$

C fiind o constantă. Să se determine C astfel ca maximul funcţiunii să fie $5+\mathrm{L}\sqrt{5}$. (P. S. A. I. 98).

51. $y=2(x+2)-3\,\mathrm{L}\frac{x-1}{x+1}$; să se deducă inegalitatea:

$e^x\geqq 3e^2\sqrt{3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}$, $x>1$.

52. Să se dovedească inegalitatea:

$$(m-n+1)^n>m(m-n)^{n-1};\ m>n>1.$$

53. Să se studieze funcţiunea: $y=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ şi să se deducă inegalitatea $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}$ pentru $n\geqq 1$; e fiind baza logaritmilor naturali.

54. Să se găsească maximul sau minimul funcţii reale $z=\frac{a^{xy}}{b^{x^2+y^2}}$, ştiind că $x+y=c$.

— Să se însumeze seriile următoare:

55. $\frac{1}{1}+\frac{2}{1.2}+\frac{3}{1.2.3}+\ldots+\frac{n}{n!}+\ldots$

56. $\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{1.2}+\frac{3^2}{1.2.3}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

57. $\frac{1^3}{1}+\frac{2^3}{1.2}+\frac{3^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{n^3}{n!}+\ldots$

58. $\frac{1^4}{1}+\frac{2^4}{1.2}+\frac{3^4}{1.2.3}+\ldots+\frac{n^4}{n!}+\ldots$

59. $\frac{1^p}{1}+\frac{2^p}{1.2}+\frac{3^p}{1.2.3}+\ldots+\frac{n^p}{n!}+\ldots$ (p întreg pozitiv).

60. $\frac{1^3}{1.2}+\frac{2^3}{1.2.3}+\frac{3^3}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{(n-1)^3}{n!}+\ldots$

61. Să se găsească natura seriei:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\ldots+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}+\ldots$$

62. Să se găsească natura seriei:

$$1!\frac{x}{1}+2!\left(\frac{x}{2}\right)^2+3!\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots+n!\left(\frac{x}{n}\right)^n+\ldots$$

63. Să se determine natura seriei cu termenul general:

$$u_n=\frac{n^n}{(a+1)(2a+1)(3a+1)\ldots(na+1)}$$

a fiind un număr pozitiv.

64. Seria cu termenul general:

$u_n=\left[1+\frac{1}{2n+1}\right]^{2n+1}-\left[1+\frac{1}{2n}\right]^{2n}$, este convergentă.

65. Să se găsească limita expresiunii: $\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^n$, când n tinde către ∞; să se deducă despre seria cu termenul general $u_n=\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^n$ că este divergentă, iar seria cu termenul general $v_n=\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^{n^2}$ este convergentă; $m>0$.

66. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^n$. Care este natura seriei cu termenul general: $w_p=\left[\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^n\right]^p$?

(Concursul G. M. 923)

67. Se consideră seria în care doi termeni consecutivi sunt legați prin relația: $u_n=\frac{a}{n}u_{n-1}+\frac{b}{n!}$; să se arate că seria e convergentă și să i se găsească suma.

Aplicaţie $a=1$, $b=-1$.

68. Să se arate că avem inegalitatea

$$e^x \geqq 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

pentru n impar, oricare ar fi x real, egalitatea neavând loc decât pentru o singură valoare.

69. Să se arate că numărul e nu poate fi rădăcina unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi întregi.

70. Dacă $f(x,y)=x^y.y^x$, să se arate că avem:

$$f(x,y)f''_{xy}(x,y)-f'_x(x,y)f'_y(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)f^2(x,y).$$

71. O persoană înprumută pentru un an un capital a. Ea convine să-şi plătească datoria în n părţi egale cu b şi la intervale $\frac{1}{n}$ dintr'un an. Dobânda pentru 1 leu şi pentru timpul $\frac{1}{n}$ dintr'un an este $\frac{r}{n}$, iar capitalizarea se face la fiecare perioadă de $\frac{1}{n}$ dintr'un an. Se cere: 1) Să se calculeze valoarea lui b; 2) Să se calculeze limita către care tinde $\frac{nb}{a}$, când n creşte nemărginit; 3) Cum variază această limită când r descreşte?; 4) Care este valoarea ei când r tinde către zero?

XVI. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE POLINOAMELOR ŞI ECUAŢIILOR ALGEBRICE

1. Să se găsească un număr pozitiv α, astfel că dacă $|x|<\alpha$[1]), valoarea polinomului $x^5-3x^4+x^3-2x^2+2x$ să rămână cuprinsă între $-0{,}001$ şi $+0{,}001$.

2. Să se găsească un număr pozitiv ε, astfel că dacă modulul lui z rămâne mai mic ca ε, modulul polinomului $5z^4-9z^3+2z^2-5z$ să rămână mai mic ca 0,001.

1) $|x|$ înseamnă valoarea absolută a lui x.

3. Să se găsească un număr pozitiv A, astfel ca pentru $|x|>A$, valoarea absolută a polinomului $x^5+3x^4-5x^3+2x^2-6x+1$ să fie mai mare ca 100000.

4. Unde trebue să se găsească punctul z, astfel ca punctul $u=z^4+2z^3+5z^2-8z-10$ să se găsească în afară de cercul cu centrul în origină și cu raza 100?

5. Fie: $P(z)=7z^5-8z^3+z^2-2z+1$; unde trebue să se găsească punctul h astfel ca punctul $P(z_0+h)-P(z_0)$ să rămână necontenit în interiorul unui cerc având centrul în origină și cu raza 0,0001?

Aplicații: $z_0=1$, $z_0=2+i$.

6. $P(x)$ fiind un polinom întreg, să se arate că dacă $P(x)=k\,P(-x)$, avem $k=\pm 1$.

7. Fie: $x_1, x_2, \ldots x_n$ rădăcinile ecuației:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0;$$

să se arate că avem:

$$(1-p_2+p_4-p_6+\ldots)^2+(p_1-p_3+p_5-\ldots)^2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2).$$

8. Dacă un polinom $f(x)$ verifică identitatea $f(x+a)=f(x)$, $f(x)$ se reduce la o constantă.

9. Dacă o fracțiune rațională $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ verifică identitatea $\frac{f(x+a)}{\varphi(x+a)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, acea fracțiune se reduce la o constantă.

10. Să se pună polinomul

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

sub forma unui determinant, având elementele polinoame cel mult de gradul I în raport cu x.

11. Orice ecuație algebrică ale cărei rădăcini sunt a_1, $a_2, \ldots a_n$, toate diferite, se poate pune sub forma:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n & a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}=0.$$

12. Fie $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Să se arate că determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots. & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots. & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots. & a_n^{n-2} \\ \dfrac{f(x)}{x-a_1} & \dfrac{f(x)}{x-a_2} & \dfrac{f(x)}{x-a_3} & \ldots. & \dfrac{f(x)}{x-a_n} \end{vmatrix}$$

este independent de x.

13. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$ fiind niște polinoame întregi cel mult de gradul $n-1$ și $x_1, x_2,\ldots x_n$ niște numere oarecare, să se arate că determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2)\ldots.\varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x) & \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\ldots.\varphi_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2)\ldots.\varphi_n(x_n) \\ \varphi_{n+1}(x) & \varphi_{n+1}(x_1) & \varphi_{n+1}(x_2)\ldots.\varphi_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}$$

este independent de x?

14. Care sunt condițiunile ca raportul:

$$\frac{A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m}{B_0x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_{n-1}x+B_n},$$

să fie independent de x?

15. Care sunt condițiunile ca raportul $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ să fie independent de x, y, P și Q fiind două polinoame întregi în raport cu x, y. Generalizare.

16. Calculul valoarei numerice a unui polinom de gradul m, pentru o valoare a variabilei care anulează un polinom de gradul n, $(n<m)$, se poate reduce la calculul valoarei numerice a unui polinom de gradul $n-1$. Aplicații: Să se calculeze valorile polinomului $x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x-1$ pentru $x=1+\sqrt{2}$ și pentru $x=1+i$.

17. Fie $P(\sin x, \sin y)$ un polinom omogen de gradul m în

raport cu $\sin x$ și $\sin y$; P'_x și P'_y derivatele parțiale ale lui P în raport cu x și y; să se arate că avem:

$$tg\,x.\ P'_x + tg\,y.\ P'_y = m\,P.$$

Să se găsească relațiuni analoage când se înlocuește sinusul prin cosinus sau tangentă.

18. Să se descompună în factori polinomul:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1;$$

în expresiunea obținută să se facă $x=1$ și să se deducă valoarea produsului: $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

19. Se dă ecuația $x^{2n} + p_n x^n + p_{2n} = 0$; să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt egale cu puterile a 5-a a rădăcinilor ecuației date. Să se găsească condiția ca ecuația formată să aibă rădăcini multiple.

20. Fie x_i una din rădăcinile ecuației $f(x)=0$, să se arate că avem:

$$\Sigma\frac{1}{a+x_i} = -\frac{f'(-a)}{f(-a)}.$$

XVII. TRANSFORMĂRI DE ECUAȚII

— Să se facă să dispară al doilea termen din ecuațiile următoare și să se arate relațiile ce există între rădăcinile ecuațiilor date și transformate.

1. $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0.$
2. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0.$
3. $x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0.$
4. $x^m + 2mx^{m-1} + 2x - 1 = 0.$

— Să se transforme ecuațiile următoare, astfel încât coeficientul primului termen să fie 1 și să se găsească relațiile între rădăcinile ecuațiilor date și transformate.

5. $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0.$
6. $5x^4 - 2x + 3 = 0.$
7. $8x^6 - 6x^4 + 2x - 1 = 0.$
8. $mx^m - 5x^{m-2} + 6x - 9 = 0.$

— Să se transforme ecuaţiile următoare astfel încât coeficientul primului termen să fie 1, iar al celui de al doilea termen zero:

9. $3x^3-2x^2+6x-1=0.$

10. $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$; a_0, a_1, a_2, a_3 fiind numere întregi.

11. $2x^4+x^3-x-1=0.$

12. $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$; a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 fiind numere întregi.

13. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4-2x^3+mx^2+(1-m)x+n=0,$$

ştiind că are o rădăcină egală cu $\frac{1}{2}$, transformând-o în o altă ecuaţie care să admită ca rădăcini, rădăcinile ecuaţiei date micşorate cu $\frac{1}{2}$.

(F. S. B. 909).

— Să se formeze pentru ecuaţiile următoare, ecuaţiile ale căror rădăcini sunt egale: 1) cu inversele şi 2) cu rădăcinile patrate ale rădăcinilor ecuaţiilor date.

14. $x^3-x^2+2x-3=0.$

15. $x^4+px^2+qx+r=0.$

16. $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0.$

— Să se formeze pentru ecuaţiile următoare, ecuaţiile ale căror rădăcini sunt egale cu patratele rădăcinilor ecuaţiilor date.

17. $x^3-6x^2+2x-1=0.$

18. $x^4-2x^2+x-3=0.$

19. $x^3+px+q=0.$

20. $x^5+px^3+qx-r=0.$

21. $A_0x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}+\ldots$
$$\pm A_{m-1}x\mp A_m=0.$$

22. Fie determinantul:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

fie A_{ik} minorii de ordinul al doilea ai acestui determinant și:

$$D=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației caracteristice:
$d(x)\equiv x^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})x^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})x-d=0$
a determinantului d, atunci rădăcinile ecuațiunei caracteristice
$D(x)=0$, relativă la determinantul D
sunt:

$$x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_1.$$

XVIII. RELAȚII INTRE RADACINI ȘI COEFICIENȚI

1. Fiind dată ecuația $x^3+px+q=0$, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt egale cu sumele două câte două ale rădăcinilor acestei ecuații.

2. Aceiași chestiune pentru ecuația $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$.

3. Aceiași chestiune pentru ecuația $x^4+px^2+qx+r=0$.

4. Fiind dată ecuația $x^4-1=0$, fără a o rezolva, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt produsele două câte două ale rădăcinilor acestei ecuații.

5. Fiind dată ecuația $x^3+px+q=0$, ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2, x_3, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt $x_1^2-x_2x_3$, $x_2^2-x_1x_3$, $x_3^2-x_1x_2$. (F. S. B. 95).

6. Ecuația:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

având toate rădăcinile reale, să se discute semnele lor după semnele coeficienților a, b, c.

7. Să se arate că rădăcinile ecuației:

$$x^3+27px^2+qx+9pq-1458p^3=0,$$

sunt în progresie aritmetică și să se rezolve ecuația.

8. Să se rezolve ecuația $x^4-10ax^3+bx+c=0$, știind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică și să se găsească relațiile dintre coeficienți. (P. S. A. P. 902).

9. Să se determine p și q astfel ca ecuația:

$$x^4+px^3+47x^2-72x+q=0$$

să aibă trei rădăcini în progresie aritmetică, iar a patra egală cu suma primelor trei și să se rezolve ecuația în aceste cazuri.

10. Știind că ecuația

$$x^5-5x^4+ax^2+bx+c=0$$

are rădăcinile în progresie aritmetică, să se determine a, b, și să se rezolve ecuația.

11. Să se găsească condițiunile ca rădăcinile ecuației:

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

să fie în progresie aritmetică.

12. Aceiași chestiune pentru ecuația:

$$f(x)=x^5+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5=0.$$

13. Dacă rădăcinile ecuației:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

sunt în progresie aritmetică, prima și ultima rădăcină sunt date de ecuația:

$$(n+1)(nx+p_1)^2=3(n-1)^2p_1^2-6n(n-1)p_2.$$

14. Dacă rădăcinile unei ecuații de grad m fără sot sunt în progresie geometrică, coeficientul lui x^m fiind egal cu 1 rădăcina m a ultimului termen luat cu semn schimbat, este o rădăcină a ecuației.

15. Produsul a două rădăcini ale ecuației:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0,$$

fiind egal cu 1, să se arate că a treia rădăcină este egală cu

$$(a_0-3a_2):(3a_1-a_3).$$

16. Să se rezolve ecuația $x^4+3x^2-2x+p=0$, știind că suma a două rădăcini este egală cu 1.

17. Să se rezolve ecuația $x^4+px^3+2x^2+10x-8=0$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu 4.

18. Se dă ecuația $x^4-6x^2+3x+a=0$, să se determine a și să se rezolve ecuația știind că raportul a două rădăcini este 2. (P. S. A. I. 901).

19. Să se găsească condițiile ca media armonică a două din rădăcinile unei ecuații de gradul al IV-lea, să fie egală cu media armonică a celorlalte două rădăcini.

20. Să se rezolve ecuația $x^3+px^2+qx+r=0$, știind că patratul unei rădăcini este egal cu suma patratelor celorlalte două; să se găsească relația de condiție între coeficienți.

(P. S. A. P. 907).

21. Să se rezolve ecuația $x^3+px+q=0$, știind că cubul unei rădăcini este egal cu suma cuburilor celorlalte două rădăcini și să se găsească relația de condiție între coeficienți. Presupunând p și q reali, să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuației date. (P. S. A. P. 908).

22. Între rădăcinile x_1, x_2, x_3, ale ecuației $x^3+px+q=0$, se dă relația $ax_1+bx_2+cx_3=0$; să se găsească rădăcinile și relația de condiție între coeficienți.

23. Între rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuației:

$$x^4+px^3+qx+r=0,$$

se dau relațiile: $x_1+x_2+x_3=x_4$ și $x_1x_2x_3=x_4^3$; să se găsească relațiile de condiție și să se formeze ecuația care are ca rădăcini pe x_1, x_2, x_3.

24. Să se găsească condiția pe care trebue să o îndeplinească coeficienții unei ecuații de gradul IV:

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

pentruca între două rădăcini ale acestei ecuații să avem relația:

$$\frac{x_1+x_2}{m}+\frac{x_1x_2}{n}=1$$

m, n fiind două numere date.

25. Să se găsească relațiile de condiție între coeficienți, pentru ca rădăcinile ecuației $x^3+px^2+qx+r=0$, să fie: *a)* tangentele, *b)* tangentele jumătăților, *c)* tangentele sferturilor unghiurilor unui triunghiu.

26. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 unghiurile unui patrulater convex. Să se găsească relațiile între coeficienții ecuației:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0,$$

când rădăcinile ei sunt egale cu:

1) $tg\frac{A_1}{2}$, $tg\frac{A_2}{2}$, $tg\frac{A_3}{2}$, $tg\frac{A_4}{2}$ și 2) $sin\frac{A_1}{2}$, $sin\frac{A_2}{2}$, $sin\frac{A_3}{2}$, $sin\frac{A_4}{2}$.

27. Să se rezolve ecuația $x^3+px+q=0$, știind că rădăcinile sale, reprezentate în plan în modul obișnuit, sunt vârfurile unui triunghiu echilateral; în acest caz să se determine p și q care sunt numere reale.

28. x_1, x_2, x_3, x_4 fiind rădăcinile ecuației $x^4+ax+ba=0$, să se găsească limita raportului $\frac{x_1x_2}{x_3x_4}$ când a tinde către zero.

29. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ rădăcinile ecuației:

$$A_0x^n+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_n=0;$$

să se arate că avem:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{x_1}+\frac{x_i}{x_2}+\ldots+\frac{x_i}{x_i}+\ldots+\frac{x_i}{x_n}\right)=0.$$

Ce devine această relație în cazul când $A_1\neq 0$? Să se generalizeze.

30. Dacă ecuația $x^n-A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-\ldots\pm A_n=0$, are toate rădăcinile sale reale și pozitive, toți coeficienții A sunt pozitivi.

31. Dacă ecuația $x^n-A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-\ldots\pm A_n=0$, are toate rădăcinile reale, avem neapărat:

$$A_1^2-2A_2>0,\quad A_2^2-2A_1A_3+2A_4>0,$$
$$A_3^2+2A_1A_5-2A_2A_4-2A_6>0,$$
$$A_4^2+2A_8+2A_2A_6-2A_1A_7-2A_3A_5>0,$$
$$A_5^2+2A_1A_9+2A_3A_7-2A_2A_8-2A_4A_6-2A_{10}>0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

32. Dacă $x_1, x_2, \ldots x_m$ sunt m din rădăcinile ecuației:

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,\ n>m,$$

celelalte $n-m$ rădăcini sunt date de ecuația:

$$x^{n-m}-(A_1+\Sigma x_1)x^{n-m-1}+(A_2+A_1\Sigma x_1+\Sigma x_1x_2)x^{n-m-2}$$
$$-(A_3-A_2\Sigma x_1+A_1\Sigma x_1x_2+\Sigma x_1x_2x_3)x^{n-m-3}+\ldots=0,$$

simbolul Σ referindu-se la cele m cantități $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Ladu Alexandru Student anul I Matematică

33. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$a_1^n+a_1^{n-1}x_1+a_1^{n-2}x_2+\ldots+a_1x_{n-1}+x_n=0,$$
$$a_2^n+a_2^{n-1}x_1+a_2^{n-2}x_2+\ldots+a_2x_{n-1}+x_n=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n^n+a_n^{n-1}x_1+a_n^{n-2}x_2+\ldots+a_nx_{n-1}+x_n=0.$$

XIX. FUNCȚIUNI SIMETRICE

1. Să se calculeze suma puterilor a 6-a a rădăcinilor ecuației $x^4+px^2+x+1=0$ și să se determine p astfel ca această sumă să fie egală cu 7. (F. S. B. 900).

2. Dacă α, β, γ sunt rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$, să se arate că:

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

3. Cu ajutorul relațiunilor între rădăcini și coeficienții unei ecuații de gradul al III-lea să se arate că având:

$$x+y+z=0,$$

avem și

$$x^7+y^7+z^7=\frac{7}{12}(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)^2.$$

4. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3-5x+1=0$, să se calculeze valoarea funcțiunii simetrice $\Sigma x_1^3x_2^2$. (F. S. I. 99).

5. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$, să se calculeze valoarea funcțiunii simetrice $\Sigma\frac{x_1}{x_2^2}$. (F. S. I. 908).

— x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$, să se calculeze valorile funcțiunilor simetrice următoare:

6. $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_1+x_3+x_1x_3)(x_2+x_3+x_2x_3)$.

7. $\Sigma(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)$.

8. $\Sigma\frac{x_1^2}{x_2x_3}\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)^2\left(1+\frac{x_3}{x_1}\right)^2$.

9. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0,$$

să se calculeze valoarea funcţiunii simetrice:

$$\Sigma(x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

10. Să se calculeze pentru ecuaţia $x^3+px+q=0$ valoarea funcţiunii simetrice:

$$(x_1^2-x_2x_3)^n+(x_2^2-x_3x_1)^n+(x_3^2-x_1x_2)^n.$$

11. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0,$$

să se calculeze valoarea funcţiunii simetrice:

$$(x_1^2-x_2x_3)^3+(x_2^2-x_3x_1)^3+(x_3^2-x_1x_2)^3.$$

12. Chestiune analoagă pentru funcţiunea simetrică:

$$x_1^2(x_2-x_3)^2+x_2^2(x_3-x_1)^2+x_3^2(x_1-x_2)^2.$$

13. Aceiaşi chestiune pentru funcţiunea simetrică:

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2(x_2-x_1)^2+(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2.$$

14. Să se calculeze pentru ecuaţia $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$, valoarea expresiunii $u_1=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$.

15. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0,$$

să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:

$$\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2};$$

să se arate că ecuaţia formată se poate reduce.

16. x_1, x_2, x_3, x_4 fiind rădăcinile ecuaţiei:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0,$$

să se calculeze valorile expresiunilor:

$$P=(x_1+x_2+x_3-x_4)(x_2+x_3+x_4-x_1)(x_2+x_4+x_1-x_2)(x_4+x_1+x_2-x_3),$$

$$Q=(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2)(x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1^2)(x_3^2+x_4^2+x_1^2-x_2^2)(x_4^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2).$$

(F. S. B. 99).

17. Fiind dată ecuaţia $x^4+p_2x^2+p_3x+p_4=0$, ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2, x_3, x_4, să se formeze ecuaţia ale cărei

rădăcini sunt valorile pe cari le ia expresiunea:

$$x_1+x_2-x_3-x_4,$$

când se permută indicii în toate modurile posibile.

18. Fiind dată ecuația $f(x)=x^3+px+q=0$, să se calculeze valoarea funcțiunii simetrice:

$$(\alpha-x_1)^2(\alpha-x_2)^2+(\alpha-x_2)^2(\alpha-x_3)^2+(\alpha-x_3)^2(\alpha-x_1)^2+$$
$$+(\beta-x_1)^2(\beta-x_2)^2+(\beta-x_2)^2(\beta-x_3)^2+(\beta-x_3)^2(\beta-x_1)^2,$$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $f(x)=0$, iar α și β ale ecuației $f'(x)=0$.

19. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$.

(B. F. B. 902).

20. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 fiind rădăcinile ecuației $x^4+p_3x+p_4=0$.

(B. F. B. 904).

21. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile ecuației:

$$x^n+p_{n-1}x+p_n=0;$$

să se calculeze, în funcțiune de p_{n-1} și p_n, valoarea determinantului:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

22. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației:

$$x^4+p_2x^2+p_3x+p_4=0,$$

$$f=x_1x_2+x_3x_4. \qquad \varphi=x_1+x_2-x_3-x_4;$$

să se arate că avem $f=A\varphi^2+B\varphi+C$; A, B, C fiind funcţiuni raţionale de coeficienţii ecuaţiei date, ale căror valori se cere să se determine.

23. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$, să se calculeze valorile funcţiunilor simetrice:

$$X_1=\frac{1}{x_1-a}+\frac{1}{x_2-a}+\ldots+\frac{1}{x_n-a}$$

$$X_2=\frac{1}{(x_1-a)^2}+\frac{1}{(x_2-a)^2}+\ldots+\frac{1}{(x_n-a)^2}$$

$$X_3=\frac{1}{(x_1-a)^3}+\frac{1}{(x_2-a)^3}+\ldots+\frac{1}{(x_n-a)^3}$$

. . . . . .

24. Fie $a_i (i=1, 2, \ldots, n)$ rădăcinile ecuaţiei:

$$f(x)=x^n+p_1 x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

$\alpha_j (j=1, 2, \ldots)$ rădăcinile ecuaţiei $f^{(k)}(x)=0$, $f^{(k)}$ reprezentând derivata de ordinul k a lui f, rădăcinile α fiind diferite de rădăcinile a. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$\sum_i f^{(k)}(a_i) \sum \frac{1}{a_i-\alpha_j}.$$

25. Să se calculeze suma puterilor asemenea a rădăcinilor ecuaţiei $x^n-x-1=0$.

26. x_1 şi x_2 fiind două rădăcini ale ecuaţiunii $x^n-1=0$, să se calculeze valoarea funcţiunii simetrice:

$$\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{3}.$$

(B. F. B. 903).

27. x_1 şi x_2 fiind două rădăcini ale ecuaţiei $x^n-1=0$, să se calculeze valoarea funcţiunii simetrice:

$$\Sigma (x_1+x_2)^m.$$

28. Aceiaşi chestiune pentru funcţiunea simetrică:

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, fiind numere întregi positive şi diferite între ele.

29. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ fiind rădăcinile ecuaţiei

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

iar α un număr întreg pozitiv mai mic sau egal cu n, să se arate că S_α este o funcție de p_1, p_2, p_n în care suma coeficienților este -1.

30. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile unei ecuații de gradul n, S_p suma puterilor asemenea de gradul p, să se arate că avem:
$\Sigma(x_1-x_2)^{2p}=2S_0S_{2p}-2C_{2p}^1 S_1S_{2p-1}+2C_{2p}^2 S_2S_{2p-2}-\ldots\pm C_{2p}^p S_p^2$.

31. Să se arate că pentru $m\geqslant n$ avem:

$$\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & S_{m-2} & \ldots & S_{m-n} \\ S_{m+1} & S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m+n} & S_{m+n-1} & S_{m+n-2} & \ldots & S_m \end{vmatrix}$$

S_p reprezentând suma puterilor asemenea de gradul p a rădăcinilor ecuației:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots p_{n-1}x+p_n=0.$$

32. Avem de asemenea:

$$\begin{vmatrix} S_m & S_{m-2} & S_{m-4} & \ldots & S_{m-2n} \\ S_{m+1} & S_{m-1} & S_{m-3} & \ldots & S_{m-2n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m+n} & S_{m+n-2} & S_{m+n-4} & \ldots & S_{m-n} \end{vmatrix}=0;$$

chestiunea putându-se încă generaliza.

33. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației:

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta a} & \frac{\delta x_2}{\delta a} & \frac{\delta x_3}{\delta a} \\ \frac{\delta x_1}{\delta b} & \frac{\delta x_2}{\delta b} & \frac{\delta x_3}{\delta b} \\ \frac{\delta x_1}{\delta c} & \frac{\delta x_2}{\delta c} & \frac{\delta x_3}{\delta c} \end{vmatrix}$$

34. Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\Sigma x_k^2-\Sigma x_k x_l$. Se cere să se determine un număr întreg n așa încât să avem: $f(x_1+x_2+\ldots-x_n, x_1+\ldots+x_{n-2}-x_{n-1}+x_n, \ldots, -x_1+x_2+\ldots+x_n)=nf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

35. Dacă x, y, z sunt trei numere diferite de zero, astfel că $\Sigma x=0$ și $\Sigma xy\neq 0$, să se arate că avem relația:

$$2\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^4+y^4+z^4}{4}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\left(\frac{x^7+y^7+z^7}{7}\right)^2.$$

36. Să se calculeze pentru ecuațiunea:

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0,$$

valoarea funcțiunii simetrice

$$\Sigma\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\right)^2.$$

37. Să se calculeze pentru ecuația:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0$$

valoarea funcțiunii simetrice:

$$\Sigma\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\right)^2.$$

(F. S. B. 1922).

XX. DIVIZORI COMUNI

1. Să se găsească condițiunea pentru ca polinoamele:

$$a_0x^2+a_1x+a_2 \quad \text{și} \quad b_0x^2+b_1x+b_2$$

să aibă un divizor comun de gradul întâiu.

2. Aceiași chestiune pentru polinoamele:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \quad \text{și} \quad 3a_0x^2+2a_1x+a_2.$$

3. Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor x^m-1 și x^n-1.

4. Să se găsească condiția pentru ca polinoamele $x^{11}-a$ și x^4-b să admită divizor comun; să se generalizeze pentru polinoamele x^m-a și x^n-b.

5. Să se găsească rădăcinile comune ecuațiilor:

$$x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0,$$
$$6x^5-35x^4+60x^3-80x+48=0.$$

6. Să se determine y și z astfel ca polinoamele:

$$x^4-2x^3+3x^2+2x+y \quad \text{și} \quad x^4-3x^3+4x^2+3x+z,$$

să aibă un divizor comun de gradul al doilea.

7. Să se rezolve ecuațiile:

$$x^3-7x^2+36=0 \quad \text{și} \quad x^3-3x^2-10x+24=0,$$

știind că prima are o rădăcină care este egală și de semn contrar cu una din rădăcinile celei de a doua.

8. Să se rezolve aceleași ecuații, știind că cea dintâi are o rădăcină care este egală cu de trei ori una din rădăcinile celei de a doua.

9. Se dă ecuația $x^4-6x^2+3x+a=0$, să se determine a și să se rezolve, știind că raportul între două rădăcini este 2.

(P. S. A. I. 901).

10. Dacă ecuațiile:

$$x^4+px^2+qx+1=0 \quad \text{și} \quad x^4+p'x^2+q'x+1=0,$$

au o rădăcină dublă comună, ele au toate rădăcinile comune.

(Concursul G. M. 907).

11. Se presupune că ecuațiile:

$$x^3-3\alpha x+2\beta=0 \quad \text{și} \quad x^4+ax^2+bx+c=0,$$

au o rădăcină dublă comună; se cere: *a)* să se rezolve ecuațiile; *b)* să se găsească relațiile de condiție.

(P. S. A. I. 98).

12. Fie $P_n=x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1$, să se arate că polinoamele P_1, P_2,... P_n,... sunt prime între ele.

13. Polinoamele x^m+x^n-1 și x^2+x+1 sunt prime între ele oricare ar fi numerele întregi m și n.

14. p și q fiind primi între ei, să se arate că avem:

$$\frac{x^{(p-1)q}+x^{(p-2)q}+\ldots+x^{2q}+x^q+1}{x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^2+x+1}=$$

$$\frac{x^{(q-1)p}+x^{(q-2)p}+\ldots+x^p+1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1}=X,$$

X fiind un polinom întreg.

15. Dacă un polinom cu coeficienți raționali se anulează pentru $x=\sqrt[3]{a}$, a fiind un număr rațional iar $\sqrt[3]{a}$ un număr irațional, polinomul este divizibil cu x^3-a.

16. Dacă un polinom $\varphi(x)$ cu coeficienți raționali, nu se

poate descompune într'un produs de alte două polinoame cu coeficienţi raţionali, şi dacă o ecuaţie algebrică $f(x)=0$ are o rădăcină comună cu ecuaţia $\varphi(x)=0$, $f(x)$ este divizibil cu $\varphi(x)$.

17. Dacă un polinom cu coeficienţi raţionali se anulează pentru $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, el se va anula şi pentru $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

18. Să se formeze ecuaţia cu coeficienţi raţionali şi reali, care admite rădăcina $\sqrt{2}+\sqrt{3}+i$.

19. Să se găsească forma generală a unui polinom divizibil cu derivata lui.

20. Să se găsească forma generală a polinoamelor de gradul n, pentru care *c. m. m. d. c.* între acest polinom şi derivata lui este de gradul $n-2$.

21. Să se găsească condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca polinoamele ax^5+bx+c şi cx^5+bx^4+a, să aibă un divizor comun de gradul al doilea. Condiţiunea este unică; să se explice pentru ce.

22. Să se arate că dacă $f(x)$ este un polinom întreg de gradul m, o singură condiţie este suficientă pentru ca polinoamele $f(x)$ şi $(ax-b)^m f\left(\frac{bx-a}{ax-b}\right)$ să aibă un divizor comun de gradul al doilea.

23. Dacă F şi f sunt două polinoame întregi de gradele m şi n, fără divizor comun, există întotdeauna alte două polinoame F_1 şi f_1, cel mult de gradele $m-1$ şi $n-1$, astfel încât $Ff_1+ff_1=1$.

24. Fie:

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_px^{n-p}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$

să se găsească forma lui $f(x)$ astfel ca derivatele de ordinul $n-p$, $n-p+1$, $n-p+2$, ..., $n-1$ să aibă o rădăcină comună.

25. Se consideră polinoamele:

$$P(x,t)=P_1(x),\ P'_x(x,t)=P_2(x) \text{ şi } P'_t(x,t)=P_3(x);$$

să se arate că dacă coeficienții polinomului P_1 sunt polinoame *de grade neegale în t*, atunci *c. m. m. d. c.* al lui P_1 și P_2 nu diferă de *c. m. m. d. c.* al lui P_1 și P_3 decât printr'un factor independent de x. Se presupune că P_1 nu se anulează pentru $x=0$.

XXI. RĂDĂCINI MULTIPLE

1. Ecuația: $x^3-x-\frac{2}{3\sqrt{3}}=0$, are rădăcini multiple?

(F. S. I. 1904).

2. Să se determine a astfel ca ecuația:

$$x^4-6x^3+10x^2-8a=0,$$

să aibă o rădăcină dublă și în acest caz să se rezolve.

3. Să se determine a și b astfel ca ecuația:

$$x^4-4ax^3+6bx^2-8x+1=0,$$

să aibă două rădăcini duble și în acest caz să se rezolve.

4. Să se rezolve ecuațiunea $P_4(x)=x^4-2x^3-41x^2+42x+360=0$ știind că $P_4(x)$ este de forma: $Q_2[R_2(x)]$, unde $Q_2(x)$ și $R_2(x)$ sunt polinoame de gradul al doilea.

Ce relație trebue să existe între coeficienții unui polinom de gradul al 4-lea $P_4(x)$, pentru ca să putem aplica această metodă în rezolvarea ecuației $P_4(x)=0$?

Să se arate că $P_4(x)=0$ având o singură rădăcină dublă, aceasta este media aritmetică a celorlalte două.

5. Să se găsească condițiile ca ecuația:

$$x^5-5a^2x^3+5bx+c=0,$$

să aibă două rădăcini duble; să se exprime b și c în funcțiune de a și să se rezolve ecuația. (P. S. A. I. 99).

6. Să se găsească condiția ca ecuația

$$4x^9-9ax^4+1=0,$$

să aibă o rădăcină dublă.

7. Aceiași chestiune pentru ecuația

$$x^n-px^m+q=0, \quad n>m.$$

8. Polinomul

$$(x-1)^2 x^{n-2} - (x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) + n - 1,$$

este divizibil cu $x-1$, dar nu este divizibil cu $(x-1)^2$.

9. Polinomul $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ este divizibil cu:

$$(x^2 + x + 1)^2.$$

10. Să se găsească condiţiile ca ecuaţia:

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx + c = 0,$$

să aibe o rădăcină triplă şi în acest caz să se rezolve.

(P. S. A. I. 96).

11. Să se afle condiţiile ca ecuaţia:

$$(a+b-ab)x^4 + (b-a+ab)x^3 + (a-b+ab)x^2 + a + b + ab = 0$$

să admită o rădăcină triplă şi în acest caz să se rezolve.

12. Să se găsească condiţiile ca ecuaţia:

$$x^5 + px^3 + qx^2 + r = 0,$$

să aibă o rădăcină triplă.

13. Să se găsească condiţiile cu ecuaţia:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx + e = 0,$$

să aibă o rădăcină multiplă de ordinul al patrulea diferită de zero. Să se rezolve în acest caz. (P. S. A. P. 903).

— Să se descompună în factori polinoamele următoare, ştiind că ele au rădăcini multiple:

14. $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3.$

15. $x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 14x^3 + 11x^2 - 28x + 12.$

16. $x^6 - (2a+3b-2)x^5 + (a^2 + 6ab + 3b^2 - 4a - 6b)x^4$
$- (3a^2b + 6ab^2 + b^3 - 2a^2 - 12ab - 6b^2)x^3$
$+ (3a^2b^2 + 2ab^3 - 2b^3 - 12ab^2 - 6a^2b)x^2$
$- (a^2b^3 - 6a^2b^2 - 4ab^3)x - 2a^2b^3 = 0.$

17. Să se formeze ecuaţia care dă baza unui triunghiu isoscel de suprafaţă a^2, înscris într'un cerc de rază r. Să se rezolve ecuaţia în cazul când ea are o singură rădăcină reală.

(P. S. A. I. 900).

18. Fie $f(x)$ un polinom întreg în x și a un număr arbitrar. Să se demonstreze că polinomul întreg în x, $F(x)$, definit de relația:

$$F(x)=\tfrac{1}{2}(x-a)[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

este un cub dacă $f(x)$ este de gradul al treilea și identic nul dacă $f(x)$ este de gradul al doilea.

19. Dacă a este rădăcină multiplă de ordinul n a ecuației $f(x)=0$, ea va fi rădăcină multiplă de ordinul $n-1$ a ecuației obținută multiplicând termenii ecuației propuse, presupusă complectă, cu termenii succesivi ai unei progresii aritmetice.

20. U și V fiind două polinoame întregi în x și λ o constantă, dacă ecuația $U-\lambda V=0$ are o rădăcină dublă, acea rădăcină verifică și ecuația $UV'-VU'=0$.

21. A și B fiind două polinoame întregi prime între ele, A' și B' derivatele lor, dacă ecuația $A^2+B^2=0$ are o rădăcină dublă, acea rădăcină aparține și ecuației $A'^2+B'^2=0$.

22. Dacă ecuația $f^2-pf\varphi+q\varphi^2=0$ admite o rădăcină dublă, acea rădăcină va verifica și ecuația $f'^2-pf'\varphi'+q\varphi'^2=0$, f și φ reprezintă două polinoame întregi prime între ele, f' și φ' derivatele lor.

23. $F(f,\varphi)$ reprezentând un polinom omogen în raport cu, f și φ, f și φ fiind două polinoame întregi prime între ele, dacă ecuația $F(f,\varphi)=0$ are o rădăcină multiplă de ordin α acea rădăcină va fi multiplă de ordinul $\alpha-1$ pentru ecuația $F(f',\varphi')=0$.

24. Fie ecuațiile:

$$A(x)\equiv x^n+A_p x^{n-p}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$
$$B(x)\equiv x^n+B_p x^{n-p}+\ldots+B_{n-1}x+B_n=0,$$

care au o rădăcină comună de ordinul $(n-p)$ de multiplicitate. Să se arate că dacă există un număr pozitiv k astfel ca $A_{p+k}=B_{p+k}$, cele două ecuații au toate rădăcinile comune.

XXII. PROPRIETĂŢI RELATIVE LA RĂDĂCINILE REALE ALE ECUAŢIILOR ALGEBRICE

1. Ecuaţia

$$(\lambda^2-1)x^2-(2\alpha+\lambda-1)x-\alpha(\alpha-1)=0$$

în care $\lambda\geqslant 0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, are totdeauna o rădăcină x', $0\leqslant x'<1$.

2. Să se arate că ecuaţiunea

$$3x^2+[3\lambda-2(a+1)]x-(a+1)\lambda+a+\lambda^2=0$$

are, dacă a şi λ satisfac la condiţiile

$$0\leqslant\lambda\leqslant 1;\ a\leqq 0 \text{ sau } a\geqq 1,$$

o rădăcină cuprinsă între zero şi unu.

3. Să se găsească maximul şi minimul funcţiunei: $y=x(p-x^2)$ şi să se deducă condiţia ca ecuaţia

$$x^3-px+q=0,$$

să aibă cele trei rădăcini ale sale reale.

4. Să se arate direct, fără a rezolva, că ecuaţia:

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}-c=0,\ (p\neq q),$$

are rădăcinile sale reale.

5. Chestiune analoagă pentru ecuaţia:

$$\frac{a_1^2}{x-p_1}+\frac{a_2^2}{x-p_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x-p_n}-b=0,$$

$p_1, p_2,\ldots p_n$ fiind numere reale distincte; $a_1, a_2,\ldots, a_n$ şi b numerele reale.

6. a şi b fiind pozitivi, să se arate că ecuaţia:

$$x^3+(a+b)x^2-(a^2+ab+b^2)x-(a+b)(a^2+b^2)=0,$$

are toate rădăcinile sale reale.

7. Ecuaţia.

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-A(x-a)-B(x-b)-C(x-c)=0,$$

în care A, B, C sunt pozitivi, iar a, b, c numere reale oarecari, are toate rădăcinile sale reale.

8. Să se arate că ecuaţia:

$$(l^2-x^2)(x-x_0+h)-(l^2-x_0^2)h\cos^2\alpha=0,$$

are toate rădăcinile sale reale, $h>0$.

9. Fie b un număr pozitiv, a_1, a_2, a_3,... a_{2n}, $2n$ numere reale descrescânde; să se arate că ecuația:
$(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2n-1})+b(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2n})=0$,
are toate rădăcinile sale reale.

(F. S. I. 97).

10. Se dă $\cos\alpha=a$, să se formeze ecuația care dă pe $\cos\frac{2\alpha}{3}=x$; fie $f(x)$ primul membru al ecuației formate, să se studieze variațiunea funcțiunei $y=f(x)$ și să se deducă despre ecuația formată că are toate rădăcinile sale reale și cuprinse între -1 și $+1$; să se determine semnul rădăcinilor; să se găsească condițiunea ca ecuația să aibă două rădăcini egale.

11. Aceiași chestiune punând: $tg\alpha=a$, $tg\frac{\alpha}{3}=x$; rădăcinile sunt cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$.

12. Aceiași chestiune punând: $\cos\alpha=a$, $\cos\frac{\alpha}{5}=x$; rădăcinile sunt cuprinse între -1 și $+1$.

13. O ecuație algebrică cu coeficienți raționali care admite rădăcina $a+\sqrt{b}$, a și b fiind raționali, iar $\sqrt{b}$ irațional, admite și rădăcina $a-\sqrt{b}$.

14. Să se rezolve ecuația: $x^4-7x^2+2x+2=0$, știind că una din rădăcini este $1+\sqrt{2}$.

15. Să se rezolve ecuația: $x^4+x^3-25x^2+41x+66=0$, știind că una din rădăcini este $3+i\sqrt{2}$.

16. Să se rezolve ecuația:

$$x^6-x^5-8x^4+2x^3+21x^2-9x-54=0,$$

știind că una din rădăcini este $\sqrt{2}+i$.

17. Să se rezolve ecuația:

$$x^6-3x^4+308x^3-397x^2+484x+615=0$$

știind că are o rădăcină de forma $a+ib\sqrt{2}$, unde a și b sunt numere întregi.

18. Să se formeze ecuația cu coeficienți raționali, de gradul cel mai mic, care admite rădăcina $1+\sqrt{2}+i$.

19. Să se determine numerele raţionale λ şi μ ştiind că ecuaţia $x^4-4x^3-4x^2+4\lambda x+4\mu=0$ admite rădăcina dublă $\alpha+\beta\sqrt{5}$, α şi β fiind raţionali. (F. S. B. 909).

20. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^3-(a^2+a+1)x^2+(a^3-1)x+a^2+a+1=0$$

când a variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

21. Dacă ecuaţia $f(x)=0$ are toate rădăcinile sale reale, ecuaţia $\varphi(x)\equiv f''(x)f(x)-f'^2(x)=0$ are toate rădăcinile sale imaginare.

22. O ecuaţie algebrică cu coeficienţi complexi primi între ei, nu poate avea toate rădăcinile sale reale.

XXIII. TEOREMA LUI DESCARTES

Să se discute cu ajutorul teoremei lui *Descartes* ecuaţiile următoare:

1. $x^3-x+a=0.$
2. $x^3+px+q=0.$
3. $x^4+px+q=0.$
4. $x^5+ax^2+x+b=0.$
5. $x^m+px^n+q=0.$
6. Fie:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{p-1}x^{m-p+1}+A_{p+1}x^{m-p-1}+\ldots+A_m=0;$$

să se arate că dacă $A_{p-1}A_{p+1}>0$, ecuaţia are rădăcini imaginare.

7. Ecuaţia:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{p-1}x^{m-p+1}+A_{p+2}x^{m-p-2}+\ldots+A_m=0,$$

are rădăcini imaginare.

8. Dacă numărul variaţiilor produsului $(x-a)f(x)$, $a>0$, întrece cu mai mult de o unitate numărul variaţiilor lui $f(x)$, ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcini imaginare.

9. Dacă produsul $(x+a)f(x)$, $a>0$, are n variaţii mai

puțin decât $f(x)$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin n sau $n+1$ rădăcini imaginare.

10. Dacă coeficienții a trei termeni consecutivi dintr'o ecuație algebrică sunt în progresie geometrică, acea ecuație are rădăcini imaginare.

11. Dacă coeficienții a patru termeni consecutivi dintr'o ecuație algebrică sunt în progresie aritmetică, acea ecuație are rădăcini imaginare.

12. Să se arate că dacă ecuația algebrică $f(x)=0$ are toate rădăcinile sale reale, ecuația:

$$\varphi(x)=f(x)-xf'(x)+x^2f''(x)=0,$$

are cel puțin două rădăcini imaginare.

13. Să se aplice teorema lui *Descartes* la căutarea naturii rădăcinilor unei ecuații algebrice, cuprinse într'un interval oarecare (a, b).

14. Fie:

$$f(S)=\begin{vmatrix} A-S & B' & B'' \\ B' & A'-S & B \\ B'' & B & A''-S \end{vmatrix};$$

să se formeze produsul $f(S)f(-S)$ și să se deducă despre ecuația $f(S)=0$ că are toate rădăcinile sale reale.

15. Să se găsească raza unui cerc, știind că trei coarde de lungimi date a, b, c formează, împreună cu un diametru, un patrulater inscriptibil; să se examineze cazul când $a=b=c$ și în acest caz să se construiască patrulaterul.

(F. S. I. 902).

16. Să se înscrie într'o sferă de rază r un cilindru, astfel că raportul dintre volumul cuprins între suprafața laterală a cilindrului și acea a sferei, și volumul cuprins între bazele cilindrului și sferă, să fie egal cu o cantitate dată m.

XXIV. ECUAȚII BINOAME

1. Să se rezolve ecuațiile: $x^6-1=0$, $x^5-1=0$.

2. Rezolvarea ecuației $x^{11}-1=0$ depinde de rezolvarea unei ecuațiuni de gradul al doilea și a unei ecuațiuni de gradul al cincilea; să se formeze aceste ecuațiuni.

3. Să se arate că rezolvarea ecuației $x^{18}-1=0$, se poate reduce la rezolvarea a două ecuații de gradul al doilea și o ecuație de gradul al treilea. Să se formeze aceste ecuații.

4. Rezolvarea ecuației $x^{19}-1=0$ depinde de rezolvări de ecuații de gradul al doilea și al treilea; să se formeze aceste ecuații. (F. S. B. 906).

— Să se rezolve ecuațiile:

5. $x^{40}-1=0$ (F. S. B. 904).

6. $x^{60}-1=0$.

7. $(1+\sqrt{1-x^2})^m+(1-\sqrt{1-x^2})^m=0$.

8. $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^m=a+bi$, x real; să se găsească condițiile de posibilitate.

9. Din rezolvarea algebrică și trigonometrică a ecuației $x^5-1=0$, să se deducă liniile trigonometrice ale arcelor $\frac{2\pi}{5}$ și $\frac{4\pi}{5}$. Chestiune analoagă pentru ecuația:

$$x^8-1=0.$$

10. α fiind o rădăcină imaginară a ecuației

$$\alpha^5-1=0,$$

să se calculeze produsul:

$$P=(x+y+z+t+s)(x+\alpha y+\alpha^2 z+\alpha^3 t+\alpha^4 s)\times$$
$$(x+\alpha^2 y+\alpha^4 z+\alpha t+\alpha^3 s)(x+\alpha^3 y+\alpha z+\alpha^4 t+\alpha^2 s)\times$$
$$(x+\alpha^4 y+\alpha^3 z+\alpha^2 t+\alpha s).$$

11. α fiind o rădăcină complexă a ecuației $x^7-1=0$, să se arate că toate rădăcinile complexe ale acestei ecuații pot fi reprezentate prin unul din șirurile:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6;$$
$$\alpha^3,\ \alpha^{3^2},\ \alpha^{3^3},\ \alpha^{3^4},\ \alpha^{3^5},\ \alpha^{3^6};$$
$$\alpha^5,\ \alpha^{5^2},\ \alpha^{5^3},\ \alpha^{5^4},\ \alpha^{5^5},\ \alpha^{5^6}.$$

12. Fie $\alpha_k=cos\frac{2k\pi}{15}+isin\frac{2k\pi}{15}$ una din rădăcinile ecuației $x^{15}-1=0$; să se determine k astfel ca toate rădăcinile ecuației să fie:

$$\alpha_k,\ \alpha_k^2,\ \alpha_k^3,\ldots\ \alpha_k^{15}.$$

13. Să se rezolve ecuația:

$$x^n - nax^{n-1} \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 x^{n-3} - \ldots = 0.$$

14. Să se rezolve ecuația:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} & x^n \\ x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n & 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 & \ldots & 1 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & 1 & x & \ldots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

15. Fie $x^{2m+1} - 1 = 0$, o ecuație binoamă; scoțând rădăcina $x=1$ și punând $x + \frac{1}{x} = y$, obținem o ecuație algebrică $F(y)=0$; să se arate că dacă $2m+1$ este un număr prim n, rădăcinile ecuației pot fi reprezentate prin numerele:

$$2\cos\frac{2\pi}{n},\ 2\cos\frac{2\lambda\pi}{n},\ 2\cos\frac{2\lambda^2\pi}{n},\ \ldots,\ 2\cos\frac{2\lambda^{m-1}\pi}{n},$$

λ fiind un număr întreg, astfel că puterile $\lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^{m-1}$ divizate cu n dau resturi diferite.

16. Să se formeze ecuația $F(y)=0$ din problema precedentă când gradul ecuației binoame este un număr întreg pozitiv oarecare.

17. α reprezentând o rădăcină primitivă a ecuației $x^n - 1 = 0$, punând:

$$\varphi(x) = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots + p_n x^n$$

și

$$\psi(x) = q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \ldots + q_n x^n,$$

avem:

$$\varphi(\alpha)\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \varphi(\alpha^2)\psi\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + \ldots + \varphi(\alpha^n)\psi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = n(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n).$$

18. Dacă o ecuație cu coeficienți întregi are coeficientul primului termen egal cu 1 și dacă modulele tuturor rădăcinilor sunt egale cu unitatea, rădăcinile ei se reduc la rădăcinile unității și ecuația e de forma $x^n - 1 = 0$.

19. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ fiind rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$, să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

XXV. TEOREMA LUI ROLLE

Să se discute ecuațiile:

1. $x^3 - 5x^2 + 1 = 0.$
2. $x^3 - 5x^2 + 3x + \alpha = 0.$
3. $2x^3 - x^2 - 2x + \alpha = 0.$
4. $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + \alpha = 0.$
5. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + \alpha = 0.$
6. $3x^5 - 25x^3 + 60x + \alpha = 0.$
7. $6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + \alpha = 0.$
8. $5x^6 - 18x^5 + 15x^4 + \alpha = 0.$
9. $(x+1)^7 - x^7 + \alpha = 0.$
10. $x^4 - 6x^2 + \alpha x + 24 = 0.$
11. $x^4 - 2x^3 + \alpha(2x - 1) = 0.$
12. $x^4 + px^2 + q = 0.$
13. $x^4 + 2px^3 + 2rx + pr = 0.$
14. $\alpha x^5 + 60x^4 - 25x^2 + 3 = 0.$
15. $x^3 + px^2 + q = 0.$ (F. S. I. 902).
16. $x^9 + px + q = 0.$
17. $x^m + px + q = 0$; p și q oarecari.
18. $x^5 + px^3 + q = 0$; să se găsească condițiunile necesare și suficiente ca ecuația să aibă cel mai mare număr de rădăcini reale. (F. S. I. 99).

19. Să se discute ecuația $x^4+4ax^3+2bx^2+b^2=0$. Presupunând că a și b sunt coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor ecuației.

20. Chestiune analoagă pentru ecuația:

$$x^4-4ax^3+4a^2x^2+b=0.$$

(F. S. B. 99).

21. Se dă ecuația $6x^4-8ax^3-3a^2x^2+6a^3x-a^2b=0$, și se cere: *a)* să se separe rădăcinile ecuației; *b)* să se rezolve în cazul când avem rădăcini multiple; *c)* presupunând că a și b sunt coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor.

(F. S. B. 902).

22. Să se discute ecuația $16x^5-20p^2x^3+5p^4x-q^5=0$; presupunând că p și q sunt coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor.

(Concursul G. M. 905).

23. Aceiași chestiune pentru ecuația:

$$3x^4+4px^3-12p^2x^2+p^2(q-p^2)=0.$$

(F. S. B. 904).

24. Să se cerceteze natura rădăcinilor ecuației:

$$x^5-5px^3+5p^2x+2q=0.$$

25. Fiind dat un cerc și o tangentă fixă, se duce la o distanță x o coardă paralelă cu tangenta, iar din extremitățile ei se coboară perpendiculare pe tangentă; să se determine x astfel ca suprafața dreptunghiului format să fie egală cu $2k^2$.

26. Să se găsească condiția de maxim sau minim unic al funcțiunei $y=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.

27. Să se arate că dacă derivatele de ordinul $n-p$, $n-p+1,\ldots n-1$ ale unei ecuații algebrice de gradul n, $f(x)=0$, au o rădăcină comună, ecuația are p sau $p-1$ rădăcini imaginare.

28. Să se arate că dacă coeficienții consecutivi A_0, A_1, A_2 ai unei ecuațiuni algebrice satisfac relația:

$$A_1^2<2A_0A_2,$$

acea ecuație nu poate avea toate rădăcinile reale.

29. Dacă ecuaţia $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale, ecuaţiile:

$$f(x)+xf'(x)=0, \quad 2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=0,$$
$$6f(x)+18xf'(x)+9x^2f''(x)+x^3f'''(x)=0,....$$

vor avea deasemenea toate rădăcinile reale.

30. Dacă ecuaţia $f(x)=0$ are toate rădăcinile sale reale, ecuaţia $\varphi(x)=f'(x)+af(x)=0$, va avea deasemenea toate rădăcinile reale.

31. Dacă ecuaţiile:

$$f(x)=0 \text{ şi } A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+...+A_{n-1}x+A_n=0,$$

au toate rădăcinile lor reale, şi ecuaţia:

$$\varphi(x)=A_0f+A_1f'+A_2f''+...+A_{n-1}f^{(n-1)}+A_nf^{(n)}=0,$$

va avea toate rădăcinile reale.

32. Dacă ecuaţia algebrică $f(x)=0$ are toate rădăcinile sale reale, diferite de zero şi de acelaş semn, ecuaţia:

$$\varphi(x)=f(x)-xf'(x)+x^2f''(x)=0,$$

va avea două rădăcini imaginare, celelalte fiind reale.

33. Să se arate că derivata a n^a a expresiunii:

$$X=x^n(1-x)^n,$$

are toate rădăcinile reale şi cuprinse între 0 şi 1; deasemenea derivata a n^a a expresiunii:

$$X_1=(1-x^2)^n,$$

are toate rădăcinile reale, cuprinse între -1 şi $+1$.

(F. S. I. 900).

34. Ecuaţia:

$$x^n+\frac{n^2}{1^2}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}x^{n-2}+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}x^{n-3}+...=0,$$

are toate rădăcinile sale reale.

35. Dacă ecuaţia:

$$\varphi(x)=f(x)+af'(x)+a^2f''(x)+...+a^nf^{(n)}(x)=0,$$

are toate rădăcinile reale, $f(x)=0$ are deasemenea toate rădăcinile reale.

36. Ecuația:

$$F_n(x)=x^n-\frac{n}{m}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{m^3}x^{n-3}+\ldots=0,$$

nu poate avea mai mult de două rădăcini reale.

37. Fie $f(x)$ un polinom întreg în x, A_n^p numărul aranjărilor de n obiecte luate câte p, $f^{(p)}$ derivata de ordinul p a lui f, $\varphi(x)=(f+A)^n$, în care se înlocuește A^p și f^p prin A_n^p și $f^{(p)}$; să se arate că dacă ecuația $f(x)=0$ are toate rădăcinile sale reale și ecuația $\varphi(x)=0$ va avea toate rădăcinile reale.

38. Să se discute ecuația: $sin^3x+cos^3x=a$.

(F. S. B. 903).

39. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$\lambda^2(\lambda^2x^2-2x+1)^2-(1-x)(1-\lambda^2x)^3=0$$

λ fiind un parametru pozitiv mai mic decât unu.

Ca o consecință să se discute ecuația:

$$cos\theta+\frac{\lambda(cos2\theta+\lambda^2sin^4\theta)}{(1-\lambda^2sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

XXVI. TEOREMA LUI STURM

Să se discute ecuațiile:

1. $x^3-3x^2-3x+\alpha=0.$
2. $x^4-x^3+2x-5=0.$
3. $x^5-5x^3+10x^2-2=0.$
4. $x^6+3x^4-4x^3+6x^2+12x-18=0.$
5. $x^5+5x^4-20x^2-19x-2=0.$
6. $x^9+px+q=0.$
7. $x^{2n+1}+px+q=0.$
8. $x^3+px^2+q=0.$
9. $x^5-5px^3+5p^2x+2q=0,\ p>0.$
10. $x^4-2x^3+\alpha(2x-1)=0.$

11. Să se studieze, cu ajutorul teoremii lui *Sturm* natura rădăcinilor ecuației:

$$x^5+ax^4+b=0.$$

Să se găsească rezultatul și cu ajutorul teoremii lui *Rolle*. (F. S. I. 1910).

12. Fiind dată ecuația: $x^4-6\sqrt{\alpha^2+\beta^2}x^2-40\beta x-3(\alpha^2+\beta^2)=0$, în care α și β reprezintă doi parametri arbitrari, să se studieze natura rădăcinilor.

13. Fiind dată ecuația: $x^4-6x^2-4\beta x+3(\alpha^2+3)=0$, în care α și β reprezintă coordonatele unui punct din planul axelor ortogonale $\alpha O\beta$, să se studieze natura rădăcinilor după poziția punctului $M(\alpha,\beta)$ în plan.

14. Să se rezolve un triunghiu cunoscând perimetrul $2p$ și razele R și r ale cercurilor circumscris și înscris triunghiului.

15. Să se arate că ecuațiunea: $X\equiv(x+i)^m+(x-i)^m=0$, unde $i=\sqrt{-1}$, are toate rădăcinile sale reale (m întreg pozitiv).

16. Ecuațiunea: $(x+\sqrt{x^2-1})^m+(x-\sqrt{x^2-1})^m=0$, unde m este un număr întreg pozitiv, are toate rădăcinile sale reale.

17. Ecuațiunea:

$$x^n+\left(\frac{n}{1}\right)^2x^{n-1}+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2x^{n-2}+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2x^{n-3}+\ldots=0,$$

are toate rădăcinile sale reale.

18. Cunoscând valoarea lui $\cos\alpha=a$, să se formeze ecuațiunea care dă pe $\cos\frac{\alpha}{7}=x$; să se arate că ecuațiunea formată are toate rădăcinile sale reale și cuprinse între -1 și $+1$. Să se separe rădăcinile ecuațiunii. In ce caz ecuațiunea are rădăcini multiple?

19. P, P_1, P_2, ..., P_i, P_{i+1}, ..., P_n fiind șirul polinoamelor lui *Sturm* al ecuațiunii $P(x)=0$ și având P_i'. $P_{i+1}>0$ pentru orice valoare care anulează polinomul P_i, dacă ecuația $P_i=0$ are $2k$ rădăcini imaginare, ecuațiunea $P=0$ are cel puțin $2k$ rădăcini imaginare.

20. Ecuațiunea $e^{x^2} D_n e^{-x^2} = 0$ are toate rădăcinile sale reale. $D_n e^{-x^2}$ reprezintă derivata de ordinul n a lui e^{-x}.

21. Se consideră polinoamele lui *Legendre*: $P_0 = +1$, $P_1(x) = +x$, și în general definite de relațiunea de recurență:

$$n P_n(x) - (2n-1) P_{n-1}(x) + (n-1) P_{n-2}(x) \equiv 0;$$

să se arate că ecuațiunea $P_n(x) = 0$ are toate rădăcinile sale reale.

22. Fie $y + \frac{1}{y} = x$, avem $y^n + \frac{1}{y^n} = P_n(x)$, P_n fiind un polinom întreg în x; să se arate că ecuațiunea $P_n(x) = 0$ are toate rădăcinile sale reale și cuprinse între -2 și $+2$.

XXVII. LIMITELE RĂDĂCINILOR CALCULUL RĂDĂCINILOR RAȚIONALE

1. Să se găsească o limită superioară a rădăcinilor ecuației:

$$x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 200x^3 + 2x^2 - 15x - 100 = 0.$$

2. Să se găsească intervalele între care sunt cuprinse rădăcinile pozitive și negative ale ecuației: $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

3. Să se aplice metoda lui *Newton* la găsirea unei limite superioare a rădăcinilor ecuației:

$$f(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^3 + x^2 - 16x - 7 = 0.$$

4. Să se aplice metodele lui *Newton* și *Laguerre* pentru găsirea unei limite superioare a rădăcinilor ecuației dela No. 1

5. Aceiași chestiune pentru ecuația:

$$x^5 - 20x^4 + 70x^3 - 10x^2 - 3x - 5 = 0.$$

— Să se găsească rădăcinile raționale ale ecuațiilor:

6. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$
7. $x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 50x^2 - 36x + 72 = 0.$
8. $x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 19x^3 + 28x^2 - 44x + 48 = 0.$
9. $6x^4 - 43x^3 + 107x^2 - 108x + 36 = 0.$
10. $21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0.$
11. $16x^5 - 76x^4 + 44x^3 + 139x^2 - 42x - 45 = 0.$

12. Să se descompună în factori polinomul:

$$3x^4-5x^3-8x^2+10x+4.$$

(P. S. A. P. 901).

— Să se rezolve ecuaţiile:

13. $2x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x-a^4=0.$

14. $x^4+3x^3+ax^2+4(a-1)x+4a=0.$

(P. S. A. P. 904).

15. $x^3-(2a+1)x^2+a(a+2)x-(a+1)a=0.$

16. $2x^4+3(1-2a^2)x^2+2(2a^3-3a)x+3a^2=0.$

17. $x^3+3ax^2-(b^4+b^3+b^2-3a^2)x$
$-(b^5+ab^4+b^4+ab^3+ab^2-a^3)=0.$

18. $4x^7-8ax^6-4(c^2+d)x^5+8a(c^2+d)x^4+d(4c^2+d)x^3$
$-2ad(4c^2+d)x^2-c^2d^2x+2ac^2d^2=0.$

19. $(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5.$

20. $x^3-x-\frac{2}{3\sqrt{3}}=0.$

(F. S. I. 904).

21. $8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-3x^2-4x+9}=125.$

22. Să se determine valorile lui x pentru care avem:

$$3x^5+2x^4-4x^3+4x^2-7x+2>0.$$

(P. S. A. P. 902).

23. Să se rezolve ecuaţia:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x(x+1)}{1.2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{1.2\ldots(n+1)}=0.$$

24. p şi q fiind numere raţionale iar $\sqrt{q}$ un număr iraţional, rezolvarea ecuaţiei $x^3+px+\sqrt{q}=0$ se poate reduce la rezolvarea unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali. Să se generalizeze.

25. Să se găsească baza unui sistem de numeraţie în care numărul 824, din sistemul zecimal, se scrie 3452.

26. Să se găsească două numere a căror diferență este 4 și astfel că produsul multiplicat cu suma lor să dea 1386.

27. Un basin având o capacitate de 360 litri se poate umple în două ore de 4 fântâni care ar curge în același timp în el; cea de a doua fântână curgând singură ar face 1 oră și 12 m., cea de a treia 3 ore, iar cea de a patra 6 ore mai mult de cât cea dintâi, pentru a umple fiecare singură basinul. Care este debitul pe oră al fiecărei fântâni?

28. Să se împartă un triunghiu printr'o paralelă la una din laturi în două părți astfel, că dacă triunghiul se învârteşte în urul acelei laturi, volumul produs de trapezul format să fie jumătate din volumul produs de triunghiu.

29. $f(x)=0$ fiind o ecuație algebrică cu coeficienți întregi dacă $f(0)$ și $f(1)$ sunt amândoi fără soț, ecuația nu are rădăcini întregi.

30. $f(x)=0$ fiind o ecuație algebrică cu coeficienți întregi dacă ea admite o rădăcină întreagă a, unul din numerele $f(b)$, $f(b+1)$, $f(b+2)$, ..., $f(b+a-1)$ este divizibil cu a, oricare ar fi numărul întreg b.

31. Dacă A_0, A_1, A_2, ..., A_p sunt pozitivi, iar N reprezintă cel mai mare coeficient negativ luat în valoare absolută, cantitatea:

$$1+\frac{N}{A_0+A_1+\ldots+A_p},$$

este o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} - \ldots \pm A_m = 0.$$

32. Expresiunea $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ este rațională și să se găsească valoarea ei.

XXVIII. CALCULUL RĂDĂCINILOR IRAȚIONALE

1. Să se calculeze cu cinci zecimale exacte rădăcina reală a ecuației $x^3-x-1=0$.

2. Aceiași chestiune pentru ecuația $x^3-12x-28=0$.

3. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina po-

zitivă a ecuaţiei $x^3-5x-3=0$ şi cu două zecimale exacte rădăcinile negative.

4. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei $x^3+10x^2+6x-120=0$.

5. Aceiaşi chestiune pentru ecuaţia $x^4-5x^3+3x^2+35x-70=0$.

6. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcinile ecuaţiei $x^3-8x-1=0$.

7. Să se calculeze cu cinci zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei $x^4+x^3-3x^2-x-4=0$.

8. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei $x^5-4x-2{,}6027=0$.

9. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina reală a ecuaţiei dela problema 15 cap. XXIII în cazul când $a=b=2c=2$.

10. Aceiaşi chestiune pentru problema 16 cap. XXIII, când $m=1$ şi $r=1$.

11. Să se rezolve ecuaţia dela problema 25 cap. XXV în cazul când $k=R=1$.

12. Să se găsească un număr, care multiplicat cu patratul numărului mai mic decât el cu o unitate, să ne dea 1.

13. Să se arate că ecuaţia $12x^5-7x^4+x^2-3000=0$, nu are decât o singură rădăcină reală, care reprezintă valoarea lui π cu o eroare mai mică de 0,0001.

14. Să se calculeze, prin rezolvarea unei ecuaţii algebrice, valoarea lui sin 50^0, cu trei zecimale exacte.

(Concursul G. M. 1912).

15. Intr'un cerc O să se ducă o coardă AB astfel că ducând tangentele AC şi BC, suma AB+OC să fie egală cu o cantitate dată a, luând ca necunoscută x, distanţa centrului cercului la AB. Să se examineze în particular cazurile când $a=R$ şi $a=2R$. In ultimul caz, să se calculeze raportul dintre necunoscuta x şi raza cercului, cu trei zecimale exacte.

16. Să se împartă o jumătate de sferă în două părţi echivalente printr'un plan paralel cu baza sa.

— Să se dezvolte în fracţiuni continui rădăcinile pozitive

ale ecuațiilor următoare, mergând cu desvoltarea până ce se obțin patru zecimale exacte:

17. $x^3-2x-5=0.$

18. $x^3-2x-2=0.$

19. $x^3-3x^2+5x-2=0.$

20. $x^3-7x+7=0.$

21. Să se calculeze rădăcina cuprinsă între 0 și 1 a ecuației $x^5-0{,}004797x^2-0{,}000826x-0{,}0111=0$, întrebuințând metoda aproximațiilor succesive.

XXIX. DIFERENȚE ȘI INTERPOLARI

1. Să se calculeze diferența a 6-a a primului număr din șirul 2, 8, 23, 35, 48, 65, 94,...

2. Să se calculeze diferența a 4-a a primului număr din șirul x^p, $(x+1)^p$, $(x+2)^p$, $(x+3)^p$,...; cazuri particulare $p=4$, $p=5$.

3. Fie $y_0=0$, $\Delta y_0=1$, $\Delta^2 y_0=2$, $\Delta^3 y_0=3$, $\Delta^4 y_0=4$,... să se calculeze șirul care a dat naștere acestor diferențe.

4. Să se calculeze diferența de ordinul n a funcțiunei:

$$y=\sin x.$$

5. Aceeiași chestiune pentru funcțiunea $y=\mathrm{L}x$.

6. Să se calculeze pentru ecuația $x^3-7x+7=0$, valorile pe care le ia primul membru pentru:

$$x=1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ldots;\ 1{,}9;\ 2.$$

7. Să se determine un polinom întreg $f(x)$ astfel ca să avem:

$$f(k)=2^k-1,$$ k fiind număr întreg.

8. Știind că dacă un polinom cu coeficienți întregi se poate descompune într'un produs de doi factori, acei factori sunt și ei cu coeficienți întregi, să se găsească formele divizorilor posibili de gradul al doilea pentru polinoamele:

$$f(x)=3x^4+2x^2-7x+1.$$

9. Aceeaşi chestiune pentru polinomul:

$$f(x)=2x^4+x^3-6x^2+4x-3.$$

10. Să se găsească un polinom de gradul al 7-lea $f(x)$, astfel ca $f(x)+1$ să fie divizibil cu $(x-1)^4$, iar $f(x)-1$ să fie divizibil cu $(x+1)^4$.

11. Să se găsească forma generală a polinoamelor de un grad oarecare, care împlinesc aceleaşi condiţiuni ca şi polinomul $f(x)$ din problema precedentă.

12. Să se arate că formula lui *Lagrange* dă acelaş polinom ca şi formula lui *Newton*, când valorile variabilei sunt în progresie aritmetică.

13. Să se găsească o expresiune fracţionară egală cu câtul a două polinoame de gradul n, astfel încât pentru $x=x_0$, x_1, x_2, ..., x_n funcţiunea să devină egală cu u_0, u_1, u_2, ... u_n.

14. Să se verifice identitatea:

$$m!=(m+1)^m-\frac{m}{1}m^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m+\ldots,$$

m fiind un număr întreg pozitiv.

15. Să se arate că avem:

$$(x-a)^m=x^m-C_m^1a(x+b)^{m-1}+C_m^2a(a+2b)(x+2b)^{m-2}-$$
$$C_m^3a(a+3b)^2(x+3b)^{m-3}+\ldots\pm C_m^pa(a+pb)^{p-1}(x+pb)^{m-p}\mp\ldots$$

16. Să se arate că dacă p este întreg pozitiv, avem:

$$(2m)^{2p}-C_m^1(2m-2)^{2p}+C_m^2(2m-4)^{2p}-\ldots\pm C_m^{m-1}2^{2p}=0, 2p<m$$

şi:

$$(2m+1)^{2p+1}-C_m^1(2m-1)^{2p+1}+C_m^2(2m-3)^{2p+1}-\ldots$$
$$\pm C_m^m=0;\quad (2p+1)<m,$$

C_r^s reprezintă numărul combinărilor de r obiecte luate câte s.

17. $\varphi(x)$ reprezentând o funcţiune oarecare de x, să se arate că expresiunile: $\frac{\Delta\varphi(x)}{h}$, $\frac{\Delta^2\varphi(x)}{h^2}$, $\frac{\Delta^3\varphi(x)}{h^3}$, ... tind către $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, ... când h tinde către zero; să se deducă de aici

că, dacă h este foarte mic, diferențele succesive sunt cu atât mai mici cu cât ordinul lor e mai depărtat.

18. Să se demonstreze formula:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{h}\Delta f(a-h)+\frac{x-a}{h}\left[\frac{x-a}{h}+1\right]\frac{\Delta^2 f(a-2h)}{1.2}$$

$$+\frac{x-a}{h}\left[\frac{x-a}{h}+1\right]\left[\frac{x-a}{h}+2\right]\frac{\Delta^3 f(a-3h)}{1.2.3}+\ldots$$

$$+\frac{x-a}{h}\left[\frac{x-a}{h}+1\right]\left[\frac{x-a}{h}+2\right]\ldots\left[\frac{x-a}{h}+m-1\right]\frac{\Delta^m f(a-mh)}{1.2.3\ldots m}.$$

19. Fie polinomul:

$$f(x)=x^{m)}.$$

Dacă notăm cu N_j^i suma produselor câte i a primelor j numere, avem:

$$\Delta_0^{(m-p-1)}=\frac{\begin{vmatrix} N_{m-1}^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ N_{m-1}^2 & N_{m-2}^1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{m-1}^p & N_{m-2}^{p-1} & N_{m-3}^{p-2} & \ldots & N_{m-p}^1 \end{vmatrix}}{(m-p)!}$$

XXX. ECUAȚII TRANSCENDENTE

— Să se discute ecuațiile:

1. $5x-2\sin x=0.$
2. $x-2\sin x=0.$
3. $ax-b\sin x=0$, a și b pozitive.
4. $x\sin x-1=0.$ (F. S. B. 902).
5. $x\,tg\,x-1=0$

și să se calculeze cu patru zecimale exacte cea mai mică rădăcină pozitivă.

6. $\cos mx-x^m=0.$ (m întreg).
7. $\cos x-2\sin x-3x=0.$
8. $\sin 2x-tg\,x-ax=b.$

9. Să se discute ecuaţiunea:

$$x-\frac{1}{2}\sin x-3=0$$

şi să se rezolve. (F. S. I. 904).

— Să se discute ecuaţiile:

10. $e^x+e^{-x}-2x=0.$

11. $e^x=ax+b.$

12. $10^x=257x,$

să se calculeze rădăcinile cu patru zecimale exacte.

13. $\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(1+\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2},$

să se calculeze rădăcinile cu trei zecimale exacte.

14. $x^2-10\log x-10=0,$

să se calculeze rădăcinile cu patru zecimale exacte.

15. $(e^x+e^{-x})\cos x+2=0,$

să se calculeze cea mai mică rădăcină pozitivă cu trei zecimale exacte.

16. $$\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{L}\frac{1+\sin x}{\cos x}-1=0.$$

17. Să se rezolve ecuaţia $x^x=10.$

18. Să se discute ecuaţia $tg=\frac{4x}{4-3x^2}$; să se calculeze cu patru zecimale exacte primele două rădăcini pozitive ale ecuaţiei.

19. Fie $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; să se rezolve ecuaţia $f(2x)=2.$

20. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y=xe^{\frac{1}{x}};$$

să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$xe^{\frac{1}{x}}-a=0.$$

Aplicaţie la cazul $a=4$, în care caz să se găsească partea întreagă a rădăcinilor reale.

(P. S. A. P. 911).

21. Să se studieze variația funcțiunii:

$$y=x+\mathrm{L}\sqrt{\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}};$$

să se arate că ecuația:

$$tg\frac{x}{2}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

are trei rădăcini reale cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$. L reprezintă un logaritm neperian.

(F. S. B. 900).

— Să se discute ecuațiile:

22. $$arc\,tg\,x-\frac{x}{1+x^{2}}=m,$$

luându-se pentru $arc\,tg\,x$ cel mai mic arc a cărui tangentă este egală cu x.

23. $$arc\,tg\,x-mx=0,$$

făcând aceiași ipoteză în privința lui $arc\,tg\,x$.

24. $$sin\,(x-\alpha)=m\,sin^{4}x.$$

25. $$xe^{-\frac{sin\,\alpha}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}=m,$$

α fiind un arc cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, iar $m>0$.

26. $$e^{x\sqrt{x^{2}-1}}=m(x+\sqrt{x^{2}-1}).$$

27. Să se împartă o jumătate de cerc în două părți echivalente printr'o coardă AM dusă prin extremitatea diametrului AD.

28. Să se ducă printr'un punct al unui cerc două coarde AM și AN, care să împartă cercul în trei părți echivalente.

29. Să se determine un sector circular, astfel ca suprafețele segmentului circular și triunghiului, din care se compune acest sector, să fie echivalente.

30. $f(x)$ reprezentând o funcțiune continuă de x, bine determinată, admițând o derivată $f'(x)$ împlinind aceleași condiții, dacă $f'(x)<a$ oricare ar fi x, ecuația:

$$ax-f(x)=0,$$

nu poate avea mai mult de o rădăcină reală.

XXXI. ELIMINĂRI. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE

1. Să se elimine x între ecuațiile:

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0, \quad b_0x^2+b_1x+b_2=0.$$

2. Aceeași chestiune pentru ecuațiile:

$$x^3+px+q=0, \quad x^3+p'x+q'=0.$$

3. Aceeași chestiune pentru ecuațiile:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \quad b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0.$$

4. Să se elimine x între ecuațiile:

$$x^m+px^n+q=0, \quad x^m+p'x^n+q'=0 \quad (m>n).$$

5. Să se elimine x între ecuațiunile:

$$x^{13}-1=0, \quad x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1=y.$$

Să se generalizeze.

6. Să se elimine t între ecuațiunile:

$$a(1+t^4)-ct(1+t^2)=0 \text{ și } b(1+t^4)-ct(1-t^2)=0.$$

7. Să se elimine u și v între ecuațiunile:

$$x=A(u+a)^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}}, \quad y=B(u+b)^{\frac{3}{2}}(v+b)^{\frac{3}{2}},$$

$$z=C(u+c)^{\frac{3}{2}}(v+c)^{\frac{3}{2}}.$$

8. Să se elimine x și y între ecuațiunile:

$$x\left(1+\frac{2y^2}{r^2}\right)=a, \quad y\left(1+\frac{2x^2}{r^2}\right)=b, \quad x^2+y^2=r^2.$$

9. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^3+3x^2y-3x^2+3y^2x-6xy-x+y^3-3y^2-y+3=0,$$

$$x^3-3yx^2+3x^2+3y^2x-6xy-x-y^3+3y^2+y-3=0.$$

10. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2-y^2=1, \quad x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

(F. S. B. 1902).

11. Să se găsească numărul sistemelor de soluțiuni reale comune ecuațiilor:

$$x^4+y^3=0, \quad a^2xy+ay+x=0.$$

12. Să se rezolve complet ecuația: $z^4-z+1=0$.

13. Să se găsească, făcând uz de transformări trigonometrice, toate rădăcinile ecuației: $x^4-2x+3=0$.

14. Să se rezolve sistemul:

$$x^3-x^3=316,\quad x^2-y^2=24,\quad y-x=2.$$

15. Să se rezolve sistemul:

$$x^2+y=\frac{1}{z},\quad z^2+y=y^2+z=\frac{1}{x}.$$

16. Să se rezolve sistemul:

$$x+y+z=7,\quad x^2+y^2+z^2=21,\quad x^3+y^3+z^3=73.$$

17. Să se rezolve sistemul:

$$x+y+z+u=10,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=30,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=100,$$
$$x^4+y^4+z^4+u^4=354.$$

18. Să se calculeze laturile unui triunghiu dreptunghiu, cunoscând suma celor două laturi ale unghiului drept, egală cu a, și volumul născut când triunghiul se învârtește în jurul ipotenuzei, egal cu $\frac{1}{3}\pi b^3$. Caz particular, $a=b$.

19. Fiind dat $sin\,\alpha=a$, să se formeze ecuațiile care dau pe $sin\frac{\alpha}{3}$ și $sin\frac{\alpha}{5}$; să se determine a astfel ca ecuațiile obținute să aibă o rădăcină comună.

20. Fiind dat $tg\,3\alpha=a$, să se formeze ecuațiunile care dau pe $tg\,2\alpha$ și $cotg\,2\alpha$; să se determine apoi a astfel ca ecuațiunile obținute să aibă o rădăcină comună.

(F. S. B. 1901).

21. Să se determine a astfel ca ecuațiunile care dau pe $cos\frac{\alpha}{3}$ și $cos\frac{\alpha}{5}$, când cunoaștem valoarea $cos\,\alpha=a$, să aibă o rădăcină comună și în acest caz să se rezolve ecuațiunile.

22. Să se găsească condițiunile ca două ecuații de gradul al patrulea să aibă trei rădăcini comune. Generalizare.

23. Fie $f(x,y)=L\sqrt{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}}-arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$; să se formeze ecuațiunile: $f'_x=0$ și $f'_y=0$. Să se arate că re-

zolvarea acestor ecuaţiuni poate fi redusă la aceea a unei ecuaţiuni de gradul al patrulea în raport cu $tg\varphi = t$. Insemnând cu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ valorile lui φ corespunzătoare celor patru rădăcini ale ecuaţiei, să se arate că avem:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = k\pi + \frac{\pi}{2}, \ (k \text{ întreg}).$$

(F. S. B. 1898).

24. Fie $f(x)$ şi $\varphi(x)$ două polinoame de gradele m şi p $(m > p)$; fie $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_p$ resturile diviziunilor polinoamelor f, xf, $x^2 f, \ldots, x^{p-1} f$ prin φ; să se arate că eliminantul polinoamelor f şi φ este determinantul coeficienţilor polinoamelor R_i.

25. Fie (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ sistemele de soluţiuni comune ecuaţiunilor algebrice $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$. *a)* Să se arate că avem:

$$f(x, y) \equiv (x - x_i)\, a_i(x, y) + (y - y_i)\, b_i(x, y)$$
$$F(x, y) \equiv (x - x_i)\, A_i(x, y) + (y - y_i)\, B_i(x, y)$$

a_i, b_i, A_i, B_i reprezentând polinoame întregi în x şi y;

b) Să se găsească valorile expresiunilor $a_i(x_i, y_i)$; $b_i(x_i, y_i)$; $A_i(x_i, y_i)$; $B_i(x_i, y_i)$;

c) Să se arate că avem: $a_i(x_k, y_k)$. $B_i(x_k, y_k) - b_i(x_k, y_k)$ $A_i(x_k, y_k) = 0$, $k \neq i$.

26. Fie polinoamele:

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m;$$
$$F(x) \equiv b_0 x^{m+1} + b_1 x^m + \ldots + b_{m+1};$$
$$\varphi(x) \equiv c_0 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots + c_m x$$

satisfăcând condiţiunilor:

$f(x) = F(x+1) - F(x)$ şi $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \varphi(n)$, oricare ar fi n întreg pozitiv; să se demonstreze că dacă ecuaţiunile:

$$f(x) - a_m = 0, \quad F(x) - b_{m+1} = 0,$$

au o rădăcină comună diferită de zero, ecuaţiunile

$$F(x) - b_{m+1} = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

au şi ele o rădăcină comună diferită de zero şi reciproc.

XXXII. TRANSFORMĂRI DE ECUAȚII
ECUAȚII REDUCTIBILE

— Să se rezolve ecuațiile:

1. $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0.$

2. $x^7-2x^5+x^4+x^3-2x^2+1=0.$

3. $x^{10}-1=0.$

4. $a(1+x)^5=1+x^5.$

5. $x^4+4ax^3+2a^2x^2+4a^3x+a^4=0.$

6. Să se rezolve ecuația:

$$x^4+pax^3+(m^2+m)a^2x^2+qa^3x+a^4=0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

7. Să se discute ecuația $x^6-3x^5+mx^3-3x+1=0.$

— x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$, să se formeze ecuațiile ale căror rădăcini sunt:

8. $\dfrac{1}{x_1+x_2}, \quad \dfrac{1}{x_2+x_3}, \quad \dfrac{1}{x_3+x_1}.$

9. $\dfrac{x_1}{x_2x_3}, \quad \dfrac{x_2}{x_3x_1}, \quad \dfrac{x_3}{x_1x_2}.$

10. $x_1+x_2+kx_3, \quad x_2+x_3+kx_1, \quad x_3+x_1+kx_2.$

11. $\left(\dfrac{x_1}{x_2-x_3}\right)^2, \quad \left(\dfrac{x_2}{x_3-x_1}\right)^2, \quad \left(\dfrac{x_3}{x_1-x_2}\right)^2.$

12. Fiind dată ecuația $x^3+px+q=0$, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt egale cu patratele rădăcinilor acestei ecuații; să se găsească condițiunile ca ecuația formată să aibă toate rădăcinile sale reale: să se explice *a priori* rezultatul.

(F. S. B. 99).

13. Fiind dată ecuația $x^3+px+q=0$, ale cărei rădăcini sunt reprezentate prin $tg\alpha$, $tg\beta$, $tg\gamma$, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt:

$$tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha+\gamma), \quad tg(\beta+\gamma)\,tg(\beta+\alpha), \quad tg(\gamma+\alpha)\,tg(\gamma+\beta).$$

14. Aceiași chestiune pentru ecuația:

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0;$$

să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:

$$tg(\alpha+\beta),\quad tg(\beta+\gamma),\quad tg(\gamma+\alpha).$$

15. Dacă $tg\alpha, tg\beta, tg\gamma, tg\delta$ sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

să se găsească ecuaţia de gradul al treilea, care are ca rădăcini:

$$tg(\alpha+\beta)tg(\gamma+\delta),\quad tg(\alpha+\gamma)tg(\beta+\delta),\quad tg(\alpha+\delta)tg(\beta+\gamma).$$

16. Fiind dată ecuaţia $x^4+px^2+qx+r=0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt egale cu sumele două câte două ale rădăcinilor ecuaţiei date.

17. Să se determine q astfel ca două rădăcini x şi z ale ecuaţiei $x^3-5x+q=0$, să verifice relaţia $x=\frac{1-z}{1+z}$ şi în acest caz să se rezolve ecuaţia.

(F. S. I. 903).

18. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}$ rădăcinile ecuaţiei:

$$x^{2n}+p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\ldots+p_2x^2+p_1x+1=0;$$

să se arate că avem:

$$\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_1^2}{x_3^2}+\ldots+\frac{x_1^2}{x_n^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}+\ldots+\frac{x_2^2}{x_n^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_{n-1}^2}=$$
$$(p_1^2-2p_2)^2-2n.$$

19. Dacă x este o rădăcină a unei ecuaţii reciproce, care nu admite rădăcina ± 1 şi dacă punem $y=\frac{1-x}{1+x}$, ecuaţia în y nu va conţine decât puterile cu soţ ale necunoscutei; să se deducă cu ajutorul transformării precedente ecuaţia care dă pe $z=x+\frac{1}{x}$.

20. Să se arate că rezolvarea ecuaţiei:

$$F[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2]=0,$$

în care F este un polinom întreg şi omogen în raport cu x^2+x+1 şi x^2-x+1 şi de gradul p, se poate reduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul p.

21. Aceiași chestiune pentru ecuația:

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4]=0.$$

22. Dacă o ecuație algebrică $f(x)=0$, are două rădăcini egale în valoare absolută și de semne contrarii, gradul ei se poate reduce. Să se aplice la ecuația $x^3+px^2+qx+r=0$.

23. Dacă două din rădăcinile ecuației $f(x)=0$, sunt legate printr'o relație de forma $ax_1x_2+bx_1+cx_2+d=0$, gradul ecuației $f(x)=0$ se poate reduce.

24. Dacă între două din rădăcinile ecuației $f(x)=0$, avem o relație de forma $x_1=\varphi(x_2)$, φ reprezentând o fracțiune rațională, ecuația dată se poate reduce. Să se aplice la ecuația:

$$x^3-6x^2+11x-6=0, \quad x_1=x_2^2+x_2+1.$$

25. Dacă rădăcinile unei ecuații de grad cu soț $2p$, se pot împărți în grupe de câte două rădăcini, verificând o relație de forma $ax_1x_2+b(x_1+x_2)+c=0$, atunci, printr'o substituție de forma $x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$, putem face ca ecuația în y să nu cuprindă decât puteri cu soț ale necunoscutei.

XXXIII. REZOLVĂRI PARTICULARE ALE ECUAȚIILOR ALGEBRICE

1. Să se rezolve ecuația $x^3-9x-28=0$, prin formula lui *Cardan.*

(F. S. B. 909).

— Să se rezolve ecuațiile:

— 2. $3x^3-6x^2-2=0.$

3. $[(x+2)^2+x^2]^3=8x^4(x+2)^2.$

4. $x^3+3x=a^2-\frac{1}{a^3}.$

5. $x^3+6ax^2-36a^3=0.$

6. $(x+a)(x+a+b)(x+a+b+c)(x+a+b+c+2d)\times$
$(x+a+b+2c+2d)(x+a+2b+2c+2d)=$
$=(b+c+d)^2(c+d)^2d^2.$

7. $x^6-6x^4+ax^3+9x^2-3ax+b=0.$

8. $\sqrt[7]{\alpha+\sqrt[5]{x}}-\sqrt[7]{\beta+\sqrt[5]{x}}=\gamma.$

9. Să se reducă ecuaţia $x^3+px+q=0$ la forma $y^3-A=0$, punând $y=\dfrac{x+a}{x+b}$.

10. Fie $C(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ şi $C(\alpha)=\dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{27}{p^3}}$; să se arate că ecuaţia $x^3+px-q=0$ admite rădăcina:

$$x=2\,C\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

11. Fie $y=(x^2-1)^9$; să se arate că ecuaţia $y^{(9)}=0$ se poate rezolva algebriceşte; $y^{(9)}$ reprezintă derivata de ordinul al 9-lea a lui y.

12. Să se rezolve ecuaţia $x^3+px+q=0$, punând $x=u^2v+v^2u$; să se arate că prin această substituţie nu se obţin decât trei valori distincte pentru x.

13. Să se elimine y între ecuaţiile $y^3-1=0$ şi $x=ay+by^2$ şi să se deducă o metodă pentru rezolvarea ecuaţiei:

$$x^3+px+q=0.$$

(F. S. I. 901).

14. Să se rezolve în mod analog ecuaţia:

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

15. Dacă ecuaţia $x^3+px+q=0$ admite o rădăcină de forma $a+\sqrt{b}$, a şi b fiind numere raţionale iar $\sqrt{b}$ un număr iraţional, nici una din rădăcini nu va cuprinde în expresiunea sa un radical cubic.

16. Fiind dată ecuaţia $x^4+px^2+qx+r=0$, punând $x=u+v+w$ şi anulând coeficienţii lui $u+v+w$ şi $uv+uw+vw$, determinarea lui u^2, v^2, w^2 depinde de rezolvarea unei ecuaţii de gradul al treilea; să se formeze această ecuaţie.

17. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$\Delta=(u^2-v^2)^2\,(v^2-w^2)^2\,(w^2-u^2)^2;$$

şi să se arate că dacă $p<0$, $p^2-4r>0$ şi $\Delta>0$, ecuaţia

$x^4+px^2+qx+r=0$, are toate rădăcinile reale. In ce caz ecuația va avea rădăcini egale? u, v, w au semnificările din problema precedentă.

18. Să se determine u și v astfel ca să avem identic:

$$x^3+px+q=\begin{vmatrix} x & -u & -v \\ -v & x & -u \\ -u & -v & x \end{vmatrix}=\Delta;$$

determinantul Δ are factorul $x-u-v$; să se afle ceilalți factori și să se deducă formula lui *Cardan*.

(F. S. B. 910).

19. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$; să se determine a și b astfel încât cele șase valori pe cari le ia expresiunea $x_1+ax_2+bx_3$ când se permută x_1, x_2, x_3 în toate modurile posibile, să fie rădăcini ale unei ecuații de forma $u^6+Au^3+B=0$.

20. Să se rezolve ecuația $x^3+px+q=0$, punând-o sub forma $x^4=(x^2+ax+b)^2$; în ce caz această transformare este posibilă?

21. Fie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polinom întreg care verifică identitatea $\varphi(x_i, x_k)=-\varphi(x_k, x_i)$, i, k oarecare; să se arate că forma generală a lui φ este $A\Delta$, A fiind o funcțiune simetrică, iar Δ determinantul lui *Vandermonde*.

22. Să se arate, fără a face uz de formula care dă rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea, că ecuațiile generale de acest grad cu rădăcini distincte, nu pot fi rezolvate numai prin operațiuni raționale.

XXXIV. DESCOMPUNEREA FRACȚIUNILOR RAȚIONALE.

Să se descompună în fracțiuni simple expresiunile următoare:

1. $$\frac{5x^3+6x^2-3x+8}{x^4-5x^2+4}.$$

2. $$\frac{x^3-2x^2+3x-5}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}.$$

3. $\dfrac{x^2+1}{x^6-2x^5-8x^4+14x^3+11x^2-28x+12}$.

4. $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$.

5. $\dfrac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}$.

6. $\dfrac{x}{(x-2)^2(x^2+2)^2}$.

7. $\dfrac{1}{x^8-1}$.

8. $\dfrac{1}{x^{2n+1}-1}$, $\dfrac{1}{x^n-1}$.

9. $\dfrac{1}{(x^p-1)(x^q-1)}$.

10. $\dfrac{1}{(x^4+1)^2}$.

(F. S. I. 905).

11. $\dfrac{x^{2m}}{(x^2+1)^{2m}}$.

12. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)}$.

13. $\dfrac{4x^3-3\Sigma a\,.\,x^2+2\Sigma ab\,.\,x-\Sigma abc}{x^4-\Sigma a\,.\,x^3+\Sigma ab\,.\,x^2-\Sigma abc\,.\,x+abcd}$,

simbolul Σ referindu-se la cele patru litere a, b, c, d.

14. Să se determine un polinom $f(x)$ de gradul al doilea astfel ca să avem:

$$\frac{2x}{f^2(x)}=\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{(x-b)^2}.$$

15. Să se demonstreze formula:

$$D_{n+1}\,arc\,tg\,x=(-1)^n\,.\,n!\,\frac{C^1_{n+1}x^n-C^3_{n+1}x^{n-2}+C^5_{n+1}x^{n-4}-\ldots}{(x^2+1)^n}$$

$D_{n+1}\,arc\,tg\,x$ reprezintă derivata de ordinul $n+1$ a lui $arc\,tg\,x$.

16. Fie $f(x)$: $F(x)$ o fracțiune rațională, $F(x)$ neavând decât rădăcini simple. Să se arate că, dacă gradul lui $f(x)$ este cu două unități mai mic ca gradul lui $F(x)$ suma coeficienților descompunerii în fracțiuni simple este egală cu zero; iar dacă gradul lui $f(x)$ este numai cu o unitate mai mic ca gradul lui $F(x)$, suma acestor coeficienți este egală cu raportul dintre coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt din $f(x)$ și $F(x)$.

17. Să se arate că avem:

$$\frac{a^p}{n!}-\frac{(a+r)^p}{1!(n-1)!}+\frac{(a+2r)^p}{2!(n-2)!}-\ldots+(-1)^n\frac{(a+nr)^p}{n!}=0,$$

n și p fiind două numere întregi pozitive și $p<n$.

18. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile ecuației $f(x)=0$, să se arate că valoarea funcțiunii simetrice $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)$ este egală cu coeficientul lui $\frac{1}{x}$ din câtul diviziunei lui $\varphi(x)\,f'(x)$ prin $f(x)$.

19. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile ecuației:

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0;$$

să se formeze funcțiunile:

$$\Sigma\frac{1}{x-x_k},\quad \Sigma\frac{x_k}{x-x_k},\quad \Sigma\frac{x_k^2}{x-x_k},\ldots,\quad \Sigma\frac{x_k^{n-1}}{x-x_k};$$

aceste funcțiuni sunt de forma:

$$\frac{\varphi_0(x)}{f(x)},\quad \frac{\varphi_1(x)}{f(x)},\ldots,\quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f(x)};$$

să se găsească determinantul funcțiunilor φ.

20. Fie $F(x)$ un polinom de gradul $n+1$ ale cărui rădăcini toate simple formează o progresie aritmetică, primul termen fiind a și rația r și fie $f(x)$ un polinom oarecare de gradul $p<n-1$; să se arate că avem:

$$\sum_{i=n+1}^{i=\infty}\frac{f(a+ir)}{F(a+ir)}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{i=r}\left[\frac{1}{n-i+1}+\frac{1}{n-i+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right]\frac{f(a+ir)}{F(a+ir)}.$$

21. Ecuaţia $f(x)=0$, având toate rădăcinile sale simple, reale şi diferite de ± 1, să se găsească condiţiunea ca fracţiunea raţională $\frac{1}{(x^2-1)f^2(x)}$ descompusă în elemente simple, să fie de forma:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\Sigma\frac{C_k}{(x-x_k)^2}.$$

22. Să se descompună în elemente simple fracţiunea raţională care reprezintă valoarea lui $tg\,\alpha=a$ în funcţiune de $tg\frac{\alpha}{m}=x$.

23. Fie f: F o fracţiune raţională, în care presupunem că numitorul nu-l putem descompune în factori de gradul întâi sau al doilea, dar se poate descompune într'un produs de forma $F_1^{\alpha_1}F_2^{\alpha_2}\ldots$, să se arate că vom avea:

$$\frac{f}{F}=\frac{\varphi_1}{F_1^{\alpha_1}}+\frac{\varphi_2}{F_1^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{\varphi_{\alpha_1-1}}{F_1}+\frac{\psi_1}{F_2^{\alpha_2}}+\frac{\psi_2}{F_2^{\alpha_2-1}}+\ldots$$

$\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \psi_1, \psi_2,\ldots$ fiind polinoame de un grad mai mic ca $F_1, F_2,\ldots$

XXXV. CHESTIUNI DIVERSE.

1. Să se studieze variaţia rădăcinilor ecuaţiei:

$$x^4-4x^3+16x+a=0,$$

când a variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

(F. S. B. 97).

2. Se dă $\cos\alpha=a$ şi se cere: *a)* să se formeze ecuaţia care dă pe $\cos\frac{\alpha}{6}=x$; *b)* să se arate că această ecuaţie are toate rădăcinile sale reale şi cuprinse între -1 şi $+1$; *c)* să se studieze variaţia rădăcinilor când a variază dela -1 la $+1$.

(F. S. B. 98).

3. Să se studieze variația rădăcinilor ecuației:

$$x^4-4px^3+2p^2x^2-q=0,$$

când q variază dela $-\infty$ la $+\infty$ iar p rămâne constant.

(B. F. B. 902).

4. Să se studieze variația rădăcinilor ecuației:

$$x^4-9x^3+a^4-9a^3+1=0,$$

când a variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

5. Fie $y=\dfrac{x^3+1}{x^3+3x-2}$; să se rezolve ecuația $y''=0$.

6. Fiind dată o ecuație algebrică cu coeficienți reali, rădăcinile ei pot fi considerate ca tangentele unor arce reale sau complexe; să se arate că suma acestor arce este reală.

7. Dacă α, β, γ sunt lungimile bisectoarelor interioare ale unui triunghiu, care întâlnesc respectiv laturile a, b, c ale triunghiului, să se arate că ecuația:

$$\frac{16}{abc\alpha\beta\gamma}x^3-4\left[\frac{1}{a^2\alpha^2}+\frac{1}{b^2\beta^2}+\frac{1}{c^2\gamma^2}\right]x^2+1=0,$$

are toate rădăcinile sale reale și că una din rădăcini este egală cu aria triunghiului.

8. Să se calculeze laturile unui triunghiu isoscel, cunoscând lungimea înălțimei coborîtă din punctul de întâlnire al laturilor neegale și raza cercului circumscris. Să se rezolve complet în cazul când avem o singură soluție reală distinctă.

(F. Ș. B. 903).

9. Ce relație trebue să existe între p, q, r pentru ca ecuația:

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

să se poată pune sub forma:

$$(x^2+mx+n)^2-x^4=0;$$

în acest caz să se rezolve ecuația. Să se aplice la ecuația:

$$x^3+2x^2+2x+1=0.$$

(F. S. B. 909).

10. Dacă ecuația $f(x)=0$, ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2,...,

x_n, are o rădăcină comună x_1 cu ecuaţia $f''(x)=0$, care nu anulează pe $f'(x)$, să se arate că avem:

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{x_1 - x_k} = 0;$$

să se deducă apoi că $f(x)$ fiind de gradul al treilea, rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică.

11. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$ şi $x'_2, x'_3, \ldots x'_n$ ale ecuaţiei $f'(x)=0$, avem:

$$\sum_{k=2} \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2} \frac{1}{x_1 - x'_k}.$$

12. Fie $f(x)=0$, ecuaţia care dă valorile lui:

$$\cos \frac{\alpha}{2m+1} = x,$$

când cunoaştem pe $\cos \alpha = a$; să se arate că vom avea:

$$f'(x) = \pm (2m+1)\, P(x)\, P(-x),$$

$P(x)$ fiind un polinom cu coeficienţi întregi, iar $f'(x)$ derivata lui $f(x)$.

13. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_1} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda_2} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_2} - 1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda_n} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_n} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_n} - 1 = 0.$$

14. Dacă ecuaţia $x^3+px+q=0$, are o singură rădăcină reală a, modulul rădăcinilor imaginare va fi mai mare sau mai mic decât valoarea absolută a lui a, după cum $p>0$ sau $p<0$.

15. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei:

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0, \qquad (1)$$

dacă punem:

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + a_2 (x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0,$$

valoarea lui x_3 va fi nedeterminată când x_1 și x_2 vor verifica o ecuație de gradul al doilea, ale cărei rădăcini sunt imaginare când ecuația (1) are toate rădăcinile reale și reale când ecuația (1) are o singură rădăcină reală.

16. Să se găsească condițiunea pentru ca un polinom întreg, în raport cu $\sin x$ și $tg\,x$, $F(\sin x, tg\,x)$, să fie identic nul.

17. Să se arate că identitatea:

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\ldots+a_n\cos nx=0,$$

atrage după sine: $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

18. Dacă rădăcinile unei ecuații de gradul al treilea sunt p^2, q^2 și $2pq$, rădăcinile derivatei sunt raționale.

19. Dacă cele trei rădăcini ale ecuației $x^3-3qx+r=0$, sunt reale, fiecare din ele este mai mică decât $2\sqrt{q}$, iar dacă o singură rădăcină este reală, ea este mai mare ca $2\sqrt{q}$.

20. Rădăcinile ecuației $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$, împreună cu $-\infty$ și $+\infty$, limitează două sau patru intervale reale. Fără a rezolva ecuația, să se găsească condițiile ca un număr dat a să fie cuprins într'unul din aceste intervale.

21. α fiind o rădăcină simplă a ecuației:

$$f(x)-x=0,$$

să se arate că dacă α este o rădăcină multiplă a ecuației:

$$f[f(x)]-x=0,$$

atunci ea va fi cel puțin rădăcină triplă.

22. Un polinom $f(x)$ de gradul n verifică identitatea:

$$nf(x)=(x-a)f'(x)+bf''(x);$$

a) să se găsească coeficienții lui $f(x)$ ordonat după puterile lui $x-a$;

b) să se găsească condițiile de realitate ale rădăcinilor ecuației $f(x)=0$;

c) b_0 fiind valoarea absolută a lui b, rădăcinile ecuației $f(x)=0$ sunt cuprinse între:

$$a-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}b_0 \quad \text{și} \quad a+\sqrt{\frac{n(n-1)}{1}}b_0.$$

23. Fie $(x-a_1-b_1i)(x-a_2-b_2i)\ldots(x-a_n-b_ni)=U_n+V_ni$,

în care $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, sunt numere reale din care $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt toate de acelaş semn; să se arate că ecuaţiile $U_n = 0$ şi $V_n = 0$, au toate rădăcinile lor reale şi că rădăcinile ecuaţiei $V_n = 0$, sunt cuprinse între acele ale ecuaţiei $U_n = 0$.

24. Să se arate că forma cea mai generală a unui polinom întreg de gradul m, $F(x)$, verificând identităţile:

$$F(x) = F(1-x), \quad x^m P\left(\frac{1}{x}\right) = F(x),$$

este:

$$F(x) = (x^2-x)^{2p}(x^2-x+1)^q [A_0(x^2-x+1)^{3n} + A_1(x^2-x+1)^{3n-3}(x^2-x)^2 + A_2(x^2-x+1)^{3n-6}(x^2-x)^4 + \ldots + A_n(x^2-x)^{2n}],$$

p, q, n fiind numere întregi pozitive, iar $A_0, A_1, \ldots, A_n$ constante oarecare.

25. Să se determine un polinom întreg $f(x)$, aşa fel încât să avem $f(x) = f(ax)$, a fiind o constantă.

26. Fie e_1, e_2, e_3 trei numere diferite de zero, dar de o natură oarecare: să se arate că dacă produsul a două oricare din aceste numere, egale sau diferite, este comutativ şi se exprimă liniar şi omogen cu ajutorul lui e_1, e_2, e_3, atunci aceste numere sunt reale sau complexe.

27. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile unei ecuaţii algebrice, iar F o funcţiune simetrică raţională şi întreagă de diferenţele rădăcinilor luate două câte două, dacă punem:

$$F(x_1-x_2, x_1-x_3, \ldots, x_i-x_k, \ldots) = f(p_1, p_2, \ldots p_n),$$

funcţiunea f verifică ecuaţiile;

$$n f'_{p_1} + (n-1)p_1 f'_{p_2} + (n-2)p_2 f'_{p_3} + \ldots + p_{n-1} f'_{p_n} = 0,$$
$$n(n-1) f'_{p_1} + (n-1)(n-2)p_1 f'_{p_2} + \ldots = 0.$$

28. $b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$, fiind nişte numere pozitive, să se arate că dacă ecuaţia:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

are toate rădăcinile reale şi ecuaţia:

$$\sum_{i=0}^{n} (b_1+i)^{p_1}(b_2+i)^{p_2}\ldots(b_k+i)^{p_k} a_i x^i = 0$$

va avea toate rădăcinile reale. Să se determine valorile negative ale numerelor $b_1, b_2, \ldots b_k$, pentru care teorema subsistă.

29. Fie ecuațiunile:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m = 0$$

cu toate rădăcinile reale, ale celei de a doua fiind toate negative. Să se arate că ecuația:

$$a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + 2! a_2 b_2 x^2 + \ldots + k! a_k b_k x^k = 0$$

are toate rădăcinile reale, k fiind cel mai mare dintre numerele m și n.

(Schur).

30. Să se arate în aceleaș condițiuni ca la problema precedentă că ecuația:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_k b_k x^k = 0,$$

are toate rădăcinile reale. Să se deducă despre ecuația lui *Hermite*

$$1 + \left(\frac{m}{1}\right)^p x + \left(\frac{m(m-1)}{2!}\right)^p x^2 + \ldots = 0$$

că are toate rădăcinile reale.

(Malo).

31. Fie x_n cea mai mare rădăcină a unei ecuații cu toate rădăcinile reale, fie apoi x_{n-1}, x_{n-2} rădăcinile cele mai mari ale primelor două ecuațiuni derivate. Să se arate că avem:

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant |x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

(Schur).

32. Să se arate că ecuația:

$$1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \ldots + a_n x^\lambda = 0$$

are o rădăcină în modul mai mică decât:

$$2^{n-2}.$$

33. Rădăcinile unei ecuațiuni algebrice sunt reprezentate prin puncte în plan. Se unesc între ele prin linii atâtea puncte rădăcini încât cele rămase să fie toate în interiorul poligonului astfel format. Să se arate că punctele rădăcini ale ecuațiunei

derivate sunt şi ele toate în interiorul poligonului astfel format. (Generalizarea teoremei lui Rolle).

(Lucas).

34. O ecuaţie algebrică cu k termeni are cel puţin o rădăcină în valoare absolută cel mult egală cu k.

35. Să se calculeze suma următoare:

$$S=\frac{n}{3!}+\frac{n(n-1)}{4!}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 3}{n!}$$

n fiind un număr întreg şi pozitiv mai mare decât 2.

36. Să se determine u_n dat de relaţia de recurenţă $(n-2)u_n=n(u_{n-1}-a)$, pentru $n=1, 2, 3, \ldots, n$, unde a este o constantă şi presupunând $u_0=0$.

37. Să se dovedească inegalitatea:

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_pa_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}\geqslant a_1^{\frac{m_1}{s}}a_2^{\frac{m_2}{s}}\ldots a_p^{\frac{m_p}{s}},$$

în care avem:

$$s=m_1+m_2\ldots+m_p,$$

numerele $a_1, a_2, \ldots a_p, m_1, m_2, \ldots, m_p$ fiind pozitive. Să se arate că avem egalitate numai pentru $a_1=a_2=\ldots=a_p$.

38. Să se calculeze suma seriei:

$$S_{p,m}(x)=K_p^m+K_p^1K_p^{m+1}x^2+\ldots+K_p^nK_p^{m+n}x^{2n}+\ldots,$$

K_p^r reprezentând numărul combinărilor cu repetiţie a p obiecte luate câte r. Pentru ce valori ale lui x *această sumă există?*

Numărul K_p^r este dat de formula:

$$K_p^r=\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{r!}.$$

39. Dacă x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$x^3-x^2-x-1=0$$

şi punem:

$$X=x^2+2x+3,\ Y=y^2+2y+3,\ Z=z^2+2z+3$$

avem relaţiunile

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=1,\quad \frac{x}{X}+\frac{y}{Y}+\frac{z}{Z}=0$$

$$\frac{x^2}{X}+\frac{y^2}{Y}+\frac{z^2}{Z}=0,\quad \frac{x^3}{X}+\frac{y^3}{Y}+\frac{z^3}{Z}=1.$$

40. Fie $p=2q+1$ un număr prim, fără soț. Să se arate că acele $2q$ rădăcini ale ecuației (1) $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0$, pot fi reprezentate prin formulele:

$$x'_i=\frac{P(y_i)x'+Q(y_i)}{P_1(y_i)x'+Q_1(y_i)} \text{ și } x''_i=\frac{P(y_i)x''+Q(y_i)}{P_1(y_i)x''+Q_1(y_i)}, \quad i=1,2,3,\ldots q,$$

în care y_i reprezintă rădăcinile ecuațiunii ce se deduce din (1) punând $x+\frac{1}{x}=y$; x' și x'' rădăcinile unei ecuațiuni de forma $z^2+z+a=0$, a fiind un număr întreg; $P(y_i)$, $Q(y_i)$, $P_1(y_i)$, $Q_1(y_i)$ polinoame întregi în raport cu y_i.

41. Se consideră ecuația: $f(x)=x^2+px+q=0$, coeficienții p și q putând fi numere complexe. Rădăcinile ecuației $f(x)=0$ se reprezintă prin punctele A și B în raport cu un sistem de axe rectangulare Ox, Oy. Se dă apoi un număr λ, reprezentat prin punctul L și fie M, N punctele corespunzătoare numerelor p^2-4q, $f(\lambda)$. Să se arate că dacă punctele A, B, L sunt colineare, atunci și punctele M, N și origina O sunt colineare.

Să se deducă un criteriu pentru a recunoaște dacă punctul L este pe dreapta AB, de aceiași parte a punctelor A și B sau între ele.

Caz particular, când coeficienții p și q sunt reali, rădăcinile ecuației $f(x)=0$, fiind deasemenea reale.

42. Fie $az^2+2bz+c=0$ (1) o ecuație cu coeficienți reali sau complexi; z' și z'' două numere reale sau complexe legate prin relația $az'z''+b(z'+z'')+c=0$ (2); M' și M'' două puncte din plan, corespunzătoare (după modul de reprezentare obișnuit) numerelor z' și z''. Să se arate că rădăcinile ecuației (1) nu pot fi niciodată de aceeași parte a dreptei M'M''.

RĂSPUNSURI. INDICAŢII.

I. 1. $5! = 120$. **2.** $A_{21}^{2} = 420$. **3.** $C_{6}^{3} = 20$. **4.** $12! = 479001600$; $A_{12}^{6} = 12! : 6! = 665280$; $C_{12}^{6} = 12! : (6!)^2 = 924$. **5.** Se va presupune o persoană fixă şi se vor permuta celelalte, rezultatul P_{n-1}. **6.** Toate aranjările celor n litere luate câte m, în număr de A_n^m, se pot despărţi în două grupe, acelea care nu conţin litera considerată, şi al căror număr este de A_{n-1}^m, şi acelea care conţin acea literă şi al căror număr este diferenţa între numărul total şi A_{n-1}^m; rezultatul este $A_n^m - A_{n-1}^m = m A_{n-1}^{m-1}$; toate aranjamentele care încep cu o literă determinată conţin $m-1$ litere din cele $n-1$ rămase, aşezate în toate modurile posibile, deci A_{n-1}^{m-1}. **7.** Cu două cifre destinate putem forma atâtea numere câte aranjări se pot face cu 10 obiecte luate câte 2, din care se va scădea numărul acelora care încep cu 0, deci $A_{10}^{2} - A_{9}^{1} = 81$; de câte 3 cifre $A_{10}^{3} - A_{9}^{2} = 648$; de câte 4 cifre $A_{10}^{4} - A_{9}^{3} = 4536$,... de 10 cifre $A_{10}^{10} - A_{9}^{9} = 9! \times 9$. **8.** Se va observa că dacă se suprimă acele litere, rămân aranjările de $n-2$, $n-3$,... obiecte luate câte $m-2$, $m-3$,... dacă ordinea este dată; în cazul când ordinea în care se succed literele dela început este arbitrară, numerele căutate sunt $P_2 A_{n-2}^{m-2}$, $P_3 A_{n-3}^{m-3} \ldots P_p A_{n-p}^{m-p}$. **9.** Cifra 1 arată zecile de mii în $P_4 = 24$ numere. La fel celelalte cifre. Deci suma zecilor de mii ale numerelor formate este $24(1+2+3+4+5) \times 10^4 = 360 \times 10^4$. Analog se găseşte suma miilor: 360×10^3 etc. Suma tuturor numerelor formate este $360 \times 11111 = 3999960$. **10.** $C_4^1 + C_4^2 = 10$;

pentru cazul general $C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{\frac{n-1}{2}}$ sau $C^{\frac{n}{2}}$, după cum n este impar sau par. **11.** C_n^4. **12.** La un punct de intersecţie a două diagonale corespunde patrulaterul format de capetele diagonalelor. Deci avem atâtea puncte câte patrulatere se pot forma cu vârfurile poligonului convex, adică C_n^4. **13.** Se va observa că numărul total al dreptelor ce trec prin aceste puncte este C_n^2. Se va face abstracţie de 2 puncte şi se va căuta numărul punctelor de intersecţie al dreptelor ce trec prin celelalte $n-2$ puncte, cu dreapta ce trece prin cele două puncte, găsim C_{n-2}^2 puncte, iar pentru toate dreptele $C_n^2 \times C_{n-2}^2$ şi cum fiecare punct a fost numărat de două ori pentrucă se găseşte în cele două numărări corespunzătoare celor două drepte care-l determină, rezultatul este $\frac{1}{2} C_n^2 \times C_{n-2}^2$. **14.** Procedeu analog ca mai sus; un cerc trecând prin A, B, C întâlneşte cele C_{n-3}^3 cercuri ce nu trec prin A, B, C în $2C_{n-3}^3$ puncte, iar cele $3C_{n-3}^2$ cercuri ce trec prin câte unul din punctele A, B, C în $3C_{n-3}^2$ puncte; numărul total al punctelor de intersecţie este $\frac{1}{2} C_n^3(2C_{n-3}^3+3C_{n-3}^2)$. **15.** Se va observa că în toate permutările ce se găsesc în condiţiunile enunţului, putem schimba între ele cifrele echi distante, precum şi grupurile de două cifre echidistante; rezultatul este $3!\times(1+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=3!\times 8=48$. In cazul general, rezultatul este $n!\ (1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n)=n!\times 2^n$. **16.** Se va asocia la fiecare permutare aceia în care literele sunt scrise în ordine inversă, în aceste 2 permutări avem C_n^2 inversiuni, deoarece acolo unde este o permanenţă în prima, este o inversiune în a doua; numărul total al inversiunilor este $\frac{1}{2} P_n C_n^2$. **17.** Primele p litere având o ordine determinată, numărul grupurilor distincte este C_n^p, iar numărul total al permutărilor $C_n^p P_{n-p}=P_n : P_p$. **18.** Insemnăm cu x numărul

permutărilor distincte. Să ne fixăm una din ele. Acelea care se deduc din ea prin toate permutările între termeni nu sunt evident distincte, deasemenea acelea care se deduc prin permutări între factorii aceluiaş termen. Numărul permutărilor, astfel deduse din acea fixată, împreună cu ea este $n!\times(1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n)=n!\times 2^n$. Din cele x permutări distincte se obţin $n!2^n x$ expresiuni, ele reprezintă toate permutările făcute cu cele $2n$ litere, adică $n!2^n x=(2n)!$, de unde $x=\frac{(2n)!}{n!2^n}$. **19.** Insemnăm cu x numărul permutărilor distincte. Să ne fixăm una din ele pe care o presupunem distinctă. Din aceasta se deduc 2 expresiuni prin permutarea factorilor în termenul al doilea, din fiecare din acestea se deduc 3! expresiuni prin permutarea factorilor în termenul al treilea, din fiecare din acestea se deduc 4! expresiuni prin permutarea factorilor în termenul al 4-lea. In total se obţin astfel, pornind dela o valoare distinctă $2!3!4!\ldots n!$ expresiuni care cuprind între ele şi valoarea presupusă distinctă. Pentru cele x valori distincte vom avea deci toate permutările posibile, adică $2!3!4!\ldots n!x=m!$. Deci $x=\frac{m!}{2!3!\ldots n!}$. **20.** Ecuaţia problemei este $A_n^6=12A_n^4$, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)-12n(n-1)(n-2)(n-3)=0$ sau $n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+8)=0$. Pentru soluţiile problemei trebue $n\geqslant 6$, deci $n=8$. **21.** Ecuaţia problemei este: $n(n-1)\ldots(n-p+1)=mn(n-1)\ldots(n-p+3)$. Din egalitatea aceasta se vede că m trebue să fie întreg; n fiind mai mare decât p, ecuaţia problemei devine: $(n-p+2)(n-p+1)=m$ sau $n^2-(2p-3)n+(p-1)(p-2)-m=0$; ca problema să fie posibilă trebue $1+4m=(2k+1)^2$ $\therefore$ $m=k(k+1)$, k fiind un număr întreg arbitrar pozitiv; dacă această condiţie este împlinită avem $n_1=p+k-1$, $n_2=p-k-2$. A doua soluţie fiind mai mică decât p nu convine problemei. **22.** După simplificare, ecuaţia problemei este $m^2-10m+9=0$; singura soluţie care convine este $m=9$. (S. E. G. M. II. p. 62). **23.** Relaţia ce trebue satisfă-

cută este $\frac{m!}{r!(m-r)!}=\frac{m!}{s!(m-s)!}$ sau $r!(m-r)!=s!(m-s)!$. Observăm că această egalitate este satisfăcută pentru $r=s$ sau $r=m-s$ care dă $m-r=s$. Să arătăm că aceste produse de numere consecutive nu pot fi egale pentru alte relaţii între r şi s. Să presupunem că $r=s+p$, urmează $(s+p)!\ (m-s-p)!=s!(m-s)!$. Inlăturând factorii $s!$ şi $(m-s-p)!$ care nu pot fi nuli pentru r şi s mai mici decât m, găsim $(s+1)(s+2)\ldots(s+p)=(m-s-p+1)(m-s-p+2)\ldots(m-s)$. Ambele produse având p factori şi fiind produse de numere consecutive, nu pot fi egale decât dacă factorul cel mai mic al unui produs este egal cu cel mai mic dintre factorii celuilalt produs. Deci $s+1=m-s-p+1$ sau $s=m-r$, contrar ipotezei. Relaţia fiind simetrică în raport cu r şi s ajungem la aceiaşi concluzie dacă presupunem $s=r+p$. In cazul când $r=0$, C_m^0 fiind 1, urmează că $s=0$ sau m. **24.** După numărul precedent, neputând avea $p-p'=p+p'$, decât dacă $p'=0$, trebue $(p-p')+(p+p')=n$ sau $n=2p$. **25.** Se deduce imediat din prima relaţie $n=2p+1$, iar din a doua, ţinând seamă de aceasta, $p=2a$, deci $n=4a+1$. **26.** Folosim formula $C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$. (S. E. G. M. II. p. 61). **27.** Numărul căutat este numărul combinărilor cu repetiţie de 5 litere luate câte 4, $k_5^4=C_8^4=70$; în cazul general numărul termenilor este $k_n^m=C_{m+n-1}^n$. **28.** Insemnând $x_1, x_2, \ldots x_n$ cele n litere şi făcând polinomul omogen punând $x_1=\frac{y_1}{x}$, $x_2=\frac{y_2}{x}, \ldots x_n=\frac{y_n}{x}$, polinomul omogen având $n+1$ litere, are numărul termenilor egal cu k_{n+1}^m. **29.** In general dacă formăm permutări cu m litere dintre care m_1 sunt egale cu a_1, m_2 egale cu a_2 etc., numărul total al permutărilor distincte este $\frac{m!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}$. In cazul nostru, cuvântul *Bucureşti* având 2 litere u, numărul permutărilor distincte este $\frac{9!}{2!}=181440$; în cazul cuvântului

papagal, $\frac{7!}{2!\,3!}=420$. **30.** Toate permutările celor 10 litere le putem obţine în felul următor: Luând fiecare permutare a consunelor aşezăm vocalele pentru ea în toate modurile posibile fie începând cu o consună, fie începând cu o vocală. Deducem astfel dintr'o permutare a consunelor $5!\times 2$ permutări. Cum avem 5! permutări printre consune, numărul total al permutărilor celor 10 litere în condiţiunile cerute este $(5!)^2\times 2$. **31.** Pentru cuvintele ce trebuesc formate luăm 3 consune din cele 19. In total putem lua C_{19}^3. Deasemenea trebuind să punem în intervale câte 2 vocale, vom lua C_5^2 grupe de 2 vocale. La o combinaţie de 3 consune putând pune fiecare din cele C_5^2 grupe de 2 vocale, formăm $C_{19}^3\times C_5^2$ cuvinte (din cauza condiţiei impuse, cuvintele nu pot nici începe, nici sfârşi cu o vocală). Permutând între ele cele 3 consune ale unui cuvânt în toate modurile posibile, vom deduce $C_{19}^3\times C_5^2\times P_3$ cuvinte. Iar în fiecare din acestea, permutând cele 2 vocale în toate modurile posibile, vom avea, în condiţiunile cerute $C_{19}^3\times C_5^2\times P_3\times P_2$ cuvine. **32.** $A_8^2\,A_5^2 : A_{13}^4$. **33.** $\frac{1}{6^n}$. **34.** Dacă se aruncă un zar, probabilitatea de a avea 1 este $\frac{1}{6}$, probabilitatea de a *nu* avea 1 este $\frac{5}{6}$. Se aruncă două zaruri. Probabilitatea de a avea 1 la primul zar şi de a nu avea 1 la al doilea zar este o probabilitate compusă, deci: $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$. Probabilitatea de a avea 1 la al doilea zar şi a nu avea 1 la primul zar este deasemenea $\frac{5}{36}$; iar probabilitatea de a avea 1 la ambele zaruri este $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Dacă aruncăm ambele zaruri, apariţia cel puţin a unui 1 este un eveniment care se poate realiza în trei moduri care se esclud: (1, nu 1), (nu 1, 1), (1, 1); probabilitatea evenimentului este deci suma probabilităţilor parţiale: $\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$. Deci

probabilitatea pentru ca la prima aruncare de 2 zaruri să avem cel puţin un 1 este $\frac{11}{36}$; probabilitatea de a nu avea un 1 este $\frac{25}{36}$. Probabilitatea pentruca la a doua aruncare de 2 zaruri să avem cel puţin un 1 este de asemenea $\frac{11}{36}$, pentrucă această aruncare nu este de loc influenţată de prima; iar probabilitatea de a nu avea 1 este $\frac{25}{36}$. Să ne ocupăm de evenimentul cerut de problemă: Se fac două aruncări cu câte două zaruri şi voim să apară cel puţin odată 1. Acest eveniment se poate realiza în trei moduri: *a)* Să apară la prima aruncare cel puţin un 1 şi la a doua să nu apară 1, probabilitatea este $\frac{11}{36}\times\frac{25}{36}$; *b)* Să nu apară la prima aruncare 1, dar să apară la a doua, probabilitatea este $\frac{25}{36}\times\frac{11}{36}$; *c)* Să apară la ambele aruncări cel puţin un 1, probabilitate: $\frac{11}{36}\times\frac{11}{36}$. Probabilitatea evenimentului problemei este suma acestor probabilităţi: $2\times\frac{11}{36}\times\frac{25}{36}+\frac{11}{36}\times\frac{11}{36}=\frac{11\times 61}{36^2}=\frac{671}{1296}$.

Soluţia II. Să calculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică în două aruncări cu câte două zaruri să nu avem de loc 1. Probabilitatea pentru a nu avea 1 la aruncarea unui zar este $\frac{5}{6}$, la o aruncare a două zaruri este $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$, la două aruncări succesive de 2 zaruri, este $\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}=\frac{625}{1296}$. Deci probabilitatea evenimentului problemei este $1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$.

35. Trebue să existe condiţiile $m>n>q$, $m>p>q$. Care este probabilitatea ca un elev să răspundă numai q din cele p chestiuni puse de profesor? Profesorul pune C_m^p grupe de chestiuni, iar elevul răspunde la C_n^q, dar favorabile lui sunt

şi cele $p-q$ la care nu este obligat să răspundă, din cele $m-n$ chestiuni neînvăţate, care dau C_{m-n}^{p-q} grupe. Toate cazurile favorabile sunt deci $C_n^q \times C_{m-n}^{p-q}$. Deci probabilitatea ca un elev să răspundă numai la q chestiuni este $\frac{C_n^q \times C_{m-n}^{p-q}}{C_m^n}$. Analog se calculează probabilitatea ca elevul să răspundă la $q+i$ chestiuni $0<i\leqslant p-q$ şi găsim $\frac{C_n^{q+i} \times C_{m-n}^{p-q-i}}{C_m^n}$. Dar probabilitatea de a răspunde la cel puţin q chestiuni este probabilitatea totală a celor precedente, deci $\frac{\sum_{i=0}^{i=p-q} C_n^{q+i} + C_{m-n}^{p-q-i}}{C_m^p}$. Aceasta pentru un elev. Probabilitatea ca elevul să nu răspundă, este contrară, deci $1-\frac{\sum_{i=0}^{i=p-q} C_n^{q+i} \times C_{m-n}^{p-q-i}}{C_m^p}$, multiplicând cu N, obţinem numărul probabil de corijenţi.

II. 1. $x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5+126a^5x^4+84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9$. **2.** $x^{11}-11ax^{10}+55a^2x^9-165a^3x^8+330a^4x^7-462a^5x^6+462a^6x^5-330a^7x^4+165a^8x^3-55a^9x^2+11a^{10}x-a^{11}$. **3.** $(1+i)^8=[(1+i)^2]^4=(2i)^4=16$. **4.** Procedeu analog cu precedentul: $-64(1-i)$. **5.** $3125-12500x+20.000x^2-16000x^3+6400x^4-1024x^5$. **6.** $1024a^5-5120a^4\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+11520a^4\sqrt[3]{b^2}-15360a^3\sqrt{ab}+13440a^3b\sqrt[3]{b}-8064a^2b\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}+3360a^2b^2-960ab^2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+180ab^2\sqrt[3]{b^2}-20b^3\sqrt{a}+b^3\sqrt[3]{b}$. **7.** $2(32a^6-48a^4+18a^2-1)$. **8.** $-C_{40}^6$. **9.** $C_{36}^{11}a^{12}b^3\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}$. **10.** Forma termenului general al desvoltării este: $C_{2n+1}^p x^{2n+1-p}\frac{1}{x^p}$, deci $2n-2p+1=2r+1$ sau $p=n-r$. ∴ Răspunsul este C_{2n+1}^{n-r}. **11.** Observând că: $A_n^{m+1}=(n-m)\,A_n^m$ (1) şi că avem încă relaţiunea: $(n+p-m)\,A_n^{m-r}A_p^r=(n-m+r)\,A_n^{m-r}\,A_p^r+(p-r)\,A_n^{m-r}\,A_p^r=A_n^{m-r+1}\,A_p^r+A_n^{m-r}\,A_p^{r+1}=A_n^{m+1-r}\,A_p^r+$

$A_n^{m-r}\ A_p^{r+1}$ (2), vom presupune relaţiunea adevărată pentru m şi vom arăta că în această ipoteză ea este adevărată pentru cazul când m se înlocueşte cu $(m+1)$. Avem: $A_{n+p}^{m+1}=(n+p-m)$ $A_{n+p}^{m}=(n+p-m)$ $[A_n^m+C_m^1\ A_n^{m-1}A_p^1+C_m^2\ A_n^{m-2}\ A_p^2+\ldots+$ $C_m^s\ A_n^{m-s}\ A_p^s+C_m^{s+1}\ A_n^{m-s-1}\ A_p^{s+1}+\ldots+C_m^{m-1}\ A_n^1\ A_p^{m-1}+$ $C_m^m\ A_p^m]$. Scriind pentru toţi termenii acestei desvoltări relaţia (2), înmulţind cu coeficienţii respectivi şi ţinând seamă de relaţia (1), avem pentru trei termeni consecutivi oarecare:

$C_m^{s-1}(n+p-m)\,A_n^{m-s+1}\,A_p^{s-1}=C_m^{s-1}\,A_n^{m-s+2}\,A_p^{s-1}+C_m^{s-1}\,A_n^{m-s+1}\,A_p^s$,

$C_m^s\,(n+p-m)\,A_n^{m-s}\,A_p^s=C_m^s\,A_n^{m+1-s}\,A_p^s+C_m^s\,A_n^{m-s}\,A_p^{s+1}$,

$C_m^{s+1}(n+p-m)\,A_n^{m-s-1}\,A_p^{s+1}=C_m^{s+1}\,A_n^{m-s}\,A_p^{s+1}+C_m^{s+1}A_n^{m-s-1}A_p^{s+2}$

şi observând că prima parte a unui termen şi cu a doua a celui precedent se însumează şi că $C_m^r+C_m^{r-1}=C_{m+1}^r$ pentru diferitele valori ale lui r avem: $A_n^{m+1}=(A_n+A_p)^{(m+1)}$. Cum relaţia pentru $m=2$ se verifică imediat, $(n+p)$ $(n+p-1)=(n+p)^2-(n+p)$, urmează că ea este adevărată pentru $m=3$ etc. **12.** Trebue să avem $C_m^8\,3^{m-8}\,m^8<$ $C_m^9\,3^{m-9}m^9>C_m^{10}3^{m-10}m^{10}$ $\therefore$ $m^2-8m-27>0$ şi m^2-9m- $30<0$, deci $m=13$. **13.** Patru coeficienţi binomiali pot forma o proporţie în trei moduri diferite (căci unul poate fi luat cu fiecare din ceilalţi trei) şi anume: *a)* $C_n^{p-1}\,C_n^{p+2}=$ $C_n^p\,C_n^{p+1}$, care dă $n=-1$ imposibil; *b)* $C_n^{p-1}\,C_n^{p+1}=C_n^p\,C_n^{p+2}$, care dă: $n^2-2pn-2p-1=0$, sau încă: $2p=\dfrac{n^2-1}{n+1}$, deci $p=\dfrac{1}{2}(n-1)$ posibilă pentru n impar; *c)* $C_n^{p-1}\,C_n^p=C_n^{p+1}\,C_n^{p+2}$, care dă: $(n-p)^2[(n-p)^2-1]=(p+1)^2p(p+2)$ sau: $(n-p)^2[(n-p)^2-1]=(p+1)^2[(p+1)^2-1]$; punând deci $n-p=u$, $p+1=v$, avem $u^2(u^2-1)=v^2(v^2-1)$ sau încă $u^4-v^4-(u^2-v^2)=0$, de unde deducem succesiv: (u^2-v^2) $(u^2+v^2-1)=0$ $\therefore$ $u-v=0$, $u+v=0$, $u^2+v^2-1=0$ sau $n-p-p-1=0$ $\therefore$ $p=\dfrac{1}{2}(n-1)$; $n-p+p+1=0$ $\therefore$ $n=-1$

imposibil. $(n-p)^2+(p+1)^2-1=0 \therefore 2p^2-2(n-1)p+n^2+1=0$ care dă: $p=\frac{1}{2}(n-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)^2-2n^2-2}$ sau încă $p=\frac{1}{2}(n-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-n^2-2n-1}$, deci: $p=\frac{1}{2}(n-1)\pm(n+1)\sqrt{-1}$, deci imposibil. Pentru progresiune aritmetică trebue să avem $2C_n^p=C_n^{p-1}+C_n^{p+1} \therefore p=\frac{1}{2}(n\pm\sqrt{n+2})$; dacă n este cu soţ trebue să fie de forma $2(2k^2-1) \therefore p=2k^2\pm k-1$; iar dacă n este fără soţ trebue $n=4k(k-1)-1$ şi $p=2k^2-3k$. **14.** Se vor egala coeficienţii lui x^n din desvoltarea ambilor membri ai identităţii $(x+a)^n(x+a)^n=(x+a)^{2n}$; se găseşte $1^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$. **15.** Se vor egala coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x din desvoltarea identităţii $(x+a)^m(x+a)^n=(x+a)^{m+n}$. **16.** Scriind identitatea sub forma: $\sum_{i=0}^{n} C_n^i(x+a)^{n-i}b^i=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(x+b)^{n-k}a^k$ se observă că este de ajuns să aplicăm desvoltarea binomului lui *Newton* puterei $(x+a+b)^n$, odată în raport cu $(x+a)$ şi a doua oară în raport cu $(x+b)$ pentru a avea identitatea de mai sus. **17.** Se va avea în vedere identitatea $\Sigma C_p^i C_p^j=\frac{1}{2}[(\Sigma C_p^i)^2-\Sigma(C_p^i)^2]$, apoi că $\sum_{i=0}^{p} C_p^i=2^p$ şi $\Sigma(C_p^i)^2=C_{2p}^p$ (14), rezultatul este $2^{2p-1}-\frac{(2p)!}{2(p!)^2}$. **18.** Presupunem relaţia adevărată pentru n şi să arătăm că ea există în acest caz pentru $n+1$. Observăm în primul rând că: $(a+b,r)_{n+1}=(a+b+nr).(a+b,r)_n$. Să înmulţim doi termeni consecutivi ai desvoltării lui $(a+b,r)_n$ cu $(a+b+nr)$; avem în primul rând: $(a+b+nr)\,C_n^p(a,r)_{n-p}(b,r)_p=[a+(n-p)]\,C_n^p(a,r)_{n-p}(b,r)_p+(b+pr)\,C_n^p(a,r)_{n-p}(b,r)_p=C_n^p(a,r)_{n-p+1}(b,r)_p+C_n^p.(a,r)_{n-p}(b,r)_{p+1}$ şi asemenea: $(a+b+nr)\,C_n^{p+1}(a,r)_{n-p-1}(b,r)_{p+1}=C_n^{p+1}(a,r)_{n-p}(b,r)_{p+1}+C_n^{p+1}(a,r)_{n-p-1}(b,r)_{p+2}$. Se vede că primul termen din a doua egalitate se însumează cu al doilea din precedenta

și cum $C_n^{p+1}+C_n^p=C_{n+1}^{p+1}$, avem termenul general al desvoltării $(a+b,r)_{n+1}$ sub forma: $C_{n+1}^{p+1}(a,r)_{n-p}(b,r)_{p+1}$. Cum pentru $n=2$ relațiunea este evidentă: $(a+b)(a+b+r)=a(a+r)+$ $+2ab+b(b+r)$ urmează că ea este stabilită din aproape în aproape. **19.** $2x^2-x+1$. **20.** $x^3-10x^2+31x-30$. **21.** $x^2+(a+b)x+\frac{1}{2}ab$. **22.** $(x-a)^3$. **23.** Desvoltând, expresiunea se poate pune sub forma: $(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$, deci: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. **24.** $a^2-b^2+c^2-d^2$. **25.** Punând $\frac{x}{y}-\frac{y}{2x}=t$, avem: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{4x^2}=t^2+1$, deci $t^2+1-t-\frac{3}{4}=t^2-t+\frac{1}{4}=$ $=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \therefore \frac{x}{y}-\frac{y}{2x}-\frac{1}{2}$. 26. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$, expresiunea dată devine $9(t^2-2)-24t+34=(3t-4)^2 \therefore 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-4$. **27.** Punând $x^2-yz=A$, $y^2-zx=B$, $z^2-xy=C$, avem: $A^3+B^3+C^3-$ $-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC)$ (Partea I, III. 23); deci: $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\times$ $\Sigma[(x^2-yz)^2-(y^2-xz)(z^2-xy)]$; dar $(x^2-yz)^2-(y^2-xz)(z^2-xy)$ $\equiv x^4+x(y^3+z^3)-3x^2yz\equiv x(x^3+y^3+z^3-xyz)\equiv x(x+y+z)\times$ $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$. Așa dar expresiunea dată devine: $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\,\Sigma x(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\equiv$ $(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$ și ca urmare, rădăcina patrată este: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=$ $=x^3+y^3+z^3-3xyz$. **28.** Scriind expresiunea sub forma: $E\equiv\frac{1}{2}\Sigma a^2[b-c)^2[b(a-c)+c(a-b)]^2\equiv\frac{1}{2}\Sigma a^2(b-c)^2b^2(a-c)^2$ $+\frac{1}{2}\Sigma a^2c^2(b-c)^2(a-b)^2+\Sigma a^2bc(a-b)(b-c)^2(a-c)$ și observând că $\Sigma a(b-c)\equiv 0$ și că $\Sigma a^2b^2(b-c)^2(a-c)^2$ $\equiv\Sigma a^2c^2(b-c)^2(a-b)^2$, rezultă că: $E\equiv\Sigma a^2b^2(b-c)^2(a-c)^2$. Insă: $(b-c)^2(a-c)^2=[ab-c(a+b)+c^2]^2=a^2b^2+c^2(a+b)^2$ $+c^4-2abc(a+b)+2abc^2-2c^3(a+b)$ *** $E\equiv\Sigma a^4b^4+a^2b^2c^2$ $\Sigma(a+b)^2+a^2b^2c^2\Sigma c^2-2abc\Sigma a^2b^2(a+b)+2a^2b^2c^2\Sigma ab-2a^2b^2c^2$

$\Sigma c(a+b)\equiv\Sigma a^4b^4+a^2b^2c^2(\Sigma a^2+2\Sigma ab)+a^2b^2c^2(\Sigma b^2+\Sigma c^2)$ $-2abc\,\Sigma a^2b^2(a+b)+2a^2b^2c^2\Sigma ab-2a^2b^2c^2\Sigma c(a+b)\equiv$ $\Sigma a^4b^4+a^2b^2c^2(\Sigma a)^2+2a^2b^2c^2\Sigma a^2-2abc\,\Sigma a^2b^2(a+b)+$ $+2a^2b^2c^2\Sigma ab-4a^2b^2c^2\Sigma ab\equiv(\Sigma a^2b^2)^2+a^2b^2c^2(\Sigma a)^2-2abc$ $\Sigma[a^2b^2(a+b)+a^2b^2c]\equiv(\Sigma a^2b^2)^2+a^2b^2c^2(\Sigma a)^2-2abc\,\Sigma a^2b^2$ $(a+b+c)\equiv(\Sigma a^2b^2)^2+a^2b^2c^2(\Sigma a)^2-2abc(\Sigma a).\ (\Sigma a^2b^2)\equiv$ $[\Sigma a^2b^2-abc.\,\Sigma a]^2$, deci rădăcina patrată este: $\Sigma a^2b^2-abc.\Sigma a$. In al doilea fel observând că expresiunea $E\equiv\Sigma a^2b^2(b-c)^2(a-c)^2$ este de gradul al 8-lea, ea poate fi patratul unei expresii de gradul al 4-lea ce trebue determinată, fiindcă E este simetrică în raport cu a, b, c plecăm dela identitatea presupusă existentă: $\Sigma a^2b^2(b-c)^2(a-c)^2\equiv[\alpha\Sigma a^4+\beta\Sigma a^3b+\gamma\Sigma a^2b^2$ $+\delta\Sigma abc^2]^2$. Făcând pe $c=0$, găsim: $\alpha=\beta=0,\ \gamma=+1$; apoi făcând: $a=b=c$ găsim $\delta=-1$ regăsind astfel expresiunea de mai sus. **29.** $a^2x^4+ax^3+bx^2+cx+c^2\equiv(ax^2+\beta x+\varepsilon c)^2$. Identificăm: $2a\beta=a,\ \beta^2+2a\varepsilon c=b,\ 2\beta\varepsilon c=c$ $\therefore\ \beta=\frac{1}{2}$ şi înlocuind valoarea lui β în ultimele două relaţii, avem $4b-8a\varepsilon c=1$ şi $\varepsilon c=c$, deci $\varepsilon=+1$ de unde, condiţia de posibilitate este $4b-8ac=1$. **30.** $x^4+4ax^3+6x^2+4bx$ $+b=(x^2+\alpha x+\beta)^2$, identificând: $2\alpha=4a,\ \alpha^2+2\beta=6,$ $2\alpha\beta=4b,\ \beta^2=b\ \therefore\ \alpha=2a,\ \beta=3-2a^2$, iar ultimele două relaţii devin $a(3-2a^2)=4b,\ (3-2a^2)^2=b$; rezolvând acest sistem, $3-2a^2=0$ şi $2a^2+a-3=0$, deci $a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ şi $a=-\frac{3}{2}$ sau 1. Valorile lui b se deduc. **31.** $A>0,\ C>0$ şi ţinând seamă de identitatea lui *Lagrange*, $B^2-AC<0$. **32.** x^2+x-1. **33.** x^2-3x+2. **34.** $2x^2-3cx+4c^2$. **35.** Să găsim desvoltarea puterii $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^3$. Observăm dela început că trebue să avem o identitate de forma: $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^3=\underset{(1,n)}{\Sigma}a_i^3+\alpha\underset{(1,n)}{\Sigma}a_i^2a_k+\beta\underset{(1,n)}{\Sigma}a_ia_ja_k$ (I) α şi β fiind coeficienţii constanţi pentru suma de n termeni, ce rămâne să-i determinăm. In acest scop, plecăm dela identitatea evidentă: $[\underset{(1,n)}{\Sigma}a_i+a_{n+1}]^3\equiv[a_1+\underset{(2,n+1)}{\Sigma}a_i]^3$ care desvoltată după

formula binomului, dă: $(\underset{(1,n)}{\Sigma} a_i)^3 + a_{n+1}^3 + 3a_{n+1}(\underset{(1,n)}{\Sigma} a_i)^2 + 3a_{n+1}^2 \underset{(1,n)}{\Sigma} a_i \equiv a_1^3 + (\underset{(2,n+1)}{\Sigma} a_i)^3 + 3a_1^2 \underset{(2,n+1)}{\Sigma} a_i + 3a_1 \underset{(2,n+1)}{\Sigma} a_i^2$, sau încă folosind pentru sumele de n termeni $(\underset{(1,n)}{\Sigma} a_i)^3$ şi $[\underset{(2.n+1)}{\Sigma} a_i]^3$ desvoltarea (I) şi făcând toate reducerile, avem: $(\alpha-3)(a_1^2 - a_{n+1}^2) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i + (\alpha-3)(a_1 - a_{n+1}) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i^2 + (\beta-6)(a_1 - a_{n+1}) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i a_k \equiv 0$, deci presupunând cum e necesar $a_1 \neq a_{n+1}$, identitatea: (II) $(\alpha-3)(a_1 + a_{n+1}) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i + (\alpha-3) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i^2 + (\beta-6) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i a_k \equiv 0$ care are loc deci oricare ar fi valorile atribuite lui $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Să presupunem că alegem pe $a_2, a_3, \ldots, a_n$ astfel ca $\underset{(2,n)}{\Sigma} a_i a_k = 0$, însă $\underset{(2,n)}{\Sigma} a_i \neq 0$ şi asemenea $\underset{(1,n+1)}{\Sigma} a_i \neq 0$, având atunci $[\underset{(2,n)}{\Sigma} a_i]^2 = \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i^2$, identitatea (II) devine: $(\alpha-3) \underset{(2,n)}{\Sigma} a_i \cdot \underset{(1,n+1)}{\Sigma} a_i \equiv 0$, deci $\alpha = 3$, care atrage după sine $\beta = 6$. Aşa dar: $[\underset{(1,n)}{\Sigma} a_i]^3 \equiv \underset{(1,n)}{\Sigma} a_i^3 + 3 \underset{(1,n)}{\Sigma'} a_i^2 a_k + 6 \underset{(1,n)}{\Sigma''} a_i a_j a_k$ (I′) în care Σ conţine n termeni; Σ' conţine $A_n^2 = n(n-1)$ termeni, iar Σ'' conţine C_n^3 termeni.

36. Urmând metoda din cazul precedent şi folosind rezultatul obţinut, vom pune: $\underset{1,n}{\Sigma} a_i^4 = \underset{1,n}{\Sigma} a_i^4 + \alpha \underset{1,n}{\Sigma} a_i^3 a_k + \beta \underset{1,n}{\Sigma} a_i^2 a_k^2 + \gamma \underset{1,n}{\Sigma} a_i^2 a_j a_k + \delta \underset{1,n}{\Sigma} a_i a_j a_k a_l$ (I) şi plecând dela identitatea evidentă $(a_1 + \underset{2,n+1}{\Sigma} a_i)^4 \equiv (\underset{1,n}{\Sigma} a_i + a_{n+1})^4$, care desvoltată după formula binomului după toate reducerile posibile, dă: $(\alpha-4)[(a_1^2 + a_1 a_{n+1} + a_{n+1}^2) \underset{2,n}{\Sigma} a_i + \underset{2,n}{\Sigma} a_i^3] + (\beta-6)(a_1 + a_{n+1}) \underset{2,n}{\Sigma} a_i^2 + (\gamma-12)[(a_1 + a_{n+1}) \underset{2,n}{\Sigma} a_i a_k + \underset{2,n}{\Sigma} a_i^2 a_k] + (\delta-24) \underset{2,n}{\Sigma} a_i a_j a_k \equiv 0$, oricare ar fi valorile lui $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Luând: $\underset{2,n}{\Sigma} a_i a_j a_k = 0$; $\underset{2,n}{\Sigma} a_i^2 a_k = 0$ şi $a_1 + a_{n+1} = 0$, avem: $(\alpha-4) \underset{2,n}{\Sigma} a_i [(\Sigma a_i)^2 + a_1^2] = 0$ care dă, presupunând $\underset{2,n}{\Sigma} a_i \neq 0$, imediat: $\alpha = 4$. Luând apoi pe a_i astfel ca să avem: $a_1 + a_{n+1} = 0$, $\underset{2,n}{\Sigma} a_i^2 a_k = 0$, $\underset{2,n}{\Sigma} a_i a_j a_k \neq 0$, avem: $\delta = 24$; apoi astfel ca $a_1 + a_{n+1} = 0$, $\underset{2,n}{\Sigma} a_i^2 a_k \neq 0$ avem: $\gamma = 12$,

şi în fine pentru $a_1+a_{n+1}\neq 0$ avem: $\beta=6$. Aşa dar avem: $\left(\sum_1^n a_i\right)^4=\sum_{1,n} a_i^4+4\sum_{1,n} a_i^3 a_k+6\sum_{1,n} a_i^2 a_k^2+12\sum_{1,n} a_i^2 a_j a_k+24\sum_{1,n} a_i a_j a_k a_l$.

37. Procedând ca în cazurile precedente găsim: $\Sigma_1 a_1^5+5\Sigma_2 a_1^4 a_2+10\Sigma_3 a_1^3 a_2^2+20\Sigma_4 a_1^3 a_2 a_3+30\Sigma_5 a_1^2 a_2^2 a_3+60\Sigma_6 a_1^2 a_2 a_3 a_4+120\Sigma_7 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

III. 1. Observând că $n!=(n-1)!\,n=(n-1)!(n-p+p)$, deducem: $\frac{n!}{(n-p)!}=\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}+\frac{p(n-1)!}{(n-p)!}$, deci $A_n^p=A_{n-1}^p+pA_{n-1}^{p-1}$. Făcând p succesiv $p, p-1,\ldots,1,0$, multiplicând relaţiile acestea respectiv cu $1, -A_p^1, +A_p^2, -A_p^3\ldots$ şi însumându-le, obţinem relaţia căutată. Se poate încă descompune combinările de n litere luate câte m în acelea care conţin o literă determinată şi care nu o conţin; în acelea care conţin două litere determinate a şi b, în acelea care conţin numai pe a, în acelea care conţin numai pe b şi acelea care nu conţin nici pe a nici pe b; în genere se vor descompune combinările în acelea care conţin p litere determinate, în acelea care conţin $p-1$ oarecare din aceste litere, acelea care conţin $p-2$ oarecare din literele considerate, etc.; se va număra câte combinări sunt în fiecare categorie. **2.** Avem $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$, făcând $p=1,2,3\ldots(n-1)$ şi înmulţind, obţinem relaţia căutată. **3.** Relaţia $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$ se verifică imediat. Aplicând-o celor doi termeni din membrul II, obţinem a doua relaţie, apoi fiecărui termen din această primă relaţie, se obţine a treia, etc. **4.** Din relaţia $C_{n+1}^p=C_n^p+C_n^{p-1}$ deducem $C_n^p=C_{n+1}^p-C_n^{p-1}$ $\therefore$ deci $C_{n-k}^{m-k}=C_{n-k+1}^{m-k}-C_{n-k}^{m-k-1}$. Insumând dela $k=0$ până la $k=m$ în membrul II dispar toţi termenii afară de primul C_{n+1}^m. **5.** Observând că oricare ar fi k, $A_n^k A_{n-k}^{m-k}=A_n^m$; primul membru al primei relaţii se scrie sub forma: $A_n^m\sum_{k=0}^{k=m} C_{n-k-1}^{m-k}=A_n^m C_n^m$, iar primul membru al relaţiei

a doua devine $A_n^m \sum_{k=0}^{k=m} (k+1)\, C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m [C_{n-1}^m + 2\, C_{n-2}^{m-1} + 3\, C_{n-3}^{m-2} + \ldots + (m+1) C_{n-m-1}^0] = C_n^m, C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-2} + \ldots + C_{n-m-1}^0 + C_{n-1}^{m-1}$, etc., şi însumând, obţinem $A_n^m (C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{n-m}^0) = A_n^m\, C_{n+1}^m$. (G. M. XLI p. 258). **6.** Cu formulele $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$, membrul I se scrie $\sum_{k=0}^{n} k!\,(n-k)!\, C_n^k (C_n^k)^2 = n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = n!\, C_{2n}^n$ (G. M. XLII. p. 611). **7.** Se stabileşte mai întâi relaţia $C_m^i C_{m-i}^{p-i} = C_m^{m-p} C_p^i$, deducem $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_m^i C_{m-i}^{p-i} = C_m^{m-p} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i = 0$, deoarece $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i = 0$. **8.** Se poate scrie $6 \Sigma C_{n+2}^3 = 6\, C_{n+3}^4 = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$. **9.** $4 \Sigma n^3 - \Sigma n$; însă $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci $\frac{1}{2} n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)$. **10.** $8 \Sigma n^3 + 12 \Sigma n^2 - 2 \Sigma n - 3n = n(n+2)(2n^2 + 4n - 1)$. **11.** $6^3 \Sigma n^3 - 9 \cdot 6^2 \Sigma n^2 + 23 \cdot 6 \Sigma n - 15n = 3n^2(18n^2 - 13)$. **12.** Desfacem pe $(n^4 - 1)$ în sumă de produse de 4, 3, 2, 1 factori consecutivi. Observând că el este divizibil cu $(n-1)$ vom pune: $n^4 - 1 = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \alpha(n-1)(n-2)(n-3) + \beta(n-1)(n-2) + \gamma(n-1)$. Inlăturând factorul $n-1$ şi făcând $n=2$, găsim $\gamma = 15$, apoi înlăturând factorul $(n-2)$ şi făcând $n=3$, găsim $\beta = 25$, apoi $\alpha = 10$. Avem: $n^4 - 1 = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10(n-1)(n-2)(n-3) + 25(n-2)(n-3) + 15(n-1)$, deci: $\sum_{1}^{n} (n^4 - 1) = 24 \sum_{1}^{n} C_{n-1}^4 + 10 \cdot 3! \sum_{1}^{n} C_{n-1}^3 + 25 \cdot 2 \sum_{1}^{n} C_{n-1}^2 + 15\, C_{n-1}^1$ şi folosind proprietăţile numerelor triunghiului lui *Pascal*, avem: $\sum_{1}^{n} (n^4 - 1) = 24\, C_n^5 + 60\, C_n^4 + 50\, C_n^3 + 15\, C_n^2 = \frac{1}{30} n(n-1)(6n^3 + 21n^2 + 31n + 31)$. Din aceasta deducem: $\sum_{1}^{n} n^4 = \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2$

$+n-1$). **13.** Ca în exerciţiul precedent, punând $n^5-n^2+1 = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+\alpha(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+\beta(n-1)(n-2)(n-3)+\gamma(n-1)(n-2)+\delta(n-1)+\varepsilon$ şi făcând $n=1$ găsim $\varepsilon=1$; apoi simplificând cu $n-1$ şi făcând $n=2$, găsim $\delta=28$; simplificând cu $n-2$ şi făcând $n=3$, găsim $\gamma=89$; apoi $\beta=65$, $\alpha=15$; $\Sigma(n^5-n^2+1)=5!\,C_n^6+15.4!\,C_n^5+65.3!\,C_n^4+89.2\,C_n^3+28\,C_n^2+n$. etc.

14. Se va scrie $n+2n+3n+\ldots+n.n-[1.2+2.3+\ldots+n(n-1)]=\frac{n^2(n+1)}{2}-2(C_2^2+C_3^2+\ldots+C_n^2)=\frac{n^2(n+1)}{2}-2C_{n+1}^3=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Se va scrie: $2n\Sigma n-\Sigma n(2n-1)=n^2(n+1)-\Sigma[2(n-1)(n-2)+5(n-1)+1]=n^2(n+1)-4\Sigma C_{n-1}^2-5\Sigma(n-1)-n=n^2(n+1)-4C_n^3-\frac{5n(n-1)}{2}-n=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\Sigma n^2$. **15.** Termenul general fiind de forma: $p^2[n-(p-1)]^2=p^4-2(n+1)p^3+(n+1)^2p^2$, avem: $\sum_{p=1}^{n}p^2[n-(p-1)]^2=\sum_1^n p^4-2(n+1)\sum_1^n p^3+(n+1)^2\sum_1^n p^2=\frac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1)-2(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{30}[6n^3+9n^2+n-1-15n(n+1)^2+5(n+1)^2(2n+1)]=\frac{n(n+1)}{30}(n^3+4n^2+6n+4)=\frac{n+1}{30}[(n+1)^4-1]$. Deasemenea $p^2[2n-(2p-1)]^2=4\Sigma p^4-4(2n+1)\Sigma p^3+(2n+1)^2\Sigma p^2$; se găseşte $\frac{1}{30}n(n+1)(4n^3+6n^2+4n+1)$. **16.** Avem $(p+2)n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)=n(n+1)\ldots(n+p+1)-(n-1)n(n+1)\ldots(n+p)$. Făcând în această identitate $n=1,2,\ldots n$ şi însumând, termenii se reduc afară de penultimul şi găsim rezultatul $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{p+2}$.

17. Cele n^2 numere care urmează pe cele dintâi n, sunt:

$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n^2)=n^3+\frac{(n^2+1)n^2}{2}=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

18. Impătritul sumei este $2[(n+1)^3+n^3+1][(n+1)^3-n^3]$ $=[n^2+(n+1)^2+(2n+1)^2][1^3+n^3+(n+1)^3]$. **19.** a^2+ab+b^2 $=\frac{1}{2}(a-1)a+\frac{1}{2}(b-1)b+\frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)=\frac{1}{2}a(a+1)+$ $\frac{1}{2}b(b+1)+\frac{1}{2}(a+b-1)(a+b)$. **20.** Având $\sum_1^n(2n-1)=n^2$. $\therefore$ $n^6-\Sigma(2n-1)^3$. Observând că $(2n-1)^3=8(n-1)(n-2)(n-3)$ $+36(n-1)(n-2)+26(n-1)+1$ $\therefore$ $\Sigma(2n-1)^3=8.3!$ $C_n^4+36.2\,C_n^3+26\,C_n^2+n=n^2(2n^2-1)$. $\therefore$ $n^6-n^2(2n^2-1)=$ $n^2(n^2-1)^2$. **21.** Se va aduna pe coloane şi termenii din linia de rangul $n+1$, având în vedere suma coeficienţilor binomului; se găseşte $2^{n+1}-(n+2)$. **22.** $x=2n(n+1)$; exemple: $3^2+4^2=5^2$; $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$; 21^2+22^2 $+23^2+24^2=25^2+27^2$; etc. **23.** Suma termenilor din factorul general este $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$, iar valoarea produsului căutat este $\frac{1}{2^{n+1}}(n!)^3(n+1)^2(n+2)$. **24.** Inlocuind pe S_2 şi S_1 prin valorile cunoscute, egalitatea propusă revine la $30\,S_4$ $=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$; S_4 a fost însă calculat (12) şi am găsit $\frac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1)$, de unde rezultă precedenta. **25.** Se va stabili mai întâi că $S_5=\frac{n^2}{12}(2n^4+6n^3$ $+5n^2-1)=\frac{1}{3}S_3(2n^2+2n-1)$, ceeace devine relaţia cerută, avându-se în vedere că $S_3=S_1^2$. **26.** Avem $S_{2,n}=$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, iar $\Sigma S_{2,n}=\frac{1}{3}\Sigma n^3+\frac{1}{2}\Sigma n^2+\frac{1}{6}\Sigma n=\frac{1}{12}$ $n(n+1)(n^2+3n+2)=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$. $S_{3,n}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\Sigma S_{3,n}=\frac{1}{4}\Sigma n^4+\frac{1}{2}\Sigma n^3+\frac{1}{4}\Sigma n^2+\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)$.

27. Numărul numerelor întrebuinţate până la linia de rang n,

este $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, care este dealtfel ultimul număr al liniei precedente, deci numerele din linia de rang n sunt $\frac{1}{2}n(n-1)+1$, $\frac{1}{2}n(n-1)+2$,... $\frac{1}{2}n(n+1)$. Suma cuburilor lor este egală cu suma cuburilor celor dintâi $\frac{1}{2}n(n+1)$ numere mai puţin suma cuburilor celor dintâi $\frac{1}{2}n(n-1)$ numere; se găseşte $\frac{n^2}{64}[(n^3+2n^2+3n+2)^2-(n^3-2n^2+3n-2)^2]=\frac{1}{8}n^3(n^2+1)(n^2+3)$. **28.** La bază avem $\frac{1}{2}n(n+1)$ ghiulele, iar rândul de d'asupra $\frac{1}{2}n(n-1)$, etc.; numărul total este $\Sigma C_{n+1}^2=C_{n+2}^3=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. **29.** La bază avem $\frac{1}{2}n(n-1)$ puncte de contact, între sferele din aceleaşi rânduri şi 2. $\frac{1}{2}n(n-1)$ între sferele din rânduri deosebite; peste tot $\frac{3}{2}n(n-1)$ puncte de contact; în planul următor, d'asupra bazei, vom avea $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ puncte de contact, etc.; sferele din planul al doilea au cu sferele din planul întâi 3. $\frac{1}{2}n(n-1)$ puncte de contact etc. Numărul total este $6\sum_1^n C_n^2=6C_{n+1}^3=(n+1)n(n-1)$. **30.** Avem $\sum_1^n (C_p^2)^2=\frac{1}{4}\sum_1^n p^4-\frac{1}{2}\sum_1^n p^3+\frac{1}{4}\sum_1^n p^2=\frac{n(n+1)}{120}(6n^3+9n^2+n-1-15n^2-15n+10n+5)=\frac{1}{60}(n-1)n(n+1)(3n^2-2)$ şi $\sum_1^n (C_p^2)^2+\frac{1}{2}(C_{n+1}^2)^2=\frac{1}{120}n(n+1)(6n^3+9n^2+11n+4)=\frac{1}{20}(3n^2+3n+4)$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **31.** Termenul de rang i al sumei este $u_i = a_i \frac{[2a_i+(i-1)r]i}{2} = \frac{r^2i^3+r(3a_1-r)i^2+(r-a_1)(r-2a_1)i}{2}$ deoarece $a_i = a_1+(i-1)r$. Dând lui i valorile întregi dela 1 la n, însumând şi notând $S_k = 1^k+2^k+\ldots+n^k$, $2S = r^2S_3+r(3a_1-2r)S_2+(r-2a_1)(r-a_1)S_1$. (G. M. XLI. pag. 449).

32. Impărţim de o parte şi de alta cu a^m, $m = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)$, avem $a^{\frac{n^2-1}{12}} > n\sqrt[n]{\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a^2-1}{a.a^2}\right)\cdots\left(\frac{a^n-1}{a.a^2\ldots a^n}\right)}$, deoarece $1+(1+2)+\ldots+(1+2\ldots+n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; radicalul este media geometrică a cantităţilor din paranteză şi deoarece media aritmetică a n cantităţi pozitive este mai mare decât media lor geometrică (Partea I-a IX. 18), dacă membrul întâi va fi mai mare decât ceiace obţinem înlocuind media geometrică prin media aritmetică, a forţiori inegalitatea va fi adevărată ; deci trebue probat că $a^{\frac{n^2-1}{12}} > n.\frac{1}{n}\left[\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-1}{a.a^2}+\ldots+\frac{a^n-1}{a.a^2\ldots a^n}\right] = 1-\frac{1}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}$, ceia ce este adevărat pentrucă a fiind mai mare decât 1, $a^{\frac{n^2-1}{12}} > 1$, iar $1-\frac{1}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}} < 1$. (G. M. XII).

IV. 1. $a\alpha x+a\beta+b$. **2.** $\frac{(a\alpha+b\alpha')x+b\beta'+a\beta}{(a'\alpha+b'\alpha')x+b'\beta'+a'\beta}$. **3.** $\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$, în care $A = a\alpha^2+b\alpha\alpha'+c\alpha'^2$, $C = a\beta^2+b\beta\beta'+c\beta'^2$, $B = 2a\alpha\beta+b\alpha'\beta+b\alpha\beta'+2c\alpha'\beta'$; A',B',C' se deduc din A,B,C înlocuind pe a,b,c prin a',b',c'. **4.** $1+9x+45x^2+120x^3+210x^4+252x^5+210x^6+120x^7+45x^8+10x^9+x^{10}$. **5.** $-\log x$. **6.** $\log\frac{1+a}{1-a}$; $\log\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}$. **7.** Ridicând la patrat relaţia

dată avem: $f^2(x)=1+\sin 2x$, iar $f(2x)=\sin 2x+\cos 2x$, $f(-x)=\cos x-\sin x$. **8.** $x^2+y^2+2hx+2ky+h^2+k^2-r^2$. **9.** $f(x+h,y+k)=(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f)+(ah^2+2bhk+ck^2+2dh+2ek+f)+[2(ah+bk)x+2(bh+ck)y-f]=f(x,y)+f(h,k)+P(x,y)$. **10.** $2(xy+xz+yz)+r^2$. $x^2+y^2+z^2+2hx+2ky+2lz+h^2+k^2+l^2-r^2$. **11.** Analog cu (8), avem $P(x,y,z)=2(Ah+B''k+B'l)x+2(B''h+A'k+Bl)y+2(B'h+Bk+A''l)z-D$. **12.** $x^5+y^5+z^5+5(x^4+y^4+z^4)+10(x^3+y^3+z^3)-3xyz+5(x^2+y^2+z^2)-3(xy+xz+yz)+2(x+y+z)$. **13.** Egalitatea dată poate fi scrisă: $n[f(n)-f(n-1)]=f(n-1)-f(n-2)$, care se verifică imediat. **14.** Avem $a_n a_{n+1}[f(n)-f(n-1)]=a_{n-1}a_n[f(n-1)-f(n-2)]$, $a_{n+1}=ba_n=b^2a_{n-1}$. **15.** Dacă $f(x)$ este de gradul n, expresiunea din membrul I este de gradul $n-2$, deci $n=3$; punând $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, substituind şi identificând, rezultă $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\alpha x+\beta$, α şi β fiind arbitrari.

16. Fie $f(x)=\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$. Prin ipoteză avem $A\neq 0$; $A'\neq 0$ şi unul din C şi C′ diferit de zero. Dacă scriem condiţiunea ca $f(1-x)\equiv f(x-1)$, avem $(AB'-A'B)(x-1)^2-(BC'-B'C)\equiv 0$ din care rezultă: $BC'-B'C=0$ şi $AB'-A'B=0$, adică presupunând $B'\neq 0$, avem: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, care reduce fracţiunea la o constantă. Dacă $B'=0$ ** $B=0$, celelalte rămânând arbitrare. In acest caz, trebue să avem încă: $\frac{Ax^2+C}{A'x^2+C'}\cdot\frac{A+Cx^2}{A'+C'x^2}=1$ care dă: $AC'=A'C$ şi $A^2+C^2=A'^2+C'^2$. $A+C=\pm(A'+C')$ şi $A-C=\pm(A'-C')$ Primul sistem: $\begin{cases}A+C=A'+C'\\A-C=A'-C'\end{cases}$ dă $A=A'$, $C=C'$ care reduce fracţia la o constantă. 2°) $\begin{cases}A+C=A'+C'\\A-C=C'-A'\end{cases}$ care dă $A=C'$, $C=A'$ şi avem: $f(x)=\frac{Ax^2+A'}{A'x^2+A}$. 3°) $\begin{cases}A+C=-A'-C'\\A-C=A'-C'\end{cases}$ care dă $A=-C'$, $C=-A'$, adică

$f(x)=\frac{Ax^2-A'}{A'x^2-A}$; 4°) $\begin{cases} A+C=-A'-C' \\ A-C=-A'+C' \end{cases}$ ** $\begin{matrix} A=-A' \\ C=-C' \end{matrix}$ deci $f(x)$ constantă. Aşadar, singurele soluţiuni posibile: $f(x)=\frac{Ax^2+\varepsilon A'}{A'x^2+\varepsilon A}$ unde $\varepsilon=1$ sau $\varepsilon=-1$. **17.** Deducem imediat din relaţia cerută: $P(x,y)=\frac{1}{2}[F(x,y)+F(y,x)]R(x,y)$ şi $Q(x,y)=\frac{1}{2}[F(x,y)-F(y,x)]R(x,y)$; deci dacă punem: $F(x,y)=\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}$, avem: $R(x,y)=2F_2(x,y)F_2(x,y)$; $P(x,y)=$ $=F_1(x,y)F_2(y,x)+F_1(y,x)F_2(x,y)$; $Q(x,y)=F_1(x,y)F_2(y,x)-$ $-F_1(y,x)F_2(x,y)$, unde $F_1(x,y)$ şi $F_2(x,y)$ sunt polinoamele întregi.

V. 1. Pentru $x=1$ numărătorul şi numitorul se reduc la zero. Punând $x=1+\varepsilon$ expresiunea devine $E=\frac{3+3\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}$ ... $\lim_{x\to 1} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=\frac{3}{4}$. **2.** In acelaş fel găsim: $-\frac{11}{5}$. **3.** Punând $x=-1+\varepsilon$, expresiunea devine $E=\frac{1+\varepsilon}{-2+\varepsilon}$, $\lim E=-\frac{1}{2}$. **4.** Punând $x=-1+\varepsilon$ găsim: $E=\frac{-2\varepsilon^3+\varepsilon^4}{\varepsilon^3(-1+\varepsilon)}=\frac{-2+\varepsilon}{-1+\varepsilon}$ ... $\lim E=\frac{-2}{-1}=+2$. **5.** Făcând pe $x=a+\varepsilon$, simplificând şi trecând la limită, avem: ma^{m-1}. **6.** Vom scrie sub forma: $E=\frac{x^m-a^m}{x-a}\cdot\frac{x^n-a^n}{x-a}$, rezultatul $mn\,a^{m+n-2}$. **7.** In acelaş fel, scriind: $E=\frac{x^m-a^m}{x-a}\cdot\frac{x^n-a^n}{x-a}\cdot\frac{x^p-a^p}{x-a}$, vom avea ca limită $mnp\,a^{m+n+p-3}$. **8.** $m_1\,m_2\ldots m_n\,a^{m_1+m_2+\ldots+m_n-n}$. **9.** Facem $x=1+\varepsilon$ şi simplificând cu ε, expresiunea devine $E=\frac{(1+\varepsilon)^{m-1}-1}{\varepsilon}$ $+\frac{(1+\varepsilon)^{m-2}-1}{\varepsilon}+\ldots+\frac{(1+\varepsilon)-1}{\varepsilon}$; dar $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^p-1}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}$.

$[(1+\varepsilon)^{p-1}+(1+\varepsilon)^{p-2}+\ldots+1]=p$, deci $\lim_{x\to 1} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=$ $=1+2+3+\ldots+(m-1)=\frac{(m-1)m}{2}$. **10.** După ce facem $x=1+\varepsilon$ şi simplificăm, avem: $E=\frac{2+2\varepsilon+\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)\varepsilon}$. Când facem pe x să tindă către 1, deci $\varepsilon\to 0$, numărătorul tinde către 2, iar numitorul către zero: deci valoarea fracţiunei creşte nemărginit. **11.** Făcând pe $x=1+\varepsilon$, expresiunea dată devine succesiv:

$$E=\frac{n\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}-(1+\varepsilon)^{n-1}+1-\varepsilon}{\varepsilon[(1+\varepsilon)^2-1]}=$$

$$=\frac{[n(1+\varepsilon)^{n-1}-1]-[(1+\varepsilon)^{n-2}+\ldots+1]}{\varepsilon(\varepsilon+2)}=$$

$$=\frac{2[(1+\varepsilon)^{n-1}-1]+[(1+\varepsilon)^{n-1}-(1+\varepsilon)^{n-2}]+\ldots+[(1+\varepsilon)^{n-1}-(1+\varepsilon)]}{\varepsilon(\varepsilon+2)}$$

$$=\frac{2[(1+\varepsilon)^{n-2}+..+1]+(1+\varepsilon)^{n-2}+(1+\varepsilon)^{n-3}(\varepsilon+2)+..+(1+\varepsilon)[(1+\varepsilon)^{n-3}+..+1]}{\varepsilon+2};$$

deci $\lim_{x\to 1} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=\frac{2(n-1)+1+2+\ldots+n-2}{2}=$

$=\frac{(n-1)(n+2)}{4}$. (S. E. G. M. III. p. 44). **12.** Expresiunea dată poate fi scrisă sub forma: $E=\frac{[(x^2-a^2)-a^2]^5}{[(x^2+a^2)-3a^2]^4}=$

$=\frac{(x^2-2a^2)^5}{(x^2-2a^2)^4}=x^2-2a^2$, deci $\lim_{x\to a} E=0$. (S.E.G.M. III.p.45).

13. Aducem radicalii la acelaş indice şi notând $\sqrt[6]{x}=y$, $\sqrt[6]{a}=b$ avem de aflat limita fracţiunii $\frac{y^3+3by^2-3b^2y-b^3}{y^2-b^2}$ pentru y, tinzând către b. Rezultatul final este $3\sqrt[6]{a}$ (G. M. III).

14. Expresiunea dată poate fi scrisă subt forma: $E=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}+\frac{\sqrt[8]{x}-1}{x-1}$, deci ne propunem să găsim limita unei expresiuni de forma $e=\frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1}$, când x tinde către 1. Punând

$\sqrt[p]{x}=y$, avem: $e=\dfrac{y-1}{y^p-1}$ şi acum făcând pe $y=1+\varepsilon$ avem: $e=\dfrac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^p-1}=\dfrac{1}{(1+\varepsilon)^{p-1}+(1+\varepsilon)^{p-2}+\ldots+1}$, deci $\lim\limits_{y\to 1} e=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e=\dfrac{1}{p}$. Aşadar $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$. **15.** Se va face numărătorul raţional, după aceia făcând $x=1+\varepsilon$ şi simplificând găsim că limita este $\dfrac{7}{6}$. **16.** Expresiunea se poate pune sub forma: $\dfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$; rezultatul $\dfrac{1}{6}$. **17.** Din fiecare parte, raţională sau iraţională, se va scădea valoarea pe care o ia pentru $x=1$, diferenţele se vor divide su $x-1$; găsirea limitei fiecărei părţi ca la 13 şi 14; rezultatul este $\dfrac{35}{33}$. (G. M. V.). **18.** Procedeu analog; rezultatul este $\dfrac{1163}{972}$. (G. M. I.). **19.** Punând $x=1+\varepsilon$ şi simplificând, expresia devine: $\dfrac{1}{\varepsilon}[b\varepsilon^2+(a+3b)\varepsilon+(2a+3b)]$, deci pentru a avea limita finită trebue să avem: $2a+3b=0$. **20.** $ma+nb=0$. **21.** $m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_na_n=0$. **22.** Se va pune $\sqrt[12]{x}=y$, expresiunea dată devine $\dfrac{m(y^6-1)+n(y^4-1)+p(y^3-1)}{(y^{12}-1)^3}$. Punând $y=1+\varepsilon$, numărătorul devine $\mathrm{N}=(6m+4n+3p)\varepsilon+(15m+6n+3p)\varepsilon^2+(20m+4n+p)\varepsilon^3+\ldots$. iar numitorul $\mathrm{N}'=\varepsilon^3[(1+\varepsilon)^{11}+(1+\varepsilon)^{10}+\ldots+1]$, deci trebue să avem: $6m+4n+3p=0$ şi $15m+6n+3p=0$. **23.** Procedeu analog, numărătorul $\mathrm{N}=\varepsilon^2[(6+9m+4n)+(9+18m+4n)\varepsilon+(5+15m+n)\varepsilon^2+(1+6m)\varepsilon^3+m\varepsilon^4]$, iar numitorul ε^3, deci trebue să avem: $9m+4n+6=0$. **24.** Scriem expresiunea sub forma: $\mathrm{E}=\dfrac{(x^m-1)(x^n-1)-n(x^m-1)(x-1)+n(x^m-1)(x-1)-mn(x-$

$$= \frac{x^m-1}{x-1} \times \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1-n}{x-1} + n \cdot \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1-m}{x-1}.$$

Dar: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1} = m$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n-1}+\ldots+1-n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{x^i-1}{x-1} =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^i-1}{x-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$. Avem deci $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E} =$

$= m\,\frac{n(n-1)}{2} + n\,\frac{m(m-1)}{2} = \frac{1}{2}\,mn(m+n-2)$ **25.** Scriem expresiunea sub forma:

$$\mathrm{E} = \frac{(x^m-1)(x^n-1)(x^p-1) - np(x-1)^2(x^m-1) + np(x-1)^2(x^m-1) - mnp(x-1)^3}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{x^m-1}{x-1} \cdot \frac{(x^n-1)(x^p-1) - np(x-1)^2}{(x-1)^3} + np\,\frac{\dfrac{x^m-1}{x-1} - m}{x-1}.$$ Dar

$\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E}_1 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1} = m$; $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E}_2 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^n-1)(x^p-1) - np(x-1)^2}{(x-1)^3}$

$= \frac{1}{2}\,np(n+p-2)$ şi $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E}_3 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1-m}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}$

$\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{x^i-1}{x-1} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^i-1}{x-1} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}$; deci $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{E} = \frac{1}{2}$

$mnp\,(n+p-2) + \frac{1}{2}\,npm(m-1) = \frac{1}{2}\,mnp\,(m+n+p-3)$.

26. $\mathrm{E} = \dfrac{(x^{m_1}-1)\,(x^{m_2}-1)\ldots(x^{m_n}-1) - m_1\,m_2\ldots m_n\,(x-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$.

Observând că exerciţiul acesta generalizează pe cele două precedente **24** şi **25**, şi observând că rezultatele în acele cazuri sunt de acelaş fel, vom presupune că el subzistă în cazul a $(n-1)$ coeficienţi, şi să arătăm că el subzistă şi în cazul următor a n coeficienţi. Admitem prin urmare că

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{E}_{n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^{m_1}-1)(x^{m_2}-1)\ldots(x^{m_{n-1}}-1) - m_1\,m_2\ldots m_{n-1}(x-1)^{n-1}}{(x-1)^n}$$

$$= \frac{1}{2}\,m_1\,m_2\ldots m_{n-1}\,[m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}-(n-1)] \quad (1).$$

Scriem expresiunea E_n sub forma: $E_n = \frac{x^{m_n}-1}{x-1} \times$

$\frac{(x^{m_1}-1)(x^{m_2}-1)\ldots(x^{m_{n-1}}-1)-m_1 m_2 \ldots m_{n-1}(x-1)^{n-1}}{(x-1)^n} +$

$m_1 m_2 \ldots m_{n-1} \cdot \frac{\frac{x^{m_n}-1}{x-1} - m_n}{x-1}$ sau încă: $E_n = \frac{x^{m_n}-1}{x-1} \times$

$E_{n-1} + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} \cdot \frac{x^{m_n-1}+x^{m_n-2}+\ldots+1-m_n}{x-1}$, deci:

$\lim_{x\to 1} E_n = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m_n}-1}{x-1} \times \lim_{x\to 1} E_{n-1} + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} \lim_{x\to 1} \frac{x^{m_n-1}+\ldots+1-m_n}{x-1}$

$= m_n \cdot m_1 m_2 \ldots m_{n-1}[m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}-(n-1)] + m_1 \ldots m_{n-1} \frac{m_n(m_n-1)}{2}$

$$= \frac{1}{2} m_1 m_2 \ldots m_n (m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n]. \qquad (2)$$

Cum acest rezultat a fost demonstrat pentru $n=3$, el este adevărat pentru n egal cu $4; 5, \ldots, n$. **27.** Punând $x = \frac{1}{\varepsilon}$, avem $E = \frac{a+b\varepsilon}{a'+b'\varepsilon}$, pentru ca x să crească nemărginit, trebue să facem pe ε să tindă către *zero*. Avem deci: $\lim_{n\to\infty} E = \lim_{\varepsilon\to 0} E = \frac{a}{a'}$.

28. Avem $E = \frac{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2}{a'+b'\varepsilon+c'\varepsilon^2}$ *** $\lim_{x\to\infty} E = \lim_{\varepsilon\to 0} E = \frac{a}{a'}$. **29.** Avem:

$E \equiv \varepsilon^{n-m} \times \frac{a+a_1\varepsilon+\ldots+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+a_m\varepsilon^m}{b+b_1\varepsilon+\ldots+b_{n-1}\varepsilon^{n-1}+b_n\varepsilon^n}$. Pentru $m<n$, $\lim \varepsilon^{n-m}=0$, iar $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a+a_1\varepsilon+\ldots+a_m\varepsilon^m}{b+b_1\varepsilon+\ldots+b_n\varepsilon^n} = \frac{a}{b}$, deci $\lim_{x\to\infty} E = \lim_{\varepsilon\to 0} E = 0$; pentru $m=n$, $\lim_{x\to\infty} E = \lim_{\varepsilon\to 0} E = \frac{a}{b}$; pentru $m>n$ al doilea factor are limita $\frac{a}{b}$, iar primul factor $\frac{1}{\varepsilon^{m-n}}$ crește peste orice limită, deci E crește nemărginit când $x \to \infty$.

30. Inlocuind pe x prin $\frac{1}{\varepsilon}$ expresiunea devine:

$E=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}+\varepsilon^{\frac{1}{12}}+1}{(1-\varepsilon^3)^{\frac{1}{4}}+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$; deci $\lim_{x\to\infty} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=\frac{1}{1}=1.$

31. Inlocuind pe x prin $\frac{1}{\varepsilon}$, expresiunea devine:

$$E=\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{1+\sqrt{1+\varepsilon^{\frac{3}{2}}}}-1\right]}{\varepsilon^{-\frac{4}{8}}\sqrt[8]{1-5\varepsilon^2+\varepsilon^4}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\varepsilon^{\frac{3}{2}}}}-1}{\sqrt[8]{1-5\varepsilon^2+\varepsilon^4}},$$ deci $\lim_{x\to\infty} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=\sqrt{2}-1.$ **32.** Scriind expresiunea sub forma:

$$E=\frac{\sqrt[3]{x+7a}}{\sqrt[5]{x+a}}\times\frac{1-\sqrt[3]{\frac{8a}{x+7a}}}{1-\sqrt[5]{\frac{2a}{x+a}}}$$ şi făcând $x=\frac{1}{\varepsilon}$ avem:

$$E=\varepsilon^{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}\times\frac{\sqrt[3]{1+7a\varepsilon}}{\sqrt[5]{1+a\varepsilon}}\times\frac{1-\sqrt[3]{\frac{8a\varepsilon}{1+7a\varepsilon}}}{1-\sqrt[5]{\frac{2a\varepsilon}{1+a\varepsilon}}}.$$ Observând că limitele factorilor al doilea şi al treilea sunt *1* şi că $\frac{1}{5}-\frac{1}{3}<0$, deducem că valoarea expresiei trece peste orice limită când x creşte nemărginit. **33.** Expresiunea poate fi scrisă: $E=\frac{1+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$. Făcând pe $x=\frac{1}{\varepsilon}$, avem: $E=\frac{1+\varepsilon}{1+\sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2}}$, deci $\lim_{x\to\infty} E=\lim_{\varepsilon\to 0} E=\frac{1}{2}$. **34.** Făcând pe $x=\frac{1}{\varepsilon}$, expresiunea poate fi pusă sub forma: $E=\frac{(a-a')+(b-b')\varepsilon+(c-c')\varepsilon^2}{\varepsilon\left[\sqrt{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2}+\sqrt{a'+b'\varepsilon+c'\varepsilon^2}\right]}$. Dacă $a\neq a'$, $\lim_{x\to\infty} E=\infty$; dacă $a=a'$ însă $b\neq b'$, avem $\lim_{x\to\infty} E=\frac{b-b'}{2\sqrt{a}}$; dacă în fine $a=a'$, $b=b'$, dar $c\neq c'$ *** $\lim_{x\to\infty} E=0.$

35. Expresiunea se va scrie $\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}$. Nedeterminarea $\infty-\infty$ devine $\frac{\infty}{\infty}$, care ridicată ca în exer-

ciţiile precedente, dă limita $\frac{1}{3}$. **36.** Procedeu analog. Limita $\frac{a}{3}$ (S. E. G. M. II. p. 108). **37.** $\frac{1}{3}$. **38.** $\frac{2}{3}$. **39.** 0. **40.** $\sqrt{x^2+x+1}$ şi $\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ tind către infinit cu x, să scriem expresiunea dată sub forma $(\sqrt{x^2+x+1}-x)+(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)-$ $-(p-2)x$, când x creşte nemărginit prima paranteză tinde către $\frac{1}{2}$, a doua către $\frac{1}{3}$, ca limita să fie finită trebue $p=2$, iar limita va fi $\frac{5}{6}$. (G. M. VIII). **41.** Se va scrie sub forma $(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x)+(\sqrt{a'x^2+b'x+c'}-\sqrt{a'}x)-[p-(\sqrt{a}+$ $+\sqrt{a'})]x-q$ $\therefore$ $p=\sqrt{a}+\sqrt{a'}$, $q\neq\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{b'}{\sqrt{a'}}\right)$ şi limita $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{b'}{\sqrt{a'}}\right)$. **42.** Generalizarea chestiunei 40; trebue $p=k$; limita va fi $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_n}$. (G. M. VIII). **43.** Fie $P(x)=Ax^p+A_1x^{p-1}+\cdots$, $Q(x)=Bx^q+B_1x^{q-1}+\cdots$ Se vede în primul rând că $\frac{q}{n}$ nu poate fi diferit de $\frac{p}{m}$, căci presupunând de exemplu $\frac{q}{n}<\frac{p}{m}$, putem scrie expresiunea sub forma: $x^{\frac{q}{n}}\left[x^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}\sqrt[m]{A+\frac{A_1}{x}+\cdots}-\sqrt[n]{B+\frac{B_1}{x}+\cdots}\right]$ şi în acest fel se vede că limita nu există, valoarea expresiunii crescând nemărginit cu x. Prin urmare $\frac{p}{m}=\frac{q}{n}$ şi în acest caz raţionalizând expresiunea avem:

$$E=\frac{P^n-Q^m}{\sqrt[mn]{(P^n)^{mn-1}}+\sqrt[mn]{(P^n)^{mn-2}Q^m}+\cdots+\sqrt[mn]{(Q^m)^{mn-1}}}$$

şi scoţând x la puterea cea mai mare în factor, avem $x^{np-\frac{p}{m}}$, care trebue să fie egal în grad cu numărătorul, deci în primul

rând: $mp-\frac{p}{m}$ întreg, adică $\frac{p}{m}$ întreg. Punând $\frac{p}{m}=k$, trebue deci ca gradul numărătorului să fie $(np-k)$. Aşadar $\frac{p}{m}=\frac{q}{n}=k$ (k intreg) şi $P^n-Q^{m!}$ să fie un polinom de grad exact $pn-k$.

44. Avem $S_2^2:S_1^3=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2:\frac{n^3(n+1)^3}{8}=\frac{2}{9}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n+1}\right)$; deci $\lim\limits_{n\to\infty}(S_2^2:S_1^3)=\frac{8}{9}$. In cazul general S_m este un polinom de gradul $(m+1)$, lucru care se vede, pe baza relaţiunii cunoscute $(n+1)^{m+1}=1+C_{m+1}^1S_m+C_{m+1}^2S_{m-1}+C_{m+1}^3S_{m-2}+\ldots+C_{m+1}^mS_1+n$, din aproape în aproape. S_1 fiind de gradul al 2-lea şi S_2 de gradul al 3-lea, urmează că S_3 este de gradul al 4-lea, etc. Aşadar, pentru ca $\frac{S_p^m}{S_{p+i}^{m-i}}$ să aibă o limită finită şi diferită de zero, trebue ca gradul numărătorului să fie egal cu cel al numitorului, adică $m(p+1)=(m-i)(p+i+1)$ care dă $m=p+i+1$. Pentru această valoare a lui m, avem $\frac{S_p^m}{S_{p+i}^{m-i}}=\frac{(p+i+1)^{m-i}}{(p+1)^m}\cdot\frac{(n+1)^{(p+1)m}}{(n+1)^{(p+i+1)(m-i)}}\cdot\frac{\left[1-\frac{1}{(m+1)^{p+1}}-C_{p+1}^2\frac{S_{p-1}}{(n+1)^{p+1}}-\ldots\right]^m}{\left[1-\frac{1}{(m+1)^{p+i+1}}-C_{p+i+1}^2\frac{S_{p+i-1}}{(m+1)^{p+i+1}}-\ldots\right]^{m-i}}$, deci: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_p^{p+i+1}}{S_{p+i}^{p+1}}=\frac{(p+i+1)^{p+1}}{(p+1)^{p+i+1}}$. Făcând $p=1$, $i=1$ avem rezultatul găsit mai sus: $S_1^3:S_2^2=\frac{9}{8}$.

45. Avem: $E_1=n\left(\frac{S_1}{n^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(n+1)}{2}-\frac{n}{2}=\frac{1}{2}$; $E_2=n\left[\frac{S_2}{n^3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{S_2}{n^2}-\frac{n}{3}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}-\frac{n}{3}=\frac{n}{3}+\frac{1}{2}-\frac{n}{3}+\frac{1}{6n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}E_2=\frac{1}{2}$. In cazul general, avem: $E_m=n\left[\frac{S_m}{n^{m+1}}-\frac{1}{m+1}\right]=\frac{(m+1)S_m-n^{m+1}}{(m+1)n^m}$. $\therefore(m+1)S_m=(n+1)^{m+1}-\frac{(m+1)m}{2}S_{m-1}$

$+f_1(n)$, unde $f_1(n)$ este un polinon în n de gradul $(m-1)$; dar: $m\,S_{m-1}=(n+1)^m-f_2(n)$, unde $f_2(n)$ este un polinom în n de gradul $(m-1)$ cel mult, avem deci: $(m+1)\,S_m=n^{m+1}+(m+1)n^m-\frac{(m+1)}{2}n^m+f(n)$, unde $f(n)$ este un polinom în n de gradul $(m-1)$ cel mult, şi ca urmare: $E_m=\frac{\frac{(m+1)n^m}{2}+f(n)}{(m+1)n^m}=\frac{1}{2}+\frac{f(n)}{(m+1)n^m}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^m}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}E_m=\frac{1}{2}$. **46.** Termenul general se poate scrie $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, iar $f(n)=1-\frac{1}{n+1}$; când n creşte scăzătorul descreşte, $f(n)$ tinde către 1 când n creşte nemărginit. **47.** Fie r raţia progresiei, termenul general se poate scrie: $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right]$, iar $f(n)=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nr}\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\frac{1}{a_1 r}$. **48.** Avem: $S_1+S_2+\ldots+S_n=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2-a^{n+1}}{1-a}+\ldots+\frac{a^n-a^{n+1}}{1-a}=\frac{a-a^{n+1}}{(1-a)^2}-\frac{na^{n+1}}{1-a}$, unde $a=\frac{1}{2}$, când n creşte nemărginit a^{n+1} şi na^{n+1} tind către zero, deci $lim.\ (S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots)=\frac{a}{(1-a)^2}=2$; pe de altă parte $lim.\ S_1=1$, $lim\ S_2=\frac{1}{2}\ldots\ldots$, deci

$$lim.\ S_1+lim.\ S_2+lim.\ S_3+\ldots=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2\therefore\ lim.\ (S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots)=$$

$$lim.\ S_1+lim.\ S_2+\ldots+lim.\ S_n+\ldots$$

49. Observăm în primul rând că avem: $p_1-p_2=(-1)\frac{p-q}{2^2}$ (1) şi în general relaţiunea: $p_{2n}-p_{2n+1}=(-1)\left[\frac{p_{2n-1}-p_{2n}}{2}\right]$ (2). $p_{2n+1}-p_{2n+2}=(-1)\left[\frac{p_{2n}-p_{2n+1}}{2}\right]$ (3). Făcând în (2) şi (3) pe

n să ia valori 1, 2,..., şi înmulţind toate relaţiunile astfel obţinute, şi (1), avem : $p_{2n-1} - p_{2n} = (-1)^{2n-1} \frac{p-q}{2^{2n}}$ (4) şi $p_{2n} - p_{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot \frac{p-q}{2^{2n+1}}$ (5). Făcând acum în relaţiunile (4) şi (5) pe n să ia valori 1, 2,..., $(n-1)$ şi adunând la suma lor relaţia (4) avem: $p_1 - p_{2n} = (p-q)\left[-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}\right]$. Insă $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2n+2}}\right]$

şi $\sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$

deci: $p_1 - p_{2n} = (p-q)\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$.

De unde $p_1 - \lim_{n\to\infty} p_{2n} = \frac{4}{3}(p-q)\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right]$ sau încă:

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n} = p_1 + \frac{1}{6}(p-q) = \frac{p+q}{2} + \frac{1}{6}(p-q) = \frac{2p+q}{3}.$$

Din relaţiunea (5) mai rezultă că $\lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} p_{2n}$. In cazul când se înlocuiesc mediile aritmetice prin mediile geometrice, avem în primul rând: $p_1 = p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$; $p_2 = p^{\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{4}}$, $p_3 = p^{\frac{5}{8}} q^{\frac{3}{8}}$. Apoi observăm din aproape în aproape că: $\left(\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}\right)^2 = \frac{p_{2n-1}\, p_{2n-2}}{p_{2n-1}^2} = \frac{p_{2n-2}}{p_{2n-1}}$, ridicând relaţia din nou la patrat avem: $\left(\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}\right)^{2^2} = \frac{p^2_{2n-2}}{p^2_{2n-1}} = \frac{p^2_{2n-2}}{p_{2n-2}\, p_{2n-3}} = \frac{p_{2n-2}}{p_{2n-3}}$ înlocuind totdeauna pe cel cu indicele mai mare prin relaţia care îl defineşte. Găsim astfel relaţiunea importantă: $\left(\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}\right)^{2^{(n-1)}} = \frac{p_2}{p_1}$ sau încă $\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2^{2(n-1)}}}$ (I).

Din această primă relaţiune, dacă presupunem că p_{2n} şi p_{2n-1}

au fiecare limită când $n \to \infty$, rezultă că: $\lim_{n\to\infty} p_{2n} = \lim_{n\to\infty} p_{2n-1}$.

Plecând dela $\left(\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}\right)^2 = \frac{p_{2n}\,p_{2n-1}}{p^2{}_{2n}} = \frac{p_{2n-1}}{p_{2n}}$, se găseşte ca mai sus o a doua relaţiune: $\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{1}{2^{2(n-1)}}}$ (II). Făcând acum pe n egal cu $n-1$, n, $n-2$, $n-3, \ldots 2$ în ambele relaţiuni şi înmulţindu-le între ele şi cu I găsim:

$$\left(\frac{p_{2n}}{p_3}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2^{2(n-1)}}+\ldots+\frac{1}{2^2}} \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{1}{2^{2(n-2)}}+\ldots+\frac{1}{2^2}};$$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot p_3 = p_3^{\frac{3}{4}} : p_1^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{4}{3}} q^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2 q}.$$

50. p şi q fiind pozitive, toate numerele p_n şi q_n sunt pozitive. Avem în primul rând: $p_n - p_{n+1} = p_n - \frac{p_n+q_n}{2} = \frac{1}{2}(p_n - q_n)$ şi $q_n - q_{n+1} = q_n - \sqrt{p_n q_n} = \sqrt{q_n}\,[\sqrt{q_n} - \sqrt{p_n}]$, deci ştiind că media aritmetică a două numere pozitive este mai mare ca media geometrică a lor, avem: $p_n > p_{n+1}$; $q_n < q_{n+1}$. Dacă $j<i$, $p_i > q_i > q_{i-1} > \ldots > q_j$; dacă $j>i$, $p_i > p_{i+1} > \ldots > p_j > q$ deoarece avem relaţia: $p_j - q_j = \frac{p_{j-1}+q_{j-1}}{2} - \sqrt{p_{j-1}\,q_{j-1}} = \frac{1}{2}$ $(\sqrt{p_{j-1}} - \sqrt{q_{j-1}})^2 > 0$. (1) Făcând în relaţiunea: $p_j - q_j = \frac{1}{2}$ $(\sqrt{p_{j-1}} - \sqrt{q_{j-1}})^2$, pe j egal succesiv cu 2, 3, 4, ... , $n-1$, n şi înmulţind aceste relaţiuni, avem după simplificările făcute:

$$(2)\quad p_n - q_n = \frac{1}{2^{n-1}}(\sqrt{p_1} - \sqrt{q_1})^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2}}\right)\left(\frac{\sqrt{p_3}-\sqrt{q_3}}{\sqrt{p_3}+\sqrt{q_3}}\right)\ldots$$

$$\left(\frac{\sqrt{p_{n-1}}-\sqrt{q_{n-1}}}{\sqrt{p_{n-1}}+\sqrt{q_{n-1}}}\right).$$ Observăm acum că pentru $i>2$, avem:

$$\frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2}} - \frac{\sqrt{p_i}-\sqrt{q_i}}{\sqrt{p_i}+\sqrt{q_i}} = \frac{2(\sqrt{p_2 q_i} - \sqrt{q_2 p_i})}{(\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2})(\sqrt{p_i}+\sqrt{q_i})},$$ dar $p_2 > p_i$ şi $q_i > q_2$, deci $p_2 q_i > q_2 p_i$ *** $\sqrt{p_2 q_i} - \sqrt{q_2 p_i} > 0$ şi ca urmare:

$$(3)\quad \frac{\sqrt{p_i}-\sqrt{q_i}}{\sqrt{p_i}+\sqrt{q_i}} < \frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2}}$$ pentru $i=3,4\ldots$ Avem în acest caz:

$p_n - q_n < \frac{1}{2^{n-1}}(\sqrt{p_1}-\sqrt{q_1})^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2}}\right)^{n-2}$ (4). Când facem pe n să crească nemărginit în relaţia (4) factorii $\frac{1}{2^{n-1}}$ şi $\left(\frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{q_2}}\right)^{n-2}$ tind către zero, deci întreg produsul tinde *către zero*, deci

$$\lim_{n\to\infty}(p_n - q_n) = 0.$$

51. Prima parte ca mai sus. Numerele p descresc cu n, iar numerele q cresc cu n; $q_1 < q_2 < \ldots$; $p_n - q_n = \frac{(p-q)^2}{2(p+q)} \cdot \frac{p_1-q_1}{2(p_1+q_1)} \ldots$ dar $\frac{p_1-q_1}{p_1+q_1} > \frac{p_i-q_i}{p_i+q_i}$, deci avem: $p_n - q_n < \frac{1}{2^n} \frac{(p-q)^2}{p+q}\left(\frac{p_1-q_1}{p_1+q_1}\right)^{n-1}$ $\therefore \lim_{n\to\infty}(p_n - q_n) = 0$, avem apoi $p_1 q_1 = pq$, $p_2 q_2 = p_1 q_1 \ldots p_n q_n = pq$, deci $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \sqrt{pq}$.

52. -1. (G. M. II). **53.** Punând $\frac{b^2}{a} = 2p + \varepsilon$, unde $\lim_{a\to\infty} \varepsilon = 0$, expresiunea dată devine $a - \sqrt{a^2 - 2ap - a\varepsilon}$ şi făcând-o raţională la numărător, se vede că ea tinde către p. **54.** $-\frac{31}{34}$ (G. M. III). **55.** Avem $A_{n+1} = \sqrt{a + A_n}$, $A_n = \sqrt{a + A_{n-1}}$.., $A_2 > \sqrt{a + \sqrt{a}} > A_1$, deci $A_{n+1} > A_n$, iar din $A^2_{n+1} - A_n - a = 0$, $A_n^2 - A_n - a < 0$, prin urmare A_n, care creşte necontenit, rămâne necontenit mai mic de cât rădăcina pozitivă a trinomului precedent, prin urmare tinde către o limită; această limită este $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$. Limita este raţională şi întreagă pentru $a = k(k+1)$, k fiind un număr întreg pozitiv; când a tinde către zero expresiunea precedentă tinde câte *1*. **56.** Se va căuta o relaţie între limita de determinat pentru cazul când sunt $p-1$ radicali suprapuşi şi acela când sunt p radicali; rezultatul este: $2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \ldots \mp \frac{1}{n^{p-1}}\right] \pm \frac{1}{n^p}$. (G. M. VI.). **57.** Se va ţine seamă de relaţiile cunoscute din

geometrie $a'=\frac{r+a}{2}$, $r'=\sqrt{ra'}=\sqrt{r\frac{r+a}{2}}$; înlocuim pe r' şi facem numărătorul raţional, etc., rezultatul este $\frac{1}{4}$. **58.** R fiind raza sferei, r raza bazei conului, g generatoarea, i înălţimea zonei, V vârful conului, O centrul sferei şi A un punct situat pe cercul de bază al conului, al cărui centru este C, $\overline{OA}^2=\overline{OV}\cdot\overline{OC}$, deci $\overline{OV}=\frac{R^2}{R-i}$; iar $g=\frac{R\sqrt{2Ri-i^2}}{R-i}$, din triunghiul OAV, iar din OAC, $\overline{CA}=r=\sqrt{2Ri-i^2}$, deci raportul este $\frac{rg}{2Ri}=\frac{R(2Ri-i^2)}{R-i}:2Ri=\frac{R(2R-i)}{R-i}:2R$; limita este 1. **59.** Înălţimea fiind $2x$, avem $S_l:S_x=(x\sqrt{R+x}):(R\sqrt{R-x})$. $\therefore \lim_{x\to R}\frac{S_l}{S_x}=\infty$. **60.** Avem $L_1+L_2=L$, deasemenea $L_3+L_4+L_5+L_6=L_1+L_2=L$ etc. Când n creşte nemărginit fiecare din cercurile descrise tinde către un punct al diametrului; limita sumei este necontenit egală cu lungimea cercului dat, pe când suma limitelor este egală cu diametrul său. **61.** Se poate scrie $\frac{2}{\sqrt{x^2+(\pi-x)^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\pi-x)}{tg\frac{1}{2}(\pi-x)}$; când x tinde către π primul factor tinde către $2:\pi$, iar cel de al doilea către 1; limita căutată este $2:\pi$. **62.** Având în vedere inegalităţile $\sin x<x<tg\,x$ $\therefore 0<\frac{1}{x}-cotg\,x<\frac{1}{\sin x}-cotg\,x$ $=\frac{1-\cos x}{\sin x}=tg\frac{x}{2}$; când x tinde către 0, expresiunea dată rămâne cuprinsă între două cantităţi una 0 şi alta care tinde către zero $\therefore \lim\left(\frac{1}{x}-cotg\,x\right)=0$, pentru $\lim x=0$.

63. Putem scrie: $\frac{1-\cos x}{x^2}(1+\cos x+\ldots+\cos^{n-1}x)=\frac{1}{2}\times\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2(1+\cos x+\ldots+\cos^{n-1}x)$; limita este $\frac{n}{2}$. **64.** Ex-

presiunea poate fi pusă sub forma: $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}$, iar limita când $x\to 0$ este $\frac{3}{2}$. **65.** Expresiunea poate fi scrisă şi astfel: $\left(\frac{\sin px}{px}\right)^n\left(\frac{nx}{\sin nx}\right)^p\left(\frac{p^n}{n^p}\right)$; limita este zero, dacă $n>p$; ∞, când $n<p$; 1 când $n=p$. **66.** Se poate scrie $\frac{arc\,tg(a+x)-arc\,tg(a-x)}{(a+x)-(a-x)}:\frac{tg(a+x)-tg(a-x)}{(a+x)-(a-x)}$; punând $arc\,tg(a+x)=\varphi_1$ şi $arc\,tg(a-x)=\varphi_2$, când $x\to 0$, φ_1 şi φ_2 tind către un unghiu $\varphi=arc\,tg\,a$. Apoi însemnând deîmpărţitul cu E_1, avem: $E_1=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{tg\,\varphi_1-tg\,\varphi_2}=\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\right)\times\cos\varphi_1\cos\varphi_2$. Când $x\to 0$, primul factor tinde către 1, ceilalţi doi către $\cos(arc\,tg\,a)=\frac{1}{1+a^2}$. Asemenea împărţitorul poate fi scris: $E_2=\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right).\frac{1}{\cos(a+x)\cos(a-x)}$ deci limita sa când $x\to 0$ este $1.\frac{1}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}$. **67.** Observând că avem: $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$, făcând în această relaţie succesiv $x=\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2^2}\cdots\frac{\alpha}{2^{n-1}}, \frac{\alpha}{2^n}$ şi înmulţind relaţiile obţinute, găsim $P_n=\sin 2\alpha:\left(2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^n}\right)=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}:\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right):\frac{\alpha}{2^n}\right]$, făcând pe n să crească nemărginit, $\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$, iar $\alpha\to 0$, avem $\lim P_n=1$, care este egală cu produsul limitelor factorilor, limita fiecărui factor fiind 1.

VI. 1. $y=x^2$. Să arătăm că funcţiunea $y=x^2$, reală pentru toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$, este continuă în vecinătatea unui punct corespunzător lui $x=x_0$. Avem: $k=(x_0+h)^2-$

$x_0^2 = 2hx_0 + h^2$. Să arătăm că putem determina pe h astfel ca să avem $|k| < \varepsilon$, ε fiind pozitiv dat oricât de mic. $|2hx_0 + h^2| < \varepsilon$; sau încă $|h| . |2x_0 + h| < \varepsilon$ x_0 fiind o valoare luată, putem alege totdeauna un număr pozitiv M, astfel ca pentru h suficient de mic să avem: $|2x_0 + h| < M$. Luând deci pe $|h|$ astfel ca $|h| . M < \varepsilon$, vom satisface *afortiori* condiţiunii $|h| . |2x_0 + h| < \varepsilon$. Aşadar însemnând cu $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$, este de ajuns să luăm creşterea h a variabilei x în intervalul $(-\eta, +\eta)$ pentru a avea creşterea k a funcţiunii y cuprinsă în intervalul $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Funcţiunea $y = x^2$ fiind continuă într'un punct x_0 oarecare al intervalului ei de existenţă, este continuă în ori ce interval (a,b). **2.** $y = x^3$. Avem $k = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 = h(3x_0^2 + 3x_0 h + h^2)$. Să arătăm că fiind dat $\varepsilon > 0$, putem determina un interval pentru creşterea h pentru care să avem $|k| < \varepsilon$, oricât de mic ar fi ε dat. Avem în primul rând: $|h| . |3x_0^2 + 3x_0 h + h^2| < \varepsilon$. Observăm ca în cazul precedent că putem alege un număr pozitiv M astfel ca pentru h suficient de mic să avem: $|3x_0^2 + 3x_0 h + h^2| < M$, deci este de ajuns să luăm $|h| < \frac{\varepsilon}{M}$, pentru ca să avem $|k| < \varepsilon$. Deci funcţiunea fiind continuă în orice punct al intervalului de existenţă, este continuă în orice interval dat în intervalul de existenţă. Dacă luăm $x_0 = 1$ şi $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$ trebue să avem: $|h| . |3 + 3h + h^2| < \frac{1}{10^3}$, deci observând că $|h|$ este mai mic ca 1, putem lua $M = 7$ şi ca urmare: $|h| < \frac{1}{10^3 \times 7}$. Luând $h = \frac{1}{10^3 . 8}$, avem: $k = \frac{1}{10^3 . 8}\left(3 + \frac{3}{10^3 . 8} + \frac{1}{10^6 . 8^2}\right)$ deci $k < \frac{1}{10^3 . 8}(3 + 1 + 1) = \frac{5}{10^3 . 8} < \frac{1}{10^3}$. **3.** Procedăm ca în cazurile precedente. Avem: $k = (x_0 + h)^m - x_0^m = h(m x_0^{m-1} + C_m^2 h x_0^{m-2} + \ldots + h^{m-1}) < \varepsilon$. Luând M astfel ca $|m x_0^{m-1} + C_m^1 x_0^{m-2} h + \ldots + h^{m-1}| < M$, avem $|h| < \frac{\varepsilon}{M}$, etc.

4. Avem $k=sin\,(x_0+h)-sin\,x_0=2\,sin\frac{h}{2}\,cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\left(\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right).h.$ $cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$, deci trebue să determinăm o limită pentru intervalul valorilor pe care le poate avea h pentru ca să avem: $\left|\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right|\times$ $|h|.\left|cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right|<\varepsilon$, dar $\left|\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right|\leqq 1$, $\left|cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right|\leqq 1$, deci este suficient să luăm $|h|<\varepsilon$, pentru ca să avem $|k|<\varepsilon$ oricare ar fi x_0. Deci funcţiunea fiind continuă în orice punct al intervalului ei de existenţă, ea este continuă în orice interval al intervalului de existenţă. **5.** Avem $k=-2\,sin\frac{h}{2}$ $sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$, găsim $|h|<\varepsilon$. **6.** Avem: $k=sin\,[(x_0+h)^2+x_0^2].$ $sin\,[(x_0+h)^2-x_0^2]=sin\,[(x_0+h)^2+x_0^2].\,sin\,[h\,(2x_0+h)]$. Putem scrie $|k|=|sin\,[(x_0+h)^2+x_0^2]|.\left|\frac{sin\,[h\,(2x_0+h)]}{h\,(2x_0+h)}\right|\cdot|2x_0+h|.|h|$; cum primii doi factori au valoarea cel mult egală cu *1*, este de ajuns să luăm $|2x_0+h|.|h|<\varepsilon$, deci alegând pe M astfel ca $|2x_0+h|<M$, limita creşterilor h în condiţiile cerute este $\eta=\frac{\varepsilon}{M}$. etc.

7. $y=sin^m x^n$ Avem ca mai sus: $k=\left(\frac{sin\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{2}}{\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{2}}\right)\times$ $[(x_0+h)^n-x_0^n]\times cos\left[\frac{(x_0+h)^n+x_0^n}{2}\right]\times[sin^{m-1}(x_0+h)^n+$ $+sin^{m-2}(x_0+h)^n.\,sin\,x_0^n+\ldots+sin\,(x_0+h)^n\,sin^{m-1}\,x_0^n]=h$

$$[nx_0^{n-1}+C_n^2hx_0^{n-2}+\ldots+h^n]\left[\frac{sin\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{2}}{\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{2}}\right]\times$$

$$cos\left[\frac{(x_0+h)^n+x_0^n}{2}\right]\times[sin^{m-1}(x_0+h)^n+sin^{m-2}(x_0+h)^n sin x_0^n+$$

$\ldots+sin^{m-1}x_0^n]$. Observând acum că putem alege un număr pozitiv M, astfel ca oricare ar fi h suficient de mic să avem: $|nx_0^{n-1}+C_n^2hx_0^{n-2}+\ldots+h^n|<M$ *** $|k|<|h|$. M . m, deci punând $\eta=\frac{\varepsilon}{M\,.\,m}$, este suficient să luăm pe h în intervalul $(-\eta,+\eta)$ pentru ca să avem $|k|<\varepsilon$; etc. **8.** Avem: $k=$ $arcsin(x_0+h)-arcsin x_0$, sau încă: $|k|=\left|\frac{arcsin(x_0+h)-arcsin x_0}{sin[arcsin(x_0+h)-arcsin x_0]}\right|$ $\times|sin[arcsin(x_0+h)-arcsin x_0]|=|R|\times|(x_0+h)\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-(x_0+h)^2}|$, unde R înlocueşte primul factor al expresiei precedente, şi observăm asupra lui: dacă h tinde către zero, R se apropie de limita *1* prin valori superioare. Dar $|k|=|R|\times$ $|(x_0+h)\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-x_0^2}+x_0\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-(x_0+h)^2}|$ $=|R|\,.\,|h|\,.\left|\sqrt{1-x_0^2}+\frac{(2x_0+h)x_0}{\sqrt{1-x_0^2}+\sqrt{1-(x_0+h)^2}}\right|$; iar h fiind creşterea valorii unui sinus este mai mic în valoare absolută ca 1 şi cea mai mare valoare a numitorului $\sqrt{1-x_0^2}+\sqrt{1-(x_0+h)^2}$ este $\sqrt{1-x_0^2}$ iar cea mai mare valoare a numărătorului $(2x_0+h)x_0$ este $[2|x_0|+1]|x_0|$. Rezultă că putem determina două numere pozitive N şi M. destul de mari, astfel ca să avem pentru oricare h, $|R|<N$ şi $\left|\sqrt{1-x_0^2}+\frac{(2x_0+h)x_0}{\sqrt{1-x_0^2}+\sqrt{1-(x_0+h)^2}}\right|<M$. Odată existenţa numerelor M şi N fiind evidenţiată, este suficient să luăm $|h|<\frac{\varepsilon}{MN}$, pentru ca să avem $|k|<\varepsilon$. etc.

9. Este deajuns să observăm, că având: $k=arccos(x_0+h)-$ $arccos\,x_0$ *** $|k|=\left|\frac{arccos(x_0+h)-arccos x_0}{sin[arccos(x_0+h)-arccos x_0]}\right|\times$ $|x_0\sqrt{1-(x_0+h)^2}-(x_0+h)\sqrt{1-x_0^2}|$

$= \left| \frac{\arccos(x_0+h)-\arccos x_0}{\sin[\arccos(x_0+h)-\arccos x_0]} \right| \times |(x_0+h)\sqrt{1-x_0^2}-x_0\sqrt{1-(x_0+h)^2}|$

etc. **10.** Avem: $|k| = |\operatorname{arctg}(x_0+h)-\operatorname{arctg} x_0| =$

$= \left| \frac{\operatorname{arctg}(x_0+h)-\operatorname{arctg} x_0}{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(x_0+h)-\operatorname{arctg} x_0]} \right| \times |h| \times \left| \frac{1}{1+x_0(x_0+h)} \right|.$

Presupunând $x_0 \neq 0$ şi pe $|h| < |x_0|$, avem evident $1+x_0(x_0+h) > 1$, deci observând că raportul $|R|$ tinde prin valori inferioare către *1* când $h \to 0$, rezultă că este suficient să luăm $|h| < \varepsilon$ pentru ca să avem $|k| < \varepsilon$. In cazul $x_0 = 0$, $k = \operatorname{arctg}(0+h) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\operatorname{arctg} h}{h} \cdot h$, deci aceeaşi concluzie ca în general. **11.** Funcţiunea este reală pentru toate valorile pozitive ale lui x. Luând deci o astfel de valoare $x_0 > 0$, avem: $k = \sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0} = h \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$. Să presupunem că am ales pentru $|h|$ o limită h_1 mai mică evident ca x_0 şi un număr $M > 0$, astfel ca $\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0} > M$ [ceeace este totdeauna posibil oricare ar fi valoarea fixă a lui x_0 şi aceea variabilă a lui h, luând de exemplu $M < \sqrt{x_0-h_1}+\sqrt{x_0}$] şi avem în acest caz $|k| < |h| \cdot \frac{1}{M}$. Aşa dar, este deajuns să luăm pe h cuprins în cel mai mic din intervalele $(-M\varepsilon, +M\varepsilon)$ sau $(-h_1, +h_1)$ pentru ca să avem $|k| < \varepsilon$, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε ce ni s'a dat. Dacă $x_0 = 0$, funcţiunea există numai în semiintervalul la dreapta lui $x_0 = 0$. In acest caz, $k = \sqrt{0+h} - \sqrt{0} = \sqrt{h}$ şi este evident suficient să luăm $h < \varepsilon^2$ pentru ca să avem $k < \varepsilon$. **12.** $y = \sqrt[3]{x}$. Intervalul de realitate al funcţiunii y este $(-\infty, +\infty)$. $k = \sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0} =$

$$h \frac{1}{\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{(x_0+h)x_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

$|k| = |h| \cdot \frac{1}{\left|\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{x_0(x_0+h)}+\sqrt[3]{x_0^2}\right|}$. Fie $h_1 > 0$, o valoare a lui $|h|$ astfel ca $h_1 < |x_0|$ şi fie M un număr pozitiv astfel ca: $\left|\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{x_0(x_0+h)}+\sqrt[3]{x_0^2}\right| > M$ pentru $|h| < h_1$

este de ajuns să luăm pe h cuprins în cel mai mic din intervalele $(-M\varepsilon, +M\varepsilon)$ sau $(-h_1, h_1)$ pentru ca să avem $|k|<\varepsilon$, oricât de mic ar fi numărul positiv ε dat de mai înainte. **13.** $y=\sqrt[m]{x^n}$, procedeu analog ca în cazurile precedente. m şi n sunt numere; fiind numere prime între ele, avem: 1°. Dacă m este par, funcţiunea este continuă în orice interval $(0, +\infty)$; dacă m este impar, funcţiunea este continuă în orice interval cuprins în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

14. $y=arctg\sqrt{x}$, funcţiunea reală există numai pentru valorile pozitive ale lui x. Fie $x_0>0$, una din aceste valori, Avem: $k=arctg\sqrt{x_0+h}-arctg\,x_0$ sau încă

$$k=\frac{arctg\sqrt{x_0+h}-arctg\sqrt{x_0}}{tg\,(arctg\sqrt{x_0+h}-arctg\sqrt{x_0})}\cdot\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{1+\sqrt{x_0(x_0+h)}},\text{ deci}$$

$$|k|=\left|\frac{arctg\sqrt{x_0+h}-arctg\sqrt{x_0}}{tg\,[arctg\sqrt{x_0+h}-arctg\sqrt{x_0}]}\right|\times\frac{|h|}{|1+\sqrt{x_0(x_0+h)}|}\times\frac{1}{|\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}|}.$$

Fixând o valoare convenabilă $h_1<x_0$, ca limită a creşterilor lui $|h|$ putem alege un număr pozitiv M, astfel ca $|(\sqrt{x_0+h})+\sqrt{x_0})\,(1+\sqrt{x_0(x_0+h)}|>M$. Deci primul factor din valoarea lui $|k|$ tinzând prin valori inferioare către *1* când $h\to 0$, este de ajuns să luăm creşterile lui h cuprinse în cel mai mic din intervalele $(-M\varepsilon, +M\varepsilon)$ sau $(-h_1, +h_1)$ pentru ca să avem $|k|<\varepsilon$, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε, dat de mai înainte, etc. **15.** $y=(arctg\,x)^m$; m şi n întregi. Se poate arăta continuitatea funcţiunii y printr'un procedeu direct, ca acele întrebuinţate în exerciţiile precedente. Lucrul se simplifică mult întrebuinţând teoremele cunoscute asupra funcţiunilor continui. Fie u o funcţiune continuă de x şi $y=arctg\,u$; h fiind creşterea variabilei x, k_1 creşterea corespunzătoare a funcţiunii u, k creşterea corespunzătoare funcţiunii y, avem:

$$k=\frac{arctg\,(u_0+k_1)-arctg\,u_0}{tg[arctg(u_0+k_1)-arctg\,u_0]}\times\frac{u_0+k_1-u_0}{1+u_0(u_0+k_1)}.$$ Cum am văzut în cazul particular (8) când $u=x$, putem găsi o limită ε_1 pentru creşterile $|k_1|$ astfel ca pentru $|k_1|<\varepsilon_1$ să avem $|k|<\varepsilon$,

oricât de mic ar fi numărul positiv ε dat de mai înainte. Dar u fiind o funcţiune continuă de x, putem asemenea găsi o limită η pentru creşterile $|h|$, astfel ca pentru $|h|<\eta$ să avem $|k_1|<\varepsilon_1$ oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε_1, găsit mai înainte. Aşadar putem găsi un număr η astfel ca pentru $|h|<\eta$ să avem $|k|<\varepsilon$; etc. **16.** Funcţiunea este discontinuă pentru $x=1$; intervalele de continuitate sunt $(-\infty, 1-\varepsilon)$; $(1+\varepsilon, +\infty)$ unde ε este un număr pozitiv oricât de mic. **17.** Funcţiunea este discontinuă pentru $x=1$ şi $x=-1$; intervalele de continuitate sunt $(-\infty, -1-\varepsilon)$; $(-1+\varepsilon, +1-\varepsilon)$; $(+1+\varepsilon, +\infty)$. **18.** Observăm în primul rând că funcţiunea fiind periodică de perioada egală cu π, este de ajuns să precizăm răspunsurile într'un singur interval de periodicitate, de exemplu în intervalul dela 0 la π. Valorile lui x pentru care funcţiunea este discontinuă sunt acelea din intervalul $(0, \pi)$ care anulează numitorul $\cos x$, deci $x=\frac{\pi}{2}$. Toate valorile congruente cu $\frac{\pi}{2}$ din celelalte intervale de periodicitate sunt puncte de discontinuitate (deci $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, unde $k=0, \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots; \pm n$). Intervalele de continuitate pentru intervalul *ales* sunt: $(0, \frac{\pi}{2}-\varepsilon)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \pi\right)$. **19.** Funcţiunea este periodică, perioada având mărimea 2π; deci x_0 fiind o valoare între 0 şi π, fie intervalul ales: $(x_0, x_0+2\pi)$. Punctele de discontinuitate în acest interval sunt punctele în care $\sin x=0$, deci $x_1=\pi$, $x_2=2\pi$, iar intervalele de continuitate din acest interval ales: $(x_0, \pi-\varepsilon)$; $(\pi+\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$; $(2\pi+\varepsilon, 2\pi+x_0)$. **20.** Funcţiunea poate fi scrisă: $y=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x \cos x}=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x$ deci o funcţiune periodică de perioadă $\frac{\pi}{2}$; este de ajuns să fie studiată pentru intervalul $\left(x_0, x_0+\frac{\pi}{2}\right)$; etc.... **21.** Funcţiunea *are o valoare determinată* pentru orice valoare

a lui x diferită de zero şi este periodică, perioada fiind egală cu π. Fie $(a, a+\pi)$ unul din intervalele de periodicitate, a fiind o valoare între 0 şi $\frac{\pi}{2}$; x_0 şi x_1 cele două valori ale lui x pentru care avem $\frac{1}{x_0}=a$ şi $\frac{1}{x_1}=a+\pi$. Există în intervalul considerat o singură valoare de x pentru care funcţiunea este discontinuă, valoarea dată de ecuaţiunea: $\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{2}{\pi}$. Intervalele de continuite: $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{\pi-2\varepsilon}\right)$; $\left(\frac{2}{\pi+2\varepsilon}; \frac{1}{a+\pi}\right)$, observând trebue să luăm şirul valorilor lui x descrescător, pentru ca acela al lui $\frac{1}{x}$ să fie crescător. **22.** Când x creşte cu o cantitate $h>0$, ori cât de mică am voi, y creşte cu 1. Să luăm $x_0=3$, avem $y_0=3$. Pentru $x=3+h$, avem (h fiind pozitiv) $y_0+k=4$, deci $k=+1$ oricare ar fi creşterea h şi nu putem determina $\eta>|h|$ pentruca să avem $1<\varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv oricât de mic ni s'ar da. **23.** Idem, creşterea lui y este o cantitate finită când x creşte cu $h>0$, ori cât de mic ar fi h.

VII. 1. Avem pentru o valoare oarecare x, $\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$, deci luând $x_0=8$, $\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\frac{1}{12}$, şi urmează să determinăm pentru h un interval astfel ca să avem: $\frac{1}{12}-\frac{\sqrt[3]{8+h}-\sqrt[3]{8}}{h}<0{,}001$, sau încă $\frac{\sqrt[3]{(8+h)^2}+2\sqrt[3]{8+h}-8}{\sqrt[3]{(8+h)^2}+2\sqrt[3]{8+h}+4}<0{,}012$; h fiind o creştere mică, putem să-l presupunem în valoare absolută mai mic ca 1, iar în acest caz pentru toate valorile lui h numitorul are o valoare mai mare decât $\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{7}+4>9{,}5$ deci partea întâia a inegalităţii fiind mai mică decât expresiunea obţinută din ea când înlocuim numitorul prin 9,5, intervalul găsit pentru

h ca să satisfacă inegalităţii: $\sqrt[3]{(8+h)^2}+2\sqrt[3]{8+h}-8<0{,}114$ va satisface *à fortiori* condiţiunii date. Dar punând $\sqrt[3]{8+h}=z$, va trebui să luăm pe z mai mic decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei: $z^2+2z-8{,}114=0$, adică $z<2{,}0189$, deci $8+h<2{,}0189^3$. Dacă $h>0$, găsim că trebue să luăm $h<+0{,}2289$, iar pentru $h<0$ să luăm $h>-0{,}2289$. Intervalul căutat este prin urmare $(-0{,}2289, +0{,}2289)$.

2. $x(a+x)^2(b-x)^3\times[2ab-(6a-5b)x-9x^2]$.

3. $\left[\frac{m}{a+x}+\frac{n}{b+x}+\frac{p}{c+x}\right]\times y$. **4.** $-a:x^2$. **5.** $2:(1-x)^2$.

6. $\frac{2x-3x^2-x^4}{(1+x^3)^2}$. **7.** $\frac{nx^{n-1}+(n-p)x^n}{(1+x)^{p+1}}$. **8.** $-\frac{1}{2}a:x\sqrt{x}$.

9. $\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **10.** $\frac{x(x^2+2)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. **11.** $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{\sqrt{(x-1)^7(x-3)^{13}}}$.

12. $\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$. **13.** Se va face mai întâi numitorul raţional, rezultatul este: $-\frac{2}{x^3}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right]$. **14.** $\frac{ny}{x\sqrt{1-x^2}}$.

15. $y'=\frac{mn\sin^{m-1}nx.\sin(m-n)x}{\sin^{n+1}mx}=mny\frac{\sin(m-n)x}{\sin mx.\sin nx}$.

16. $a+2x\,arc\,tg\frac{x}{a}$. **17.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sin x}-\frac{\cos x.arc\sin x}{\sin^2 x}$.

18. $\frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$. **19.** $\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **20.** $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

21. $\frac{n}{\cos^2 x+n^2\sin^2 x}$. **22.** $\frac{-x\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)(a^2+b^2-2x^2)}}$.

23. $\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{2\sqrt{1-x^2}[1+x\sqrt{1-x^2}]}$. **24.** $\frac{2nx^{2n-1}}{x^{4n}+1}$. **25.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$

$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2\sin x}}$. **26.** $\frac{1}{1+x^2}$. **27.** $\frac{-2}{1+x^2}$. **28.** $\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{b-a}}{(1+x).\sqrt{a+bx}}$.

29. $\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **30.** $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=(2\,arc\sin x)'$. Să considerăm cele

două relaţiuni $y = arc\,sin\, 2x\sqrt{1-x^2}$ şi $z = 2\,arc\,sin\, x$ şi să căutăm o relaţiune intre y şi z; pentru aceasta să eliminăm pe x între ele; din cea de a doua deducem $x = sin\frac{z}{2}$. $\therefore$ $y = arc\,sin\left(2\,sin\frac{z}{2}cos\frac{z}{2}\right) = arc\,sin\,(sin\,z)$ $\therefore$ $sin\,y = sin\,z$. $\therefore$ $y = z + 2k\pi$ sau $y = (2k+1)\pi - z$. $\therefore$ $y \mp z = C^{tă}$. **31.** $y' = \frac{sin\,x}{2\sqrt{1-cos^2 x}} = \frac{1}{2}$. Rezultatul se explică observând că: $y = arc\,tg\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} = arc\,tg\left(tg\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + k\pi$ $\therefore$ $y' = \frac{1}{2}$. **32.** $\frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}(arc\,tg\,x)'$; y având semnificarea din enunţ, fie $z = \frac{1}{2}arc\,tg\,x$. $\therefore$ $x = tg\,2z$, iar $y = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1+tg^2\,2z}-1}{tg\,2z} = arc\,tg\,\frac{1-cos\,2z}{sin\,2z} =$ $arc\,tg(tg\,z)$. $\therefore$ $tg\,y = tg\,z$. $\therefore$ $y = z + k\pi$. $\therefore$ $y' = z'$. **33.** Punând: $u = \frac{4(x-x^3)}{(1+x^2)^2}$ avem: $u'_x = \frac{4(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^3}$, iar $y' = \frac{(1+x^2)^2 u'_x}{\sqrt{x^8-12x^6+38x^4-12x^2+1}} = \frac{(1+x^2)^2 u'_x}{x^4-6x^2+1}$, deci $y'_x = \frac{4}{1+x^2} = 4\,(arc\,tg\,x)'$. Eliminând pe x între $y = arc\,sin\,\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ şi $x = 4\,arc\,tg\,x$, avem $y = arc\,sin\left[\frac{4\,tg\frac{z}{4}\cdot\left(1-tg^2\frac{z}{4}\right)}{\left(1+tg^2\frac{z}{4}\right)^2}\right]$ $= arc\,sin\,(sin\,z)$. $\therefore$ $sin\,y = sin\,z$. $\therefore$ $y \mp z = C^{tă}$. **34.** Punem $u = \frac{2x^2+\sqrt{1-x^2}-1}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}$, $y' = \frac{u'}{1+u^2}$, $u' = \frac{3(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}[x(2\sqrt{1-x^2}-1)]^2}$, $\frac{1}{1+u^2} = \frac{x^2[2\sqrt{1-x^2}-1]^2}{2(1-\sqrt{1-x^2})}$. $\therefore$ $y' = \frac{3}{2\sqrt{1-x^2}}$. Aceiaşi derivată ca a funcţiunii $z = \frac{2}{3}\,arc\,sin\,x$. Eliminând pe x, aflăm

$$tg\,y=\frac{2\sin^2\frac{2z}{3}+\cos\frac{2z}{3}-1}{2\sin\frac{2z}{3}\cos\frac{2z}{3}-\sin\frac{2z}{3}}=\frac{\cos\frac{2z}{3}-\cos\frac{4z}{3}}{\sin\frac{4z}{3}-\sin\frac{2z}{3}}$$

$=tg\,z\,.\,\therefore\,y-z=k\pi$. (G. M. Vol. XXXVII. p. 273).

35. Avem: $y'_x=\frac{-4(x+1)}{4(x+1)^4+1}$ şi $z'_x=-\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2x^2+6x+5}=\frac{-4(x+1)}{4x^4+16x^3+24x^2+16x+5}=y'$. Pentru a explica rezultatul observăm că avem: $tg\,z=\frac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}}{1+\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}}=$

$\frac{2}{4x^2+8x+4}=\frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x+1}=tg\,y$. (G. M. XXXIV. p. 475). **36.** $y'=z'=\frac{1}{1+x^2}=(arctg\,x)'$. Fie $u=arctg\,x$, $\alpha=arctg\,a$, $\beta=arctg\,b$, avem $y=arctg\frac{tg\,u+tg\,\alpha}{1-tg\,u\,tg\,\alpha}=arc\,tg\,[tg(u+\alpha)]\,.\,\therefore$ $y-u=\alpha+k\pi\;.\,\therefore\;y'=u'$; în mod analog găsim $z=arc\,tg\,[tg\,(u+\alpha+\beta)]\,\therefore z-u=\alpha+\beta+k\pi\,.\,\therefore z'=u'$. **37.** Fie $u=arc\,tg\frac{a+2x-ax^2}{1-2ax-x^2}$ şi $v=arctg\frac{b+3x-3bx^2-x^3}{1-3bx-3x^2+bx^3}$, se găseşte $v'=\frac{3(1+b^2)(1+x^2)^2}{(1+b^2)(1+x^2)^3}=\frac{3}{1+x^2}$ şi $v'=\frac{2(1+a^2)(1+x^2)^2}{(1+a^2)(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}$, deci $y'=3\frac{2}{1+x^2}-2\frac{3}{1+x^2}\;.\,\therefore\;y'=0$. Fie $a=tg\,\alpha$, $b=tg\,\beta$, $x=tg\,\varphi$, $\frac{a+2x-ax^2}{1-2ax-x^2}=tg\,(\alpha+2\varphi)$, iar $\frac{b+3x-3bx^2-x^3}{1-3bx-3x^2+bx^3}=$ $tg(\beta+3\varphi)\,.\,\therefore\;y=3\,arctg\,[tg(\alpha+2\varphi)]-2\,arctg\,[tg(\beta+2\varphi)]=$ $3\alpha+6\varphi+k\pi-2\beta-6\varphi-k'\pi=C^{te}\,.\,\therefore\;y'=0$. **38.** $y'=z'=\frac{-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}$. Din relaţiile date deducem $\frac{\alpha+\beta x}{\beta+\alpha x}=\frac{tg\,z}{siny}\;.\,\therefore$ $x=\frac{\alpha\,siny-\beta\,tg\,z}{\alpha\,tg\,z-\beta\,siny}$, substituind în cea de a doua din relaţiile

date deducem: $tg\,z=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.\frac{\sqrt{(\alpha tg z-\beta sin y)^2-(\alpha sin y-\beta tg z)^2}}{\alpha(\alpha sin y-\beta tg z)+\beta(\alpha tg z-\beta sin y)}=$

$\frac{\sqrt{tg^2 z-sin^2 y}}{sin\,y}$ $\therefore$ $sin\,y=\frac{tg\,z}{\sqrt{1+tg^2 z}}=sin\,z$ $\therefore$ $y\mp z=C^{te}$.

39. $y'=z'=u'=\frac{cos\,x}{(a+b\,cos\,x)^2}$. Pentru a explica rezultatul, observăm în primul rând că: $y-z=\frac{b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[2\,arctg\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}tg\frac{x}{2}\right)\right.$

$\left.-arctg\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,sin\,x}{b+a\,cos}\right)\right]$ și că punând: $arctg\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}tg\frac{x}{2}\right)=\varphi$,

$arctg\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,sin\,x}{b+a\,cos\,x}\right)=\psi$ și $v=2\varphi-\psi$, vom avea $tg\,v=0$. In

adevăr: $tg\,2\varphi=\frac{2\,tg\,\varphi}{1-tg^2\varphi}=\frac{2\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}tg\frac{x}{2}}{1-\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}\,tg\frac{x}{2}}{(a+b)-(a-b)tg^2\frac{x}{2}}$;

$$tg\,\psi=\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,sin\,x}{b+a\,cos\,x}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}\,sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{(b+a)cos^2\frac{x}{2}-(a-b)sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}\,tg\frac{x}{2}}{(b+a)-(a-b)\,tg^2\frac{x}{2}}$$ *** $tg\,(2\varphi-\psi)=0$. In acelaș fel

punând: $\frac{b+a\,cos\,x}{a+b\,cos\,x}=\theta$, avem: $tg^2\theta=\frac{1}{cos^2\theta}-1=\frac{(a+b\,cos\,x)^2}{(b+a\,cos\,x)^2}-1$

$=\frac{(a^2-b^2)\,(1-cos^2 x)}{(b+a\,cos\,x)^2}=\frac{(a^2-b^2)\,sin^2 x}{(b+a\,cos\,x)^2}=tg^2\psi$, deci $tg\,(\theta-\psi)$

sau $tg\,(\theta+\psi)$ ete nulă; deci suma sau diferența celor două funcțiuni este o constantă. A treia rezultă din primele două.

40. Din $y'_1=y'$ $\therefore$ $y_1=y+C$ $\therefore$ $tg\,2\,y_1=tg\,(2\,y+C)$,

$u_1=\frac{tg\,2\,y+tg\,C}{1-tg\,C.tg\,2y}=\frac{a(1-x^2)+2x}{(1-x^2)-2ax}$, $a=tg\,C$, luând $a=0$ găsim

$u_1=\frac{2x}{1-x^2}$. In mod analog $u_2=\frac{2u_1}{1-u_1^2}$... **41.** Punând $\alpha x+\beta=u$,

avem $x'=f'(u)u'$, însă $f'(u)=-\frac{2}{u^3}$, $u'=\alpha_1 \therefore x'=-\frac{2\alpha}{(\alpha x+\beta)^3}$.

42. Punând $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}=u$, $x'=f(u)u'$, $f'_u=\frac{ab'-ba'}{(a'u+b')^2}$, $u'=\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{(\alpha' x+\beta')^2}$, $\therefore x'=\frac{(ab'-ba')(\alpha\beta'-\beta\alpha')}{(a'u+b')^2(\alpha' x+\beta')^2}=\frac{(ab'-ba')(\alpha\beta'-\beta\alpha')}{[(\alpha a'+b'\alpha')x+(\alpha'\beta+b'\beta')]^2}$.

43. $8x\cos 4x^2$. **44.** $x'=[\cos(\arcsin x)-\sin(\arcsin x)]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **45.** Prin definiţiune $y'_x=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$, însă $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}:\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\therefore y'_x=y'_t:x'_t=-\frac{2t}{1-t^2}$. **46.** $y'_x=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$. **47.** $y'_x=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta$. **48.** $f'_x=2(Ax+By+D)$; $f'_y=2(Bx+Cy+E)$. **49.** $f'_x=2(Ax+B''y+B'z+C)$; $f'_y=2(B''x+A'y+Bz+C')$; $f'_z=2(B'x+By+A''z+C'')$.

50. $f'_x=\frac{-x\cos y}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-y^2}\cdot\cos x$; $f'_y=-\sqrt{1-x^2}\cdot\sin y-\frac{y\sin x}{\sqrt{1-y^2}}$. **51.** $f'_x=\frac{a}{\cos^2(ax+by-cz)}+\frac{b}{\cos^2(bx-cy+az)}-\frac{c}{\cos^2(-cx+ay+bz)}$; etc.

52. Se va aplica formula $f'_x+y'f'_y=0$ $\therefore y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

53. $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **54.** $y'=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **55.** $y'=max^{m-1}$, $y''=m(m-1)ax^{m-2}\ldots y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)ax^{m-n}$, dacă $n>m$, $y^{(n)}=0$; pentru $n=m$, $y^{(n)}=n!\,a$. **56.** $y=x^{-1}$, $y'=-x^{-2}$, $y''=1\cdot 2x^{-3}$, $y'''=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}\ldots$. $y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-n-1}$. **57.** $y=(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $y'=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $y''=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\ldots y^{(n)}=-\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$,

58. $y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, $y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$

$= \sin(\pi+x) \ldots\ y^{(n)} = \sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)\ldots$ **59.** $f(x)$ și $g(x)$ nu depind de x, pentrucă derivatele lor sunt nule. Punând $f(x) \equiv g(x) + k$, determinăm pe k dând lui x valoarea zero. Avem $k=0$. (S. E. G. M. II. p. 48). **60.** Derivând amândouă părțile egalității în raport cu t; x, y, z fiind priviți ca parametri și făcând apoi pe $t=1$ în egalitatea obținută, găsim relația cerută. Dacă mai general avem: $f(t^{m_1}x_1, t^{m_2}x_2, \ldots, t^{m_p}x_p) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_p)$ se găsește în același fel, relația: $\sum_{i=1}^{p} m_i f'_{x_i} = mf(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. **61.** Derivăm ambele părți ale egalității date în raport cu a, obținem $\Sigma = \frac{(ax-1)[(n+2)a^{n+1}x^{n+1}-1)]-x(a^{n+2}x^{n+1}-a)}{(ax-1)^2} =$

$\frac{(n+1)a^{n+2}x^{n+2}-(n+2)a^{n+1}x^{n+1}+1}{(ax-1)^2}$.

VIII. 1. Funcțiunea y există pentru toate valorile lui x dela $-\infty$ la $+\infty$, fiind $+\infty$ la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$ Rezolvind însă în raport cu x se vede că pentru valorile reale ale lui x avem $y \geqq -\frac{1}{8}$, prin urmare, cea mai mică valoare a funcțiunii y este $-\frac{1}{8}$, valoare care este atinsă pentru $x = -\frac{5}{4}$. Scriind pe y sub forma: $y = 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ se vede că dacă x crește dela $-\infty$ la $\frac{5}{4}$, funcțiunea continuă y descrește dela $+\infty$ până la $-\frac{1}{8}$, apoi x crescând dela $\frac{5}{4}$ la $+\infty$, funcțiunea y crește dela $-\frac{1}{8}$ la $+\infty$. Deci are un *minim* când $x = \frac{5}{4}$.

Metoda generală. Derivata funcțiunii y fiind: $y' = 4\left(x-\frac{5}{4}\right)$,

deducem că pentru $x < \frac{5}{4}$ avem $y' < 0$, iar pentru $x > \frac{5}{4}$ avem $y' > 0$; deci variabila x crescând dela $-\infty$ la $\frac{5}{4}$, funcţiunea descreşte, iar crescând dela $\frac{5}{4}$ la $+\infty$, funcţiunea creşte, prin urmare funcţiunea trece printr'un *minim* pentru $x = \frac{5}{4}$, anume $y = -\frac{1}{8}$. **2.** Funcţiunea y există pentru toate valorile lui x dela $-\infty$ la $+\infty$, având valoarea $-\infty$ la capetele intervalului. Rezolvând în raport cu x relaţiunea dintre y şi x, se vede că pentru toate valorile reale ale lui x funcţiunea y este mai mică sau cel mult egală cu $\frac{5}{4}$, deci funcţiunea y admite un maxim pentru $x = \frac{1}{2}$. *Metoda generală.* Calculând derivata lui y în raport cu x, găsim: $y' = -2x + 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ de unde rezultă că derivata anulându-se pentru $x = \frac{1}{2}$, avem $y' > 0$, pentru $x < \frac{1}{2}$ şi $y' < 0$ pentru $x > \frac{1}{2}$. Aşadar, x crescând dela $-\infty$ la $+\frac{1}{2}$, funcţiunea y creşte, *apoi* crescând de la $\frac{1}{2}$ la $+\infty$, funcţiunea y descreşte, deci ea trece printr'o valoare maximă $\left(y = \frac{5}{4}\right)$ pentru $x = \frac{1}{2}$. **3.** Se observă că funcţiunea devine infinită pentru $x = 1$, deci intervalele în care funcţiunea este continuă (intervalele de continuitate) sunt: $(-\infty, 1-\varepsilon)$; $(+1+\varepsilon, +\infty)$, unde ε este un număr pozitiv oricât de mic vrem. Deci avem două intervale în care urmează să studiem variaţiunea funcţiunii y. Rezolvind egalitatea în raport cu x vedem că pentru valorile reale

ale lui x avem fie $y<-1$, fie $y>+7$, deci în primul interval de continuitate, funcţiunea y fiind $-\infty$, la capetele intervalului, funcţiunea are un maxim $(y=-1)$; iar în al doilea interval de continuitate, funcţiunea y fiind $+\infty$ la capetele intervalului, ea are un minim $(y=+7)$. *Metoda generală.* Calculând derivata lui y, găsim: $y'=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$, semnul îl dă numărătorul, numitorul fiind totdeauna pozitiv în intervalele de continuitate. In primul interval de continuitate derivata se anulează pentru $x=-1$ şi avem: $y'>0$ pentru $x<-1$ şi $y'<0$ pentru $x>-1$, deci când x creşte dela $-\infty$ până la $+1-\varepsilon$, funcţiunea y creşte până când x devine -1, apoi descreşte. Prin urmare y trece printr'un maxim $(y=-1)$ pentru $x=-1$, în primul interval. In al doilea interval de continuitate, y' se anulează pentru $x=+3$, având $y'<0$ pentru $x<3$ şi $y'>0$ pentru $x>3$, deci când x creşte dela $+1+\varepsilon$ la $+\infty$, funcţiunea descreşte pentru $x<3$ şi creşte pentru $x>3$. Prin urmare y trece printr'un *minim* $(y=+7)$ pentru $x=3$. **4.** Funcţiunea este continuă pentru toate valorile lui x cuprinse în intervalul $(-\infty, +\infty)$, luând pentru valorile $x=-\infty$ şi $x=+\infty$ (capetele intervalului) valoarea $+1$, căci $\lim_{x\to\pm\infty} y=+1$. Rezolvând în raport cu x egalitatea dată, avem: $x=+1\pm\sqrt{-2\frac{y+1}{y-1}}$, deci pentru valorile reale trebue să avem: $\frac{y+1}{y-1}\leqq 0$ adică ia valori cuprinse între -1 care este *un minim* al lui y şi $+1$ valoarea pe care o ia la capetele intervalului. *Metoda generală.* Derivata funcţiunii fiind: $y'=\frac{8(x-1)}{(x^2-2x+3)^2}$, se anulează pentru $x=1$ şi având $y'<0$ pentru $x<+1$ şi $y'>0$ pentru $x>1$, urmează că dacă x creşte dela $-\infty$ la $+1$, funcţiunea y descreşte, apoi când x creşte dela $+1$ la $+\infty$, funcţiunea y creşte; deci y trece printr'un *minim* $y=-1$ pentru $x=1$.

Funcțiunea y se anulează pentru $x=1\pm\sqrt{2}$. **5.** Observăm în primul rând că funcțiunea y devine infinită (discontinuă) pentru valorile $x_1=-1$, $x_2=+6$, care anulează numitorul fără să anuleze numărătorul; deci vom avea de studiat variațiunea funcțiunii y în trei intervale de continuitate $(-\infty, -1-\varepsilon)$; $(-1+\varepsilon, +6-\varepsilon)$; $(+6+\varepsilon, +\infty)$. Mai observăm că valorile care anulează funcțiunea y, anume $x'''=-2$ și $x^{IV}=4$ se găsesc una în primul interval de continuitate, a doua în al doilea interval. Derivata funcțiunii y fiind

$$y'=\frac{-3\left(x-\frac{14-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\frac{14+2\sqrt{10}}{3}\right)}{(x^2-5x+6)^2},$$

x anulează pentru $x'=\frac{14+2\sqrt{10}}{3}$ și $x''=\frac{14-2\sqrt{10}}{3}$, deci avem $y'<0$ pentru toate valorile lui $x>\frac{14+2\sqrt{10}}{3}$ sau $x<\frac{14-2\sqrt{10}}{3}$ și $y'>0$ pentru $\frac{14-2\sqrt{10}}{3}<x<\frac{14+2\sqrt{10}}{3}$. Așadar, făcând tabloul variațiunii avem:

x	$-\infty$	-2	$-1-\varepsilon$	$-1+\varepsilon$	x''		4	$6-\varepsilon$	$6+\varepsilon$	x'	$+\infty$
y'	$-$			$-$	0	$+$		$+$	$+$	0	$-$
y	$+1$ desc.		$-\infty$	$+\infty$ desc.	m	cr.		creș. $+\infty$	$-\infty$ cr.	M	desc. $+1$
		0					0				

$$\frac{2}{3}\times\frac{25-277\sqrt{10}}{1893}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{25+277\sqrt{10}}{1893}$$

Variaţiunile funcţiunilor sunt cuprinse în tablourile respective:

6.

x	y'	y	
$-\infty$		$+1$	
	$+$	creşte	
$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\varepsilon$		$+\infty$	
$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\varepsilon$		$-\infty$	disc.
	$+$	creşte	
0	0	M	$y_M=-1$
$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\varepsilon$	$-$	descr.	
		$-\infty$	
$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\varepsilon$		$+\infty$	disc.
	$-$	descr.	
2	0	m	$y_m=\frac{3}{5}$
	$+$	creşte	
$+\infty$		$+1$	

7.

x	y'	y	
$-\infty$		$+2$	
	$+$	creşte	
$-1-\varepsilon$		$+\infty$	
$-1+\varepsilon$		$-\infty$	disc.
$0{,}5$	$+$	creşte	$y=0$
$5-3\sqrt{2}$	0	M	$y_M=+1-\frac{2}{3}\sqrt{2}$
1			$y=0$
	$-$	desc.	
$+2-\varepsilon$		$-\infty$	
$+2+\varepsilon$		$+\infty$	disc.
	$-$	descr.	
$5+3\sqrt{2}$	0	m	$y_m=+1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$
	$+$	creşte	
$+\infty$		$+2$	

8.

x	y'	y	
$-\infty$		$+\frac{3}{2}$	
	$+$	creşte	
$-1-\varepsilon$		$+\infty$	
$-1+\varepsilon$		$-\infty$	disc.
$\frac{1-\sqrt{13}}{6}$	$+$	creşte	
		0	$y=0$
$+\frac{1}{2}-\varepsilon$	$+$	creşte	
		$+\infty$	
$+\frac{1}{2}+\varepsilon$		$-\infty$	disc.
	$+$	creşte	
$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$		0	$y=0$
	$+$	creşte	
$+\infty$		$+\frac{3}{2}$	

9.

x	y'	y	
$-\infty$		$+2$	
	$+$	creşte	
$-1-\varepsilon$		$+\infty$	
$-1+\varepsilon$		$-\infty$	
	$+$	creşte	
0	0	M	$y=-2$
	$-$	descr.	
$+1-\varepsilon$		$-\infty$	
$+1+\varepsilon$		$+\infty$	
	$-$	descr.	
$+\infty$		$+2$	

10.

x	y'	y	
$-\infty$		$+1$	
	$+$	creşte	
$-\sqrt{3}-\varepsilon$		$+\infty$	
$-\sqrt{3}+\varepsilon$		$-\infty$	
	$+$	creşte	
$-\sqrt{\frac{7}{3}}$	0	M	$y_M=-8$
	$-$	desc.	
$-\sqrt{2}-\varepsilon$		$-\infty$	
$-\sqrt{2}+\varepsilon$		$+\infty$	
	$-$	desc.	
-1	0	m	$y=0$
	$+$	creşte	
0	0	M	$y=\frac{1}{6}$
	$-$	desc.	
$+1$	0	m	$y=0$
	$+$	creşte	
$+\sqrt{2}-\varepsilon$		$+\infty$	
$+\sqrt{2}+\varepsilon$		$-\infty$	
	$+$	creşte	
$+\sqrt{\frac{7}{3}}$	0	M	$y=-8$
	$-$	desc.	
$+\sqrt{3}-\varepsilon$		$-\infty$	
$+\sqrt{3}+\varepsilon$		$+\infty$	
	$-$	desc.	
$+\infty$		$+1$	

11. In cazul $b^2-a^2>0$, variaţiunea lui y este aceeaşi cu a funcţiunii $u=\dfrac{x+\dfrac{a^3}{b^2-a^2}}{x(x-a)}$, iar dacă $b^2-a^2<0$, variaţiunea lui y se obţine prin simetrie din aceea a funcţiunii u. Derivata funcţiunii u fiind: $u'_x=\dfrac{\left(x-\dfrac{a^2}{b+a}\right)\left(x+\dfrac{a^2}{b-a}\right)}{x^2(x-a)^2}$, ea se anulează pentru $x'=\dfrac{a^2}{a+b}$ şi $x''=\dfrac{a^2}{a-b}$. Dacă $b>a>0$, avem tabloul variaţiunii lui u următorul

$b>a>0$

x			
$-\infty$		0	
	$+$	creşte	
$\frac{a^2}{a-b}$	0	M	$u=+\frac{1}{a(a+b)}$
	$-$	desc.	
$0-\varepsilon$		$-\infty$	
$0+\varepsilon$		$+\infty$	
	$-$	desc.	
$\frac{a^2}{a+b}$	0	m	$u=\frac{a+b}{a(b-a)}$
	$+$	creşte	
$a-\varepsilon$		$+\infty$	
$a+\varepsilon$		$-\infty$	
	$+$	creşte	
$+\infty$		0	

In acelaş fel, se vor alcătui tablourile variaţiunii lui u, anume: $a>0$, $0<b<a$; $a>0$, $b<0$; $a<b<0$; $b<a<0$, etc.

12. Observăm că putem scrie: $y=1+u$, unde $u=\dfrac{5b-3ax}{x^2+ax-2b}$

deci pentru a avea variațiunea lui y, este de ajuns să studiem pe aceea a lui u. Punem: $\delta = a^2 + 8b$ și $\delta' = 25b^2 - 3a^2b$. 1^0. Presupunem $\delta < 0$, funcțiunea u este continuă dela $-\infty$ la $+\infty$. In acest caz, dacă $\delta' \leqq 0$, derivata păstrează un semn constant, semnul lui a. Deci când $a > 0$, $u' > 0$, iar u crește continuu; când $a < 0$ avem $u' < 0$ iar u descrește continuu. In cazul când $\delta' > 0$ fie $x_1 < x_2$ cele două rădăcini ale derivatei, adică: $u' = \frac{3a(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+ax-2b)^2}$. Dacă $a > 0$, avem $u' > 0$ pentru $x < x_1$; $u' < 0$ pentru $x_1 < x < x_2$ și $u' > 0$ pentru $x > x_2$, deci funcțiunea are *un maxim* pentru $x = x_1$ și *un minim* pentru $x = x_2$. Dacă $a < 0$, avem $u' < 0$ pentru $x < x_1$ sau $x > x_2$ și $u' > 0$ pentru $x_1 < x < x_2$, deci funcțiunea are *un minim* pentru $x = x_1$ și *un maxim* pentru $x = x_2$. 2^0. Să presupunem $\delta > 0$ și fie $x' < x''$ rădăcinile trinomului $x^2 + ax - 2b$. In acest caz, intervalele de continuitate sunt: $(-\infty, x' - \varepsilon)$; $(x' + \varepsilon, x'' - \varepsilon)$; $(x'' + \varepsilon, +\infty)$. Pentru a studia variațiunea lui u în cazul $\delta' \leqq 0$, observăm că în fiecare interval de continuitate lucrurile se petrec ca în cazul $\delta' \leqq 0$, $\delta < 0$. In cazul când $\delta' > 0$, rădăcinile $x_1 < x_2$ trebue aranjate în intervalele de continuitate; ele pot fi situate amândouă în acelaș interval, sau în două intervale diferite. Tablourile variațiunii lui u se obțin în fiecare din cazurile posibile, ca în cazurile numerice tratate, ce preced. **13.** Se va rezolva succesiv în raport cu y și x, se găsește $-\frac{4}{5} \leqslant x$, $-\frac{3}{10} \leqslant y$.

14. $1 - \sqrt{6} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{6}$; $3 - 2\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 3 + 2\sqrt{3}$.

15. $x \geqslant \frac{-16+2\sqrt{19}}{15}$ sau $x \leqslant \frac{-16-2\sqrt{19}}{15}$, y oricare. Valorile limite, ale lui x și y din exemplele precedente, reprezintă maximele sau minimele acestora. **16.** $a = -0{,}4$; $b = 5{,}2$. (G. M. IV). **17.** Valorile lui x, pentru care y este un maximum sau un minimum, sunt date de ecuația (1) $ax^2 - 3x + 4a = 0$, $(y' = 0)$, iar valorile maxime și minime ale lui y sunt date de ecuația (2): $a^2(2y-1)^2 - (y-1)(2y+1) = 0$, (metoda in-

directă); exprimând că produsul rădăcinilor ecuaţiei (1) este egal cu produsul rădăcinilor ecuaţiei (2), avem $(a^2+1):(4a^2-2)=4 \therefore a=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. **18.** $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')\leqq 0$.

19. Tabloul variaţiunii este următorul:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		creşte	M	descr.	m	creşte	M	descr.	
	$-\infty$		$+6$		$+5$		$+6$		$-\infty$

Din această variaţie se vede că trinomul bipătrat are numai două rădăcini reale $x'<-1$ şi $x''>+1$, curba reprezentativă a variaţiei lui y, taie axa $x'x$ numai în două puncte în intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(+1, +\infty)$. **20.** Tabloul variaţiunii este următorul:

x	$-\infty$		$-\sqrt{0.3}$		0		$+\sqrt{0,3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		descr.		creşte		descr.		creşte	
	$+\infty$		$+6{,}55$		$+7$		$+6{,}55$		$+\infty$

Din această variaţie se vede că trinomul bipătrat n'are nici o rădăcină reală, curba reprezentativă a variaţiei lui y nu taie axa $x'x$. **21.** Se poate scrie $(x-1)^3+8$, nici maxim nici minim. Când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$, y creşte continuu dela $-\infty$ la $+\infty$. **22.** Tabloul variaţiunii lui y este următorul:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{9}$		$+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	creşte	$2\frac{55}{243}$ M	descr.	m -25	creşte	$+\infty$

Curba reprezentativă a variaţiei taie axa $x'x$ pentru $x'=-\frac{1}{2}$,

$x''=+\frac{1}{3}$, $x'''=+3$. **23.** Tabloul variaţiunii este:

x	$-\infty$		0		$+1$		$+3$		$+\infty$
y'		$+\ +$	0	$+$	0	$-$	0	$+\ +\ +$	
y		creşte		creşte	M	descr.		creşte	
	$-\infty$		-1		0		-190		$+\infty$

Din tabloul variaţiunii se deduce că trăgând curba reprezentativă a variaţiunii lui y se vede că ecuaţiunea: $x^5-5x^4+5x^3-1=0$ are trei rădăcini reale: o rădăcină dublă $x=+1$ şi o rădăcină simplă în intervalul $(+3, +\infty)$. **24.** Tabloul variaţiunii lui y este următorul:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{7}$		$+1$		$+\infty$
x'		$+\ +$	0	$+$	0	$-$	0	$+\ +$	
y		creşte		creşte	M	descr.	m	creşte	
	$-\infty$		0		$\frac{2^8 3^{10}}{7^7}$		0		$+\infty$

Se vede că trăgând curba reprezentativă, ea taie axa $x'x$ pentru $x=-2$ şi îi este tangentă pentru $x=+1$. **25.** Tabloul variaţiunii lui y este următorul:

x	$-\infty$		$\frac{11-\sqrt{13}}{6}$		$+2$		$\frac{11+\sqrt{13}}{6}$		$+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		descr.	m	creşte	M	descr.	m	creşte		creşte	
	$+\infty$		$A<0$		0		$B<0$		0		$+\infty$

Curba reprezentativă a variaţii lui y taie axa $x'x$ în punctele $x=1$, $x=3$ şi îi este tangentă în $x=2$. **26.** Tabloul variaţiunii lui y este următorul:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+\ +$	
y		descr.	m	creşte	M	descr.	m	creşte	
	$+\infty$		-36		$+49$		-36		$+\infty$

Curba reprezentativă a variaţiunii lui y, taie axa absciselor $x'x$ în patru puncte, deci ecuaţiunea de gradul al patrulea $x^4-10x^3+25x^2-36=0$ are patru rădăcini reale cuprinse respectiv în intervalele: $(-\infty, 0)$; $\left(0, +\frac{5}{2}\right)$; $\left(+\frac{5}{2}, +5\right)$; $(+5, +\infty)$.

27. Formând tablourile variaţiunii lui y în diferite cazuri care se pot prezenta, avem în rezumat: *a)* m şi n impari, minim pentru $x=ma:(m+n)$; *b)* m par, n impar, maxim pentru $x=0$, minim pentru $x=\frac{ma}{m+n}$; *c)* m impar, n par, maxim pentru $x=\frac{ma}{m+n}$, minim pentru $x=a$; *d)* m şi n pari, maxim pentru $x=\frac{ma}{m+n}$, două minime pentru $x=0$ şi $x=a$.

28. Tabloul variaţiunii lui y este următorul: $p>0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{p}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		creşte	M	descr.		descr.	m	creşte	
	$-\infty$		$+\frac{q}{27}\sqrt{8p^3}$		q		$-\frac{q}{27}\sqrt{8p^3}$		$+\infty$

Urmează că dacă $q+\sqrt{\frac{8p^3}{27}}>0$ şi $q-\sqrt{\frac{8p^3}{27}}<0$, curba variaţiunii taie axa absciselor în trei puncte, adică ecuaţiunea $x^3-px+q=0$ are în acest caz trei rădăcini reale. Dacă $p<0$, $y'>0$, deci y creşte continuu dela $-\infty$ la $+\infty$. In toate cazurile avem $y''=6x$, deci curba variaţiunii are pentru $x=0$ un punct de inflexiune. **29.** Avem $y'=4(x-a)^2(x+2a)$, $z'=4(x+a)^2(x-2a)$, presupunând $a>0$, avem tabloul următor:

x	$-\infty$	cr.	$-2a$	cr.	$-a$	cr.	a	cr.	$2a$	cr.	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
z'		$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	des.	m.	cr.	cr.	cr.	cr.	cr.	cr.	cr.	$+\infty$
z	$+\infty$	des.	des.	des.	des.	des.	des.	des.	m'	cr.	$+\infty$

$m=b^4-24a^4$ este minimul lui y, iar $m'=c^4-24a^4$ este minimul lui z; ca ele să fie zero trebue $b=a\sqrt[4]{24}$, $c=a\sqrt[4]{24}$. Discuţie analoagă dacă $a<0$. La valorile $x=+a$ şi $x=-a$, curbele reprezentative ale funcţiunilor y şi z au fiecare un punct de inflexiune, având $y'''\neq 0$, $y''(+a)=0$ şi $z''(-a)=0$, $z'''(-a)\neq 0$. **30.** $y'=\frac{mx^{m+n}-n}{x^{n+1}}$, fie $a=\sqrt[m+n]{\frac{n}{m}}$, variaţiunea lui y este dată în tabloul următor, după paritătile lui m şi n.

x		$-\infty$ cr.	$-a$ cr.	0 cr.	$+a$ cr.	$+\infty$
y	$m=2p+1$, $n=2q+1$	$-\infty$ cr.	Max. des.	$\pm\infty$ des.	*min.* cr.	$+\infty$
	$m=2p$, $n=2q+1$	$+\infty$ des.	— des.	$\mp\infty$ des.	*min.* cr.	$+\infty$
	$m=2p+1$, $n=2q$	$-\infty$ cr.	— cr.	$\pm\infty$ des.	*min.* cr.	$+\infty$
	$m=2p$, $n=2q$	$+\infty$ des.	min. cr.	$\mp\infty$ des.	*min.* cr.	$+\infty$

valoarea lui y, pentru $x=+a$ este $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}=\Lambda$, când $m=2p+1$, $n=2q+1$, pentru $x=-a$ valoarea lui y este $-\Lambda$. **31.** Observăm în primul rând că punând $v=x^4+2x^3-2x+1$, deci $v'=2(x+1)^2(2x-1)$, avem pentru variaţiunea lui v următorul tablou:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$			$+\infty$
v'		$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	
v	$+\infty$	desc.	desc.	desc.	$m=+\frac{5}{6}$	cr.	cr.	$+\infty$

Curba variaţiunei nu taie axa absciselor, prin urmare polinomul v nu se anulează pentru nici o valoare a lui x şi ca urmare funcţiunea y este continuă în orice interval cuprins în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Calculând acum derivata lui y găsim:

$$y'=\frac{5(x^6-3x^4-3x^2+1)}{(x^4+2x^3-2x+1)^2}=$$

$$\frac{5(x^2+1)(x+\sqrt{2+\sqrt{3}})(x+\sqrt{2-\sqrt{3}})(x-\sqrt{2-\sqrt{3}})(x-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(x^4+2x^3-2x+1)^2}$$

deci următorul tablou al variaţiei lui y:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{3}}$		$-\sqrt{2-\sqrt{3}}$		$+\sqrt{2-\sqrt{3}}$		$+\sqrt{2+\sqrt{3}}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
y		creşte	M_1	descr.	m_1	creşte	M_2	descr.	m_2	creşte	
	$+1$		>0		<0		>0		<0		$+1$

Observând că valorile maximelor şi minimelor satisfac condiţiunilor $M_1>0$; $m_1<0$; $M_2>0$; $m_2<0$, urmează că desemnând curba variaţiunii lui y, ea taie axa absciselor în patru puncte, deci y ia de patru ori valoarea zero, deci numărătorul are patru rădăcini reale cuprinse în intervalele:

$$(-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}); (-\sqrt{2-\sqrt{3}}, +\sqrt{2-\sqrt{3}});$$
$$(+\sqrt{2-\sqrt{3}}, +\sqrt{2+\sqrt{3}}); (+\sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty);$$

32. Să presupunem $n>0$, $p>0$. Funcţiunea poate fi scrisă sub forma: $y=\dfrac{(x^n+a)^{2p}+(x^n+b)^p}{(x^n+a)^p(x^n+b)^p}$, şi se vede în acest caz că funcţiunea nu se anulează decât dacă ecuaţiunile binoame $x^n+a=0$ şi $x^n+b=0$ ar putea avea o rădăcină reală comună, însă pentru aceasta trebue să avem $b=a$ contrar ipotezei. De altă parte y este discontinuă pentru rădăcinile reale ale numitorului, adică pentru rădăcinile reale ale ecuaţiunilor $x^n+a=0$ şi $x^n+b=0$. (2) 1^0. *n este număr par* şi fie $b>a$ (ceeace nu restrânge generalitatea). Punând $\left(\dfrac{x^n+a}{x^n+b}\right)=u$, avem $y=u+\dfrac{1}{u}$, deci calculând derivata avem: $y'=\dfrac{u^2-1}{u}\cdot u'$, unde $u'=\dfrac{np(b-a)x^{n-1}(x^n+a)^{p-1}}{(x^n+b)^{p+1}}$ sau:

$$y'=\frac{np(b-a)x^{n-1}[(x^n+a)^{2p}-(x^n+b)^{2p}]}{(x^n+a)^{p+1}(x^n+b)^{p+1}}.$$

Tabloul variaţiunii este deci în acest caz:

$b > a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y		crește	M	descrește	
	$+2$		$\left(\frac{a}{b}\right)^p + \left(\frac{b}{a}\right)^p$		$+2$

p impar
$a < 0, b > 0$
$b + a > 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$		$-\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$		0	$\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$	$\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$	$+\infty$
y'		$+$		$+$			0	$-$	$-$	
y		crește		crește			M	descr.	descr.	
	$+2$		$+\infty$		$-\infty$		$\left(\frac{a}{b}\right)^p + \left(\frac{b}{a}\right)^p$	$-\infty$	$+\infty$	$+2$

p impar
$a < 0, b > 0$
$a + b < 0$

x	y'	y	
$-\infty$	$+$	crește	$+2$
$-\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$			$+\infty$
$-\sqrt[n]{-a}+\varepsilon$			$-\infty$
	$+$	crește	
$-\sqrt[n]{-\frac{a+b}{2}}$	0	M	$(-1)^p . 2$
	$-$	descr.	
0	0	m	$\left(\frac{a}{b}\right)^p + \left(\frac{b}{a}\right)^p$
	$+$	crește	
$\sqrt[n]{-\frac{a+b}{2}}$	0	M	$(-1)^p . 2$
	$-$	descr.	
$+\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$			$-\infty$
$+\sqrt[n]{-a}+\varepsilon$			$+\infty$
	$-$	descr.	
$+\infty$			$+2$

	x	y'	y	
p impar	$-\infty$			$+2$
$a<b<0$		$+$	creşte	
	$-\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$			$+\infty$
	$-\sqrt[n]{-a}+\varepsilon$			$-\infty$
		$+$	creşte	
	$-\sqrt[n]{-\frac{a+b}{2}}$	0	M	$(-1)^p\times 2$
		$-$	descr.	
	$-\sqrt[n]{-b}-\varepsilon$			$-\infty$
	$-\sqrt[n]{-b}+\varepsilon$			$+\infty$
		$-$	descr.	
	0	0	m	$\left(\frac{a}{b}\right)^p+\left(\frac{b}{a}\right)^p$
		$+$	creşte	
	$\sqrt[n]{-b}-\varepsilon$			$+\infty$
	$\sqrt[n]{-b}+\varepsilon$			$-\infty$
		$+$	creşte	
	$\sqrt[n]{-\frac{a+b}{2}}$	0	M	$(-1)^p\times 2$
		$-$	descr.	
	$\sqrt[n]{-a}-\varepsilon$			$-\infty$
	$\sqrt[n]{-a}+\varepsilon$			$+\infty$
		$-$	descr.	
	$+\infty$			$+2$

Rămâne încă de examinat cazul când n este impar. Deasemenea în ambele cazuri variaţiunea când unul din numerele a, b este nul. Când presupunem unul din numerele întregi n şi p sau amândouă negative, funcţiunea y se poate pune sub forma tratată corespunzătoare lui n şi p pozitivi. (S. E. G. M. II. p. 141). **33.** x nu poate varia decât dela 0 la $+\infty$, pentru $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (max.), y creşte dela -1 la $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, apoi descreşte până la $-\infty$. **34.** Avem

$y' = -\frac{13\sqrt{x}}{6\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\left(x^2 - \frac{9}{13}\right)'$ şi ca urmare următorul tablou al variaţiunii lui y:

x	0		$+\frac{3}{\sqrt{13}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	cr.	M	descr.	$-\infty$

35. $y' = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-x}}$, când x variază dela $-\infty$ la $-\varepsilon$, y descreşte dela $+\infty$ la 1; când x trece prin 0, y' îşi schimbă semnul şi avem un minim; când x creşte dela 0 la $\frac{1}{2}$, y creşte dela 1 la $\sqrt[3]{2}$, care este un maxim; apoi când x creşte dela $\frac{1}{2}$ la 1, y descreşte până la 1, care este un nou minim; de aci înainte creşte necontenit. Este de observat că în curba reprezentativă, în punctul unde y este maxim tangenta la curbă este paralelă cu Ox, dar în punctele minime tangentele sunt paralele cu Oy. Punctele acestea se numesc *puncte de înapoiere*. **36.** Observăm că y este o funcţiune periodică de perioadă 2π, prin urmare pentru a avea variaţiunea completă a lui y este de ajuns a studia această variaţiune într'un singur interval de lungimea perioadei 2π, fie în intervalul $(0, 2\pi)$. Avem următorul tablou al variaţiunii care se reproduce interval după interval:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+1$	cr.	$M = \sqrt{2}$	desc.	$m = -\sqrt{2}$	cr.	$+1$

37. Fie x_0 o valoare a lui x şi $y_0 = \sin^3 x_0 \cos x_0$. Să însemnăm cu y_1 valoarea lui y corespunzătoare la $x = \pi + x_0$. Avem: $y_1 = \sin^3(\pi + x_0)\cos(\pi + x_0) = (-\sin x_0)^3(-\cos x_0) = +y_0$;

deci funcţiunea dată este funcţiune periodică, de perioadă egală cu π şi ca urmare este suficient pentru a avea variaţiunea completă a lui y, să o studiem într'un interval de lungime egală cu π, de exemplu $(0, \pi)$, căci derivata lui y fiind: $y' = 2\sin^2 x(3 - 4\sin^2 x)$, deşi se anulează la capetele intervalului ales, nu-şi schimbă semnul trecând prin valoarea zero. In aceste condiţiuni avem următorul tablou al acestei variaţiuni:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
y'	0	+	0	−	0	+	0
y		creşte	M	descreşte	m	creşte	
	0		$\frac{\sqrt{3}}{8}$		$-\frac{\sqrt{3}}{8}$		0

38. Observăm că putem scrie pe y sub forma: $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1 - 4\sin^2 x}{4\cos^2 x - 1} = -tg^2 x \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ şi avem: $y' = \frac{6\sin x \cos 4x}{\cos^3 x[4\cos^2 x - 1]^2}$. Observăm că y este o funcţiune periodică de x, perioada fiind π. Punând $y_0 = \frac{tg^3 x_0}{tg\, 3x_0}$ şi $x_1 = \pi + x_0$ avem $y_1 = \frac{tg^3(\pi + x_0)}{tg\, 3(\pi + x_0)} = \frac{tg^3 x_0}{tg\, 3x_0} = y_0$. Deci este de ajuns să studiem variaţiunea lui y în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, +\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Tabloul variaţiunii lui y este următorul:

x	$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$	$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}-\omega$	$\frac{\pi}{3}+\omega$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	
y'	$-$		$+$	$+$	$+$		$-$
y	descr.	m	crește	crește	crește	M	descrește
	$+\infty$	$17+12\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$	0	$17-12\sqrt{2}$	

0		$+\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}-\omega$	$\frac{\pi}{3}+\omega$	$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}-\omega$
	$+$		$+$ $-$	$-$		$+$
m	crește	M	descr.	descr.	m	crește
0		$17-12\sqrt{2}$	$0-\infty$	$+\infty$	$17+12\sqrt{2}$	$+\infty$

39. Avem $y'=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$, variaţiunea este:

x	0 cr. $\frac{\pi}{5}$ cr. $\frac{\pi}{2}$ cr. $\frac{3\pi}{5}$ cr. π cr. $\frac{7\pi}{5}$ cr. $\frac{3\pi}{2}$ cr. $\frac{9\pi}{5}$ cr. 2π
y'	$+\ 0-0+\ 0\ -\ 0-0+\ 0-\ 0+$
y	0 cr. M des. m. cr. M_1 des. — des. m_1 cr. M_2 des. m_2 cr. 0

M, M_1, M_2 reprezintă maxime ale funcţiunei; m, m_1, m_2 minime, şi unele şi altele pot fi calculate ştiind că $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ etc. **40.** Funcţiunea este periodică, de perioada 2π. Dacă luăm intervalul $(0,2\pi)$ ea este discontinuă la capetele intervalului, aşa că studiem variaţiunea

lui y în intervalul $(0+\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon)$, $0+\varepsilon<x<arc\cos\frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $-\infty<y<6-2\sqrt{3}$ (maxim); $arc\cos\frac{3-\sqrt{3}}{3}<x<\pi$, $6-2\sqrt{3}>y>-\frac{1}{2}$ minim; $\pi<x<2\pi-arc\cos\frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{1}{2}<y<6-2\sqrt{3}$; $2\pi-arc\cos\frac{3-\sqrt{3}}{3}<x<2\pi-\varepsilon$, y descreşte dela $6-2\sqrt{3}$ la $-\infty$. **41.** Punând $\pi x=u$, avem $y'=(u^3-\pi u^2-4\pi^2 u+4\pi^3)\times sin\,u\,.u'=\pi^3(x^3-x^2-4x+4)\,sin\,\pi x=\pi^3(x+2)(x-1)(x-2)\,sin\,\pi x$; y' se anulează pentru $x=k$, număr întreg pozitiv sau negativ, pentru $k=-2$, 1 şi $+2$, y' anulându-se nu îşi schimbă semnul şi nu avem nici maximum nici minimum, pentru celelalte valori ale lui k avem un maxim sau un minim şi anume: dacă $k>2$, maxim este pentru $x=2k'+1$ şi minim pentru $x=2k'$, contrariu dacă $k<-2$. Pentru $x=0$ avem un minim. **42.** Derivatele celor două funcţiuni sunt respectiv: $y'=p\,sin\,2x\,[(sin^2 x)^{p-1}+(cos^2 x)^{p-1}]$ $u'=+2\,sin\,2x$ ambele se anulează pentru rădăcinile ecuaţiei $sin\,2x=0$, având ambele semnul lui $sin\,2x$, deci cele două funcţiuni au maximele pentru aceleaşi valori şi asemenea minimele pentru aceleaşi valori. Ambele funcţiuni fiind periodice, de perioadă egală cu π, este de ajuns să se studieze curbele reprezentative ale variaţiunii lor într'un interval de lungimea π, de exemplu $(0, \pi)$. Avem tabloul variaţiunilor următor, ţinând bine înţeles seamă că 0 şi π sunt valorile pentru cari avem maxime sau minime:

	x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
u';	y'	0	+		+		+	0	−	−	−	0
	y	m 0	cr	eşt	e	+1	creşte	M +2	descr.	+1	descr.	m 0
	u	m 0	cr	eşt	e	+1	creşte	M +2	descr.	+1	descr.	m 0

Se observă că maximele şi minimele corespunzătoare ale celor două funcţiuni au aceleaşi valori; ele mai au valori corespunzătoare egale pentru toate valorile lui x care sunt rădăcini ale lui $\cos 2x$. Totuş curbele reprezentative nu sunt suprapuse. Avem: $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{3^p-1^p}{4^p}$, iar $u\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, etc. **43.** Simplificând funcţiunea z cu $(x+y)$ şi ţinând seamă de relaţiunea dată $xy=a^2$, avem succesiv:

$$z=\frac{x^4+y^4-a^2(x^2+y^2)+a^4+5a^2(x^2+y^2)-5a^4}{x^2+y^2-2a^2}=$$

$$\frac{(x^4+y^4)+4a^2(x^2+y^2)-4a^4}{x^2+y^2-2a^2}$$

***

$$z=\frac{x^8+4a^2x^6-4a^4x^4+4a^6x^2+a^8}{x^6-2a^2x^4+a^4x^2}$$, dacă punem $z=z_1+4a^2$

valorile şi variaţiunea lui z se deduc din ale lui z_1. Pentru simplificarea calculelor punând încă $x=at$, avem:

$z_1=a^2\frac{t^8+4t^4+1}{t^2(t^2-1)^2}$. Observăm că funcţiunea z_1 este discontinuă pentru $t=0$, $t=-1$, $t=+1$ şi este totdeauna pozitivă. Avem prin urmare să studiem variaţiunea lui z_1 în fiecare din intervalele de continuitate: $(-\infty, -1-\varepsilon)$; $(-1+\varepsilon, 0-\varepsilon)$; $(+\varepsilon, +1-\varepsilon)$; $(+1+\varepsilon, +\infty)$. Dealtă parte ea este o funcţiune pară de t, pentru $t=t_0$ şi $t=-t_0$ ea ia aceiaşi valoare; este de ajuns a studia în acest caz variaţiunea lui z_1 pentru valorile pozitive ale lui t. Calculând derivata lui z_1 în raport cu t, avem: $z'_1=2a^2.\frac{(t^2+1)(t^8-4t^6-4t^2+1)}{t^3(t^2-1)^3}$ şi se vede că z_1' se anulează pentru valorile reale, care sunt rădăcini ale ecuaţiunii reciproce în raport cu $u=t^2$; găsim (transformând radicalii suprapuşi) următoarele rădăcini reale: $t_{1,2,3,4}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3+\sqrt{6}}\pm\sqrt{1+\sqrt{6}})$, câte una în fiecare interval de continuitate. Avem tabloul variaţiunii următor:

x	$0+\varepsilon$	t_2	$+1-\varepsilon$	$+1+\varepsilon$	t_1		$+\infty$
z'_1	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	
z_1	descreşte	m	creşte	descreşte	m	creşte	
	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$			$+\infty$

$t_1=+\frac{1}{2}(\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{1+\sqrt{6}})$ şi $t_2=\frac{1}{2}(\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{1+\sqrt{6}})$.

44. Avem: $z=x+\sqrt[3]{a^3-x^3}$ şi $z'_x=-\frac{(x+\sqrt[3]{a^3-x^3})(x-\sqrt[3]{a^3-x^3})}{\sqrt[3]{(a^3-x^3)^2}}$,

deci următorul tablou al variaţiunii lui z:

	$-N$		$\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$		$+N$
z'		$+$		$-$	
z		creşte	M $a\sqrt[3]{4}$	descreşte	

45. Se va pune $y=tx$ $\therefore$ $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$, $z=\frac{9a^2t^2(1+t^2)}{(1+t^3)^2}$,

derivata $z'=9a^2\frac{-2t(t-1)(t^4+t^3+3t^2+t+1)}{(1+t^3)^3}$,

iar tabloul variaţiunii lui z următorul:

t	$-\infty$	$-1-\varepsilon$	$-1+\varepsilon$	0		1	$+\infty$
z'	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$
z	0 cr.	$+\infty$	$+\infty$ desc.	$m=0$ cr.		M $=\frac{9a^2}{2}$	desc. 0

deci $z_{max}=\frac{9}{2}a^2$. **46.** Se aplică teorema maximului unui produs de factori pozitivi, când suma lor este constantă observând că $\frac{x_1}{\Sigma x_1}+\frac{x_2}{\Sigma x_1}+\ldots+\frac{x_n}{\Sigma x_1}=1$. Găsim $\frac{1}{n^n}$. 2°. Folosim proprietatea că media geometrică a n cantităţi pozitive este mai mică sau cel mult egală cu media lor aritmetică, egalitatea având loc pentru valori egale, $\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{\Sigma x_1}{n}$

*** $\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(\Sigma x_1)^n} \leq \frac{1}{n^n}$. (G. M. XXXII, p. 154). **47.** Rădăcinile derivatei sunt -2 şi -1. Avem următorul tablou al variaţiei:

	x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$	
	y'	$+$ $+$ $+$	0	$-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$			
y	α	$-\infty$		$\alpha-4$		$\alpha-5$		$+\infty$	
	$\alpha<4$	$-\infty$ cr.	M negativ	des.	m. negativ	cr.		$+\infty$	I
	$\alpha=4$	$-\infty$ cr.	0	des.	-1	cr.		$+\infty$	II
	$4<\alpha<5$	$-\infty$ cr.	M pozitiv	des.	m. negativ	cr.		$+\infty$	III
	$\alpha=5$	$-\infty$ cr.	$+1$	des.	0	cr.		$+\infty$	IV
	$\alpha>5$	$-\infty$ cr.	M pozitiv	des.	m. pozitiv	cr.		$+\infty$	V

Rădăcinile reale. Pentru:

I. O rădăcină cuprinsă între -1 şi ∞.

II. O rădăcină dublă pentru $x=-2$ şi una cuprinsă între -1 şi ∞.

III. 3 rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$.

IV. O rădăcină dublă pentru $x=-1$ şi una cuprinsă între $-\infty$ şi -2.

V. O rădăcină între $-\infty$ şi -2.

(S. E. G. M. III. p. 70).

48. Derivata se anulează pentru $x=0$. Tabloul variaţiei este:

x	$-\infty$			0		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$	
y	$+\infty$	desc.		A	cr.	$+\infty$

Deoarece curba are minimul $y=A$, nu va tăia axa $x'x$ când $A>0$, îi va fi tangentă în origine pentru $A=0$ şi o va tăia în 2 puncte simetrice faţă cu origina dacă $A<0$. Deci ecuaţia problemei are 2 rădăcini reale contrarii când $A<0$. (S. E. G. M. II. p. 139). **49.** Derivata se anulează pentru $x=0$, păstrând semnul $+$ pentru orice valoare reală a lui x. Funcţiunea este crescătoare dela $-\infty$ la $+\infty$, iar curba repre-

zentativă are pentru $x=0$ un punct de inflexiune. Tabloul variaţiei este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$		A		$+\infty$

Funcţiunea fiind crescătoare şi ordonata variind dela $-\infty$ la $+\infty$, curba tae într'un punct axa $x'x$, deci ecuaţia problemei are o singură rădăcină reală totdeauna pentru $A \neq 0$. (S. E. G. M. II. p. 139). **50.** Derivata este $x^{n-2}(nx-n+1)$. Rădăcinile sunt $x=0$, $x=\frac{n-1}{n}$. Tabloul variaţiunei este pentru $n>2$.

	x	$-\infty$		0		$\frac{n-1}{n}$		$+\infty$
$n=2p$	y'	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
	y	$+\infty$	desc.	-1	desc.	$-\left[1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right]$	cr.	$+\infty$
$n=2p+1$	y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
	y	$-\infty$	cr.	-1	desc.	$-\left[1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right]$	cr.	$+\infty$

Ecuaţia problemei are 2 rădăcini reale pentru $n=2p$ în intervalele $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{n-1}{n}, +\infty\right)$; pentru $n=2p+1$, o singură rădăcină reală în intervalul $\left(\frac{n-1}{n}, +\infty\right)$. Pentru $n=2$, studiul se urmează ca în cazul $n=2p$. (S. E. G. M. II. p. 140). **51.** Funcţiunea poate fi scrisă subt forma $y=\frac{x(1-fx)}{f+x}$ şi urmează să studiem variaţiunea lui y când x variază dela 0 la *cotg a*. Ea este discontinuă pentru o valoare negativă, deci în afară de intervalul $\left(0, \frac{1}{f}\right)$, care rămâne întreg interval de continuitate pentru y. Calculând derivata avem $y'=-\frac{f}{(x+f)^2}$

$(x^2+2fx-1)$ şi se anulează pentru două valori $x_1>0$ şi $x_2<0$, deci numai $x_1=cotg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$ găsindu-se în interval (căci a intrând numai prin tangenta sa $f>0$, poate fi presupus $<\frac{\pi}{2}$) şi avem următorul tablou al variaţiunii:

x	0		x_1		$cotg\, a$
y'		+	0	−	
y	0		M x_1^2		0

Construcţiunea curbei în cazul cerut este uşoară. 2^0. Prin metoda directă, observăm că rezolvând în raport cu x relaţiunea care dă pe y şi punând condiţiunea ca x să fie real trebue să avem: $y^2-2(1+2f^2)y+1\geqq 0$ şi avem deci $y_1\leqq 1+2f^2-2f\sqrt{1+f^2}$ (un maxim) şi $y_2\geqq 1+2f^2+2f\sqrt{1+f^2}$ (un minim); primul având loc pentru $x_1=-f+\sqrt{f^2+1}$ şi al doilea pentru $x_2=-f-\sqrt{f^2+1}$ (în afară de intervalul dat), deci minimul nu convine. **52.** Fie $x_1\geq x_2$ cele două rădăcini ale ecuaţiei; pentru $m<-1$, x_1 şi x_2 sunt imaginare; când m creşte dela -1 la $+\infty$, x_1 creşte dela 1 la $+\infty$, iar x_2 descreşte dela 1 la $-\infty$. **53.** Ecuaţiunea în x este următoarea: $mx^4+4x^3-6mx^2-4x+m=0$, sau punând $x-\frac{1}{x}=y$, $my^2+4y-4m=0$, care dă $y=\frac{2}{m}(-1\pm\sqrt{1+m^2})$ şi $x^2-yx-1=0$ şi se vede că pentru toate valorile lui m avem y real şi ca urmare x real. Să luăm acum $y=\frac{2}{m}(-1+\sqrt{1+m^2})$ şi $x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+4})$ şi să studiem variaţiunea rădăcinii x. Avem $y'_m=\frac{2}{(\sqrt{1+m^2}+1)\sqrt{1+m^2}}>0$ şi $2x'_m=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{y^2+4}}\cdot y'_m>0$, pentru că $|y|<\sqrt{y^2+4}$, prin urmare următorul tablou al variaţiunii:

m	$-\infty$		0		$+\infty$
y'_m		$+\ +$		$+\ +$	
y	-2	creşte	0	creşte	$+2$
x'		$+\ +$		$+\ +$	
x	$-1+\sqrt{2}$	creşte	$+1$	creşte	$+1+\sqrt{2}$

Pentru celelalte rădăcini studiul variaţiunii este analog.

54. y este o funcţiune discontinuă la stânga în punctele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Căci dând o descreştere mică lui x în aceste puncte, $I(x)$ descreşte brusc cu o unitate. Pentru construirea curbei se consideră succesiv intervalele 0,1; 1,2;...9,10; funcţiunile de studiat fiind $y=x^2$, $y=x^2+1$. Avem nişte arce de parabolă.

IX. 1. Produsul este maxim când: $R+x=R-x$, adică planul secant trece prin centrul sferei. **2.** Insemnând distanţa dela vârful conului la secţiunea lui cu x, găsim că raportul creşte necontenit când x variază dela O la $2R$; la capetele intervalului $(O, 2R)$ tinde respectiv către O şi $+\infty$. **3.** Maxim pentru $x=\frac{2}{3}(\sqrt{7}-1)$, minim pentru $x=-\frac{2}{3}(\sqrt{7}+1)$; dintre care numai maximul este acceptabil pentru diferenţa volumelor. **4.** Fie m, m', m'' lungimile celor trei mediane, avem:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m+m'-m'')(m-m'+m'')(-m+m'+m'')}.$$

S este *maxim* odată cu $u=-m^4+2(m'^2+m''^2)m^2-(m'^2-m''^2)^2$, $U'm=-4m(m^2-m'^2-m''^2)$. Avem tabloul:

m	0		$\sqrt{m'^2+m''^2}$		A
$U'm$	0	$+\ldots$	$.\ 0\ .$		$-$
u	0	creşte	M $4m'^2m''^2$		descreşte

Dacă $m^2=m'^2+m''^2$, avem $5a^2=b^2+c^2$. A se vedea şi *Mathesis* XL pag. 175. (G. M. III).

5. Fie $\overline{AB}=a$. Punând $\overline{BC}=x$, se găseşte fie prin metoda generală, fie aplicând teorema maximului unui produs de puteri cu suma factorilor constantă, că suprafaţa este maximă

pentru $\overline{BC}=\frac{1}{3}a$. Avem $S_{max}=\frac{1}{18}a^2\sqrt{3}$. **6.** Insemnând pe $\overline{AB}=x$, avem: $2S=x\sqrt{a^2-x^2}-x^2$, iar $2S'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\times(a^2-2x^2-2x\sqrt{a^2-x^2})$. Anulând derivata şi rezolvind ecuaţiunea iraţională găsim patru valori şi considerând numai pe cele pozitive, observăm că numai $x=\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ satisface ecuaţiunii iraţionale şi deci convine problemei. x variind dela $+\varepsilon$ până la $(+a-\varepsilon)$, pentru $x=\frac{a}{3}<\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ avem $S'>0$, iar pentru $x=\frac{a}{2}>\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ avem $S'<0$, deci suprafaţa S trece printr'un *maxim* $S=\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)$ pentru $\overline{AB}=\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $(\overline{AC}=\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}})$. **7.** Punând $\overline{AB}=a$ şi $\overline{BC}=x$, găsim: $S_{AD}=\frac{\pi a x(a-2x)}{a-x}$ şi $V=\frac{\pi a}{3}\left[\frac{x(a-2x)}{a-x}\right]^2$, deci, x variind între $\left(+\varepsilon, \frac{a}{2}-\varepsilon\right)$ şi S fiind pozitiv, maximul celor două funcţiuni S şi V are loc pentru aceeaşi valoare a lui x, Numai una din rădăcinile derivatei se găseşte în interval, $x=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$ şi avem: $S_{max}=\pi a^2(\sqrt{2}-1)^2$; $V_{max}=\frac{1}{3}\pi a^3(3-2\sqrt{2})^2=\frac{1}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)^4$. (G. M. III). **8.** Fie M mijlocul ipotenuzei. Punând $\overline{AB}=x$ şi ipotenuza $\overline{BC}=y$, găsim (folosind teorema maximului unui produs de puteri ai cărui factori au o sumă constantă, fie studiind variaţiunea funcţiunii) că *maximul* are loc pentru $x=\frac{a}{3}$ (adică pentru triunghiul AMB echilateral). (G. M. VII). **9.** Insemnând cu E proiecţiunea punctului P pe diametrul AB, cu $x=\overline{AE}$, $y=\overline{EP}$

şi u perimetrul trapezului $AMNB$, avem, punând $\frac{u-2R}{2R}=z$, că $z=\frac{2R+\sqrt{3x^2-6Rx+4R^2}}{\sqrt{2Rx-x^2}}$, de unde:

$$z'=\frac{(x-R)[2(x-R)^2+2R^2+3R\sqrt{3x^2-6Rx+4R^2}]}{(2Rx-x^2)^{\frac{3}{2}}[3x^2-6Rx+4R^2]^{\frac{1}{2}}},$$

deci perimetrul trapezului are un *minim* pentru $x=R$, adică P la mijlocul arcului APB, *când trapezul devine patrat*. Asemenea găsim că $V=\frac{8\pi R^3}{3}\cdot\frac{x^2-2Rx+4R^2}{2Rx-x^2}$ este minim pentru $x=R$, iar $\overline{OD}=\frac{2R^2}{\sqrt{3(x-R)^2+R^2}}$ este maxim când numitorul are cea mai mică valoare, adică $x=R$. **10.** Fie a şi b distanţele punctului M la laturile OY şi OX, iar P şi N capetele segmentului determinat de OX şi OY. Punând $\overline{OP}=x$ şi $\overline{ON}=y$ şi făcând pe x să varieze dela a la $+\infty$, găsim că segmentul cel mai mic are lungimea: $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, **11.** Avem $S=2\pi xy$; $V=\pi y^2\left(x-\frac{1}{3}y\right)$. Dacă $S=4\pi r^2$ $*^*_*$ $y=\frac{2r^2}{x}$, $V=\frac{4}{3}\pi r^4\frac{3x^2-2r^2}{x^3}$. Pentru ca să avem $V>0$, trebue ca $x>r\sqrt{\frac{2}{3}}$ şi cum $y<2x$ $*^*_*$ $x>r$, care cuprinde pe cea dintâi. Când x creşte dela r până la $r\sqrt{2}$, V creşte dela $\frac{4}{3}\pi r^3$ până la $\frac{4}{3}\pi r^3\sqrt{2}$ (maxim), x crescând V descreşte continuu şi tinde către *zero*. **12.** Insemnăm $\widehat{MOA}=2x$; $\widehat{BOA}=2\alpha$; $B'OA=2\alpha'$ şi R raza cercului. Fie $x<\alpha<\alpha'<\frac{\pi}{2}$ şi $tg\varphi=\frac{sin\,\alpha+sin\,\alpha'}{cos\,\alpha+cos\,\alpha'+1}$, avem în acest caz: $y=2R\frac{cos\,\alpha+cos\,\alpha'+1}{cos\,\varphi}sin\,(\varphi-x)$. Având $sin\,\alpha+sin\,\alpha'>0$, dacă $cos\,\alpha+cos\,\alpha'+1>0$ $*^*_*$ $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, deci $cos\,\varphi>0$ şi ca urmare $A=\frac{cos\,\alpha+cos\,\alpha'+1}{cos\,\varphi}>0$;

dacă $\cos\alpha+\cos\alpha'+1<0$, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, deci $\cos\varphi<0$, ca urmare $A>0$. Aşadar, maximul şi minimul lui y au loc în acelaşi timp cu maximul şi minimul funcţiunii $z=\sin(\varphi-x)$ respectiv, etc. (G. M. IV). **13.** Fie O unul din punctele comune celor trei sfere (punctul unde perpendiculara pe planul ABC în ortocentrul H înţeapă una din sfere); unghiurile triedrului $OABC$ sunt drepte, deci însemnând cu x, y, z lungimile $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ avem: $V=\frac{1}{6}xyz$. De altă parte, S fiind aria ABC, avem: $16S=2(x^2+z^2)(y^2+z^2)+2(y^2+z^2)(x^2+y^2)+2(x^2+z^2)(x^2+y^2)-(y^2+z^2)^2-(x^2+y^2)^2-(x^2+z^2)^2=4(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$, deci între x, y, z există relaţia $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=4a^2$. In acest caz $(6V)^6=x^6y^6z^6=(x^2y^2)(x^2z^2)(y^2z^2)$ este maxim când $x=y=z$, deci când triunghiul este echilateral. **14.** Fie x latura tetraedrului regulat, y muchia laterală a unei piramide, avem: $V=\frac{1}{12}x^3\sqrt{2}+\frac{1}{2}x^2\sqrt{3y^2-x^2}$; $S=3x\sqrt{4y^2-x^2}=a^2\sqrt{3}$, $12V=x^3\sqrt{2}+2x\sqrt{a^4-x^4}$; $12V'=3x^2\sqrt{2}+2\frac{a^4-3x^4}{\sqrt{a^4-x^4}}$; x poate varia dela a. In acest interval, V' se anulează, schimbând semnul din plus în minus, pentru $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$, deci volumul V pornind dela O creşte până la un maximum egal cu $\frac{1}{3}a^3\sqrt[4]{\frac{2}{27}}$, apoi descreşte continuu. **15.** Fie a şi b distanţele $\overline{AA'}$ şi $\overline{BB'}$ ale punctelor A şi B la dreapta dată, O mijlocul lui $\overline{A'B'}$ şi $2m$ lungimea lui $\overline{A'B'}$; x distanţa punctului M variabil pe dreapta dată la punctul O. Avem: $y^2=\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}=\frac{(x-m)^2+a^2}{(x+m)^2+b^2}$. Punând $y^2=z$ şi calculând pe z' avem următorul tablou al variaţiei lui z:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
z'	+		0	−	0	+	
z	+1 creşte		M	descreşte	m	creşte	+1

unde $x_1 < x_2$ sunt rădăcinile care anulează pe $z'(x)$; anume: $x_{1,2} = \frac{1}{4m}[(a^2-b^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+4m^2)^2-4a^2b^2}]$. Valoarea maximului lui y^2 este $\frac{1}{2b^2}[a^2+b^2+4m^2+\sqrt{(a^2+b^2+4m^2)^2-4a^2b^2}]$, pentru aceea a minimului schimbăm semnul radicalului în valoarea maximului. **16.** a fiind distanţa centrelor, suma suprafeţelor celor două zone trece printr'un maximum pentru $x = a\frac{R\sqrt{R}}{R\sqrt{R}+r\sqrt{r}}$, x fiind distanţa punctului la centrul sferei de raza R. **17.** Punând $\alpha = \widehat{DBA}$, găsim: $S^2 = R^4 \sin^2\alpha \sin 2\alpha$. Aria triunghiului ACD este maximă când unghiul $\alpha = \frac{\pi}{3}$, valoarea maximului fiind $\frac{1}{4}R^2\sqrt[4]{108}$. (G. M. IX).

18. Având $r = \frac{xy}{2p}$ şi relaţiile: $x+y+z = 2p$; $x^2+y^2 = z^2$, exprimăm pe r numai în funcţiune de x, de exemplu, şi studiem variaţiunea lui r observând că x variază dela $+\varepsilon$ la $(p-\varepsilon)$. Găsim că r, deci cercul înscris, este maxim pentru $x = y = p(2-\sqrt{2})$, r_{max} fiind egal cu $p(3-2\sqrt{2})$. **19.** a şi b fiind dimensiunile dreptunghiului şi x înălţimea cutiei paralelipipedice, avem: $V = x(a-2x)(b-2x)$. Studiind variaţia găsim că V este maxim pentru $x = \frac{1}{6}(a+b) - \frac{1}{6}\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **20.** Fie 2φ înclinarea feţelor laterale pe una din baze, avem $V = \frac{2}{3}\pi n R \sin\frac{2\pi}{n}[1+tg^2\varphi+cotg^2\varphi]$, variaţiunea volumului depinde deci de variaţiunea funcţiunii $z = tg^2\varphi + cotg^2\varphi = \frac{4}{\sin^2\varphi} - 2$, care descreşte dela $+\infty$ la $+2$, când este minimă (trunchiul de piramidă devenind o prizmă pentru această valoare), de unde apoi creşte nemărginit. **21.** Avem $\frac{1}{2}S = xy+xz+yz$ şi condiţiunea: $4(x+y+z) = 4a$; putem

scrie suprafaţa: $3S=6(xy+xz+yz)=2(x+y+z)^2-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$, care este maximă pentru $x=y=z$. Se poate găsi acelaş rezultat privind pe S ca fiind funcţie de două variabile de exemplu de y şi z, având $x=a-(y+z)$ şi aplicând condiţiunile în acest caz pentru maxim. **22.** Fie M_0 şi N_0 poziţiunile mobilelor la momentul $t=0$; $\overline{OM_0}=m$, $\overline{ON_0}=n$; avem $\overline{OM}=m+at$, $\overline{ON}=n-bt$, $\overline{MN}^2=(m+at)^2+(n-bt)^2$; găsim că minimul lui $\overline{MN}$ este $\frac{an+bm}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **23.** Cantitatea de lumină primită de un punct dela un isvor luminos este egală cu câtul dintre intensitatea isvorului luminos şi patratul distanţei dintre punct şi isvorul luminos. Deci pentru M: $k=\frac{i}{\overline{AM}^2}+\frac{i'}{\overline{BM}^2}$. Fie x proiecţia lui AM pe AB, pozitivă dela A către B şi negativă în sensul invers. Avem

$\overline{AM}^2=\overline{OA}^2+\overline{OM}^2-2\overline{OA}(\overline{OA}-x)=a^2+r^2-2a(a-x)$

$\overline{BM}^2=\overline{OB}^2+\overline{OM}^2+2\overline{OB}(\overline{OB}-x)=a^2+r^2+2a(a-x)$

(punând $\overline{AB}=2a$, $\overline{OM}=r$). Deci $k=\frac{i}{r^2-a^2+2ax}+\frac{i'}{r^2+3a^2-2ax}$ sau $4ka^2x^2-2(4ka^2+i-i')ax+i(r^2+3a^2)+i(r^2-a^2)-k(r^4+2r^2a^2-3a^2)=0$. Pentru ca valorile lui x să fie reale, trebue să avem: $4a^2(a^2+r^2)^2k^2-4a^2(a^2+r^2)(i+i')k+(i-i')^2a^2\geqslant 0$. Rădăcinile trinomului din membrul I al acestei inegalităţi sunt: $k'=\frac{(\sqrt{i}+\sqrt{i'})^2}{2(a^2+r^2)}$, $k''=\frac{(\sqrt{i}-\sqrt{i'})^2}{2(a^2+r^2)}$, prin urmare va trebui să avem: $k\geqslant\frac{(\sqrt{i}+\sqrt{i'})^2}{2(a^2+r^2)}$ sau $k\leqslant\frac{(\sqrt{i}-\sqrt{i'})^2}{2(a^2+r^2)}$. Pentru $k=k'$, avem $x=x'=a+\lambda\frac{a^2+r^2}{2a}$, iar pentru $k=k''$, $x=x''=a+\frac{1}{\lambda}\frac{a^2+r^2}{2a}$. unde $\lambda=\frac{\sqrt{i}-\sqrt{i'}}{\sqrt{i}+\sqrt{i'}}$, (G. M. VI p. 184). **24.** Fie x raza comună a cilindrului cu înălţimea y, a conului cu înălţimea z şi a sferei; $S=\pi m^2$

suprafaţa totală dată a rezervorului, $\frac{\pi V}{6}$ volumul său. Avem:

$$S=2\pi xy+\pi x\sqrt{x^2+z^2}+2\pi x^2=\pi m^2$$

$$\frac{\pi V}{6}=\pi x^2y+\frac{\pi x^2z}{3}+\frac{2\pi x^3}{3} \text{ sau } m^2=2xy+x\sqrt{x^2+z^2}+2x^2,$$

$V=6x^2y+2x^2z+4x^3$. Eliminând pe y între aceste două ecuaţiuni, $V=-2x^3+2x^2z-3x^2\sqrt{x^2+z^2}+3m^2x$. V fiind funcţie de două variabile, pentru maxim, anulăm derivatele sale parţiale în raport cu x şi z. $V'x=-6x^2+4xz-3\frac{3x^3+2xz^2}{\sqrt{x^2+z^2}}+3m^2=0$, $V'z=2x^2-\frac{3x^2z}{\sqrt{x^2+z^2}}=0$. Din ultima ecuaţiune se deduce $x=0$, $x=\frac{z\sqrt{5}}{2}$. Prima soluţie introdusă în prima ecuaţie, conduce la $3m^2=0$, deci se exclude. Pentru cealaltă aflăm $z=\frac{2m\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}}{5}$, $x=m\sqrt{\sqrt{5}-2}$,

$y=\frac{m\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}}{5}$. Pentru aceste valori, volumul rezervorului este $\frac{\pi m^3\sqrt{\sqrt{5}-2}}{3}$. Să arătăm că acest volum corespunde unui maxim. Calculăm derivatele secunde:

$$V''_{x^2}=-12x+4z-3\frac{6x^4+9x^2z^2+2z^4}{(x^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$V''_{xz}=4x-3xz\frac{x^2+2z^2}{(x^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$, $V''_{z^2}=-\frac{3x^4}{(x^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$. Inlocuim în V''_{x^2} V''_{xz}, V''_{z^2} pe x, z cu valorile ce ne-au anulat derivatele prime. $V''_{x^2}=-\frac{(145+54\sqrt{5})z}{9}$, $V''_{xz}=\frac{5\sqrt{5}z}{54}$,

$V''_{z^2}=\frac{-25z}{54}$. V''_{x^2}, V''_{z^2} fiind negativi, se verifică ecuaţia de màxim: $V''_{x^2}\cdot V''_{z^2}-(V''_{xz})^2>0$. (G. M. XL. p. 42).

X. 1. Avem $\sqrt{(a\pm a')^2+(b\pm b')^2}=\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{a'^2+b'^2}$. Ridicând la patrat, reducând, ridicând apoi a doua oară la patrat, găsim: $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2=0$. Dar după identitatea

lui *Lagrange*, membrul I al acestei egalități este $(ab'-ba')^2=0$, deci $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$. **2.** $(1+3i+2i^2)(1+3i)(1+9i+20i^2)=(-1+3i)(1+3i)(-19+9i)=-(1+9)(-19+9i)=10(19-9i)$. **3.** Dacă $n=4p$, avem $[(1+i)^2]^{2p}=(2i)^{2p}=(-1)^p.2^{2p}$; $n=4p+1$, $(1+i)^{4p}(1+i)=(-1)^p.2^{2p}(1+i)$; $n=4p+2$, $(1+i)^{4p}(1+i)^2=(-1)^p.2^{2p+1}i$; $n=4p+3$, $(1+i)^{4p+2}(1+i)=(-1)^p.2^{2p+1}(i-1)$. **4.** $\left[\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^p=\left[-\frac{1}{8}\left(1\mp\sqrt{3}i\right)^3\right]^p=1$. Pentru a doua expresiune, $\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3p}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\pm1}=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\pm1}$. Dacă luăm exponentul $+1$, rezultatul este $\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, dacă luăm -1, $\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **5.** Insemnând suma numerelor reale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cu S_1; suma produselor lor câte două cu S_2, suma produselor lor câte trei cu S_3 și produsul tuturor cu S_4 găsim că produsul dat este egal cu $(1-S_2+S_4)+i(S_1-S_3)$, deci produsul este real când $S_1=S_3$. **6.** Insemnând suma produselor câte una, câte două, etc., câte n ale cantităților reale α_i cu $S_1, S_2, \ldots, S_n$, produsul dat, ordonat după puterile lui x este egal cu $x^n+S_1ix^{n-1}+S_2i^2x^{n-2}+S_3i^3x^{n-3}+S_4i^4x^{n-4}+S_5i^5x^{n-5}+\ldots=(x^n-S_2x^{n-2}+S_4x^{n-4}-\ldots)+i(S_1x^{n-1}-S_3x^{n-3}+\ldots)$. Produsul este real, dacă $S_1x^{n-1}-S_3x^{n-3}+S_5x^{n-5}-\ldots=0$ și este de forma X_i dacă $x^n-S_2x^{n-2}+S_5x^{n-4}-\ldots=0$. **7.** $(1+\alpha i)^5=(1-10\alpha^2+5\alpha^4)+i(5\alpha-10\alpha^3+\alpha^5)$. Expresiunea este reală, dacă $\alpha(\alpha^4-10\alpha^2+5)=0$. $\alpha=0$, $\alpha=+\sqrt{5\pm2\sqrt{5}}$; este de forma ki, dacă $5\alpha^4-10\alpha^2+1=0$. $\alpha=\pm\sqrt{\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}}$. **8.** $(1+\alpha i)^n=1+C_n^1\alpha i-C_n^2\alpha^2-C_n^3\alpha^3i+$

$C_n^4\alpha^4+C_n^5\alpha^5 i-\ldots$ Expresiunea este reală, dacă $C_n^1\alpha-C_n^3\alpha^3+C_n^5\alpha^5-\ldots=0$ şi de forma ki, dacă $1-C_n^2\alpha^2+C_n^4\alpha^4-\ldots=0$. **9.** $z_1+z_2+z_3=r[(\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)]+i[\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)]$. Dar $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)=2\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)[2\cos\beta+1]$, $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)[2\cos\beta+1]$. Deci $z_1+z_2+z_3=r(2\cos\beta+1)[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=0$. Cum $\cos(\alpha+\beta)$ şi $\sin(\alpha+\beta)$ nu pot fi nuli pentru aceleaşi valori ale lui $\alpha+\beta$, trebue $2\cos\beta+1=0$, $\cos\beta=-\frac{1}{2}$. Deci vom lua $\beta=\pm 120^0$. In acest caz, punctele z_1, z_2, z_3 formează un triunghiu echilateral. **10.** Procedeu analog. Deoarece $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)=2\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+2\cos(\alpha+2\beta)\cos\beta=4\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{2\alpha+3\beta}{2}$, $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+3\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+2\sin(\alpha+2\beta)\cos\beta=4\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{2\alpha+3\beta}{2}$, $z_1+z_2+z_3+z_4=4r\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\left[\cos\frac{2\alpha+3\beta}{2}+i\sin\frac{2\alpha+3\beta}{2}\right]=0$. Dar $\cos\frac{2\alpha+3\beta}{2}$ şi $\sin\frac{2\alpha+3\beta}{2}$ nu pot fi nuli în acelaş timp, deci $\cos\beta=0$, deci vom lua $\beta=\pm 90^0$, iar z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui patrat. **11.** Generalizarea chestiunilor precedente. Punând $E_1=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\ldots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]$ $E_2=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin[\alpha+(n-1)\beta]$, înmulţind pe E_1 şi E_2 cu $2\sin\beta$ şi observând că $2\sin x\cos y=\sin(y+x)-\sin(y-x)$ şi $2\sin x\sin y=\cos(y-x)-\cos(y+x)$, avem făcând reducerile: $2\sin\beta E_1=\sin[\alpha+n\beta]+\sin[\alpha+(n-1)\beta]-\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)$; $2\sin\beta E_2=\cos(\alpha-\beta)+\cos\alpha-\cos[\alpha+(n-1)\beta]-\cos[\alpha+n\beta]$ sau încă: $E_1=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

$$\cos\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2} \text{ şi } E_2=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2} \quad **$$

$$\sum_{=1}^{n} z_k=\left(\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\left[\cos\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2}+i\sin\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2}\right].$$

Pentru ca $\sum_{k=1}^{n} z_k=0$, observând că $\cos\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2}$ şi $\sin\frac{2\alpha+(n-1)\beta}{2}$ nu pot fi nuli în acelaş timp, urmează ca să avem: $\left(\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)=0$ $**$ $\beta=\frac{2k\pi}{n}$, unde $k=1, 2, ..., (n-1)$.

Deci în acest caz afixele cantităţilor imaginare sunt vârfurile unui poligon regulat de n laturi înscris în cercul cu centrul în origină şi cu raza r, plecând din z_1 (în sensul direct sau contrar şi poligonul fiind *convex* sau *stelat*). In cazurile $n=3$ şi $n=4$, avem rezultatele găsite în exerciţiile precedente.

12. Argumentul membrului I este $arc\,tg\frac{B}{A}$, iar argumentul factorului a_n+b_ni este $arc\,tg\frac{b_n}{a_n}$ $(n=1, 2, 3...)$ şi cum argumentul unui produs este egal cu suma argumentelor factorilor, avem egalitatea din enunţ. **13.** Fie r_1, r_2 modulele celor două numere, r modulul sumei lor. Se ştie că $r\leqslant r_1+r_2$, vom arăta că, în condiţiile problemei $r_1+r_2<r_1r_2$; în adevăr, notând $r_1=2+\rho_1$, $r_2=2+\rho_2$, unde ρ_1 şi ρ_2 sunt pozitivi, avem $r_1r_2-(r_1+r_2)=\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2>0$; deci $r\leqslant r_1+r_2<r_1r_2$ (G. M. XXXVII. p. 476). **14.** $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, trebue să avem $\sin n\alpha=0$, deci $n\alpha=k\pi$, $k=0, 1, ...(n-1)$. Dacă $a\geqslant 0$, $\alpha=\frac{2k'\pi}{n}$ şi $r>\sqrt[n]{a}$; dacă $a<0$ şi $\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{n}$

($k=0,1,\ldots,n-1$) şi $r<\sqrt[n]{-a}$; dacă $a<0$ şi $\alpha=\dfrac{2k'\pi}{n}$ oricare ar fi ρ. **15.** Fie $S_0=C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ldots, S_1=C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots$, $S_2=C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\ldots, S_3=C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\ldots$ Desvoltăm egalitatea $(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$. Separând partea reală de cea imaginară, $S_0-S_2=(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4}$, $S_1-S_3=(\sqrt{2})^n\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Desvoltând $(1+1)^n$ şi $(1-1)^n$ după formula binomului, $S_0+S_2+S_1+S_3=2^n$, $S_0+S_2-S_1-S_3=0$. Rezolvăm sistemul celor 4 ecuaţii în S_0, S_1, S_2, S_3, avem: $S_0=2^{n-2}+(\sqrt{2})^{n-2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$, $S_1=2^{n-2}+(\sqrt{2})^{n-2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$, $S_2=2^{n-2}-(\sqrt{2})^{n-2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$, $S_3=2^{n-2}-(\sqrt{2})^{n-2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ (G. M. XXXVII. p. 309). **16.** $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3=\left[\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^3=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^3=i^3=-i$. **17.** $\dfrac{(1+i)^m}{(1-i)^n}=\dfrac{(1+i)^m(1+i)^n}{2^n}=\dfrac{(1+i)^{m+n}}{2^n}$. Pentru valoarea numărătorului se va vedea (3). Câtul este real dacă $m+n=4p$. **18.** $a+bi=\dfrac{(1+\lambda i)^2}{1+\lambda^2}=\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}i$, deci $a=\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$, $b=\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ *** $a^2+b^2=1$. **19.** $a+ib\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, deci $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ pur imaginar, ik; avem: $\lambda=\dfrac{1-ik}{1+ik}=\dfrac{(1-ik)^2}{1+k^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}-\dfrac{2k}{1+k^2}i$; $\rho=\sqrt{\dfrac{(1-k^2)^2+4k^2}{(1+k^2)^2}}=1$. Deci expresiunea dată este reală când λ este o câtime de modul 1, adică afixul lui λ se găseşte pe cercul cu centrul în origine şi rază 1. **20.** *a)* $\sqrt{i}=a+bi$. Determinăm pe a şi b ridicând la patrat în ambii membri $i=a^2-b^2+2abi$, deci $a^2-b^2=0$, $2ab=1$, de unde $a=b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ $\sqrt{i}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Metoda trigonometrică: $i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt{i}=\cos\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2}+$

$i\,sin\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2}$ $(k=0,1)$; găsim $cos\dfrac{\pi}{4}+i\,sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ şi $cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. *b)* Să calculăm $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{i}=cos\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}+i\,sin\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}$ $(k=0,1,2,3)$; găsim $cos\dfrac{\pi}{8}+i\,sin\dfrac{\pi}{8}$, $cos\dfrac{5\pi}{8}+i\,sin\dfrac{5\pi}{8}$, $cos\dfrac{9\pi}{8}+i\,sin\dfrac{9\pi}{8}=cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{8}\right)+i\,sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{8}\right)=-\left(cos\dfrac{\pi}{8}+i\,sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $cos\dfrac{13\pi}{8}+i\,sin\dfrac{13\pi}{8}=-\left(cos\dfrac{5\pi}{8}+i\,sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$; deci rădăcinile sunt: $\pm\left(cos\dfrac{\pi}{8}+i\,sin\dfrac{\pi}{8}\right)$; $\pm\left(cos\dfrac{5\pi}{8}+i\,sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$. *Metoda algebrică*. Punem $\sqrt[4]{i}=a+bi$, a şi b reali. Ridicând egalitatea la puterea a patra, avem pentru determinarea lui a şi b reali sistemul de ecuaţiuni:

$$\begin{cases} a^4-6a^2b^2+b^4=0 \\ 4ab(a^2-b^2)=1 \end{cases}$$ care se descompune în alte două:

$$\text{I}\begin{cases} a^2-b^2=-2ab \\ 4ab(a^2-b^2)=1 \end{cases} \text{ şi II}\begin{cases} a^2-b^2=+2ab \\ 4ab(a^2-b^2)=1. \end{cases}$$

Din primul, formând ecuaţiunea echivalentă $-8a^2b^2=1$, deducem că n'are soluţiuni în a şi b reale; sistemul (II) se descompune în următoarele două:

$$\text{III}\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ ab=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ şi IV}\begin{cases} a^2-b^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ ab=-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

care dau sistemele de soluţiuni:

$$\text{(III)}\begin{cases} a_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ b_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{IV}\begin{cases} a_{3,4}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b_{3,4}=\mp\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

Aşa dar, avem rădăcinile:

$$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}),\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}).$$

21. *a*). $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$. $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ ($k=0,1,2$). Valorile sunt 1, $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Metoda algebrică.* Punând $\sqrt[3]{1}=a+bi$ (a şi b reali), avem: $3a^2b-b^3=0$, $a^3-3ab^2=1$, care dă sistemele de soluţii: ($b=0$, $a=1$); $\left(a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci soluţiunile obţinute mai sus pe cale trigonometrică.

b). $\sqrt[3]{i}=\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}$ ($k=0,1,2$) $\therefore$ $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$. *Metoda algebrică:* Punând $\sqrt[3]{i}=a+bi$ $*^*_*$

$$\begin{cases}a^3-3ab^2=0\\3a^2b-b^3=1,\end{cases}\text{ care dau: }\begin{cases}a=0\\b=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\ *^*_*$$

$$\sqrt[3]{i}=\begin{cases}-i\\+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.\end{cases}$$

c). $\sqrt[5]{i}=\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{5}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{5}$

($k=0,1,2,3,4$) $\therefore$ $\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, $\cos\frac{9\pi}{10}+i\sin\frac{9\pi}{10}$, $\cos\frac{13\pi}{10}+i\sin\frac{13\pi}{10}$, $\cos\frac{17\pi}{10}+i\sin\frac{17\pi}{10}$.

Metoda algebrică. Punând: $\sqrt[5]{i}=a+bi$ $*^*_*$ $\begin{cases}a^5-10a^3b^2+5ab^4=0\\5a^4b-10a^2b^3+b^5=1\end{cases}$

care dau: $(a=0,\ b=1)$; $\left(\frac{a}{b}=\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{5}},\ b^5=\frac{-11\pm5\sqrt{5}}{64}\right)$.

22. $(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^2+b^2+c^2+ab(\alpha+\alpha^2)+ac(\alpha+\alpha^2)+bc(\alpha^2+\alpha)$ pentrucă $\alpha^3=1$ *** $\alpha^2+\alpha+1=0$, deci $\alpha+\alpha^2=-1$ şi ca urmare produsul de mai sus este: $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$. Multiplicând cu $(a+b+c)$ găsim $a^3+b^3+c^3-3abc$. **23.** α fiind o rădăcină cubică a unităţii avem: $\alpha^2+\alpha+1=0$, deci descompunând trinomul omogen x^2+xy+y^2 avem egalitatea $x^2+xy+y^2=(x-\alpha y)(x-\alpha^2 y)$ şi ca urmare vom arăta că pentru n impar şi prim cu 3 expresiunea dată $E(x,y)=(x+y)^n-x^n-y^n$ este divizibilă cu $(x-\alpha y)$ şi $(x-\alpha^2 y)$. In adevăr, observând că pentru $n=3p+1$, $\alpha^n=\alpha$ şi $\alpha^{2n}=\alpha^2$, iar pentru $n=3p+2$ $\alpha^n=\alpha^2$, $\alpha^{2n}=\alpha^4=\alpha$, avem: $E(\alpha y,y)=-y^n[\alpha^{2n}+\alpha^n+1]=-y^n[\alpha^2+\alpha+1]=0$. Tot asemenea, avem: $E[\alpha^2 y,y)=-y^n[\bar{\alpha}^n+\alpha^{2n}+1]=-y^n[\alpha^2+\alpha+1]=0$. **24.** Observăm că $6n+1$ este un număr fără soţ şi prim cu 3. Suntem deci în condiţiile problemei (23). Punând $y=1$, conchidem că membrul I al ecuaţiei prezente se divide cu x^2+x+1, polinom ale cărui rădăcini sunt chiar rădăcinile cubice complexe ale unităţii. **25.** Să notăm $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$. Observăm că $u+iv=1+\lambda x+\lambda^2x^2+\ldots+\lambda^n x^n=\frac{\lambda^{n+1}x^{n+1}-1}{\lambda x-1}=\frac{[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]x^{n+1}-1}{x\cos\theta+ix\sin\theta-1}=\frac{\{(x^{n+1}\cos(n+1)\theta-1)+ix^{n+1}\sin(n+1)\theta\}(x\cos\theta-1-ix\sin\theta)}{(x\cos\theta-1)^2+x^2\sin^2\theta}$.

Se găseşte: $u=\frac{x^{n+2}\cos n\theta-x^{n+1}\cos(n+1)\theta-x\cos\theta+1}{x^2-2x\cos\theta+1}$,

$v=\frac{x^{n+2}\sin n\theta-x^{n+1}\sin(n+1)\theta+x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}$. **26.** Să însemnăm $f(x)=1+A_1x+A_2x^2+\ldots$, avem $f(x)=(1+xi)f(x^2)$, deci $1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots=(1+xi)(1+A_1x^2+A_2x^4+A_3x^6+\ldots)=1+xi+A_1x^2+A_1ix^3+A_2x^4+A_2ix^5+\ldots$ Deci $A_1=i$, $A_2=A_1$, $A_3=A_1i$, $A_4=A_2$, etc., în general, $A_{2n}=A_n$, $A_{2n+1}=A_ni$. **27.** Din ecuaţia $tgmx=k$, deducem $\frac{tgmx+i}{tgmx-i}=$

$\frac{k+i}{k-i}$ sau $\frac{\cos mx-i\sin mx}{\cos mx+i\sin mx}=\frac{i+k}{i-k}$, dar dacă punem $z=tgx$, avem $\frac{\cos mx-i\sin mx}{\cos mx+i\sin mx}=\left(\frac{\cos x-i\sin x}{\cos x+i\sin x}\right)^m=\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^m=\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^m=\frac{i+k}{i-k}$, din care, notând $\sqrt[m]{\frac{i+k}{i-k}}=\alpha$, $\frac{i+z}{i-z}=\alpha$ $\therefore$ $z=i\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. Dacă în această valoare a lui z înlocuim pe i cu $-i$, deoarece $\sqrt[m]{\frac{k-i}{-i-k}}=\sqrt[m]{\frac{i-k}{i+k}}=\frac{1}{\alpha}$, $z=-i\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{\frac{1}{\alpha}+1}=-i\frac{1-\alpha}{\alpha+1}=i\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, adică z nu-şi schimbă valoarea când schimbăm pe i în $-i$, z este deci real. **28.** Fie $ax+by+c=0$ dreapta (C) descrisă de punctul z. Din relaţia care leagă pe z' de z deducem: $x+x'=k$, $y+y'=k'$, deci $a(k-x')+b(k-y)+c=0$, adică z' descrie asemenea o dreaptă. **29.** Avem din relaţia dată $x=\frac{kx'}{x'^2+y'^2}$, $y=\frac{-ky'}{x'^2+y'^2}$, deci înlocuind în ecuaţia dreptei: $c(x'^2+y'^2)+akx'-bky'=0$, adică un cerc trecând prin origină. **30.** Avem, $x=\frac{kx'+k'y'}{x'^2+y'^2}$, $y=\frac{k'x'-ky'}{x'^2+y'^2}$, găsim cercul cu centrul în origine: $x'^2+y'^2=k^2+k'^2$. **31.** Arătăm că dacă punctul z descrie o dreaptă sau un cerc, punctele $z_1=iz$; $z_2=dz_1$; $z_3=z_2+c$; $z_4=\frac{1}{z_3}$, $z'=a'z_4+b'$ descriu respectiv o dreaptă sau un cerc. **32.** Punând $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\alpha'=a'+b'i$, $\beta'=c'+d'i$ găsim pentru determinarea numerelor $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sistemul: $a^2+b^2+c^2+d^2=1$; $a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=1$; $aa'-bb'+cc'-dd'=0$; $ab'+ba'+cd'+c'd=0$, în total un sistem de patru ecuaţiuni cu opt necunoscute reale; deci un sistem care are un grad ridicat de nedeterminare. Putem adăoga pentru aflarea lui a', b', c', d' o ecuaţiune lineară omogenă cu parametri arbitrari, formând astfel sistemul omogen: $aa'-bb'+cc'-dd'=0$, $ab'+a'b+cd'+c'd=0$,

$\lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' + \lambda_4 d' = 0$ care dă, ţinând seamă de relaţia ce leagă pe a', b', c', d' soluţiile:

$$\frac{a'}{\begin{vmatrix} -b & c & -d \\ a & d & c \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}} = \frac{b'}{\begin{vmatrix} c & -d & a \\ d & c & b \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{c'}{\begin{vmatrix} -d & a & -b \\ c & b & a \\ \lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{d'}{\begin{vmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2}}$$ (Di fiind determinanţii precedenţi), iar $a = \pm\sqrt{1 - b^2 - c^2 - d^2}$. Pentru a avea soluţii reale, vom lua deci $b = d = 0$, $a = \pm\sqrt{1 - c^2}$, $|c| < 1$, şi numitorii lui b' şi d' *nuli*, adică:

$$\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

sau încă $c(c\lambda_1 - a\lambda_3) = 0$; $-a(c\lambda_1 - a\lambda_3) = 0$ $\ast^{\ast}_{\ast}$ $\lambda_3 = \frac{c}{a}\lambda_1$

pe care introducând în sistemul de soluţiuni de mai sus căpătăm pe a' şi c'. *Soluţia II.* Să punem $\alpha = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $\alpha' = r_1'(\cos\varphi'_1 + i\sin\varphi'_1)$, $\beta' = r'_2(\cos\varphi'_2 + i\sin\varphi'_2)$. Inlocuind în prima şi ultima ecuaţiune, obţinem $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $r'^2_1 + r'^2_2 = 1$. Prin definiţie modulele nu pot fi numere negative şi putem pune $r_1 = \cos\omega$, $r_2 = \sin\omega$, $r'_1 = \sin\omega'$, $r'_2 = \cos\omega'$ $\left(\omega \text{ şi } \omega' \text{ fiind deci cuprinse între } 0 \text{ şi } \frac{\pi}{2}\right)$. Ecuaţia a doua a problemei devine $r_1 r'_1[\cos(\varphi_1 - \varphi'_1) + i\sin(\varphi_1 - \varphi'_1)] = r_2 r'_2[\cos(\pi + \varphi_2 - \varphi'_2) + i\sin(\pi + \varphi_2 - \varphi'_2)]$. Deducem: $\varphi_1 - \varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi'_2 + \pi + 2k\pi$, $r_1 r'_1 = r_2 r'_2$, k fiind un număr întreg. Deci $\varphi'_2 = \pi + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi'_1$, suprimând pe $2k\pi$ care nu schimbă valoarea numărului complex de argument φ'_2, iar din egalitatea modulelor, cu înlocuirile făcute, $\sin(\omega - \omega') = 0$, $\omega = \omega'$, deoarece ω şi ω' sunt în primul cadran. Numerele căutate sunt deci: $\alpha = \cos\omega(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\beta = \sin\omega(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $\alpha' = \sin\omega(\cos\varphi'_1 + i\sin\varphi'_1)$, $\beta' = \cos\omega(\cos\varphi'_2 + i\sin\varphi'_2)$, φ'_2 având valoarea aflată. α, β, α', β' sunt reale dacă $\varphi_1 = k_1\pi$, $\varphi_2 = k_2\pi$, $\varphi'_1 = k'_1\pi$, (k_1, k_2, k'_1 întregi). (G. M. XL. p. 326).

XI. 1. Scăzând elementele primei linii din acelea ale liniei a doua şi asemenea elementele liniei a doua din acelea ale liniei a treia avem un determinant cu două linii identice, *deci nul.* **2.** Adunând la elementele primei coloane, apoi la cele ale coloanei a doua, apoi la cele ale coloanei a treia elementele ultimei coloane înmulţite respectiv cu —3, cu —4 şi cu —2 determinantul se reduce la următorul de ordinul al treilea: $-\begin{vmatrix} 22 & 27 & 9 \\ 9 & 16 & 9 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 13 & 11 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -302.$

3. Dând factor între elementele coloanei a doua pe —2; apo în determinantul obţinut adunăm la elementele liniei a doua, a treia şi a patra elementele primei linii înmulţite respectiv cu +3, cu —1, cu +1, obţinem: $6\begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Acum scăzând sumele elementelor primelor două coloane din a treia avem succesiv:

$$6\begin{vmatrix} 19 & -2 & 0 \\ -7 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 19 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -972.$$

4. Scăzând pe rând elementele coloanelor a doua, a treia, a patra elementele primei coloane înmulţite respectiv cu —2, cu —3, cu —1, cu —2 determinantul se reduce la următorul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & -2 & -12 \\ 3 & -12 & -5 & -13 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 12 & 2 & 12 \\ 12 & 5 & 13 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 13 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -174.$$

5. Se va scădea elementele primei linii succesiv din elementele celorlalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 5 = +5.$$

6. Generalizarea chestiunei precedente, procedeu analog; rezultatul este $(-1)^{n-1}n$. (G. M. II.). **7.** Se vor adăuga la elementele primei linii elementele celorlalte linii, se va scoate factor comun:

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -160.$$

In general, avem de calculat determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & (n-1) & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) \\ (n-1) & n & 1 & 2 & \dots & (n-3) & (n-2) \\ (n-2) & (n-1) & n & 1 & \dots & (n-4) & (n-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

Adunăm elementelor primei linii, elementele celorlalte linii. Fiecare element al primei linii conținând suma primelor n numere întregi este $\frac{n(n+1)}{2}$; scoțând factor comun în prima linie,

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) \\ (n-1) & n & 1 & 2 & \dots & (n-3) & (n-2) \\ (n-2) & (n-1) & n & 1 & \dots & (n-4) & (n-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

Scăzând elementele primei coloane din elementele celorlalte coloane,

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ (n-1) & 1 & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ (n-2) & 1 & 2 & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & -1 \end{vmatrix}$$

Punând în mod general:

$$\Delta_{n-p}=\begin{vmatrix} -(n-p) & -(n-p-1) & \dots\dots & -2 & -1 \\ p & -(n-p-1) & \dots\dots & -2 & -1 \\ p & (p+1) & \dots\dots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p & (p+1) & & -2 & -1 \\ p & (p+1) & & (n-2) & -1 \end{vmatrix},$$

scădem elementele ultimei linii din elementele primei linii, dăm factor comun pe $(-n)$; apoi adăugăm la elementele primei coloane elementele ultimei coloane înmulţite cu p şi avem: $\Delta_{n-p}=(-n)\Delta_{n-p-1}$. Făcând în această relaţiune pe p egal succesiv cu $1, 2, 3, \dots, (n-2)$, observând că $\Delta_2=\pm n$, şi înmulţind relaţiunile obţinute, avem:

$\Delta_{n-1}=(-n)^{n-2}\times(-1)$; deci $D=(-1)^{n-1}.\frac{1}{2}.n^{n-1}(n+1)$.

8. Scădem elementele ultimei coloane din elementele celorlalte coloane, apoi scădem elementele ultimei linii din elementele celorlalte linii, determinantul se scrie deci:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$-3\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Valoarea primului determinant se obţine imediat: 3^4. Pentru

al doilea determinant scădem elementele liniei II din elementele liniei I și găsim:

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-4 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4^3.$$

Valoarea determinantului problemei este deci 3^4+4^3. **9.** Acest determinant este generalizarea celui precedent. Urmând același procedeu de calcul, găsim:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2(1-n) & 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 & n-1 \\ 2-n & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 0 \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desvoltând după elementele ultimei linii, obținem doi termeni D_1 și D_2.

$$D_1 = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}(n-1)^2 \begin{vmatrix} 3-n & 4-n & \dots & -1 & n-1 \\ 3 & 4 & \dots & n-1 & 0 \\ 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} i} (n-1)^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)^n.$$

$$D_2 = (-1)^{2n-2} \begin{vmatrix} 2(1-n) & 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 \\ 2-n & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

In acest determinant de ordinul $n-1$ scădem elementele liniei II din elementele primei linii:

$$D_2 = \begin{vmatrix} -n & -n & -n & -n & \dots & -n \\ 2-n & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

apoi scădem elementele ultimei coloane din elementele celorlalte coloane:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n \\ 3-2n & 3-n & 4-n & 5-n & \dots & n-1 \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-1}n\begin{vmatrix} 3-2n & 3-n & 4-n & 5-n & \dots & -1 \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Repetăm şi în acest determinant de ordinul $n-2$ scăderea elementelor liniei II din elementele primei linii:

$$D_2=(-1)^{n-1}n\begin{vmatrix} -n & -n & -n & -n & \dots & -n \\ 3-n & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}n^2\begin{vmatrix} 4-2n & 4-n & 5-n & 6-n & \dots & -1 \\ 4-n & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\dots(-1)^3n^{n-3}\begin{vmatrix} (n-1)-2n & -1 \\ -1 & n-1 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\dots(-1)^3(-1)^2(-1)\,n^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-1}.$$

Deci valoarea determinantului propus este: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)^n+n^{n-1}]$. **10.** Scădem ultima coloană din celelalte, avem, notând cu D_5 valoarea determinantului.

$$D_5=\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{9}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{12} & \frac{3}{18} & \frac{2}{24} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{21} & \frac{3}{28} & \frac{2}{35} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{32} & \frac{3}{40} & \frac{2}{48} & \frac{1}{56} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{45} & \frac{3}{54} & \frac{2}{63} & \frac{1}{72} & \frac{1}{9} \end{vmatrix}=\frac{4!}{5.6.7.8.9}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzând linia ultimă din celelalte, găsim:

$$D_5 = \frac{(4!)^2}{9!}\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{12} & \frac{4}{21} & \frac{4}{32} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{18} & \frac{3}{28} & \frac{3}{40} & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{24} & \frac{2}{35} & \frac{2}{48} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \frac{1}{56} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(4!)^4}{8!\ 9!}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{(4!)^4}{8!\ 9!} D_4.$$

Analog se calculează D_4 şi găsim $D_4 = \frac{(3!)^4}{6!\ 7!} D_3$ etc. *** $D_5 = \frac{(1!\,2!\,3!\,4!)^4}{1!\,2!\,3!\,4!\ldots 9!}$. **11.** Generalizarea determinantului precedent, procedând analog găsim: $D_n = \frac{[(n-1)!]^4}{(2n-1)!(2n-2)!} D_{n-1}$. Dând lui n succesiv valorile $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2$ şi înmulţind relaţiile obţinute, găsim: $D_n = \frac{[1!\ 2!\ldots..(n-1)!]^4}{1!\ 2!\ 3!\ldots.(2n-1)!}$.

12. Insemnând determinantul cu D_n, observăm că dacă scădem fiecare coloană din precedenta, ultima rămânând neschimbată, şi ţinem seamă de relaţiile generale $C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$ şi $C_m^0 = 1$, obţinem desvoltând după elementele primei linii: $D_n = D_{n-1} \times (-1)^{k-1}$. In acelaş fel avem: $D_{n-1} = D_{n-2} \times (-1)^{k-2}$, etc. Inmulţind aceste relaţii găsim: $D_n = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$. **13.** Insem-

nând determinantul cu $\Delta_{n,1}$, observăm că scăzând fiecare coloană din următoarea și dând în factor în determinantul rezultat după desvoltare factorul egal cu rangul liniei, avem:

$$\Delta_{n,1} = n!\,\Delta_{n,2}, \text{ unde:}$$

$$\Delta_{n,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n+1 \\ 2.3 & 3.4 & 4.5 & \ldots\ldots & (n+1)(n+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\ldots n & 3.4\ldots(n+1) & \ldots\ldots & (n+1)(n+2)\ldots(2n-1) \end{vmatrix}.$$

In acelaș fel găsim: $\Delta_{n,2} = (n-1)!\,\Delta_{n,3}$ etc.
Deci $\Delta_{n,1} = 1!\,2!\,3!\ldots n!$. **14.** Dăm pe linii respectiv factorii $1,!\ 2!,\ldots n!$, iar pe coloane, începând cu a doua, pe $1!\,2!\ldots(n-1)!$ și cum $C_m^n = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$, avem:

$$D_n = [1!\,2!\ldots(n-1)!]^2\,n! \begin{vmatrix} 1 & C_2^1 & C_3^1 & \ldots C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \ldots C_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_{n+1}^n & C_{n+2}^n \ldots & C_{2n-1}^n \end{vmatrix} =$$

$[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2\,n!$ (G. M. XLI p. 535). **15.** Generalizarea problemei precedente. Procedând la fel,

$$D_n = 1!\,2!\,3!\ldots\ldots(n-1)!\,(k+1)!\,(k+2)!\ldots\ldots(k+n)! \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+3}^2 \ldots & C_{k+n}^{n-1} \\ 1 & C_{k+3}^1 & C_{k+4}^2 \ldots & C_{k+n+1}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_{k+n+1}^1 & C_{k+n+2}^2 \ldots & C_{k+2n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,(k+1)!\,(k+2)!\ldots(k+n)!$ pentrucă valoarea determinantului din membrul II este 1. Pentru $k=0$, avem problema precedentă. (G. M. XLI. p. 537). **16.** Observând că $\dfrac{1}{(n-1)!} = \dfrac{1!}{n!}C_n^1$; $\dfrac{1}{(n-2)!} = \dfrac{1!}{(n-1)!}C_{n-1}^1, \ldots \dfrac{1}{(n-k)!} = \dfrac{k!}{n-k+1)!}C_{n-k+1}^1 \ldots\ldots$, găsim că

$$D_{n,k}=\frac{1!\,2!\ldots\ldots(k-1)!}{n!(n-1)!\ldots(n-k+1)!}\times\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots 1\\ C_n^1 & C_{n-1}^1 & \ldots C_{n-k+1}^1\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ C_n^{k-1} & C_{n-1}^{k-1} & \ldots C_{n-k+1}^{k-1}\end{vmatrix},\ \text{etc.}$$

17. Se adună primei coloane elementele ultimelor două coloane şi punând $(a+b)^2$ factor comun, avem:

$$(a+b)^2\begin{vmatrix}1 & 2ab & b^2\\ 1 & a^2 & 2ab\\ 1 & b^2 & a^2\end{vmatrix}=(a+b)^2[(a^2+b^2)^2+a^2b^2-2ab(a^2+b^2)]=$$

$=(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=(a^3+b^3)^2$. **18.** Adunând elementele primei coloane, cu elementele celorlalte coloane şi scoţând factor comun,

$$(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix}1 & ab & b^2\\ 1 & a^2 & ab\\ 1 & b^2 & a^2\end{vmatrix}=(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix}1 & ab & b^2\\ 0 & a(a-b) & b(a-b)\\ 0 & b(b-a) & a^2-b^2\end{vmatrix}=$$

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{vmatrix}=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2=(a^3-b^3)^2.$$

19. Scădem elementele coloanei II din elementele coloanei I şi elementele coloanei III din elementele coloanei II, descompunem în factori diferenţele de patrate şi scoţând factorii comuni elementelor coloanelor I şi II, avem:

$$(a+b+c)^2\begin{vmatrix}b+c-a & 0 & a^2\\ b-c-a & c+a-b & b^2\\ 0 & c-a-b & (a+b)^2\end{vmatrix},$$ scăzând din elementele liniei II, elementele celorlalte linii, aflăm

$$2(a+b+c)^2\begin{vmatrix}b+c-a & 0 & a^2\\ -c & a & -a(a+b)\\ 0 & c-a-b & (a+b)^2\end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$$

Soluţia II. Se observă întâi că determinantul nu se schimbă dacă facem o permutare circulară asupra literelor a, b, c; în al doilea este un polinom omogen de gradul al 6-lea elementele liniilor fiind toate omogene de gradul al doilea; al treilea se anulează dacă facem $a=0$, sau $b=0$, sau $c=0$, sau $a+b+c=0$, deci este divizibil cu $abc(a+b+c)$. Aşa dar

$\Delta = abc(a+b+c)[A(a^2+b^2+c^2)+B(ab+ac+bc)]$ A și B fiind doi coeficienți numerici, deci aceiași oricare ar fi valorile lui a, b, c. Dacă facem $a=+1$, $b=c=-2$ găsim $A=+2$; dacă facem $a=1$, $b=c=-1$ găsim $B=3A-2$ deci $B=4$ *** $\Delta = 2abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$ sau: $\Delta = 2abc(a+b+c)^3$. **20.** *Prima soluție.* Desvoltând avem: $\Delta = 2\left[4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]$ expresiune care nu se schimbă când permutăm circular a, b, c. Putem scrie: $\frac{1}{2}\Delta = -(b^2+c^2)-\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{b^2+c^2}{bc}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left[(bc-a)-\frac{bc-a}{abc}\right]$, apoi succesiv: $\frac{1}{2}\Delta = -(b^2+c^2)\left(1-\frac{a}{bc}\right)-\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\left(1-\frac{bc}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)(bc-a)\left(1-\frac{1}{abc}\right)$ de unde se vede că Δ este divizibil cu $(bc-a)$ și ca urmare cu factori obținuți prin permutări deci $\frac{1}{2}\Delta = (bc-a)\left[\frac{b^2+c^2}{bc}\left(\frac{1}{abc}-1\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{abc}\right)\right] = (bc-a)\left(1-\frac{1}{abc}\right)\left[a+\frac{1}{a}-\right.$ $\left.-\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right]$; $\frac{1}{2}\Delta = (bc-a)\left(1-\frac{1}{abc}\right)\left(\frac{ac-b}{c}-\frac{ac-b}{ab}\right) =$ $\frac{(bc-a)(ac-b)(ab-c)}{abc}\left(1-\frac{1}{abc}\right)$ sau încă: $\Delta = \frac{2}{a^2b^2c^2}$ $(bc-a)(ac-b)(ab-c)(abc-1)$. *Soluția II.* Dând $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}$ factori comuni între elementele celor 3 linii, determinantul devine

$$\frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 2bc & b(c^2+1) & c(b^2+1) \\ a(c^2+1) & 2ac & c(a^2+1) \\ a(b^2+1) & b(a^2+1) & 2ab \end{vmatrix}$$

In acest nou determinant Δ să punem $a=bc$, devine

$$b^2c^2\begin{vmatrix} 2 & c^2+1 & b^2+1 \\ c^2+1 & 2c^2 & b^2c^2+1 \\ b^2+1 & b^2c^2+1 & 2b^2 \end{vmatrix};$$

în acest ultim determinant scădem din coloanele II, III coloana I:

$$b^2c^2\begin{vmatrix} 2 & c^2-1 & b^2-1 \\ c^2+1 & c^2-1 & c^2(b^2-1) \\ b^2+1 & b^2(c^2-1) & b^2-1 \end{vmatrix} = b^2c^2(b^2-1)(c^2-1)$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ c^2+1 & 1 & c^2 \\ b^2+1 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ în care adunând coloana II la III, obţinem un determinant cu 2 coloane identice. Deci $\Delta=0$ pentru $a=bc$, Δ este divizibil cu $a-bc$ şi analog se arată că este divizibil cu $b-ca, c-ab$. Punând în Δ $a=\frac{1}{bc}$, se găseşte

$$\frac{1}{b^3c^3}\begin{vmatrix} 2bc & b(c^2+1) & c(b^2+1) \\ b(c^2+1) & 2bc & 1+b^2c^2 \\ c(b^2+1) & 1+b^2c^2 & 2bc \end{vmatrix} =$$

$\frac{1}{b^3c^2}[8b^3c^3+2bc(c^2+1)(b^2+1)(1+b^2c^2)-2bc^3(b^2+1)^2-$

$-2b^3c(c^2+1)^2-2bc(1+b^2c^2)^2]=\frac{2}{b^2c^2}[4b^2c^2+(1+b^2c^2)(b^2+c^2)$

$-c^2(b^2+1)^2-b^2(c^2+1)^2]=0$. Deci Δ este divizibil şi cu $a-\frac{1}{bc}$ sau cu $abc-1$. Δ este deci divizibil cu $(a-bc)(b-ca)(c-ab)(abc-1)$ şi cum reprezintă un polinom de gradul IX, câtul este o constantă: $\Delta\equiv k(a-bc)(b-ca)(c-ab)(abc-1)$. Determinăm pe k înlocuind în ambii membri ai identităţii $a=0$, $b=1$, $c=1$, se găseşte $-2=+k$, deci $k=-2$. Valoarea determinantului propus este deci: $\frac{+2(bc-a)(ca-b)(ab-c)(abc-1)}{a^2b^2c^2}$. **21.** Adunăm elementelor din prima linie respectiv elementele celorlalte linii, obţinem $2(2a^2+b^2)$ factor comun în prima linie, deci, determinantul — notat D — se poate scrie:

$$D=2(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$$

$$2(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a-b)^2 & 2ab & 2ab-2b^2 & 4ab \\ a^2+b^2 & -2b^2 & 2ab & -2ab \\ a^2-b^2 & 2b^2+2ab & 2b^2-2ab & 2b^2 \end{vmatrix} =$$

$$16b^3(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} a & a-b & 2a \\ -b & a & -a \\ a+b & b-a & b \end{vmatrix}.$$

Adunăm elementelor primei coloane elementele coloanei III, scădem elementele coloanei II și avem:

$$D=16b^3(2a^2+b^2))(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a-b & 2a \\ -1 & a & -a \\ 1 & b-a & b \end{vmatrix} =$$

$$16b^3(2a^2+b^2)(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a-b & 2a \\ 0 & 2a-b & a \\ 0 & b & b-a \end{vmatrix} =$$

$-16b^3(2a+b)(2a^2+b^2)(2a^2+b^2-2ab)$. (G. M. XLII. p. 94).

22. Determinantul, care este un polinom de gradul al 4-lea în raport cu x se reduce la zero pentru $x=a_1$, întrucât are primele două linii identice. Analog pentru $x=a_2$, $x=a_3$. Deci valoarea determinantului este divizibilă cu $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$. Adunând primei coloane elementele celorlalte coloane, deducem că valoarea determinantului este divizibilă cu $x+a_1+a_2+a_3$. Rezultatul este $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2+a_3)$, coeficientul lui x^4 fiind 1 în ambele expresiuni.

23. Acest determinant este generalizarea celui precedent, procedeul este analog, rezultatul: $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)$. **24.** Scăzând elementele fiecărei linii din elementele liniei următoare, avem:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_3-x & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & a_4-x \end{vmatrix} = a_1 \times$$

$$\begin{vmatrix} a_2-x & 0 & 0 \\ x-a_2 & a_3-x & 0 \\ 0 & x-a_3 & a_4-x \end{vmatrix} + (a_1-x)\begin{vmatrix} x & x & x \\ x-a_2 & a_3-x & 0 \\ 0 & x-a_3 & a_4-x \end{vmatrix} =$$

$=a_1(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)+x(a_1-x)[(a_3-x)(a_4-x)+(a_2-x)(a_4-x)+(a_2-x)(a_3-x)]=x(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)\left[\frac{a_1}{x(a_1-x)}+\frac{1}{a_2-x}+\frac{1}{a_3-x}+\frac{1}{a_4-x}\right]$. **25.** Generalizarea determinantului precedent. Procedând în acelaş fel găsim: $\Delta_n=x(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)\left[\frac{a_1}{x(a_1-x)}+\frac{1}{a_2-x}+\frac{1}{a_3-x}+\ldots+\frac{1}{a_n-x}\right]$. **26.** Se vor aduna elementelor primei coloane elementele celorlalte coloane, se va scoate $a+b+2x$ factor comun, apoi se vor scădea elementele primei linii din elementele celorlalte linii. Rezultatul este: $(a-b)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$. **27.** Se adună elementelor primei coloane, elementele celorlalte coloane, se scoate: $a+b+4x$ factor comun, apoi se scad elementele primei linii din elementele celorlalte linii. Se găseşte:

$$(a+b+4x)(a-b)\begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & b-x \\ 0 & a-x & b-x & 0 \\ 0 & b-x & a-x & 0 \\ b-x & 0 & 0 & a-x \end{vmatrix}.$$

Acest determinant de ordinul 4 este de aceiaşi formă cu acel calculat în exerciţiul precedent, din care se deduce punând în loc de a, $a-x$, în loc de b, $b-x$ şi în loc de x, 0. Deci valoarea sa este $(a-x-b+x)^2(a-x+b-x)(a-x+b-x)=(a-b)^2(a+b-2x)^2$. Determinantul propus are deci valoarea: $(a-b)^3(a+b+4x)(a+b-2x)^2$. **28.** Scăzând elementele primei linii din elementele celorlalte linii avem:

$$\Delta=(d-c)(d-b)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & a+c & ac \\ 1 & b+c & bc \end{vmatrix};$$ repetând acelaşi

lucru pentru noul determinant, avem: $\Delta=(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}=(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$.

29. Se va descompune într'o sumă de 8 determinanţi din care 6 sunt nuli; rezultatul este $2abc(c-b)(c-a)(b-a)$.

30. Fie Δ valoarea determinantului de calculat, Δ este un polinom omogen de gradul al 7-lea în raport cu a, b, c, d; Δ se reduce la zero când facem $a=b$, $a=c$, $a=d$, $b=c$, $b=d$, $c=d$, este deci divizibil cu $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$, câtul va fi omogen de gradul I în raport cu a, b, c, d; Δ își schimbă semnul când schimbăm pe a cu b, împărțitorul de mai sus schimbă deasemenea numai semnul, câtul rămânând neschimbat este simetric în raport cu a, b. Urmează că el este de forma $k(a+b+c+d)$, k fiind un coeficient numeric; pentru a determina pe k, considerăm identitatea $\Delta \equiv k(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$, unde facem $d=0$, simplificăm cu abc, apoi $c=0$, simplificăm cu $ab...$, găsim $k=1$. **31.** Generalizarea chestiunei precedente, valoarea determinantului este un polinom omogen de gradul $\frac{1}{2}n(n-1)+1$, ea se reduce la zero când facem $a_i=a_k$, este deci divizibilă cu $(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)...(a_{n-1}-a_n)$, peste tot $\frac{1}{2}n(n-1)$ factori, vom avea un cât simetric de gradul I: $k(a_1+a_2+...+a_n)$. Egalând determinantul cu produsul dintre împărțitor și cât, obținem o identitate în care făcând $a_n=0$ și simplificând cu $a_1 a_2 ... a_{n-1}$, găsim o expresie de aceiași formă afară de factorul $(-1)^{n-1}...$ din aproape în aproape găsim $k=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **32.** Procedeu analog cu precedentele. Determinantul se divide cu $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Câtul împărțirii este un polinom simetric și omogen de gradul 4: $\alpha\Sigma a^4+\beta\Sigma a^3 b+\gamma\Sigma a^2 b^2+\delta\Sigma a^2 bc+\varepsilon abcd$. Egalăm determinantul cu produsul dintre cât și împărțitor, în identitate facem $d=0$, simplificăm cu abc, apoi $c=0$ și obținem $ab(a^2+ab+b^2)=\alpha(a^4+b^4)+\beta(a^3 b+b^3 a)+\gamma a^2 b^2$, de unde $\alpha=0$, $\beta=\gamma=1$. Pe δ îl determinăm înlocuind în identitatea (ce obținusem înainte de a face $c=0$) $a=1$, $b=-1$, $c=2$, găsim $\delta=2$. In fine, punând în identitatea inițială $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=-2$, găsim $\varepsilon=4$. Incât, valoarea determinantului este: $(a-b)(a-c)$

$(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(\Sigma a^3 b+\Sigma a^2 b^2+2\Sigma a^2 bc+3abcd)$ (G. M. IV.). **33.** Se va divide linia întâia cu a_1^{n-1}, linia a doua cu a_2^{n-1},... linia n-a cu a_n^{n-1} punând $b_i : a_i = c_i$, avem:

$$a_1^{n-1} a_2^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \times \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots\ldots & c_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_n & c_n^2 & \ldots\ldots & c_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Avem de calculat un determinant *Vandermonde* de ordinul n. Rezultatul este $a_1^{n-1} a_2^{n-1} a_n^{n-1} (c_2 - c_1)(c_3 - c_1) \ldots\ldots (c_n - c_1)$ $(c_3 - c_2) \ldots (c_n - c_2) \ldots (c_n - c_{n-1}) = a_1^{n-1} a_2^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)$ $\left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}\right) \ldots \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 b_3 - a_3 b_1) \ldots$ $(a_1 b_n - a_n b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2) \ldots (a_{n-1} b_n - b_{n-1} a_n)$. **34.** Prin descompunere în sume de determinanţi ajungem la:

$$18x^3 abc \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 18x^4 \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 12x^5 \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Valorile acestor determinanţi sunt respectiv: $(a-b)(b-c)(c-a)$, $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$, $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$. Deci valoarea determinantului este $6x^3 (a-b)(b-c)(c-a) \times$ $[2x^2 (a+b+c) + 3x(ab+ca+cb) + 3abc]$. **35.** Din coloana întâi se va scădea coloana a doua multiplicată cu $\frac{1}{x}$; din coloana a doua, coloana a treia multiplicată cu $\frac{1}{x}$, etc., se găseşte $(x^4-1)^3$. **36.** Procedeu analog; rezultatul este: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (x^n-1)^{n-1}$. (G. M. VI). **37.** Se divid liniile respectiv cu $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$, găsim:

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cotg}^2\alpha & \operatorname{cotg}\alpha \\ 1 & \operatorname{cotg}^2\beta & \operatorname{cotg}\beta \\ 1 & \operatorname{cotg}^2\gamma & \operatorname{cotg}\gamma \end{vmatrix} =$$

$$-\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cotg}\alpha & \operatorname{cotg}^2\alpha \\ 1 & \operatorname{cotg}\beta & \operatorname{cotg}^2\beta \\ 1 & \operatorname{cotg}\gamma & \operatorname{cotg}^2\gamma \end{vmatrix} =$$

$-\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\,[\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha][\operatorname{cotg}\gamma-\operatorname{cotg}\alpha][\operatorname{cotg}\gamma-\operatorname{cotg}\beta]=$
$-\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha).$

38. Se va scădea linia a 3-a din 1-a şi a 4-a din a 2-a, apoi se va aduna coloana 1-a cu a 2-a şi a 3-a cu a 4-a; se va desvolta după elementele coloanei 1-a. Se găseşte:

$$[(\cos\beta+\cos\alpha)(\sin\delta+\sin\gamma)-(\sin\beta+\sin\alpha)(\cos\delta+\cos\gamma)]\times\begin{vmatrix}\sin\beta-\sin\alpha & \sin\delta-\sin\gamma\\ \cos\beta-\cos\alpha & \cos\delta-\cos\gamma\end{vmatrix}=-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)$$

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}.$$

39. Determinantul se mai scrie:

$$D=\begin{vmatrix}0 & \sin 40 & \cos 40 & tg\,40 & \operatorname{cotg}40\\ -\sin 40 & 0 & \cos 50 & tg\,50 & \operatorname{cotg}50\\ -\cos 40 & -\cos 50 & 0 & tg\,60 & \operatorname{cotg}60\\ -tg\,40 & -tg\,50 & -tg\,60 & 0 & \operatorname{cotg}70\\ -\operatorname{cotg}40 & -\operatorname{cotg}50 & -\operatorname{cotg}60 & -\operatorname{cotg}70 & 0\end{vmatrix}.$$

Se ştie că schimbând liniile cu coloanele, determinantul nu-şi schimbă valoarea, deci

$$D=\begin{vmatrix}0 & -\sin 40 & -\cos 40 & -tg\,40 & -\operatorname{cotg}40\\ \sin 40 & 0 & -\cos 50 & -tg\,50 & -\operatorname{cotg}50\\ \cos 40 & \cos 50 & 0 & -tg\,60 & -\operatorname{cotg}60\\ tg\,40 & tg\,50 & tg\,60 & 0 & -\operatorname{cotg}70\\ \operatorname{cotg}40 & \operatorname{cotg}50 & \operatorname{cotg}60 & \operatorname{cotg}70 & 0\end{vmatrix},$$

scoţând pe fiecare linie (-1) în factor, obţinem $D=-D$, deci $D=0$. (S. E. G. M. III). **40.** Observând că

$$D=\frac{2}{(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)}\begin{vmatrix}u+u^3 & v+v^3 & w+w^3\\ u^2 & v^2 & w^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

Calculul lui D se reduce la calculul unui determinant *Vandermonde* şi $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ u^2 & v^2 & w^2\\ u^3 & v^3 & w^3\end{vmatrix}$. Pentru Δ observăm că poate fi scris sub forma: $\Delta=\sin x\sin y\sin z\begin{vmatrix}tg\frac{x}{2} & tg\frac{y}{2} & tg\frac{z}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ \cos x & \cos y & \cos z\end{vmatrix}$

deci vom pune: $tg\frac{x}{2}=u$, $tg\frac{y}{2}=v$, $tg\frac{z}{2}=w$ şi obţinem rezultatul: $\Delta=16\,sin\frac{x}{2}\,sin\frac{y}{2}\,sin\frac{z}{2}\,sin\frac{x-y}{2}\,sin\frac{y-z}{2}\,sin\frac{z-x}{2}\,cos\frac{x+y+z}{2}$. (G. M. XXXII. p. 114). **41.** Se va adăuga la coloana întâi celelalte 3 coloane; se găseşte factorul $10-x$; în urmă determinantul se reduce la unul de ordinul al 3-lea, a cărui valoare se obţine adunând la elementele primei linii pe ale celorlalte, şi apoi coloanei 1-a elementele coloanei a 3-a şi este $(8-x^2)(2+x)$; rădăcinile sunt -2, $\pm 2\sqrt{2}$, 10. **42.** Rădăcinile sunt 0, 0 şi $a^2+b^2+c^2$. **43.** Din definiţia numerelor lui *Fibonacci* putem scrie: $a_3=a_1+a_2$, $b_3=b_1+b_2$,... $l_3=l_1+l_2$, rezultă că determinantul Δ se descompune într'o sumă de câte doi determinanţi, fiecare nul, având câte două coloane egale. (G. M. XLII. p. 140). **44.** Scădem elementele primei linii din acelea ale liniei a 2-a şi a 3-a şi punem factor comun pe $(b-a)(c-a)$; apoi în determinantul rămas scădem elementele liniei a 2-a din acelea ale liniei a 3-a şi punem în factor pe $(c-b)$; repetăm operaţiunea pentru coloane şi avem:

$$D=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2\begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & a+a^2b+a^3 & a^2 \\ a+a^2b+a^3 & 1+(a+b)^2 & a+b \\ a^2 & a+b & 1 \end{vmatrix}.$$

Acum adunând la elementele primei linii pe ale liniei a 3-a înmulţite cu $(-a^2)$, şi la elementele liniei a 2-a elementele liniei a 3-a înmulţite cu $-(a+b)$, găsim:

$$D=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & a^2 \\ a & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2$. Dacă determinantul D este nul, trebue neapărat unul din factori: $(a-b)$, $(b-c)$ sau $(c-a)$ să fie *nul* deci triunghiul este isoscel; reciproc două din numerele a, b, c fiind egale, D este nul. (S. E. G. M. III. p. 69).

45. Fie $D_n^p = \begin{vmatrix} k_p^1 & k_p^2 & \dots & k_p^p & 0 & \dots & 0 \\ k_{p+1}^1 & k_{p+1}^2 & \dots & k_{p+1}^p & k_{p+1}^{p+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n+p-1}^1 & k_{n+p-1}^2 & \dots & k_{n+p-1}^p & \dots & k_{n+p-1}^n & \end{vmatrix}$.

Ţinând seama de relaţia de recurenţă se poate înlocui elementele din coloana primă cu k_{p-1}^1, $k_p^1, \dots k_{n+p-2}^1$; apoi scăzând coloana primă din a doua şi repetând operaţia pentru două câte două coloane ce se succed, avem $D_n^p = n!\ D_n^{p-1}$, cum $D_n^1 = 1$, rezultă $D_n^p = (n!)^{p-1}$. Să notăm

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n+1}^2 & k_{n+1}^3 & \dots & & k_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

In determinantul D_{n-1}^2, adăugând la elementele primei coloane, elementele coloanei a doua multiplicate cu 2 şi în general la elementele coloanei de rang i, elementele coloanei următoare înmulţite cu $i+1$,

$$D_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} k_2^1 + 2k_2^2 & k_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ k_3^1 + 2k_3^2 & k_3^2 + 3k_3^3 & k_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^1 + 2k_n^2 & k_n^2 + 3k_n^3 & \dots & k_n^{n-2} + (n-1)k_n^{n-1} & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

şi ţinând seama de relaţia de recurenţă, rezultă că $D_{n-1}^2 = \Delta_n - n\,\Delta_{n-1}$ sau $\Delta_n = n\,\Delta_{n-1} + (n-1)!$ din care $\Delta_n = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$. **46.** Desvoltarea determinantului este un polinom de gradul patru în i, deci de forma $Ai^4 + Bi^3 + Ci^2 + Di + E$. Inlocuind în determinant pe i prin $-i$ şi schimbând liniile cu coloanele, observăm că determinantul nu-şi schimbă valoarea. Deci $Ai^4 + Bi^3 + Ci^2 + Di + E \equiv Ai^4 - Bi^3 + Ci^2 - Di + E$ sau $2i(Bi^2 + D) = 0 \therefore D - B = 0$. Desvoltarea determinantului se poate deci scrie : $Ai^4 + Ci^2 + E + Di(i^2 + 1)$. Şi cum $i^2 + 1 = 0$, $Ai^4 + Ci^2 + E$, care conţinând numai puteri pare ale lui i, deoarece $i^2 = -1$, este independentă de i. (S. E. G. M. III. p. 68). **47.** Se va

multiplica, în cel de al doilea determinant, coloana a 2-a cu yz, a treia cu xz, a patra cu xy, se vor scoate apoi factorii comuni şi se găseşte primul determinant; tot în cel de al doilea determinant adunând la elementele coloanei întâia elementele celorlalte coloane, etc., avem succesiv:

$$\Delta=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}=-(x+y+z)\begin{vmatrix} x & y-z & z-y \\ x-z & y & z-x \\ x-y & y-x & z \end{vmatrix}=$$

$$-(x+y+z)(x-y+z)(-x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & z-y \\ 0 & 1 & z-x \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=$$

$$-(x+y+z)(x-y+z)(-x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & z-y \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}=$$

$-(x+y+z)(x-y+z)(-x+y+z)(x+y-z)$. **48.** In determinantul din membrul I se aduc fracţiile la acelaş numitor, se scoate factor comun $\frac{1}{a^2b^2c^2}$, apoi factorii comuni pe coloane şi se desvoltă determinantul. etc. (S. E. G. M. I. p. 39). **49.** Se scad elementele primei coloane din elementele coloanei II. Identitatea se deduce desvoltând determinantul după regula lui *Sarrus* şi scriind că valoarea ei este zero. (S. E. G. M. I. p. 56). **50.** Ţinând seamă de relaţia dată, determinantul D poate fi scris:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{z-c}{z+c} & -y & 1 \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{x-a}{x+a} & -z \\ -x & 1 & \frac{1}{y} & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{z-c}{z+c} & -yz & z \\ x & \frac{x-a}{x+a} & -xz \\ -xy & y & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} \frac{z-c}{z+c} & -\frac{1}{x} & z \\ x & \frac{x-a}{x+a} & -xz \\ -xy & y & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}=\frac{1}{x}\begin{vmatrix} x\frac{z-c}{z+c} & -1 & xz \\ x & \frac{x-a}{x+a} & -xz \\ -xy & y & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x-c}{x+c} & -1 & \frac{1}{y} \\ 1 & \frac{x-a}{x+a} & -\frac{1}{y} \\ -y & y & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x-c}{x+c} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{x-a}{x+a} & -1 \\ -1 & 1 & \frac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}.$$

Desvoltând acest ultim determinant după regula lui *Sarrus* şi ţinând seamă de condiţii, găsim: $D = \frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{y-b}{y+c} \cdot \frac{z-c}{z+c} + \frac{x-a}{x+a} + \frac{y-b}{y+b} + \frac{z-c}{z+c} = \frac{4(xyz-abc)}{(x+a)(y+b)(z+c)} = 0.$

51. Avem $F(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$, $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$, deci $F(x) = f(x^2)$. (G. M. XLI. p. 116). **52.** Determinantul dat fiind Δ, scădem linia I din a III şi a II din a IV, apare $(a_1 - a_2)^2$ factor comun şi vedem că determinantul rămas se anulează pentru $a_1 = a_2$, deci se divide cu $a_1 - a_2$. In adevăr scăzând linia a doua din a treia, elementele liniei a treia au pe $a_1 - a_2$ factor comun. In fine, în determinantul rămas scăzând linia a 3-a multiplicată cu 2 din linia 4-a, apare din nou $a_1 - a_2$ factor. Deci determinantul dat se divide cu $(a_1 - a_2)^4$. Făcând permutări circulare se vede că Δ se divide cu $\prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)^4$. In raport cu a_1, desvoltarea determinantului reprezintă un polinom de gradul $(2n-1)+(2n-3) = 4n-4 = 4(n-1)$; iar produsul $\prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)^4$ conţinând pe a_1 în factorii $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)$ este un polinom de gradul $4(n-1)$ în raport cu a_1. Deci câtul împărţirii lui Δ prin produsul $\prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)$ este o constantă α. Punând $\Delta \equiv \alpha \prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)^4$, dacă în această identitate punem $a_1 = 0$ şi desvoltăm pe Δ, obţinem:

$$a_2^4 a_3^4 \ldots a_n^4 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots \\ 0 & 1 & 2a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 2a_n & \ldots \end{vmatrix},$$

iar în membrul II $\alpha a_2^4 a_3^4 \dots a_n^4 \prod_{i,k=2}^{n} (a_i - a_k)^4$. Simplificând şi repetând operaţia precedentă, găsim $\alpha = 1$. Observând determinantul dat, elementele din liniile de rang par sunt derivatele elementelor din liniile precedente, deci generalizarea va rezulta luând $p-1$ linii deduse din elementele primei linii prin derivări succesive, apoi $p-1$ linii deduse prin derivări succesive din linia $p+1$, etc., adică

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{np-1} \\ 0 & 1 & 2a_1 & \dots & (np-1)a_1^{np-2} \\ 0 & 0 & 2.1 & \dots & (np-1)(np-2)a_1^{np-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (np-1)(np-2)\dots(np-p+1)a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

şi se va desvolta analog. **53.** Adăugând elementele liniei I, respectiv la elementele liniei a 2-a, a 3-a, ... an^a obţinem un determinant în care elementele de o parte a diagonalei principale sunt zero; găsim pentru valoarea determinantului: $2^{n-1} C_n^1 C_n^2 C_n^3 \dots C_n^n$, care egalată cu $\dfrac{2^{2n-2}(n!)^n}{p[1!\,2!\dots(n-1)!]^2}$, dă $p = 2^{n-1}n$. [G. M. XVIII]. **54.** Prin ipoteză linia de rang p este: (1) ph $ph+1$ $ph+2 \dots ph+n-1$. Vom distinge două cazuri: *a*) h şi n primi între ei. Numerele din şirul (1) divizate cu n ne dau în acest caz n resturi distincte r, $r+1$, ...; iar valorile lui r corespunzătoare la diferite valori ale lui p vor fi asemenea distincte; va exista deci o valoare a lui p pentru care resturile sunt $0, 1, 2 \dots (n-1)$; alta în care resturile sunt $n-1, 0, 1 \dots n-2$; alta pentru care avem resturile $n-2$, $n-1$, 0, $1 \dots (n-3)$, etc. Schimbând convenabil liniile între ele, avem:

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & 0 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Adunând elementele primei linii cu elementele celorlalte linii, avem pe $\frac{n(n-1)}{2}$ în factor; scăzând apoi prima coloană din toate celelalte, se obţine un determinant de ordinul $n-1$ în care scăzând elementele ultimei linii din celelalte, determinantul rezultat de ordin $n-2$, are toate elementele diagonalei $-n$, iar elementele deoparte a diagonalei nule, deci

$$\Delta = \pm \frac{1}{2} n(n-1) n^{n-2}.$$

b) h şi n au un divizor comun $d>1$. Fie $n:d=p$, $h:d=q$; $ph=q$, iar (1) devine $qn\ qn+1 \ldots qn+n-1$ care urmează a fi înlocuite respectiv cu numerele $0, 1 \ldots (n-1)$ care reproduce linia I, deci $\Delta=0$. (G. M. XVIII). **55.** Dacă notăm Δ_n determinantul dat, avem $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$. Dar $a_n \Delta_{n-1}$, Δ_{n-2} nu pot avea termeni asemenea, deci dacă N_n este numărul termenilor lui Δ_n, vom avea $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$. Cum avem $N_1=1$, $N_2=2$ urmează că N_n este al n-lea termen din şirul lui *Fibonacci*. **56.** Fie $\Delta = |a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}|$, unde s'a notat astfel determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

şi $\Delta_\lambda = |a_{i1}+\lambda\ a_{i2}+\lambda \ldots a_{in}+\lambda|$. Avem imediat $\Delta_\lambda = \Delta + |\lambda a_{i2}\ a_{i3} \ldots a_{in}| + |a_{i1}\ \lambda\ a_{i3} \ldots a_{in}| + \ldots + |a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in-1}\ \lambda| = \Delta + \lambda \Sigma \delta_{ki}$ ($\Sigma \delta_{ki}$ fiind suma tuturor minorilor de primul ordin). Rezultă propoziţia enunţului. **57.** In general, dacă variabilele pozitive $x_1, x_2 \ldots x_n$ satisfac relaţiunile:

$$A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + A_2 x_1^{a_n+1} \ldots x_n^{a_{2n}} + \ldots + A_p x^{a_{(p-1)n+1}} \ldots x_n^{a_{pn}} = A$$

$$B_1 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + B_2 x_1^{b_n+1} \ldots x_n^{b_{2n}} + \ldots + B_q x^{b_{(q-1)n+1}} \ldots x_n^{b_{qn}} = B$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} + L_2 x_1^{l_n+1} \ldots x_n^{l_{2n}} + \ldots + L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}} \ldots x_n^{l_{sn}} = L$$

$p+q+\ldots+s=n$, *atunci produsul* $P=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$, *este maxim, când avem:*

$$\frac{A_1x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}}{\Delta_1}=\frac{A_2x_1^{a_{n+1}}\ldots x_n^{a_{2n}}}{\Delta_2}=\ldots=\frac{A_px_1^{a_{(p-1)n+1}}\ldots x_n^{a_{pn}}}{\Delta_p}$$

$$\frac{B_1x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}}{\Delta_{p+1}}=\frac{B_2x_1^{b_{n+1}}\ldots x_n^{b_{2n}}}{\Delta_{p+2}}=\ldots=\frac{B_qx_1^{b_{(q-1)n+1}}\ldots x_n^{b_{qn}}}{\Delta_{p+q}}$$

. . . . . .

$$\frac{L_1x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}}{\Delta_{n-s+1}}=\frac{L_2x_1^{l_{n+1}}\ldots x_n^{l_{2n}}}{\Delta_{n-s+2}}=\ldots=\frac{L_sx_1^{l_{(s-1)n+1}}\ldots x_n^{l_{sn}}}{\Delta_n}$$

unde Δ_i *oarecare* $(i\leqq 1,2\ldots n)$ *se obţine din:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_{n+1} & \ldots & l_{(s-1)n+1} \\ a_2 & a_{n+2} & \ldots & l_{(s-1)n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{2n} & & l_{sn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

înlocuind elementele coloanei de rang i prin $m_1, m_2\ldots m_n$. *Toate cătimile* $x_1, x_2\ldots x_n$ *sunt presupuse constante.* Această teoremă este demonstrată de D-l *V. Alaci* în *Revista Matematică din Timişoara*, anul IV, pag. 99.

Maximul găsit pentru P, în această teoremă este:

$$\max P=\sqrt[\Delta]{\left(\frac{A}{\Delta_1+\ldots+\Delta_p}\right)^{\Delta_1+\ldots+\Delta_p}\ldots\left(\frac{L}{\Delta_{n-s+1}+\ldots+\Delta_n}\right)^{\Delta_{n-s+1}+\ldots+\Delta_n}}\times$$

$$\sqrt[\Delta]{\left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^{\Delta_1}\ldots\left(\frac{\Delta_p}{A_p}\right)^{\Delta_p}\left(\frac{\Delta_{p+1}}{A_{p+1}}\right)^{\Delta_{p+1}}\ldots\left(\frac{\Delta_{p+q}}{B_q}\right)^{\Delta_{p+q}}\ldots\left(\frac{\Delta_n}{L_s}\right)^{\Delta_n}}$$

In cazul problemei noastre:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} m & a_1 & a_2 & a_3 \\ n & b_1 & b_2 & b_3 \\ p & c_1 & c_2 & c_3 \\ q & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a & m & a_2 & a_3 \\ b & n & b_2 & b_3 \\ c & p & c_3 & c_3 \\ d & q & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a_1 & m & a_3 \\ b & b_1 & n & b_3 \\ c & c_1 & p & c_3 \\ d & d_1 & q & d_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & m \\ b & b_1 & b_2 & n \\ c & c_1 & c_2 & p \\ d & d_1 & d_2 & q \end{vmatrix}$$

iar maximul lui P, va fi:

$$\max. P = \sqrt[\Delta]{\left(\frac{A}{\Delta_1+\Delta_2}\right)^{\Delta_1+\Delta_2}\left(\frac{B}{\Delta_3+\Delta_4}\right)^{\Delta_3+\Delta_4}\left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{\Delta_2}{A_2}\right)^{\Delta_2}\left(\frac{\Delta_3}{B_1}\right)^{\Delta_3}\left(\frac{\Delta_4}{B_2}\right)^{\Delta_4}}$$

(G. M. XXXII. p. 105).

XII. 1. $\begin{vmatrix} 3 & A+B+C & A'+B'+C' \\ x+y+z & Ax+By+Cz & A'x+B'y+C'z \\ x'+y'+z' & Ax'+By'+Cz' & A'x'+B'y'+C'z' \end{vmatrix}$,

dacă facem înmulţirea pe linii, sau

$$\begin{vmatrix} 1+Ax+A'x' & 1+Bx+B'x' & 1+Cx+C'x' \\ 1+Ay+A'y' & 1+By+B'y' & 1+Cy+C'y' \\ 1+Az+A'z' & 1+Bz+B'z' & 1+Cz+C'z' \end{vmatrix}$$

dacă înmulţim pe coloane. **2.** $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$, în care:

$X=xx'+yy'+zz'$, $Y=xy'+yz'+zx'$, $Z=xz'+yx'+zy'$. **3.** Inmulţind pe linii, obţinem ecuaţiile care determină cantităţile cerute. $aa_1+bb_1=4$, $a+a_2=5$, $bb_2=2$, $b+a_3=4$, $ab_3=2$, $a+a_1=3$, $cb_1=6$, $aa_2+cb_2=12$, $c+b_3=4$, $aa_3=6$, $b+b_1=3$, $ca_1=3$, $c+b_2=5$, $ba_2=3$, $ba_3+cb_3=6$. Din ecuaţiile de gradul I obţinem valori pentru $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, pe care substituindu-le în ecuaţiile rămase cu membrul I monom, aflăm: $5b-bc=2$, $4a-ac=2$, $3c-bc=6$, $4a-ab=6$, $3c-ac=3$, $5b-ab=3$. Eliminând produsul ac se găseşte $4a-3c=-1$ $\therefore$ $a=\frac{3c-1}{4}$, care substituită în $3c-ac=3$, dă $3c^2-13c+12=0$, de unde $c=3$, $c=\frac{4}{3}$. Pentru prima valoare avem $a=2$, $b=1$, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=3$, $b_1=2$, $b_2=2$, $b_3=1$, care satisfac ecuaţiilor rămase. Pentru $c=\frac{4}{3}$ se obţine pentru a, b, etc., valori care nu satisfac ecuaţiile rămase. (G. M. XXXII. pag. 187). **4.** Produsul este:

$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$, pe de altă parte $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ =

$a^2+b^2+c^2+d^2$, $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2$, iar determinantul care reprezintă produsul pe linii al celor doi determinanţi, desvoltat, dă partea a doua a egalităţii de dovedit.

5. Se înmulţesc cei doi determinanţi pe linii, se fac înlocuirile şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}c^2 & -\frac{1}{2}b^2 \\ -\frac{1}{2}c^2 & 0 & -\frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2}b^2 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}a^2\,b^2\,c^2.$$

6. $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$, $S_i = a^i+b^i+c^i$.

7. $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$, $S_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i$.

8. Să considerăm pentru simplificarea scrisului un determinant de ordinul 4, calculul fiind acelaş pentru un determinant de ordinul $2n$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & -b_1 \\ c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 \\ d_4 & -d_3 & d_2 & -d_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1b_4-a_2b_3+a_3b_2-a_4b_1 \\ b_1a_4-b_2a_3+b_3a_2-b_4a_1 & 0 \\ c_1a_4-c_2a_3+c_3a_2-c_4a_1 & c_1b_4-c_2b_3+c_3b_2-c_4b_1 \\ d_1a_4-d_2a_3+d_3a_2-d_4a_1 & d_1b_4-d_2b_3+d_3b_2-d_4b_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1c_4-a_2c_3+a_3c_2-a_4c_1 & a_1d_4-a_2d_3+a_3d_2-a_4d_1 \\ b_1c_4-b_2c_3+b_3c_2-b_4c_1 & b_1c_4-b_2c_3+b_3c_2-b_4c_1 \\ 0 & c_1d4-c_2d_3+c_3d_2-c4d_1 \\ d_1c4-d_2c_3+d_3c_2-d4c_1 & 0 \end{vmatrix}$$

care este un determinant de forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ -p & 0 & s & t \\ -q & -s & 0 & u \\ -r & -t & -u & 0 \end{vmatrix},$$ deci simetric stâng.

9. Produsul A.B se poate scrie:

$$A.B=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & n_1 & m_1 \\ 0 & 0 & p_2 & n_2 & m_2 \\ 0 & 0 & p_3 & n_3 & m_3 \end{vmatrix}$$

sau schimbând ordinea coloanelor:

$$A.B=-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & m_1 & n_1 & p_1 & 0 \\ 0 & m_2 & n_2 & p_2 & 0 \\ 0 & m_3 & n_3 & p_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Făcând produsul acestor doi determinanţi, după regula obişnuită, obţinem identitatea cerută. (G. M. XL. p. 272). **10.** Ridicând la patrat tabloul, găsim determinantul Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos^2\beta+\sin^2\beta & \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma \\ \cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha & \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma & \cos^2\gamma+\sin^2\gamma \end{vmatrix}$$

Δ se poate descompune într'o sumă de opt determinanţi nuli, deoarece fiecare are elementele a două coloane proporţionale,

apoi observăm că Δ se poate scrie sub forma determinantului din enunţ. **11.** Se va proceda ca în exerciţiul precedent. **12.** Ridicând tabloul la patrat, obţinem:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & aa'+bb'+cc'+dd' \\ aa'+bb'+cc'+dd' & a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 \end{vmatrix} =$$

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)-(aa'+bb'+cc'+dd')^2$. Descompunând determinantul în sume de determinanţi, grupând convenabil şi egalând cu valoarea precedentă, se obţine identitatea enunţului, care este o generalizare la 8 cantităţi a identităţii *Lagrange* dată în partea I. Cap. II pentru 6 cantităţi. **13.** Dacă notăm $S_i=a^i+b^i+...+l^i$, patratul tabloului este

$$\begin{vmatrix} 1 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}.$$

14. Observăm că determinantul se anulează când facem pe rând $c=a$, $c=b$, $b=a$ şi $c'=a'$, $c'=b'$, $b'=a'$, deci el este divizibil cu produsele produselor $(c-a)(c-b)(b-a)$ şi $(c'-a')(c'-b')(b'-a')$ care sunt desvoltările determinanţilor Vandermonde $|1\ a\ a^2|$ şi $|1\ a'\ a'^2|$. Determinantul dat fiind în raport cu a, b, c, a', b', c' un polinom omogen de gradul al 6-lea, iar produsul $|1\ a\ a^2| \times |1\ a'\ a'^2|$ deasemenea de gradul al 6-lea, avem egalitatea:

$$\begin{vmatrix} (a-a')^2 & (a-b')^2 & (a-c')^2 \\ (b-a')^2 & (b-b')^2 & (b-c')^2 \\ (c-a')^2 & (c-b')^2 & (c-c')^2 \end{vmatrix} \equiv k \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a'^2 & a' & 1 \\ b'^2 & b' & 1 \\ c'^2 & c' & 1 \end{vmatrix},$$

k fiind o constantă, ce urmează a fi determinată. Făcând în egalitatea identică de mai sus $a=a'=0$, avem:

$$kbcb'c'(c-b)(c-b') = \begin{vmatrix} 0 & b'^2 & c'^2 \\ b^2 & (b-b')^2 & (b-c')^2 \\ c^2 & (c-b')^2 & (c-c')^2 \end{vmatrix} =$$

$$b'c' \begin{vmatrix} 0 & b' & c' \\ b^2 & 2b-b' & 2b-c' \\ c^2 & 2c-b' & 2c-c' \end{vmatrix} = 2b'c'(c'-b') \begin{vmatrix} 0 & -1 & c' \\ b^2 & 1 & 2b-c' \\ c^2 & 1 & 2c-c' \end{vmatrix} =$$

$$2b'c'(c'-b')\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ b^2 & 1 & 2b \\ c^2 & 1 & 2c \end{vmatrix} = 2b'c'(c'-b')bc(b-c)$$

$***$ $k=-2$. Inmulţind deci elementele unei coloane a unuia din cei doi determinanţi *Vandermonde*, avem o descompunere cerută. **15.** Aplicând regula lui *Laplace* avem:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^3 & -ab^2 \\ -a^2b & b^3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} -b^4 & -b^4 \\ -a^2b & b^3 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} -b^4 & -b^4 \\ a^3 & -ab^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^4 & a^4 \\ -a^2b & b^3 \end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^4 & a^4 \\ a^3 & -ab^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^4 & a^4 \\ -b^4 & -b^4 \end{vmatrix}.$$

Primul şi ultimul termen sunt nuli. Ceilalţi dau:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\times\left[b^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a^2 & b^2 \end{vmatrix}+ab^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a^2 & b^2 \end{vmatrix}+a^4b\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a^2 & b^2 \end{vmatrix}+a^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a^2 & b^2 \end{vmatrix}\right]=$$

$(a-b)(a^2+b^2)(b^5+ab^4+a^4b+a^5)=(a-b)(a^2+b^2)[b^4(a+b)+a^4(a+b)]=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$. (S.E.G.M. II p. 47).

16. Devoltând determinantul după regula lui *Laplace* obţinem:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a^6 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^6 & a^4 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a^4 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^6 & a^4 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a^6 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a^4 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & a^6 \\ 1 & a^4 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^6 & a^4 \end{vmatrix}+4a^{10}=a^4-2a^6-a^8+2a^{10}+a^{12}=$$

$a^4(1-2a^2-a^4+2a^6+a^8)=a^4[(1-2a^4+a^8)-2a^2(1-a^4)+a^4]=a^4[(1-a^4)^2-2a^2(1-a^4)+a^4]=a^4(1-a^2-a^4)^2$.

17. Fie $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_n$ rădăcinile ecuaţiei (1) $\alpha^n-\frac{1}{p}=0$ şi $\varphi(\alpha_i)=a_1+a_2\alpha_i+a_3\alpha_i^2+..+a_n\alpha^{n-1}$. Dacă notăm cu Δ determinantul dat şi cu δ determinantul *Vandermonde*

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$, avem dacă ţinem seama de ecuaţia: $\alpha^n - \frac{1}{p} = 0$, că:

$$\Delta\delta = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \varphi(\alpha_2) & \dots & \varphi(\alpha_n) \\ \frac{1}{\alpha_1}\varphi(\alpha_1) & \frac{1}{\alpha_2}\varphi(\alpha_2) & \dots & \frac{1}{\alpha_n}\varphi(\alpha_n) \\ \frac{1}{\alpha_1^2}\varphi(\alpha_1) & \frac{1}{\alpha_2^2}\varphi(\alpha_2) & \dots & \frac{1}{\alpha_n^2}\varphi(\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_1^{n-1}}\varphi(\alpha_1) & \frac{1}{\alpha_2^{n-1}}\varphi(\alpha_2) & \dots & \frac{1}{\alpha_n^{n-1}}\varphi(\alpha_n) \end{vmatrix} =$$

$$\varphi(\alpha_1).\varphi(\alpha_2)..\varphi(\alpha_n).\frac{1}{\alpha_1^{n-1}}\cdot\frac{1}{\alpha_2^{n-1}}\dots\frac{1}{\alpha_n^{n-1}}\begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)..\varphi(\alpha_n)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n p^n \delta$. Dar $\alpha_1\alpha_2..\alpha_n = (-1)^n\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{p}$, deci $\Delta = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)..\varphi(\alpha_n).p^{n-1}$. (Jurnal Matematic II). **18.** Determinantul poate fi scris subt forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & tg\alpha & cotg\alpha \\ -\cos\alpha & 0 & tg\beta & cotg\beta \\ -tg\alpha & -tg\beta & 0 & cotg\gamma \\ -cotg\alpha & -cotg\beta & -cotg\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

şi desvoltându-l după regula lui *Laplace* avem:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & cotg\gamma \\ -cotg\gamma & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ -tg\alpha & -tg\beta \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} tg\beta & cotg\beta \\ -cotg\gamma & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ -cotg\alpha & -cotg\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} tg\beta & cotg\beta \\ 0 & cotg\gamma \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ -tg\alpha & -tg\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} tg\alpha & cotg\alpha \\ -cotg\gamma & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ -cotg\alpha & -cotg\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} tg\alpha & cotg\alpha \\ 0 & cotg\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -tg\alpha & -tg\beta \\ -cotg\alpha & -cotg\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} tg\alpha & cotg\alpha \\ tg\beta & cotg\beta \end{vmatrix} =$$

$\cos^2\alpha\, cotg^2\gamma - 2\cos\alpha\, cotg\gamma\,(tg\alpha\, cotg\beta - cotg\alpha\, tg\beta) + (tg\alpha\, cotg\beta - cotg\alpha\, tg\beta)^2 = (\cos\alpha\, cotg\gamma - tg\alpha\, cotg\beta + cotg\alpha\, tg\beta)^2$. (S. E. G. M. III. p. 68). **19.** Vom distinge două cazuri: $p=2k$ şi $p=2k-1$. *a)* $p=2k$. Determinantul se poate scrie:

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \frac{1}{(n-k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 \end{vmatrix}.$$

Liniile de rang par se lasă neschimbate, iar la elementele primei linii se adună elementele liniei a doua, la elementele liniei a treia, acelea ale liniei a patra, etc., până la urmă, la elementele liniei $2k-1$ se adună elementele liniei $2k$. Ultima linie se lasă neschimbată.

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} & 0 & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 \end{vmatrix}.$$

Apoi facem schimbările următoare: linia întâia se lasă pe loc, linia a treia se schimbă cu a doua, linia a cincea cu a treia

...linia $2k-1$ cu linia k. In total facem $\frac{k(k-1)}{2}$ schimbări de semn. Determinantul se scrie:

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & & & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & & & \frac{1}{(n-k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & & & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & & & 0 \end{vmatrix}.$$

Facem aceleaşi schimbări cu coloanele, ducând însă şi ultima coloană adică de rangul $2k+1$ în locul coloanei de rangul $k+1$. In total mai facem $\frac{k(k+1)}{2}$ schimbări de semn. Deci $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}}=(-1)^{k(k-1)+k}=(-1)^{k}$. Determinantul devine:

$$D_{2k+1}=(-1)^{k}\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} & \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-k)!} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & \end{vmatrix}.$$

Desvoltând determinantul după regula lui *Laplace* şi anume după primele $k+1$ coloane se vede că determinantul are valoarea zero, deoarece determinanţii ce intră în desvoltare au sau două linii identice sau elementele unei linii sunt toate nule. Deci când $p=2k$ determinantul are valoarea zero.

b) Dacă $p=2k-1$, cu acelaş raţionament găsim:

$$D_{2k}=\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{n!} & \cdots\cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots\cdots & \frac{1}{(n-k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Desvoltat după aceiaşi regulă ne dă:

$$D_{2k}=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} \end{matrix} \right\|^2.$$

Dar acest determinant a fost calculat [X. 16]. Rezultatul este $\left[\frac{1!2!\ldots(k-2)!}{n!(n-1)!\ldots(n-k+1)!}\right]^2$. (G. M. XLII. p. 98). **20.** Se cunoaşte (Eléments de la théorie des déterminants, par *G. Dostor*, II ed. p. 82) teorema: Dacă elementele unui determinant de ordinul n sunt funcţiuni de aceiaşi variabilă x, derivata determinantului în raport cu această variabilă este egală cu suma a n determinanţi ce se obţin înlocuind elementele fiecărei coloane prin derivatele respective ale acestor elemente

sau înlocuind elementele fiecărei linii prin derivatele respective. Avem deci:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & f(x) & f(nx) \\ 1 & g(x) & g(nx) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & f'(x) & nf'(nx) \\ 1 & g(x) & g(nx) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(x) & f(nx) \\ 0 & g'(x) & ng'(nx) \end{vmatrix} = f'(x)\,[g(nx)-1] - nf'(nx)\,[g(x)-1]$$

$$- g'(x)\,[f(nx)-1] + ng'(nx)\,[f(x)-1].$$

21. Să considerăm determinantul mai general (G. M. XL. pag. 151):

$$\Delta^n_{n+1} = \begin{vmatrix} (x_0-a_0)^n & (x_0-a_1)^n & \dots & (x_0-a_n)^n \\ (x_1-a_0)^n & (x_1-a_1)^n & \dots & (x_1-a_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n-a_0)^n & (x_n-a_1)^n & \dots & (x_n-a_n)^n \end{vmatrix}.$$

Procedând ca la exerciţiul (14), a cărui generalizare este, şi însemnând $V_{n+1}(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n)$ valoarea determinantului *Vandermonde* al numerelor $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$, avem: $\Delta^n_{n+1} = k_n V_{n+1}(a_0, a_1, \dots a_n)\, V_{n+1}(x_0, x_1, \dots x_n)$. In adevăr, Δ^n_{n+1} este un polinom omogen în a_k şi x_i de grad $n(n+1)$. Pe de altă parte Δ^n_{n+1} se anulează dacă facem $x_k = x_i$ sau $a_s = a_r$, prin urmare el conţine factori de forma $x_k - x_i$ şi $a_s - a_r$ şi cum produsul tuturor factorilor de această formă dă un polinom de grad $n(n+1)$, rezultă că factorul k_n este o constantă independentă de x_i sau a_k. Putem găsi valoarea constantei observând că, scriind desvoltate elementele determinantului Δ^n_{n+1}, avem evident:

$$\Delta^n_{n+1} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} \dots 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} \dots 1 \\ \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} \dots 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -C_n^1 a_0 & +C_n^2 a_0^2 \dots (-1)^n C_n^n a_0^n \\ 1 & -C_n^1 a_1 & +C_n^2 a_1^2 \dots (-1)^n C_n^n a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -C_n^1 a_n & +C_n^2 a_n^2 \dots (-1)^n C_n^n a_n^n \end{vmatrix}.$$

Cum valoarea ultimului determinant este $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1} V_{n+1}(a_0, a_1 \dots a_n)$ şi $k_n = C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1} = \dfrac{(n!)^{n-1}}{[1!\,2!\dots(n-1)!]^2}$

— Dacă schimbăm semnele câtimilor a_i, avem: $D^n_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k_n V_{n+1}(a_0,\dots a_n) V_{n+1}(x_0,\dots x_n)$. Dacă facem în acest ultim determinat $x_i=a_i$, $a_i=i$, $n=r$, avem determinantul problemei și cum $V_{r+1}(0,1,..r)=r!(r-1)!..1!$, valoarea determinantului problemei este: $(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \frac{(r!)^r}{1!\,2!\dots(r-1)!} V_{r+1}(a_0, a_1, \dots a_r)$. (G.M. XLII. p. 370). **22.** Dacă $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}x^p$, determinantul dat este produsul determinanților:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & n(n-1)a_0 & \dots & 2.1a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n!a_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \dots & 1 \\ 3^n & 3^{n-1} & \dots & 1 \\ (n+1)^n & (n+1)^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Primul determinant are valoarea $\frac{n!}{(n-1)!}\,\frac{n!}{(n-2)!}\cdots\frac{n!}{1!}\,a_0^{n+1}$, al doilea este un determinant *Vandermonde* cu valoarea $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!(n-1)!\dots 2!\,1!$. Deci valoarea determinantului problemei este $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n!)^{n+1} a_0^{n+1}$. **23.** Să notăm $D(x)$ valoarea determinantului. După regula de derivare a determinanților (vezi ex. 20).

$$D'(x)=\begin{vmatrix} F'_1(x) & F'_2(x) & \dots & F'_n(x) \\ F'_1(x) & F'_2(x) & \dots & F'_n(x) \\ F''_1(x) & F''_2(x) & \dots & F''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) & \dots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ F''_1(x) & F''_2(x) & \dots & F''_n(x) \\ F''_1(x) & F''_2(x) & \dots & F''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) & \dots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ F'_1(x) & F'_2(x) & \dots & F'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(n-2)}(x) & F_2^{(n-2)}(x) & \dots & F_n^{(n-2)}(x) \\ F_1^{(n)}(x) & F_2^{(n)}(x) & \dots & F_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Dar primii $(n-1)$ determinanți sunt nuli având fiecare două

linii egale, iar ultimul determinant este nul elementele ultimei linii fiind zero. Deci $D'(x)=0$, de unde rezultă $D=$ constant. (G. M. XLII. p. 253). **24.** $x=1{,}5$; $y=2$; $z=2{,}5$ **25.** $x=\frac{43}{64}$; $y=-\frac{15}{64}$; $z=\frac{25}{64}$. **26.** $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{4}$; $z=\frac{1}{2}$; $u=\frac{3}{8}$.

27. $$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & a^2 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}}{(1+a+a^2)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}}=\frac{1}{1+a+a^2},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ a & 1 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & a^2 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ a & 1 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}}{(1+a+a^2)\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ a & 1 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{vmatrix}}=\frac{1}{1+a+a^2},$$

analog $z=\frac{1}{1+a+a^2}$. (S. E. G. M. II. p. 84). **28.** Numărătorii şi numitorii rădăcinilor sunt determinanţi *Vandermonde;* se găseşte: $x=\frac{(b-\alpha)(c-\alpha)}{(b-a)(c-a)}$, $y=\frac{(c-\alpha)(a-\alpha)}{(c-b)(a-b)}$, $z=\frac{(a-\alpha)(b-\alpha)}{(a-c)(b-c)}$. **29.** Generalizarea chestiunei precedente:

$$x_k=\frac{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)\ldots(\alpha-a_{k-1})(\alpha-a_{k+1})\ldots(\alpha-a_n)}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)};$$

$k=1,2,\ldots n$. **30.** $x=\frac{a+c+d-2b}{3}$; $y=\frac{a+b+d-2c}{3}$; etc.

31. Primele trei ecuaţii fiind omogene în raport cu x, y, z, pentru ca ele să admită şi soluţii nu toate nule, care nu ar ve-

rifica ultima ecuaţie, trebue $\begin{vmatrix} 1-s & 2 & 3 \\ 2 & 3-s & 1 \\ 3 & 1 & 2-s \end{vmatrix} = 0$

$*^*_*$ $(s^2-3)(s-6)=0$, care dă $s_1=6$, $s_2=\sqrt{3}$, $s_3=-\sqrt{3}$. s fiind determinat sistemul celor 3 ecuaţii se reduce la primele două. Avem: $(1-s)\frac{x}{z}+2\frac{y}{z}=-3$, $2\frac{x}{z}+(3-s)\frac{y}{z}=-1$, de unde $\frac{x}{z}=\frac{3s-7}{s^2-4s-1}$ şi $\frac{y}{z}=\frac{s+5}{s^2-4s-1}$, deci $\frac{x}{3s-7}=\frac{y}{s+5}=\frac{z}{s^2-4s-1}$ sau $\frac{x^2}{(3s-7)^2}=\frac{y^2}{(s+5)^2}=\frac{z^2}{(s^2-4s-1)^2}=\frac{1}{(3s-7)^2+(s+5)^2+(s^2-4s-1)^2}$, de unde, $x=\frac{3s-7}{\pm\sqrt{(3s-7)^2+(s+5)^2+(s^2-4s-1)^2}}$, etc. **32.** Primele trei ecuaţii se mai scriu $\frac{x}{t}+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}=-1$, $a\frac{x}{t}+b\frac{y}{t}+c\frac{z}{t}=-d$, $a^2\frac{x}{t}+b^2\frac{y}{t}+c^2\frac{z}{t}=-d^2$ şi dacă notăm:

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, rezolvând sistemul precedent, obţinem: $\frac{x}{\Delta_1}=\frac{-y}{\Delta_2}=\frac{z}{\Delta_3}=\frac{-t}{\Delta_4}=\frac{1}{\pm\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\Delta_4^2}}$, de unde rezultă x, y, z, t. **33.** Determinantul sistemului este $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=-\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$. *a)*. $D\neq 0$, sistemul este compatibil; *b)*. Când

$a+b+c=0$, $D=0$. Să presupunem cel puţin un minor diferit de zero, de exemplu $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, determinantul caracteristic este

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \neq 0$$ căci

$ac-b^2\neq 0$, nu putem avea $a=b=c$, deci sistemul este incompatibil. *c)*. Dacă toţi minorii sunt nuli, adică $ac-b^2=bc-a^2=ab-c^2=0$, rezultă $a^3=b^3=c^3$, deci 1) $a=b=c$; 2) $b=\varepsilon a$, $c=\varepsilon^2 a$; 3) $b=\varepsilon^2 a$, $c=\varepsilon a$ (ε, ε^2 fiind cele două rădăcini cubice imaginare ale unităţii), determinantul principal este un element oarecare al determinantului sistemului, de ex. primul element al primei linii. Determinantul caracteristic este $\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a-b$. In cazul 1) toţi determinanţii caracteristici sunt nuli deci sistemul este compatibil, nedeterminarea fiind de ordinul II; în cazul 2) sau 3) determinanţii caracteristici sunt diferiţi de zero, deci sistemul este incompatibil.

34. Condiţia este: $\begin{vmatrix} a-s & b & c \\ a^2 & b^2-s & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3-s \end{vmatrix} = 0$; ca sistemul să fie compatibil pentru $s=0$, trebue $abc\,(a-b)(b-c)(c-a)=0$. **35.** *a)*. Pentru ca sistemul să fie incompatibil este necesar ca determinantul sistemului să fie nul, deci $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ \alpha & \beta & -2 \end{vmatrix} = 0$, de unde $13\beta-14\alpha=34$, apoi considerând unul din minorii săi diferit de zero, determinantul caracteristic corespunzător trebue să fie diferit de zero. Fie $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ minorul considerat, $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \\ \alpha & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} \neq 0$, deci $2\alpha+3\beta\neq 0$. Deci condiţiile de incompatibilitate sunt $13\beta-14\alpha=34$ şi $2\alpha+3\beta\neq 0$. *b)*. Sistemul este nedeter-

minat dacă determinantul sistemului este nul, iar determinantul caracteristic este nul, deci $13\beta-14\alpha=34$, $2\alpha+3\beta=0$, de unde $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=1$. **36.** Determinantul sistemului

$$D=\begin{vmatrix} \sin\theta & 1 & \cos\theta \\ 1 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}=(1+\sin\theta+\cos\theta)\,(\cos\theta+\sin\theta+$$

$$\sin\theta\cos\theta-2)=\frac{1}{2}(1+\sin\theta+\cos\theta)\,[1+2\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta+$$

$$\cos\theta)-5]=\frac{1}{2}[1+\sin\theta+\cos\theta]\,[(\sin\theta+\cos\theta)^2+2(\sin\theta+\cos\theta)-5],$$

se anulează pentru valorile: $\sin\theta+\cos\theta=-1$ (I) şi $\sin\theta+\cos\theta=-1\pm\sqrt{6}$ (II). Prima ecuaţie poate fi scrisă sub forma: $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; sau încă $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ din care deducem soluţiunile $\theta-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4}$. $\therefore\ \theta'=(2k+1)\pi$ şi $\theta''=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$. A doua ecuaţie transformată devine: $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\sqrt{6}$ (a doua soluţiune fiind înlăturată deoarece $|\sin\theta|+|\cos\theta|<2$, iar $|-1-\sqrt{6}|>3$). Sau încă: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$. Dar nici această ecuaţie nu dă valori reale pentru $\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, căci observăm că $\frac{-1+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ fiind pozitiv, putem compara pătratul ei cu 1 şi avem: $\frac{7-2\sqrt{6}}{2}-1=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}=\frac{25-24}{2(5+2\sqrt{6})}>0$, deci $\frac{-1+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}>1$.

Pentru valorile $\theta=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ şi $\theta=(2k'+1)\,\pi$ determinantul sistemului este nul, minorii săi însă nu sunt nuli, cum se verifică îndată, iar determinanţii caracteristici formaţi cu ori care din aceşti minori sunt deasemenea diferiţi de zero.

Sistemul este deci incompatibil. Pentru celelalte valori ale lui θ sistemul este compatibil. Soluţiile sunt

$$x=\frac{\sin\theta-\cos^2\theta}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\cos^2\theta-\sin^2\theta-1)},$$

$$y=\frac{\cos\theta-\sin^2\theta}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\cos^2\theta-\sin^2\theta-1)},$$

$$z=\frac{\sin\theta\cos\theta-1}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\cos^2\theta-\sin^2\theta-1)}$$

(S. E. G. M. II. p. 86). **37.** Determinantul sistemului are valoarea $(a+b)^2(a-b)$. Este nul când $a+b=0$, $a-b=0$, adică pentru coordonatele punctelor situate pe cele două bisectoare ale axelor. Deci sistemul este compatibil şi determinat pentru toate punctele planului nesituate pe bisectoarele axelor. In ipoteza $a+b=0$ sau $a-b=0$ să considerăm ultimele două ecuaţiuni drept ecuaţiuni principale şi pe y, z necunoscute principale întrucât determinantul $\begin{vmatrix} a & -\lambda \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$ nu este nul, dacă presupunem $\lambda\neq 0$ pentru $a+b=0$. Determinantul caracteristic este $\begin{vmatrix} a & -\lambda & 2 \\ 1 & a+b & \lambda \\ b & \lambda & 1 \end{vmatrix}=-(a+b)\lambda^2+3\lambda+a^2-b^2-b(a+b)$. Când acest determinant este nul, sistemul este nedeterminat. Deci sistemul este nedeterminat pentru soluţiile sistemului $a-b=0$, $-(a+b)\lambda^2+3\lambda+a^2-b^2-b(a+b)=0 \therefore a=b=\frac{1}{2}(-\lambda^2\pm\sqrt{\lambda^4+6\lambda})$. Sistemul $a+b=0$, $-(a+b)\lambda^2+3\lambda+a^2-b^2-b(a+b)=0$ se transformă în $a+b=0$, $\lambda=0$, imposibil pentrucă am presupus $\lambda\neq 0$ în acest caz şi ca urmare, sistemul este incompatibil pentru coordonatele punctelor celor 2 bisectoare ale axelor, afară de punctele $\left(\frac{-\lambda^2\pm\sqrt{\lambda^4+6\lambda}}{2}, \frac{-\lambda^2\pm\sqrt{\lambda^4+6\lambda}}{2}\right)$ pentru care este nedeterminat. Aceste puncte nu există când $-\sqrt[3]{b}<\lambda<0$. In fine, să studiem cazul $a+b=0$, $\lambda=0$. Determinantul

principal este $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, determinantul caracteristic, $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ b & a & 2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a+b & a+b & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & a & 2 \end{vmatrix} = 3(a-b) \neq 0$. Deci, pentru coordonatele punctelor situate pe bisectoarea $a+b=0$, sistemul este incompatibil şi când $\lambda = 0$. **38.** Sistemul se mai scrie $a\frac{x}{t}+b\frac{y}{t}+c\frac{z}{t}=-d$, $a'\frac{x}{t}+b'\frac{y}{t}+c'\frac{z}{t}=-d'$, $a''\frac{x}{t}+b''\frac{y}{t}+c''\frac{z}{t}=-d''$ şi rezolvat după regula lui Cramer dă:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{+y}{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{+t}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

39. Intre laturile şi unghiurile unui triunghiu există relaţiile:

$$(1)\begin{cases} a - b\cos C - c\cos B = 0 \\ -a\cos C + b - c\cos A = 0 \\ -a\cos B - b\cos A + c = 0 \end{cases}$$

Determinantul necunoscutelor a, b, c, este:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\cos A\cos B\cos C - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$$

şi observând că $1-\cos^2 A-\cos^2 B=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)-\cos^2 A\cos^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)$ şi că $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$, avem că $D=-[\cos(A-B)+\cos C][\cos(A+B)+\cos C]=0$, deoarece $\cos(A+B)=-\cos C$ deci sistemul (1) linear şi omogen, având determinantul nul admite o infinitate de soluţii, toate proporţionale. **40.** Deoarece determinanţii de ordinul II ce se pot forma din tabloul coeficienţilor necunoscutelor sunt nuli, să considerăm ca determinant principal coeficientul unei necunoscute, de ex. coeficientul lui x din prima ecuaţie. Avem 2 determinanţi caracteristici

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}$ şi $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & c \end{vmatrix}$. Pentruca sistemul să fie compatibil trebue ca ambii determinanţi să fie nuli, deci $b=2a$, $c=3a$.

41. Se notează valoarea comună a rapoartelor cu y, se obţin 3 ecuaţiuni cu necunoscutele x, y, xy, le rezolvăm cu regula lui *Cramer*, apoi egalăm produsul valorilor lui x şi y cu valoarea obţinută pentru xy. Rezultatul este:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

42. Fie $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ c^2 & a^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$. desvoltând fiecare determinant ce compune sistemul, acesta se scrie $\Delta_1 x+\Delta_2 y+\Delta_3 z=0$, $\Delta_2 x+\Delta_3 y+\Delta_1 z=0$, $\Delta_3 x+\Delta_1 y+\Delta_2 z=0$. Rezultatul eliminării este: $\begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_1 \\ \Delta_3 & \Delta_1 & \Delta_2 \end{vmatrix} = -(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2-\Delta_1\Delta_2-\Delta_2\Delta_3-\Delta_3\Delta_1)=0$. Şi cum $\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$, se vede imediat că D se divide cu Δ.

43. Scăzând două câte două ecuaţiile date şi simplificând, obţinem sistemul: $(a-1)x+(b-1)y-(a+b)z=0$, $(a-1)x-(a+c)y+(c-1)z=0$, $-(b+c)x+(b-1)y+(c-1)z=0$. Rezultatul eliminării este $a+b+c-1=0$. *Soluţia II.* Ecuaţiile pot fi scrise sub forma echivalentă:

$$\begin{aligned} x^2(y-z) &= a(x-y)(x-z)(y-z) \\ -y^2(x-z) &= b(x-y)(x-z)(y-z) \\ z^2(x-y) &= c(x-y)(x-z)(y-z); \end{aligned}$$

în acest caz, observând că $x^2(y-z)-y^2(x-z)+z^2(x-y)=(x-y)(x-z)(y-z)$, pentru a elimina pe x, y, z este suficient să adunăm aceste trei ecuaţii. Simplificând, rezultatul eliminării este $a+b+c=1$. **44.** Multiplicând ecuaţiile şi extrăgând rădăcina patrată, obţinem: $xyz=\sqrt{abc}\,(x+y)(y+z)(z+x)$, egalitate care împărţită pe rând cu celelalte ecuaţii dă sistemul $\sqrt{\frac{bc}{a}}\,xy+\sqrt{\frac{bc}{a}}\,xz-yz=0$, $\sqrt{\frac{ac}{b}}\,xy-xz+\sqrt{\frac{ac}{b}}\,yz=0$,

$-xy+\sqrt{\frac{ab}{c}}\,xz+\sqrt{\frac{ab}{c}}\,yz=0$, din care eliminând necunoscutele xy, xz, yz obţinem $a+b+c+2\sqrt{abc}-1=0$.

Soluţia II. Inmulţind cele 3 ecuaţii date între ele avem relaţia: $xyz=\varepsilon\sqrt{abc}\,(x+y)\,(x+z)\,(y+z)$ $(\varepsilon=\pm 1)$. De altă parte amplificând ecuaţiile respectiv cu $(y+z)$; $(x+z)$; $(x+y)$ şi adunându-le avem: $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=(a+b+c)\,(x+y)\,(x+z)\,(y+z)$ sau încă: $(x+y)\,(x+z)\,(y+z)-2xyz=(a+b+c)\,(x+y)\,(y+z)\,(x+z)$; $(x+y)\,(x+z)\,(y+z)-2\varepsilon\sqrt{abc}\,(x+y)\,(x+z)\,(y+z)=(a+b+c)(x+y)\,(x+z)\,(y+z)$ deci simplificând: $1-2\varepsilon\sqrt{abc}=a+b+c$. **45.** Observăm că, pentru a obţine ce devine prima ecuaţiune din sistemul (x, y, z), înmulţim ecuaţiunile sistemului al doilea respectiv cu a, b, c şi însumăm, prin urmare coeficienţii lui t, u, v din sistemul rezultant se obţin înmulţind elementele primei linii

din determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ respectiv cu elementele

primei coloane din determinantul $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ şi însumând,

apoi cu elementele celei de a doua coloane şi însumând; apoi cu elementele celei de a treia coloane; deci determinantul coeficienţilor necunoscutelor sistemului rezultat este produsul determinanţilor celor două sisteme date:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

46. Procedeu analog. Numitorul comun este:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

47. Insemnăm cu Δ_k determinantul lui *Vandermonde* relativ la k numere $a_1, a_2, \ldots a_k$, prin urmare determinantul sistemului celor n ecuaţiuni date este Δ_n; însemnăm apoi determinanţii $\Delta_{n-1}(a_{i+1}, \ldots, a_n, \ldots, a_{i-1})$, din care lipseşte prin urmare litera a_i, cu Δ^i_{n-1}. Avem, rezolvând sistemul format din primele $(n-1)$ ecuaţiuni omogene în $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n$, sistemul de soluţiuni:

$$\frac{x_1}{\Delta^1_{n-1}} = \frac{x_2}{\Delta^2_{n-1}} = \ldots = \frac{x_i}{\Delta^i_{n-1}} = \ldots = \frac{x_n}{\Delta^n_{n-1}}$$

care este încă egal ţinând seamă de ultima relaţiune cu

$$\frac{a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_i^{n-1}x_i + \ldots + a_n^{n-1}x_n}{a_1^{n-1}\Delta^1_{n-1} + a_2^{n-1}\Delta^2_{n-1} + \ldots + a_i^{n-1}\Delta^i_{n-1} + \ldots + a_n^{n-1}\Delta^n_{n-1}} = \frac{1}{\Delta_n}.$$

$*^{**}$ $x_i = \dfrac{\Delta^i_{n-1}}{\Delta_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Acum, adunând cele n ecuaţiuni date, avem: $\sum_{i=1}^{n}(1 + a_i + a_i^2 + \ldots + a_i^{n-1})x_i = 1$ sau încă înlocuind pe x_i cu valoarea găsită: $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^n - 1}{a_i - 1} \times \dfrac{\Delta^i_{n-1}}{\Delta_n} = 1$, care este identitatea cerută. **48.** Pentru ca sistemul dat să aibă soluţiuni nu toate nule, trebue ca λ să fie o rădăcină a ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Această ecuaţiune de gradul n în λ este cunoscută subt numele de ecuaţia seculară şi are toate rădăcinile sale reale. Fie λ' o rădăcină a sa şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soluţiunile sistemului nu toate nule corespunzătoare; $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ conjugatele lor Multiplicând ecuaţiile sistemului dat respectiv cu $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ şi adunându-le, avem: $\sum_{k=1}^{n} a_{k,l}\, x_k \bar{x}_k + \sum_{k' \neq l}^{n} a_{kl}\,(x_k \bar{x}_l + x_l \bar{x}_k) = \lambda' \sum_{1}^{n} x_k \bar{x}_k$. Sumele $\Sigma x_k \bar{x}_k$ şi $\Sigma a_{kk} x_k \bar{x}_k$ sunt reale, asemenea

$\sum_{(k'\neq l)}^{n} a_{kl}(x_k\bar{x}_l + x_l\bar{x}_k)$ este reală. [Dacă $x_k = a+bi$; $x_l = c+di$ * * * $x_k\bar{x}_l + x_l\bar{x}_k = (a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di) = 2(ac+bd) - i(ad-bc-ad+bc) = 2(ac+bd)$]; deci λ' trebue să fie real, fiind câtul a două câtimi reale.

XIII. In cele ce urmează vom însemna cu notaţia $(a, b, c..)$ valoarea fracţiunei continue $a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+..}}$. **1.** $\frac{347}{124} = 2 + \frac{99}{124} = 2 + \cfrac{1}{\frac{124}{99}} = 2 + \cfrac{1}{1+\frac{25}{99}} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{99}{25}}} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{24}{25}}}$, etc. Se găseşte (2, 1, 3, 1, 24). **2.** Avem:

	0	7	1	6	2	1	5	2	11
3117	24512	3117	2693	424	149	126	23	11	1
	2693	424	149	126	23	11	1		

, deci (0, 7, 1, 6, 2, 1, 5, 2, 11). **3.** Se mai scrie $3 + \frac{141\,592}{1000.000}$, restul ca mai sus. (3, 7, 15, 1, 84, 6, 2). **4.** $\sqrt{2}$ are partea întreagă egală cu 1. Deci $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$, $(x>0)$. Pentru a determina pe x ridicăm în ambii membri la patrat; găsim: $1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ sau $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$ şi cum valoarea lui x trebue să fie pozitivă, considerăm numai $x = 1 + \sqrt{2}$. Deci $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{x}}}$, etc. Incât rezultatul este (1, 2, 2, 2...) **5.** Procedeu analog, găsim (1, 1, 2, 1, 2...). **6.** (2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4...). **7.** (3; 3, 6; 3, 6;...). **8.** (3; 1, 1, 1, 1, 6;...). **9.** (4; 2, 1, 3, 1,

2, 8; 2, 1, 3, 1, 2, 8;...). **10.** (5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10;...). **11.** (10; 20, 20, 20,...). **12.** (14; 7, 28; 7, 28;). **13.** $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x}$. $\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{a^2+1-a^2}=\sqrt{a^2+1}+a.$ şi înlocuind avem: $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}=a+\frac{1}{2a+\frac{1}{x}}=$

$a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}=a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{x}}}$, etc, calculul se continuă la fel nesfârşit. Rezultatul este $(a, 2a, 2a, 2a,\ldots)$. **14.** $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{x}$, $a^2+2=a^2+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}$, $2x^2-2ax-1=0$, $x=\frac{a+\sqrt{a^2+2}}{2}$ şi înlocuind, $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2}}=$

$a+\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{x}\right)}=a+\frac{1}{a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}=a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+2}}}=$

$a+\frac{1}{a+\frac{1}{2a+\frac{1}{x}}}$, etc. Rezultatul este $(a;\ a,\ 2a;\ a,\ 2a;..)$.

15. $(a-1;\ 1,\ 2a-2;\ 1,\ 2a-2;\ldots)$ **16.** $\sqrt{a^2-2}=$

$a-1+\frac{1}{x}$. $\therefore$ $x=\frac{a-1+\sqrt{a^2-2}}{a^2-2-(a-1)^2}=\frac{a-1+\sqrt{a^2-2}}{2a-3}$. $\therefore$

$\sqrt{a^2-2}=a-1+\frac{1}{\frac{a-1+\sqrt{a^2-2}}{2a-3}}=a-1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{x}}}=$

$a-1+\frac{1}{1+\frac{x+1}{(2a-3)x}}=a-1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2a-3}{2-a+\sqrt{a^2-2}}}}=$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{(2a-3)(2-a-\sqrt{a^2-2})}{-2(2a-3)}}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a-2+\sqrt{a^2-2}}{2}}}=$$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a-2}{2}+\cfrac{\sqrt{a^2-2}}{2}}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-2)+\frac{1}{2}\left(\cfrac{x+1}{x}\right)}}=$$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{2\cfrac{x}{1+x}}}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{\cfrac{2}{2-a+\sqrt{a^2-2}}}}}=$$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{\cfrac{2(2-a-\sqrt{a^2-2})}{-2(2a-3)}}}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{\cfrac{a-2}{2a-3}+\cfrac{\sqrt{a^2-2}}{2a-3}}}}=$$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(2a-3)x}}}}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-1+\sqrt{a^2-2}}}}}=$$

$$a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{x}}}}}=\text{etc....}$$

17. $(a;\ 2,\ 2a;\ 2,\ 2a;\ldots)$. **18.** $(2a;\ 4,\ 4a;\ 4,\ 4a;\ldots)$. **19.** $(a,\ b,\ 2a,\ b,\ 2a)$. **20.** Fie $R_{n-1}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $R_n=\frac{P_n}{Q_n}$ două reduse succesive. Se știe că există relația $P_n\,Q_{n-1}-Q_n\,P_{n-1}=(-1)^n$ care exprimă că P_{n-1}, P_n sunt primi între ei, întrucât dacă ar

admite un divizor comun, acesta ar fi divizor al întreg membrului I, ceeace nu se poate membrul I fiind $+1$ sau -1. Analog raţionament pentru Q_{n-1}, Q_n. **21.** Avem $p_{n+1}\,q_n - p_n\,q_{n+1} = (-1)^{n+1}$, $p_{n+2}\,q_{n+1} - p_{n+1}\,q_{n+2} = (-1)^{n+2}$. Adunând, $(p_{n+2} - p_n)\,q_{n+1} + (q_n - q_{n+2})\,p_{n+1} = 0$, de unde $(p_n - p_{n+2})\,q_{n+1} = (q_n - q_{n+2})\,p_{n+1}$. Când $n = 1$, avem relaţia enunţului. **22.** Considerăm relaţia stabilită în exerciţiul precedent: $(p_{n+2} - p_n)\,q_{n+1} = (q_{n+2} - q_n)\,p_{n+1}$ sau făcând pe n egal cu $n-1$ $(p_{n+1} - p_{n-1})\,q_n = (q_{n+1} - q_{n-1})\,p_n$. Multiplicăm cele două egalităţi şi împărţim ambii membri cu $p_n\,q_n\,p_{n+1}\,q_{n+1}$. Avem:

$$\frac{(p_{n+2} - p_n)\,(p_{n+1} - p_{n-1})}{p_n\,p_{n+1}} = \frac{(q_{n+2} - q_n)\,(q_{n+1} - q_{n-1})}{q_n\,q_{n+1}}$$

$$\text{sau } \left(\frac{p_{n+2}}{p_n} - 1\right)\left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right).$$

23. Reluăm relaţia $p_n\,q_{n-1} - q_n\,p_{n-1} = (-1)^n$. Aceasta se mai scrie $p_n\,q_{n-1} = (-1)^n + q_n\,p_{n-1}$ sau împărţind cu $q_{n-1}\,q_n$, $\frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}\,q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Să egalăm succesiv n cu 2, 3,... n şi să adunăm, obţinem după reduceri

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1\,q_2} - \frac{1}{q_2\,q_3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}\,q_n}.$$

24. Între numărătorii a trei reduse consecutive există relaţia de recurenţă: $p_{n+2} = p_{n+1}\,a_{n+2} + p_n$, $p_{n+3} = p_{n+2}\,a_{n+3} + p_{n+1}$, deasemenea între numitori: $q_{n+2} = q_{n+1}\,a_{n+2} + q_n$, $q_{n+3} = q_{n+2}\,a_{n+3} + q_{n+1}$. Înlocuind în relaţia dată, reducând şi grupând, găsim $(p_{n+1}\,q_n - q_{n+1}\,p_n)\,(a_{n+2} + 1) = -\,a_{n+3}\,(p_{n+2}\,q_{n+1} - q_{n+2}\,p_{n+1})$ şi cum $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+1}$, iar $p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1} = (-1)^{n+2}$, rezultă: $a_{n+3} = a_{n+2} + 1$. Deci un cât incomplet se deduce din precedentul adăugând $+1$. (G. M. XII). **25.** Se ştie din studiul fracţiunilor continui periodice (a se vedea de ex. *Cours d'algèbre* de *B. Niewenglowski.* ed. 10. pag. 334) că având $x = (a_1, a_2, \ldots a_n;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ldots.)$ o fracţiune continuă periodică în care $\frac{P_n}{Q_n}$ este redusa de ordinul n, x este rădăcina pozitivă a ecuaţiunii $Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)\,x - P_{n-1} = 0$, iar

rădăcina negativă reprezintă $-\frac{1}{x}$, unde $x'=(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1; a_n, a_{n-1}, \ldots a_1; \ldots)$. Deci, pentru problema prezentă, produsul rădăcinilor ecuației de gr. II este $-\frac{P_{n-1}}{Q_n}=x\left(-\frac{1}{x'}\right)=-1$, deci $P_{n-1}=Q_n$ este relația cerută. **26.** *a)* Dacă $p_{n-1}+\lambda p_n$ și $q_{n-1}+\lambda q_n$ ar avea un divizor comun d, observând că p_{n-1} și q_{n-1} sunt numere prime, numerele $q_{n-1}(p_{n-1}+\lambda p_n)$ și $p_{n-1}(q_{n-1}+\lambda q_n)$ ar avea asemenea divizorul comun d, dar în acest caz d ar divide diferența acestora: $q_{n-1}(p_{n-1}+\lambda p_n)-p_{n-1}(q_{n-1}+\lambda q_n)=\lambda(p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n)=(-1)^n\lambda$, adică pe λ, însă în acest caz, din primele numere rezultă că el trebue să dividă pe p_{n-1} și q_{n-1}; deci $d=1$, de unde rezultă proprietatea enunțată. *b)*. Fie $\alpha_r=(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+r})$. Redusa de ordinul $(n+r)$: $R_{n+r}=\frac{p_{n-1}+\alpha_r p_n}{q_{n-1}+\alpha_r q_n}$, are evident pe α_r mai puțin simplu de cât oricare din valorile lui λ din fracțiunile convergente intermediare. *c)*. Fie $\lambda''<\lambda'$ două valori ale lui λ; diferența fracțiunilor convergente corespunzătoare, dă succesiv, ținând seamă de proprietățile reduselor:

$$\frac{p_{n-1}+\lambda' p_n}{q_{n-1}+\lambda' q_n}-\frac{p_{n-1}+\lambda'' p_n}{q_{n-1}+\lambda'' q_n}=\frac{(\lambda'-\lambda'')(p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n)}{(q_{n-1}+\lambda' q_n)(q_{n-1}+\lambda'' q_n)}=$$

$$\frac{(-1)^n(\lambda'-\lambda'')}{(q_{n-1}+\lambda' q_n)(q_{n-1}+\lambda'' q_n)},$$ deci dacă n este par fracțiunile convergente intermediare merg necontenit *crescând*, iar dacă n este impar ele merg necontenit descrescând. **27.** Fie x_0, y_0 o soluție a ecuațiunii, adică $9x_0-11y_0=8$, deci $9(x-x_0)=11(y-y_0)$. Va trebui ca $x-x_0$ să se dividă cu 11, deci să fie de forma $x-x_0=11t$, deducem înlocuind, $y-y_0=9t$. Să determinăm pe x_0, y_0. Considerăm fracția $\frac{9}{11}$ și o reducem în fracție continuă. $\frac{9}{11}=\frac{1}{1+\frac{2}{9}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}$. Redusele

sunt $\frac{p_1}{q_1}=0$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{9}{11}$ şi avem $p_4q_3-p_3q_4=(-1)^4$ sau $9.5-4.11=1$; multiplicând cu 8 ambii membri, $9.40-11.32=8$. Deci se vede că $x_0=40$, $y_0=32$. Soluţiile generale sunt astfel: $x=40+11t$, $y=32+9t$ sau încă $x=7+11.3+11t$, $y=5+9.3+9t$. ∴ $x=7+11(t+3)$, $y=5+9(t+3)$. ∴ $x=7+11u$, $y=5+9u$. **28.** Procedeu analog. x_0, y_0 fiind o soluţie particulară, se deduce $x=x_0+10t$, $y=y_0-7t$, apoi $\frac{7}{10}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{2}{3}$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{7}{10}$ şi din $p_4q_3-q_4p_3$, deducem $7.3.297-10.2.297=297$. Deci $x_0=891$, $y_0=-594$, înlocuind, $x=1+10(t+89)$, $y=29-7(t+89)$, deci $x=1+10u$, $y-29-7u$. (u întreg). **29.** Procedeu analog, după ce scriem ecuaţia astfel $2x-3y=1-5z$, z fiind oarecare, deducem $x=x_0+3t$, $y=y_0+2t$, x_0, y_0 fiind soluţii particulare ale ecuaţiei. $\frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, deci $2.1-3.1=-1$ sau $2(-1)(1-5z)-3(-1)(1-5t)=1-5z$. Deducem $x_0=-1+5z$, $y_0=-1+5z$ şi $x=-1+5z+3t$, $y=-1+5z+2t$, z şi t întregi oarecare. **30.** Inmulţind prima ecuaţie cu 5 şi adunând, eliminăm pe z. Obţinem $13x+23y=9$, de unde cu metoda arătată, obţinem $x=6+23u$, $y=-3-13u$, valori care introduse în prima ecuaţiune, dau $z=-4-19u$. **31.** Eliminând pe x obţinem $5y+6z=50$, de unde $y=-50+6t$, $z=+50-5t$ ∴ $y=10+6u$, $z=-5u$ ($t-10=u$). Inlocuind în ecuaţia a doua, $3x=7(1-u)$. Deci trebue $1-u=3v$ ∴ $x=7v$, $y=16-18v$, $z=-5+15v$ (v întreg). **32.** Procedând ca la problema 27, găsim succesiv $x=x_0+19t$, $y=y_0-13t$ (t întreg), cum

$\frac{13}{19}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{6}}}$, $x_0=3510$, $y_0=-2340$, deci $x=90+19(180+t)$, $y=-13(180+t)$ și punând $180+t=u$, $x=90+19u$, $y=-13u$. Pentru a avea soluții pozitive, punem $90+19u>0$, deci $u>-4\frac{14}{19}$ și $u\leqslant 0$. Adică vom lua pentru u valorile $0, -1, -2, -3, -4$. **33.** Eliminând pe z, se găsește $7x+3y=160$, pentru care $x=1+3u$, $y=51-7u$, valori care introduse în prima ecuațiune, dau $z=63+13u$ (u întreg). Pentru ca x, y, z să fie pozitivi, trebue $u>-\frac{1}{3}$, $u<+\frac{51}{7}$, $u>-\frac{63}{13}$. Vom lua $+\frac{51}{7}>u>-\frac{1}{3}$, deci $u=0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7$. **34.** Rezolvând în raport cu x, avem $x=\frac{14+4y}{3(y+1)}$. Punând $y=z-1$ *** $x=1+\frac{z+10}{3z}$, unde trebue ca z să fie un divizor al lui 10, de forma: $z=3t-1$. Găsim: $z=-1; +2; +5; -10$ și ca urmare sistemele de soluțiuni $(x,y)=(-2,-2); (+3,+1); (+2,+4); (+1,-11)$. **35.** Să notăm determinantul D_n. Desvoltând după elementele ultimei linii avem: $D_n=a_n D_{n-1}+D_{n-2}$. Dacă notăm $\frac{P_n}{Q_n}$ redusa de ordin n a fracției continui, observăm că $P_1=a_1=D_1$, $P_2=a_1a_2+1=D_2$, dar $P_3=P_2a_3+P_1=D_2a_3+D_1=D_3$, $P_4=P_3a_4+P_2=D_3a_4+D_2=D_4$, etc., în general $P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2}=a_nD_{n-1}+D_{n-2}=D_n$. Să notăm D'_n minorul lui a_1 în D_n, D'_{n-1} minorul lui a_1 în D'_{n-1} etc. $D'_2=a_2$. Avem $D'_n=a_nD'_{n-1}+D'_{n-2}$ și $Q_1=1$, $Q_2=a_2=D'_2$, $Q_3=a_2a_3+1=D'_3$, $Q_4=Q_3a_4+Q_2=D'_3a_4+D'_2=D'_4$, etc. $Q_n=Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}=D'_{n-1}a_n+D'_{n-2}=D'_n$. Deci ultima redusă a fracțiunei continui, egală cu însăși fracția este $\frac{D_n}{D'_n}$. Determinantul D_n se numește un *continuant*. **36.** Căutăm soluții întregi pentru ecuațiunea $ax+by=c$. Rezultă că a și b sunt primi între ei, pentrucă altfel ar admite un divizor comun, care ar trebui să dividă și pe c, deci întreaga

ecuaţie s'ar putea simplifica. Fie $S=x^2+y^2$, $y=\frac{c-ax}{b}$, deci $S=\frac{1}{b^2}[(a^2+b^2)x^2-2acx+c^2]$; $S'=\frac{2}{b^2}[(a^2+b^2)x-ac]$. Deci $x=\frac{ac}{a^2+b^2}$, $y=\frac{bc}{a^2+b^2}$. Între a şi a^2+b^2 nu poate fi un divizor comun d, deoarece d ar divide şi pe b, deci $d=1$. La fel se dovedeşte că b este prim cu a^2+b^2. Condiţia cerută este deci $c=u(a^2+b^2)$, u fiind un număr întreg. **37.** Fie A numărul căutat, B câtul primei împărţiri, C câtul celeilalte împărţiri. Avem: $A=28B+21$, $A=19C+17$, deci de soluţionat în numere întregi ecuaţia $19C-28B=4$; 19 fiind prim cu 4 trebue neapărat C să fie multiplu de 4, adică $C=4D$. Rezolvând ecuaţiunea $19D-7B=+1$, găsim: $B=8+19t$, $C=12+28t$. Introducând valoarea lui B în prima egalitate care dă pe A, aflăm $A=245+552t$. **38.** Fie N numărul căutat, avem: $N+1=2k=3k_1=4k_2=5k_3=6k_4$. Deci $N+1$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 2, 3, 4, 5, 6, este 60. $N=59$. **39.** $x-y=2\frac{x}{y}$, deci $x=\frac{y^2}{y-2}=\frac{y^2-4+4}{y-2}=y+2+\frac{4}{y-2}$. $y-2$ trebue să fie un divizor al lui 4, deci $-1, +1, -2, +2, -4, +4$. Deducem: $y=1$; 3; 0; 4; -2; 6, deci respectiv: $x=-1$; 9; 0; 8; -1; 9. **40.** Suma tuturor cifrelor cu care se face permutările este 36. Considerând permutările în care suma primelor patru cifre este egală cu suma ultimelor patru şi notând cu x, y, z, t, primele patru cifre, trebue să avem $x+y+z+t=18$. Rezolvând în numere întregi această ecuaţie aflăm 8 soluţii: (1, 2, 7, 8), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (2, 3, 5, 8), (1, 4, 6, 7), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 6). Să luăm una din soluţii. Cu cele 4 cifre ale sale se pot face 4! permutări, cu cele 4 cifre rămase se pot face deasemenea 4! permutări. Alăturând una din aceste 4! permutări cu fiecare din primele 4! permutări, obţinem 4! numere în condiţiile problemei, în total $(4!)^2$ numere se obţin plecând dela una din cele 8 soluţii ale ecuaţiei. Considerându-le pe toate, găsim $8.(4!)^2=9\times 8^3=4608$.

(G. M. VII). **41.** x, y, z fiind numărul bărbaților, femeilor, copiilor, avem de soluționat în numere întregi sistemul: $x+y+z=100$, $3x+2y+0{,}5z=100$, sau reducând pe z, $5x+3y=100$, care conduce la $x=-100+3t$, $y=200-5t$, (t întreg); x, y, z trebue să fie pozitivi, deducem $\frac{100}{3}<t<40$ și $x+y<100$ deci $t=34, 35, 36, 37, 38, 39$, de unde $x=2; 5; 8; 11; 14; 17$; $y=30; 25; 20; 15; 10; 5$; și $z=68; 70; 72; 74; 76; 78$; deci sistemele de soluțiuni: (2, 30, 68); (5, 25, 70); (8, 20, 72,); (11, 15, 74); (14, 10, 76); (17, 5, 78). **42.** Să notăm x, y, z numărul lucrătorilor din categoria I, II, III. Dacă $100t$ este salariul zilnic al unui lucrător din categoria III, $120t$ și $160t$ sunt salariile zilnice ale lucrătorilor din categoriile II și I. Deoarece s'a plătit într'o zi câte 200 lei fiecărei categorii, avem $160tx=120ty=100tz=200$, de unde $x=\frac{3y}{4}, z=\frac{6y}{5}$. Deducem că y trebue să se dividă cu 4 și 5, deci cu 20. Avem soluțiile $y=20, 40$; $x=15, 30$; $z=24, 48$; $t=\frac{1}{12}, \frac{1}{24}$; salariul zilnic al categoriilor I, II, III pentru primele soluții: 13, 33; 10; 8, 33 — pentru soluțiile II 6, 66; 5; 4, 16. Deci: 30 din categoria întâia a 6, 66 lei pe zi; 40 din categoria a doua a 5 lei pe zi și 48 din categoria a 3-a a 4,16 lei pe zi. **43.** Fie x numărul laturilor unui poligon, y numărul poligoanelor ce se unesc în jurul unui vârf. Suma unghiurilor poligonului este $2(x-2)$ unghiuri drepte, un unghiu al poligonului are $\frac{2(x-2)}{x}$ unghiuri drepte. Deci suma unghiurilor celor y poligoane ce se unesc în jurul unui vârf este $\frac{2(x-2)}{x}$ y unghiuri drepte. Dar suma unghiurilor din jurul unui punct este 4 unghiuri drepte, deci $\frac{2(x-2)}{x}y=4$ . . $y=2+\frac{4}{x-2}$. $x-2$ trebue să fie un divizor pozitiv al lui 4, rezultă $x=3, 4, 6$; $y=6, 4, 3$.

XIV. 1. Avem: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, făcând $n=1,2,3,\ldots$ şi însumând relaţiunile avem, însemnând cu S_n suma primilor n termeni, că $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, deci $\lim_{n\to\infty} S_n=1$. **2.** Avem $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$. Făcând pe $n=1,2,\ldots,n$ şi observând că suma relaţiunilor îşi grupează termenii în două şiruri ca în exerciţiul precedent (unul pentru n par, celălalt pentru n impar), avem: $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$. *** $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{4}$. **3.** Având $\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$ şi făcând $n=1, 2, 3,\ldots, n$, observăm că însumând diferenţele se grupează în trei şiruri, în fiecare suma reducându-se la primul şi ultimul termen, deci $S_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$; deci $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{11}{18}$. **4.** Procedeu analog; găsim: $S_n=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ldots-\frac{1}{n+p-1}\right]$ *** $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{p-1}\right]$ **5.** Termenul general $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ poate fi pus subt forma $u_n=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$. Pentru determinarea lui A multiplicăm relaţia cu n şi facem apoi $n=0$, găsim $A=\frac{1}{2}$; asemenea găsim $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$; deci avem: $u_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right]$. Făcând $n=1, 2, 3, \ldots., n$ şi însumând avem: $S_n=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}-\right.$

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big]$ $*^{*}*$ $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$. *A doua metodă.* Factorii numitorului fiind consecutivi, avem: $u_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\,(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right]$, făcând $n=1, 2, 3, \ldots, n$ și însumând găsim: $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right]$ $*^{*}*$ $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$.

6. Avem: $u_n=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+4}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+4}\right]$, deci $S_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+4}-\frac{2}{n+2}\right]$ $*^{*}*$ $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{11}{96}$. *A doua metodă.* Avem: $u_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n\,(n+2)}-\frac{1}{(n+2)\,(n+4)}\right]$; făcând $n=1, 2, \ldots, n$, însumând și așezând diferențele pe două șiruri, rămâne în fiecare șir numai primul și ultimul termen, deci: $S_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{(n+1)\,(n+3)}-\frac{1}{(n+2)\,(n+4)}\right]$ $*^{*}*$ $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right]=\frac{11}{96}$. **7.** $u_n=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}=\frac{-1}{n+1}+\frac{5}{n+2}+\frac{-4}{n+3}$; $S_n=\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)\,(n+3)}$ $*^{*}*$ $\lim S_n=\frac{5}{6}$. *A doua metodă.* Observând că factorii numitorului sunt consecutivi, avem: $u_n=\frac{4}{(n+2)\,(n+3)}-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$. Punând deci: $S_{n,1}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$ și $S_{n,2}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{(n+2)\,(n+3)}$, deci $S_n=4\,S_{n,2}-S_{n,1}$. Procedând ca la (1), avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,2}=\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,1}=\frac{1}{2}$ $*^{*}*$ $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{5}{6}$.

8. Procedeu analog; termenul general poate fi descompus

într'o sumă de fracţiuni $u_n = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4} + \frac{C}{n+5} + \frac{D}{n+6} + \frac{E}{n+7}$; se determină A, B, C, D, E ca în exerciţiile precedente şi se găseşte $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{16}$ (G. M. I). *A doua metodă.* Insemnând cu $u'_n = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}$ vom avea termenii seriei date dând lui n valori de la 6 la $(n+3)$. Descompunem pe u'_n în sumă de termeni de forma $\frac{A}{p(p+1)}$ prin procedeul de mai sus. Avem: $S_n = -\frac{1}{4} S_{n,1} + \frac{15}{4} S_{n,2} - \frac{45}{4} S_{n,3} + \frac{35}{4} S_{n,4}$, unde $S_{n,1} = \sum_{6}^{n+3} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$; $S_{n,2} = \sum_{6}^{n+3} \frac{1}{(n-1)n}$; $S_{n,3} = \sum_{6}^{n+3} \frac{1}{n(n+1)}$; $S_{n,4} = \sum_{6}^{n+3} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Avem apoi: $\lim_{n\to\infty} S_{n,1} = \frac{1}{4}$; $\lim_{n\to\infty} S_{n,2} = \frac{1}{5}$; $\lim_{n\to\infty} S_{n,3} = \frac{1}{6}$; $\lim_{n\to\infty} S_{n,4} = \frac{1}{7}$ *** $S = \lim S_n = +\frac{1}{16}$. In acelaş fel se găseşte suma seriei: $u_n = \frac{n(n+p)(n+2p)}{(n+3p)(n+4p)\ldots(n+7p)}$. *A treia metodă.* Observăm că avem: $\frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{(n+2)^2}{(n-1)(n+7)}$ *** $(n-1)(n+7)u_n = (n-2)(n+6)u_{n-1} + 16u_{n-1}$. Făcând succesiv în relaţia de recurenţă pe n egal cu $n, n-1, \ldots, 3, 2$ şi însumând, găsim: $16 S_n = (n^2+6n+9)u_n$, dar $\lim_{n\to\infty} [u_n(n^2+6n+9)] = +1$ *** $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{16}$. **9.** Observăm în primul rând că $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, deci condiţia necesară pentru convergenţa seriei îndeplinită. Avem apoi, $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+m-1)^2}{(n-1)(n+2m+1)}$ *** $(n-1)(n+2m+1)u_n = (n-2)$

$(n+2m)\,u_{n-1}+(m+1)^2\,u_{n-1}$. Făcând în această relaţie de recurenţă succesiv pe n egal cu $n, (n-1), (n-2), \ldots, 2$ şi însumând relaţiunile obţinute găsim: $S_n=\frac{1}{(m+1)^2}\times[n^2+2mn+m^2)\,u_n]$; dar $\lim\limits_{n\to\infty}[(n^2+2mn+m^2)\,u_n]=1$, deci $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{(1+m)^2}$. ($S_n$ având o limită finită, seria este convergentă). **10.** Punând $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma$ şi $\frac{a}{r}=b$, termenul general poate fi scris subt forma: $u_n=\frac{\beta}{\gamma^{p+1}}\,\frac{\gamma+n}{(b+n)(b+n+1)\ldots(b+n+p)}$. Pentru convergenţă trebue să avem $p\geqq 2$. Apoi pentru însumare în cazul convergenţei observăm că avem:

$$\frac{\gamma+n}{(b+n)\,(b+n+1)\ldots(b+n+p)}=\frac{\gamma-b}{p}\,\frac{1}{(b+n)\ldots(b+n+p-1)}+\frac{p+b-\gamma}{p}\,\frac{1}{(b+n+1)\ldots(b+n+p)}$$

iar suma $S_n=-\frac{(p+b-\gamma)\,\beta}{p\gamma^{p+1}}\,\frac{1}{(b+1)\,(b+2)\ldots(b+p)}+\frac{\beta}{\gamma^{p+1}}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(b+n)\ldots(b+n+p-1)}$.

Punând $v_n=\frac{1}{(b+n)\ldots(b+n+p-1)}$ şi $S_n'=\sum_1^n v_n$, avem:

$$(p-1)\,S'_n=\sum_1^n\left[\frac{1}{(b+n)\ldots(b+n+p-2)}-\frac{1}{(b+n+1)\ldots(b+n+p-1)}\right];$$

etc. (G. M. XLII p. 533). **11.** Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{C_n^2}{C_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n}{n-2}=\frac{1}{2}<1,$$

deci seria este convergentă. Pentru însumare observăm că: $C_n^2=C_{n-1}^2+C_{n-1}^1$, deci: $S_n=\sum_2^n\frac{C_n^2}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_3^n\frac{C_{n-1}^2}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}\sum_2^n\frac{C_{n-1}^1}{2^{n-1}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_2^{n-1}\frac{C_n^2}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_1^{n-1}\frac{C_n^1}{2^n}=\frac{1}{2}S_{n-1}+\frac{1}{2}S'_{n-1}.$$ Dar $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$; iar $S'_{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right]-\frac{n-1}{2^n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2^n}=$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \log 2.\, 2^n} = 0$ (Hospital), deci $\lim_{n\to\infty} S'_{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$, etc.

12. Procedeu analog; Fie $S_n^p = \sum_p^\infty \frac{C_n^p}{a^n} = \sum_p^\infty \frac{C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}{a^n} =$

$\frac{1}{a}\sum_{p+1}^\infty \frac{C_{n-1}^p}{a^{n-1}} + \frac{1}{a}\sum_p^\infty \frac{C_{n-1}^{p-1}}{a^{n-1}} = \frac{1}{a}\sum_p^\infty \frac{C_n^p}{a^n} + \frac{1}{a}\sum_p^\infty \frac{C_{n-1}^{p-1}}{a^{n-1}} = \frac{1}{a} S_n^p + \frac{1}{a} S_{n-1}^{p-1}$

$*^*_*$ $(a-1)\, S_n^p = S_{n-1}^{p-1}$; apoi analog $(a-1)\, S_{n-1}^{p-1} = S_{n-2}^{p-2}$; etc.

13. Avem: $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{2n}{(n-1)(n+2)}$ $*^*_*$ $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = 0$, deci seria este convergentă. Pentru însumare, punem $V_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$ $*^*_*$ $(n+2)V_n = 2V_{n-1}$, sau: $nV_n + 2V_n = 2V_{n-1}$. Făcând în această relaţie de recurenţă pe n egal cu $n, (n-1), n-2, \ldots, 2, 1$ şi însumând obţinem: $V_1 + 2V_2 + 3V_3 + \ldots + (n-1)V_{n-1} + nV_n + 2V_n = 2V_0 = 1$; dar $nV_n = U_n$; deci $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = 1 - 2V_n$ $*^*_*$ $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 2 \lim_{n\to\infty} V_n = 1$; căci $\frac{1}{V_n}$ creşte peste orice limită cu n. **14.** Avem: $u_n = \frac{1.3..(2n-1)}{2.4..2n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}$ şi prin urmare

$u_n < \frac{1.}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{2n-1}}$. Deci $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Totuş seria este divergentă, pentrucă $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n}{n+1}$ adică $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este mai mare decât raportul termenilor corespunzători din seria armonică. Σv_n este convergentă, fiind alternată, cu termeni descrescători în valoare absolută şi termenul general tinde la zero când rangul lui creşte nemărginit. (G. M. XLIII. p. 660). **15.** Observăm că seria $\sum_2^\infty \frac{n^4 - 5n + 1}{n^6 + 1}$ este o serie cu

termeni pozitivi şi că $\frac{1}{n^2} - \frac{n^4 - 5n + 1}{n^6 + 1} = \frac{5n^3 - n^2 + 1}{n^2(n^6+1)} =$

$\frac{5n^2\left(n - \frac{1}{5}\right) + 1}{n^2(n^6+1)} > 0$ pentru toate valorile finite ale lui $n > 1$ şi tinde la zero pentru $n \to \infty$. Deci plecând dela rangul $n \geqq 2$, toţi termenii seriei date sunt mai mici de cât termenii corespunzători ai seriei convergente: $v_n = \frac{1}{n^2}$, deci seria dată, este convergentă. **16.** Asemenea observăm că $u_n = \frac{n^2 - n}{n^4 + n + 1} =$ $\frac{n(n-1)}{n^4+n+1} > 0$ pentru $n > 1$; de altăparte $u_n < v_n = \frac{1}{n^2}$ pentru n finit şi mai mare ca 1; deci seria Σu_n este convergentă. **17.** Fie p şi q gradele lui $f(n)$ şi $F(n)$. Din cauza condiţiunii puse asupra lui $F(n)$ toţi termenii seriei sunt finiţi, apoi se poate alege un rang N astfel ca pentru $n > N$ toţi termenii au un semn constant. Pentru convergenţă comparând (în valoarea absolută) termenii seriei date cu seria cu termenul general $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, seriile vor fi de aceeaşi natură dacă $p + \alpha = q$. Seria Σv_n fiind convergentă când $\alpha > 1$, seria întâia va fi deasemenea convergentă când $q - p > 1$ şi cum p şi q sunt numere întregi rezultă $q \geqq p + 2$. **18.** Avem: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} =$ $2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = 2 > 1$, deci seria este divergentă. **19.** Avem: $\frac{1}{\log(2^{n-1}+1)^p} + \ldots + \frac{1}{(\log 2^n)^p} > \frac{2^{n-1}}{n^p (\log 2)^p}$ *** $S_n > \frac{1}{(\log 2)^p} \cdot \sum_1^n \frac{2^{n-1}}{n^p}$, deci seria este divergentă. **20.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$, deci seria este convergentă. **21.** Avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} =$ $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \times x^2 = x^2$; deci seria este convergentă pentru $|x| < 1$, divergentă pentru $|x| > 1$. Pentru

$x=+1$ teorema raportului nu dă rezultat. Dar în acest caz avem $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{1}{1+\frac{8n-1}{4n^2-4n+1}}$, deci punând $\alpha_n=\frac{8n-1}{4n^2-4n+1}$ şi observând că $n\alpha_n$ rămâne tot timpul superior numărului 2, având la limită $\lim_{n\to\infty}(n\alpha_n)=2$, deducem aplicând criteriul lui *Raabe-Duhamel*, că seria dată *este convergentă* pentru $x=+1$. *A fortiori* seria este convergentă pentru $x=-1$.

22. Punând $x=ky$, termenul general al seriei devine: $u_n=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{k^n(1-k^{n+1})}{(1+k^n)(1+k^{n+1})(1+k^{n+2})}$. Presupunem $k\neq+1$, toţi termenii seriei fiind nuli; asemenea presupunem $k\neq-1$ toţi termenii fiind infiniţi în acest caz. Observând în fine că: $(1-k)^2y^2$

$$u_n=\frac{-1}{1+k^n}+\frac{2}{1+k^{n+1}}-\frac{1}{1+k^{n+2}},\quad * * *\quad (1-k)^2y^2\,S_n=$$

$$-\sum_1^n\frac{1}{1+k^n}-\sum_1^n\frac{1}{1+k^{n+2}}+2\sum_1^n\frac{1}{1+k^{n+1}},\text{ deci } S=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

$$\frac{1}{(1-k)^2y^2}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+k}\right]=\frac{1}{2(1-k^2)y^2}=\frac{1}{2(y^2-x^2)}$$ (G.M.XLII pag. 147). **23.** Avem: $S_i=\frac{1}{i}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}\right]$ (4); seria $S_1+S_2+\ldots.+S_i+\ldots.$ are termenii mai mari ca ai seriei armonice, deci este divergentă. Pentru a doua serie observăm că $\sum_1^i\frac{1}{i}<\int_1^i\frac{dx}{x}\log i$ şi că $\lim_{i\to\infty}S_i\leqq\lim_{i\to\infty}\frac{\log i}{i}=\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{i}}{1}=0$, deci seria cu termenii alternativ pozitivi şi negativi este convergentă.

24. Grupul de termeni de rangul k este $U_k=\frac{1}{(k-1)(p+q)+1}+$

$$\frac{1}{(k-1)(p+q)+2}+\ldots+\frac{1}{(k-1)(p+q)+p}-$$

$$\frac{1}{(k-1)(p+q)+p+1}-\ldots.-\frac{1}{k(p+q)};$$ aducând la acelaş

numitor, numitorul în raport cu k este de gradul $(p+q)$, iar numărătorul de gradul $(p+q-1)$; coeficientul primului termen al numărătorului este: $p(p+q)-q(p+q)=p^2-q^2$; deci dacă $p \neq q$ după (17) seria este divergentă. Ea este convergentă pentru $p=q$. **25.** Avem: $tg\,x=cotg\,x-2\,cotg\,2x$; $\frac{1}{2}tg\,\frac{x}{2}=\frac{1}{2}cotg\,\frac{x}{2}-cotg\,x$.... $\frac{1}{2^n}tg\,\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}cotg\,\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}cotg\,\frac{x}{2^{n-1}}$...***

$$S_n=\frac{1}{2^n}cotg\,\frac{x}{2^n} \text{ *** } \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{x}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{tg\,\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{x}.$$

26. Arcele fiind primele determinaţiuni (de ex.) ale arctangentelor, avem: $arctg\,\frac{1}{2n^2}=arctg\,\frac{1}{2n-1}-arctg\,\frac{1}{2n+1}$ *** $S_n=arctg\,1-arctg\,\frac{1}{2n+1}$, deci $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\pi}{4}$. **27.** Deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{sin\,\frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}=1$, se poate alege un rang N, astfel ca pentru $n>N$ să avem: $\pi\frac{sin\,\frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}>1$, deci $n^2 sin\,\frac{\pi}{\sqrt{n}}>n^{\frac{3}{2}}$, sau încă $U_n<n^{-\frac{3}{2}}$, deci plecând dela rangul N, termenii seriei fiind mai mici ca termenii unei serii convergente, este ea însăşi convergentă.

28. Avem $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, dar cum x este o valoare fixă arbitrar dată, observăm că avem: $u_n=\frac{x}{n^2}\cdot\frac{sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)}\leqq\frac{x}{n^2}$; deci seria cu termeni pozitivi u_n, având aceşti termeni inferiori terme-

nilor unei serii convergente, este ea însăşi convergentă. **29.** Se observă că termenul general $u_n = sin\,\frac{\pi}{n}$ este pozitiv şi descreşte cu n. Dealtă parte, seria nu îndeplineşte a doua condiţie necesară de convergenţă (Abel), având $\lim_{n\to\infty}(nu_n)=\pi$.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)=\pi\neq 0$, deci seria este divergentă. **30.** Avem:

$u_n=\frac{x^{2^{n-1}}+1}{x^{2^{n-1}}-1}-\frac{x^{2^n}+1}{x^{2^n}-1}$. Făcând pe n egal cu $1, 2, \ldots, n$ şi însumând obţinem: $S_n=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^{2^n}+1}{x^{2^n}-1}$ *** pentru $x>1$, $\lim_{n\to\infty} S_n=S=\frac{2}{x-1}$; iar pentru $x<1$, $\lim_{n\to\infty} S_n=S=\frac{2x}{x-1}$. Pentru $x=\pm 1$ termenii seriei sunt infiniţi. **31.** Aplicând criteriul de convergenţă al lui *D'Alembert* sau acela al lui *Cauchy* găsim pentru convergenţă că trebue să avem $-1<\frac{x-1}{x^2+1}<+1$, deci: $x<-1$, sau $x>0$. Pentru $x=1$ seria se reduce la primul său termen. **32.** Pentru convergenţă trebue ca să avem $|x|<1$. Pentru însumare observăm în primul rând că: $\sum_0^\infty (n+1)^2 x^n=\sum_1^\infty n^2 x^{n-1}$, apoi că:

$S=\sum_0^\infty n^2 x^n+2\sum_0^\infty n x^n+\sum_0^\infty x^n=x\sum_1^\infty n^2 x^{n-1}+2\sum_1^\infty n x^n+\sum_0^\infty x^n=$

$xS+2\sum_1^\infty n x^n+\sum_0^\infty x^n$; dar pentru $|x|<1$ avem: $\sum_0^\infty x^n=\frac{1}{1-x}$, iar derivata funcţiunii dă: $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_1^\infty n x^{n-1}$, deci $S=\frac{1+x}{(1-x)^3}$. **33.** Pentru convergenţă, aplicând teorema raportului, deducem că trebue să avem $|x|<1$. Insumarea conduce la calculul unor sume de forma: $\sum_1^\infty n^p x^n$, care pot fi calculate folosind derivarea funcţiunilor legate de seria $\Sigma x^n=\frac{1}{1-x}$; sau pe

altă cale observând că $n^p=[(n-1)+1]^p=(n-1)^p+C_p^1(n-1)^{p-1}+$ $C_p^2(n-1)^{p-2}+\ldots+1$ şi că $\sum_1^\infty (n-1)^p x^n = x\sum_1^\infty n^p x^n$ *** $(1-x)$ $S_p=C_p^1 S_{p-1}+C_p^2 S_{p-2}+\ldots$ care ne dă suma căutată în funcţiune de sume analoage. (G. M. XVII şi XXIII). **34.** Termenul general se descompune într'o diferenţă de doi termeni:

$$\frac{x^{2^n-1}}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})}=\frac{x^{2^n-1}}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})}-\frac{x^{2^{n+1}-1}}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})}.$$

Făcând în această relaţie pe n egal cu $1, 2, \ldots, n$ şi însumând, găsim $S_n=1-\frac{x^{2^{n+1}-1}}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})}$; însă $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, *** $S_n=\frac{1-x^{2^{n+1}-1}}{1-x^{2^{n+1}}}$. Dacă $x<1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty} x^{2^{n+1}}=0$, deci $S=\lim_{n\to\infty} S_n=+1$; dacă $x>1$, avem $S_n=\frac{1}{x}\frac{1-x^{-2^{n+1}}}{1-x^{-2^{n+1}}}$ *** $S=\frac{1}{x}$. **35.** Observăm că avem: $\frac{u_n}{(u_0+1)\ldots(u_n+1)}=\frac{1}{(u_0+1)\ldots(u_{n-1}+1)}-\frac{1}{(u_0+1)\ldots(u_n+1)}$ în care făcând $n=1, 2, \ldots, n$ şi însumând, avem:

$$S_n=1-\frac{1}{(u_0+1)(u_1+1)\ldots(u_n+1)}=1-\frac{1}{1+\sum_1^n u_n+\ldots}\ldots$$

$S=\lim_{n\to\infty} S_n=1$; deci seria este convergentă şi are ca sumă pe 1.

36. Observăm că presupunând $b>0$, termenii seriei sunt toţi pozitivi; pentru ca termenul general al seriei să tindă către zero, trebue ca $\alpha<1$. Termenul general poate fi scris subt forma: $u_n=\frac{1}{b+\frac{1}{n}}\times\frac{1}{n^{1-\alpha}}$. Seria cu termenul general $v_n=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$ este convergentă dacă $\alpha<0$, iar numerele $\beta_n=\frac{1}{b+\frac{1}{n}}$ formează

un şir crescător având ca limită pe $\frac{1}{b}$ când n creşte nemărginit; deci după corolarul Regulei lui *Abel*, seria cu termenul general $u_n = \beta_n v_n$ este asemenea convergentă pentru $\alpha < 0$. In cazul când b este negativ, $b = -b'$, avem: $-u_n = \frac{1}{b'}\left(1 + \frac{1}{b'_n - 1}\right) \cdot \frac{1}{n^{1-\alpha}}$. Aceleaşi concluziuni. **37.** Termenii seriei cu termenul general $v_n = \frac{n}{2n^2+1}$, pentru $n > 2$, sunt mai mari decât ai seriei cu termenul general $u_n = \frac{1}{2n+1}$, iar termenii seriei $\sum_1^\infty u_n$ sunt termenii de rang impar ai seriei armonice pentru $n \geqq 1$, deci seria $\sum_1^\infty u_n$ fiind divergentă, seria $\sum_1^\infty v_n$ este deasemenea divergentă. Pentru a doua parte, avem: $S'_n - S_n = \sum_1^n (v_n - u_n)$, iar $v_n - u_n = \frac{n-1}{(2n+1)(2n^2+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{3}{2n+1}\right]\left[1 - \frac{1}{2n^2+1}\right] \cdot \frac{1}{n^2}$; şi observând că seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$ este convergentă, şi că numerele $\alpha_n = \left(1 - \frac{3}{2n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{2n^2+1}\right)$ sunt crescătoare cu n şi au o limită egală cu 1, urmează după corolarul *Regulei lui Abel* că seria cu termenul general $(v_n - u_n)$ este convergentă. **38.** Observând că $\frac{n^2+n+3}{n(n+1)} = 1 + \frac{3}{n(n+1)} = 1 + \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}$ şi că $\frac{(p+1)^2}{p} = p + 2 + \frac{1}{p}$ ***

$$E_p = \sum_1^p \left[\frac{n^2+n+3}{n(n+1)}\right] - \frac{(p+1)^2}{p} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{3}{p+1}$$ ***

$\lim_{p \to \infty} E_p = 1$. **39.** Avem pentru $x > 0$, $\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6}$ ***

$\sin \frac{\pi}{p} > \frac{\pi}{p} - \frac{\pi^3}{6p^3}$ *** $\sum_3^n \sin \frac{\pi}{p} = \pi \sum_3^n \frac{1}{p} - \frac{\pi^3}{6} \sum_3^n \frac{1}{p^3}$, când n creşte peste orice limită, prima parte a diferenţei creşte peste

orice limită (seria armonică), a doua parte fiind suma unei serii convergente are o limită S', deci $\sum_3^n sin \frac{\pi}{p}$ creşte peste orice limită cu n. Pentru prima sumă observăm că avem: $sin \frac{\pi}{p} = tg \frac{\pi}{p} \cdot cos \frac{\pi}{p} < tg \frac{\pi}{p}$, deci $\sum_3^n tg \frac{\pi}{p} > \sum_3^n sin \frac{\pi}{p}$, deci şi S_n creşte peste orice limită cu n. Convergenţa seriei $S_n - S_n' = \sum_3^n 2\, tg \frac{\pi}{p} sin^2 \frac{\pi}{2p} = \sum_3^n \frac{1}{2} \frac{tg \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \cdot \left(\frac{sin \frac{\pi}{2p}}{\frac{\pi}{2p}} \right)^2 \frac{\pi^3}{p^3}$, se deduce din convergenţa seriei $\sum_3^\infty \frac{\pi^3}{p^3}$. Observăm că $\alpha_n = \left(\frac{sin \frac{\pi}{2p}}{\frac{\pi}{2p}} \right)^2$ formează un şir crescător cu limita *1*; deci seria cu termenul general $v_n = \alpha_n u_n$ (unde $u_n = \frac{\pi^3}{p^3}$) este convergentă; apoi observăm că β_n fiind un şir continuu descrescător şi că $\lim_{n \to \infty} \beta_n = 1$, deducem că seria cu termenul general $v'_n = \beta_n v_n$ este deasemenea convergentă. Pentru sumele mai generale $S_n = \sum_{p=3}^n \left(tg \frac{\pi}{p} \right)^\alpha = \sum_{p=3}^n \left(\frac{tg \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \right)^\alpha \cdot \frac{\pi^\alpha}{p^\alpha}$ şi $S'_n = \sum_{p=3}^n \left(\frac{sin \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \right)^\alpha \cdot \frac{\pi^\alpha}{p^\alpha}$ se deduce că ele sunt convergente pentru $\alpha > 1$. Pentru diferenţa $S_n - S'_n$ se observă că ea poate fi scrisă subt forma: $S_n - S'_n = \sum_{p=3}^n \left(\frac{tg \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \right)^\alpha \cdot \frac{1 - cos^\alpha \frac{\pi}{p}}{\left(\frac{\pi}{p} \right)^2} \cdot \pi^{\alpha+2} \cdot \frac{1}{p^{\alpha+2}}$, etc. **40.** Avem: $\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}} = \frac{sin \widehat{OB_n A_n}}{sin \widehat{OA_n B_n}}$,

acest raport fiind totdeauna finit şi diferit de zero. Când A_n tinde către O raportul precedent tinde către $\frac{sin\,CO\,y}{sin\,CO\,x}$. In cazurile particulare considerate, când $\overline{OA_n} = sin\,\frac{\pi}{n}$, cele două serii sunt divergente (29); iar când $\overline{OA_n} = sin^2\frac{\pi}{n}$, cele două serii sunt convergente, convergenţa seriei cu termenul general $u_n = sin^2\frac{\pi}{n} = \left(\frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{n^2}$ rezultând din convergenţa seriei cu termenul general $v_n = \frac{1}{n^2}$.

41. Considerând seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{n}$, avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, deci $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ având o limită determinată când $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; deci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$ *** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

42. Considerăm seria cu termenul general $u_n = n!$ Avem: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$; deci raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ creşte peste orice limită cu n. *** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. **43.** Considerăm seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{log\,n}$. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{log\,n}{log\,(n+1)}$ *** $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{log\,n}{log\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ *** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{log\,n}} = 1$; deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{log\,n} = 1$. **44.** Avem $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$ care mai poate fi scris subt forma următoare:

$u_n = \frac{-1}{\sqrt{n}\cdot[2\sqrt{n(n-1)}+2n-1]}$; deci $|u_n| = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left[2\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2-\frac{1}{n}\right]} =$

$\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right]^2} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, deci seria Σu este convergentă,

Dar $S_n - S_1 = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \ldots + (S_2 - S_1) = \sum_1^n u_n$, deci $\lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_1^n u_n$, adică S_n tinde către o limită finită când n creşte peste orice limită. **45.** Considerăm seriile cu termenii generali $u_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$ şi $v_n = n^{p+1}$. Avem relaţia: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ care dă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{C_{p+1}^1 n^p - C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots} = \frac{1}{p+1}.$$

XV. 1. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. **2.** $e^x(1-3x^2-x^3)$. **3.** $e^{e^x}.e^x$. **4.** $e^{(a+x)^2}[2(a+x)\sin x + \cos x]$. **5.** $1+\mathrm{L}x$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **7.** $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. **8.** $-\frac{2}{\sin 2x}$. **9.** $\frac{1}{\cos x}$. **10.** $\frac{ab}{a^2\cos^2\frac{1}{2}x - b^2\sin^2\frac{1}{x}x}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **12.** $\frac{\cos x}{(a+b\cos x)^2}$. **13.** $\frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$. **14.** $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. **15.** $\frac{nbx^{n-1}}{(a+bx^n)\mathrm{L}(a+bx^n)}$. **16.** $n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left[1+\mathrm{L}\frac{x}{n}\right]$. **17.** $\frac{x^{\frac{1}{x}}[1-\mathrm{L}x]}{x^2}$. **18.** Punând $tgx = u$, prima funcţiune devine: $y = \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}$, găsim: $y'_u = \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}\left[-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{L}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}-1}\right]\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ deci: $y'_{tgx} =$

$(\sin x)^{\cos x}\cos^2 x\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\,\mathrm{L}(\sin x)\right]$. In acelaşi fel punând $z=(\cos x)^{\sin x}$, găsim cu aceleaşi transformări $z'_{tg\,x}=(\cos x)^{\sin x}\cos^2 x\left[\cos x\,\mathrm{L}(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$. **19.** Avem succesiv: $y'=ae^{ax}$, $y''=a^2e^{ax}$ şi observând că dacă punem $y^{(p)}=a^p e^{ax}$ avem derivând: $y^{(p+1)}=aa^p e^{ax}=a^{p+1}e^{ax}$ *** $y^{(n)}=a^n e^{ax}$. **20.** Avem succesiv: $y'=(ax+1)e^{ax}$; $y''=(a^2x+a)e^{ax}$; $y'''=(a^3x+3a^2)e^{ax}$; presupunând că am verificat că $y^{(p)}=(a^p x+pa^{p-1})e^{ax}$ şi derivând găsim $y^{(p+1)}=[a^{p+1}x+(p+1)a^p]e^{ax}$ *** $y^{(n)}=(a^n x+na^{n-1})e^{ax}$. **21.** Avem succesiv: $y'=[\mathrm{P}+\mathrm{P}']e^x$; $y''=[\mathrm{P}+2\mathrm{P}'+\mathrm{P}'']e^x$ şi prin procedeul de mai sus, găsim $y^{(n)}=[\mathrm{P}+\mathrm{C}_n^1\mathrm{P}'+\mathrm{C}_n^2\mathrm{P}''+\ldots+\mathrm{C}_n^p\mathrm{P}^{(p)}+\ldots+\mathrm{C}_n^n\mathrm{P}^{(n)}]e^x$. In cazul când n este mai mic decât gradul polinomului, toţi termenii parantezei rămân; în cazul când n este mai mare decât gradul m, ultimul termen al desvoltării din paranteză este acela care conţine pe $\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}^{(m)}(x)$, care este o constantă, termenii următori fiind zero. **22.** Găsim: $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$. **23.** Punem $e^x=u$. Avem: $y'=e^x f'_u$; $y''=e^x f'_u+2e^{2x}f''_u$, iar derivata a n^a este o expresiune, de aceeaşi formă conţinând n termeni: $y^{(n)}=e^x f'_u+\frac{a_2}{2!}e^{2x}f''_u+\ldots+\frac{a_p}{p!}e^{px}f^{(p)}_u+\ldots+\frac{a_n}{n!}e^{nx}f^{(n)}_u$ (I) coeficienţii a_2, $a_3,\ldots,a_n$ rezultând din operaţia derivării succesive şi fiind independenţi de expresiunea funcţiunii $f(u)$, deci ei pot fi determinaţi luând o funcţiune $f(u)$ de forma cea mai simplă. Luând de exemplu $f(u)+u^z$, unde z este un număr întreg pozitiv. Identitatea (I) devine în cazul acestei funcţiuni: $z^n e^{xz}=ze^{xz}+\frac{a_2}{2!}z(z-1)e^{xz}+\frac{a_3}{3!}z(z-1)(z-2)e^{xz}+\ldots.+\frac{a_m}{m!}z(z-1)\ldots(z-m+1)e^{xz}+\ldots$ *** $z^n=z+\frac{a_2}{2!}z(z-1)+\frac{a_3}{3!}z(z-1)(z-2)+\ldots+\frac{a^m}{m!}z(z-1)\ldots(z-m+1)+\ldots+\frac{a_n}{n!}z(z-1)\ldots(z-n+1)$. Făcând în această relaţiune succesiv pe $z=2,3,\ldots,m,\ldots$ găsim: $a_2=2^n-\mathrm{C}_2^1 1^n$; $a_3=3^n-\mathrm{C}_3^1 2^n+\mathrm{C}_3^2 1^n$; $a_4=4^n-\mathrm{C}_4^1.3^n+\mathrm{C}_4^2.2^n-\mathrm{C}_4^1.1^n$ şi în general dacă presu-

punem că până la a_m coeficienții sunt dați de o relație care generalizează pe precedentele, putem arăta, plecând dela relația $a_{m+1}=(m+1)^n - C_{m+1}^m a_m - C_{m+1}^{m-1} a_{m-1} - \ldots - C_{m+1}^3 a_3 - C_{m+1}^2 a_2 - C_{m+1}^1$ (II), că a_{m+1} este dat de o relație de același fel. Plecând dela relația (II) și ținând seamă de identități dintre numerele combinărilor găsim: $a_{m+1}=(m+1)^n - C_{m+1}^1 m^n + C_{m+1}^2 (m-1)^n + \ldots \pm C_{m+1}^{m-1} 2^n \mp C_{m+1}^m 1^n$. Relația fiind adevărată pentru $m=4$, ea este adevărată din aproape în aproape până la indicile n. **24.** Avem: $LE = \frac{L(1-\sin x)}{tg\,x}$ * * * $\lim_{n\to 0} LE =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -1 \text{ * * * } \lim_{x\to 0} E = \frac{1}{e}.$$

25. Avem:

$$LE = \frac{L\left(2-\frac{x}{a}\right)}{cotg\,\frac{\pi x}{2a}} \text{ * * * } \lim_{x\to a} LE = \lim_{x\to a} \frac{\frac{-\frac{1}{a}}{2-\frac{x}{a}}}{\frac{-\frac{\pi}{2a}}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}} = +\frac{2}{\pi} \text{ * * *}$$

$\lim_{x\to a} E = e^{\frac{2}{\pi}}$. **26.** Avem: $E = e^x \times E_1$ * * * $\lim_{x\to 0} E = \lim_{x\to 0} e^x \times$

$$\lim_{x\to 0} E_1 = \lim_{x\to 0} E_1 = \lim_{x\to 0} \frac{1+e^x+xe^x}{3(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x+e^x}{6e^x} = \frac{1}{6}.$$

27. Avem: $\lim_{x\to 1} LE = \lim_{x\to} \frac{L(x-1)}{\left(\frac{1}{Lx}\right)} = \lim_{x\to 1} x \times \lim_{x\to 1} \left[-\frac{(Lx)^2}{x-1}\right] =$

$$\lim_{x\to 1}\left[-\frac{2Lx.\frac{1}{x}}{1}\right] = 0; \quad \lim_{x\to 1} E = 1.$$

28. Avem: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} LE =$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{L(\sin x+\cos x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}{-\sin x} = +1 \text{ * * * } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} E = e.$$

29. Avem: $\lim_{x\to 0} \mathrm{LE} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} (\cos\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}$ *** $\lim_{x\to 0} \mathrm{E} = e^{-\frac{1}{2}}$.

30. $\lim_{x\to 0} \mathrm{LE} = -\frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{tgax}{\sin 2bx} = -\frac{a^2}{2b^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 ax \cos 2bx} =$

$= -\frac{a^2}{2b^2}$ *** $\lim_{x\to 0} \mathrm{E} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$. **31.** $\lim_{x\to\infty} \mathrm{LE} = -\frac{a}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{tg\frac{a}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)} =$

$= -\frac{a^2}{2} \lim_{x\to\infty} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{a}{x}} = -\frac{a^2}{2}$ *** $\lim_{x\to\infty} \mathrm{E} = e^{-\frac{a^2}{2}}$. **32.** $\lim_{n\to\infty} \mathrm{LE} = ax$

*** $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = e^{ax}$. **33.** Să punem $x-a=u$; $y-b=v$ expresiunea devine: $\mathrm{E} = \frac{(v+b)^2 \sin u + (u+a)^2 \sin v}{(v+b)\,tgu + (u+a)\,tgv} = \frac{(u+a)^2}{(u+a)} \times \frac{\sin u}{u} \times \frac{u}{tgu} \times \mathrm{E}_1$,

unde $\mathrm{E}_1 = \frac{\left(\frac{v+b}{u+a}\right)^2 + \left(\frac{\sin v}{\sin u}\right)^2}{\frac{v+b}{u+a} + \frac{tgv}{tgu}} = \frac{\left(\frac{v+b}{u+a}\right)^2 + \frac{\sin v}{v} \cdot \frac{u}{\sin u} \cdot \frac{v}{u}}{\left(\frac{v+b}{u+a}\right) + \frac{tgv}{v} \cdot \frac{u}{tgu} \cdot \frac{v}{u}}$, ur-

mează că este suficient să găsim limita lui $\frac{v}{u}$, când v şi u tind către zero; dar $\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} \frac{v}{u} = \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} v'_u = \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} \left(-\frac{e^u+2(u+a)}{e^v+2(v+b)}\right) =$

$= -\frac{1+2a}{1+2b}$ *** $\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} \mathrm{E} = \frac{2(b^3-a^3)+b^2-a^2}{2(b^2-a^2)+b-a} =$

$\frac{2b^2+2ab+2a^2+2b^2+2a}{2b+2a+1}$. (R. M. T. IV).

34. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \mathrm{L}a = \mathrm{L}a$. **35.** In acelaşi fel găsim $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = \mathrm{L}\left(\frac{a}{b}\right)$. **36.** Avem $\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(\mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty}$

$\frac{a^{\frac{1}{n}} \mathrm{L}a + b^{\frac{1}{n}} \mathrm{L}b}{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \mathrm{L}\, ab = \mathrm{L}\,(\sqrt{ab})$ *** $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = \sqrt{ab}$.

37. Generalizarea chestiunii precedente; găsim $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = \sqrt[p]{a_1 . a_2 \ldots a_p}$. **38.** Avem: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = \frac{1}{\Sigma a_i} \times \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 + \Sigma \frac{1}{na_i + b_i}} \right] \times \lim_{n\to\infty} (n\Sigma a_i + \Sigma b_i)^2 . \Sigma \frac{1}{(na_i + b_i)^2} = \frac{1}{\Sigma a_i} \left[(\Sigma a_i)^2 \lim_{n\to\infty} \Sigma \left(\frac{n}{na_i + b_i} \right)^2 + 2\Sigma a_i \Sigma b_i \lim_{n\to\infty} \Sigma \frac{1}{(na_i + b_i)^2} + (\Sigma b_i)^2 \lim_{n\to\infty} \Sigma \frac{1}{(na_i + b_i)^2} \right] = \Sigma a_i \times \Sigma \frac{1}{a_i}$. **39.** Putem arăta că E este de-acelaşi ordin de mărime cu n. Considerăm seria cu termenul general $u_n = \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$. Avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \times \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{4} e$ *** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \infty$. **40.** Considerând seriile cu termenii generali: $u_n = \sqrt[n]{n!}$ şi $v_n = n$ avem: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}}{n - (n-1)}$, dar $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n-1)!}}{\sqrt[n]{n^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} : \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$. Asemenea, având: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - u_{n-p}}{v_n - v_{n-p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-p]{(n-p)!}}{n - (n-p)} = \frac{1}{p} \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-p]{(n-p)!} \right]$ *** $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_2 = p . \frac{1}{e}$. **41.** Avem: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = p$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{p-1}}{n} = \ldots = p! \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. **42.** Considerând seriile cu termenii generali $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ şi $v_n = n$, avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}}{n-(n-1)}$; dar $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \; *^* \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} = e$. (G. M. XLII. p. 69).

43. Aplicând regula lui *Hôpital* şi ţinând seamă de condiţiunile puse asupra limitelor găsim: $m = n = -3$, $p = -2$, iar ca limite respectiv: $-\frac{1}{3!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{3!}$. **44.** Pentru prima expresie, avem $\lim_{m\to\infty} \mathrm{E} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e}{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \lim_{m\to\infty} \frac{-\frac{1}{m+1} + \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{m}\right)}{-\frac{1}{m^2}} = e \times \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{m(m+1)}}{\frac{1}{m^3}} =$

$\frac{1}{2} e \times \lim \frac{-m^3}{m(m+1)^2} = -\frac{e}{2}$. O cale mai uşoară pentru ajungerea la rezultat, mai cu seamă pentru ultimele două relaţiuni, se obţine folosind desvoltările în serii la un rang suficient, plecând dela desvoltarea lui $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. [G. M. XLII p. 35).

45. Găsim $y' = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2+1)^3}$ şi avem următorul tablou al variaţiunii:

x	$-\infty$	-1		$+1$		$+2$	$+\infty$
y'_x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	descreşte	m	creşte	M	descr.	m	creşte
	$+\infty$	$\frac{1}{2}(\mathrm{L}2-1)$		$\frac{1}{2}(\mathrm{L}2+3)$		$\frac{1}{2}\mathrm{L}5+1$	$+\infty$.

46. Găsim $y'=\frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$; când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$ trecând prin 0, $+1$, $+2$, funcţiunea y creşte trecând prin maximul $y(+1)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\mathrm{L}\,2-\frac{\pi}{8}$ şi apoi descreşte trecând prin minimul $y(+2)=3-\frac{3}{2}\,\mathrm{L}\,5-\frac{1}{2}\,arctg\,2$, dela care creşte la $+\infty$. Curba reprezentativă prezintă un punct de inflexiune în origina axelor de coordonate, un altul pentru $0<x<1$ şi un al treilea pentru $1<x<2$. **47.** Pentru ca funcţiunea y să fie reală, trebue să facem să varieze x dela 1 la $+\infty$. Avem $y'=\frac{5(x+2)(x-2)(x-3)}{8(x^2-1)(x^2+4)}$; y creşte dela $-\infty$ la maximul $y(+2)=1+\mathrm{L}\sqrt{8}+\frac{3}{8}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{9}-\frac{3}{2}\,arctg\,1$, apoi descreşte până la minimul $y(+3)=1+\mathrm{L}\sqrt{13}+\frac{3}{8}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\,arctg\,\frac{3}{2}$, ca să crească apoi la $+\infty$. **48.** Avem $y'=\frac{2x^2(x-1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$; y creşte dela $-\infty$ la maximul $y(+1)=+3$; apoi descreşte până la minimul $y(+2)=6-3\,\mathrm{L}\,5-arctg\,2$, de unde creşte la $+\infty$. Curba reprezentativă a variaţiunii are punctele de inflexiune pentru aceleaşi valori ale lui x ca la (46), derivatele prime ale celor două funcţiuni diferind printr'un factor constant. **49.** Avem $y'=\frac{x^2(x^2-1)(2x-1)}{(x^2+x+1)^2}$; y descreşte dela $+\infty$ la un minim $y(-1)=10-\frac{14}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}$; apoi creşte până la maximul $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}+\mathrm{L}\,\frac{7}{4}+\frac{14}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}$, de unde descreşte până la un al doilea minim $y(+1)=-\frac{10}{3}+\mathrm{L}\,3+\frac{14}{\sqrt{3}}\,arctg\,\sqrt{3}$ şi

creşte până la $+\infty$. **50.** Găsim: $y'=\frac{(x+3)(x-2)(x-3)}{(x^2+1)^2}$; când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$, y descreşte dela $+\infty$ până la un minim $y(-3)=\mathrm{L}\sqrt{10}-8\,arctg\,3-\frac{5}{2}+\mathrm{C}$; apoi creşte până la un maxim $y(+2)=\mathrm{L}\sqrt{5}+8\,arctg\,2+5+\mathrm{C}$, apoi descreşte din nou atingând un minim $y(+3)=\mathrm{L}\sqrt{10}+8\,arctg\,3+\frac{7}{2}+\mathrm{C}$, de unde creşte la $+\infty$. Se vede că, pentru ca maximul să fie cel cerut, trebue să luăm $\mathrm{C}=-8\,arctg\,2$. **51.** Funcţiunea este reală pentru toate valorile lui x cuprinse în intervalele $(-\infty, -1-\varepsilon)$; $(+1+\varepsilon, +\infty)$. Avem: $y'=2\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-1}$, când x tinde către $\pm\infty$, y' tinde către $+2$; când $x\to-1$ sau $x\to+1$, y' tinde către $-\infty$. In primul interval x crescând dela $-\infty$ la $(-1-\varepsilon)$, y creşte până la un maximum $y(-2)=-3\,\mathrm{L}3$, dela care descreşte apoi la $-\infty$. In al doilea interval, când x creşte dela $+1+\varepsilon$ la $+\infty$, y descreşte dela $+\infty$ până la un minim $y(+2)=8+3\,\mathrm{L}3$ de la care apoi creşte la $+\infty$. Pentru $x>1$ funcţiunea y are tot timpul valoare pozitivă mai mare sau cel puţin egală cu valoarea minimului $8+3\,\mathrm{L}3$, deci $x-2\geq\frac{3}{2}\mathrm{L}3\left[\frac{x-1}{x+1}\right]$ pentru $x>1$ de unde rezultă inegalitatea cerută. (G. M. XLII pag. 37). **52.** Inegalitatea cerută poate fi pusă subt forma echivalentă: $\mathrm{L}\left[\frac{(m-n+1)^n}{m(m-n)^{n-1}}\right]>0$. Considerăm funcţiunea: $y=\mathrm{L}\frac{(x-n+1)^n}{x(x-n)^{n-1}}$, x luând valori de la n la $+\infty$. Studiind variaţia ei vedem că y în acest interval este o funcţiune continuu descrescătoare, de oarece $y'=\frac{-n(n-1)}{x(x-n)(x-n+1)}<0$ pentru $n>1$ şi $x>n$; dar $y(n)=+\infty$ iar $y(+\infty)=0$, deci y este pozitivă pentru $x>n>1$, de unde rezultă inegalitatea cerută. (G. M. XXXIX pag. 113). **53.** Avem $y=e^{x\,\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

în care $\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ este real în intervalele $(-\infty, -\varepsilon)$; $(+1, +\infty)$; deci y este real şi pozitiv în intervalele $(-\infty, -\varepsilon)$; $(+1, +\infty)$. Punând $v = x\,\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, observăm că avem:

$$\lim_{x\to-\infty} v = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\mathrm{L}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1+\varepsilon}\right) = -1 \quad ***$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \frac{1}{\varepsilon};\quad \lim_{x\to+\infty} v = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathrm{L}(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{1-\varepsilon}\right) = -1 \quad ***$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{1}{\varepsilon};\quad \lim_{x=-\varepsilon\to 0} v = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = 0 \quad ***$$

$\lim_{x=-\varepsilon\to 0} y = 1$ şi $y(+1) = 0$. De altă parte, avem $y' = y\left[\frac{1}{x-1} + \mathrm{L}\frac{x-1}{x}\right]$ şi observăm că funcţiunea $u = \frac{1}{x-1} + \mathrm{L}\frac{x-1}{x}$, având $u' = \frac{-1}{x(x-1)^2}$ deci $u' > 0$ în intervalul $(-\infty, -\varepsilon)$ şi $u' < 0$ în intervalul $(+1+\varepsilon, +\infty)$, este crescătoare în primul interval şi descrescătoare în al doilea şi cum $u(\pm\infty) = 0$, urmează că $u > 0$ în ambele intervale, deci $y' > 0$ în ambele intervale. Aşadar funcţiunea y creşte în primul interval dela $\frac{1}{e}$ la $+1$ şi asemenea creşte în al doilea interval dela 0 la $\frac{1}{e}$. Rezultă de aci pentru $n \geqq 1$ că $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$. (G. M. XLIII p. 663). **54.** Avem: $z' = z\,(y-x)\,\mathrm{L}(ab^2)$ sau $z' = z(c-2x)\,\mathrm{L}(ab^2)$, unde $z > 0$. Dacă $ab^2 > 1$, pentru $x < \frac{c}{2}$ avem $z' > 0$ şi $z' < 0$ pentru $x > \frac{c}{2}$, deci z este *maximum* pentru $x = \frac{c}{2}$; dacă $ab^2 < 1$ avem $z' < 0$ pentru $x < \frac{c}{2}$ şi $z' > 0$ pentru $x > \frac{c}{2}$, deci z *minim* pentru $x = \frac{c}{2}$. Când $ab^2 = 1$, $z' = 0$ oricare ar fi x şi y, deci z este o constantă ceeace se vede direct scriind

pe z sub forma: $z=b^{-c^2}\ (ab)^{xy}$ (G. M. III). **55.** Avem: $u_{n+1}=\frac{(n+1)}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}$, care este termenul general al seriei lui e.

56. Avem $\frac{n^2}{n!}=\frac{n}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$ *** $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!}=2e$.

A doua metodă: Considerăm seria: $e^{e^x}=\Sigma\frac{e^{nx}}{n!}$; al doilea membru derivat de două ori, dă pentru $x=0$ tocmai seria considerată, deci suma ei $S=\underset{x=0}{(e^{e^x})^{(2)}}=\underset{x=0}{[(e^x+1)\,e^{e^x+x}]}=2e$.

57. Avem: $\frac{n^3}{n!}=\frac{n^2}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$ *** $S=5e$. *A doua metodă.* Plecând dela seria considerată în al doilea caz şi luând a treia derivată avem: $S=\underset{x=0}{(e^{e^x})^{(3)}}=$ $\underset{x=0}{[(e^x+2)\,e^{e^x+2x}+(e^x+1)e^{e^x+x}]}=5e$. **58.** Avem: $\frac{n^4}{n!}=\frac{n^3}{(n-1)!}=$ $\frac{1}{(n-4)!}+\frac{6}{(n-3)!}+\frac{7}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$ *** $S=15e$.

A doua metodă. Suma seriei este $[e^{e^x}]^{(4)}_{x=0}=[(e^x+3)\,e^{e^x+3x}+3$ $(e^x+2)e^{e^x+2x}+(e^x+1)\,e^{e^x+x}]_{x=0}=15e$. **59.** Suma seriei este egală cu $(e^{e^x})^{(p)}_{x=0}=\sum_{n=1}^{p}\frac{a_n}{n!}$, unde $a_n=p^n-C_p^1(p-1)^n+C_p^2(p-2)^n$..(23).

60. Avem: $\sum_1^\infty\frac{(n-1)^3}{n!}=\sum_1^\infty\frac{n^3}{n!}-3\sum_1^\infty\frac{n^2}{n!}+3\sum_1^\infty\frac{n}{n!}-\sum_1^\infty\frac{1}{n!}=e$. [Mathesis XL]. **61.** Termenii seriei sunt descrescători şi avem $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\times 0=0$, deci prima condiţiune necesară de convergenţă îndeplinită. Insă a doua condiţiune necesară (Abel) de convergenţă la seriile cu termeni pozitivi nu este îndeplinită: $\lim_{n\to\infty}(n\,u_n)=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0$. Seria este divergentă.

62. Avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{e}$; deci seria este convergentă pentru $x<e$ şi divergentă pentru $x>e$. Pentru $x=e$, avem: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ şi se vede studiind funcţiunea $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ în intervalul $(0,+\infty)$ că $e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tot timpul, deci seria este divergentă şi în cazul $x=e$. **63.** Punând: $u_n=\frac{1}{a^n}\cdot v_n$ avem $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}$, dar $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)+\frac{1}{a}}\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ *** $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{a}$. Seria este convergentă dacă $a>e$ şi divergentă dacă $a<e$. In cazul $a=e$, găsim, aplicând criteriul lui *Raabe-Duhamel*, că seria este divergentă. (G. M. XL p. 274). **64.** Studiind variaţiunea funcţiunii reale $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ în intervalul $(0,+\infty)$, deducem inegalitatea $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}<e$ pentru $x<x'$ *** $u_n>0$, deci $S_n=\sum_1^n u_i>0$. Insă sumele S_n formează un şir de numere pozitive crescător, iar $S_n=-\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^3-\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\right]+\ldots+\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]+\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$, cum $\alpha_n=\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]<0$ *** $S_n<\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}<e$, deci S_n fiind limitat superior admite o limită, iar seria dată este convergentă având o limită inferioară lui e. (G. M. XLII, 102). **65.** Avem $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-m}{n+m}\right]^n=$

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{\frac{n+m}{2m}}\right]^{\frac{n+m}{2m}}\right\}^{2m}\times\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{2m}{n+m}\right]^{-m}=\left(\frac{1}{e}\right)^{2m};$$

deci seria $\Sigma\left[\frac{n-m}{n+m}\right]^n$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$; dar seria $\Sigma\left[\frac{n-m}{n+m}\right]^{n^2}$ este convergentă căci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-m}{n+m}\right]^n=\left(\frac{1}{e}\right)^{2m}<1$ pentru $m>0$. **66.** Punând

$$u=\mathrm{L}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^{2n}=\frac{\mathrm{L}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]}{\frac{1}{2n}},$$

găsim $\lim_{n\to\infty} u=-2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}=-2\pi$, de unde deducem

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-sin\frac{\pi}{n}}{1+sin\frac{\pi}{n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^{2n}=e^{-2\pi}$. Seria cu termenul general $u_n=\left[\frac{1-sin\frac{\pi}{n}}{1+sin\frac{\pi}{n}}\right]^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty} u_n=e^{-2\pi}\neq 0$; deci $v_n=\sum_{n=2}^{n} u_n$ creşte peste orice limită cu n şi ca urmare seria cu termenul general $w_p=v_n^p$ este divergentă. **67.** Avem succesiv, $u_1=\frac{a}{1}u_0+\frac{b}{1!}$; $u_2=\frac{a^2}{2!}u_0+(a+1)\frac{b}{2!}$; $u_3=\frac{a^3}{3!}u_0+\frac{a^3-1}{a-1}\frac{b}{3!}$. Admiţând relaţia pentru indicile p, $u_p=\frac{a^p}{p!}u_0+\frac{a^p-1}{a-1}\frac{b}{p!}$, deducem: $u_{p+1}=\frac{a^{p+1}}{(p+1)!}u_0+\frac{a^{p+1}-a+a+1}{a-1}\frac{b}{(p+1)!}=\frac{a^{p+1}}{(p+1)!}u_0+\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\frac{b}{(p+1)!}$;

cum ea este verificată pentru $p=3$, ea este adevărată din aproape în aproape pentru n. $***$ $S_n=\sum_1^n u_n=\left(\sum_1^n \frac{a^n}{n!}\right)u_0+\frac{b}{a-1}\left[\sum_1^n \frac{a^n}{n!}-\sum_1^n \frac{1}{n!}\right]$ $***$ $S=\lim_{n\to\infty} S_n=e^a u_0+\frac{b}{a-1}(e^a-e)$.

Observând că $\lim_{a\to 1}\frac{e^a-e}{a-1}=\lim_{a\to 1}\frac{e^a}{1}=e$ $***$ $\underset{\substack{a=1\\b=-1}}{S}=e(u_0-1)$.

68. Avem după formula lui *Mac-Laurin* desvoltarea: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $(0<\theta<1)$. Dacă n este impar, restul (când ne oprim cu desvoltarea la termenul $\frac{x^n}{n!}$) este pozitiv oricare ar fi x real şi nu este nul decât pentru $x=0$, deci $e^x\geqq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, egalitatea având loc numai pentru $x=0$. (G. M. XXXII p. 181). **69.** Fie $ax^2+bx+c_1=0$, $a>0$, o ecuaţiune de gradul al doilea cu coeficienţi întregi. Pentru ca e să poată fi rădăcina unei astfel de ecuaţiuni, trebue să avem: $ae+\varepsilon ce^{-1}+b=0$ unde: $c_1=\varepsilon c$ $c>0$ iar ε are valoarea $+1$ sau -1. Introducând în locul lui e şi e^{-1} desvoltările respective, avem: $a\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(ac)!}+\frac{1}{(ac+1)!}+\ldots\right)+\varepsilon c\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\pm\frac{1}{(ac)!}\mp\ldots\right]+b=0$ sau amplificând cu $(ac)!$ şi înlocuind suma întregilor obţinuţi cu N avem: $N+a\left(\frac{1}{ac+1}+\frac{1}{(ac+1)(ac+2)}+\ldots\right)+\varepsilon' c\left(\frac{1}{ac+1}-\frac{1}{(ac+1)(ac+2)}+\ldots\right)=0$.

Dar $\frac{1}{ac+1}+\frac{1}{(ac+1)(ac+2)}+\ldots<\frac{1}{ac+1}+\frac{1}{(ac+1)^2}+\ldots=\frac{1}{ac+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{ac+1}}=\frac{1}{ac}$ deci prima paranteză poate fi înlocuită

cu $\frac{\theta}{ac}$, unde θ este un număr cuprins între 0 şi 1. In acelaş fel, avem: $\frac{1}{ac+1}-\frac{1}{(ac+1)(ac+2)}+\ldots<\frac{1}{ac+1}+\frac{1}{(ac+1)(ac+2)}+\ldots<\frac{1}{ac}$, deci a doua paranteză poate deasemenea să fie înlocuită cu $\frac{\theta'}{ac}$ unde θ' este un număr cuprins între 0 şi 1. Aşadar, trebue să avem: $N+\frac{\theta}{c}+\varepsilon'\frac{\theta'}{a}=0$, ceeace nu poate avea loc. **70.** Calculând derivatele parţiale, avem: $f''_{xy}(x,y)-f'_x(x,y)f'_y(x,y)=x^{2y-1}y^{2x}+x^{2y}y^{2x-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)x^{2y}y^{2x}$. **71.** Scriind condiţiunile enunţului găsim

$$b\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1}{\left(\frac{r}{n}\right)}=a\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \quad *^*_* \quad b=\frac{ar}{n}\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1}.$$

Găsim imediat $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{bn}{a}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty} r\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r}{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r-1}=\frac{re^r}{e^r-1}$.

Punând $z=\frac{re^r}{e^r-1}$, avem $z'_r=\frac{e^r[e^r-1-r]}{(e^r-1)^2}>0$, deci când r descreşte, z descreşte deasemenea şi avem: $\lim_{r\to 0} z=$

$\lim_{r\to 0}\frac{r}{e^r-1}\times\lim_{r\to 0}e^r=\lim_{r\to 0}\frac{1}{e^r}=1.$

XVI. 1. Modulele coeficienţilor fiind 1, 3, 1, 2, 2 avem $M=3$, deci $\alpha=\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}=\frac{1}{3001}=0{,}00033$. **2.** Este suficient să luăm $\varepsilon=0{,}00011$. **3.** Observăm ca $|A_0|=1$ şi că modulurile câturilor celorlalţi coeficienţi către A_0 sunt: 3, 5, 2, 6, 1, deci $M=6$; avem: $|x|>\sqrt[5]{200\,000}=10\sqrt[5]{2}$ şi $|x|>\frac{M+\alpha}{\alpha}=$

$\frac{6.5}{0,5}=13$ luând $\alpha=0,5$, deci putem lua $|x|>13$. **4.** Este suficient ca punctul z să rămână în afara cercului cu centrul în origină şi cu raza egală cu 12,2. **5.** Aplicând desvoltarea *Taylor* după puterile lui h, avem: $P(z_0+h)-P(z_0)=A_0 h^5+A_1 h^4+A_2 h^3+A_3 h^2+A_4 h$ unde: $A_0=\frac{P^{(5)}(z_0)}{5!}=7$; $A_1=\frac{P^{(4)}(z_0)}{4!}=35 z_0$; $A_2=\frac{P^{(3)}(z_0)}{3!}=70 z_0^2-8$; $A_3=\frac{P^{(2)}(z_0)}{4!}=70 z^3-24 z_0+1$; $A_4=\frac{P'(z_0)}{1}=35 z_0^4-24 z_0^2+2 z_0-2$. Dacă A este cel mai mare din modulele coeficienţilor A_k, trebue să luăm $|h|\leqq\frac{0,0001}{A+0,0001}$. Când $z_0=1$, găsim $A=62$; când $z_0=2+i$, avem: $A=\sqrt{315^2+746^2}$. **6.** Inlocuind în relaţia identică dată pe x prin $-x$ avem: $P(-x)\equiv k P(+x)$ şi înmulţindu-le obţinem $P(x)\equiv k^2 P(+x)$ *** $k=\pm 1$. **7.** In identitatea: $x^n+p_1 x^{n-1}+p_2 x^{n-2}+\ldots+p_{n-1} x+p_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ făcând $x=i$, avem egalitatea particulară: $i^{n-1}[i(1-p_2+p_4-p_6+\ldots)+(p_1-p_3+p_5-p_7+\ldots)]=(-1)^n(x_1-i)(x_2-i)\ldots(x_n-i)$ observând că $i^{n-2}=i^n:i^2=-i^n$; $i^{n-4}=i^n:i^4=+i^n$,... Asemenea făcând pe $x=i$, avem relaţia analoagă şi făcând produsul lor avem (ţinând seamă că $i^{n-1}.(-i)^{n-1}=(-1)^{n-1}(i^2)^{n-1}=(-1)^{2(n-1)}=+1$, şi că parantezele sunt conjugate) relaţia cerută. **8.** Făcând în relaţia dată pe x egal cu $x+a$, $x+2a$, $x+3a$,... succesiv deducem că oricare ar fi n întreg pozitiv, avem şi relaţia $f(x+na)=f(x)$. Deci, dacă x_0 este o rădăcină a polinomului, adică $f(x_0)\equiv 0$, avem şi $f(x_0+na)\equiv 0$; deci în acest caz polinomul admiţând un număr de rădăcini mai mare decât gradul său, s'ar reduce identic la zero. Aşadar, relaţiunea dată nu poate avea loc decât în cazul când s'ar reduce la o constantă. **9.** Procedând ca în problema precedentă, avem relaţiunea: $\frac{f(x+na)}{\varphi(x+na)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sau încă succesiv $\frac{f(x+na)}{\varphi(x+na)}-k=\frac{f(x)}{\varphi(x)}-k$ $(k\neq 0)$;

$\frac{f(x+na)-k\varphi(x+na)}{\varphi(x+na)} \equiv \frac{f(x)-k\varphi(x)}{\varphi(x)}$ (1). Să presupunem acum că există o valoare x_0 a lui x pentru care polinomul $f(x)-k\varphi(x)$ fiind nul, nici unul din polinoamele $f(x)$ şi $\varphi(x)$ nu se anulează. In acest caz, dacă $\varphi(x)$ nu este identic nul, cu excepţia unui număr mai mic decât gradul lui $\varphi(x)$, există un şir nelimitat de valori pentru n, astfel că $\varphi(x_0+na)\neq 0$. Pentru toate aceste valori ale lui n trebue să avem: $f(x_0+na)-\varphi(x_0+na)\equiv 0$, deci polinomul $f(x)-k\varphi(x)$ este identic nul k fiind arbitrar, deci $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt identici nuli. Aşadar presupunerea noastră n'are loc decât în cazul când fracţiunea dată nu există. Acum dacă orice rădăcină a ecuaţiunei $f(x)-k\varphi(x)=0$, este rădăcină şi ecuaţiunei $\varphi(x)=0$, ea este rădăcină şi ecuaţiunii $f(x)=0$. Cum însă k este o constantă arbitrară, trebue ca $\varphi(x)$ să admită un şir nelimitat de rădăcini şi deci $f(x)$ asemenea. Aşadar, relaţiunea (1) nu poate avea loc decât în cazul când $\frac{f(x)-k\varphi(x)}{\varphi(x)}$ se reduce la o constantă, de unde rezultă proprietatea cerută.

10. Scriind polinomul sub forma: $f(x)=(x+a_1)x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_n$, urmează că aşezând în prima coloană elementele $(x+a_1)$, a_2, $a_3,\ldots a_{n-1}$, a_n rămâne să formăm tabloul dreptunghiular cu n linii şi $(n-1)$ coloane, din care formând determinanţii cu $(n-1)$ linii şi $(n-1)$ coloane să avem x^{n-1} $(-1)x^{n-2}$; $(-1)^2x^{n-3},\ldots,(-1)^{n-2}x$, $(-1)^{n-1}$. Rezultatul este:

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & -1 & 0 & 0\ldots 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0\ldots 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1\ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0\ldots x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0\ldots 0 & x \end{vmatrix}$$

11. In raport cu x, determinantul Δ este un polinom de gradul n şi se anulează pentru $x=a_1$; $a_2;\ldots;$ a_n; deci el nu poate diferi de un alt polinom cu aceleaşi rădăcini, decât printr'un alt factor constant. **12.** In raport cu x determi-

nantul Δ este un polinom de gradul $n-1$ şi ia aceeaşi valoare constantă $\Delta_n(a_1, a_2, \ldots a_n)$ — determinantul lui *Vandermonde* al cătimilor $a_1, a_2, \ldots a_n$ — pentru n valori ale lui x, deci el se reduce la acea constantă. **13.** In raport cu x determinantul Δ este un polinom de gradul cel mult $(n-1)$ şi este nul pentru n valori ale lui x, deci el este *identic nul.* **14.** Să însemnăm cu $\frac{A}{B}$ valoarea independentă de x a fracţiunii date şi să presupunem de exemplu că gradul m al numărătorului este mai mare ca gradul n al numitorului. Avem, scriind condiţiunea dată: $B(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-n-1}x^{n+1})+(A_{m-n}B-AB_0)x^n+A_{m-n+1}B-AB_1)x^{n-1}+\ldots+(A_mB-AB_n)\equiv 0$; dar pentru ca un polinom să fie identic nul trebue ca toţi coeficienţii lui să fie nuli; deci în primul rând B fiind $\neq 0$, să avem $A_0=A_1=\ldots=A_{m-n-1}=0$, adică polinoamele să fie de acelaş grad; apoi: $\frac{A_{m-n}}{B_0}=\frac{A_{m-n+1}}{B_1}=\ldots=\frac{A_m}{B_n}=\frac{A}{B}$, adică coeficienţii termenilor de acelaş grad trebue să fie proporţionali. **15.** Insemnăm ca mai sus cu $\frac{A}{B}$ valoarea fracţiei independentă de x şi y. Ordonând numărătorii după puterile lui x, avem $\frac{P_0(y)x^m+P_1(y)x^{m-1}+\ldots.+P_m(y)}{Q_0(y)x^n+Q_1(y)x^{n-1}+\ldots.+Q_n(y)}=\frac{A}{B}$. Presupunând că am fixat o valoare arbitrară pentru y, oricare ar fi ea, suntem în cazul problemei precedente, deci $m=n$ şi $\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}=\frac{P_1(y)}{Q_1(y)}=\ldots=\frac{P_m(y)}{Q_m(y)}=\frac{A}{B}$, de unde rezultă că coeficienţii termenilor asemenea din numărătorul şi numitorul fracţiunii date, trebue să fie respectiv proporţionali. In cazul fracţiunii $\frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}$, procedând identic reducem la condiţiunea ca fracţiunile: $\frac{P_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$ să aibă valorile lor egale cu $\frac{A}{B}$ independentă de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; şi din aproape în aproape la concluzia de mai sus. **16.** $P(x)$ fiind polinomul de gradul m,

a cărui valoare vrem s'o calculăm pentru $x=x_1$ şi $Q(x)$ fiind un polinom de gradul $n<m$, care are ca rădăcină pe x_1, prin împărţire putem stabili totdeauna relaţiunea identică $P(x)\equiv Q(x)\,q(x)+R(x)$; $R(x)$ fiind restul împărţirii, deci un polinom cel mult de gradul $(n-1)$, iar $q(x)$ câtul împărţirii. Deoarece am presupus că $Q(x_1)=0$, avem din relaţia identică: $P(x_1)=R(x_1)$. Proprietatea are aplicaţiuni întinse; între altele calculul valorii maximului sau minimului, formarea şirului lui *Rolle*, etc. In cazul $P(x)\equiv x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x-1$ şi $x_1=1+\sqrt{2}$, luăm $Q_1(x)=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$ şi avem: $P(1+\sqrt{2})=20(1+\sqrt{2})+6$; când $x_2=1+i$ luăm $Q(x)=x^2-2x+2$ *** $R(x)=5x-9$, deci $P(x_2)=R(1+i)=-4+5i$. Calculul poate fi ordonat observând că $x_1^2=2x_1+1$. Avem $P(x_1)=x_1^3(-x_1+7)-2x_1^2+x_1-1=x_1^2(-x_1^2+7x_1-2)+x_1-1=x_1^2(5x_1-3)+x_1-1=x_1[5x_1^2-3x_1+1]-1=x_1[7x_1+6]-1=7x_1^2+6x_1-1=20x_1+6=20(1+\sqrt{2})+6$. Asemenea şi în al doilea caz.

17. Avem: $P'_x(\sin x, \sin y)=P'_u\cos x=\dfrac{u\,P'_u(u,v)}{tg\,x}$ *** $tg\,x\,P'_x(\sin x, \sin y)=u\,P'_u$; asemenea $P'y(\sin x, \sin y)=P'_v\cos y=\dfrac{v\,P'_v}{tg\,y}$ *** $tg\,y\,P'_y(\sin x, \sin y)=v\,P'_v$ unde am pus $\sin x=u$, $\sin y=v$. Dar $P(u,v)$ fiind omogen şi de gradul n în raport cu u, v, avem relaţia lui *Euler*: $u\,P'_u+v\,P'_v=m\,P(u,v)$ *** $tg\,x\,P'_x(\sin x, \sin y)+tg\,y.\ P'_y(\sin x, \sin y)=m\,P(\sin x, \sin y)$. In cazul polinomului omogen: $P(\cos x, \cos y)$ de gradul m, avem relaţiunea: $cotg\,x\,P'_x(\cos x, \cos y)+cotg\,y.\ P'_y(\cos x, \cos y)=-m\,P(\cos x, \cos y)$. Asemenea, în cazul polinomului omogen: $P(tg\,x, tg\,y)$, de gradul m, avem relaţiunea: $\sin 2x\,P'_x(tg\,x, tg\,y)+\sin 2y\,P'_y(tg\,x, tg\,y)=2m\,P(tg\,x, tg\,y)$. Chestiunea poate fi generalizată pentru polinoame $P(\sin x_1, \sin x_2, \ldots, \sin x_n)$ omogene de gradul m şi analoagele. **18.** Avem: $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=\dfrac{x^n-1}{x-1}$, deci dacă $x_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ este o rădăcină a ecuaţiunii binoame $x^n-1=0$, deducem: $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+$

$x+1=\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)$. Făcând în această relaţie $x=1$, obţinem:

(I) $n=\prod_{k=1}^{n-1}\left[\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$; dar: $\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)-\sin\frac{2k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)=2\sin\frac{k\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{k\pi}{n}\frac{\left[\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right]}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\left[\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right]^{2k}}{\left[\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right]^{n}}$. Introducând în relaţiunea (I), găsim:

$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$. **19.** Inlocuind pe x cu $z^{\frac{1}{5}}$ în ecuaţiunea dată, avem: $z^{\frac{2n}{5}}+p_n z^{\frac{n}{5}}+p_{2n}=0$. Dacă $n=5m$, ecuaţiunea cerută este: $(z^{2m}+p_n z^m+p_{2n})^5=0$. Dacă n este prim cu 5, având $z^{\frac{2n}{5}}\equiv -p_n z^{\frac{n}{5}}-p_{2n}$, calculăm succesiv pe $z^{\frac{3n}{5}}$; $z^{\frac{4n}{5}}$, $z^{\frac{5n}{5}}$ înlocuind la fiecare dată $z^{\frac{2n}{5}}$ prin valoarea lui. Găsim astfel: $z^n=\left(+p_n^4-3p_n^2p_{2n}+p_{2n}^2\right)z^{\frac{n}{5}}+p_n p_{2n}\left(p_n^2-2p_{2n}\right)$ (α). Ridicând pe (α) la patrat, înlocuind pe $z^{\frac{2n}{5}}$, obţinem a doua relaţiune: $z^{2n}=\left(-p_n^9+8p_n^7p_{2n}-21p_n^5p_{2n}^2+20p_n^3p_{2n}^3-5p_n p_{2n}^4\right)z^{\frac{n}{5}}+\left(-p_n^8p_{2n}+7p_n^6p_{2n}^2-15p_n^4p_{2n}^3+10p_n^2p_{2n}^4-p_{2n}^5\right)$ (β). Coeficientul lui $z^{\frac{n}{5}}$ din (β) este divizibil cu coeficientul lui $z^{\frac{n}{5}}$ din relaţia (α), deci amplificând relaţia (α) cu câtul lor şi adunând cu (β) avem ecuaţiunea cerută:

$$z^{2n}+\left(p_n^5-10p_n^3p_{2n}+5p_n p_{2n}^2\right)z^n+p_{2n}^5=0 \quad (A)$$

Pentru ca ecuaţiunea (A) să aibă rădăcini multiple, trebue să aibă divizor comun cu derivata ei, deci dacă $p_{2n} \neq 0$, obţinem condiţiunea: $\left(p_n^5 - 10\,p_n^3 p_{2n} + 5\,p_n^2 p_{2n}\right)^2 - 4\,p_{2n}^5 = 0$. In cazul când $n = 5m$, ecuaţiunea $z^{2m} + p_n z^m + p_{2n} = 0$ are rădăcini multiple dacă: $p_n^2 - 4\,p_{2n} = 0$ (G. M. XVIII). **20.** Punând $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, avem relaţia: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x - x_i}$; şi înlocuind pe x cu $-a$, avem relaţia cerută.

XVII. 1. Făcând substituţia $x = y + h$, membrul I al ecuaţiunii devine $y^3 + 3(h-2)y^2 + (3h^2 - 12h + 5)y + h^3 - 6h^2 + 5h - 1$. Determinăm pe h, cu condiţia ca termenul în y^2 al polinomului obţinut să dispară, cu alte cuvinte coeficientul său să fie nul. $h - 2 = 0$, $h = 2$. Inlocuind pe h su 2, ecuaţia transformată este $y^3 - 7y - 7 = 0$, iar relaţia între rădăcinile ecuaţiei date şi transformate, $x = y + 2$. **2.** Procedeu analog. $256\,y^4 - 864\,y^2 - 1440\,y - 563 = 0$, $y = x - \frac{5}{4}$. **3.** Procedeu analog. $y^5 - 15y^3 + 37y^2 - 35y + 11 = 0$, $y = x + 1$. **4.** La fel se găseşte $y^m - C_m^2 \cdot 2^2 y^{m-2} + 2\,C_m^3 \cdot 2^3 y^{m-3} - 3\,C_m^4\,2^4 y^{m-4} + \ldots + (-1)^i (1 - i)\,C_m^i\,2^i y^{m-i} + \ldots = 0$, $y = x + 2$. **5.** Facem transformarea $x = \frac{y}{3}$, găsim $y^3 - 2y^2 + 15y - 9 = 0$. **6.** Facem transformarea $x = \frac{y}{5}$ $\therefore$ $y^4 - 50y + 375 = 0$. **7.** Facem transformarea $x = \frac{y}{2}$ $\therefore$ $y^6 - 3y^4 + 8y - 8 = 0$. **8.** $x = \frac{y}{m}$ $\therefore$ $y^m - 5my^{m-2} + 6\,m^{m-2}y - 9\,m^{m-1} = 0$. **9.** Punem $x = \alpha y + \beta$. Găsim $3\alpha^3 y^3 + (9\beta - 2)\alpha^2 y^2 + (9\beta^2 - 4\beta + 6)\alpha y + 3\beta^3 - 2\beta^2 + 6\beta - 1 = 0$. Pentru a face să dispară termenul în y^2, luăm $9\beta - 2 = 0$, $\beta = \frac{2}{9}$; înlocuind în ecuaţiune, avem $9^3\alpha^3 y^3 + 9.3.50\alpha y + 65 = 0$, luând $\alpha = \frac{1}{9}$, ecuaţia devine $y^3 + 150y +$

$65=0$, iar relaţia este $x=\frac{y}{9}+\frac{2}{9}$, sau $y=9x-2$. **10.** Facem substituţia $x=\alpha y+\beta$, obţinem $a_0\alpha^3y^3+(3a_0\beta+a_1)\alpha^2y^2+(3a_0\beta^2+2a_1\beta+a_2)\alpha y+a_0\beta^3+a_1\beta^2+a_2\beta+a_3=0$. Pentru ca termenul în y^2 să dispară trebue $3a_0\beta+a_1=0$, $\beta=-\frac{a_1}{3a_0}$. Inlocuind această valoare, avem $27a_0^3\alpha^3y^3+9a_0(3a_0a_2-a_1^2)\alpha y+27a_0^2a_3-9a_0a_1a_2+2a_1^3=0$. Dacă $\alpha=\frac{1}{3a_0}$, rămâne $y^3+3(3a_0a_2-a_1^2)y+27a_0^2a_3-9a_0a_1a_3+2a_1^3=0$. Relaţia între rădăcinile celor două ecuaţii este $x=\frac{y}{3a_0}-\frac{a_1}{3a_0}$ sau $y=3a_0x+a_1$. **11.** Procedeu analog, punem $y=\alpha x+\beta$, se găseşte $2\alpha^4y^4+(8\beta+1)\alpha^3y^3+(12\beta^2+3\beta)\alpha^2x^2+(8\beta^3+3\beta^2-1)\alpha x+2\beta^4+\beta^3-\beta-1=0$ $\therefore$ $\beta=-\frac{1}{8}$ pentru ca termenul în y^3 să nu existe. Inlocuind pe β, rămâne $8^4\alpha^4y^4-6.8^2\alpha^2y^2-31.8^2\alpha y-1795=0$ $\therefore$ $\alpha=\frac{1}{8}$. Ecuaţia transformată este $y^4-6y^2-248y-1795=0$, iar relaţia între rădăcini, $x=\frac{y-1}{8}$ $\therefore$ $y=8x+1$. **12.** Se lucrează la fel ca în exerciţiul precedent: $x=\alpha y+\beta$. Ecuaţia transformată este $y^4+2(8a_0a_2-3a_1^2)y^2+8(a_1^3-4a_0a_1a_2+8a_0^2a_3)y-3a_1^4+16a_0a_1^2a_2-64a_0^2a_1a_3+256a_0^3a_4=0$, iar relaţia între rădăcinile celor două ecuaţiuni, $x=\frac{y}{4a_0}-\frac{a_1}{4a_0}$ $\therefore$ $y=4a_0x+a_1$. Când $a_0=2$; $a_1=1$, etc., avem problema precedentă. **13.** Observăm că $\frac{1}{2}$ fiind rădăcină, dacă punem $x=y+\frac{1}{2}$, avem condiţiunea $n=\frac{4m-5}{16}$ şi obţinem: $y^4+\left(m-\frac{3}{2}\right)y^2=0$ *** $y=0$, $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}-m}$ *** $x=\frac{1}{2}$ rădăcină dublă, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}-m}+\frac{1}{2}$. **14.** 1) Se face transformarea $x=\frac{1}{y}$ $\therefore$ $3y^3-2y^2+y-1=0$;

2) $x=y^2$ $\therefore$ $y^6-y^4+2y^2-3=0$. **15.** Procedeu analog problemei precedente: $ry^4+qy^3+py^2+1=0$; $y^8+py^4+qy^2+r=0$. **16.** Analog $a_m y^m+a_{m-1}y^{m-1}+\ldots+a_1 y+a_0=0$; $a_0 y^{2m}+a_1 y^{2m-2}+\ldots+a_{m-1}y^2+a_m=0$. **17.** Inlocuim $x^2=y$ $\therefore$. Ecuaţia se scrie $x^2(x-6)+2x-1=0$, $y(x-6)+2x-1=0$ $\therefore$ $x=\dfrac{6y+1}{y+2}$ şi ridicând în ambii membri la patrat, înlocuind pe x^2 cu y, etc., obţinem $y^3-32y^2-8y-1=0$. **18.** Acelaş procedeu ca în exerciţiul precedent. $y=x^2$. Ecuaţia se scrie $y^2-2y+x-3=0$, $x=3+2y-y^2$, $x^2=(3+2y-y^2)^2$ $\therefore$ $y^4-4y^3-2y^2+11y+9=0$. **19.** $y=x^2$, $x(x^2+p)+q=0$, $x=-\dfrac{q}{y+p}$ $\therefore$ $y^3+2py^2+p^2y-q^2=0$. **20.** $x^2=y$; $x(x^4+px^2+q)-r=0$ $x=\dfrac{r}{y^2+py+q}$ $\therefore$ $y^5+2py^4+(p^2+2q)y^3+2pqy^2+q^2y-r^2=0$. **21.** Ordonând după puterile crescânde ale lui x şi înlocuind pe x^2 cu y, obţinem $(A_m+A_{m-2}y+A_{m-4}y^2+\ldots)-x(A_{m-1}+A_{m-3}y+A_{m-5}y^2+\ldots)=0$, $\therefore$ $[(A_m+A_{m-2}y+A_{m-4}y^2+\ldots):(A_{m-1}+A_{m-3}y+A_{m-5}y^2+\ldots)]^2=y$; .... $A_m^2-(A_{m-1}^2-2A_mA_{m-2})y+(A_{m-2}^2+2A_mA_{m-4}-2A_{m-1}A_{m-3})y^2-(A_{m-3}^2+2A_{m-1}A_{m-5}-2A_mA_{m-6}-2A_{m-2}A_{m-4})y^3+\ldots=0$. Coeficientul termenului general este: $A_{m-h}^2+2A_{m-h+2}A_{m-h-2}+2A_{m-h+4}A_{m-h-4}+\ldots-2A_{m-1}A_{m-2h+1}-2A_m-2A_{m-2h+3}-\ldots$ sau $2A_mA_{m-2h}+2A_{m-2}A_{m-2h+2}+\ldots-A_{m-h}^2-2A_{m-1}A_{m-2h+1}-\ldots$ după cum h e cu soţ sau fără soţ. **22.** x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei $d(x)=0$, avem relaţiile $x_1+x_2+x_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=A_{11}+A_{22}+A_{33}$, $x_1x_2x_3=d$. Apoi, observând că D este reciprocul lui d (determinantul ce se obţine înlocuind în d fiecare element prin minorul corespunzător) şi cum reciprocul unui determinat este egal cu valoarea determinantului ridicată la o putere cu 1 mai mică decât ordinul determinantului, $D=d^2$ şi deasemenea din teoria determinanţilor reciproci, minorul corespunzător elementului A_{ij} este egal cu cu $a_{ij}d$. In acest fel putem scrie $D(x)\equiv x^3-(A_{11}+A_{22}+A_{33})x^2+(a_{11}+a_{22}+a_{33})dx-D=0$. Dar,

având în vedere relaţiile scrise, $A_{11}+A_{22}+A_{33}=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $(a_{11}+a_{22}+a_{33})d=(x_1+x_2+x_3)x_1x_2x_3=(x_1x_2).(x_2x_3)+(x_2x_3).(x_3x_1)+(x_3x_1).(x_1x_2)$ şi $D=d^2=x_1^2x_2^2x_3^2=(x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1)$; relaţii care ne arată că x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 sunt radăcinile ecuaţiei $D(x)=0$.

XVIII. 1. Având $\Sigma x_1=0$, ecuaţiunea cerută are rădăcinile $x'_3=x_1+x_2=-x_3$, $x'_2=x_3+x_1=-x_2$, $x'_1=x_2+x_3=-x_1$, se obţine din ecuaţiunea dată prin transformarea $x=-X$, adică $X^3+pX-q=0$. **2.** Insemnând cu X_1, X_2, X_3 rădăcinile ecuaţiunii cerute, avem: $X_1=x_2+x_3=-p_1-x_1$, $X_2=-p_1-x_2$, $X_3=-p_1-x_3$, deci ecuaţiunea cerută poate fi obţinută făcând în ecuaţiunea dată transformarea: $x=-p_1-X$, însă $f(-p_1-X)=f(-p_1)-\frac{X}{1!}f'(-p_1)+\frac{X^2}{2!}f''(-p_1)-\frac{X^3}{3!}f'''(-p_1)$ $\therefore$ $X^3+2p_1X^2+(p_1^2+p_2)X+(p_1p_2-p_3)=0$. **3.** Notăm x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei date. Avem $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Rădăcinile ecuaţiei ce trebue formată sunt x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_4, x_2+x_3, x_2+x_4, x_3+x_4, deci ecuaţia este de gradul VI. Din condiţia $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ rezultă că sunt două câte două egale şi de semne contrare; să le notăm α, $-\alpha$, β, $-\beta$, γ, $-\gamma$. ($\alpha=x_1+x_2$, $\beta=x_1+x_3$, $\gamma=x_1+x_4$). Ecuaţia este $(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)(x-\gamma)(x+\gamma)=0$ sau $(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)=0$ sau punând $x^2=y$, avem o ecuaţie de gradul III în y ale cărei rădăcini sunt α^2, β^2, γ^2. Să formăm această ecuaţie: 1). $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1(x_2+x_3+x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=-2p$. 2). $\Sigma\alpha^2\beta^2=(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)^2+(x_1+x_3)^2(x_1+x_4)^2+(x_1+x_4)^2(x_1+x_2)^2=(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2+(x_1^2+x_1x_4+x_1x_3+x_3x_4)^2+(x_1^2+x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4)^2=[x_1(x_1+x_2+x_3)+x_2x_3]^2+[x_1(x_1+x_3+x_4)+x_3x_4]^2+[x_1(x_1+x_2+x_4)+x_2x_4]^2=(x_2x_3-x_1x_4)^2+(x_3x_4-x_1x_2)^2+(x_2x_4-x_1x_3)^2=\Sigma x_1^2x_2^2-6x_1x_2x_3x_4$ (1). Să calculăm $\Sigma x_1^2x_2^2$. $(\Sigma x_1x_2)^2=\Sigma x_1^2x_2^2+2[x_1x_2x_3^2+x_1^2x_3x_4+x_1x_2x_3x_4+x_1^2x_2x_3+x_1x_3^2x_4+x_1x_2x_3x_4+x_2^2x_3x_4+x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2x_4+x_1x_2x_4^2+$

$x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 + x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4] = \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2$ $[x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1 x_3 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_2 x_3 x_4$ $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1 x_2 x_4 (x_1 + x_2 + x_4)] = \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_4$ $(-x_3) = \Sigma x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2 x_3 x_4$. Deci $\Sigma x_1^2 x_2^2 = p^2 + 2r$, şi înlocuind în (1), $\Sigma \alpha^2 \beta^2 = p^2 + 2r - 6r = p^2 - 4r$. In fine 3). $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2 (x_1 + x_4)^2 = [x_1^3 + x_1^2 (x_2 + x_3 + x_4) +$ $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4]^2 = (-q)^2 = q^2$. Deci ecuaţia în y este $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ $\therefore x^6 + 2px^2 +$ $(p^2 - 4r)x^2 - q^2 = 0$. **4.** Să însemnăm cu: $y_1 = x_1 x_2$, $y_2 = x_1 x_3$ $y_3 = x_1 x_4$, $y_4 = x_2 x_3$, $y_5 = x_2 x_4$, $y_6 = x_3 x_4$ rădăcinile ecuaţiei cerute, care deci este de gradul al 6-lea. Pentru calculul coeficienţilor observăm că avem: $\Sigma y_1 = \Sigma x_1 x_2 = 0$; $\Sigma y_1 y_2 =$ $x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1 x_2 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) +$ $x_1 x_3 x_4 \Sigma x_1 + x_2 x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4) = -x_1 x_2 x_3 x_4 = +1$; $\Sigma y_1 y_2 y_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = (\Sigma x_1 x_2 x_3)^2 -$ $x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1 x_2$; dar: $\Sigma x_1 x_2 x_3 = 0$, $\Sigma x_1 x_2 = 0$ $*^{**}$ $\Sigma y_1 y_2 y_3 = 0$; $\Sigma y_1 y_2 y_3 y_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \Sigma \frac{1}{y_5 y_6} = (-1) \Sigma \left(\frac{1}{y_5}\right) \left(\frac{1}{y_6}\right)$, căci $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 = x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3 = -1$. Dar punând: $y'_i = \frac{1}{y_i}$, avem de calculat coeficientul $\Sigma y'_1 y'_2$ pentru ecuaţiunea corespunzătoare lui $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, care în cazul nostru este tot $x^4 - 1 = 0$; deci $\Sigma y_1 y_2 y_3 y_4 = -1$. Avem deci ecuaţiunea:

$$x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

5. Avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, de unde $x_1^2 = -x_1 x_2 - x_1 x_3$, deci: $x_1^2 - x_2 x_3 = -(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = -p$. Analog se arată $x_2^2 - x_1 x_3 = x_3^2 - x_1 x_2 = -(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = -p$. Ecuaţia cerută având cele trei rădăcini egale cu $-p$, este: $(x + p)^3 = 0$. **6.** Având $c < 0$, $a > 0$ $*^{**}$ $x_1 x_2 x_3 > 0$, $\Sigma x_1 < 0$, deci oricare ar fi semnul lui b, sunt două rădăcini negative şi una pozitivă. (II) $c < 0$, $a < 0$ $*^{**}$ $x_1 x_2 x_3 > 0$, $\Sigma x_1 > 0$. Dacă presupunem că ar fi în acest caz două rădăcini negative, însemnându-le cu $-\alpha$, $-\beta$, γ, avem: $\gamma > \alpha + \beta$. Observând însă că: $\alpha + \beta > \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$, căci $\frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > 0$, deducem că de-

oarece $\gamma > \alpha+\beta$, a fortiori, $\gamma > \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, deci $b=\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)<0$. Dacă însă cele trei rădăcini sunt toate pozitive, avem totdeauna $b>0$. In rezumat: dacă $c<0, a<0, b>0$ trei rădăcini pozitive; dacă $c<0, a<0, b<0$ sunt două rădăcini negative şi una pozitivă. (III) $c>0, a>0$ *** $x_1x_2x_3<0, \Sigma x_1<0$. Dacă presupunem o singură rădăcină negativă şi două pozitive, însemnându-le cu $+\alpha, +\beta, -\gamma$ *** $\gamma>\alpha+\beta$; dealtăparte: $b=\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)=\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\gamma\right)(\alpha+\beta)$ şi cum $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}<\alpha+\beta$ *** $\gamma>\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, deci totdeauna în acest caz $b<0$. Dacă presupunem toate rădăcinile negative, însemnându-le cu $-\alpha, -\beta, -\gamma$ avem: $b=+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma>0$. In rezumat, dacă $c<0, a>0, b<0$ o rădăcină negativă şi două pozitive; $c<0, a>0, b>0$ trei rădăcini negative. (IV) $c>0, a<0$ *** $x_1x_2x_3<0, \Sigma x_1>0$. Dacă toate trei rădăcinile ar fi negative, suma lor ar fi negativă, contrar ipotezei; deci oricare ar fi semnul lui b, ecuaţiunea are în acest caz *o rădăcină negativă* şi *două rădăcini pozitive.*

7. Fie $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$ trei numere în progresie aritmetică. Să vedem dacă putem determina pe α şi β astfel încât ele să reprezinte rădăcina ecuaţiei. Scriind prima relaţie între rădăcini şi coeficienţi, $3\alpha=-27p$, deci $\alpha=-9p$. Din a doua relaţie, $\beta=\sqrt{243p^2-q}$. Aceste valori introduse în ultima relaţie dintre rădăcini şi coeficienţi, o verifică. **8.** Insemnăm cu $\alpha-3\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta, \alpha+3\beta$ rădăcinile. Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ne dau: $4\alpha=10a$, $\alpha=\frac{5a}{2}$; $\beta^2=\frac{15}{4}a^2$; $b=125a^3$; $c=-\frac{275}{4}a^4$. **9.** Fie $x_1=\alpha-\beta$, $x_2=\alpha$, $x_3=\alpha+\beta$ şi $x_4=3\alpha$ cele patru rădăcini ale ecuaţiei propuse. Ţinând seama de forma acestor rădăcini, relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini devin: $6\alpha=-p$, $12\alpha^2-\beta^2=47$, $10\alpha^3-4\alpha\beta^2=72$, $3\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)=q$. Din relaţia a doua scoatem pe β^2 şi introducând în a treia, găsim $19\alpha^3-94\alpha+36=0$ sau $19\alpha^3-76\alpha-18\alpha+36=0$; $19\alpha(\alpha^2-4)-18(\alpha-2)=0$. Deci $(\alpha-2)$

$(19\alpha^2+38\alpha-18)=0$; $\alpha=2$, $\alpha=-1\pm\sqrt{\frac{37}{19}}$, şi pentru β se extrag valori din $\beta^2=12\alpha^2-47$. Introducând aceste valori în relaţiunile de mai sus avem valorile lui p şi q şi asemenea rădăcinile. (G. M. XLII p. 423). **10.** Se notează rădăcinile $\alpha-2\beta$, $\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\beta>0$. Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ne dau succesiv: $\alpha=1$, $\beta=+\sqrt{2}$. Ecuaţia este $(x-1)[(x-1)^2-2][(x-1)^2-8]=0$. Făcând operaţiile în membrul I, găsim $a=20$, $b=-9$, $c=-7$, (G. M. XXXII p. 423). **11.** Se notează rădăcinile ca în exerciţiul precedent. Găsim utilizând relaţiile între rădăcini şi coeficienţi $\alpha=0$, $s=0$, $q=0$, $4p^2-25r=0$. **12.** Să facem substituţia $x=y+h$. Obţinem: $y^5+(5h+p_1)y^4+(10h^2+4p_1h+p_2)y^2+(10h^3+6p_1h^2+3p_2h+p_3)y^2+(5h^4+4p_1h^3+3p_2h^2+2p_3h+p_4)y+h^5+p_1h^4+p_2h^3+p_3h^2+p_4h+p_5=0$ sau

$$y^5+(5h+p_1)y^4+\frac{1}{6}f'''(h)y^3+\frac{1}{2}f''(h)y^2+f'(h)y+f(h)=0.$$

Punând $h=-\frac{p_1}{5}$ dispare termenul în y^4, iar ecuaţia devine

$$y^5+\frac{1}{6}f'''\left(-\frac{p_1}{5}\right)y^3+\frac{1}{2}f''\left(-\frac{p_1}{5}\right)y^2+f'\left(-\frac{p_1}{5}\right)y+f\left(-\frac{p_1}{5}\right)=0.$$

Suntem deci în cazul exerciţiului precedent. Condiţiile cerute sunt $f\left(-\frac{p_1}{5}\right)=0$, $f''\left(-\frac{p_1}{5}\right)=0$ şi $\left[f'''\left(-\frac{p_1}{5}\right)\right]^2-225$ $f'\left(-\frac{p_1}{5}\right)=0$. **13.** Fie α prima rădăcină, β raţia progresiunei; primele două relaţii între rădăcini şi coeficienţi dau: $n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\beta=-p_1$, $\sum_{j,k=1}^{n-1}(\alpha+j\beta)(\alpha+k\beta)=p_2$. Pentru a calcula membrul I al ultimei egalităţi, observăm că $\sum_{j,k=1}^{n-1}(\alpha+j\beta)(\alpha+k\beta)\equiv A\alpha^2+B\alpha\beta+C\beta^2$. Să determinăm pe A, B, C. Dacă $\beta=0$, cum în membrul I al identităţii sunt C_n^2 termeni, avem $\frac{n(n-1)}{2}=A$. Dacă $\alpha=0$, $C=\sum_{j,k=1}^{n-1}jk=\frac{1}{2}$

$\sum_{j=1}^{n-1} j(1+2+...+j-1+j+1+...+n)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j(\sum_{k=1}^{n-1} k-j)=\frac{1}{2}$
$\sum_{j=1}^{n-1} j\sum_{k=1}^{n-1} k-\sum_{j=1}^{n-1} j^2=\frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{n(n-1)}{24}$
$[3n^2-7n+2]=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1)$. Dacă $\alpha=\beta$.
$A+B+C=\sum_{j,k=1}^{n-1}(j+1)(k+1)=2.1+3(1+2)+4(1+2+3)+...$
$+n(1+2+...+n-1)$. Avem: $(i+1)(1+2+...+i)=\frac{i(i+1)^2}{2}$. Deci, $A+B+C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^3+2i^2+i)=$
$\frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)^2n^2}{4}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+\frac{(n-1)n}{2}\right]=\frac{1}{24}n(n-1)$
$(n+1)(3n+2)$. De unde, înlocuind pe A, C prin valorile găsite, aflăm $B=\frac{n(n-1)^2}{2}$. Deci a doua relație dintre rădăcini și coeficienți este: $\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\frac{n(n-1)^2}{2}\alpha\beta+\frac{1}{24}n(n-1)$
$(n-2)(3n-1)\beta^2=p_2$ (1). Extrăgând valoarea lui β din prima relație, $\beta=-\frac{2p_1+2n\alpha}{n(n-1)}$, și înlocuind pe β în (1), obținem o relație pe care o satisface α; această relație ne arată că α este rădăcina ecuației de gradul II a problemei. Notând α ultima rădăcină a ecuației dată și $\alpha-\beta$, $\alpha-2\beta$,... celelalte rădăcini, se repetă raționamentul precedent pentru a arăta că și ultimul termen al progresiei este rădăcină a ecuației de gradul II. **14.** Dacă $m=2p+1$, să reprezentăm rădăcinile astfel: $\frac{\alpha}{\beta^p}, \frac{\alpha}{\beta^{p-1}}, ... \frac{\alpha}{\beta}, \alpha, \alpha\beta, ..., \alpha\beta^{p-1}, \alpha\beta^p$. Făcând produsul rădăcinilor găsim $\alpha^m=-a_m$ (a_m fiind ultimul termen); $\alpha=\sqrt[m]{-a_m}$.

15. Fie $x_1x_2=1$. Din $x_1x_2x_3=-\frac{a_3}{a_0}$, $x_3=-\frac{a_3}{a_0}$. Deci $x_1+x_2+x_3=-\frac{3a_1}{a_0}$, dă $x_1+x_2=\frac{a_3-3a_1}{a_0}$; iar $x_3(x_1+x_2)+x_1x_2=\frac{3a_2}{a_0}$ *** $x_3\left(\frac{a_3-3a_1}{a_0}\right)=\frac{3a_2}{a_0}-1$ *** $x_3=\frac{3a_2-a_0}{a_3-3a_1}$. **16.** Avem

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=3$, $(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=2$, $x_1x_2x_3x_4=p$ şi $x_1+x_2=1$. Rezultă $x_3+x_4=-1$, $x_1x_2+x_3x_4=4$, $x_3x_4-x_1x_2=2$. Din aceste ultime două relaţii, $x_3x_4=3$, $x_1x_2=1$. Ecuaţia care dă pe x_1, x_2 este $x^2-x+1=0$, iar ecuaţia care dă pe x_3, x_4 este $x^2+x+3=0$; în fine $p=(x_1x_2)(x_3x_4)=3$. **17.** Avem $x_1+x_2+x_3+x_4=-p$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=2$, $(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=-10$, $x_1x_2x_3x_4=-8$ şi $x_1x_2=4$. Rezultă $x_3x_4=-2$ şi $(x_1+x_2)(x_3+x_4)=0$, $2(x_3+x_4)-(x_1+x_2)=-5$. Dacă $x_1+x_2=0$, $x_3+x_4=-\frac{5}{2}$. Ecuaţia care dă x_1, x_2 este $x^2+4=0$, ecuaţia care dă pe x_3, x_4: $x^2+\frac{5}{2}x-2=0$ şi $p=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=\frac{5}{2}$. Dacă $x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=5$ ecuaţia ce dă x_1, x_2: $x^2-5x+4=0$, ecuaţia ce dă x_3, x_4: $x^2-2=0$, iar $p=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=-5$. **18.** Fie $x_1=2x_2$, relaţiile între rădăcini şi coeficienţi dau: (1) $3x_2+x_3+x_4=0$, (2) $7x_2^2-x_3x_4=6$, (3) $2x_2^3-x_2x_3x_4=1$, $2x_2^2x_3x_4=a$; din (2) şi (3) deducem $5x_2^3-6x_2+1=0$ sau $(x_2-1)(5x_2^2+5x_2-1)=0$, de unde deducem pe x_2; x_3 şi x_4 sunt daţi de (1) şi (2), iar $a=2x_2^2(7x_2^2-6)$. **19.** Fie $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ecuaţia dată. Trebue să avem $\frac{2}{m}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$. Deoarece avem dată o relaţie între inversele rădăcinilor, să facem transformarea $x=\frac{1}{y}$; $dy^4+cy^3+by^2+ay+1=0$. Între rădăcinile acestei ecuaţii avem relaţia $y_1+y_2=y_3+y_4=p$. Să notăm deasemenea $y_1y_2=q$ $y_3y_4=r$; rezultă $p=-\frac{c}{2d}$, $q+r+p^2=\frac{b}{d}$, $pr+pq=-\frac{a}{d}$ $qr=\frac{1}{d}$. Din relaţia a doua $q+r=\frac{b}{d}-\frac{c^2}{d^2}$, iar din a treia, $q+r=\frac{2a}{c}$, deci $\frac{b}{d}-\frac{c^2}{4d^2}=\frac{2a}{c}$; $4bdc-c^3=8ad^2$. **20.** Ridicăm la patrat relaţia $x_1+x_2+x_3=-p$ şi ţinem seama de $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$ şi $x_1^2=x_2^2+x_3^2$. Găsim

$x_1 = \pm\sqrt{\frac{p^2-2q}{2}}$. x_2 şi x_3 sunt daţi de ecuaţia $y^2+(p+x_1)y-\frac{r}{x_1}=0$. Relaţia de condiţie se deduce din $x_1^2=x_2^2+x_3^2$, care se mai scrie $x_1^2=(x_2+x_3)^2-2x_2x_3$ sau $x_1^2=(p+x_1)^2+\frac{2r}{x_1}$ şi înlocuind pe x_1, $p(p^2-2q)\pm p^2\sqrt{\frac{p^2-2q}{2}}+2r=0$. *** $(p^3-2pq+2r)^2-p^4(p^2-2q)=0$. **21.** Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi sunt $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$, $x_1x_2x_3=-q$, iar condiţia, $x_1^3=x_2^3+x_3^3$. Ridicând prima egalitate la cub, $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=0$ sau $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0$ pentrucă $x_1+x_2=-x_3$ etc. sau $2x_1^3+3q=0$, $x_1=\sqrt[3]{-\frac{3q}{2}}$. Deoarece $x_2+x_3=-x_1$, $x_2x_2=-\frac{q}{x_1}$; x_2 şi x_3 sunt daţi de ecuaţia $y^2+x_1y-\frac{q}{x_1}=0$. Relaţia de condiţie între coeficienţi rezultă din $x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=p$ în care făcând înlocuirile găsim: $q^2+12p^3=0$ sau $q=0$. **22.** Din relaţiile $x_1+x_2+x_3=0$, $ax_1+bx_2+cx_3=0$ se scoate $\frac{x_1}{b-c}=\frac{x_2}{c-a}=\frac{x_3}{a-b}$. Să notăm λ valoarea comună a rapoartelor, să extragem valorile lui x_1, x_2, x_3 şi să le introducem în $x_1x_2x_3=-q$. Avem: $\lambda^3(b-c)(c-a)(a-b)=-q$ *** $\lambda=-\sqrt[3]{\frac{q}{(b-c)(c-a)(a-b)}}$. Rezultă $x_1=-\sqrt[3]{\frac{q(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}}$, etc. Relaţia de condiţie se deduce din $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$, înlocuind pe x_1, x_2, x_3: $q^2[ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2]^3=p^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$. **23.** Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi se pot scrie astfel: $(x_1+x_2+x_3)+x_4=-p$, $x_4(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$, $x_1x_2x_3+x_4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-q$, $(x_1x_2x_3)x_4=r$. Ţinând seama de condiţii, prima şi ultima relaţie dau $x_4=-\frac{p}{2}$, $x_4=\sqrt[4]{r}$; deci $p^4-16r=0$; iar a doua şi a treia relaţie, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-x_4^2$ şi $x_4^3-x_4^3=-q$.

Rezultă $q=0$, iar ecuaţia este $x^4+px^3+\frac{p^4}{16}=0$, având rădăcina $x_4=-\frac{p}{2}$. Celelalte rădăcini sunt date de ecuaţia $x^3+\frac{p}{2}x^2-\frac{p^2}{4}x+\frac{p^3}{8}=0$. **24.** Punând $x_1+x_2=\alpha$, $x_1x_2=u$, $x_3x_4=v$ şi scriind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi se găsesc ecuaţiile la care trebue să satisfacă α: $\alpha^6+2p\alpha^4+(p^2-4r)\alpha^2-q^2=0$, $m\alpha^3+2n\alpha^2+m(p-2n)\alpha+mq=0$ între care eliminând pe α, punând $\alpha^2=\beta$, obţinem (1) $\beta^3+2p\beta^2+(p^2-4r)\beta-q^2=0$, $m\alpha\beta+2n\beta+m(p-2n)\alpha+mq=0$. Din ultima ecuaţie, $\alpha=-\frac{2n\beta+mq}{m(\beta+p-2n)}$, unde ridicând la patrat şi înlocuind avem: $m^2\beta^3+2[m^2(p-2n)-2n^2]\beta^2+[m^2(p-2n)^2-4mnq]\beta-m^2q^2=0$. Din aceasta şi din (1) aflăm $\beta=\frac{m(n^2m-mnp-nq+rm)}{n(m^2+n)}=\frac{ms}{n(m^2+n)}$, $(s=n^2m-mnp-nq+rm)$. Substituind valoarea lui β în (1) avem relaţia cerută. $m^3s^3+2m^2np(m^2+n)s^2+mn^2(p^2-4r)(m^2+n)^2s-n^3q^2(m^2+n)^3=0$ (G. M. XXXIII. p. 71). **25.** *a)* A, B, C fiind unghiurile triunghiului, avem $tg(A+B)=-tgC$ deoarece $A+B+C=\pi$ sau $tgA+tgB=(1-tgA\,tgB)(-tgC)$ $\ast\ast\ast$ $tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$, adică $p=r$; $q\neq0$ pentrucă altfel ecuaţia s'ar reduce la $x^3+px^2=0$, adică ar avea două rădăcini nule, ceia ce nu se poate. *b)* Avem $tg\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=cotg\frac{C}{2}$, $\frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}=\frac{1}{tg\frac{C}{2}}$ $\therefore$ $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$ $\therefore$ $q=1$. *c)* Din $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}$, deducem $\frac{tg\frac{A}{4}+tg\frac{B}{4}}{1-tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}}=\frac{1-tg\frac{C}{4}}{1+tg\frac{C}{4}}$ $\therefore$ $tg\frac{A}{4}+tg\frac{B}{4}+tg\frac{C}{4}+$

$tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}+tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}+tg\frac{C}{4}tg\frac{A}{4}=1+tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}$ . . .

$q-p=1-r$. **26.** Deoarece $\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}+\frac{A_3}{2}+\frac{A_4}{2}=\pi, tg\left(\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}\right)=$ $-tg\left(\frac{A_3}{2}+\frac{A_4}{2}\right)$, rezultă $\Sigma tg\frac{A_1}{2}=\Sigma tg\frac{A_1}{2}tg\frac{A_2}{2}tg\frac{A_3}{2}$; $p_1=p_3$. 2) $cos\left(\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}\right)=-cos\left(\frac{A_3}{2}+\frac{A_4}{2}\right)$; $cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}+cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_4}{2}=$ $sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}+sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_4}{3}$. Ridicând la patrat și înlocuind patratele cosinusurilor prin sinusuri, deducem: $2\,sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}$ $sin\frac{A_3}{2}sin\frac{A_4}{2}-2+\Sigma sin^2\frac{A_1}{2}=2\,cos\frac{A_1}{2}cos\frac{A_2}{2}cos\frac{A_3}{2}cos\frac{A_4}{2}$. Insă $\Sigma sin^2\frac{A_1}{2}=\left(\Sigma sin\frac{A_1}{2}\right)^2-2\Sigma sin\frac{A_1}{2}sin\frac{A_2}{2}=p_1^2-2p_2$ și membrul I devine $2p_4-2+p_1^2-2p_2$. Pentru calculul membrului II, ridicăm la patrat și avem $cos^2\frac{A_1}{2}$ $cos^2\frac{A_2}{2}cos^2\frac{A_3}{2}cos^2\frac{A_4}{2}=\left(1-sin^2\frac{A_1}{2}\right)\left(1-sin^2\frac{A_2}{2}\right)$ $\left(1-sin^2\frac{A_3}{2}\right)\left(1-sin^2\frac{A_4}{2}\right)=\left(1-sin\frac{A_1}{2}\right)\left(1-sin\frac{A_2}{2}\right)..... \times$ $\left(1+sin\frac{A_1}{2}\right)\left(1+sin\frac{A_2}{2}\right)...=(1+p_1+p_2+p_3+p_4)(1-p_1+$ $p_2-p_3+p_4)$. Relația căutată este $(2p_4-2+p_1^2-2p_2)^2=4$ $[(1+p_2+p_4)^2-(p_1+p_3)^2]$. (G. M. X. p. 88). **27.** Dacă rădăcinile ecuației sunt reale, punctele corespunzătoare nu pot forma un triunghiu echilateral decât dacă se confundă, în acest caz $p=q=0$, cele trei rădăcini sunt în origină; dacă ecuația are o rădăcină reală și două imaginare: α, $a+bi$, $a-bi$, relațiile între rădăcini și coeficienți dau $\alpha+2a=0$. Fie A, B, C punctele ce reprezintă în plan numerele α, $a+bi$, $a-bi$. B, C sunt simetrice față cu $x'x$. Fie D intersecția dreptelor $x'x$, BC. Deoarece $a=-\frac{\alpha}{2}$, $OD=-\frac{\alpha}{2}$.

Triunghiul ABC fiind echilateral, cum $BC=2b$, rezultă $AB=2b$, deci din triunghiul dreptunghiu ABD, $b=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Deci rădăcinile ecuaţiei sunt α, $\alpha\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\alpha\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, adică rădăcinile cubice ale unităţii multiplicate cu α. Ecuaţia este deci de forma $x^3-\alpha^3=0\,\therefore p=0,=-\alpha^3$. **28.** Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi sunt $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=0$, $x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-a$, $x_1x_2x_3x_4=ab$. Rezultă $x_1+x_2=-(x_3+x_4)$, deci $x_1x_2+x_3x_4=(x_3+x_4)^2$ şi $(x_1x_2-x_3x_4)(x_3+x_4)=-a$. Din aceasta, $(x_3+x_4)^2=\frac{a^2}{(x_1x_2-x_3x_4)^2}$. Egalând valorile expresiunii $(x_3+x_4)^2$, găsim: $(x_1x_2-x_3x_4)^2(x_1x_2+x_3x_4)=a^2$. Limita căutată este $+1$ sau -1. (G. M. XI). **29.** Suma din membrul I al relaţiei de demonstrat se mai poate scrie $S=\frac{x_1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_2}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}+\frac{x_n}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_n}=(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$. Dar cum $A_1=0$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, deci $S=0$; dacă $A_1\neq 0$, $S=\Sigma x_1\frac{\Sigma x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n}=-\frac{A_1}{A_0}\cdot\frac{\pm\frac{A_{n-1}}{A_0}}{\mp\frac{A_n}{A_0}}=+\frac{A_1A_{n-1}}{A_0A_n}$.

In general avem: $\sum_{i_1,i_2\ldots i_k=1}^{n}\left(\frac{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}{x_1x_2\ldots x_k}+\frac{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}{x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1}}+\ldots+\frac{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}{x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n}\right)=(\Sigma x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k})\cdot\Sigma\frac{1}{x_1x_2\ldots x_k}=\frac{(\Sigma x_1x_2\ldots x_k)(\Sigma x_1x_2\ldots x_{n-k})}{x_1x_2\ldots x_n}=\frac{A_k\cdot A_{n-k}}{A_0A_n}$. **30.** Rezultă din $\Sigma a_1a_2\ldots a_i=A_i$. **31.** Facem transformarea $x^2=y$. Obţinem o ecuaţiune numai cu rădăcini pozitive ai cărei coeficienţi daţi de (XVII, 21), după exerciţiul precedent trebuesc să fie pozitivi. Scriind condiţiile obţinem inegalităţile enunţului.

32. Avem $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i$. Deci $\sum_{i=m+1}^{n} x_i = A_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ Analog, $\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{m} x_i x_j + (\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{j=m+1}^{n} x_j) + \sum_{i,j=m+1}^{n} x_i x_j$. Sau $\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = A_2 - A_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i,j=m+1}^{n} x_i x_j$. Deci $\sum_{i,j=m+1}^{n} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j + A_1 \sum_{i=1}^{m} x_i - A_2$, etc.

33. Se consideră ecuaţiunea $X^n + x_1 X^{n-1} + x_2 X^{n-2} + \ldots + x_{n-1} X + x_n = 0$, care admite rădăcinile $a_1, a_2, \ldots a_n$. Rezultă $x_1 = -\Sigma a_1$, $x_2 = \Sigma a_1 a_2$, $x_3 = -\Sigma a_1 a_2 a_3 \ldots x_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n$.

XIX. 1. Dacă reprezentăm ecuaţiunea generală de gradul al patrulea prin $x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$ şi scriem relaţiunile care leagă pe S_1, S_2, S_3, S_4, S_6, observând că în cazul ecuaţiunei date: $p_1 = 0$, $p_2 = p$, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$, ele devin: $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, $S_3 = -3$, $S_4 = 2p^2 - 4$, cu care deducem că $S_6 = -2p^3 + 6p + 3$. Pentru ca să avem $S_6 = 7$, trebue ca: $(p-1)^2 (p+2) = 0$, deci $p = 1, 1, -2$. **2.** Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi fiind (1) $\alpha + \beta + \gamma = 0$, (2) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$, (3) $\alpha\beta\gamma = -q$, din (1) şi (2) deducem (4) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2p$, din (1) şi (3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\,(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 3\alpha\beta\gamma = -3q$. Din (4), $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 4p^2 - 2\,(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$ şi cum $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = p^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = p^2$, $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2p^2$. Să multiplicăm relaţiile $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2p$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3q$. Obţinem $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) + \beta^2\gamma^2(\beta+\gamma) + \gamma^2\alpha^2(\gamma+\alpha) = 6pq$ $\therefore \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 - \alpha^2\beta^2\gamma - \beta^2\gamma^2\alpha - \gamma^2\alpha^2\beta = 6pq$ $\therefore \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 - \alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 6pq$. Sau $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = 5pq$. Relaţia enunţului se verifică imediat. **3.** x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiunii $u^3 + pu + q = 0$. Avem încă $xy + yz + zx = u$, $xyz = -q$. Ca în exerciţiul precedent avem $x^2 + y^2 + z^2 = -2p$, $x^3 + y^3 + z^3 = -3q$, $x^4 + y^4 + z^4 = 2p^2$. Multiplicând ultimele două egalităţi, $x^7 + y^7 + z^7 + x^3y^3(x+y) + y^3z^3(y+z) + z^3x^3(z+x) = -6p^2q$; $x^7 + y^7 + z^7 - x^3y^3z - y^3z^3x - z^3x^3y = -6p^2q$ $\therefore x^7 + y^7 + z^7 - xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = -6p^2q$. Dar $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = p^2$ (ex. precedent); deci $x^7 + y^7 + z^7 = -7p^2q$. Şi relaţia de stabilit rezultă imediat. **4.** Fo-

losind relaţiunea generală $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$ avem: $\Sigma x_1^3 x_2^2 = S_2 S_3 - S_5$, dar $p_1 = 0$, $p_2 = -5$, $p_3 = +1$ *** $S_1 = 0$, $S_2 = 10$, $S_3 = -3$, $S_5 = -25$ şi în consecinţă: $\Sigma x_1^3 x_2^2 = -30 + 25 = -5$. **5.** Avem: $X = \Sigma \frac{x_1}{x_2^2} = \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} \cdot \Sigma x_1^3 x_2^2$; dealtă parte $p_1 = 0$, $p_2 = p$, $p_3 = q$ *** $S_1 = 0$; $S_2 = -2p$, $S_3 = -3q$, $S_5 = 5pq$ *** $\Sigma x_1^3 x_2^2 = S_2 S_3 - S_5 = pq$, deci: $X = \frac{pq}{q^2} = \frac{p}{q}$. **6.** Insemnând cu X funcţiunea simetrică, avem: $X = 2x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 3 x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1 + 2 x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1 x_2$; $\Sigma x_1^2 x_2 + \Sigma x_1^2 x_2^2 = -2 p_3 + p_3^2 + 3 p_3 p_1 - 2 p_3 p_2 + (S_1 S_2 - S_3) + \frac{1}{2}(S_2^2 - S_4)$. Dar: $S_1 = -p_1$; $S_2 = p_1^2 - 2p_2$; $S_3 = -p_1^3 + 3 p_1 p_2 - 3 p_3$; $S_4 = p_1^4 - 4 p_1^2 p_2 + 4 p_1 p_3 + 2 p_2^2$, $S_1 S_2 - S_3 = -p_1 p_2 + 3 p_3$ şi $\frac{1}{2}(S_2^2 - S_4) = p_2^2 - 2 p_1 p_3$; deci $X = (p_2 - p_3)^2 - p_1 (p_2 - p_3) + p_3$. **7.** Insemnând cu X funcţiunea simetrică şi cu X_1 termenii relativi la x_1, avem succesiv: $X_1 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 - p_1) = x_1^3 + (-p_1 - x_1) x_1^2 + x_1 x_2 x_3 - p_1 x_1^2 - p_1 \Sigma x_1 x_2 = -2 p_1 x_1^2 - p_1 p_2 - p_3$ *** $X = -2 p_1 S_2 - 3 p_1 p_2 - 3 p_3 = -2 p_1^3 + p_1 p_2 - 3 p_3$. *Altă metodă.* Formăm ecuaţiunea care are rădăcinile: $y_3 = x_1 + x_2, y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, folosind calculele din exerciţiul precedent găsim imediat ecuaţiunea $y^3 + 2 p_1 y^2 + (p_1^2 + p_2) y + p_1 p_2 - p_3 = 0$ şi avem de calculat $X = \Sigma y_1^2 y_2 = S'_1 S'_2 - S'_3$, dar: $S'_1 = -2 p_1$, $S'_2 = 2 p_1^2 - 2 p_2$, $S'_3 = -2 p_1^3 + 3 p_1 p_2 + 3 p_3$, deci: $X = -2 p_1^3 + p_1 p_2 - 3 p_3$. **8.** Avem succesiv: $X = \Sigma \frac{x_2 x_3 (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} = \frac{1}{p_3^2} \Sigma x_2 x_3 (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2$, dar $(x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2 = [x_1^2 + p_2]^2 = x_1^4 + 2 p_2 x_1^2 + p_2^2$ *** $p_3^2 X = -p_3 \Sigma x_1^3 + 2 p_1 p_2 p_3 + p_2^3$. Inlocuind pe S_3 prin valoarea găsită la (4) găsim: $X = \frac{1}{p_3^2} [p_2^3 - p_1 p_3 (p_2 - p_1^2) + 3 p_3^2]$. **9.** Avem $X = 2 \Sigma x_1 x_2 = 2 p_2$. **10.** Avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, deci un termen al funcţiunii simetrice, de exemplu $X_1 = x_1^2 - x_2 x_3 = x_1^2 - (x_1 + x_3)(x_1 + x_2) =$

$-\Sigma x_1 x_2 = -p$ **** $X=(-1)^n p^n \times 3$. **11.** Observând că $x_2 x_3 = p_2 - x_1(x_2+x_3) = p_2 - x_1(-p_1 - x_1) = p_2 + p_1 x_1 + x_1^2$ **** $X = \Sigma(-p_2 - p_1 x_1)^3 = -\Sigma(p_1^3 x_1^3 + 3p_1^2 p_2 x_1^2 + 3p_1 p_2^2 x_1 + p_2^3) = -(p_1^3 S_3 + 3p_1^2 p_2 S_2 - 3p_1^2 p_2^2 + 3p_2^3) = p_1^6 + 9p_1^2 p_2^2 + 3p_1^3 p_3 - 6p_1^4 p_2 - 3p_2^3$. **12.** Insemnând un termen cu X_1 avem succesiv: $X_1 = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 - 2x_1^2 x_2 x_3 = 2\Sigma x_1^2 x_2^2 - 2p_1 p_3 = -2p_1 p_3 + S_2^2 - S_4$, dar din exerciţiul (4) avem pe S_2 şi S_4, înlocuind găsim: $X = 2p_2^2 - 6p_1 p_3$. **13.** Dacă însemnăm cu X_1 termenul funcţiunii simetrice avem: $X_1^2 = (2x_1^2 + p_1 x_1 + x_2 x_3)^2 = 4x_1^4 + 4p_1 x_1^3 + p_1^2 x_1^2 - 4p_3 x_1 - 2p_1 p_3 + x_2^2 x_3^2$ **** $X = 4S_4 + 4p_1 S_3 + p_1^2 S_2 - 2p_1 p_3 + \Sigma x_2^2 x_3^2$; dar $\Sigma x_2^2 x_3^2 = \frac{1}{2}(S_2^2 - S_4) = p_2^2 - 2p_1 p_3$, deci $X = p_1^4 - 6p_1^2 p_2 + 9p_2^2$. **14.** Observăm că u_1 este o parte a funcţiunii simetrice $\Sigma x_1^2 x_2$; însemnând cealaltă parte cu u_2, avem imediat $u_1 + u_2 = \Sigma x_1^2 x_2 = S_1 S_2 - S_3 = 3p_3 - p_1 p_2$. Dealtăparte: $u_1 u_2 = p_3^2 \left[\Sigma \frac{x_1^2}{x_2 x_3} + \Sigma \frac{x_2 x_3}{x_1^2} + 3\right] = -p_3 \Sigma x_1^3 - p_3^3 \Sigma \left(\frac{1}{x_1}\right)^3 + 3p_3^2$. Dar, considerând ecuaţiunea dată şi ecuaţiunea transformată în $\left(\frac{1}{x}\right)$, avem: $\Sigma x_1^3 = S_3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3$ şi $p_3^3 \Sigma \left(\frac{1}{x_1}\right)^3 = -p_2^3 + 3p_1 p_2 p_3 - 3p_3^2$ **** $u_1 u_2 = p_2^3 + p_1^3 p_3 - 6p_1 p_2 p_3 + 9p_3^2$. Aşa dar u_1 şi u_2 sunt rădăcinile ecuaţiunii: $u^2 + (p_1 p_2 - 3p_3)u + (p_2^3 + p_1^3 p_3 - 6p_1 p_2 p_3 + 9p_3^2) = 0$. **15.** Să însemnăm $\frac{x_1}{x_3} = z_1$, $\frac{x_2}{x_1} = z_2$, $\frac{x_3}{x_2} = z_3$ şi $\frac{x_1}{x_2} = z'_1$, $\frac{x_2}{x_3} = z'_2$, $\frac{x_3}{x_1} = z'_3$ şi fie ecuaţiunile $z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0$ şi $z^3 + A'_1 z^2 + A'_2 z + A'_3 = 0$ la care satisfac respectiv (z_1, z_2, z_3) şi (z'_1, z'_2, z'_3). Avem, ţinând seamă de problema precedentă: $A_1 = -\Sigma z_1 = +\frac{u_1}{p_3}$ şi $A'_1 = -\Sigma z'_1 = +\frac{u_2}{p_3}$; apoi $A_2 = \Sigma z_1 z_2 = \Sigma z'_1 = -\frac{u_2}{p_3}$ şi $A'_2 = \Sigma z'_1 z'_2 = \Sigma z_1 = -\frac{u_1}{p_3}$; în fine $A_3 = -z_1 z_2 z_3 = -1$ şi $A'_3 = -z'_1 z'_2 z'_3 = -1$; deci ecuaţiunea la care satisfac cele

şase rădăcini $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ se reduce la ecuaţiunile: $x^3+\frac{u_1}{p_3}x^2-\frac{u_2}{p_3}x-1=0$ şi $x^3+\frac{u_2}{p_3}x^2-\frac{u_1}{p_3}x-1=0$ unde u_1 şi u_2 sunt rădăcinile ecuaţiunii găsită în problema (14). **16.** Avem: $P=(p_1+2x_1)(p_1+2x_2)(p_1+2x_3)(p_1+2x_4)=p_1^4+2p_1^3\Sigma x_1+4p_1^2\Sigma x_1x_2+8p_1\Sigma x_1x_2x_3+16x_1x_2x_3x_4=-p_1^4+4p_1^2p_2-8p_1p_3+16p_4$. Pentru calculul lui Q se formează ecuaţiunea care admite ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 şi se aplică rezultatul precedent obţinut pentru P; sau se observă că avem: $Q=(S_2-2x_1^2)(S_2-2x_2^2)(S_2-2x_3^2)(S_2-2x_4^2)=S_2^4-2S_2^4+4S_2^2\Sigma x_1^2x_2^2-8S_2\Sigma x_1^2x_2^2x_3^2+16p_4^2$ şi calculăm apoi funcţiunile simetrice: $\Sigma x_1^2x_2^2=\frac{1}{2}(S_2^2-S_4)$ şi $\Sigma_1 x_1^2x_2^2x_3^2=\frac{1}{2}[S_3^2-3S_2S_4+2S_6]$.

17. Observăm că expresiunea dată ia şase valori distincte când se permută indicii 1, 2, 3, 4 în toate modurile posibile şi anume: $u_1=x_1+x_2-x_3-x_4=2(x_1+x_2)$; $u_2=x_2+x_3-x_4-x_1=2(x_2+x_3)$; $u_3=x_1+x_3-x_2-x_4=2(x_1+x_3)$; $u_4=x_3+x_4-x_1-x_2=2(x_3+x_4)$; $u_5=x_4+x_1-x_2-x_3=2(x_4+x_1)$; $u_6=x_2+x_4-x_3-x_1=2(x_2+x_4)$; deci ecuaţiunea care trebue formată este de gradul al 6-lea. Cum însă $u_4=-u_1$, $u_5=-u_2$, $u_6=-u_3$, coeficienţii termenilor de grad impar sunt nuli şi ca urmare ecuaţiunea are forma: $y^6+A_2y^4+A_4y^2+A_6=0$. Pentru calculul coeficienţilor A_2, A_4, A_6, trebue să calculăm pentru ecuaţia dată pe S_1, S_2, S_3, S_4, S_6 şi avem ţinând seamă că $p_1=0$, valorile: $S_1=0$, $S_2=-2p_2$, $S_3=-3p_3$, $S_4=2p_2^2-4p_4$, $S_6=-2p_2^3+6p_2p_4+3p_3^2$. Apoi, avem:

$$A_2\sum_1 u_1u_2=-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)=-2[(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+x_4)^2+(x_2+x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_4)^2]=-6S_2-4\Sigma x_1x_2=8p_2;$$

$$A_4=\Sigma u_1u_2u_3u_4=u_1^2u_2^2+u_1^2u_3^2+u_2^2u_3^2=8[2(x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_2+x_3)(x_1+x_4)+2(x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)+2(x_2+x_3)(x_1+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)]=3p_2^2-(x_1x_2+x_3x_4)^2-(x_1x_3+x_2x_4)^2-(x_2x_3+x_1x_4)^2=3p_2^2-\Sigma x_1^2x_2^2-6p_4=2p_2^2-8p_4;$$

$$A_6=u_1u_2u_3u_4u_5$$

$u_6 = [(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)] \cdot [(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)] \cdot [(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)] = [p_2 - (x_1 x_2 + x_3 x_4)][p_2 - (x_1 x_3 + x_2 x_4)] \cdot [p_2 - (x_2 x_3 + x_1 x_4)] = p_2 \Sigma x_1 x_2 x_3^2 - [\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 + p_4 S_2] = 4 p_2 p_4 - 3 p_3^2$.

18. Avem de calculat suma $\Sigma (\alpha - x_1)^2 (\alpha - x_2^2) = \frac{1}{[f(\alpha)]^2} \Sigma \frac{1}{(\alpha - x_1)^2}$, dar $\Sigma \frac{1}{(\alpha - x_1)^2} = -\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'_{x=\alpha} = \left[\frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{[f(x)]^2}\right]_{x=\alpha}$, deci valoarea funcţiunii simetrice date este: $[f'(\alpha)]^2 - f(\alpha) f''(\alpha)] + [[f'(\beta)]^2 - f(\beta) f''(\beta)] = -[f(\alpha) f''(\alpha) + f(\beta) f''(\beta)] = 4p^2 - 6(\alpha^4 + \beta^4) = \frac{8p^2}{3}$. **19.** Formând pătratul determinantului şi desvoltându-l găsim: $\Delta^2 = (S_2 - S_1^2) S_4 + S_2 (S_1 S_3 - S_2^2) + S_3 (S_1 S_2 - S_3)$ şi înlocuind pe $S_1 = -p_1$, $S_2 = p_1^2 - 2p_2$, $S_3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3$, $S_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2$, găsim făcând reducerile cuvenite: $\Delta^2 = -4p_1^3 p_3 + p_1^2 p_2^2 + 18 p_1 p_2 p_3 - 4p_2^3 - 27 p_3^2$. **20.** Formând pătratul determinantului Δ şi observând că, în cazul ecuaţiunii date, avem $S_1 = S_2 = S_5 = 0$; $S_3 = -3p_3$; $S_4 = -4p_4$; $S_6 = +3p_3^2$, găsim că $\Delta^2 = 256 p_4^3 - 27 p_3^4$. **21.** Formând pătratul determinantului Δ, avem:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ \vdots & & & & \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix},$$

apoi observăm că $S_1 = S_2 = \dots = S_{n-2} = 0$; $S_{n-1} = -(n-1) p_{n-1}$; $S_n = -n p_n$; $S_{n+1} = S_{n+2} = \dots = S_{2n-3} = 0$; $S_{2n-2} = +(n-1) p_{n-1}^2$. Minorii celor două elemente distincte de zero din prima coloană

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & -(n-1) p_{n-1} & -n p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(n-1) p_{n-1} & -n p_n & \dots & \dots & \dots & (n-1) p_{n-1}^2 \end{vmatrix}$$

şi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) p_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -(n-1) p_{n-1} & -n p_n \\ -(n-1) p_{n-1} & -n p_n & \dots & 0 & 0 \\ -n p_n & 0 & \dots & 0 & (n-1) p_{n-1}^2 \end{vmatrix}$$

(ultimul desvoltat după elementele ultimei linii) şi înmulţiţi cu elementele corespunzătoare dau termeni de forma p_{n-1}^{n} şi p_n^{n-1}, deci $\Delta^2 = A\,p_n^{n-1} + B\,p_{n-1}^{n}$. Pentru determinarea coeficientului A, facem $p_n = -1$, $p_{n-1} = 0$ şi avem desvoltând determinantul ob-

ţinut: $(-1)^{n-1} A = n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \ldots & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n & 0 \ldots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = n.n^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

$**$ $A = n^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; pentru determinarea coeficientului B, facem

$p_n = 0, p_{n-1} = -1$ şi avem: $(-1)^n . B = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & n-1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n-1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \end{vmatrix} =$

$(n-1) \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & n-1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n-1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & n-1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n-1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$(n-1) \begin{vmatrix} 0 & & 0 \ldots\ldots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & & n-1 \ldots\ldots & 0 \\ n-1 & & 0 \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(n-1)^{n-2} . (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$

$**$ $B = (n-1)^{n-1} . (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ $**$ $\Delta^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n p_n^{n-1} +$ $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p_{n-1}^{n}$. **22.** Observăm că având $S_1 = 0$, putem scrie: $\varphi = 2(x_1 + x_2) = -2(x_3 + x_4)$ $**$ $2\varphi^2 = 4[S_2 + 2f]$, dar $S_2 = -2p_2$; deci $f = \frac{1}{4}\varphi^2 + p_2$ $(A = \frac{1}{4},\ B = 0,\ C = p_2)$. **23.** Punând $x - a = y$, deci $x = a + y$ ecuaţiunea devine des-

voltând-o după puterile lui y: $y^n+\frac{f_{(a)}^{(n-1)}}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{f_{(a)}^{(n-2)}}{(n-2)!}y^{n-2}+\ldots$ $+\frac{f'(a)}{1!}y+f(a)=0$, apoi facem transformata ecuațiunii obținute punând $y=\frac{1}{z}$ și calculăm sumele de puteri ale rădăcinilor ecuațiunii: $z^n+\frac{f'(a)}{f(a)}z^{n-1}+\frac{1}{2!}\frac{f''(a)}{f(a)}z^{n-2}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(a)}{f(a)}$ $z^{n-3}+\ldots+\frac{f_{(a)}^{(n-1)}}{(n-1)!\,f(a)}z+\frac{1}{n!}\frac{f_{(a)}^{(n)}}{f(a)}=0$. Avem imediat: $X_1=$ $S_1=-p_1=-\frac{f'(a)}{f(a)}$; $X_2=S_2=p_1^2-2p_2=\left[\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^2-2\frac{f''(a)}{2!f(a)}=$ $\frac{f'(a)-f(a)f''(a)}{[f(a)]^2}$; $X_3=S_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3=-\left[\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^3+$ $3\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot\frac{f''(a)}{2!f(a)}-\frac{3}{3!}\frac{f'''(a)}{f(a)}=-\frac{1}{2}\frac{[f(a)]^2f'''(a)-3f''(a)f'(a)f(a)+2[f'(a)]^3}{[f(a)]^3}$, etc. **24.** Avem imediat $f_{(x)}^{(k+1)}=f_{(x)}^{(k)}\Sigma\frac{1}{x-\alpha_j}$, $f_{(x)}^{(k+1)}$ fiind derivata întâia a lui $f_{(x)}^{(k)}$; deci facem pe x egal succesiv cu rădăcinile α_j și însumăm. Obținem $X=\sum_i f_{(a_i)}^{(k)}\sum_j\frac{1}{a_i-\alpha_j}=\sum_i f_{(a_i)}^{(k+1)}=$ $\frac{n!}{(n-k-1)!}S_{n-k-1}+p_1\frac{(n-1)!}{(n-k-2)!}S_{n-k-2}+\ldots$, și prin urmare calculul se reduce la acela al funcțiunilor simetrice S_{n-k-1}, S_{n-k-2}, (G. M. XIV). **25.** Aplicând relațiile care leagă sumele de puteri ale rădăcinilor S_k de coeficienții ecuațiunii date, avem: $S_1=S_2=\ldots=S_{n-2}=0$; $S_{n-1}=-(n-1)p_{n-1}=$ $+(n-1)$ și $S_n=-np_n=+n$. Pentru sumele S_k în care $k>n$ avem relația: $S_{n+h}+p_{n-1}.S_{h+1}+p_n.S_h=0$, sau: $S_{n+h}=$ $S_{h+1}+S_h$ și obținem: $S_{n+1}=S_{n+2}=\ldots=S_{2n-3}=0$, $S_{2n-2}=$ $S_{n-1}=n-1$; $S_{2n-1}=S_n+S_{n-1}=2n-1$; $S_{2n}=S_{n+1}+S_n=n$, $S_{2n+1}=0$, etc. Rezultatele pot fi concentrate în următoarea relație: $S_k=C_m^r n-C_{m-1}^r$, unde m este câtul lui k prin $(n-1)$, iar r restul acestei împărțiri. (G. M. XI). **26.** Având $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=S_\alpha S_\beta-S_{\alpha+\beta}$ și observând că S_p unde p nu este

multiplu de n este nul, iar $S_{kn}=n$, deducem că: 1°. α, β şi $(\alpha+\beta)$ nu sunt de forma kn, atunci $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=0$; 2°. α şi β nu sunt de forma kn, dar $\alpha+\beta=hn$, atunci $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=-n$; 3°. α şi β sunt ambii de forma kn, atunci $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=n(n-1)$ când $\beta\neq\alpha$ şi $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=\frac{1}{2}n(n-1)$ când $\beta=\alpha$. **27.** Desvoltând după formula binomului lui *Newton* şi însumând, avem relaţia: $\Sigma(x_1+x_2)^m\Sigma x_1^m+C_m^1\Sigma x_1^{m-1}x_2+\ldots..+C_m^p\Sigma x_1^{m-p}x_2^p+\ldots..+C_m^m\Sigma x_2^m$, deci calculul revine la calculul funcţiunilor simetrice de forma $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta=S_\alpha S_\beta-S_{\alpha+\beta}$ şi $\Sigma x_1^\alpha x_2^\alpha=\frac{1}{2}(S_\alpha^2-S_{2\alpha})$. Dar sumele S_m, unde m nu este Mn sunt nule, iar $S_n=-np_n=+n$; $S_{2n}=-p^nS_n=+S_n=+n$, şi în general $S_{hn}=+n$. Dacă punem deci $m=hn+r$, h câtul lui m prin n, iar r restul, avem: 1°. dacă $r\neq0$, $S_{\alpha+\beta}=S_m=0$, şi unul cel puţin din S_α, S_β asemenea nul, deci $\Sigma(x_1+x_2)^m=0$; 2°. dacă $r=0$, *iar m fără soţ*, rămân din desvoltare numai termenii în care p (şi deci $m-p$) este multiplu de n şi ca urmare avem: $\Sigma(x_1+x_2)^m=n(n-1)\,[1+C_m^n+C_m^{2n}+C_m^{3n}+\ldots]$; dacă $r=0$ şi *m cu soţ*, avem: $\Sigma(x_1+x_2)^m=n(n-1)\,[1+C_m^n+C_m^{2n}+\ldots..]+\frac{1}{2}n(n-1)C_m^{\frac{n}{2}}$. (G. M. XV).

28. Presupunem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ mai mici ca n, căci dacă $\alpha_k=\lambda n+\alpha'_k$, unde $\alpha'_k<n$, avem $x^{\alpha_k}=(x^n)^\lambda.\,x^{\alpha'_k}=x^{\alpha'_k}$. Având $p_1=p_2=\ldots=p_{n-1}=0$, $p_n=-1$, deducem că $S_1=S_2=\ldots=S_{n-1}=0$, $S_n=0$; $S_{nh+r}=0$ $(r\gtrless0)$ şi $S_{nh}=n$. Plecând dela funcţiunea simetrică $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}=S_{\alpha_1}S_{\alpha_2}-S_{\alpha_1+\alpha_2}=-S_{\alpha_1+\alpha_2}=\begin{cases}0 & \alpha_1+\alpha_2\neq n\\ (-1)n & \alpha_1+\alpha_2=n\end{cases}$. Inmulţind această funcţiune $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ cu S_{α_3}, avem relaţiunea: $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}+\Sigma x_1^{\alpha_1+\alpha_3}x_2^{\alpha_2}+\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2+\alpha_3}=0$, deci înlocuind sumele de dimensiunea 2, avem: $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}=(-1)^2\cdot2\,S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=\begin{cases}0 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq Mn\\ (-1)^2\,2n & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=Mn\end{cases}$. Procedând în acelaşi fel, avem: $\Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}+\Sigma x_1^{\alpha_1+\alpha_4}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}+\Sigma x_1^{\alpha_1}$

$x_2^{\alpha_2+\alpha_4} x_3^{\alpha_3} + \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3+\alpha_4} = 0$, deci $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = (-1)^3 3.2\, S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = \begin{cases} 0 \\ (-1)^3 . 3! . n \end{cases}$ după cum $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ nu este sau este multiplu lui n. Dacă presupunem că am ajuns din aproape în aproape să arătăm că avem relaţia: $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_p^{\alpha_p} = (-1)^{p-1}(p-1)!\, S_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}$, procedând ca în primele cazuri avem: $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} + \Sigma x_1^{\alpha_1+\alpha_{p+1}} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} + \ldots + \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p+\alpha_{p+1}} = 0$ *** $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} = (-1)^p . p . (p-1)!\, S_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\alpha_{p+1}}$, care este egală cu *zero* sau cu $(-1)^p p! n$, după cum $\sum_1^{p+1} \alpha_i$ nu este sau este *Mn*. **29.** Observând că $p_k S_l$ are aceeaşi coeficienţi ca S_l şi că a aduna un coeficient k al unui termen rezultant este tot una cu a aduna suma coeficienţilor termenilor asemeni ce i-au dat naştere, este de ajuns a scrie relaţiunile succesive care leagă sumele de puteri S_α pentru a obţine din aproape în aproape proprietatea enunţată. **30.** Observăm că termenii $\Sigma(x_1-x_2)^{2p}$ sunt suma valorilor pe care le ia funcţiunea $\Sigma(x-x_1)^{2p}$ când facem $x=x_1; x_2; \ldots x_n$; de altă parte desvoltând puterea binomului lui *Newton* avem: $\Sigma(x-x_1)^{2p} = x^{2p} - C^1_{2p} S_1 x^{2p-1} + C^2_{2p} S_2 x^{2p-2} - \ldots\ldots$ în care făcând deci pe x egal succesiv cu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ şi însumând obţinem: $\Sigma(x_1-x_2)^{2p} = n S_{2p} - C^1_{2p} S_1 S_{2p-1} + C^2_{2p} S_2 S_{2p-2} - \ldots$. In total însă desvoltarea are $(2p+1)$ termeni, iar termenii echidistanţi de extremi sunt egali şi un singur termen la mijloc: *** $\Sigma(x_1-x_2)^{2p} = 2n S_{2p} - 2C^1_{2p} S_1 S_{2p-1} + 2C^2_{2p} S_2 S_{2p-2} - \ldots \pm C^p_{2p} S^2_p$. **31.** Adunând la elementele primei coloane elementele celorlalte coloane înmulţite respectiv cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valoarea Δ a determinantului considerat nu se schimbă; dar $S_{m+k} + p_1 S_{m+k-1} + p_2 S_{m+k-2} + \ldots + p_n S_{m+k-n} = 0$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, deci determinantul obţinut are o coloană de elemente nule, adică $\Delta = 0$. **32.** In locul determinantului considerat să luăm determinantul general: $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} S_m & S_{m-r} & S_{m-2r} \ldots & S_{m-nr} \\ S_{m+1} & S_{m-r+1} & S_{m-2r+1} \ldots & S_{m-nr+1} \\ \vdots & & & \\ S_{m+n} & S_{m-r+n} & S_{m-2r+n} \ldots & S_{m+nr-n} \end{vmatrix}$$

Adunând, la elementele ultimei linii, elementele liniilor ce o preced înmulţite respectiv cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ obţinem un determinant cu aceeaşi valoare, dar elementele ultimii linii fiind toate nule $*^{**}$ $\Delta = 0$. **33.** x_1, x_2, x_3 sunt trei funcţiuni, depinzând fiecare de variabilele independente a, b, c, şi legate între ele prin relaţiunile: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = b$; $x_1 x_2 x_3 = -c$. Derivând aceste trei relaţiuni succesiv în raport cu a, b, c avem:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial a} = -1; \quad \Sigma (x_2 + x_3) \frac{\partial x_1}{\partial a} = 0; \quad \Sigma x_2 x_3 \frac{\partial x_1}{\partial a} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial b} = 0; \quad \Sigma (x_2 + x_3) \frac{\partial x_1}{\partial b} = +1; \quad \Sigma x_2 x_3 \frac{\partial x_1}{\partial b} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial c} = 0; \quad \Sigma (x_2 + x_3) \frac{\partial x_1}{\partial c} = 0; \quad \Sigma x_2 x_3 \frac{\partial x_1}{\partial c} = -1,$$

relaţiuni care ne conduc să formăm, pentru calculul lui Δ, produsul lui prin determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_3 + x_1 & x_1 + x_2 \\ x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \end{vmatrix}. \quad \text{Găsim: } \Delta . D = +1 \quad *^{**}$$

$$\Delta = \frac{1}{D} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ x_3 (x_2 - x_1) & x_1 (x_3 - x_2) \end{vmatrix}} = \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Chestiunea poate fi generalizată pentru o ecuaţie de grad mai înalt. **34.** Punem pentru simplificarea calculului $\Sigma x_k^2 = A$; $\Sigma x_k x_l = B$, $\Sigma x_k = a$; deci $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} - x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n = a - 2x_k$. Avem prin definiţie $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Sigma a_k^2 - \Sigma a_k a_l$; dar $\Sigma a_k^2 = \Sigma (a - 2x_k)^2 = na^2 - 4a \Sigma x_k + 4 \Sigma x_k^2 = (n-4) a^2 + 4A$ şi $\Sigma a_k a_l = \Sigma (a - 2x_k)(a - 2x_l) = C_n^2 a^2 - 2a \Sigma (x_k + x_l) + 4 \Sigma x_k x_l = C_n^2 a^2 - 2a (n-1) \Sigma x_k + 4B = C_n^2 a^2 - 2(n-1) a^2 + 4B = \frac{1}{2}(n-1)(n-4) a^2 + 4B$ $*^{**}$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -\frac{1}{2}(n-3)(n-4) a^2 + 4(A-B)$. Pentru determinarea lui n avem: $(n-4)[A - B + \frac{1}{2}(n-3) a^2] = 0$, care dă singura soluţie $n = 4$. (G. M. XL. p. 457).

35. Fie $X^3+p_2X+p_3=0$, ecuaţiunea pe care o determină cele trei numere date, p_2 şi p_3 coeficienţi arbitrari diferiţi de zero. Să determinăm pe k astfel ca să avem: $k\,S_2\,S_3\,S_4\,S_5=S_7^2$. Calculând sumele de puteri ale rădăcinilor ecuaţiunii de mai sus găsim: $S_1=0$; $S_2=-2p_2$; $S_3=-3p_3$; $S_4=2p_2^2$; $S_5=5p_2p_3$, $S_7=-7p_2^2p_3$. Introducând în relaţiune aceste valori găsim $k=\frac{49}{60}$, iar relaţiunea ia forma din enunţ. **36.** Avem $X=\Sigma\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\right)^2=\Sigma\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}+2C_3^2=\frac{1}{p_3^2}\Sigma x_1^4x_2+2C_3^2=\frac{1}{p_3^2}$ $(S_4S_2-S_6)+2C_3^2$; dar $S_2=p_1^2-2p_2$; $S_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2$; $S_6=p_1^6-6p_1^4p_2+6p_1^3p_3+9p_1^2p_2^2-12p_1p_2p_3-2p_2^3+3p_3^2$ *** $X=\frac{1}{p_3^2}[(p_1^2-2p_2)(p_2^2-2p_1p_3)+2C_3^2-3$. *Altă metodă.* Punând: $\frac{x_1}{x_2}=z_1$, $\frac{x_2}{x_3}=z_2$, $\frac{x_3}{x_1}=z_3$, $\frac{x_1}{x_3}=z_4$, $\frac{x_2}{x_1}=z_5$, $\frac{x_3}{x_2}=z_6$, cum am văzut la (13) numerele z_i sunt rădăcinile ecuaţiunii: $z^6+\frac{u_1+u_2}{p_3}z^5+\left(-\frac{u_1+u_2}{p_3}+\frac{u_1u_2}{p_3^2}\right)z^4+\ldots=0$ unde u_1 şi u_2 sunt rădăcinile ecuaţiunii găsite la (12); rezultă că $X=\Sigma z_i^2+2C_3^2=P_1^2-2P_2+2C_3^2=\frac{1}{p_3^2}[(u_1+u_2+p_3)^2-p_3^2-2u_1u_2]+2C_3^2=\frac{1}{p_3^2}[p_2^2(p_1^2-2p_2)-2p_1p_3(p_1^2-2p_2)+2C_3^2-3$, etc. **37.** Avem succesiv: $X=\Sigma\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}+2C_n^2=\frac{1}{p_2^2}\Sigma x_1^4x_2^2$ $x_3^2\ldots x_{n-1}^2+2C_n^2$; dar $X_1=x_1^4\Sigma x_2^2x_3^2\ldots x_{n-1}^2=x_1^4\cdot(x_2^2x_3^2\ldots x_n^2)$ $\sum_2^n\frac{1}{x_6^2}=p_n^2x_1^2\left(S_2^1-\frac{1}{x_1^2}\right)=p_n^2(S_2^1x_1^2-1)$ *** $X=S_2^1\Sigma x_1^2-n+2C_n^2=S_2^1S_2-n+2C_n^2=\left[\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)^2-2\frac{p_{n-2}}{p_n}\right][p_1^2-2p_2]+2C_n^2-n=\frac{(p_1^2-2p_2)(p_{n-1}^2-2p_{n-2}p_n)}{p_n^2}+n^2-2n.$

XX. 1. Multiplicăm primul polinom cu b_0, apoi îl împărţim la al doilea. Restul împărţirii este $(b_0 a_1 - a_0 b_1)x + a_2 b_0 - a_0 b_2$. Deoarece divizorul comun al deîmpărţitului şi împărţitorului este şi divizor al restului şi cum restul aflat este de gradul I, adică este unicul divizor al restului, el trebue să fie divizorul comun cerut. Deci $x = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$ trebue să anuleze pe oricare dintre polinoamele date. Să înlocuim în primul polinom; avem: $a_0 (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 + a_1 (a_0 b_2 - a_2 b_0)(a_1 b_0 - a_0 b_1) + a_2 (a_1 b_0 - a_0 b_1)^2 = 0$ $\therefore$ $a_0 (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 a_0 b_2 - a_1 a_2 b_0 + a_2 a_1 b_0 - a_2 a_0 b_1) = 0$ şi cum $a_0 \neq 0$, $(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$, reprezintă condiţia cerută. **2.** Procedeu analog: Împărţim primul polinom multiplicat cu 3 la al doilea; obţinem restul $(6 a_0 a_2 - 2 a_1^2)x + 9 a_0 a_3 - a_1 a_2$. Acesta trebue să fie divizorul comun cerut, deci înlocuind în polinomul împărţitor pe x cu $\frac{a_1 a_2 - 9 a_0 a_3}{6 a_0 a_2 - 2 a_1^2}$, polinomul trebue să se anuleze. Obţinem condiţia: $a_1^2 a_2^2 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2 - 4 a_1^3 a_3 - 4 a_0 a_2^3$. **3.** Presupunând $m > n$ fie q câtul diviziunii lor, r restul, adică $m = nq + r$. Avem identitatea: $x^{nq+r} - x^{n(q-1)+r} + x^{n(q-1)+r} - x^{n(q-2)+r} + \ldots + x^{n+r} - x^r + x^r - 1 \equiv x^m - 1$ sau încă: $x^m - 1 \equiv (x^n - 1)[x^{n(q-1)+r} + x^{n(q-2)+r} + \ldots + x^r] + x^r - 1$; $x^r - 1 \equiv R(x)$. Conchidem că restul împărţirii a două binoame de forma $x^m - 1$, $x^n - 1$ este un binom de aceiaşi formă $x^r - 1$. Dacă $r = 0$, restul este nul, deci $x^m - 1$ divizibil cu $x^n - 1$. Pentru a găsi cel mai mare divizor comun al polinoamelor date, le împărţim apoi presupunând că împărţirea nu s'a făcut exact, împărţim $x^n - 1$ la restul aflat $x^r - 1$. Presupunând $n = r q_1 + r_1$ obţinem un rest $x^{r_1} - 1$ apoi împărţim $x^r - 1$ cu $x^{r_1} - 1$, etc. Fie $x^{r_p} - 1$ restul împărţirii polinoamelor $x^{r_{p-2}} - 1$, $x^{r_{p-1}} - 1$, aflate ca mai sus. Dacă $x^{r_{p-1}} - 1$ este divizibil cu $x^{r_p} - 1$, $x^{r_p} - 1$ reprezintă cel mai mare divizor comun cerut. Dar aceasta are loc dacă r_{p+1} este nul, când p este cel mai mare divizor al lui m şi n. In rezumat,

cel mai mare divizor comun al binoamelor x^m-1, x^n-1 este x^p-1, unde p este cel mai mare divizor comun al numerelor m, n. **4.** Făcând substituţia: $x=y\sqrt[n]{b}$, cele două binoame, x^m-a şi x^n-b, devin: $y^m-ab^{\frac{m}{n}}$ şi y^n-1; sau încă: $y^m-1+\left(1-ab^{\frac{m}{n}}\right)$ şi y^n-1. După exerciţiul precedent, dacă p este cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n, binoamele y^m-1 şi y^n-1 au pe y^p-1 drept cel mai mare divizor comun, deci pentru ca binoamele date să aibă un divizor comun trebue ca $1-b^{\frac{m}{n}}a=0$ sau: $a^n-b^m=0$. Dacă m şi n sunt prime între ele, $p=1$. Pentru binoamele $x^{11}-a$ şi x^4-b rezultă că au un divizor comun de gradul întâiu ($p=1$), dacă $a^4-b^{11}=0$, ceeace se obţine şi direct. **5.** Aflăm cel mai mare divizor comun al polinoamelor din membrul I. Se găseşte $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$. Deci $x=2$ este rădăcină comună triplă. **6.** Insemnând cu x^2+px+q divizorul comun de gradul al doilea, cu $x^2+\alpha x+\beta$ şi $x^2+\alpha' x+\beta'$ respectiv câturile polinoamelor date prin divizorul lor comun obţinem prin identificare relaţiunile: (I) $\alpha+p=-2$; $q+\beta+\alpha p=+3$; $\beta p+\alpha q=+2$; $q\beta=y$ şi (II) $\alpha'+p=-3$; $q+\beta'+\alpha' p=+4$; $\beta' p+\alpha' q=+3$; $q\beta'=z$ *** $\alpha'=\alpha-1$; $\beta'=\beta+p+1$; $q=p^2+p-1$. Impărţind primul polinom la divizorul comun x^2+px+p^2+p-1, găsim condiţiunile: $p^3+2p^2-3p=0$; $y-(p+4)(p^2+p-1)=0$. Avem deci: $p=0$ *** $q=-1$; $y=-4$; $\beta=+4$; $\beta'=5$; $z=-5$, $p=1$ *** $q=1$; $y=5$; $\beta=5$; $\beta'=7$; $z=7$; $p=-3$ *** $q=5$; $y=5$; $\beta=1$; $\beta'=-1$; $z=-5$. **7.** Facem transformata în $-x$ a ecuaţiei a doua. Ecuaţia obţinută, $x^3+3x^3-10x-24=0$, are o rădăcină comună cu $x^3-7x^2+36=0$. Vom căuta deci divizorul comun al polinoamelor din membrul I. Acesta este x^2-x-6. Rădăcinile comune fiind $-2, 3$, rădăcinile primei ecuaţii a problemei sunt $-2, 3, 6$; iar ale ecuaţiei a doua, $2, -3, 4$. **8.** Dacă vom micşora de 3 ori rădăcinile primei ecuaţii, aceasta va avea o rădăcină comună cu a doua rădăcină a problemei. Deci facem

transformarea $y=\frac{x}{3}$, înlocuind pe x cu $3y$ sau, pentru a păstra variabila, cu $3x$. Obţinem $3x^3-7x^2+4=0$ ce are o rădăcină comună cu $x^3-3x^2-10x+24=0$. Această rădăcină este 2. Deci rădăcina primei ecuaţii a problemei este 6. **9.** *Soluţia I.* Trebue să avem $x_1=2x_2$. Dacă facem transformata $x=2y$, obţinem o ecuaţie ce are o rădăcină egală cu x_2. Acea ecuaţie, în care am înlocuit variabila y cu x este $16x^4-24x^2+6x+a=0$ şi trebue să aibă o rădăcină comună cu $x^4-6x^2+3x+a=0$. Dar dacă aceste ecuaţiuni au o rădăcină comună, ecuaţiunile care dau inversele rădăcinilor lor: $ax^4+6x^3-24x^2+16=0$ şi $ax^4+3x^3-6x^2+1=0$ trebue să aibă o rădăcină comună, care trebue să fie una din rădăcinile ecuaţiei obţinută făcând diferenţa lor: $x^3-6x^2+5\equiv(x-1)(x^2-5x-5)=0$. Găsim $a=2$; $x_1=2$; $x_2=1$; $x_3,\ x_4=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ şi valorile iraţionale ale lui a următoare: $a=-33{,}64\mp52{,}68\sqrt{5}$. **10.** Fie α rădăcina dublă comună. $x^4+px^2+qx+1\equiv(x-\alpha)^2(x^2+\beta x+\gamma)$. Identificând, găsim $p=\frac{1}{\alpha^2}-3\alpha^2$, $q=2\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha}\right)$. Analog se găseşte $p'=\frac{1}{\alpha^2}-3\alpha^2$, $q'=2\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha}\right)$, deci cele două ecuaţiuni sunt identice. *Soluţia a doua.* Polinoamele celor două ecuaţiuni admiţând un divizor comun de gradul al doilea, acel divizor trebue să dividă şi diferenţa lor, adică pe: $(p-p')x^2+(q-q')x$; dar $x=0$ nu este rădăcină a nici uneia din ecuaţiunile date, deci dacă $p\neq p'$ şi $q\neq q'$ polinoamele nu pot avea un divizor comun de cât cel mult de gradul întâiu contrar ipotezei. Aşa dar, $p=p'$, $q=q'$, adică cele două polinoame sunt identic egale. Aceeaşi concluzie dacă am presupune că ecuaţiunile date au două rădăcini comune, distincte. **11.** $x^3-3\alpha x+2\beta\equiv(x-u)^2(x+v)$. Din identificare rezultă $u=\pm\sqrt{\alpha}$, $v=\pm2\sqrt{\alpha}$ şi condiţia $\alpha^3-\beta^2=0$. Ecuaţia a doua are două rădăcini egale cu $\sqrt{\alpha}$ sau $-\sqrt{\alpha}$. Împărţind al doilea polinom cu $x^2\mp2\sqrt{\alpha}\,x+\alpha$ şi scriind

că împărţitorul este divizor, găsim relaţiunile de condiţie: $3\alpha^2+a\alpha-c=0$ şi $b\pm 2(a+2\alpha)\sqrt{\alpha}=0$; celelalte două rădăcini ale ecuaţiei a doua fiind date de câtul exact: $x^2\pm 2\sqrt{\alpha}\,x+(a+3\alpha)=0$. **12.** Punând $x^{2^{n-1}}=y$, avem $y^2-y+1=0\therefore y=cos\frac{\pi}{3}\pm i\,sin\frac{\pi}{3}$; ecuaţia $P_n=0$ are ca rădăcini pe $cos\frac{(6k+1)\pi}{3.2^{n-1}}\pm i\,sin\frac{(6k+1)\pi}{3.2^{n-1}}$; $k=0, 1, 2..., n-1$. Două din aceste valori nu pot coincide pentru două valori deosebite ale lui n şi deci ecuaţiile respective n'au rădăcini comune. In adevăr să considerăm $n=p$ şi $n=p'$. Să arătăm că nu putem avea: $\frac{cos(6k+1)\pi}{3.2^{p-1}}+i\,sin\frac{(6k+1)\pi}{3.2^{p-1}}=\frac{cos(6k'+1)\pi}{3.2^{p'-1}}+i\,sin\frac{(6k'+1)\pi}{3.2^{p'-1}}$. Egalitatea ar aduce după sine $(1)\frac{(6k+1)\pi}{3.2^{p-1}}-\frac{(6k'+1)\pi}{3.2^{p'-1}}=2k''\pi\therefore(6k+1)2^{p'-1}-(6k'+1)2^{p-1}=3.2^{p'+p-1}$. Să presupunem $p'>p$. Impărţind cu 2^{p-1}, găsim $(6k+1)2^{p'-p}-6k'-1=3.2^{p'}$, ori membrul I este un număr impar, al doilea un număr par, deci egalitatea nu poate exista. La fel se cercetează cazul când pentru $n=p$ luăm — înaintea sinusului, iar pentru $n=p'$ luăm + înaintea sinusului. In acest caz între cei doi termeni ai membrului I ai relaţiei (1), am avea +. **13.** Rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$, nu pot anula pe x^m+x^n-1; căci dacă α este o rădăcină a lui x^2+x+1, $\alpha^3=1$, iar α^m poate avea una din valorile 1, α, α^2 şi ar trebui să avem $\alpha+1-1=0$, $\alpha+\alpha^2-1=0$ sau $\alpha^2+1-1=0$ pentruca α să fie rădăcină şi pentru x^m+x^n-1, ceiace nu se poate. **14.** Numărătorul primei fracţii se poate scrie $\frac{x^{pq}-1}{x^q-1}$, iar numitorul $\frac{x^p-1}{x-1}$. Deci prima fracţie se mai scrie $\frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$. La fel se scrie şi fracţia a doua. Dar $x^{pq}-1$ este divizibil cu x^p-1 şi cu x^q-1 şi cum x^p-1 şi x^q-1 au numai pe $x-1$ divizor comun, $\frac{x^p-1}{x-1}$ şi x^q-1 sunt prime între ele, deci $x^{pq}-1$ divizibil cu produsul lor; deaceia X este un polinom.

15. Să presupunem că împărţind polinomul $P(x)$ cu coeficienţi raţionali prin x^3-a am găsit un rest care este diferit de zero. Avem în acest caz egalitatea identică: $P(x)\equiv(x^3-a)\,Q(x)+x^2+px+q$, presupunând că am împărţit cu coeficientul lui x^2. Făcând pe $x=\sqrt[3]{a}$, rezultă că trebue să avem: $\sqrt[3]{a^2}+p\sqrt[3]{a}+q=0$, p şi q fiind raţionali. Dacă înmulţim această condiţiune pe rând cu $\sqrt[3]{a}$ şi $\sqrt[3]{a^2}$ şi îi adunăm egalităţile obţinute, avem: $\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)\;(p+q+1)=0$ şi cum $\sqrt[3]{a}$, unde a este raţional, nu poate fi egal cu o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ $*^*_*$ $p+q+1=0$, deci $p=-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-1}{\sqrt[3]{a}-1}=-1-\sqrt[3]{a}$ contrar ipotezei. Dacă restul ar fi fost presupus de gradul întâiu $x+r$, numărul raţional r urma să îndeplinească condiţiunea: $r+\sqrt[3]{a}=0$, adică $r=-\sqrt[3]{a}$, etc; de unde rezultă proprietatea enunţată. **16.** Făcând împărţirile pentru aflarea celui mai mare comun divizor al polinoamelor $f(x)$ şi $\varphi(x)$, avem identităţile: $f(x)\equiv\varphi(x)\,Q(x)+R(x)$; $\varphi(x)\equiv R(x)\,Q_1(x)+R_1(x)$; $R(x)\equiv R_1(x)\,Q_2(x)+R_2(x)$;....; $R_{p-2}(x)\equiv R_{p-1}(x)\,Q_p(x)+R_p$. Dacă $R(x)$ nu este identic nul, nici unul din resturile următoare nu poate fi nul, căci în cazul contrar ar urma că $\varphi(x)$ se divide cu nu polinom cu coeficienţi raţionali de grad inferior, contrar ipotezei; aşadar împărţirile se continuă până când ajungem la un rest constant R_p. Restul R_p trebue însă să fie neapărat nul. In adevăr, dacă x_k este rădăcina comună ecuaţiunilor $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$, având $\varphi(x_k)=0$, $f(x_k)=0$, avem din aproape în aproape $R(x_k)=R_1(x_k)=\ldots.=R_{p-2}(x_k)=R_{p-1}(x_k)=0$ $*^*_*$ $R_p=0$. Urmează că în condiţiunile problemii egalitatea $f(x)\equiv\varphi(x)\,Q(x)+R(x)$ este posibilă numai dacă $R(x)\equiv 0$.

17. Polinomul $P(x)$ cu coeficienţi raţionali, care se anulează pentru $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, are o rădăcină comună cu polinomul: $\varphi(x)\equiv(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$, deci, după problema precedentă $P(x)$

fiind divizibil cu polinomul $\varphi(x)$, ireductibil în domeniul raţional, admite toate rădăcinile acestuia. **18.** Ecuaţia admite rădăcinile $\sqrt{2}+\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}-i$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{3}-i$. Este deci de forma $\varphi(x)$. $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-i)(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}+i)(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}+i)(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}-i)(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}-i)\times(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}+i)(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}+i)(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}-i)=0$ $\therefore$ $\varphi(x)$. $(x^2-2x\sqrt{2}-2i\sqrt{3})(x^2-2x\sqrt{2}+2i\sqrt{3})(x^2+2x\sqrt{2}-2i\sqrt{3})(x^2+2x\sqrt{2}+2i\sqrt{3})=0$ $\therefore$ $\varphi(x)$. $(x^4-4x^3\sqrt{2}+8x^2+12)(x^4+4x^3\sqrt{2}+8x^2+12)=0$ $\therefore$ $\varphi(x)(x^8-16x^6+88x^4+192x^2+144)=0$, $\varphi(x)$ fiind un polinom arbitrar cu coeficienţi întregi. **19.** Câtul dintre $f(x)$ şi $f'(x)$ fiind de gradul întâiu, trebue să avem: $f(x)\equiv(ax+b)f'(x)$. Insemnând cu n gradul polinomului $f(x)$, deducem prin derivări succesive relaţiunile: $(1-a)f'(x)\equiv(ax+b)f''(x)$; $(1-2a)f''(x)\equiv(ax+b)f'''(x)$;...; $(1-pa)f^{(p)}(x)=(ax+b)f^{(p+1)}(x)$;...; $[1-(n-1)a]f^{(n-1)}(x)\equiv(ax+b)f^{(n)}(x)$; înmulţind toate aceste relaţiuni şi punând: $A_0\equiv f^{(n)}(x):(1-a)(1-2a)....[1-(n-1)a]$ avem: $f(x)\equiv A_0(ax+b)^n$, care este forma generală a polinoamelor cerute. **20.** Fie $f(x)$ polinomul de gradul n căutat şi $\varphi(x)$ divizorul comun, al polinoamelor $f(x)$ şi $f'(x)$, de gradul $(n-2)$. Punem deci $f(x)\equiv\varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)$. $*^*_*$ $f'(x)\equiv\varphi(x)(2x-\alpha-\beta)+\varphi'(x)(x-\alpha)(x-\beta)$. Polinomul $\varphi(x)$ divizând suma $f'(x)$ şi pe unul din cei doi termeni ai lui trebue să dividă şi pe celălalt, adică pe $\varphi'(x)(x-\alpha)(x-\beta)$. Dacă $\varphi'(x)$ divide pe $\varphi(x)$, atunci câtul lor trebue să dividă produsul $(x-\alpha)(x-\beta)$, deci după problema precedentă trebue să avem: $\varphi(x)\equiv A(x-\alpha)^{n-2}$, deci $f(x)\equiv A(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)$. Dacă $\varphi'(x)$ nu divide pe $\varphi(x)$, atunci trebue neapărat ca $\varphi(x)$ şi $\varphi'(x)$ să admită un divizor $\varphi_1(x)$ de gradul $(n-4)$, adică trebue să avem: $\varphi(x)\equiv\varphi_1(x)(x-\alpha)(x-\beta)$ $*^*_*$ $\varphi'(x)\equiv\varphi_1(x)(2x-\alpha-\beta)+\varphi'_1(x-\alpha)(x-\beta)$ şi raţionamentul de mai sus se repetă. In toate ipotezele se găseşte că $f(x)\equiv A(x-\alpha)^p(x-\beta)^q$, unde p şi q sunt numere pozitive, astfel ca $p+q=n$. **21.** Se împarte ca $x^5+abx^4+a^2$

la ax^5+bx+c, obţinem restul $abx^4-bcx+a^2-c^2$. Împărţind apoi împărţitorul primei împărţiri multiplicat cu b, la rest se găseşte restul $bcx^2+(b^2+c^2-a^2)x+bc$. Acesta este divizorul comun. Pentru determinarea condiţiunii, punem $\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}=\lambda$; $x^2-\lambda x+1$ trebue să dividă pe $abx^4-bcx+a^2-c^2$. Cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi aflăm câtul $abx^2+\lambda abx+a^2-c^2$ şi condiţiile: $a(a^2-b^2-c^2)^2=bc^2(a^2-c^2+ab)$, $b^2c^2=(b^2+c^2-a^2)(c^2-a^2+ab)$. Dar prima relaţie nu este decât a doua multiplicată cu $a+b$. Condiţia cerută este deci $b^2c^2=(b^2+c^2-a^2)(c^2-a^2+ab)$. Ea este unică deoarece polinoamele date au rădăcinile lor inverse una alteia, deci dacă au o rădăcină comună x_i, au implicit rădăcina comună $\frac{1}{x_i}$; cu alte cuvinte, dacă au un divizor comun de gradul I, au un divizor comun de gradul II. **22.** Generalizarea chestiunei precedente. Polinomul $(ax-b)^m f\left(\frac{bx-a}{ax-b}\right)$ este omogen în raport cu $(bx-a)$ şi $(ax-b)$, deci $x=\frac{b}{a}$ chiar de ar fi rădăcina lui $f(x)=0$ nu poate fi rădăcină comună, deci dacă α este o rădăcină comună, avem $f(\alpha)=0$ şi $f\left(\frac{b\alpha-a}{a\alpha-b}\right)=0$, adică $\frac{b\alpha-a}{a\alpha-b}$ este deasemenea rădăcină comună. **23.** Din relaţiile care ar da pe cel mai mare divizor comun între F şi f, adică: $F=Qf+R_1$, $f=Q_1R_1+R_2\ldots R_{n-1}=Q_nR_n+R_{n+1}$, deducem: $R_1=F-Qf$, $R_2=f-Q_1(F-Qf)=(1-Q)f-Q_1F=\alpha f+\beta F$, unde α şi β sunt polinoame de grad mai mic decât F şi f. Din aproape, în aproape, se găseşte $R_{n+1}=FF_1+ff_1$, F_1 şi f_1 fiind polinoame de grad mai mic decât n şi m. Dar cum F şi f sunt prime între ele, R_{n+1} este constantă, deci putem lua pe F_1 şi f_1 astfel ca să avem relaţia cerută. **24.** Fie a rădăcina comună derivatelor în chestiune. Avem după formula lui *Taylor*: $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-p}}{(n-p)!}f^{(n-p)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$

$f^{(n-1)}(a)+(x-a)^n A_0$ şi cum trebue să avem $f^{(n-p)}(a)=$ $=f^{(n-p+1)}(a)=\ldots.=f^{(n-1)}(a)=0$, $f(x)=A_0(x-a)^n+$ $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ fiind un polinom arbitrar de gradul $n-p-1$ $\therefore$ $A_1=-C_n^1 A_0$, $A_2=C_n^2 A_0,\ldots$, $A_p=\pm C_n^p A_0$. **25.** Observăm că derivând în raport cu t ecuaţia $P(x,t)=0$, obţinem (1) $P_3+P_2 x'_t=0$, unde x'_t este un polinom în t, diferit de zero. Dacă $D(x,t)$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P_1, P_2, $P_1=Dp_1$, $P_2=Dp_2$ sau înlocuind pe P_2 extras din (1), $P_3=-Dp_2 x'_t$. Se vede că polinoamele P_1, P_3 în afară de factorul comun D, mai pot avea factori comuni, divizorii comuni ai polinoamelor p_1, x'_t care sunt polinoame în t, pentru că x'_t este polinom în t. Deci cel mai mare divizor comun al polinoamelor P_1, P_3 este D multiplicat cu un polinom în t. (G. M. XI).

XXI. 1. Rădăcinile de ordin n ale unui polinom sunt rădăcini de ordin $n-1$ în derivată. Derivata membrului I este $3x^2-1$, rădăcinile sale $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dintre acestea $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ verifică şi ecuaţia propusă. Aceasta are deci pe $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ rădăcină dublă.

2. Ecuaţia dată şi derivata sa: $2x^3-9x^2+10x=0$ trebue să aibă o rădăcină comună. Rădăcinile derivatei sunt: $x=0$, $x=\frac{5}{2}$, $x=2$. α) Dacă $x=0$ este rădăcina dublă a ecuaţiei, $a=0$ iar celelalte rădăcini sunt date de $x^2-6x+10=0$. β) Dacă $x=\frac{5}{2}$ este rădăcina dublă, $a=\frac{125}{128}$. Notând x_3, x_4 rădăcinile simple, relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ne dau $x_3+x_4+5=6$, şi $x_3, x_4=-\frac{5}{4}$, deci x_3, x_4 sunt date de ecuaţia $4x^2-4x-5=0$, $x_3, x_4=\frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$. γ) Dacă $x=2$ este rădăcina dublă, $a=1$, $x_3+x_4=2$, $x_3 x_4=-2$, deci $x_3, x_4=$ $1\pm\sqrt{3}$. **3.** Trebue să avem $x^4-4ax^3+6bx^2-8x+1\equiv$

$(x^2+\alpha x+\beta)^2$. Desvoltând membrul II şi identificând, avem: $\alpha=-4$, $\beta=1$, $a=2$, $b=3$, rădăcinile sunt date de $x^2-4x+1=0$, $x=2\pm\sqrt{3}$ sau $\alpha=4$, $\beta=-1$, $a=-2$, $b=\frac{7}{3}$. Rădăcinile sunt date de $x^2+4x-1=0$, $x=-2\pm\sqrt{5}$.

4. Fie în general $P_4(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ şi $Q_2(x)=x^2+a_1x+b_1$, $R_2(x)=x^2+a_2x+b_2$. După enunţ, avem: $P_4(x)\equiv Q_2[R_2(x)]\equiv x^4+2a_2x^3+(a_2^2+2b_2+a_1)x^2+(2a_2b_2+a_1a_2)x+b_2^2+a_1b_2+b_1$. Egalând coeficienţii celor două exprimări ale lui $P_4(x)$, obţinem pentru determinarea necunoscutelor a_1, a_2, b_1, b_2 relaţiile: $2a_2=A$, $2b_2+a_1=B-\frac{A^2}{4}$, $2b_2+a_1=\frac{2C}{A}$, $b_2^2+a_1b_2+b_1=D$. Se vede că unul din coeficienţii a_1 a_2, b_1, b_2 poate fi luat în mod arbitrar, iar din a doua şi a treia relaţie reiese condiţia de compatibilitate $A^3-4AB+8C=0$. Se rezolvă $Q_2(y)=0$, fie r' şi r'' rădăcinile. Rădăcinile ecuaţiei $P_4(x)=0$ sunt date de $R_2(x)=r'$, $R_2(x)=r''$. Aceste ecuaţiuni nu pot avea o rădăcină comună decât dacă $r'=r''$, dar în acest caz ambele rădăcini sunt comune şi $P_4(x)=0$ are două rădăcini duble. Dacă una din ecuaţiile $R_2(x)=r'$, $R_2(x)=r''$ are rădăcinile egale, rădăcina dublă a ecuaţiei $P(x)=0$ este $-\frac{a_2}{2}$, iar suma celorlalte două rădăcini este $-a_2$ deci rădăcina dublă este media aritmetică a celorlalte două. In cazul particular din enunţ, luând $b_1=0$, găsim rădăcinile -5, -3, 4, 6. (G. M. XL. p. 38). **5.** Să notăm $f(x,y)\equiv x^5-5a^2x^3y^2+5bxy^4+cy^5$ polinomul obţinut omogenizând membrul I al ecuaţiei date. $f'_x(x,1)$ şi $f'_y(x,1)$ au o rădăcină comună în cazul când $f(x,1)$ are o rădăcină dublă. In cazul problemei, ele au două rădăcini comune. Deci vom căuta condiţia pentru ca polinoamele $f'_x(x,1)\equiv x^4-3a^2x^2+b$, $f'_y(x,1)=-10a^2x^3+20bx+5c$ să aibă un cel mai mare divizor comun de gradul II. Condiţiile sunt: $a^4bc=c(2b-3a^4)^2$, $a^2c^2=4b(2b-3a^4)$

$(4b-5a^4)$, iar cel mai mare divizor comun: $(4b-6a^4)x^2+cx+2a^2b$. Putem presupune $c=0$ şi $c\neq 0$. Fie: 1) $c=0$ — din relaţia II putem avea: *a*) $b=0$, atunci $x=0$ este rădăcină triplă celelalte rădăcini sunt $x=\pm a\sqrt{5}$. *b*) $2b-3a^4=0$. Ecuaţia se scrie $x\left(x^4-5a^2x^2+\frac{15a^4}{2}\right)=0$. Sunt două rădăcini duble numai când $a=0$, ecuaţia reducându-se la $x^5=0$. *c*) $4b-5a^4=0$, avem $x=0$ rădăcină simplă şi $\pm a\sqrt{\frac{5}{2}}$ rădăcini duble. Fie 2) $c\neq 0$. Prima relaţie de condiţie dă $4b^2-13a^4b+9a^8=0$ $\therefore$ $b'=a^4$, $b''=\frac{9}{4}a^4$; introducând aceste valori în a doua relaţie, avem pentru prima $c=\pm 2a^5$, rădăcinile duble sunt date de ecuaţia $x^2\mp ax-a^2=0$, iar rădăcina simplă este $\mp 2a$; pentru $b=\frac{9}{4}a^4$ corespunde $c=\pm 3a^5\sqrt{6}$. Observăm că în acest caz polinomul $(4b-6a^4)x^2+cx+2a^2b$ care reprezintă cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ şi $f'(x)$ devine $\frac{3a^4}{2}(2x^2\pm 2a\sqrt{6}x+3a^2)$, care având o rădăcină dublă, $f(x)$ are o rădăcină triplă, ceeace nu convine problemei. **6.** Polinomul din membrul I şi derivata sa trebue să aibă o rădăcină comună. Cu metoda folosită în capitolul precedent, aflăm condiţia $3125a^9=1$. **7.** Polinomul dat şi derivata sa, $nx^{n-1}-mpx^{m-1}$ trebue să admită un cel mai mare divizor comun de gradul I. Impărţind polinomul la derivată aflăm restul $-p(n-m)x^m+nq$. Rădăcina acestui polinom, $x=\sqrt[m]{\frac{nq}{p(n-m)}}$ trebue să fie şi rădăcină a derivatei polinomului considerat. Inlocuind şi raţionalizând, aflăm condiţia $\left(\frac{p}{n}\right)^n . m^m=\left(\frac{q}{n-m}\right)^{n-m}$. **8.** Polinomul dat se anulează pentru $x=1$, iar derivata sa nu se anulează, deci $x=1$ nu poate fi rădăcină dublă. **9.** x^2+x+1 are ca rădăcini pe α şi α^2 rădăcinile cubice complexe ale unităţii. Avem $\alpha^3=1$ şi $\alpha^2+\alpha+1=0$. Inlocuind pe α în polinomul dat şi ţinând seamă de condiţii

$(\alpha+1)^{6n+1}-\alpha^{6n+1}-1=(-\alpha^2)^{6n}(-\alpha^2)-\alpha^{6n}\alpha-1=-(\alpha^2+\alpha+1)=0$, deasemenea înlocuind pe α^2, $(\alpha^2+1)^{6n+1}-(\alpha^2)^{6n+1}-1=(-\alpha)^{6n}(-\alpha)-\alpha^{12n}\alpha^2-1=-(\alpha^2+\alpha+1)=0$, deci polinomul dat se divide cu $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\equiv x^2+x+1$. Derivata polinomului este $(6n+1)[(x+1)^{6n}-x^{6n}]$ şi se vede imediat că admite ca rădăcini deasemenea pe α, α^2. Deci α, α^2 sunt rădăcini duble ale polinomului dat, adică el se divide cu $(x^2+x+1)^2$. **10.** Dacă $b=c=0$, rădăcina triplă este 0, altă rădăcină $-4a$. Dacă $b\neq 0$ să notăm $f(x,y)$ polinomul din membrul I omogenizat. $f(x,y)\equiv x^4+4ax^3y+6bxy^3+cy^4$. Polinoamele $f''_{x^2}(x,1)\equiv 12x^2+24ax$, $f''_{xy}(x,1)\equiv 12ax^2+18b$, $f''_{y^2}(x,1)\equiv 36bx+12c$ au ca rădăcină comună, o rădăcină triplă a polinomului $f(x)$. Dar $f''_{y^2}(x,1)=0$ dă $x=-\frac{c}{3b}$. Aceasta trebue să verifice şi ecuaţiile $f''_{x^2}(x,1)=0$, $f''_{xy}(x,1)=0$. Deci $c^2-6abc=0$ şi $2ac^2+27b^3=0$. $c=0$ satisface condiţiile dacă $b=0$, caz cercetat iniţial. $c\neq 0$, condiţiile se scriu $c-6ab=0$, $2ac^2+27b^3=0$ sau $3b=-8a^3$, $c=-16a^4$. Cum $x=-\frac{c}{3b}$ este rădăcina comună a polinoamelor f'''_{x^2}, f'''_{xy}, f'''_{y^2}, este rădăcină triplă în $f(x)$ şi înlocuind pe c şi b, rădăcina triplă este $-2a$. Prima relaţie între rădăcini şi coeficienţi ne dă a $4a$ rădăcină a ecuaţiei, $x=2a$. **11.** Observăm că a şi b nu pot fi simultan nuli, pentrucă ecuaţiunea ar dispare. Dacă rădăcina triplă ar fi nulă, condiţiile necesare şi suficiente sunt $a-b+ab=0$, $a+b+ab=0$ care duc la $a=b=0$, deci ecuaţia nu există. In general, pentru o ecuaţie de forma $mx^4+nx^3+px^2+r=0$, ecuaţia derivată este $x(4mx^2+3nx+2p)=0$ şi aceasta are o rădăcină dublă diferită de zero, dacă prima are o rădăcină triplă diferită de zero. Dar ecuaţia $4mx^2+3nx+2p=0$ are rădăcină dublă dacă $9n^2-32mp=0$, rădăcina fiind $x=-\frac{3n}{8m}$ şi cum aceasta trebue să verifice şi ecuaţia iniţială, avem înlocuind şi ţinând seama de condiţia iniţială $p^2+12mr=0$. Deci condiţiile ca ecuaţia dată în enunţ să aibă rădăcină triplă

sunt $9n^2-32mp=0$, $p^2+12mr=0$ unde $m=a+b-ab$, $n=b-a+ab$, $p=a-b+ab$, $r=a+b+ab$, iar rădăcinile ecuației, $x_{1,2,3}=-\frac{3n}{8m}$, $x_4=\frac{n}{8m}$. (G. M. XLII. p. 424).

12. Omogenizând membrul I al ecuației date, găsim: $f(x,y)\equiv x^5+px^3y^2+qx^2y^3+ry^5$. Rădăcina triplă a ecuației $f(x,1)=0$ este rădăcină comună în ecuațiile $f''_{x^2}(x,1)\equiv 20x^3+6px+2q=0$, $f''_{xy}(x,1)\equiv 6px^2+6qx=0$, $f''_{y^2}(x,1)\equiv 2px^3+6qx^2+20r=0$. Din a doua, rezultă că rădăcina triplă poate fi 0 sau $-\frac{q}{p}$. In primul caz, din celelalte ecuațiuni deducem $q=r=0$; în al doilea caz, $q(5q^2+p^3)=0$ și $q^3+5p^2r=0$. **13.** Să notăm $f(x)$ membrul I al ecuațiunii. Trebue ca $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ să aibă un divizor comun de gradul I și cum $f'''(x)\equiv 60ax^2+24bx$, acest divizor poate fi x sau $60ax+24bx$. In primul caz, deducem condițiile $c=d=e=0$. In al doilea caz, $x=-\frac{2b}{5a}$ este rădăcina de ordinul IV și $c=-\frac{8b^3}{25a^2}$, $d=-\frac{16b^4}{125a^3}$, $e=-\frac{48b^5}{3125a^4}$. Relațiile între rădăcini și coeficienți dau a 5-a rădăcină: $\frac{3b}{5a}$. **14.** Cel mai mare divizor comun între polinomul dat și derivata sa este x^2-2x+1. Deci $x=1$ este rădăcină triplă a polinomului dat. Avem $(x-1)^3(x^2+x+3)$. **15.** Cel mai mare divizor comun între polinomul dat și derivata sa este x^3-3x+2, care observăm că se divide cu $x-1$ și $x+2$. Deci $x^3-3x+2\equiv(x-1)^2(x+2)$. Rezultă că polinomul dat se divide cu $(x-1)^3(x+2)^2$; făcând împărțirea, găsim câtul $x-3$. Rezultatul este $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)$. **16.** Procedeu analog. Rezultatul este $(x-a)^2(x-b)^3(x+2)$. **17.** Insemnând cu x jumătatea bazei triunghiului, ecuația problemei este $x^4-2a^2rx+a^4=0$; ca să admită o singură rădăcină reală, ea trebue să fie dublă; se găsește condiția $16a^4-27r^4=0$, rădăcina dublă este $x=\frac{2a^2}{3r}=+\frac{1}{2}r\sqrt{3}$, celelalte două sunt date de ecuația

$4x^2+4\sqrt{3}rx+qr^2=0$. **18.** $F(a)=0$; $F'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)+f'(a)]+\frac{1}{2}(x-a)f''(x)-f'(x)=\frac{1}{2}(x-a)f''(x)+\frac{1}{2}[f'(a)-f'(x)]$, deci $F'(a)=0$; $F''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}(x-a)f'''(x)-\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}(x-a)f'''(x)$, $F''(a)=0$. Dacă $f(x)$ este de gradul III, $F(x)$ este deasemenea de gradul III şi cum $F(a)=F'(a)=F''(a)=0$, a este rădăcină triplă, iar polinomul cub perfect. Dacă $f(x)$ este de gradul al doilea, se arată direct că expresia este identic nulă. **19.** Reprezentând cu $\alpha+nr$, $\alpha+(n-1)r,\ldots$ $\alpha+r$, α termenii progresiei, ecuaţia formată poate fi scrisă $\alpha f(x)+rxf'(x)=0$ şi $(x-a)^{n-1}$ fiind factor în $f'(x)$, este factor pentru întreg membrul I. **20.** Dacă a este o rădăcină dublă a ecuaţiei $U(x)-\lambda V(x)=0$, distingem patru cazuri: 1) a rădăcină dublă pentru $U(x)=0$, $V(x)=0$, deci rădăcină simplă pentru $U'(x)=0$, $V'(x)=0$ şi ca urmare rădăcină triplă pentru $U(x)\,V'(x)-V(x)\,U'(x)=0$, 2) a rădăcină simplă pentru $U(x)=0$, $V(x)=0$, deci $U'(a)\neq 0$, $V'(x)\neq 0$ şi cum a este rădăcină a ecuaţiei $U'(x)-\lambda V'(x)=0$, $U'(a)-\lambda V'(a)=0$, $\lambda=\frac{U'(a)}{V'(a)}$, iar ecuaţia $U(x)-\lambda V(x)=0$ devine $U(x)\,V'(a)-V(x)\,U'(a)=0$; dar a este rădăcină a ecuaţiilor $U(x)=0$ $V(x)=0$; rezultă $U(a)\,V'(a)-V(a)\,U'(a)=0$, deci a este şi rădăcină a ecuaţiei $U(x)\,V'(x)-V(x)\,U'(x)=0$. 3) $U(a)\neq 0$, $V(a)\neq 0$ şi $U'(a)=0$, $V'(a)=0$; din $U(x)-\lambda V(x)=0$ care admite pe a rădăcină deducem $\lambda=\frac{U(a)}{V(a)}$, apoi raţionamentul se desfăşoară după modelul celui precedent. 4) $U(a)\neq 0$ $V(a)\neq 0$, $U'(a)\neq 0$, $V'(a)\neq 0$. Din ipoteză avem $U(a)-\lambda V(a)=0$, $U'(a)-\lambda V'(a)=0$; rezultă $\lambda=\frac{U(a)}{V(a)}=\frac{U'(a)}{V'(a)}$, deci $U(a)\,V'(a)-V(a)\,U'(a)=0$ ceiace înseamnă că a este rădăcina ecuaţiei $U(x)\,V'(x)-V(x)\,U'(x)=0$. Concluzia; a este în ipotezele problemei rădăcina ecuaţiei scrisă precedent.

21. $A^2+B^2=(A+Bi)(A-Bi)$; rădăcina dublă a membrului I, nu poate fi rădăcină simplă în $A+Bi$ şi $A-Bi$, deoarece ar urma că A şi B o admit ca rădăcină, deci nu sunt prime între ele. Rezultă că rădăcina dublă a polinomului A^2+B^2 este rădăcină dublă în $A+Bi=0$ sau în $A-Bi=0$, deci rădăcină simplă în $A'+B'i=0$ sau în $A'-B'i=0$ şi cum $A'^2+B'^2=(A'+B'i)(A'-B'i)$, ecuaţia $A'^2+B'^2=0$ este verificată deasemenea. **22.** Fie a rădăcina dublă a ecuaţiei $f^2-pf\varphi+q\varphi^2=0$. Dacă a este rădăcină a polinomului $\varphi(x)$, trebue să fie rădăcină şi a polinomului $f(x)$ ceeace nu se poate deoarece $\varphi(x)$ şi $f(x)$ sunt date prime între ele; rezultă că putem descompune astfel $f^2-pf\varphi+q\varphi^2=(f-\lambda\varphi)(f-\mu\varphi)$, λ şi μ fiind rădăcinile ecuaţiei $y^2-py+q=0$. a nu poate fi rădăcină simplă în $f-\lambda\varphi$ şi $f-\mu\varphi$ pentrucă ar fi rădăcină simplă a diferenţei lor, deci a polinomului φ, imposibil după cele arătate la început. Deci a este rădăcină dublă în $f-\lambda\varphi$ sau în $f-\mu\varphi$, adică rădăcină simplă în $f'-\lambda\varphi'$ sau în $f'-\mu\varphi'$ deci şi în ecuaţia $f'^2-pf'\varphi'+q\varphi'^2=0$ deoarece $f'^2-pf'\varphi'+q\varphi'^2=(f'-\lambda\varphi')(f'-\mu\varphi')$. **23.** Generalizarea ultimelor două chestiuni. $F(f,\varphi)$ fiind omogenă se poate scrie, după un raţionament analog celui precedent astfel: $A(f-\lambda_1\varphi)(f-\lambda_2\varphi)..(f-\lambda_m\varphi)$, cantităţile λ fiind rădăcinile ecuaţiei $F(y,1)=0$. a fiind rădăcina de ordin α a polinomului $F(f,\varphi)$, întrucât f şi φ sunt prime între ele, este rădăcină de ordin α în unul din factorii $f-\lambda_i\varphi$, $(i=1,\dots m)$, deci rădăcină de ordin $\alpha-1$ în $f'-\lambda_i\varphi'$ şi cum $F(f',\varphi')=A(f'-\lambda_1\varphi')\dots(f'-\lambda_m\varphi')$, rădăcină de ordin $\alpha-1$ în $F(f',\varphi')$. **24.** Fie $A(x)=(x-a)^{n-p}\varphi(x)$, $B(x)=(x-a)^{n-p}\psi(x)$. Avem $A(x)-B(x)=x^{n-p}(A_p-B_p)+x^{n-p-1}(A_{p+1}-B_{p+1})+\dots+x^{n-p-k}(A_{p+k}-B_{p+k})+\dots+A_n-B_n=(x-a)^{n-p}[\varphi(x)-\psi(x)]$. Rezultă că $\varphi(x)-\psi(x)$ este o constantă α ceeace arată că polinoamele $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ au coeficienţii tuturor termenilor egali, afară de termenii de gradul zero în x. Dar termenul de gradul $n-p-k$ în membrul al doilea este $C^k_{n-p}a^k\alpha$. Deci $C^k_{n-p}a^k\alpha=A_{p+k}-B_{p+k}=0$. Conchidem că $\alpha=0$, adică polinoamele $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sunt identice, deci $A(x)\geqq B(x)$. (G. M. XXXV. p. 225).

XXII. 1. Cazurile limită $\alpha=0$, $\alpha=1$, $\lambda=0$ se pot studia direct şi se vede că satisfac enunţul. Notăm $f(x)$ membrul I al ecuaţiunii. $f(0).f(1)=\alpha(1-\alpha)(\lambda+\alpha)(\lambda-\alpha-1)$; dar primii trei factori sunt pozitivi. Dacă 1°) $\lambda-\alpha-1<0$, $f(0).f(1)<0$, deci ecuaţia admite o rădăcină între zero şi unu. 2°) $\lambda-\alpha-1>0$, $f(0).f(1)>0$ şi cum $0\leqslant\frac{1}{2\lambda}<1$, iar $f\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=-\frac{(\lambda-2\alpha\lambda-1)^2}{4\lambda^2}\leqslant 0$, ambele rădăcini sunt cuprinse între zero şi unu. 3°) $\lambda-\alpha-1=0$, $x'=1$, $x''=\frac{1-\alpha}{2+\alpha}$ şi avem: $0<x''<1$. (G. M. XL. p. 513). **2.** Să notăm $f(x)$ membrul I al ecuaţiei. Avem: $f(0)=(\lambda-1)(\lambda-a)$, $f(1)=(\lambda+1)(\lambda-a+1)$, deci $f(0).f(1)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-a)(\lambda-a+1)$. 1°. $0<\lambda<1$, $a<0$, deci $f(0).f(1)<0$, adică $f(x)$ se anulează între 0 şi 1. 2°. $0<\lambda<1$, $a>1$ avem două cazuri: $\alpha)$ $a\leqslant\lambda+1$, rezultă $f(0).f(1)\geqslant 0$. Dar $f(0)>0$, $f(1)\geqslant 0$ şi $f(a-\lambda)\equiv(a-\lambda)(a-\lambda-1)\leqslant 0$ $\therefore$ $f(x)$ se anulează de două ori în intervalul 0, 1; $\beta)$ $a>\lambda+1$, $f(0).f(1)<0$ şi prin urmare avem o rădăcină între zero şi unu. 3°. *Cazuri limită.* $\alpha)$ $\lambda=1$, ecuaţia se scrie $x[3x-(2a-1)]=0$, admite totdeauna rădăcina zero, cea de a doua putând fi exterioară sau interioară intervalului 0, 1, după valorile pe care le ia a. $\beta)$ $\lambda=0$. Ecuaţia propusă se scrie: $3x^2-2(a+1)x+a=0$. Se vede imediat că $f(0).f(1)\leqslant 0$, egalitatea corespunzând cazurilor limită $a=0$, $a=1$, când ecuaţia admite respectiv rădăcinile: $0, \frac{2}{3}$; $1, \frac{1}{3}$. (G. M. XLI. p. 161). **3.** Presupunem $p>0$. Fie $z=x(p-x^2)-q$. Avem tabloul

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
y	$+\infty$		$\frac{-2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$		$\frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$		$-\infty$
z	$+\infty$		$\frac{-2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}-q$		$\frac{+2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}-q$		$-\infty$

Pentru ca z să aibă trei rădăcini reale trebue $z\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)>0$, deci $4p^3-27q^2>0$ în care intră implicit $p>0$. Dacă $p<0$, funcţiunea y', deci şi z' păstrează un semn constant, deci z nu poate avea trei rădăcini reale. **4.** Indepărtând numitorii se obţine o ecuaţiune de gradul II. Să notăm $f(x)=a^2(x-q)+b^2(x-p)-c(x-p)(x-q)$, $p\neq q$. Avem $f(p)=a^2(p-q)$, $f(q)=b^2(q-p)$. Deci $f(p).f(q)<0$, ecuaţiunea admite o rădăcină reală între p şi q. Cealaltă rădăcină nu poate fi imaginară, pentrucă o ecuaţiune cu coeficienţi reali, nu poate avea decât un număr par de rădăcini imaginare. **5.** Indepărtând numitorii se obţine o ecuaţiune de grad n. Să presupunem $p_1<p_2<p_3<\ldots<p_n$ şi $f(x)=\Sigma a_i^2(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_{i-1})(x-p_{i+1})\ldots(x-p_n)-b(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_n)$. $f(p_1)=a_1^2(p_1-p_2)(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_n)$, $f(p_2)=a_2^2(p_2-p_1)(p_2-p_3)\ldots(p_2-p_n)$ şi cum $(p_1-p_i)(p_2-p_i)>0$, $(p_1-p_2)(p_2-p_1)<0$, $f(p_1).f(p_2)<0$. Analog se găseşte că în general, $f(p_i).f(p_{i+1})<0$. Deci în fiecare interval (p_1, p_2), $(p_2, p_3)\ldots(p_{n-1}, p_n)$ se află câte o rădăcină reală. In total $n-1$ rădăcini reale şi cum o ecuaţiune cu coeficienţi reali nu poate avea o singură rădăcină imaginară, ecuaţiunea dată trebue să aibă toate rădăcinile egale. **6.** Notăm $f(x)$ membrul I al ecuaţiunii: $f(-\infty)=-\infty$, $f[-(a+b)]=ab(a+b)>0$, $f(0)=-(a+b)(a^2+b^2)<0$, $f(+\infty)=+\infty$. Deci ecuaţiunea are trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $[-\infty, -(a+b)]$, $[-(a+b), 0]$, $[0, +\infty]$. (G. M. VIII). **7.** Dacă $a<b<c$, avem $f(-\infty)=-\infty$, $(a)=-B(a-b)-C(a-c)>0$, $f(+c)=-A(c-a)-B(c-b)<0$, $f(+\infty)=+\infty$, deci trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, a)$; (a, c); $(c, +\infty)$. **8.** Notând cu $f(x)$ primul membru al ecuaţiunii, avem imediat: $f(\pm l)=-(l^2-x_0^2)h\cos^2\alpha$ şi $f(+x_0)=h(l^2-x_0^2)\sin^2\alpha$ *** $f(\pm l).f(+x_0)=-h^2(l^2-x_0^2)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha<0$; deci avem două rădăcini reale şi cum ecuaţiunea dată este de gradul al treilea şi cu coeficienţi reali, a treia rădăcină trebue să fie reală. Aşadar, trei rădăcini reale în intervalele determinate de $-l$, $+l$, x_0 şi $+\infty$ sau $-\infty$. **9.** Notăm cu $f(x)$ membrul întâi

al ecuaţiunii. Să presupunem $b>0$ de exemplu şi să punem: $\varphi_1(x)=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n-1})$ şi $\varphi_2(x)=(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n})$. Observăm că în general $\varphi_1(a_{2p})$ are semnul lui $(-1)^p$, iar $\varphi_2(a_{2p+1})$ semnul lui $(-1)^p$; şi cum $f(a_{2p})=\varphi_1(a_{2p})$ şi $f(a_{2p-1})=b\,\varphi_2(a_{2p-1})$ $***$ $f(a_{2p})\,f(a_{2p-1})<0$. Ecuaţiunea admite deci n rădăcini reale. In acelaş fel demonstrăm proprietatea în cazul $b<0$. **10.** Observând că: $\cos 2\alpha=4\cos^3\frac{2\alpha}{3}-3\cos\frac{2\alpha}{3}$ şi $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2a^2-1$ avem: $f(x)\equiv 4x^3-3x-2a^2+1=0$. Formăm tabloul variaţiunii în care introducem în intervalul valorilor lui x pe -1 şi $+1$. Tabloul variaţiunii este

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	$+$		0	$-$	$-$		0	$+$	$+$
y	$-\infty$		$-2a^2$	$2(1-a^2)$		$-2a^2$		$2(1-a^2)$			$+\infty$
			$-$	$M>0$		$m<0$		$+$			

rădăcinile sunt reale şi câte una în fiecare interval $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, $\left(+\frac{1}{2}, +1\right)$. Semnul rădăcinei aflată în intervalul $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ depinde de semnul expresiunei $f(0)=1-2a^2$. Ecuaţia are o rădăcină dublă, când aceasta este rădăcină şi a derivatei, dar rădăcinile derivatei fiind $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$, una din ele verifică $f(x)=0$, dacă $1-a^2=0$, deci $a=\pm 1$. **11.** Ecuaţia este $f(x)\equiv x^3-3ax^2-3x+a=0$, $f(x)$ are un maximum egal cu $2(1+a^2)(\sqrt{1+a^2}-a)>0$, pentru $x=a-\sqrt{a^2+1}$ şi un minim; $-2(1+a^2)(\sqrt{1+a^2}+1)<0$ pentru $x=a+\sqrt{a^2+1}$; cum $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=\infty$, există câte o rădăcină reală în fiecare interval $[-\infty, a-\sqrt{1+a^2}]$, $[a-\sqrt{1+a^2}, a+\sqrt{1+a^2}]$, $[a+\sqrt{1+a^2}, +\infty]$. Pentru existenţa rădăcinii duble ar trebui ca maximul sau minimul lui $f(x)$ să fie nul, ceeace nu se

poate pentru valorile reale ale lui a. **12.** Din identitatea lui Moivre: $\left(\cos\frac{\alpha}{5}+i\sin\frac{\alpha}{5}\right)^5=\cos\alpha+i\sin\alpha$, rezultă ecuaţiunea $f(x)\equiv 16x^5-20x^3+5x-a=0$; rădăcinile care anulează derivata $f'(x)\equiv 5(16x^4-12x^2+1)=0$ sunt date de $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\pm\left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}\right)$; maximele funcţiunii sunt: $f\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)=1-a$ şi $f\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]=1-a$, iar minimele: $f\left[-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]=-(1+a)$ şi $f\left[+\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]=-(1+a)$; deci, $|a|$ fiind mai mic ca 1, *maximele* funcţiunii sunt *pozitive* iar *minimele negative*. Cum încă, mai avem şi $f(-1)=-(1+a)$, $f(+1)=1-a$; urmează că şirul de valori ale funcţiunii: $f(-1)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, $f(+1)$ prezintă cinci variaţii de semn pentru funcţiunea continuă $f(x)$; de unde rezultă proprietatea enunţată. **13.** Avem $(a+\sqrt{b})^k=a^k+C_k^1a^{k-1}\sqrt{b}+C_k^2a^{k-2}b+C_k^3a^{k-3}b\sqrt{b}+\ldots=(a^k+C_k^2a^{k-2}b+\ldots)+\sqrt{b}(C_k^1a^{k-1}+C_k^3a^{k-3}b+\ldots)=P_k(a,b)+\sqrt{b}\,Q_k(a,b)$; $P_k(a,b)$ şi $Q_k(a,b)$ fiind polinoame raţionale în a şi b. Analog, găsim $(a-\sqrt{b})^k=P_k(a,b)-\sqrt{b}\,Q_k(a,b)$, observând că termenii cari conţin pe $\sqrt{b}$ provin din ridicarea lui la puteri impare şi că $(+\sqrt{b})^{2p+1}=(+\sqrt{b})^{2p}.\sqrt{b}$ şi $(-\sqrt{b})^{2p+1}=(-\sqrt{b})^{2p}.(-\sqrt{b})=(+\sqrt{b})^{2p}.(-\sqrt{b})$. Fie $f(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}A_kx^k=0$ ecuaţia cu coeficienţi raţionali ce admite pe $a+\sqrt{b}$ ca rădăcină. Avem $f(a+\sqrt{b})\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k(a+\sqrt{b})^k=\sum_{k=0}^{n}[A_kP_k(a,b)+A_k\sqrt{b}\,Q_k(a,b)]=P(a,b)+\sqrt{b}\,Q(a,b)\equiv 0$, dar cum prin definiţie nu putem avea $\sqrt{b}=-\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, rezultă că: $P(a,b)=0$ şi $Q(a,b)=0$. Insă în acest caz: $f(a-\sqrt{b})\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k(a-\sqrt{b})^k\equiv P(a,b)-\sqrt{b}\,Q(a,b)\equiv 0$, deci şi

$a-\sqrt{b}$ este rădăcină a ecuaţiei $f(x)=0$. **14.** După problema precedentă $x=1-\sqrt{2}$ este deasemenea rădăcină; deci polinomul se divide cu $(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$. Calculând câtul între $f(x)$ şi (x^2-2x-1), avem: $x^4-7x^2+2x+2\equiv(x^2-2x-1)(x^2+2x-2)$. Rădăcinile factorului al doilea sunt: $-1\pm\sqrt{3}$. **15.** Ecuaţia admite şi rădăcina $3-i\sqrt{2}$. Deci $x^4+x^3-25x^2+41x+66\equiv(x-3-i\sqrt{2})(x-3+i\sqrt{2})\,Q(x)\equiv(x^2-6x+11)\,Q(x)$ $*^*_*$ $Q(x)\equiv x^2+7x+6$, cu rădăcinile -1 şi -6. **16.** Ecuaţia admite şi rădăcinile $\sqrt{2}-i$, $-\sqrt{2}+i$, $-\sqrt{2}-i$. Procedăm ca în problemele precedente şi găsim celelalte rădăcini: -2, $+3$. **17.** Ecuaţia admite şi soluţia conjugată $a-ib\sqrt{2}$, deci membrul I trebue să fie divizibil cu $(x-a-ib\sqrt{2})(x-a+ib\sqrt{2})=x^2-2ax+a^2+2b^2$, unde a şi b sunt întregi. Deci 615 trebue să se dividă cu a^2+2b^2 şi cum $615=3\times5\times41$, trebue să rezolvăm în numere întregi ecuaţiile

$a^2+2b^2=3$ $*^*_*$ $2b^2=3-a^2$, cu soluţiile $a=\pm1$, $b=\pm1$
$a^2+2b^2=41$ $*^*_*$ $2b^2=41-a^2$, » » $a=\pm3$, $b=\pm4$
$a^2+2b^2=123$ $*^*_*$ $2b^2=123-a^2$, » » $\begin{cases} a=\pm5, & b=\pm7 \\ a=\pm11, & b=\pm1 \end{cases}$

şi $a^2+2b^2=1$, 5, 15, 205, 615 — fără soluţii întregi. Dintre soluţiile $a+ib\sqrt{2}$ astfel găsite numai $1\pm i\sqrt{2}$ şi $3\pm i\sqrt{2}$ convin. Deci membrul I al ecuaţiei se divide cu produsul trinoamelor x^2-2x+3, $x^2-6x+41$. Câtul este x^2+8x+5, el dă celelalte rădăcini ale ecuaţiei: $-4\pm\sqrt{11}$. (G. M. XLII. p. 154). **18.** Ecuaţia care admite rădăcina $1+\sqrt{2}+i$, admite şi rădăcinile $1-\sqrt{2}+i$, $1+\sqrt{2}-i$, $1-\sqrt{2}-i$. Deci ecuaţia de grad cel mai mic admiţând pe $1+\sqrt{2}+i$ ca rădăcină este de gradul 4: $(x-1-\sqrt{2}-i)(x-1+\sqrt{2}-i)(x-1-\sqrt{2}+i)(x-1+\sqrt{2}+i)=0$ $*^*_*$ $[(x-1)^2-(\sqrt{2}+i)^2]\,[(x-1)^2-(\sqrt{2}-i)^2]=0$ $*^*_*$ $(x^2-2x-2i\sqrt{2})(x^2-2x+2i\sqrt{2})=0$ $*^*_*$ $(x^2-2x)^2+8=0$ $*^*_*$ x^4-4x^3+

$4x^2+8=0$. **19.** Ecuaţia admite şi rădăcina dublă $\alpha-\beta\sqrt{5}$; membrul I trebue să fie deci identic cu $(x-\alpha-\beta\sqrt{5})^2$ $(x-\alpha+\beta\sqrt{5})^2\equiv[(x-\alpha)^2-5\beta^2]^2\equiv x^4-4\alpha x^3+x^2(6\alpha^2-10\beta^2)$ $+x(-4\alpha^3+20\alpha\beta^2)+\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+25\beta^4$. Identificând coeficienţii, găsim: $\alpha=1$, $\beta=\pm1$, $\lambda=4$, $\mu=4$. **20.** Vom pune ecuaţiunea subt forma particulară a ei următoare $f(x)\equiv(x^2-a^2x-1)(x-a-1)-a^2(x-1)=0$ şi vom însemna, cele două rădăcini reale şi de semne contrare ale ecuaţiunii: $\varphi(x)\equiv x^2-a^2x-1=0$, cu $x_1<x_2$. Observând că: $\varphi(+1)=-a^2<0$, rezultă că $(+1)$ este cuprins în intervalul (x_1, x_2); deci avem pentru şirul valorilor particulare ale lui $f(x)$, tabloul:

x	$-\infty$	x_1	$+1$	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-a^2(x_1-1)$	$+a^3$	$-a^2(x_2-1)$	$+\infty$
$a>0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$a<0$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Deci, oricum ar fi $a\neq0$, avem trei rădăcini reale cuprinse în intervalele arătate în tabloul de mai sus. In cazul $a<0$, având încă $f(0)>0$, intervalul $(x_1, 1)$ poate fi restrâns şi înlocuit prin $(0,+1)$. Dacă $a=0$, ecuaţiunea devine: $f(x)\equiv(x-1)^2(x+1)=0$. (G. M. XXXVIII. p. 277). **21.** Fie $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$; $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}$, derivând această relaţie, $\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}=-\left[\frac{1}{(x-a_1)^2}+\frac{1}{(x-a_2)^2}+\ldots+\frac{1}{(x-a_n)^2}\right]$, $\varphi(x)=-\sum_1^n\left(\frac{f(x)}{x-a_i}\right)^2<0$. Deci $\varphi(x)$ nu se anulează pentru nici o valoare reală a lui x. **22.** Dacă ecuaţia $(A_0+B_0i)x^m+(A_1+B_1i)x^{m-1}+\ldots+(A_m+B_mi)=0$, ar avea toate rădăcinile reale, ecuaţiile $A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0$, $B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m=0$, care au aceleaşi rădăcini cu ecuaţia dată, ar avea toate rădăcinile egale, deci coeficienţii proporţionali, deci coeficienţii ecuaţiei date nu ar fi primi între ei (G. M. V.).

XXIII. 1. $a>0$ (<0) zero sau două rădăcini pozitive (negative), 1 negativă (pozitivă). **2.** $p>0$, $q>0$ (<0) zero rădăcini pozitive (negative), 1 negativă (pozitivă), în orice caz 2 rădăcini imaginare; $p<0$, $q>0$ (<0), zero sau 2 rădăcini pozitive (negative), 1 negativă (pozitivă). **3.** $q>0$, $p>0$ (<0) zero rădăcini pozitive (negative), zero sau 2 rădăcini negative (pozitive); $q<0$, 1 rădăcină pozitivă, una negativă. **4.** $a>0(<0)$, $b>0(<0)$, zero rădăcini pozitive (negative), 1 sau 3 negative (pozitive); $a>0$ (<0), $b<0$ (>0) 1 pozitivă (negativă), zero sau 2 negative (pozitive); în toate cazurile cel puţin 2 rădăcini imaginare. **5.** m şi n impari, concluzii analoage ca la ex. 2; m par n impar, concluzii ca la 3; m impar, n par, $p>0(<0)$, $q>0(<0)$ zero rădăcini pozitive (negative), 1 negativă (pozitivă); $p>0(<0)$, $q<0$ (>0), una pozitivă (negativă), zero sau 2 negative (pozitive); m şi n pari, $p>0$, $q>0$ zero rădăcini reale, $p>0$, $q<0$, 1 pozitivă, 1 negativă, $p<0$, $q>0$, zero sau 2 pozitive şi zero sau două negative. $p<0$, $q<0$ 1 negativă şi 1 pozitivă. **6.** Termenii $A_{p-1}\,x^{m-p+1}+A_p\,x^{m-p}+A_{p+1}\,x^{m-p-1}$ dau, în ecuaţie şi în transformata în $-x$, două variaţii mai puţin când $A_p=0$ decât când $A_p\neq 0$, deci numărul total al variaţiunilor lui $f(x)$ şi $f(-x)$ nu poate fi egal cu gradul ecuaţiei. **7.** Dacă ecuaţia ar fi fost completă, între termenii $\varphi(x)=A_{p-1}x^{m-p+1}+A_p x^{m-p}+A_{p+1}x^{m-p-1}+A_{p+2}x^{m-p-2}$ şi aceia ai lui $\varphi(-x)$ am fi avut peste tot 3 variaţiuni, etc. **8.** Dacă $(x-a)f(x)=0$ are rădăcini imaginare, evident are rădăcini imaginare şi $f(x)=0$. Dacă $(x-a)f(x)=0$ are numai rădăcini reale, v şi v' fiind variaţiile ecuaţiei şi ale transformatei în $-x$, iar $m+1$ gradul, avem $v+v'=m+1$, ecuaţia $f(x)=0$ şi transformata în $-x$ au cel mult $v+v'-2<m$ variaţii, deci admite şi rădăcini imaginare. **9.** Fie $v+n$ şi v numărul variaţiilor lui $f(x)$ şi $(x+a)f(x)$, p numărul rădăcinilor pozitive, acelaş pentru ambele polinoame. O ecuaţiune poate avea numărul rădăcinilor pozitive cel mult egal cu numărul variaţiunilor; diferenţa între numărul variaţiunilor şi al rădăcinilor pozitive reprezintă număr de rădăcini imaginare.

Deci ecuaţia $(x+a)\,f(x)=0$ are $v-p$ rădăcini imaginare, iar $f(x)=0$, $v+n-p$, adică n rădăcini imaginare mai mult decât prima în cazul când n este par; dacă n este impar, problema este imposibilă, deoarece $v-p=2k$, $v+n-p=2k'$. **10.** Fie ecuaţia $f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_ix^{n-i}+a_{i+1}x^{n-i-1}+a_{i+2}x^{n-i-2}+\ldots+a_n=0$, unde a_i, a_{i+1}, a_{i+2} sunt în progresie geometrică de raţie q. Ecuaţia $(x-q)\,f(x)=0$ are acelaş număr de rădăcini imaginare ca şi ecuaţia dată. Dar $(x-q)f(x)\equiv x^{n+1}+(a_1-q)x^n+\ldots+(a_{i+1}-a_iq)x^{n-i}+(a_{i+2}-a_{i+1}q)x^{n-i-1}+\ldots-a_nq=0$ şi cum $a_{i+1}=a_iq$, $a_{i+2}=a_{i+1}q$, acestei ecuaţii îi lipsesc doi termeni consecutivi, deci după ex. **7**, are rădăcini imaginare; acelaş număr de rădăcini imaginare se află în $f(x)=0$. **11.** Fie ecuaţia $f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_ix^{n-i}+a_{i+1}x^{n-i-1}+a_{i+2}x^{n-i-2}+a_{i+3}x^{n-i-3}+\ldots+a_n=0$, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} sunt în progresie aritmetică; $(x-1)f(x)\equiv x^{n+1}+\ldots+(a_{i+1}-a_i)x^{n-i}+(a_{i+2}-a_{i+1})x^{n-i-1}+(a_{i+3}-a_{i+2})x^{n-i-2}+\ldots-a_n=0$. Dacă r este raţia progresiei aritmetice, $(x-1)f(x)\equiv x^{n+1}+\ldots\ldots+rx^{n-i}+rx^{n-i-1}+rx^{n-i-2}+\ldots\ldots-a_n=0$ * * * $(x-1)^2f(x)\equiv x^{n+2}+\ldots+(r-r)x^{n-i}+(r-r)x^{n-i-1}+\ldots+a_n=0$, deci, după (7), $(x-1)^2f(x)=0$ are rădăcini imaginare, adică şi $f(x)=0$ are rădăcini imaginare. **12.** $f(x)=0$ nu are lacune. Fie $f(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$

$xf'(x)\equiv a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\ldots+na_nx^n$

$x^2f''(x)\equiv 2a_2x^2+6a_3x^3+\ldots+n(n-1)a_nx^n$. Deci

$\varphi(x)\equiv a_0+a_2x^2+4a_3x^3+\ldots+(n-1)^2a_nx^n=0$.

In $\varphi(x)$ avem o lacună, deci cel puţin 2 rădăcini imaginare.

13. Se va face transformarea $y=\dfrac{x-a}{b-x}$; când x variază dela a la b, y variază dela 0 la $+\infty$, astfel că este suficient a cunoaşte natura rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei în y.

14. $f(s).f(-s)\equiv$

$$\begin{vmatrix} A^2+B'^2+B''^2-s^2 & AB'+A'B'+BB'' & AB''+BB'+A''B'' \\ AB'+A'B'+BB' & A'^2+B^2+B'^2-s^2 & B'B''+A'B+A''B \\ AB''+BB'+A''B'' & B'B''+A'B+A''B & A''^2+B^2+B''^2-s^2 \end{vmatrix},$$

deci $f(s).f(-s)=0$ are forma $s^6-Ls^4+Ms^2-N=0$, L, M, N

pozitivi $\therefore s^2$ are numai valori pozitive care verifică ecuaţia, deci $f(s).f(-s)=0$ nu are rădăcini de forma βi şi implicit $f(s)=0$ nu are astfel de rădăcini. Inlocuind pe A, A', A'' prin $A+\alpha$, $A'+\alpha$. $A''+\alpha$ se conchide analog că ecuaţia nu poate avea rădăcini de forma $\alpha+\beta i$. **15.** Insemnând cu x raza cercului, cu 2α, 2β, 2γ unghiurile sub care se văd din centru cele trei coarde, avem $2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi \therefore$ $sin(\alpha+\beta)=cos\gamma$; desvoltând membrul I şi având în vedere că $sin\alpha=\frac{a}{2x}$, etc., deducem: $\frac{a}{2x}\sqrt{1-\frac{b^2}{4x^2}}+\frac{b}{2x}\sqrt{1-\frac{a^2}{4x^2}}$ $=\sqrt{1-\frac{c^2}{4x^2}} \therefore 16x^6-8(a^2+b^2+c^2)x^4+(a^2+b^2+c^2)^2x^2=$ $a^2b^2c^2 \therefore x[4x^2-(a^2+b^2+c^2)]=\pm abc$, semnul — nu convine pentrucă $4x^2>a^2+b^2+c^2$. In adevăr, notând d lungimea coardei care uneşte capetele coardelor a, b, $4x^2=d^2+c^2>$ $a^2+b^2+c^2$, pentrucă unghiul coardelor a şi b fiind obtus, în $d^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{(a,b)}$, ultimul termen este pozitiv, deci $d^2>a^2+b^2$. Rămâne astfel numai $4x^3-(a^2+b^2+c^2)x-abc=0$ care admite o rădăcină pozitivă. Dacă $a=b=c$, rădăcina ce convine este $x=a$, patrulaterul corespunzând unei jumătăţi de exagon. **16.** Vol. sferei — vol. cilindrului — 2 vol. calotei $=2m$ vol. calotei şi notând x jumătate din înălţimea cilindrului, vol. calotei = vol. sect. sferic — vol. con. cu vârful în centrul sferei şi având la bază, baza cilindrului $=\frac{2\pi r^2(r-a)}{3}-$ $\frac{\pi(r^2-x^2)x}{3}$. Ecuaţia problemei este $f(x)\equiv(m-2)x^3-$ $3mr^2x+2mr^3=0$. Dacă $0\leqslant m\leqslant 2$, ecuaţia are o singură rădăcină pozitivă, care convine problemei pentrucă $f(0)=2mr^3$, iar $f(r)=-2r^3$, deci rădăcina este mai mică decât r. Dacă $m>2$, sunt 2 rădăcini pozitive, din care una nu convine; cazul zero rădăcini pozitive se exclude pentrucă $f(0)>0$, $f(r)<0$, arată existenţa cel puţin a unei rădăcini pozitive.

XXIV. 1. $x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$. Deci rădăcinile sunt ± 1, $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$. $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ $\therefore$ $x=1$ şi ecuaţia reciprocă $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ sau $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$. Punem $x+\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ $\therefore$ $y^2+y-1=0$, de unde $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}$ semnele dinaintea lui $\sqrt{5}$ corespunzându-se. **2.** α fiind o rădăcină a ecuaţiei diferită de 1, α^k este deasemenea rădăcină; se va forma ecuaţia care are ca rădăcini pe $y_1=\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^9$, $y_2=\alpha^2+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^{10}$; această ecuaţie este $y^2+y+3=0$, apoi α, α^3, α^4, α^5, α^9 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^5-y_1x^4-x^3+x^2-(y_1+1)x-1=0$, iar α^2, α^6, α^7, α^8, α^{10} rădăcinile ecuaţiei obţinută din precedenta înlocuind y_1 prin y_2. **3.** α fiind o rădăcină complexă a ecuaţiei, se formează ecuaţia care admite rădăcinile $y_1=\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^9+\alpha^{10}+\alpha^{12}$, $y_2=\alpha^2+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^{11}$: $y_1+y_2=-1$, $y_1y_2=-3$, deci ecuaţia este $y^2+y-3=0$. Formăm apoi ecuaţia cu rădăcinile $z_1=\alpha+\alpha^3+\alpha^9$, $z_2=\alpha^4+\alpha^{10}+\alpha^{12}$; $z_1+z_2=y_1$, $z_1z_2=2-y_1$, deci $x^2-y_1x+2-y_1=0$, în fine se formează ecuaţia cu rădăcinile α, α^3, α^9: $\alpha+\alpha^3+\alpha^9=z_1$ $\alpha\alpha^3+\alpha\alpha^9+\alpha^3\alpha^9=z_2=y_1-z_1$, $\alpha\alpha^3\alpha^9=1$ $\therefore$ $u^3-z_1u^2+(y_1-z_1)u-1=0$; pentru α^4, α^{10}, α^{12}, ecuaţia este $u^3-z_2u^2+(y_1-z_2)u-1=0$. Analog, folosind pe y_2, se obţin celelalte rădăcini. (G. M. X). **4.** Fie α o rădăcină complexă a ecuaţiei. Celelalte rădăcini complexe sunt $\alpha^2,\alpha^3\ldots\alpha^{18}$. Formăm ecuaţia de gradul II care admite rădăcinile $y_1=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^{12}+\alpha^{13}+\alpha^{14}+\alpha^{15}+\alpha^{18}$, $y_2=\alpha+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{11}+\alpha^{16}+\alpha^{17}$ $\therefore$ $y^2+y+5=0$. Notăm $z_1=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^{14}$, $z_2=\alpha^8+\alpha^{12}+\alpha^{18}$, $z_3=\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{15}$, $z'_1=\alpha+\alpha^7+\alpha^{11}$, $z'_2=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^9$, $z'_3=\alpha^5+\alpha^{16}+\alpha^{17}$ şi formăm ecuaţiile ce admit ca rădăcini pe z_1, z_2, z_3 şi z'_1, z'_2, z'_3. Aceste ecuaţii sunt: $z^3-y_1z^2+(y_1-1)z+(1-y_2)=0$ şi

$x'^3-y_2x'^2+(y_1-1)x'+(1-y_1)=0$. In fine, α este dat de ecuaţia ce admite rădăcinile $\alpha, \alpha^7, \alpha^{11}$ $\therefore u^3-x'_1u^2+x_2u-1=0$. **5.** Ecuaţia se poate scrie $(x^5)^8-1=0$. Punând $x^5=y$, avem $y^8-1=0$, care se desface astfel: $(y^4+1)(y^4-1)=0$ $\therefore$ *a)* $y^4+2y^2+1-2y^2=0$, $(y^2+1)^2-2y^2=0$, $(y^2+\sqrt{2}y+1)(y^2-\sqrt{2}y+1)=0$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1\pm i)$; *b)* $y^4-1=0$, $(y^2+1)(y^2-1)=0$, $y=\pm i$, $y=\pm 1$. Apoi considerăm ecuaţia $x^5-y=0$, unde y se înlocueşte cu una din cele 8 valori aflate. Să notăm $x=\sqrt[5]{y}z$ şi ecuaţia devine $z^5-1=0$, ale cărei rădăcini au fost aflate în ex. **1**. Deci $x=\sqrt[5]{y}z$ unde pentru fiecare din cele opt valori aflate pentru y punem fiecare din cele cinci valori aflate pentru z. **6.** Ecuaţia se scrie $(x^{10})^6-1=0$. Notăm $x^{10}=y$, deci $y^6-1=0$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt date de ex. **1**. Considerăm ecuaţia $x^{10}-y=0$ unde y se înlocueşte cu valorile aflate şi notăm $x=\sqrt[10]{y}z$, ecuaţia devine $z^{10}-1=0$ sau $(z^5+1)(z^5-1)=0$ $\therefore$ $z^5+1=0$, $z^5-1=0$. Soluţiile ecuaţiei problemei sunt date de formula $x=\sqrt[10]{y}z$, punând pentru fiecare din cele 6 valori aflate pentru y, fiecare din cele 10 valori aflate pentru z. **7.** $x=1$ nu este soluţie a ecuaţiunii. Deci vom putea nota $x=\frac{1}{\cos\theta}$, avem $(\cos\theta+i\sin\theta)^m+(\cos\theta-i\sin\theta)^m=0$, ridicând la puterea m după formula lui *Moivre* şi reducând, găsim $\cos m\theta=0$, $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2m}$, $k=0,\ldots m-1$, care dă cele m rădăcini ale ecuaţiei în x. **8.** Fie $x=tg\frac{\theta}{2}$. Avem $\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}\right)^m=a+bi$ sau $\cos m\theta+i\sin m\theta=a+bi$, de unde $\cos m\theta=a$, $\sin m\theta=b$. Problema este posibilă dacă a şi b sunt cuprinşi între -1 şi $+1$. **9.** Rezolvarea algebrică a ecuaţiei $x^5-1=0$ a dat

$x=1$ şi $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}$. Rezolvând trigonometric găsim $x=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{cos\,2k\pi+i\,sin\,2k\pi}=cos\frac{2k\pi}{5}+i\,sin\frac{2k\pi}{5}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$). Când $k=1$, avem $x=cos\frac{2\pi}{5}+i\,sin\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ fiind arc în primul cadran cei doi termeni sunt pozitivi, deci această valoare corespunde lui $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, de unde $sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Când $k=2$, $x=cos\frac{4\pi}{5}+i\,sin\frac{4\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$ fiind arc în cadranul 2, sinusul este pozitiv, iar cosinul negativ, deci corespunde valorii $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3}$. Rezultă $sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 2) Rădăcinile algebrice ale ecuaţiei $x^8-1=0$ au fost găsite în ex. **5**. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1\pm i)$, $x=\pm i$ $x=\pm 1$. Rezolvarea trigonometrică dă: $x=\sqrt[8]{cos\,2k\pi+i\,sin\,2k\pi}=cos\frac{2k\pi}{8}+i\,sin\frac{2k\pi}{8}$. ($k=0, 1\ldots 7$). $k=1$, $x=cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ fiind în cadranul I, corespunde valorii $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Deci $sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $k=2$, $x=cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}=i$. $k=3$, $x=cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ este în cadranul II, deci corespunde lui $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ etc. **10.** Să notăm factorii produsului: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Făcând produsele $p_1 p_2$, apoi $(p_1 p_2) p_3$, $(p_1 p_2 p_3) p_4$, $(p_1 p_2 p_3 p_4) p_5$ şi ţinând seama de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi găsim:

$P=x^5+y^5+z^5+t^5+s^5-5\ [(ys+zt)x^3+(xz+ts)y^3+(xs+yt)z^3+(xy+zs)t^3+(xt+yz)s^3]+5\ [(y^2t+yz^2+xs^2+t^2s)x^2+(x^2s+zt^2+xs^2)y^2+(ts^2+xt^2)z^2+ys^2t^2]-5xyzts$. (G. M. XXXIX. p. 64). **11.** Cu formula lui *Moivre*, $x=cos\frac{2k\pi}{7}+i\,sin\frac{2k\pi}{7}$ $(k=0, 1...6)$. Dacă $\alpha=cos\frac{2\pi}{7}+i\,sin\frac{2\pi}{7}$, corespunde lui $k=1$, evident $\alpha^2=cos\frac{2\pi}{7}+i\,sin\frac{2\pi}{7}$ este rădăcină deoarece corespunde lui $k=2$, dacă $\alpha=cos\frac{4\pi}{7}+i\,sin\frac{4\pi}{7}$, corespunde lui $k=2$, $\alpha^2=cos\frac{8\pi}{7}+i\,sin\frac{8\pi}{7}$ corespunde lui $k=4$, etc. Observând apoi că $3, 3^2, 3^3,...3^6$ divizate cu 7 dau resturi diferite, rezultă că şirul al doilea se reduce la primul. Aceiaşi observare pentru al treilea şir. **12.** Se dau lui k valori întregi prime cu numărul 15, altfel valoarea lui k şi 15 se simplifică şi nu se mai obţin cele 15 rădăcini ale ecuaţiunii. **13.** Putem scrie $2x^n-(x+a)^n=0\ \therefore\ \left(\frac{x+a}{x}\right)^n=2\ \therefore\ \frac{x+a}{x}=\sqrt[n]{2}$ $\left[cos\frac{2k\pi}{n}+i\,sin\frac{2k\pi}{n}\right]=\alpha\ \therefore\ x=\frac{a}{\alpha-1}$. **14.** Vom calcula valoarea lui Δ scăzând elementele penultimei linii din elementele ultimei, elementele antepenultimei din ale ultimei, etc., apoi scoţând pe $x-1$ factor comun în ultimele n linii:

$$\Delta=(x-1)^n\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots. & x^{n-1} & x^n \\ 1 & x & x^2 \ldots. & x^{n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} x^i \\ x & x^2 & x^3 \ldots. & -\sum_{i=1}^{n-1} x^i & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} x^i & 1 \ldots. & x^{n-3} & x^{n-2} \end{vmatrix}$$

se scad apoi elementele penultimei linii multiplicate cu x din elementele ultimei linii, elementele antepenultimei linii multi-

plicate cu x din elementele penultimei, etc., elementele liniei a doua multiplicate cu x din elementele liniei a treia, în fine elementele primei linii din elementele liniei a doua; determinantul obținut desvoltând după elementele primei coloane are elementele situate la stânga diagonalei neprincipale nule, iar elementele acelei diagonale $-\sum_{i=1}^{n} x^i$. Deci ecuația este

$(x^{n+1}-1)^n=0 \therefore x^{n+1}-1=0 \therefore x=cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\,sin\frac{2k\pi}{n+1}$

(G. M. VI). **15.** Rădăcinile complexe ale ecuației sunt date de $x=cos\frac{2k\pi}{n}+i\,sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=1, 2 \ldots n-1)$; $\frac{1}{x}=cos\frac{2k\pi}{n}-i\,sin\frac{2k\pi}{n}$. Deci $x+\frac{1}{x}=y=2\,cos\frac{2k\pi}{n}$. Deci numerele din șirul dat sunt rădăcini ale ecuației $F(y)=0$. Pentru a arăta că ele reprezintă toate rădăcinile, va trebui să arătăm că sunt diferite. Ori dacă am avea $cos\frac{2\lambda^p\pi}{n}=cos\frac{2\lambda^q\pi}{n}$, ar urma $\lambda^p \pm \lambda^q=m$, ceiace nu se poate. **16.** Considerăm cazul când n este fără soț: $n=2m+1$. $F(y)=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$; dar $x+\frac{1}{x}=y$ și notând $x^m+\frac{1}{x^m}=V_m$, avem relația de recurență $V_m=V_1 V_{m-1}-V_{m-2}$. Găsim din aproape în aproape $V_m=\Sigma(-1)^p\frac{m}{m-p}C^p_{m-p}\,y^{m-2p}$, p variind dela 0 la $\frac{m}{2}$ sau $\frac{m-1}{2}$. Apoi $F(y)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^p\frac{i}{i-p}C^p_{i-p}\,y^{i-2p}$. Analog cazul $n=2m$. **17.** Avem $\varphi(\alpha)\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)=p_1q_1+p_2q_1\alpha+p_3q_1\alpha^2+\ldots+p_n\,q_1\,\alpha^{n-1}+p_1\,q_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+p_2q_2+\ldots$; $\varphi(\alpha^2)\psi\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)=p_1\,q_1+p_2q_1\alpha^2+p_3q_1\alpha^4+\ldots$, etc. Insumând și observând că $\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n=0$, rezultă egalitatea cerută. **18.** Putem presupune că ecuația nu are rădăcini multiple, altfel am descompune-o; fie $cos\,\theta_k+i\,sin\,\theta_k$ una din rădăcini, trebue să avem, dacă ecuația

este $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = 0$, $A_{m-1} \sin\theta_k + A_{m-2} \sin 2\theta_k + \ldots + A_1 \sin(m-1)\theta_k + \sin m\theta_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots m$). Considerând pe A_i necunoscute, avem un sistem de m ecuaţiuni cu $m-1$ necunoscute care admite soluţii diferite de zero, deci determinantul format din sinusuri trebue să fie nul, ceeace se întâmplă dacă $\sin\theta_k = 0$, deci $\cos\theta_k = 1$. **19.** $\Delta = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_2)\ldots (a_{n-1} - a_{n-2})\ldots(a_2 - a_1)$ sau $\Delta^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n)$. Dar $(a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n) = a_i^n - \Sigma a_1 . a_i^{n-1} + \Sigma a_1 a_2 . a_i^{n-2} + \ldots a_i^n = 1$, $\Sigma a_1 = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n = -a_i$, $\Sigma a_1 a_2 = -a_i (a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n) = a_i^2$. etc. Deci $\Delta^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n$. (G. M. XLVII. p. 20).

XXV. 1. Şirul lui *Rolle* prezintă trei variaţiuni de semne, deci ecuaţiunea are trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-\infty, 0)$; $\left(0, \frac{10}{3}\right)$; $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$, care pot fi restrânse la $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(0, \frac{10}{3}\right)$; $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$. **2.** Formând şirul lui *Rolle*, se vede că dacă: $\alpha < -\frac{13}{27}$, ecuaţiunea are o rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(3, +\infty)$; pentru $-\frac{13}{27} < \alpha < +9$, trei rădăcini reale cuprinse în intervalele: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$; $(+3, +\infty)$; pentru $\alpha > 9$ o rădăcină reală cuprinsă în intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. Dacă $\alpha = -\frac{13}{27}$ ea are rădăcina dublă $+\frac{1}{3}$; iar dacă $\alpha = +9$ ea are rădăcina dublă $+3$. **3.** Insemnând cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiunii derivate, $x_1 < x_2$, avem pentru fiecare satisfăcută relaţiunea: $3x^2 = x + 1$, deci în calculul valorilor $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ din şirul lui *Rolle*, avem într'un prim calcul: $9f(x) =$

$3x(6x^2-3x-6)+9\alpha=3x(-x-4)+9\alpha=-3x^2-12x+9\alpha=-13x+9\alpha-1$ *** $54f(x_1)=54\alpha-19+13\sqrt{13}$ şi $54f(x_2)=54\alpha-19-13\sqrt{13}$. Aşadar, dacă însemnăm cu α_1 şi α_2 rădăcinile ecuaţiunii $27\alpha^2-19\alpha-17=0$, $\alpha_1<\alpha_2$, avem şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)<0$; $f(x_1)=(\alpha-\alpha_1)$; $f(x_2)=(\alpha-\alpha_2)$; $f(+\infty)>0$. Urmează de aci că, dacă $\alpha<\alpha_1$ ecuaţiunea are o rădăcină reală în intervalul $(\alpha_2, +\infty)$; dacă $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ ecuaţiunea are trei rădăcini reale cuprinse în intervalele: $(-\infty, \alpha_1)$; (α_1, α_2); $(\alpha_2, +\infty)$; dacă $\alpha>\alpha_2$ ecuaţiunea are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(-\infty, \alpha_1)$. Pentru $\alpha=\alpha_1$ şi $\alpha=\alpha_2$ ecuaţiunea admite o rădăcină a derivatei ca rădăcină dublă. **4.** Avem şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)=+\infty$, $f(-2)=\alpha-16$, $f(-1)=\alpha+13$, $f(+1)=\alpha-19$, $f(+\infty)=+\infty$; deci ecuaţia are: pentru $\alpha<-13$ două rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -2)$; $(+1, +\infty)$; pentru $-13<\alpha<16$ patru rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, +1)$; $(+1, +\infty)$; pentru $16<\alpha<19$ două rădăcini reale în intervalele: $(-1, +1)$; $(+1, +\infty)$; pentru $\alpha>19$ patru rădăcini imaginare. **5.** Şirul lui *Rolle* este în acest caz: $f(-\infty)=+\infty$, $f(0)=\alpha$, $f(+\infty)=+\infty$; deci, dacă $\alpha<0$ ecuaţiunea are două rădăcini reale, una pozitivă şi una negativă; dacă $\alpha>0$ are patru rădăcini imaginare. **6.** Avem şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)=-\infty$, $f(-2)=\alpha-16$, $f(-1)=\alpha-38$, $f(+1)=\alpha+38$, $f(+2)=\alpha+16$, $f(+\infty)=+\infty$; deci, dacă $\alpha<-38$ o rădăcină reală în intervalul $(+2, +\infty)$; pentru $-38<\alpha<-16$ trei rădăcini reale în intervalele: $(-1, +1)$; $(+1, +2)$; $(+2, +\infty)$; pentru $-16<\alpha<+16$ o rădăcină reală în intervalul $(-1, +1)$; pentru $+16<\alpha<+38$ trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, +1)$; pentru $\alpha>+38$ o rădăcină reală în intervalul $(-\infty, -2)$. Pentru valorile $\alpha=-38$, $\alpha=-16$, $\alpha=+16$, $\alpha=+38$ ecuaţiunea are o rădăcină dublă, deci trei rădăcini reale. **7.** $\alpha_1<\alpha_2$ fiind rădăcinile ecuaţiunei $\alpha^2-146\alpha-5000=0$ şi $x_1<x_2$ şi 0 cele trei rădăcini ale lui $f'(x)=x^2(x^2-2x-1)=0$, avem şirul lui *Rolle* următor: $f(-\infty)=-\infty$, $f(x_1)=\alpha-\alpha_1$,

$f(0)=\alpha$, $f(x_2)=\alpha-\alpha_2$, $f(+\infty)=+\infty$. Dacă $\alpha<\alpha_1$, ecuaţiunea are o rădăcină reală în intervalul $(x_2, +\infty)$; pentru $\alpha_1<\alpha<0$, trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, x_1)$; $(x_1, 0)$; $(x_2, +\infty)$; pentru $0<\alpha<\alpha_2$, trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, x_1)$; $(0, x_2)$; $(x_2, +\infty)$; pentru $\alpha>\alpha_2$, o rădăcină reală în intervalul $(-\infty, x_1)$. Pentru $\alpha=\alpha_1$ şi $\alpha=\alpha_2$ ecuaţiunea având o rădăcină dublă are trei rădăcini reale; pentru $\alpha=0$, ecuaţiunea are o rădăcină triplă $\alpha=0$ şi în total cinci rădăcini reale. **8.** Şirul lui *Rolle* fiind: $f(-\infty)=+\infty$, $f(0)=\alpha$, $f(+1)=\alpha+2$, $f(+2)=\alpha-16$, $f(+\infty)=+\infty$, deducem că dacă $\alpha<-2$ sunt *două* rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 0)$, $(+2, +\infty)$; dacă $-2<\alpha<0$ sunt *patru* rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +1)$, $(+1, +2)$, $(+2, +\infty)$; dacă $0<\alpha<16$ sunt *două* rădăcini reale în intervalele $(+1, +2)$, $(+2, +\infty)$; dacă $\alpha>16$ toate rădăcinile imaginare. Pentru $\alpha=-2$ şi $\alpha=16$ ecuaţiunea are o rădăcină dublă având respectiv *patru* şi *două* rădăcini reale. Dacă $\alpha=0$, sunt *şase* rădăcini reale, o rădăcină fiind cuadruplă. **9.** Formăm şirul lui *Rolle* observând că $f'(x)=7(2x+1)(3x^2+3x+1)(x^2+x+1)$ are numai rădăcina reală $x=-\frac{1}{2}$ şi că $f(x)$ este de gradul al şeaselea: $f(-\infty)=+\infty$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha+\frac{1}{2^6}$, $f(+\infty)$. Rezultă că, dacă $\alpha>-\frac{1}{2^6}$ toate rădăcinile sunt imaginare; dacă $\alpha<-\frac{1}{2^6}$ sunt *două* rădăcini reale şi anume: dacă $\alpha<-1$ ele sunt cuprinse în intervalele $(-\infty, -1)$; $(0, +\infty)$ deci una pozitivă şi alta negativă; dacă $-1<\alpha<-\frac{1}{2^6}$ ele sunt cuprinse în intervalele $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, deci ambele negative. **10.** Observăm că parametrul α având o valoare finită ecuaţiunea: $f(x)=x^4-6x^2+\alpha x+24=0$ nu are rădăcina $x=0$. Fie funcţiunea $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$, ea se anu-

leză pentru aceleaşi valori ca $f(x)$ şi este *discontinuă* pentru $x=0$. Formând şirul lui *Rolle* în cele două intervale de continuitate ale lui $\varphi(x)$, avem: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(-2)=\alpha-8$, $\varphi(-\varepsilon)=-\infty$; $\varphi(+\varepsilon)=+\infty$, $\varphi(+2)=\alpha+8$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, unde ε este număr pozitiv vecin lui *zero*. Dacă $\alpha<-8$ ecuaţiunea dată are *două* rădăcini reale în intervalele $(+\varepsilon,+2)$; $(+2,+\infty)$ deci ambele pozitive; dacă $-8<\alpha<+8$ nici o rădăcină reală; dacă $\alpha>+8$ sunt două rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-\infty,-2)$; $(-2,-\varepsilon)$, deci ambele negative. Pentru $\alpha=-8$ şi $\alpha=+8$ ecuaţiunea are o rădăcină dublă. **11.** Observăm că pentru orice valoare finită a parametrului α avem $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, urmează că funcţiunea $\varphi(x)=\frac{f(x)}{2x-1}=\frac{x^3(x-2)}{2x-1}+\alpha$ se anulează numai pentru valorile care anulează pe $f(x)$ şi reciproc. Funcţiunea $\varphi(x)$ fiind discontinuă pentru $x=\frac{1}{2}$, formăm şirul lui *Rolle* pentru cele două intervale de continuitate $\left(-\infty,+\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$ şi $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,+\infty\right)$ şi avem: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(0)=\alpha$, $\varphi\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)=+\infty$; $\varphi\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)=-\infty$, $\varphi(+1)=\alpha-1$, $\varphi(+\infty)=+\infty$. Rezultă că ecuaţiunea dată pentru $\alpha<0$ are două rădăcini reale pozitive; pentru $0<\alpha<1$ şi $\alpha>+1$ are două rădăcini reale una pozitivă şi una negativă. Pentru valorile $\alpha=0$ şi $\alpha=1$ $\varphi(x)$ se anulează ca şi derivata ei, şi anulându-se schimbă semnul, deci ecuaţiunea dată are patru rădăcini reale, una fiind triplă. **12.** Dacă $p>0$, şirul lui *Rolle* este: $f(-\infty)=+\infty$, $f(0)=q$, $f(+\infty)=+\infty$; când $q>0$ rădăcinile imaginare; când $q<0$ ecuaţiunea are două rădăcini reale (una pozitivă, una negativă). Dacă $p<0$ şirul lui *Rolle* este: $f(-\infty)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{2}}\right)=q-\frac{p^2}{4}$, $f(0)=q$, $f\left(+\sqrt{-\frac{p}{2}}\right)=q-\frac{p^2}{4}$, $f(+\infty)=+\infty$, deci când $q<0$ sunt două rădăcini reale;

când $q>0$ şi $q-\frac{p^2}{4}>0$ patru rădăcini imaginare; $q>0$ şi $q-\frac{p^2}{4}<0$ sunt patru rădăcini reale. **13.** Punând $\varphi(x)=\frac{f(x)}{2x+p}=\frac{x^4+2px^3}{2x+p}+r$, observând că $x=-\frac{p}{2}$ nu este o rădăcină a ecuaţiei $f(x)=0$ dacă $p\neq 0$, problema revine la discuţiunea asupra numărului rădăcinilor reale ale funcţiunii $\varphi(x)=0$ în cele două intervale de continuitate ale funcţiunei $\varphi(x)$, anume $\left(-\infty, -\frac{p}{2}-\varepsilon\right)$; $\left(-\frac{p}{2}+\varepsilon, +\infty\right)$. Dacă $p>0$, şirul lui *Rolle este*: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(-p)=p^3+r$, $\varphi\left(-\frac{p}{2}-\varepsilon\right)=+\infty$; $\varphi\left(-\frac{p}{2}+\varepsilon\right)=-\infty$, $\varphi(0)=r$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, deci oricare ar fi semnele lui r şi p^3+r ecuaţiunea are două rădăcini reale în acest caz; dacă $p<0$, şirul lui *Rolle* este: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(0)=r$, $\varphi\left(-\frac{p}{2}-\varepsilon\right)=+\infty$, $\varphi\left(-\frac{p}{2}+\varepsilon\right)=-\infty$, $\varphi(-p)=p^3+r$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, deci oricare ar fi semnele lui r şi p^3+r ecuaţiunea are două rădăcini reale. Pentru valorile particulare: $r=0$ şi $r=-p^3$ ecuaţiunea are patru rădăcini reale, una fiind rădăcină triplă. Dacă $p=0$ ecuaţiunea are două rădăcini reale $x'=0$, $x''=\sqrt[3]{-2r}$. **14.** Observăm că numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii date este acelaşi ca pentru ecuaţiunea $\varphi(x)=x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^5-25x^3+60x+\alpha=0$. Formând şirul lui *Rolle* pentru $\varphi(x)=0$, avem: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(-2)=\alpha-16$, $\varphi(-1)=\alpha-38$, $\varphi(+1)=\alpha+38$, $\varphi(+2)=\alpha+16$, $\varphi(+\infty)=+\infty$; deci rezultă că: dacă $\alpha<-38$ ecuaţiunea dată are o rădăcină reală; dacă $-38<\alpha<-16$ sunt trei rădăcini reale; dacă $-16<\alpha<+16$ este o singură rădăcină reală; dacă $+16<\alpha<+38$ sunt *trei* rădăcini reale; dacă $\alpha>+38$ o singură rădăcină reală. In cazurile particulare $\alpha=-38$, $\alpha=-16$, $\alpha=+16$, $\alpha=+38$ ecuaţiunea are trei rădăcini

reale, una fiind rădăcină dublă. **15.** Formând şirul lui *Rolle* pentru $p>0$ şi $p<0$ deducem că, dacă $q\left(q+\frac{4p^3}{27}\right)>0$ ecuaţiunea are o rădăcină reală; dacă $q\left(q+\frac{4p^3}{27}\right)<0$ ea are trei rădăcini reale. **16.** Formând şirul lui *Rolle* în cazurile $p>0$ şi $p<0$, se deduce concentrând rezultatele obţinute că: dacă $\left(\frac{q}{8}\right)^2+\left(\frac{p}{9}\right)^3>0$ este o singură rădăcină reală, dacă $\left(\frac{q}{8}\right)^2+\left(\frac{p}{9}\right)^3<0$ sunt trei rădăcini reale. Pentru cazul particular în care $\left(\frac{q}{8}\right)^2+\left(\frac{p}{9}\right)^3=0$ este o rădăcină dublă, deci trei rădăcini reale. **17.** Socotind în primul rând *m par*, şi formând şirul lui *Rolle*, deducem că sunt două rădăcini reale dacă $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}-\left(\frac{p}{m}\right)^m<0$ şi nici o rădăcină reală dacă $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}-\left(\frac{p}{m}\right)^m>0$. In cazul *m impar*, formând şirul lui *Rolle* pentru $p>0$ şi $p<0$ şi concentrând rezultatele găsim că ecuaţiunea are *trei* rădăcini reale dacă $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^m<0$ şi numai o rădăcină reală dacă $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^m>0$.

18. Să presupunem $p>0$ şi să observăm că $f(x\sqrt{p})=p^2\sqrt{p}\,x^5+p^2\sqrt{p}\,x^3+q=p^2\sqrt{p}\left[x^5+x^3+\frac{q}{p^2\sqrt{p}}\right]$; deducem că rădăcinile reale ale ecuaţiunii date corespund rădăcinilor reale ale ecuaţiunii $\varphi(x)=x^5+x^3+\alpha=0$, $\alpha=\frac{q}{p^2\sqrt{p}}$ şi reciproc. Şirul lui *Rolle* al ecuaţiunii $\varphi(x)=0$ este $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(0)=\alpha$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, deci totdeauna o rădăcină reală; deci pentru ca ecuaţiunea $f(x)=0$ să aibă mai mult decât o rădăcină reală este necesar ca $p<0$. Presupunând deci $p<0$, considerăm ecuaţiunea $\varphi(x)=x^5-x^3+\alpha=0$, $\alpha=\frac{q}{p^2\sqrt{-p}}$, care

corespunde în acest caz ecuaţiunii date. Formând şirul lui *Rolle* corespunzător găsim că ecuaţiunea poate avea cel mult trei rădăcini reale în cazul când avem condiţiunile $\alpha<0$ şi $\alpha+\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}>0$ care transformate sunt: $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{q}{p^2\sqrt{-p}}>0$ şi $q<0$; sau dacă $\alpha>0$ şi $\alpha-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}<0$, care transformate dau: $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{q}{p^2\sqrt{-p}}>0$, $q>0$; ambele grupe fiind echivalente în parte cu condiţiunea următoare $\frac{108}{5^5}+\frac{q^2}{p^5}>0$, sau ţinând seamă că $p^5<0$, $108p^5+5^5q^2<0$. Dacă $108p^5+5^5q^2=0$, este o rădăcină reală dublă şi una simplă, deci trei rădăcini reale. Aşadar condiţiunea necesară ca ecuaţiunea să aibă maximul de rădăcini reale, în cazul când $q\neq 0$, este: $108p^5+5^5q^2\leqq 0$; ea este şi suficientă. Dacă $q=0$, $p<0$ ecuaţiunea are cinci rădăcini reale; dacă $q=0$, $p>0$ o rădăcină triplă. **19.** Observăm că punând $b=-\mu^2$, $a=\lambda$; $\frac{\mu^2}{\lambda^2}=m>0$, discuţiunea rădăcinilor ecuaţiunii date se reduce la a rădăcinilor ecuaţiunii: $\varphi(x)=x^4+4x^3-2mx^2+m^2=0$, depinzând de un parametru $m>0$. Rădăcinile derivatei în acest caz fiind: $x'=0$, $x''=\frac{-3+\sqrt{9+4m}}{2}>0$, şi $x'''=\frac{-3-\sqrt{9+4m}}{2}<0$, avem în toate cazurile următorul şir al lui *Rolle*: $\varphi(-\infty)=+\infty$; $\varphi(x''')=\frac{1}{2}[-9(2m+3)-(9+4m)\sqrt{9+4m}]$; $\varphi(0)=m^2$; $\varphi(x'')=\frac{1}{2}[-9(2m+3)+(9+4m)\sqrt{9+4m}]$; $\varphi(+\infty)=+\infty$. Se observă că $\varphi(x''')<0$ deoarece $m>0$. Pentru semnul lui $\varphi(x'')$ vom studia diferenţa pătratelor celor două părţi (raţională şi iraţională) şi avem: $81(3+2m)^2-(9+4m)^3=-4m^2(27+8m)$, care, abstracţie făcând de factorul pozitiv $\frac{1}{4}$, reprezintă produsul $\varphi(x'')\varphi(x''')$.

Se deduce că în cazul $b=-\mu^2<0$, având $P\equiv 9a^2-4b>0$, dacă $Q\equiv 27a^2-16b>0$, sunt două rădăcini reale; dacă $Q\equiv 27a^2-16b=0$ sunt patru rădăcini reale (una dublă), dacă $Q\equiv 27a^2-16b<0$ sunt patru rădăcini reale distincte. In cazul $b=+\mu^2$, ecuaţiunea asupra căreia revine discuţiunea punând $m=\frac{\mu^2}{\lambda^2}>0$, este $\varphi(x)=x^4+4x^3+2mx+m^2=0$, iar rezultatul discuţiunii este următorul: Dacă $P\equiv 9a^2-4b<0$, nici o rădăcină reală; dacă $P\equiv 9a^2-4b=0$ sunt două rădăcini reale; dacă $P=9a^2-4b>0$ şi $Q\equiv 27a^2-16b>0$ sunt două rădăcini reale; dacă $P>0$, $Q=0$ este o rădăcină dublă; $P>0$, $Q<0$ nici o rădăcină reală. Figurând deci în planul aOb parabolele $P=0$ şi $Q=0$ se poate scrie pe fiecare regiune precum şi pe aceste parabole numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii date. (G. M. V.). **20.** Având $f(ax)=a^4x^4-4a^4x^3+4a^4x^2+b=0$ discutarea naturei rădăcinilor ecuaţiunii date se reduce la discutarea naturei rădăcinilor ecuaţiunii: $\varphi(x)\equiv x^4-4x^3+4x^2+m=0$, unde $m=\frac{b}{a^4}$. Şirul lui *Rolle* în acest caz este: $\varphi(-\infty)=+\infty$, $\varphi(0)=m$, $\varphi(1)=1+m$, $\varphi(2)=m$, $\varphi(+\infty)$. Rezultă că: dacă $m<0$ şi $1+m>0$ patru rădăcini reale; $m=-1$ o rădăcină dublă reală; $m<-1$ două rădăcini reale; dacă $m>0$ *** $1+m>0$ deci ecuaţiunea are numai rădăcini imaginare. Rezultatul obţinut se poate reprezenta pe o axă mm'. Dela $(-\infty)$ până la (-1) ecuaţiunea dată are două rădăcini reale, în punctul $m=-1$, o rădăcină dublă reală; $-1<m<0$ patru rădăcini reale; în punctul $m=0$, două rădăcini duble reale; în punctele $m>0$ patru rădăcini imaginare. Dacă totuşi vrem să reprezentăm rezultatul discuţiunii în planul axelor (Oa, Ob), parabola generalizată $b+a^4=0$ şi cu axa $b=0$ determină trei regiuni: (I) deasupra axei $a'a$; (II) între axa $a'a$ şi $b+a^4=0$; (III) interioară parabolei generalizate şi vom scrie: în (I) 4 rădăcini imaginare; în (II) 4 rădăcini reale; în (III) 2 rădăcini reale; pe parabola generalizată 4 rădăcini reale (una dublă); pe axa $a'a$ 2 rădăcini duble reale distincte cu excepţia originei O

unde avem *o rădăcină cuadruplă nulă.* **21.** Punând $m=\frac{b}{a^2}$ problema revine la discutarea rădăcinilor ecuaţiunii: $\varphi(x)=6x^4-8x^3-3x^2+6x-m=0$. Şirul lui *Rolle* este: $\varphi(-\infty)=+\infty$; $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(m+\frac{19}{8}\right)$, $\varphi\left(+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{8}-m$, $\varphi(+1)=1-m$, $\varphi(+\infty)=+\infty$. Rezultatul discuţiunii reprezentat pe axa $m'm$ arată: pentru $m<-\frac{19}{8}$ patru rădăcini imaginare; pentru $-\frac{19}{8}<m<1$, două rădăcini reale; pentru $1<m<\frac{13}{8}$, patru rădăcini reale; $m>\frac{13}{8}$, două rădăcini reale. Pentru $m=-\frac{19}{8}$, o rădăcină dublă $x'=x''=-\frac{1}{2}$ şi $x_{3,4}=\frac{7\pm 2i\sqrt{2}}{6}$; $m=+1$ patru rădăcini reale: $x'=x''=1$, $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{6}$; pentru $m=\frac{13}{8}$, patru rădăcini reale: $x'=x''=x'''=\frac{1}{2}$, $x_4=-\frac{1}{6}$. Pentru reprezentarea în planul axelor Oa, Ob, observăm că regiunile planului sunt separate de parabolele: $a^2-b=0$; $13a^2-8b=0$ şi $19a^2+8b=0$ pe care le obţinem înlocuind în şirul lui *Rolle* pe m prin $\frac{b}{a^2}$; etc.

22. Se reduce la discuţia rădăcinilor ecuaţiunii: $\varphi(x)=16x^5-20x^3+5x-m=0$, unde $m=\left(\frac{q}{p}\right)^5$. Rădăcinile derivatei sunt $x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{6\pm\sqrt{20}}=\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}\pm 1)$; deci şirul lui *Rolle* este următorul: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(x_1)=1-m$, $\varphi(x_2)=-(1+m)$, $\varphi(x_3)=1-m$, $\varphi(x_4)=-(1+m)$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, iar rezumatul discuţiunii este:

m' ——— | ——— | ——— m

una răd. reală | -1 cinci răd. reale | $+1$ 3 răd. reale

răd. dublă — răd. dublă

Pentru reprezentarea în planul $p0q$ înlocuim m prin $\left(\frac{q}{p}\right)^5$.

23. Punând $m=\frac{q}{p^2}-1$, problema revine la discuţiunea ecuaţiunii $\varphi(x)\equiv 3x^4+4x^3-12x^2+m=0$. Dacă $m<0$, două rădăcini reale; dacă $0<m<5$, patru rădăcini reale; dacă $5<m<32$, două rădăcini reale; dacă $m>32$ nici o rădăcină reală. Dacă $m=0$, patru rădăcini reale (o rădăcină dublă); dacă $m=5$, patru rădăcini reale (o rădăcină dublă); dacă $m=32$, două rădăcini reale egale. Pentru reprezentarea rezultatului în planul $p0q$, înlocuim pe m în şirul lui *Rolle* prin valoarea lui, etc. **24.** Dacă $p=0$ ecuaţia se reduce la o ecuaţie binoamă de grad impar, deci o singură rădăcină reală. Dacă presupunem $p<0$, punând $m=\frac{2q}{p^2\sqrt{-p}}$ ecuaţiunea se aduce la următoarea: $\varphi(x)\equiv x^5+5x^3+5x+m=0$ pentru care şirul lui *Rolle* este: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, deci *o singură* rădăcină reală. Dacă $p>0$, punând $m=\frac{2q}{p^2\sqrt{p}}$, chestiunea revine la discuţiunea ecuaţiunii $\varphi(x)\equiv x^5-5x^3+5x+m=0$, pentru care şirul lui *Rolle* este: $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(x_1)=m+2$, $\varphi(x_2)=m-2$, $\varphi(x_3)=m+2$, $\varphi(x_4)=m-2$, $\varphi(+\infty)=+\infty$, unde: $x_i=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$ aşezate în şir crescător. Dacă $m<-2$ sau $m>+2$, ecuaţiunea are o singură rădăcină reală; dacă $-2<m<+2$, ecuaţiunea are *cinci* rădăcini reale; dacă $m^2-4=0$ ecuaţiunea are *cinci* rădăcini reale (două rădăcini fiind duble). Din condiţiunea $p>0$; $m+2<0$ rezultă $q+p^2\sqrt{p}<0$ *** $q-p^2\sqrt{p}<0$ *** $q^2-p^5>0$; $p>0$ asemenea $p>0$; $m-2>0$ devine $q^2-p^5>0$, $p>0$; deci, dacă $p>0$, $q^2-p^5>0$ o singură rădăcină reală; asemenea din $p>0$, $-2<m<+2$ deducem, că dacă $p>0$ şi $q^2-p^5<0$ ecuaţiunea are *cinci* rădăcini reale. **25.** Insemnând cu x distanţa dela centrul cercului la coarda paralelă cu tangenta fixă, ecuaţiunea problemei este:

$f(x)=(R+x)(R-x)^3-k^4=0$. Formând şirul lui *Rolle*: $f(-R)=-k^4$, $f\left(-\frac{R}{2}\right)=\frac{27}{16}R^4-k^4$, $f(+R)=-k^4$; deci problema are două soluţiuni în cazul când $27R^4-16k^4>0$, care se contopesc în una egală cu $-\frac{R}{2}$ când $27R^4-16k^4=0$; şi nici o soluţiune dacă $27R^4-16k^4<0$. **26.** Condiţia revine a scrie că ecuaţiunea derivată, adică o ecuaţiune de forma $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$, are o singură rădăcină reală, dar rădăcinile acestei ecuaţiuni sunt reale în acelaşi timp cu ale transformatei obţinute prin transformarea $x=y-\frac{p}{3}$, adică a unei ecuaţiuni de forma $\varphi(y)\equiv y^3+py+q=0$. Condiţiunea pentru ca aceasta să aibă o singură rădăcină reală este: $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$. Inlocuind pe p şi q cu valorile lor, se obţine condiţiunea cerută. (G. M. IV.). **27.** Avem $f(x)=A(x-a)^n+\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este de gradul $n-p+1$ (G. M. XXI). $*^*_*\ f^{(n-p)}(x)\equiv A_0\,n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p}$, deci $f^{(n-p)}(x)=0$ are o singură rădăcină reală $*^*_*\ f^{(n-p-1)}(x)=0$ are cel mult *două* rădăcini reale;...; $f^{(n-p-n+p+1)}(x)=0$ are cel mult $(n-p)$ rădăcini reale, deci $f(x)=0$ are cel mult $(n-p+1)$ rădăcini reale, deci cel puţin $n-(n-p+1)=p-1$ rădăcini imaginare dacă p este *impar*, şi cel puţin p rădăcini imaginare dacă p este *par*. **28.** Fie $f(x)\equiv A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+A_{p+1}x^{p+1}+A_px^p+A_{p-1}x^{p-1}+A_{p-2}x^{p-2}+\varphi_{p-3}(x)=0$ (1) $\varphi_{p-3}(x)$ fiind un polinom de gradul $(p-3)$. Derivând succesiv ecuaţiunea de $(p-2)$ ori, împărţind cu $(p-2)!$ şi făcând transformata în $\frac{1}{x}$, avem însemnând $\varphi_{n-p-1}(x)$ polinomul de gradul $(n-p-1)$: $\varphi(x)\equiv 2A_{p-2}x^{n-p+2}+2(p-1)A_{p-1}x^{n-p+1}+p(p-1)A_px^{n-p}+\varphi_{n-p-1}(x)=0$ (2). Derivând iarăşi succesiv de $(n-p)$ ori şi simplificând cu $(n-p)!$, avem ecuaţiunea: $\Psi(x)\equiv(n-p+2)(n-p+1)A_{p-2}x^2+2(p-1)(n-p+1)A_{p-1}x+p(p-1)A_p=0$ (3). Dacă ecuaţiunea dela care am plecat are toate rădăcinile

reale, toate derivatele sale succesive au toate rădăcinile lor reale, deci şi transformatele lor în $\frac{1}{x}$ şi ca urmare toate derivatele succesive ale lor au toate rădăcinile reale. Formând realizantul ecuaţiunii (3) avem: $R \equiv (p-1)^2 (n-p+1)^2 A_{p-1}^2 - (p-1)p(n-p+2)(n-p+1) A_p A_{p-2}$, sau suprimând factorii pozitivi, avem:

$$R_1 \equiv A_{p-1}^2 - \frac{n-p+2}{n-p+1} \cdot \frac{p}{p-1} A_p A_{p-2} \quad (4).$$

Dacă coeficienţii celor trei termeni consecutivi A_p, A_{p-1}, A_{p-2} satisfac relaţiunii: $A_{p-1}^2 - \frac{p}{p-1} A_p A_{p-2} < 0$, (5) oricare ar fi n, avem: $R_1 \equiv A_{p-1}^2 - \frac{p}{p-1} A_p A_{p-2} - \frac{1}{n-p+1} A_p A_{p-2} < 0$, deoarece din cauza condiţiunii puse (4), şi $A_p A_{p-1} > 0$. Aşadar, subt această condiţiune ecuaţiunea (3) are rădăcinile sale imaginare, prin urmare şirurile lui *Rolle* ale derivatelor succesive, considerate în ordine inversă, sunt incomplecte şi asemenea al funcţiunii $\varphi(x)$, deci $\varphi(x) = 0$ nu poate avea toate rădăcinile reale; şi ca urmare nici transformata ei în $\frac{1}{x}$ nu poate avea toate rădăcinile reale. Aşadar, una din derivatele lui $f(x)$, având rădăcini imaginare, ea nu poate avea toate rădăcinile reale. In cazul particular $p=2$, relaţiunea devine relaţiunea dată în enunţ: $A_1^2 - 2 A_0 A_2 < 0$ (5'), iar realizantul $R_1 \equiv A_1^2 - \frac{n}{n-1} 2 A_0 A_2$. Aceeaşi expresiune are realizantul R_1 când $p=n$, deci proprietatea enunţată pentru ultimii trei coeficienţi se transpune pentru primii trei, ceeace rezultă din transformarea $f\left(\frac{1}{x}\right)$. **29.** Ecuaţiunea $f(x)=0$ având toate rădăcinile reale, ecuaţiunea $\varphi_1(x) \equiv x f(x) = 0$ are aceeaşi proprietate, deci după teorema lui *Rolle*, ecuaţiunea $\varphi'_1(x) \equiv f(x) + x f'(x) = 0$ are toate rădăcinile reale; ecuaţiunea $\varphi_2(x) \equiv x^2 f(x) = 0$ având toate rădăcinile reale, toate derivatele ei au rădăcinile reale, deci în particular $\varphi_2''(x) =$

$2f(x)+4xf'(x)+x^2f'(x)=0$ are toate rădăcinile reale; ecuaţiunea $\varphi_3(x)\equiv x^3f(x)=0$, având toate rădăcinile reale, derivata a treia a ei $\varphi'''_3(x)\equiv 6f(x)+18xf'(x)+9x^2f''(x)+x^3f'''(x)=0$ are aceeaşi proprietate, etc. **30.** Fie l şi L două numere, care limitează intervalul în care sunt cuprinse cele n rădăcini reale ale ecuaţiunii $f(x)=0$ de gradul n. Ecuaţiunea $\varphi(x)=e^{ax}f(x)=0$, are aceleaşi rădăcini toate reale în intervalul (l, L); deci $\varphi(x)$ fiind o funcţiune continuă în acest interval, ecuaţiunea derivată a ei are deasemenea toate rădăcinile reale, având $(n-1)$ din aceste rădăcini după teorema lui *Rolle* în intervalele determinate de rădăcinile reale ale ecuaţiei $\varphi(x)=0$, dar e^{ax} nu se anulează, deci ecuaţiunea $f'(x)+af(x)=0$ de gradul n având $(n-1)$ rădăcini reale, are şi pe a n_a rădăcină asemenea reală. *Altă soluţie.* Fie $\varphi_1(x)\equiv af(x)+f'(x)=0$. Se observă că având $f(x_i)=0$ *** $\varphi_1(x_i)\equiv af(x_i)+f'(x_i)=f'(x_i)$; deci şirul lui *Rolle* al ecuaţiunii $\varphi_1(x)=0$ este următorul: $\varphi_1(-\infty)$, $f'(x_1)$, $f'(x_2)$,...., $f'(x_n)$, $\varphi_1(+\infty)=+\infty$. Dar $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, iar rădăcinile lui $f'(x)=0$, după teorema lui *Rolle*, fiind toate reale şirul $f'(x_1)$, $f'(x_2)$,...$f'(x_n)$ prezintă $(n-1)$ variaţiuni de semne. Să presupunem acum: $n=2p$. In acest caz $\varphi_1(-\infty)=+\infty$; iar $f'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)<0$, deci şirul lui *Rolle* al ecuaţiunii $\varphi_1(x)=0$, prezentând n variaţiuni de semne, are n rădăcini reale, adică toate rădăcinile reale. Dacă $n=2p+1$, $\varphi_1(-\infty)=-\infty$, iar $f'(x_1)=(x_1-x_2)...(x_1-x_n)>0$, deci acelaş rezultat. In cazul când $a<0$, se mută rădăcina a n^a în intervalul $(x_n, +\infty)$. **31.** Să însemnăm rădăcinile reale ale ecuaţiunii a doua cu: $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$,...$-a_n$ şi să considerăm ecuaţiunile următoare: $\varphi_1(x)\equiv f(x)+a_1f'(x)=0$; $\varphi_2(x)\equiv\varphi_1(x)+a_2\varphi'_1(x)=0$; $\varphi_3(x)=\varphi_2(x)+a_3\varphi'_2(x)=0$;...; $\varphi_p(x)=\varphi_{p-1}(x)+a_p\varphi'_{p-1}(x)$; $\varphi_{p+1}(x)=\varphi_p(x)+a_{p+1}\varphi'_p(x)$;... $\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x)+a_n\varphi'_{n-1}(x)=0$. Calculând avem: $\varphi_2(x)\equiv f(x)+\sum_1^2 a_1f'(x)+a_1a_2=0$; $\varphi_3(x)\equiv f(x)+\sum_1^3 a_1f'(x)+\sum_1^3 a_1a_2f''(x)+a_1a_2a_3=0$; admiţând forma ecuaţiunii adevărată pentru $\varphi_p(x)=0$, deducem că ea este adevărată şi pentru $\varphi_{p+1}(x)=0$,

deci din aproape în aproape deducem că ecuaţiunea considerată este tocmai ecuaţiunea $\varphi_n(x)=0$. Având deci în vedere problema precedentă, rezultă din aproape în aproape că $\varphi_n(x)=0$ are toate rădăcinile reale. **32.** Fie $f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_px^{n-p}+\ldots+A_{n-2}x^2+A_{n-1}x+A_n=0$ cu rădăcinile reale $x_i\neq 0$ şi de acelaşi semn. Să presupunem $x_i>0$, de exemplu. Calculând pe $\varphi(x)=f(x)-xf'(x)+x^2f''(x)=0$, avem ecuaţiunea: $\varphi(x)\equiv(n-1)^2A_0x^n+(n-2)^2A_1x^{n-1}+\ldots+(n-p-1)^2A_px^{n-p}+\ldots+A_{n-2}x^2+A_n=0$, deci prezintă o lacună între doi termeni de acelaşi semn (A_{n-2} şi A_n sunt de acelaşi semn având în vedere relaţiunile lui *Newton*, sau consecinţa teoremii lui *Descartes*) şi ca urmare $\varphi(x)=0$ are cel puţin două rădăcini imaginare. Ecuaţiunea $\varphi_1(x)\equiv xf'(x)-f(x)=0$ are $(n-1)$ rădăcini reale cuprinse în intervalele (x_1, x_2); $(x_2, x_3);\ldots;(x_{n-1}, x_n)$; căci şirul $f'(x_1), f'(x_2),\ldots, f'(x_n)$ prezintând $(n-1)$ variaţii de semne, iar $f'(x_1)=A_0(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)$ având semnul lui $(-1)^{n-1}A_0$, semnele şirului $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_1(x_2),\ldots,\varphi_1(x_n)$ sunt date de semnele şirului: $(-1)^{n-1}A_0$, $(-1)^nA_1,\ldots,(-1)^{n+p-2}A_0,\ldots,(-1)^{2n-2}A_0$ care prezintă $(n-1)$ variaţiuni, deci $\varphi_1(x)=0$ are $n-1$ rădăcini reale $x'_2, x'_3,\ldots,$ x'_n şi ultima rădăcină x'_1 deci tot reală. Insă $\varphi_1(0)\varphi_1(x_1)=\pm A_0A_n>0$, deci x'_1 este *negativă*. Fie acum $\varphi(x)=x\varphi'_1(x)-\varphi_1(x)=0$. Având: $\varphi(x'_i)=x'_i\varphi'_1(x'_i)$ şi cum şirul $\varphi'_1(x'_1),\ldots$ $\varphi'_1(x'_n)$ prezintă $(n-1)$ variaţiuni de semne, deci şirul $\varphi(x'_1)$, $\varphi(x'_2),\ldots\varphi(x'_n)$ din cauză că $x'_1<0$ are numai $(n-2)$ variaţiuni de semne, etc. **33.** Polinomul dat având rădăcinile *0* şi *1* multiple de ordinul n, prima derivată are rădăcinile *0* şi *1* multiple de ordinul $(n-1)$, deci $(2n-2)$ rădăcini reale, $a(2n-1)^a$ rădăcină reală, α_1 cuprinsă între rădăcinile *0* şi *1* ale polinomului dat; derivata a doua are rădăcinile *0* şi *1* ale precedentei multiple de ordinul $(n-2)$ şi încă două rădăcini reale cuprinse între rădăcinile precedentei $0<\alpha'_2<\alpha_1$ şi $\alpha_1<\alpha''_2<1$, deci în total $2(n-2)+2=2n-2$ rădăcini reale, adică toate rădăcinile reale. Dacă am arătat că derivata de ordinul p, are rădăcinile *0* şi *1* multiple de ordinul $(n-p)$ şi celelalte rădăcini $\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2},\ldots,\alpha_{p,p}$ cuprinse în intervalele deter-

minate între *0* şi *1* determinate de rădăcinile precedentei, rezultă prin procedeul de mai sus că derivata de ordinul $p+1$ are în primul rând rădăcinile *0* şi *1* multiple de ordinul $(n-p-1)$, iar celelalte $(p+1)$ rădăcini reale cuprinse în intervalele $(0, \alpha_{p,1})$; $(\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2})\ldots(\alpha_{p,p-1}, \alpha_{p,p})$, $(\alpha_{p,p}, 1)$; rezultă de aci proprietatea enunţată. Pentru a doua ecuaţiune procedeu analog. **34.** Făcând transformarea $x=\frac{y-1}{y}$, ecuaţiunea dată devine: $(y-1)^n+(C_n^1)^2 y\,(y-1)^{n-1}+(C_n^2)\,y^2 (y-1)^{n-2}+(C_n^3)^2 y^3(y-1)^{n-3}+\ldots=\frac{1}{n!}[y^n(y-1)^n]^{(n)}=0$, şi problema revine la cea precedentă. **35.** Observăm că luând funcţiunea $\varphi_1(x)=e^{-\frac{x}{a}}\varphi(x)$ avem: $\varphi'_1(x)=e^{-\frac{x}{a}}[\varphi'(x)-\frac{1}{a}\varphi(x)]=-\frac{1}{a}f(x)e^{-\frac{x}{a}}$, etc. **36.** Intr'un interval finit numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii $F_n(x)=0$ este acelaş ca al ecuaţiunii $\varphi(x)=e^{mx}F_n(x)=0$; dar $\varphi'(x)=[e^{mx}F_n(x)]'=mx^n e^{mx}$; deci şirul lui *Rolle* nu poate prezenta decât cel mult două variaţiuni de semn. **37.** Observând că ecuaţiunea $e^{+x}x^n=0$ are toate rădăcinile sale reale şi că prin urmare ecuaţiunea obţinută din aceasta derivând succesiv de n ori, adică $[e^x x^n]^{(n)}=0$, are toate rădăcinile reale, rezultă că ecuaţiunea $x^n+C_n^1 A_n^1 x^{n-1}+C_n^2 A_n^2 x^{n-2}+\ldots+C_n^n A_n^n=0$ (1) are toate rădăcinile sale reale. Considerând acum ecuaţiunea cu rădăcini reale $f(x)=0$ şi ecuaţiunea (1) şi aplicând proprietatea demonstrată la (31), rezultă proprietatea enunţată. **38.** Funcţiunea $f(x)=sin^3 x+cos^3 x-a$ fiind periodică de perioadă 2π, este de ajuns să discutăm ecuaţiunea dată în intervalul $(0, 2\pi)$. Şirul lui *Rolle* pentru acest interval este următorul: $f(0)=(1-a)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1-a)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-a$, $f(\pi)=-1-a$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+a\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-(1+a)$, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-a$, $f(2\pi)=1-a$, de unde rezultă că

avem *patru* rădăcini reale dacă $-1<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$; *două* rădăcini reale dacă $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<0$ sau $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$; nici o rădăcină reală dacă $a<-1$ sau $a>+1$. **39.** Dând în factor în primul membru pe $\lambda^2-1\neq 0$ şi punând $\lambda^2=\mu$, avem să studiem natura rădăcinilor ecuaţiunii: $f(x)\equiv\mu^2x^3-\mu x^2-x+1=0$, unde μ este un număr pozitiv mai mic ca *unu*. Formând şirul lui *Rolle*, avem: $f(-\infty)=-\infty$; $f\left(-\frac{1}{3\mu}\right)=\frac{5}{27\mu}+1>0$; $f\left(\frac{1}{\mu}\right)=1-\frac{1}{\mu}<0$, $f(+\infty)=+\infty$ deci ecuaţiunea admite trei rădăcini reale. Observând în plus că: $f\left(-\frac{1}{\mu}\right)=1-\frac{1}{\mu}<0$; $f(0)=+1$; $f(+1)=\mu(\mu^2-1)<0$; $f\left(\frac{2}{\mu}\right)=1+\frac{2}{\mu}>0$, rezultă că rădăcinile reale se găsesc în intervalele restrânse: $\left(-\frac{1}{\mu},-\frac{1}{3\mu}\right)$; $(0,+1)$; $\left(\frac{1}{\mu},\frac{2}{\mu}\right)$. Pentru a obţine ecuaţiunea trigonometrică este suficient să facem în ecuaţiunea dată $x=sin^2\theta$ ca s'o căpătăm; deci rădăcinile ecuaţiei trigonometrice sunt date de $sin^2\theta=a$, unde a este rădăcina pozitivă cuprinsă în intervalul $(0,+1)$; etc.

XXVI. 1. Polinoamele lui *Sturm* sunt: $X=x^3-3x^2-3x+\alpha$; $X_1=x^2-2x-1$; $X_2=4x-\alpha+1$; $X_3=-\alpha^2+10\alpha+7$. Dacă $\alpha<5-4\sqrt{2}$ sau $\alpha>5+4\sqrt{2}$ ecuaţiunea are o singură rădăcină reală; dacă $5-4\sqrt{2}<\alpha<5+4\sqrt{2}$ ecuaţiunea are trei rădăcini reale. In cazul când $\alpha=5-4\sqrt{2}$ sau $\alpha=5+4\sqrt{2}$ ecuaţiunea are o rădăcină dublă. **2.** Polinoamele lui *Sturm* formează şirul $X=x^4-x^2+2x-5$; $X_1=2x^3-x+1$; $X_2=x^2-3x+10$, X_2 păstrând constant semnul *plus*. Când trecem dela $-\infty$ la $+\infty$, şirul pierde două variaţiuni, deci numai două rădăcini reale şi cum trecând dela $-\infty$ la 0 pierde o variaţiune, ecuaţiunea are o rădăcină negativă şi

una pozitivă. **3.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^5-5x^3+10x^2-2$; $X_1 \equiv x^4-3x^2+4x$; $X_2 \equiv x^3-3x^2+1$; $X_3 \equiv -2x^2-x+1$; $X_4 \equiv -3x+1$; $X_5 \equiv 4$. Când trecem dela $-\infty$ la $+\infty$, şirul pierde *trei* variaţiuni şi cum când trecem dela $-\infty$ la $0+\varepsilon$ şirul pierde *două* variaţiuni ecuaţiunea are două rădăcini negative, cealaltă fiind pozitivă în intervalele $(-7, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, +1)$. **4.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^6+3x^4-4x^3+6x^2+12x-18$; $X_1 \equiv x^5+2x^3-2x^2+2x+2$; $X_2 \equiv -x^4+2x^3-4x^2-10x+18$; $X_3 \equiv -x^3+10x^2-19$; $X_4 \equiv 84x^2-9x-170$; $X_5 \equiv 2267x-2402$; $X_6 = +k^2$, care prezintă pentru $x=\infty$ patru variaţiuni, pentru $x=0$ trei variaţiuni şi pentru $x=+\infty$ două variaţiuni; deci ecuaţiunea are două rădăcini reale: *una negativă* şi *una pozitivă*. **5.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^5+5x^4-20x^2-19x-2$; $X_1 \equiv 5x^4+20x^3-40x-19$; $X_2 \equiv 20x^3+60x^2+36x-9$; $X_3 \equiv 96x^2+187x+67$; $X_4 \equiv 43651x+54571$; $X_5 \equiv k^2$, care prezintă pentru $x=-\infty$ cinci variaţiuni, pentru $x=0$ o variaţiune şi pentru $x=+\infty$ numai permanenţe, deci ecuaţiunea are cinci rădăcini reale dintre care *patru negative* şi una pozitivă. **6.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* fiind: $X \equiv x^9+px+q$; $X_1 \equiv 9x^8+p$; $X_2 \equiv -8px-9q$; $X_3 \equiv -\left[\left(\frac{p}{9}\right)^9+\left(\frac{q}{8}\right)^8\right]$, deducem că, dacă $p>0$ şirul pierde o variaţie când trecem dela $x=-\infty$ la $x=+\infty$ deci o rădăcină reală; dacă $p<0$ şi $X_3<0$ asemenea o rădăcină reală; dacă $p<0$ şi $X_3>0$ trei rădăcini reale; în rezumat, dacă $X_3<0$ o rădăcină reală; dacă $X_3>0$ trei rădăcini reale. **7.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* fiind: $X \equiv x^{2n+1}+px+q$; $X_1 = (2n+1)x^{2n}+p$; $X_2 \equiv -2npx-(2n+1)q$; $X_3 \equiv -\left[\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}+\left(\frac{q}{2n}\right)^{2n}\right]$; urmează că, dacă $X_3<0$ ecuaţia are o singură rădăcină reală; dacă $X_3>0$, ecuaţiunea are trei rădăcini reale. **8.** Şirul polinoamelor lui *Sturm* fiind: $X \equiv x^3+px^2+q$; $X_1 \equiv 3x^2+2px$; $X_2 \equiv 2p^2x-9q$; $X_3 \equiv -[4p^3q+27q^2]$, deducem că, dacă $X_3<0$ ecuaţia are o singură rădăcină reală, dacă $X_3>0$

ecuația are trei rădăcini reale. **9.** Șirul lui *Sturm* fiind: $X \equiv x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q$; $X_1 \equiv x^4 - 3px^2 + p^2$; $X_2 \equiv px^3 - 2p^2x - q$; $X_3 \equiv p^2x^2 - qx - p^3$; $X_4 \equiv (p^5 - q^2)x$; $X_5 \equiv +p^3$ și $p > 0$, deducem că ecuația are cinci rădăcini reale dacă $p^5 - q^2 > 0$ și numai o rădăcină reală dacă $p^5 - q^2 < 0$. Ea are rădăcini multiple pentru $p^5 - q^2 - 0$. **10.** Dacă presupunem $0 < \alpha < 1$, șirul polinoamelor lui *Sturm* este limitat la polinoamele: $X \equiv x^4 - 2x^3 + 2\alpha x - \alpha$; $X_1 \equiv 2x^3 - 3x^2 + \alpha$; $X_2 \equiv x^2 - 2\alpha x + \alpha > 0$; când trecem dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$ el pierde două variațiuni deci ecuațiunea are două rădăcini reale. In cazul când $\alpha < 0$ sau $\alpha > 1$, șirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^4 - 2x^3 + 2\alpha x - \alpha$; $X_1 \equiv 2x^3 - 3x^2 + \alpha$; $X_2 \equiv x^2 - 2\alpha x + \alpha$; $X_3 \equiv -2x + 1$; $X_4 \equiv -1$; el pierde când trecem dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$ două variațiuni, deci ecuațiunea are două rădăcini reale și în acest caz. Dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$, ecuațiunea are rădăcini multiple. **11.** Șirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^5 + ax^4 + b$; $X_1 \equiv 5x^4 + 4ax^3$; $X_2 \equiv 4a^2x^3 - 5x^2b$; $X_3 \equiv -b(5x + 4a)$; $X_4 \equiv 3125b + 256a^5$. Dacă $bX_4 < 0$ șirul pierde 3 variațiuni când trecem dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$, deci ecuațiunea are *trei rădăcini reale* în acest caz; dacă $bX_4 > 0$ șirul pierde o singură variațiune când trecem dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$, deci ecuațiunea are o singură rădăcină reală. In rezumat ecuațiunea are *una* sau *trei* rădăcini reale, după cum: $b(3125b + 256a^5) \gtrless 0$. 2°. Șirul lui *Rolle* este: $f(-\infty)$; $f(0) = b$ $f\left(-\frac{4a}{5}\right) = 256a^5 + 3125b$; $f(+\infty)$ pentru $a < 0$, sau $f(-\infty)$, $f\left(-\frac{4a}{5}\right)$, $f(0)$, $f(+\infty)$ pentru $a > 0$. Se regăsește rezultatul obținut cu ajutorul șirului lui *Sturm*. **12.** Șirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X \equiv x^4 - 6\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, x^2 - 40\beta x - 3(\alpha^2 + \beta^2)$; $X_1 \equiv x^3 - 3\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, x - 10\beta$; $X_2 \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, x^2 + 10\beta x + (\alpha^2 + \beta^2)$; $X_3 \equiv [(\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 25\beta^2]x$; $X_4 \equiv -(\alpha^2 + \beta^2)$. Dacă $(\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 25\beta^2 > 0$ șirul este limitat la primele trei polinoame și când trecem dela $x = -\infty$ la

$+\infty$, el pierde două variaţiuni, deci ecuaţia are două rădăcini reale; dacă $(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-25\beta^2<0$, deasemenea şirul complect pierde două variaţiuni când trecem dela $x=-\infty$ la $x=+\infty$; deci şi în acest caz ecuaţia are rădăcini multiple. **13.** Polinoamele lui *Sturm* fiind: $X\equiv x^4-6x^2-4\beta x+3(\alpha^2+3)$; $X_1\equiv x^3-3x-\beta$; $X_2\equiv x^2+\beta x-(\alpha^2+3)$; $X_3\equiv-(\alpha^2+\beta^2)x+\beta(\alpha^2+4)$; $X_4\equiv\alpha^6+3\alpha^4-6\alpha^2\beta^2-\beta^4-16\beta^2$. Curba $X_4=0$ este simetrică în raport cu ambele axe de coordonate; orice paralelă la una din axe o taie numai în două puncte reale simetrice în raport cu cealaltă axă; ea se compune din două ramuri parabolice tangente în origină, cu tangenta dublă $\beta=0$. Pentru un punct interior uneia din ramurile parabolei [de aceeaşi parte de exemplu cu punctul (0, 1)] polinomul X_4 este negativ; pentru un punct în regiunea (II) cuprinsă între ramurile parabolice [de aceeaşi parte, de exemplu, cu punctul (1, 0)] polinomul X_4 este pozitiv. Când trecem dela $x=-\infty$ la $x=+\infty$ pentru un punct din regiunea (II) şirul pierde patru variaţii, deci ecuaţiunea are în acest caz *patru* rădăcini reale; pentru un punct din regiunea I ($X_4<0$) şirul pierde 2 variaţiuni, deci ecuaţiunea are *două* rădăcini reale. Dacă punctul este luat pe curba $X_4=0$, ecuaţiunea are rădăcini multiple. **14.** Luând ca necunoscute tangentele jumătăţilor unghiurilor triunghiului şi folosind relaţia $\Sigma\, tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1$, deducem din $a=r\left(cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}\right)$... adunându-le relaţia: $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$; apoi înmulţindu-le $\frac{abc}{r^3}=\left(\frac{p}{r}\right)^2\Sigma\, tg\frac{A}{2}-\frac{p}{r}$, dar $abc=4pRr$, deci $\Sigma\, tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$ şi ca urmare ecuaţiunea problemii este: $px^3-(4R+r)x^2+px-r=0$. Această ecuaţiune trebue să aibă toate rădăcinile reale pozitive. Formând şirul polinoamelor lui *Sturm*, avem $X\equiv px^3-(4R+r)x^2+px-r$; $X_1\equiv 3px^2-2(4R+r)x+p$; $X_2\equiv[(4R+r)^2-3p^2]x-2p(R-2r)$; $X_3\equiv-[p^4-2(2R^2+10Rr-r^2)p^2+r(4R+r)^3]$. Acest şir trebue să piardă trei variaţiuni când trecem dela $x=0$ la $x=+\infty$; deci pentru $x=0$ trebue să

prezinte trei variaţiuni, ceeace se întâmplă dacă $R>2r$ şi $X_3>0$, iar pentru $x=+\infty$ trebue să aibă numai permanenţe, ceeace are loc dacă $(4R+r)^2-3p^2>0$ şi $X_3>0$. Dacă $R>2r$ ecuaţiunea $X_3=0$ în p^2 are rădăcini reale distincte ambele pozitive: $p_1^2<p_2^2$, iar valoarea $\frac{(4R+r)^2}{3}$ este în afară de intervalul rădăcinilor, deci este de ajuns să luăm $p_1^2<p^2<p_2^2$, pentru ca problema să fie posibilă. **15.** Punând $X\equiv(x+i)^m+(x-i)^m$ $*^*_*$ $X_1\equiv(x+i)^{m-1}+(x-i)^{m-1}$. Insemnăm în general $X_p\equiv(x+i)^{m-p}+(x-i)^{m-p}$. Avem identitatea: $X\equiv 2xX_1-(x^2+1)X_2,\ldots,X_{p+1}\equiv 2xX_p-(x^2+1)X_{p-1}\ldots$ *Şirul polinoamelor* $X, X_1, X_2,\ldots, X_{p+1}, X_p, X_{p-1},\ldots, X_m$ *se bucură de proprietăţile polinoamelor şirului lui Sturm*: 1°. Ultimul polinom X_m fiind o constantă diferită de zero, păstrează un semn constant; 2°. Două funcţiuni consecutive X_{p+1}, X_p nu se pot anula pentru aceeaşi valoare de x, căci în caz contrar procedând din aproape în aproape ar urma să avem $X_m=0$, contrar primei proprietăţi; 3°. Dacă X_p se anulează pentru o valoare de x, avem neapărat X_{p+1} şi X_{p-1} de semne contrare; 4°. In cazul de faţă X_1 fiind chiar derivata lui X, a patra condiţiune este îndeplinită. Pentru $x=-\infty$ şirul de mai sus prezintă numai variaţiuni, iar pentru $x=+\infty$ numai permanenţe, deci ecuaţiunea $X=0$, are toate rădăcinile reale. **16.** Insemnând cu $X\equiv(x+\sqrt{x^2-1})^m+(x-\sqrt{x^2-1})^m$ şi derivând succesiv de două ori această identitate obţinem relaţiunea de recurenţă: $m^2X\equiv xX'+(x^2-1)X''$, X', X'' fiind prima şi a doua derivată a lui X în raport cu x. Insemnând cu $X^{(p)}$ derivata de ordinul p a lui X în raport cu x, avem mai general relaţiunea de recurenţă prin procedeul inducţiei complectă: $(m^2-p^2)X^{(p)}\equiv(2p+1)xX^{(p+1)}+(x^2-1)X^{(p+2)}$.(R). Şirul lui $X, X', X'',\ldots, X^{(p)}, X^{(p+1)}, X^{(p+2)},\ldots, X_m$ se bucură de proprietăţile polinoamelor lui *Sturm* pentru $-1<x<+1$. 1°) X_m fiind derivata unui polinom de gradul m cu primul termen pozitiv, este o constantă pozitivă; 2°) Două polinoame $X^{(p+1)}$ şi $X^{(p+2)}$ consecutive nu se pot anula pentru aceeaşi valoare de x, căci în cazul contrar ar urma să avem $X_m=0$,

contrar primei proprietăţi; 3°) Dacă $X^{(p+1)}$ se anulează pentru o valoare de $x=x_0$ cuprinsă între -1 şi $+1$, polinoamele $X^{(p)}$ şi $X^{(p+2)}$ au semne contrare pentru $x=x_0$; 4°) X' fiind derivata polinomului X, a patra condiţiune este îndeplinită. Observăm apoi că şirul considerat, pentru $x=-1$ dă $X^{(p)}(m^2-p^2)\equiv-(2p+1)X^{(p+1)}$, deci el prezintă numai variaţiuni, dar pentru $x=+1$, prezintă numai permanenţe. Aşadar, când trecem dela $x=-1$ la $x=+1$ şirul pierde m variaţiuni şi în consecinţă ecuaţia $X=0$, are m rădăcini reale în intervalul $(-1, +1)$. **17.** Insemnăm cu X_n primul membru al ecuaţiunii date. Intre polinoamele X_n avem relaţia de recurenţă: $X_n\equiv\frac{2n-1}{n}(x+1)X_{n-1}-\frac{n-1}{n}(x-1)^2X_{n-2}$. Polinoamele X_n se bucură de proprietăţile polinoamelor lui *Sturm*: 1°. $X_0=+1\neq0$; 2°. Două polinoame consecutive nu se anulează pentru o valoare de x, căci în caz contrar din aproape în aproape ar urma că X_0 să fie nul; 3°. Dacă X_p se anulează pentru o valoare de x, X_{p+1} şi X_{p-1} sunt de semne contrarii pentru acea valoare; 4°. Având relaţiunea: $X_n+(x-1)X_{n-1}\equiv\frac{2x}{n}X'_n$ şi observând că dacă X_n se anulează pentru $x=x_0$, x_0 nu este pozitiv, deducem că X_{n-1} şi X'_n *sunt de acelaşi semn pentru orice valoare care anulează pe* X_n. Dar şirul polinoamelor: $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1, X_0$ pentru $x=-\infty$ prezintă numai variaţiuni, iar pentru $x=+\infty$ numai permanenţe, deci ecuaţiunea are toate rădăcinile reale. **18.** Observând că b este cuprins în intervalul $(-2, +2)$, deci că $-(b^2-4)>0$, şirul polinoamelor lui *Sturm* este următorul: $X\equiv y^7-7y^5+14y^3-7y-b$; $X_1\equiv y^6-5y^4+6y^2-1$; $X_2\equiv2y^5-8y^3+6y+b$; $X_3\equiv2y^4-6y^2+by+2$; $X_4\equiv2y^3+by^2-4y-b$; $X_5\equiv y^2-1$; $X_6\equiv y$; $X_7=+1$. Pentru $y=-2$ şirul prezintă numai variaţiuni; pentru $y=+2$ şirul prezintă numai permanenţe, deci ecuaţiunea în y având toate rădăcinile reale şi cuprinse între -2, $+2$, ecuaţia în x are toate rădăcinile reale cuprinse în intervalul $(-1, +1)$. Dacă $b=-2$ sau $b=+2$ ecuaţia are rădăcini multiple. **19.** In condiţiu-

nile puse, şirul P_i, P_{i+1},..., P_n se bucură de toate proprietăţile şirului lui *Sturm* al ecuaţiunii $P_i=0$, deci îl putem substitui şirului lui *Sturm* şi cum ecuaţiunea $P_i=0$ are $2k$ rădăcini imaginare, acest şir pierde când trecem dela $x=-\infty$ la $x=+\infty$ cu $2k$ variaţiuni mai puţin decât numărul intervalelor, deci şirul lui *Sturm* corespunzător ecuaţiunii $P=0$ când trecem dela $x=-\infty$ la $x=+\infty$ pierde un număr de variaţiuni mai mic decât m cu cel puţin $2k$. **20.** Punând $y=e^{-x^2}$ şi $P_n(x)=e^{x^2}y^{(n)}$, observăm că având $y'=-2xy$; $y''=-2xy'-2y$; şi din aproape în aproape dacă $y^{(p)}=-2xy^{(p-1)}-2(p-1)y^{(p-2)}$ *** $y^{(p+1)}=-2xy^{(p)}-2py^{(p-1)}$, deci relaţia fiind adevărată pentru $n=2$, este adevărată pentru n; $y^{(n)}=-2xy^{(n-1)}-2ny^{(n-2)}$ sau $e^{+x^2}y^{(n)}=-2xe^{+x^2}y^{(n-1)}-2ne^{+x^2}y^{(n-2)}$ ceace e tot una cu $P_n(x)\equiv-2xP_{n-1}(x)-2nP_{n-2}(x)$ (I). Din relaţiunea (I) deducem că şirul polinoamelor: $P_n(x)$; $-P_{n-1}(x)$; $P_{n-2}(x)$; $-P_{n-3}(x)$;...; $\mp P_1(x)$; $\pm P_0$ se bucură de proprietăţile polinoamelor lui *Sturm* corespunzătoare ecuaţiunii: $P_n(x)=0$, 1^0. $P_0=+1\neq0$; 2^0. Dacă $P_k(x)$ se anulează pentru o valoare de x, polinoamele din şirul de mai sus care îl cuprind sunt de semne contrare; 3^0. Două polinoame consecutive ale şirului nu pot fi nule pentru aceeaşi valoare de x, căci ar urma ca P_0 să fie nul, contrar lui 1^0. In fine pentru a patra proprietate (esenţială) observăm că având: $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ *** $y^{(n+1)}(x)=e^{-x^2}[P'_n(x)-2xP_n(x)]$, deci din $e^{x^2}y^{(n+1)}\equiv e^{x^2}y^{(n)}(-2x)-2ne^{x^2}.y^{(n-1)}$ sau $P'_n(x)-2xP_n(x)=-2xP_n(x)-2nP_{n-1}(x)$, deci pentru o valoare de x pentru care se anulează $P_n(x)$, $P'_n(x)$ şi $[-P_{n-1}(x)]$ sunt de acelaşi semn. Fie că n este par sau impar pentru $x=-\infty$ şirul are numai variaţiuni, iar pentru $x=+\infty$ numai permanenţe. **21.** Polinoamele $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$,..., $P_1(x)$, $P_0=+1$ formează un şir care se bucură de proprietăţile polinoamelor lui *Sturm*. 1^0. Avem $P_0=+1\neq0$; 2^0. Două polinoame consecutive $P_k(x)$, $P_{k+1}(x)$ nu pot să se anuleze pentru aceeaşi valoare a lui x, căci relaţia de recurenţă arată din aproape în aproape că în caz contrar toate polinoamele până la $P_0=+1$ să se anuleze pentru acea valoare; 3^0. Dacă unul

din polinoame $P_k(x)$ se anulează pentru o valoare a lui x, polinoamele între care este cuprins: $P_{k+1}(x)$ şi $P_{k-1}(x)$ sunt de semne contrare pentru acea valoare. Pentru a demonstra că polinoamele date se bucură de a patra proprietate (esenţială) a polinoamelor lui *Sturm*; cu ajutorul primelor polinoame determinăm o relaţie de forma: $(1-x^2)P'_n(x)+nxP_n(x) -nP_{n-1}(x)\equiv 0$ şi arătăm că ea este generală arătând că fiind adevărată până la polinomul de indice n, ea este adevărată şi când schimbăm pe n în $(n+1)$. Dar această din urmă relaţie arată că, dacă $P_n(x)$ se anulează pentru o valoare cuprinsă între -1 şi $+1$, $P_{n-1}(x)$ şi $P'_n(x)$ au acelaş semn pentru acea valoare. Dealtă parte, din aceeaşi relaţie rezultă că pentru $x=-1$ două polinoame consecutive sunt de semne contrarii; pe când, pentru $x=+1$, ele sunt de acelaş semn. Deci pentru $x=-1$ şirul care înlocueşte şirul lui *Sturm* prezintă numai variaţiuni, pe când pentru $x=+1$, numai permanenţe, deci şirul fiind complect toate rădăcinile lui $P_n(x)=0$ sunt reale cuprinse în acest interval $(-1, +1)$.

22. Avem $P_0=1$; $P_1(x)\equiv x$; $P_2(x)\equiv x^2-2$; $P_3(x)\equiv x^3-3x$; $P_4(x)\equiv x^4-4x^2+2$ şi în general punând: $y^{p-1}+\frac{1}{y^{p-1}}=P_{n-1}(x)$: deducem înmulţind cu $y+\frac{1}{y}=x$ relaţia de recurenţă: $P_n(x)-xP_{n-1}(x)+P_{n-2}(x)\equiv 0$ (I). Polinoamele $P_n(x)$; $P_{n-1}(x)$; $P_{n-2}(x)$;..., $P_1(x)$; P_0 se bucură de toate proprietăţile polinoamelor lui *Sturm*, care le permit a înlocui şirul lui *Sturm:* 1°. Avem $P_0\equiv+1\neq 0$; 2°. Două polinoame consecutive nu se pot anula pentru aceeaşi valoare a lui x, căci contrar relaţia (I) atrage că toate polinoamele succesive până la P_0 trebue să fie nule pentru aceeaşi valoare, o imposibilitate; 3°. Dacă $P_k(x)$ se anulează pentru o valoare a lui x, polinoamele $P_{k+1}(x)$ şi $P_{k-1}(x)$ care-l cuprind sunt de semne contrarii pentru acea valoare. Pentru a arăta că şi a patra proprietate este adevărată, stabilim, potrivit metodei din cazul precedent, că avem relaţia:

$$(4-x^2)P'_n(x)+nxP_n(x)-2nP_{n-1}(x)\equiv 0 \text{ (II)};$$

deci, pentru o valoare de x cuprinsă în intervalul $(-2, +2)$ care anulează pe $P_n(x)$, polinoamele P_{n-1} şi P'_n sunt de acelaşi semn. Pentru $x=+2$, două polinoame consecutive sunt de acelaşi semn; pentru $x=-2$ ele sunt de semne contrare, etc.

XXVII. 1. Se va scrie $x^6(x-5)+x^3(3x^2-6x-200)+(2x^2-15x-100)=0$. Valorile cele mai mici întregi ale lui x care fac parantezele pozitive sunt respectiv: 6, 10, 12. Deci limita superioară a rădăcinilor pozitive este 12. Dacă însă gruparea se face astfel: $x^3(x^4-5x^3-200)+x(3x^4-6x^3-15)+(2x^2-100)$ se găseşte la fel limita superioară 8. **2.** Limita superioară a rădăcinilor pozitive este 3. Aflăm limita inferioară a rădăcinilor pozitive, căutând limita superioară a rădăcinilor pozitive în transformata ecuaţiei în $\frac{1}{x}$, adică în $x^3-3x^2-2x+1=0$; această limită este 4. Deci limita inferioară a rădăcinilor pozitive este $\frac{1}{4}$. Aflăm limita inferioară a rădăcinilor negative, căutând limita superioară a rădăcinilor pozitive pentru transformata în $-x$: $x^3+2x^2-3x-1=0$; această limită este 2, deci limita inferioară a rădăcinilor negative, pentru ecuaţia dată este -2. In fine, cu transformarea lui x în $-\frac{1}{x}$ obţinem o ecuaţie a cărei limită superioară a rădăcinilor pozitive este 1, deci limita superioară a rădăcinilor negative pentru ecuaţia dată este -1. Intervalele cerute sunt: $\left(\frac{1}{4}, 3\right)$; $(-1, -2)$. **3.** $f^{IV}(x)>0$ pentru $x=0$, $f'''(x)>0$ şi $f''(x)>0$ pentru $x=1$, $f'(x)>0$ pentru $x=2$, iar $f(x)>0$ pentru $x=3$. Aceasta este limita căutată. **4.** Cu metoda lui *Newton* găsim $f^{(VI)}(x)>0$ pentru $x=1$, $f^{V}(x)>0$ şi $f^{IV}(x)>0$ pentru $x=2$, $f'''(x)>0$ când $x=3$, $f''(x)>0$, $f'(x)>0$ respectiv pentru $x=4$, $x=5$ şi $f(x)>0$ pentru $x=6$. Deci limita superioară a rădăcinilor pozitive este $x=6$, mai scăzută decât aceia aflată în primul

exemplu. Cu metoda lui *Laguerre*, trebue să formăm polinoamele: $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x-5$, $f_2(x)=x^2-5x+3$, $f_3(x)=x^3-5x^2+3x-6$, $f_4(x)=x^4-5x^3+3x^2-6x-200$, $f_5(x)=x^5-5x^4+3x^3-6x^2-200x+2$, $f_6(x)=x^6-5x^5+3x^4-6x^3-200x^2+2x-15$ şi $f_7(x)\equiv f(x)$ şi să căutăm valorile cele mai mici, întregi ale lui x care fac polinoamele $f_i(x)$ pozitive. $f_1(x)>0$ pentru $x=6$. Vom cerceta dacă $x=6$ dă valori pozitive şi în celelalte polinoame, ceeace se întâmplă. Conchidem $x=6$ este limita superioară a rădăcinilor pozitive. **5.** Metoda lui *Newton* dă 16 ca limită superioară a rădăcinilor pozitive, iar metoda lui *Laguerre* dă 20. **6.** După teorema lui *Descartes*, ecuaţia nu are rădăcini negative. Cu metoda lui *Newton* găsim limita superioară a rădăcinilor pozitive 5. Rădăcinile întregi trebuind să fie divizori ai ultimului termen, 24 pot fi 1, 2, 3, 4. Verificarea arată că toate sunt rădăcini. **7.** Metodă analoagă; se caută însă şi limita inferioară a rădăcinilor negative. Rădăcinile sunt -6, -3, -2, 2, 1. **8.** Rădăcinile raţionale sunt -3, -2, 2, 4; rădăcinile iraţionale sunt date de ecuaţia $x^2-x+1=0$. **9.** Rădăcinile întregi sunt 2, 3. Impărţind membrul I al ecuaţiei la $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$, găsim $6x^2-13x+6$, ale cărui rădăcini sunt $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{2}$. **10.** Rădăcini întregi nu sunt. Pentru a obţine rădăcinile fracţionare facem transformarea $x=\frac{y}{21}$, pentru a obţine o ecuaţiune cu coeficientul primului termen 1; $y^4-41y^3+945y^2-10584y+37044=0$, ale cărei rădăcini întregi sunt: 6 şi 14. Rădăcinile fracţionare ale ecuaţii propuse sunt $\frac{6}{21}$ şi $\frac{14}{21}$ sau $\frac{3}{7}$ şi $\frac{2}{3}$. **11.** Rădăcinile sunt: -1, 3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{4}$. **12.** $(x-2)(3x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. **13.** $-a$, $\frac{a}{2}$, $\pm ai$. **14.** Primul membru se scrie $x(x^3+3x^2-4)+a(x^2+4x+4)=x(x+2)^2(x-1)+a(x+2)^2=(x+2)^2(x^2-x+a)$. **15.** $a+1$, $\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4a})$. **16.** a, a, $\frac{1}{2}(-2a\pm\sqrt{4a^2-6})$.

17. Observăm că ultimul termen se descompune în factori astfel: $(a+b)(a+b^2)(b^2+b-a)$. Rădăcinile întregi trebuesc căutate printre acești factori sau produsul lor. Rădăcinile sunt: $-(a+b)$, $-(a+b^2)$, b^2+b-a. **18.** Prin procedeul rădăcinii întregi se găsesc rădăcinile $2a$, $\pm c$ și rădăcinile duble $\pm\sqrt{\frac{d}{2}}$. (G. M. II). **19.** Se desvoltă și se găsește $-a$, $-b$ și ecuația $x^2+(a+b)x+a^2+ab+b^2=0$. (G. M. I.). **20.** Eliminând numitorul și punând $x\sqrt{3}=y$, obținem ecuația $y^3-3y-2=0$, cu rădăcinile -1, -1, 2. Rădăcinile ecuației date sunt: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **21.** Se va scrie $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-3x^2-4x+12}=1$, deci $x^3-3x^2-4x+12=0$. Rădăcinile sunt -2, 2, 3. **22.** Aflăm rădăcinile întregi și fracționare ale membrului I, apoi descompunem în factori astfel: $(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x^2+1)>0$. *a*) Produsul primilor doi factori este pozitiv dacă $x<-2$ sau $x>\frac{1}{3}$. Factorul al treilea trebue să fie deasemenea pozitiv, deci $x>1$. Valorile lui x care satisfac toate condițiile sunt $x>1$. *b*) Produsul primilor doi factori este negativ dacă $-2<x<\frac{1}{3}$, iar factorul al treilea care deasemenea trebue să fie negativ dă: $x<1$. Inecuația propusă este deci satisfăcută și pentru $-2<x<\frac{1}{3}$. **23.** $x=-i$ este rădăcină a ecuației dacă $i\leqslant n+1$. In adevăr avem:

$$1-\frac{i}{1}+\frac{i(i-1)}{2!}-\frac{i(i-1)(i-2)}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{i(i-1)\ldots(i-n)}{(n+1)!}=$$

$C_i^0-C_i^1+C_i^2+\ldots+(-1)^{n+1}C_i^{n+1}$; dacă $i=n+1$, această expresie reprezintă suma coeficienților desvoltării lui $(x-1)^{n+1}$, deci este nulă; dacă $i<n+1$, suma primilor $i+1$ termeni este nulă fiind suma coeficienților desvoltării lui $(x-1)^i$, iar ceilalți termeni ce urmează sunt nuli. Deci ecuația admite rădăcinile -1, -2,... $-(n+1)$; acestea sunt toate rădăci-

nile, gradul ecuaţiei fiind $n+1$. **24.** Se va pune $x=y\sqrt{q}$. Rezolvarea se reduce la rezolvarea ecuaţiei $qy^3+py+1=0$. Analog se poate face transformarea şi pentru ecuaţia: $A_0 x^{2m+1}+A_2 x^{2m-1}+A_4 x^{2m-3}+\ldots+A_{2m} x+\sqrt{A_{2m+1}}=0$. **25.** x reprezentând baza necunoscută, trebue să avem: $3x^3+4x^2+5x+2=824$. Trebue să aflăm rădăcina întreagă şi pozitivă a acestei ecuaţii. Găsim $x=6$. **26.** Numerele sunt x şi $x+4$. Ecuaţia este: $(x^2+4x)(2x+4)=1386$. O rădăcină este $x=7$, alte rădăcini imaginare. **27.** x reprezentând timpul în ore, pe care l'ar pune prima fântână să umple singură bazinul, într'o oră s'ar umple $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{6}{5}}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}$ din bazin. Deci ecuaţia problemei este $2\left[\frac{1}{x}+\frac{5}{5x+6}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}\right]=1$. $x=6$. **28.** Fie ABC triunghiul, h înălţimea vârfului A, B' C' paralela dusă la distanţa x de BC, D şi E proecţiile punctelor B', C' pe BC. Avem: $2x^2[\overline{BD}+\overline{EC}+3\overline{DE}]=h^2\overline{BC}$ sau $2x^2[\overline{BC}+2\overline{DE}]=h^2.\overline{BC}$. Dar din asemănarea triunghiurilor AB'C', ABC conchidem: $\overline{DE}=\overline{BC}\,\frac{h-x}{h}$ $\therefore$ $4x^3-6hx^2+h^3=0$ este ecuaţia problemei $\therefore$ $x=\frac{h}{2}$, $x=\frac{h(1\pm\sqrt{3})}{2}$. **29.** Dacă ecuaţia ar avea o rădăcină întreagă a, ar trebui să avem: $f(x)=(x-a)Q(x)$, deci $f(0)=-aQ(0)$, $f(1)=(1-a)Q(1)$. $Q(0)$ şi $Q(1)$ sunt numere întregi; rezultă că unul din numerele $f(0)$, $f(1)$ este sigur par. **30.** In identitatea $f(x)=(x-a)Q(x)$ se înlocueşte x succesiv cu b, $b+1,\ldots b+a-1$ şi se va observa că unul din numerele $b-a$, $b-a+1$, $b-a+2,\ldots b-1$ este divizibil cu a fiind a numere întregi consecutive. **31.** Presupunând $x>1$, primul membru al ecuaţiei, E, este mai mare decât $x^{m-p}(A_0+A_1+\ldots A_p)-N(x^{m-p-1}+x^{m-p-2}+\ldots+1)$, deci decât $x^{m-p}(A_0+A_1+\ldots A_p)-N.\frac{x^{m-p}-1}{x-1}$. Rezultă $E>x^{m-p}(A_0+A_1+\ldots+A_p)-N\frac{x^{m-p}}{x-1}$.

Luând $A_0+A_1+.....+A_p-\frac{N}{x-1}>0$, avem $E>0$; dar aceasta se întâmplă dacă presupunem $x>1+\frac{N}{A_0+A_1+...+A_p}$.

32. Se notează cu u expresia dată, se ridică la cub și se află $u^3-6u-40=0$ $\therefore$. Expresiunea dată fiind rădăcină reală a ecuației, rezultă $u=4$.

XXVIII. 1. Ecuația are o singură rădăcină reală, cuprinsă între 1,32 și 1,33. Aplicând metodele de aproximație găsim 1,32474. **2.** Rădăcina este cuprinsă între 4,3 și 4,4; $f(4,3)=-0,093$ și $f(4,4)=4,384$ ceiace arată că rădăcina este mai aproape de 4,3; substituind 4,31 găsim $+0,342991$; aplicând metodele de aproximație găsim 4,30213. **3.** Rădăcina pozitivă este cuprinsă între 2,4 și 2,5; $f(2,4)=-1,176$; $f(2,5)=0,125$, $f(2,49)=-0,011751$, găsim $x_1=2,4908$; rădăcinile negative sunt cuprinse în intervalele $(-1,0)$, $(-2,-1)$, găsim $x_2=-0,64$; apoi din $x_1+x_2+x_3=0$, $x_3=-1,85$. **4.** 2,8330. **5.** 2,6458. **6.** 2,8888; $-2,7639$; $-0,1251$. **7.** 1,76030. **8.** 1,5185. **9.** Ecuația devine $4x^3-9c^2x-4c^3=0$ rădăcina este cuprinsă între 1,68 și 1,69. **10.** Ecuația este $x^3+3r^2x-2r^3=0$ $\therefore$. $x=0,5960$. **11.** Ecuațiunea este $x^4-2Rx^3+R^4=0$. O rădăcină este $x=R$, avem apoi ecuația $x^3-Rx^2-R^2x-R^3=0$ $\therefore$. $x=1,8393$. **12.** Ecuația probleme este $x(x-1)^2=1$ $\therefore$. $x=1,7548$. **13.** Limita inferioară a rădăcinei negative este 0, deci nu avem rădăcini negative; pentru rădăcinile pozitive putem scrie $(x-1)(12x^4+5x^3+5x^2+6x+6)-2994=0$, ceeace arată că avem o singură rădăcină mai mare ca 1; 3,141544. **14.** In identitatea $sin\,3a=3sin\,a-4sin^3a$, se face $sin\,a=sin\,50^0=x$, $sin\,3a=sin\,150^0=\frac{1}{2}$; ecuația este $3x-4x^3=\frac{1}{2}$; se găsește $x=sin\,50^0=0,766$.

15. $\overline{AB}=2\sqrt{R^2-x^2}$, $\overline{OC}=\frac{R^2}{x}$. Avem $2\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{x}=a$ sau $2x\sqrt{R^2-x^2}=ax-R^2$ $\therefore$. $4x^4+(a^2-4R^2)x^2-2aR^2x+R^4=0$

este ecuaţia problemei. Când $a=R$, ecuaţia devine $4x^4-3R^2x^2-2R^3x+R^4=0$ şi admite rădăcina $x=R$. Când $a=2R$, ecuaţia este $4x^4-4R^3x+R^4=0$, $\frac{x}{R}=0{,}254$.

16. Notăm r raza sferei şi x distanţa dintre cele două plane. Avem: $\frac{2\pi r^2(r-x)}{3}-\frac{\pi(r^2-x^2)x}{3}=\frac{\pi r^3}{3}$. Dacă notăm $y=\frac{x}{r}$, obţinem ecuaţia $y^3-3y+1=0$. Avem o rădăcină cuprinsă între 0 şi 1 şi o rădăcină mai mare decât 1 care nu convine problemei $\therefore y=0{,}3472$. **17.** Cu ajutorul teoremei lui *Rolle*, găsim că ecuaţia are o singură rădăcină reală, pozitivă. Această rădăcină este cuprinsă între 2 şi 3, deci de forma $2+\frac{1}{y}$. Inlocuim această valoare în ecuaţie şi făcând operaţiile, avem ecuaţia care dă valoarea întreagă şi pozitivă a lui y: $y^3-10y^2-6y-1=0$. Rădăcina pozitivă a acestei ecuaţii este cuprinsă între 10 şi 11, deci de forma $10+\frac{1}{z}$. Inlocuind, obţinem ecuaţia care dă pe z: $61z^3-94z^2-20z-1=0$. Rădăcina pozitivă a acestei ecuaţii este cuprinsă între 1 şi 2, deci de forma $1+\frac{1}{u}$. u este dat de $54u^3+25u^2-89u-61=0$,... Redusele sunt: $\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}$. Se continuă calculul până se obţin două reduse consecutive a căror diferenţă este mai mică decât 0,0001. **18.** (1, 1, 3, 2, 1). **19.** Ecuaţia are o singură rădăcină pozitivă, cum se vede cu teorema lui *Rolle*. Se repetă cele arătate în exerciţiul precedent. Redusele sunt $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}$, etc. **20.** Rădăcinile derivatei sunt $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$, şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)<0$, $f\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)>0$, $f\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)<0$, $f(+\infty)>0$. Ecuaţia are o rădăcină pozitivă mai mică decât $\sqrt{\frac{7}{3}}$, anume cuprinsă

între 1 și $\sqrt{\frac{7}{3}}$ și o rădăcină pozitivă cuprinsă între $\sqrt{\frac{7}{3}}$ și 2. Deci ambele rădăcini pozitive sunt cuprinse între 1 și 2. Deoarece $f(1{,}5) < 0$, rădăcinile sunt cuprinse între 1 și 1,5; 1,5 și 2 sau $\left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right)$ și $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right)$. Facem substituția $x = \frac{y}{2}$ și obținem ecuația $y^3 - 28y + 56 = 0$ având două rădăcini pozitive cuprinse în intervalele (2, 3) și (3, 4). Pentru determinarea acestora se procedează ca în exercițiile precedente. **21.** Avem: $x^5 = 0{,}0111 + 0{,}004797\,x^2 + 0{,}000826\,x$; neglijând ultimii doi termeni obținem $x' = \sqrt[5]{0{,}0111} = 0{,}4065$, valoare prea mică; înlocuind în membrul al doilea pe x cu valoarea apropiată găsită, obținem $x = \sqrt[5]{0{,}012228} = 0{,}41445$, apoi $x''' = 0{,}4147...$ Calculele se fac cu ajutorul logaritmilor.

XXIX. 1. Se știe că pentru șirul $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ $\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} - \ldots + (-1)^n u_0 = (u-1)^{(n)}$. Deci $\Delta^6 u_0 = (u-1)^{(6)} = 94 - 6.65 + 15.48 - 20.35 + 15.23 - 6.8 + 2 = 23$. **2.** $\Delta^4 x^p = (x+4)^p - 4(x+3)^p + 6(x+2)^p - 4(x+1)^p + x^p$; pentru $p=4$, $\Delta^4 x^4 = 24$, pentru $p=5$, $\Delta^4 x^5 = 120x + 240$. **3.** Fiind dat șirul de diferențe $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots$ $\Delta^n u_0$, $u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$, găsim șirul: 1, 4, 12, 32,... **4.** $\Delta^1 y = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)$

$$\Delta^2 y = 2\sin\frac{h}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x + h + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\right] = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x + 2\frac{h}{2}\right), \text{ etc. } \Delta^n y = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^n \sin\left[x + \frac{n}{2}(\pi + h)\right].$$

$$\textbf{5. } \Delta^n y = \frac{(x+nh)[x+(n-2)h]^{C_n^2}[x+(n-4)h]^{C_n^4}\ldots}{[x+(n-1)h]^{C_n^1}[x+(n-3)h]^{C_n^3}[x+(n-5)h]^{C_n^5}\ldots}.$$

6. Notăm $y = x^3 - 7x + 7$. Dacă h este creșterea dată lui x (în cazul problemei $h = 0{,}1$), $\Delta y = (3x^2 - 7)h + 3xh^2 + h^3$, $\Delta^2 y = 6xh^2 + 6h^3$, $\Delta^3 y = 6h^3$. Observăm că $\Delta^3 y$ este constant

egal cu 0,006 pentru orice valoare dată lui x. Pentru $x=1$ avem $y(1)=1$, $\Delta y(1)=-0{,}369$, $\Delta^2 y(1)=0{,}066$, $\Delta^3 y(1)=0{,}006$. Dar cum $\Delta^{n+1}y(x)=\Delta^n y(x+h)-\Delta^n y(x)$, rezultă $\Delta^n y(x+h)=\Delta^{n+1}y(x)+\Delta^n y(x)$ deci se poate calcula diferenţa de ordinul n a polinomului y pentru valoarea $x+h$, adunând diferenţele de ordinul $n+1$ şi n ale lui y pentru valoarea x; deoarece cunoaştem, în cazul nostru, diferenţele pentru valoarea $x=1$, deducem diferenţele pentru valoarea $x=1{,}1$, apoi din acestea diferenţele pentru $x=1{,}2$, etc. Obţinem tabloul

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1.8	1,9	2
y	1	0,631	0.328	0,097	−0,056	−0.125	−0,104	0,013	0,232	0,559	1
Δy	−0,369	−0,303	−0,231	−0,153	−0,069	−0,021	0,117	0,219	0,327	0,441	
$\Delta^2 y$	0,066	0,072	0,078	0,084	0,09	0,096	0,102	0,108	0,114		
$\Delta^3 y$	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006			

7. Se foloseşte următoarea formulă a lui *Newton* $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{h}\Delta f(a)+\frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(a)}{1.2}+\ldots+\frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-a}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n f(a)}{n!}$ unde a este primul termen al unei progresii aritmetice cu raţia h şi se cunoaşte $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, etc. In cazul problemei $a=0$, $h=1$, deci $f(x)=x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}+\ldots$

8. $f(0)=1$, $f(1)=-1$, $f(-1)=13$. Fie $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ divizorii de gradul II. Avem $f(x)\equiv\varphi(x).\psi(x)$. Rezultă că $\varphi(0)$ $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$ sunt respectiv divizori ai numerelor $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ şi cum $\varphi(x)=\varphi(0).(1-x^2)+\frac{1}{2}\varphi(1).(x^2+x)+\frac{1}{2}\cdot\varphi(-1).(x^2-x)$, rezultă: *a*) pentru $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=-1$, $\varphi(-1)=1$, $-x^2-x+1$ dar acesta nu divide pe $f(x)$; *b*) pentru $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=-1$, $\varphi(-1)=-1$, $-2x^2+1$, dar nu dă un cât cu coeficienţi întregi. *c*) pentru $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=-1$, $\varphi(-1)=13$, $5x^2-7x+1$ care nu satisface problemei deoarece

împărţind pe $f(x)$ cu $5x^2-7x+1$ nu se obţine un cât cu coeficienţi întregi, etc. **9.** Procedeu analog. Se găseşte: $f(x)=(2x^2-x+1)(x^2+x-3)$. **10.** $f'(x)$ care este polinom de gradul 6, fiind divizibil cu $(x-1)^3$ şi $(x+1)^3$ este de forma $a(x^2-1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1)$; deci $f(x)=a\left(\frac{x^7}{7}-\frac{3x^5}{5}+x^3-x\right)+b$. Dar $f(1)+1=0$, $f(-1)-1=0$, de unde rezultă $a=\frac{35}{16}$, $b=0$. **11.** $F(x)=f(x)+(x^2-1)^4\psi(x)$, $\psi(x)$ fiind un polinom arbitrar, iar $f(x)$ polinomul din exerciţiul precedent. **12.** Dacă pentru $x=a_1$, $a_2 \ldots a_{m+1}$ polinomul ia respectiv valorile A_1, $A_2, \ldots A_{m+1}$ şi dacă se notează $\varphi(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m+1})$, formula lui *Lagrange* este $f(x)\equiv\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{A_k}{\varphi'(a_k)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x-a_k}$. Formula lui *Newton* este aceia folosită în problema 7, pentru prezenta punând $a=a_1$ şi presupunând că $a_2=a_1+h$, $a_3=a_2+h$, etc., $f(a)=A_1$, $f(a+h)=A_2$, etc. Cele două polinoame de gradul m, astfel definite au valori egale pentru cele $m+1$ valori a_1, $a_2 \ldots a_{m+1}$ ale lui x, deci sunt identice. **13.** Se va lua pentru numărător polinomul dat de formula lui *Lagrange* care ia valorile u_0, $u_1 \ldots u_n$, iar pentru numitor un polinom în care u_0, $u_1, \ldots u_n$ au valoarea particulară 1. **14.** Se va considera expresiunea $u_x=(x+1)^m$ căreia i se va lua diferenţa de ordinul m: $\Delta^m u=m!\,h^m$, apoi se aplică formula $\Delta^m u_0=u_m-C_m^1 u_{m-1}+C_m^2 u_{m-2}\ldots$ înlocuind, găsim identitatea. **15.** Fie $u_p=(a+pb)^{m-1}$ $\therefore$ $\Delta^m u_0=(a+mb)^{m-1}-C_m^1[a+(m-1)b]^{m-1}+\ldots=0$, m fiind mai mare ca p. Ţinând seama de acest rezultat, partea a doua a egalităţii date se anulează pentru $x=a$; la fel cele $m-1$ derivate succesive. **16.** Se vor considera funcţiunile $f(x)=(2x)^{2p}$ şi $\varphi(x)=(2x+1)^{2p+1}$ cărora li se vor lua diferenţele de ordinul m ca în exerciţiile precedente. (G. M. X.). **17.** Prima rezultă din definiţia derivatei. $\Delta^2\varphi(x)=\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)$. Dar $\varphi(x+2h)-\varphi(x+h)=h\,\varphi'(x+h)+\alpha$, $\varphi(x+h)-\varphi(x)=$

$h\varphi'(x)+\alpha'$ $\therefore$ $\Delta^2\varphi(x)=h[\varphi'(x+h)-\varphi'(x)]+\alpha-\alpha'$ $\therefore$ $\frac{\Delta^2\varphi(x)}{h^2}=\frac{\varphi'(x+h)-\varphi'(x)}{h}+\frac{\alpha-\alpha''}{h^2}$. Deci $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2\varphi(x)}{h^2}=\varphi''(x)$. etc. Când h este foarte mic $\Delta^p\varphi(x)$ este sensibil egal cu $h^p\varphi^{(p)}(x)$. **18.** In formula $f(x)=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\frac{x-x_0}{h}\left[\frac{x-x_0}{h}+1\right]\Delta^2 u_0+\ldots$ se va face $u_0=f(a)$, $x_0=a$, apoi se va ţine seama de egalităţile $\Delta f(a)=\Delta f(a-h)+\Delta^2 f(a-h)$, $\Delta^2 f(a)=\Delta^2 f(a-h)+\Delta^3 f(a-h)\ldots$, $\Delta^2 f(a-h)=\Delta^2 f(a-2h)+\Delta^3 f(a-2h)\ldots$, etc., de unde rezultă formula cerută. **19.** Un polinom oarecare se poate pune sub forma $f(x)=b_0x(x-1)\ldots(x-m+1)+b_1x(x-1)\ldots(x-m+2)+\ldots+b_{m-1}x+b_m$. Deci însemnând cu $\Delta_0^{(i)}$ diferenţa de ordin i pentru $x=0$, avem: $\Delta_0^{(m-p-1)}=\frac{b_p}{(m-p)!}$. In cazul particular $f(x)=x^m$ formând sistemul celor $m-p+1$ diferenţe împreună cu $f(x)$, avem prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii lineare, b_i fiind necunoscutele:

$$b_p=\begin{vmatrix} N_{m-1}^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ N_{m-1}^2 & N_{m-2}^1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{m-1}^p & N_{m-2}^{p-1} & N_{m-3}^{p-2} & \ldots & N_{m-p}^1 \end{vmatrix}$$

XXX. 1. Să scriem ecuaţiunea sub forma: $\sin x-\frac{5}{2}x=0$ şi reprezentând grafic curbele: $y=\sin x$ şi $y=\frac{5}{2}x$, observăm că dreapta $y=\frac{5}{2}x$ este cuprinsă în unghiul dintre tangenta în origină la curbă şi axa Oy, deci ecuaţiunea n'are altă soluţiune reală în afară de soluţiunea evidentă $x=0$.

2. Scriind ecuaţiunea sub forma $\sin x-\frac{x}{2}=0$ şi construind curbele $y=\sin x$ şi $y=\frac{x}{2}$, observăm că ordonatele dreptei

pentru $x=\frac{\pi}{2}$ și $x=2\pi$ sunt respectiv $y=\frac{\pi}{4}<1$ și $y=\frac{1}{4}\pi>1$; deci dreapta taie curba în afară de origină în două puncte reale *simetrice* în raport cu origina, de abscise x_0 și $-x_0$ cuprinse în intervalele $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$. Ecuațiunea admite în total trei soluțiuni reale. **3.** Generalizarea chestiunilor precedente. Scriem ecuațiunea sub forma: $\sin x - mx = 0$, unde $m=\frac{a}{b}$. Construind curbele $y=\sin x$ și $y=mx$, însemnăm cu $x_0, x_1, x_2, \ldots$ abscisele punctelor, pentru care tangenta la sinusoidă trece prin origină, de ordonate pozitive. Observăm că $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sunt soluțiunile reale ale ecuației: $tg\,x - x = 0$ cuprinse respectiv în intervalele $\left(2\pi, 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(4\pi, 4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(6\pi, 6\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,... etc. Dacă $m>1$, ecuația n'are altă soluțiune reală în afară de $x=0$; dacă $1>m>\cos x_0$ ecuațiunea dată în afară de soluțiunea evidentă $x=0$, are încă două soluțiuni reale cuprinse în intervalele $(0, \pi)$ și $(-\pi, 0)$; dacă avem $\cos x_0 > m > \cos x$, ecuațiunea dată are în afară de $x=0$, încă șase rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $(2\pi, 3\pi)$; și simetricele lor în raport cu origina, etc. **4.** Scriind ecuațiunea sub forma: $x - cosec\,x = 0$ și construind curbele $y=x$ și $y=cosec\,x$, deducem: că ecuațiunea dată are o infinitate de rădăcini reale; că la o soluție aflată avem totdeauna o soluțiune simetrică în raport cu origina; rădăcinile reale pozitive fiind cuprinse în intervalele: $\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ și $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)$, k întreg pozitiv. **5.** Punem ecuațiunea sub forma: $x - cotg\,x = 0$, procedeu analog ca în cazurile precedente. Ecuațiunea are o infinitate de soluțiuni simetrice în raport cu origina două câte două, cele pozitive cuprinse în

intervalele $\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, k întreg pozitiv. Cea mai mică rădăcină pozitivă este cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Folosind tablele care dau arcele şi valorile naturale ale liniilor trigonometrice exprimate în părţi zecimale de ale razei, se găseşte între 49^0 şi 50^0, căci pentru aceste valori $x-cotgx$ trece dela $-$ la $+\infty$. Calculată cu patru zecimale exacte rădăcina este 0,8603, sau în grade $49^0 17' 30''$. **6.** Se vor construi curbele $y=x^m$ şi $y=cos\,mx$ distingând patru cazuri după paritatea şi semnul lui m. (G. M. IX). **7.** Construind curbele $y=cos\,x-2\,sin\,x$ şi $y=3x$, observăm că ele se taie într'un singur punct, deci ecuaţiunea dată are o singură rădăcină cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{4}$. Cu ajutorul tablelor se găseşte că această rădăcină este cuprinsă între 0,192 şi 0,209. **8.** Să punem $y=ax+b$ şi $y=sin\,2x-tgx=tgx.cos\,2x$. A doua fiind o funcţiune periodică, de perioadă egală cu π, observăm că studiată în unul din intervalele de continuitate $\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\ +\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ este cunoscută în tot domeniul de existenţă. In fiecare din intervalele de continuitate ea are un minimum şi un maximum simetrice în raport cu punctul de ordonată nulă, trecând dela ordonata $+\infty$ la $-\infty$; deci dreapta $y=ax+b$ taie pe una oarecare din ramuri în cel puţin un punct. Aşadar, ecuaţiunea dată are în fiecare din intervalele $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\ k\pi+\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ cel puţin o rădăcină reală, iar în total o infinitate de rădăcini reale. **9.** Construind curbele $y=sin\,x$ şi $y=2x-6$ se vede că dreapta taie curba sinusului într'un singur punct, deci ecuaţiunea dată are o singură rădăcină reală cuprinsă între $\frac{\pi}{2}$ şi π. Punând $f(x)\equiv sin\,x-2x+6$, avem, folosind tabelele în care găsim arcele şi valorile naturale ale liniilor trigonometrice, că $f(175^0)\equiv f(180^0-5^0)\equiv 6{,}26081-6{,}28318<0$ şi $f(174^0)\equiv f(180^0-6^0)\equiv 6{,}31367-6{,}28318>0$, deci rădă-

cina e cuprinsă între 174° şi 175° sau, în părţi zecimale de rază, între 3,03706 şi 3,05443. Intrebuinţând metodele de aproximare putem obţine o valoare mai apropiată a rădăcinii. **10.** Punem $f(x)\equiv e^x+e^{-x}-2x$. Dacă x este negativ, $f(x)>0$, deci ecuaţiunea $f(x)=0$ n'are rădăcini negative. Intre 0 şi $+\infty$, $f(x)$ este continuă, iar derivata ei se anulează pentru $x=\mathrm{L}\,(1+\sqrt{2})$. Şirul lui *Rolle* dă $f(0)>0$; $f[\mathrm{L}\,(1+\sqrt{2})]=2\,[\sqrt{2}-\mathrm{L}\,(1+\sqrt{2})]>0$, $f(+\infty)$, deci nici o rădăcină reală. Aşadar, ecuaţiunea dată n'are rădăcini reale. **11.** Funcţiunea $y=e^x-ax-b$ continuă dela $-\infty$ la $+\infty$. Dacă $a<0$, şirul lui *Rolle* prezintă o singură variaţiune, deci o singură rădăcină reală pozitivă pentru $b>1$, nulă pentru $b=1$ şi negativă pentru $b<1$; dacă $a>0$ şirul lui *Rolle* prezintă două variaţiuni sau nici una după cum $y(\mathrm{L}\,a)\gtrless 0$; deci *două rădăcini reale* pentru $b\geqq a(1-\mathrm{L}\,a)$ şi *nici una* pentru $b<a(1-\mathrm{L}\,a)$. **12.** Punem ecuaţiunea subt forma: $x-\log x-2{,}40993=0$. Construind curbele $y=x-2{,}40993$ şi $y=\log x$ găsim că ecuaţiunea are două rădăcini cuprinse în intervalele (0,1), (2,3), care calculate cu patru zecimale sunt 0,0039 şi 2,8674. **13.** Avem din ecuaţiunea dată $\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+5}$ *** ecuaţiunea $\log\,(x+5)-x\log\frac{6}{5}-\log\frac{5}{2}=0$; construind curbele date prin $y=\log(x+5)$ şi $y=x\log\frac{6}{5}+\log\frac{5}{2}$, găsim că aceste două curbe se taie în două puncte de abscise cuprinse între: (9,10) şi (−3, −4); găsim pentru valorile aproximative ale rădăcinilor: $x_1=9{,}723$ şi $x_2=-3{,}734$. **14.** Construind curbele $y=10^{\frac{x^2}{10}-1}$ şi $y=x$ găsim că ecuaţiunea are două rădăcini reale, care calculate cu patru zecimale exacte sunt: 0,1002 şi 4,0029. **15.** Din ecuaţiunea dată, deducem rezolvând-o în raport cu e^x următoarele două ecuaţiuni: $e^x+tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$ (1) şi $e^x+cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$ (2). Se observă imediat că dacă $-x_0$

este o rădăcină a uneia din cele două ecuaţiuni, atunci x_0 este rădăcina aceleaşi ecuaţiuni; deci rădăcinile sunt două câte două numere contrarii. Ecuaţiile (1) şi (2) au o infinitate de soluţiuni fiecare. Observăm apoi că e^x fiind o funcţiune cu valori pozitive, ecuaţiunea (1) are rădăcini numai în intervalele în care $tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ este negativă; asemenea ecuaţia (2) are rădăcini numai în intervalele unde $cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ este negativă. Pentru calculul celei mai mici rădăcini pozitive, este mai comod a desvolta în serii pe (e^x+e^{-x}) şi $\cos x$, şi găsim întrebuinţând metoda aproximaţiilor succesive $x=2{,}8751\ldots.$

16. Funcţiunea u poate să fie scrisă: $u=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-1+\mathrm{L}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. Făcând $x=2k\pi+x_0$, avem $u(2k\pi+x_0)=\frac{\sin x_0}{\cos^2 x_0}-1+\mathrm{L}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x_0}{2}\right)=u(x_0)$; deci dacă x_0 este o soluţie a ecuaţiei date $u(x)=0$, toate valorile $x=2k\pi+x_0$ (k întreg) sunt soluţiuni. Este de ajuns să determinăm într'un interval de lungime 2π soluţiunile ecuaţiei date pentru a le avea pe toate. Funcţiunea $v(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-1$ fiind reală, pentru a avea în un interval o soluţiune, trebue $w=\mathrm{L}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ să fie reală în acel interval. Găsim că funcţiunea w este reală în toate intervalele congruente cu intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ faţă cu perioada 2π. Funcţiunea u la capetele intervalului $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ este infinită $u\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\infty$, $u\left(+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$, iar $u'_x=\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}$ păstrează un semn constant în tot acest interval, deci există o rădăcină în acest interval şi cum $u(0)=-1$ ea se găseşte între 0 şi $+\frac{\pi}{2}$. **17.** Scriind ecuaţia subt forma: $x\log x-1=0$,

se observă că funcţiunea $u = x \log x - 1$ pentru toate valorile lui $x < 1$ este negativă, iar derivata se anulează pentru $x = 0{,}1$ trecând dela valori negative la valori pozitive, deci pentru $x > 1$ este continuu crescătoare. Ecuaţiunea are deci o singură rădăcină cuprinsă între $(+2, +3)$, care calculată cu patru zecimale exacte este $x = 2{,}5062$. **18.** Construind curbele $y = \frac{4x}{4 - 3x^2}$ şi $y = tg\, x$, se vede că ecuaţiunea dată are o infinitate de rădăcini; dacă x_0 este o rădăcină a ecuaţiei, $-x_0$ este deasemenea o rădăcină a ecuaţiei; rădăcinile pozitive sunt în regiunile în care $tg\, x$ este negativă, deci cuprinse în intervalele: $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$;... Lăsând la o parte rădăcina $x = 0$, primele două rădăcini pozitive calculate cu patru zecimale exacte sunt 2,5633 şi 6,0597. (Această ecuaţiune se întâlneşte în teoria vibraţiunilor corpurilor elastice, soluţia dată de *Poisson* Mém. Acad. Scien. t. VIII). **19.** Avem ecuaţiunea $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} - 2 = 0$ *** $\frac{e^{4x} + 1}{e^{4x} - 1} - 2 = 0$ *** $e^{4x} = 3$ *** $x = \frac{\mathrm{L}3}{4}$. **20.** Observăm că y este discontinuă în origină, căci când $x = -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ tinde către zero, y tinde către 0, iar când $x = +\varepsilon$ tinde către zero, y creşte la $+\infty$; apoi $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Derivata y' se anulează pentru $x = +1$ trecând dela valori negative la valori pozitive, deci y este minim pentru $x = 1$ şi avem $y_m = e$. Tăind curba reprezentativă a funcţiunii $y = xe^{\frac{1}{x}}$, cu dreapta $y = a$, deducem că ecuaţiunea $xe^{\frac{1}{x}} - a = 0$, când $a < 0$, are o singură rădăcină reală negativă; când $0 < a < e$, nici o rădăcină reală; iar, când $a > e$, are două rădăcini reale pozitive. **21.** Scriind pe y subt forma: $y = x + \frac{1}{2} \mathrm{L}\, tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ *** $y' = 1 - \frac{1}{2 \cos x}$. Se deduce că în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ func-

ţiunea y are un *minim* negativ şi un *maxim* pozitiv, deci curba reprezentativă a variaţiunii taie axa $x'x$ în trei puncte (adică y se anulează pentru trei valori reale ale lui x) deoarece $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\infty$. Curba trecând prin origină, una din valori este $x=0$. Ecuaţiunea $tg\frac{x}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ poate să fie scrisă subt formele succesive: $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=tg\frac{x}{2}$;

$$e^{-x}=\sqrt{\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}} \quad *^{*}* \quad x+\mathrm{L}\sqrt{\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}}=0,$$

de unde rezultă proprietatea enunţată. **22.** Studiind variaţiunea funcţiunii $y=arctg\,x-\frac{x}{1+x^2}$, vedem că derivata fiind constant pozitivă, y este continuu crescătoare; având $y(-\infty)=arctg(-\infty)=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ şi $y(+\infty)=arctg(+\infty)=+\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, deducem că reprezentând variaţiunea funcţiunii, curba corespunzătoare este cuprinsă între dreptele paralele $y=-\frac{\pi}{2}$ şi $y=+\frac{\pi}{2}$. Aşadar, dacă $m<-\frac{\pi}{2}$ sau $m>+\frac{\pi}{2}$ ecuaţiunea dată n'are rădăcini reale; dacă $-\frac{\pi}{2}<m<\frac{\pi}{2}$ ecuaţiunea are o rădăcină reală. **23.** Observăm în primul rând că dacă în ecuaţiune schimbăm pe x în $-x$, ecuaţiunea nu se schimbă, deci dacă x_0 este o rădăcină, $-x_0$ este deasemenea o rădăcină; este suficient deci să căutăm numai rădăcinile pozitive. Calculând derivata funcţiunii $y=arctg\,x-mx$, avem $y'=-m\frac{x^2+\frac{m-1}{m}}{1+x^2}$. Dacă m este în afara intervalului $(0, +1)$, derivata nu se anulează, pentru valori reale ale lui x, deci y n'are nici *maxim*, nici *minim*, deci în afară de rădăcina

evidentă $x=0$, nu are în acest caz nici o altă rădăcină reală dacă $0<m<1$, în intervalul $(0, +\infty)$ derivata se anulează; pentru $x=\sqrt{(1-m):m}$ trecând dela valori pozitive, la valori negative, deci y trece printr'un maxim pentru această valoare şi cum $y(+\infty)=\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\infty=-\infty$, ecuaţiunea pe lângă rădăcina $x=0$ mai are o rădăcină pozitivă $x_0>\sqrt{(1-m):m}$.

24. Studiem variaţiunea funcţiunii $y=\frac{sin(x-\alpha)}{sin^4 x}(\alpha>0)$. Observăm în primul rând că y este o funcţiune periodică de perioadă 2π; vom studia deci variaţiunea lui y în intervalul $(0, 2\pi)$; funcţiunea devine infinită la capetele intervalului şi pentru $x=\pi$ şi anume $y(0)=-\infty$; $y(2\pi)=-\infty$ şi $y(+\pi)=+\infty$ dacă $sin\alpha>0$ şi $y(0)=+\infty$, $y(+2\pi)=+\infty$, $y(\pi)=-\infty$ dacă $sin\alpha<0$. Calculând derivata, observăm că $y'_x=0$ pentru $tgx=\frac{3\pm\sqrt{9-16\,tg^2\alpha}}{2\,tg\alpha}$, deci când $tg\alpha$ este cuprinsă între $-\frac{3}{4}$ şi $+\frac{3}{4}$. Dacă $tg\alpha$ are o valoare în afara intervalului $\left(-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}\right)$, derivata păstrează un semn constant în cele două semiintervale de continuitate $(0,\pi)$ şi $(\pi, 2\pi)$, deci ecuaţiunea considerată oricare ar fi valoarea lui m are câte o rădăcină reală în fiecare din semiintervalele de mai sus. Dacă $tg\alpha$ este cuprinsă în intervalul $\left(-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}\right)$, tgx deci x are câte două valori reale în fiecare din cele două semiintervale $(0,\pi)$ şi $(\pi, 2\pi)$, deci în fiecare funcţiunea admite câte un *maxim* y_M, şi un *minim* y_m. Dacă m este cuprins între y_1 şi y_2 ecuaţiunea dată are în acel semiinterval trei rădăcini reale; dacă este în afară de intervalul (y_1, y_2) ecuaţiunea are o singură rădăcină reală. **25.** Observăm în primul rând că funcţiunea $y=xe^{-\frac{sin\alpha}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ este discontinuă pentru $x=0$ şi anume dacă $\varepsilon>0$, avem $y(-\varepsilon)=0$ şi $y(+\varepsilon)=+\infty$ când

$\varepsilon \to 0$; apoi $y(-\infty)=-\infty$ şi $y(+\infty)=0$. Calculând derivata observăm că ea se anulează pentru două valori $x_1=tg\frac{\alpha}{2}<x_2=cotg\frac{\alpha}{2}$ căci $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$. Tăind curba reprezentativă a variaţiei lui y cu dreapta $y=m$ $(m>0)$ deducem că: dacă $m>cotg\frac{\alpha}{2}e^{-\cos\alpha}$ o singură rădăcină reală în intervalul $\left(0, tg\frac{\alpha}{2}\right)$; dacă $tg\frac{\alpha}{2}e^{+\cos\alpha}<m<cotg\frac{\alpha}{2}e^{-\cos\alpha}$ avem trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(0, tg\frac{\alpha}{2}\right)$; $\left(tg\frac{\alpha}{2}, cotg\frac{\alpha}{2}\right)$; $\left(cotg\frac{\alpha}{2}, +\infty\right)$; dacă $m<tg\frac{\alpha}{2}e^{\cos\alpha}$ avem o singură rădăcină reală mai mare ca $cotg\frac{\alpha}{2}$. **26.** Studiind variaţia funcţiunii $y=\frac{e^{x\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ vedem că y descreşte dela 0 la -1 în primul interval de realitate şi creşte dela $+1$ la $+\infty$ în al doilea interval de realitate; deci dacă m este în afară de intervalul $(-1, +1)$ avem o singură rădăcină reală totdeauna; dacă $-1<m<1$ nici o rădăcină reală. **27.** Insemnând cu φ unghiul la centru corespunzător arcului MD ecuaţia problemei este $\varphi+sin\varphi=\frac{\pi}{2}$ *** $log\,sin\,\varphi=log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; se găseşte $\varphi=0{,}83171$ sau $\varphi=48^0\,40'\,13''$. **28.** Insemnând cu 2φ arcul MN, ecuaţiunea care dă pe φ este $2\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}sin(\pi-\varphi)\right]=\frac{\pi}{3}$, sau $\varphi+sin\varphi=\frac{\pi}{3}$. Se găseşte $\varphi=0{,}5362$ sau $30^0\,43'\,33''$. **29.** Insemnând cu φ arcul sectorului, ecuaţia care determină pe φ este: $\varphi=2sin\varphi$ care dă $\varphi=1{,}89549$ sau în grade $108^0\,36'\,13''$. **30.** Observăm că punând $y=ax-f(x)$, avem $y'_x=a-f'(x)$, deci în condiţiunile problemii ecuaţiunea derivată n'are nici o rădăcină reală.

XXXI. 1. Amplificând ecuațiunile respectiv cu b_2 și $-a_2$ și adunând; apoi cu $-b_0$ și a_0 și adunând avem:

$$\left|\begin{array}{l}(a_0 b_2 - a_2 b_0)x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \\ (a_0 b_1 - a_1 b_0)x + (a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0\end{array}\right.,$$

între care eliminând pe x avem:

$$\left|\begin{array}{cc} a_0 b_2 - a_2 b_0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 & a_0 b_2 - a_2 b_0 \end{array}\right| = 0$$

sau încă: $(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$. **2.** Din sistemul dat deducem: $(p - p')x + (q - q') = 0$; $(q' - q)x^2 + (p q' - p' q) = 0$; deci eliminantul: $(p - p')^2 (pq' - p'q) - (q - q')^3$. **3.** Prin acelaș procedeu se ajunge la eliminarea lui x între ecuațiunile următoare: $(a_0 b_3 - a_3 b_0) x^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)x + (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0$; $(a_0 b_1 - a_1 b_0)x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0)x + (a_0 b_3 - a_3 b_0) = 0$ și se aplică rezultatul de mai sus. **4.** Punem: $x^m = \frac{\alpha}{\gamma}$, $x^n = \frac{\beta}{\gamma}$ *** $\frac{\alpha^n}{\gamma^n} = \frac{\beta^m}{\gamma^m}$ deci: $\alpha^n \gamma^{m-n} - \beta^m = 0$; ecuațiunile devin: $\alpha + p\beta + q\gamma = 0$; $\alpha + p'\beta + q'\gamma = 0$ *** $\frac{\alpha}{pq' - p'q} = \frac{\beta}{q - q'} = \frac{\gamma}{p' - p}$, deci eliminantul este: $(pq' - p'q)^n (p' - p)^{m-n} - (q - q')^m = 0$. **5.** Se observă că $xy = -1$; eliminantul este $(12 - y)(1 - y + y^2 - \ldots - y^{11} + y^{12}) = 0$; iar în cazul general: $(m - 1 - y)(1 - y + y^2 - \ldots \pm y^{m-1}) = 0$. (G. M. VI.). **6.** Avem: $\frac{a}{c} = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}$, $\frac{b}{c} = \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$ *** $\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{2t^2}{1+t^4}$; asemenea având $\frac{a}{b} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ *** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{2t^2}{1+t^4}$, deci eliminantul este: $(a^2 + b^2)^2 - c^2 (a^2 - b^2) = 0$. **7.** Din ecuațiile date, deducem: $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = (u + a)(v + a)$;.....; apoi sistemul: $uv + a(u + v) - \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + a^2 = 0$;...; deci eliminantul este:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & a & -\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + a^2 \\ 1 & b & -\left(\frac{x}{B}\right)^{\frac{2}{3}} + b^2 \\ 1 & c & -\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{2}{3}} + c^2 \end{array}\right| = 0;$$

sau încă $(b-c)\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+(c-a)\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}+(a-b)\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}}+(a-b)(b-c)(c-a)=0$. **8.** Punând $x=ru$, $y=rv$, sistemul devine: $u(1+2v^2)=\alpha$, $v(1+2u^2)=\beta$, $u^2+v^2=1$ $\left(\text{unde } \alpha=\frac{a}{r},\ \beta=\frac{b}{r}\right)$; sau încă: $u(u^2+3v^2)=\alpha$, $v(3u^2+v^2)=\beta$; $u^2+v^2=1$. Adunând şi scăzând primele două ecuaţiuni obţinem: $u+v=(\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}$, $u-v=(\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}$. Eliminantul este: $(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2r^{\frac{2}{3}}$. **9.** Din sistemul dat se deduce imediat sistemul echivalent: $\alpha(x^2+3y^2-6y-1)=0$; $3x^2(y-1)+(y-1)(y^2-2y-3)=0$; care conduce la ecuaţiunea în y: $8(y-1)^2(y^2-2y)(y^2-2y-3)=0$. Admite sistemele de soluţii: $(-2,1)$; $(-1,0)$; $(-1,2)$; $(0,-1)$; $(0,+1)$; $(0,+3)$; $(+1,0)$; $(+1,2)$; $(+2,+1)$. **10.** Punând $x+y=u$, $x-y=v$ sistemul devine: $uv=1$; $u^2+v^2-4u+2=0$, care conduce la ecuaţiunea: $u^4-4u^3+2u^2+1=0$, sau $(u-1)(u^3-3u^2-u-1)=0$. Pentru $u=1$ avem $x=1$, $y=0$. Formând şirul lui *Sturm* pentru al doilea factor: $X=u^3-3u^2-u-1$; $X_1\equiv 3u^2-6u-1$; $X_2\equiv 2u+1$; $X_3\equiv -11$; găsim că ecuaţia $u^3-3u^2-u-1=0$ are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(+3, +4)$, etc. **11.** Punem $a=\frac{1}{\alpha}$, $y=tx$, avem: $x+t^3=0$; $tx^2+\alpha tx+\alpha^2 x=0$ *** $x=-t^3$, $y=-t^4$, deci pentru ca x să fie real, trebue t să fie real şi $t^4-\alpha t-\alpha^2=0$ (1). Ecuaţiunea derivată $4t^3-\alpha=0$ are o singură rădăcină reală $t_1=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{4}}$ şi $4f(t_1)=\alpha t_1-4\alpha t_1-4\alpha^2\equiv -3\alpha t_1-4\alpha^2=-3\alpha\left(t_1+\frac{4\alpha}{3}\right)$. Pentru $\alpha>0$, $t_1>0$ *** $4f(t_1)<0$; pentru $\alpha<0$, $t_1<0$, deci $4f(t_1)<0$. Aşadar, avem totdeauna două rădăcini reale pentru ecuaţiunea în t, deci pe lângă soluţiunea banală, două sisteme de soluţiuni reale comune pentru sistemul de ecuaţiuni dat. **12.** Aplicând teorema lui *Rolle* se vede că ecuaţiunea dată n'are rădăcini reale; punând deci $z=x+iy$, unde x şi y sunt numere reale, găsim pentru determinarea lui x şi y sis-

temul de ecuaţiuni $x^4-6x^2y^2+y^4-x+1=0$; $4x^3-4xy^2-1=0$ şi eliminând pe y găsim: $64x^6-16x^2-1=0$. Punând încă $4x^2=u$, avem: $\varphi(u)\equiv u^3-4u-1=0$. Cu ajutorul polinoamelor lui *Sturm* găsim că $\varphi(u)=0$, are o singură rădăcină pozitivă cuprinsă între *2* şi *3*. Aplicând metoda de aproximaţie a lui *Newton*, găsim: $u=2{,}1149$, deci $x=\pm 0{,}7271$, iar rădăcinile imaginare sunt: $+0{,}7271\pm 0{,}4888\,i$; $-0{,}7271+0{,}9624\,i$. **13.** Formând polinoamele lui *Sturm* se vede că ecuaţiunea n'are rădăcini reale; deci punând $z=x+iy$ deducem ca x şi y reali sunt determinaţi de sistemul: $x^4-6x^2y^2+y^4-2x+3=0$; $2x^3-2xy^2-1=0$ *** $y^2=\frac{2x^3-1}{2x}=x^2-\frac{1}{2x}$ *** $\varphi(x)\equiv 16x^6-12x^2-1=0$. Punând $x^2=u$, avem $f(u)\equiv 16u^3-12u-1=0$. Formând şirul lui *Rolle*, se vede că $f(u)=0$ are o singură rădăcină pozitivă cuprinsă între *0* şi *1*; deci putem pune: $x^2=\cos\alpha$ *** $\cos 3\alpha=\frac{1}{4}$ *** $x^2=\cos 30^0\,10'=0{,}905$ *** $x=\pm 0{,}951$ *** $y_1=\pm 0{,}616$ şi $y_2=1{,}195$. (G. M. XIII.). **14.** Punând $x-y=t$ şi folosind a doua ecuaţiune, deducem: $x=\frac{24+t^2}{2t}$, $y=\frac{24-t^2}{2t}$; apoi din ultima $x=\frac{24-4t-t^2}{2t}$. Prima ecuaţiune a sistemului devine: $t^5+6t^4+24t^3-1520t^2+1152t+3456=0$, care se descompune în $t-2=0$ şi $f(t)\equiv t^4+8t^3+40t^2-1440t-1728=0$. Ecuaţiunea $f(t)=0$ are o rădăcină pozitivă cuprinsă în intervalul (8; 9) şi una negativă cuprinsă în intervalul $(-2,-1)$. Calculate cu două zecimale exacte aceste rădăcini sunt: $t_2=8{,}76$ şi $t_3=-1{,}17$. Sistemul dat are în total cinci sisteme de soluţiuni finite. (G. M. XXXII. p. 175). **15.** Dacă presupunem $x=0$ sau $z=0$ suntem conduşi la soluţiunile: $x=y=0$, $z=\infty$; $x=z=0$, $y=\infty$; $y=z=0$ $x=\infty$. Dacă $x\neq 0$, $z\neq 0$, sistemul poate fi scris sub forma: $(xz-y)(z-x)=0$; $(z-y)(z+y-1)=0$; $xz^2+xy-1=0$. 1°. $z=x$, $z=y$; $xz^2+xy-1=0$ *** $x=y=z$; $x^3+x^2-1=0$. Şirul lui *Rolle* prezintă o singură variaţie pentru ecuaţia

$\varphi(x)\equiv x^3+x^2-1=0$; are o rădăcină reală pozitivă cuprinsă între $\frac{3}{4}$ şi $\frac{4}{5}$ sau (0,75 ; 0,80). 2°. $z=x$; $y+x-1=0$; $x^3+xy-1=0$ $*^*$ $y=1-x$ şi ecuaţia $x^3-x^2+x-1=0$ $*^*$ $(x-1)(x^2+1)=0$ deci: $x=z=1$, $y=0$ şi $x=z=\pm i$, $y=1\mp i$. 3°. $z=y$ $*^*$ $y(x-1)=0$; dar $z\neq 0$ $*^*$ $y\neq 0$ deci $x=1$ şi $z^2+z-1=0$, care dau: $x=1$, $y=z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$. 4°. $xz-y=0$; $z+y=1$; $xz^2+xy-1=0$ $*^*$ $xz^2+xy+xz-y-1=0$ $*^*$ $xz^2+x=y+1$ $*^*$ $x=\frac{2-z}{z^2+1}$, $y=1-z$; $z^3-2z^2+3z-1=0$. Şirul lui *Rolle* arată că ecuaţiunea are o singură rădăcină reală pozitivă; ea este cuprinsă între $\frac{2}{5}$ şi $\frac{1}{2}$, adică în intervalul (0,4; 0,5). (G. M. XXXV. p. 266). **16.** Ridicând prima ecuaţiune la pătrat şi la cub şi ţinând seamă de ecuaţiunile celelalte obţinem: $\Sigma xy=14$; $73+3\Sigma x^2(7-x)+6xyz=343$ $*^*$ $xyz=8$, deci x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiunii: $t^3-7t^2+14t-8=0$ sau $(t-1)(t-2)(t-4)=0$. Cele şase sisteme de soluţiuni comune se obţin făcând toate permutările cu rădăcinile 1, 2, 4. (G. M. XLI. p. 310). **17.** Procedeu analog ca la precedenta; x, y, z, u sunt rădăcinile ecuaţiunii: $t^4-10t^3+35t^2-50t+24=0$, care admite rădăcinile întregi 1, 2, 3, 4; sistemele de soluţiuni se obţin permutând în toate modurile posibile aceste rădăcini. **18.** Insemnând cu y şi z catetele, cu x ipotenuza şi u înălţimea corespunzătoare, avem ecuaţiunile: $u^2x=b^3$; $y+z=a$; $y^2+z^2=x^2$; $ux=yz$ $*^*$ $u^2x=b^3$ şi $x^2+2xu=a^2$, de unde deducem ecuaţiunea în u următoare: $\varphi(u)\equiv a^2u^4-2b^3u^3-b^6=0$. Formând şirul lui *Rolle*, deducem că $\varphi(u)=0$ are numai două rădăcini reale: *una negativă* şi *una pozitivă*, singura care convine problemii. Cunoscând această rădăcină, determinarea lui x este imediată şi deci a sistemului care dă pe y şi z. In cazul $b=a$, observăm că $\varphi(u,a)$ este omogen; deci punând: $u=av$, avem ecuaţiunea în v următoare: $\psi(v)=v^4-2v^3-1=0$, care are rădăcina pozitivă cuprinsă

între 2,105 şi 2,110, etc. **19.** Ecuaţiunile care dau $sin\frac{\alpha}{3}=x$ şi $sin\frac{\alpha}{5}=x$ sunt: $4x^3-3x+a=0$ şi $16x^5-20x^3+5x-a=0$. Pentru ca să aibă o rădăcină comună, trebue ca să avem: $a^3(8a^4-8a^2+1)=0$ *** $a=0$; $a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$. **20.** Punem $tg\alpha=y$ şi $cotg2\alpha=x$, pentru a obţine ecuaţiunea care dă pe x, avem să eliminăm pe y între ecuaţiunile $\frac{3y-y^3}{1-3y^2}=a$ şi $\frac{1-y^2}{2y}=x$; eliminantul calculat este: $2ax^3-3(1-a^2)x^2-6ax+(1-a^2)=0$. Când punem $tg2\alpha=x$ rezultatul se deduce din precedentul făcând transformata în $\frac{1}{x}$. Acum punând în aceste ecuaţiuni $\frac{2a}{1-a^2}=b$, ecuaţiunile devin: $bx^3-3x^2-3bx+1=0$, $x^3-3bx^2-3x+b=0$. Ele au rădăcini comune, dacă $b=\pm1$, sau $a=\pm1\pm\sqrt{2}$. **21.** Ecuaţiunile la care satisfac $cos\frac{\alpha}{3}$ şi $cos\frac{\alpha}{5}$ sunt $4x^3-3x-a=0$ şi $16x^5-20x^3+5x-a=0$. Condiţiunile ca să aibă rădăcină comună, dau: $a=0$; $a=-1$; $a=+1$; $a=+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pentru $a=0$, rădăcina comună este $x=0$, celelalte fiind date respectiv de: $4x^2-3=0$ şi $16x^4-20x^2+5=0$; pentru $a=+1$, avem: $(x-1)(4x^2+4x+1)=0$ şi $(x-1)(4x^2+2x-1)^2=0$; etc. **22.** Fie ecuaţiile: $f(x)\equiv x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$ şi $\varphi(x)\equiv x^4+q_1x^3+q_2x^2+q_3x+q_4=0$. Dacă $p_4\neq q_4\neq0$ şi ecuaţiunile $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ au trei rădăcini comune, acele rădăcini satisfac şi ecuaţiunile: $f(x)-\varphi(x)=0$ şi $[q_4f(x)-p_4\varphi(x)]\frac{1}{x}=0$ adică ecuaţiunile: $(p_1-q_1)x^3+(p_2-q_2)x^2+(p_3-q_3)x+p_4-q_4=0$ şi $(q_4-p_4)x^3+(p_1q_4-p_4q_1)x^2+(p_2q_4-p_4q_2)x+(p_3q_4-p_4q_3)=0$ trebue să aibă toate rădăcinile comune, iar

pentru asta trebue să avem: $\frac{p_1-q_1}{q_4-p_4}=\frac{p_2-q_2}{p_1q_4-p_4q_1}=$ $\frac{p_3-q_3}{p_2q_4-p_4q_2}=\frac{p_4-q_4}{p_3q_4-p_4q_3}$ (1). Reciproc, dacă $p_4\neq q_4\neq 0$ şi avem condiţiunile (1), ecuaţiunile: $f(x)-\varphi(x)=0$ şi $q_4f(x)-p_4\varphi(x)=0$, având trei rădăcini comune, avem aceeaşi proprietate pentru ecuaţiunile: $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$. 2°. Dacă $p_4=q_4\neq 0$, presupunând că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile comune, deducem că $x'_4=\frac{p_4}{x_1x_2x_3}=\frac{q_4}{x_1x_2x_3}=x''_4$, deci ecuaţiunile $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$ în acest caz au toate patru rădăcinile comune şi trebue să fie identice căci $p_0=q_0=1$. 3°. Dacă $p_4\neq 0$, $q_4=0$; ecuaţiunile $f(x)=0$ şi $\frac{\varphi(x)}{x}=0$ trebue să aibă drept cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ şi $\frac{\varphi(x)}{x}$, chiar pe $\frac{\varphi(x)}{x}$, de unde se deduc codiţiunile: $\frac{p_2-q_2}{q_1}=$ $\frac{p_3-q_3}{q_2}=\frac{p_4}{q_3}=p_1-q_1$. Reciproc aceste condiţiuni spun că ecuaţiunile $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$ au trei rădăcini comune date de ecuaţiunea $\frac{\varphi(x)}{x}=0$. 4°. $p_4=q_4=0$. In acest caz ecuaţiunile $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$ au rădăcina comună $x=0$, deci pentru ca ele să aibă încă două rădăcini comune, presupunând $p_3\neq q_3\neq 0$ trebue ca $\frac{p_1-q_1}{q_3-p_3}=\frac{p_2-q_2}{p_1q_3-p_3q_1}=\frac{p_3-q_3}{p_2q_3-p_3q_2}$ etc. Pentru generalizare, procedând în acelaşi fel, găsim condiţiunile ca două ecuaţiuni de gradul n să aibă $(n-1)$ rădăcini comune. **23.** Formăm ecuaţiunile $f'_x(xy)\equiv\frac{x}{b^2\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)}+$ $\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{a^2}=0$; $f'_y(x,y)\equiv\frac{y}{a^2\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)}-\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{b^2}=0$.

Formând ecuaţiunile: $xf'_x+yf'_y=0$ şi $b^2yf'_x-a^2xf'_y=0$,

avem sistemul: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $\frac{b^2y^2+a^2x^2}{x^2+y^2}-\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}xy=0$, care poate fi înlocuit prin următorul: $x=a\cos\varphi$; $y=b\sin\varphi$ $\frac{b^2y^2+a^2x^2}{x^2+y^2}-\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}xy=0$; a cărui rezolvare se reduce prin urmare punând: $tg\varphi=t$, la rezolvarea ecuaţiunii: $ab^5t^4-b^2(b^4-a^4)t^3+ab(a^4+b^4)t^2-a^2(b^4-a^4)t+a^5b=0$. Insemnând acum cu φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 valorile lui φ corespunzătoare celor patru rădăcini, observăm că avem: $1-\Sigma t_1t_2+t_1t_2t_3t_4=0$ deci: $tg(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=\infty$, sau încă $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=k\pi+\frac{\pi}{2}$. **24.** Având relaţiunea identică: $x^{i-1}f(x)\equiv\varphi(x)\cdot Q_i(x)+R_i(x)$, $i=1, 2, 3,\ldots p$, deducem că dacă există o valoare de x care anulează ambele polinoame $f(x)$ şi $\varphi(x)$, anulează deasemenea pe $R_i(x)$ $(i=1, 2, 3,\ldots, p)$; deci polinoamele $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x),\ldots, R_p(x)$ au o rădăcină comună când $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ au o rădăcină comună, de unde rezultă proprietatea enunţată. **25.** Avem: $f(x,y)\equiv(x-x_i)Q_1(x,y,x_i)+R_1(x_i,y)$ unde $R_1(x_i,y_i)=f(x_i,y_i)=0$, deoarece (x_i,y_i) este un sistem de soluţiuni; apoi împărţind pe $R_1(x_i,y)$ la $(y-y_i)$ avem: $R_1(x_i,y)\equiv(y-y_i)Q_2(y,x_i,y_i)+R_2(x_i,y_i)$; dar $R_2(x_i,y_i)\equiv 0$, căci $R_1(x_i,y_i)=0$. Aşadar, avem pentru $f(x,y)$ identitatea: $f(x,y)\equiv(x-x_i)Q_1(x,y,x_i)+(y-y_i)Q_2(x,x_i,y_i)$. In acelaş fel, plecând dela împărţirea lui $f(x,y)$ prin $(y-y_i)$ găsim relaţiunea identică: $f(x,y)\equiv(y-y_i)Q'_2(x,y,y_i)+(x-x_i)Q'_1(x,x_i,y_i)$ pe care adunându-o cu prima şi punând: $a_i(x,y)\equiv\frac{1}{2}[Q_1(x,y,x_i)+Q'_1(x,x_i,y_i)]$ şi $b_i(x,y)\equiv\frac{1}{2}[Q'_2(x,y,y_i)+Q_2(x,x_i,y_i)]$, avem relaţia cerută. Dacă derivăm această relaţie în raport cu x şi facem apoi $x=x_i$, $y=y_i$, obţinem: $a_i(x_i,y_i)=f'_x(x_i,y_i)$. Analog obţinem: $b(x_i,y_i)=f'_y(x_i,y_i)$. Dacă acum (x_k,y_k) este un sistem de soluţiuni diferit de (x_i,y_i), avem: $a_i(x_k,y_k)\cdot(x_k-x_i)+b_i(x_k,y_k)\cdot(y_k-y_i)=0$, $A_i(x_k,y_k)\cdot(x_k-x_i)+B_i(x_k,y_k)(y_k-y_i)=0$ care nu poate avea loc decât dacă $a_i(x_k,y_k)B_i(x_k,y_k)-b_i(x_k,y_k)A_i(x_k,y_k)=0$. **26.** Prima condiţiune

dată putem s'o scriem subt forma $\sum_{p=1}^{n-1} f(p)+f(n)=\varphi(n)$ şi ţinând seamă de prima relaţie $f(p)=F(p+1)-F(p)$ $*^{**}$ $F(n)+f(n)-F(1)=\varphi(n)$ oricare ar fi n, deci avem între coeficienţii celor trei polinoame relaţiile: $c_0=b_0$, $c_i=b_i+a^{i-1}$ $[i=1, 2,..., (m+1)]$; $a_m=b_0+b_1+...+b_m$. Ţinând seamă de aceste relaţiuni dintre coeficienţii celor trei polinoame $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ avem identitatea: $\varphi(x)\equiv[F(x)-b_{m+1}]+[f(x)-a_m]$; din care rezultă imediat proprietatea enunţată.

XXXII. 1. Ecuaţie reciprocă de gradul IV. Impărţind cu x^2 obţinem $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$, apoi facem substituţia $x+\frac{1}{x}=y$ $*^{**}$ $2y^2-5y+2=0$, $y'=\frac{1}{2}$, $y''=2$ $\therefore$ Rădăcinile ecuaţiei date sunt $1, 1, \frac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15})$. **2.** Ecuaţie reciprocă de gradul 7. Se scrie astfel: $(x^7+1)-2x^2(x^3+1)+x^3(x+1)=0$ $\therefore$ $(x+1)(x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1)=0$. Observăm că polinomul de gradul VI este divizibil prin $x-1$ şi $x+1$, găsim $(x+1)(x^2-1)(x^4-x^3+x-1)=0$ sau $(x+1)(x^2-1)(x-1)(x^3+1)=0$ $\therefore$ $(x+1)^3(x-1)^2(x^2-x+1)=0$. **3.** $(x^5+1)(x^5-1)=0$ $\therefore$ $(x+1)(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$. **4.** $(x+1)[(a-1)x^4+(4a+1)x^3+(6a-1)x^2+(4a+1)x+(a-1)]=0$. $x=-1$ este o rădăcină, celelalte 4 rădăcini se obţin ca în exerciţiul **1.** **5.** Impărţim cu a^4 şi notăm $\frac{x}{a}=y$. Avem ecuaţia $y^4+4y^3+2y^2+4y+1=0$. Se urmează ca în primul exerciţiu notând $y+\frac{1}{y}=z$. Avem $z=0, -4$ $\therefore$ $y=\pm i$, $-2\pm\sqrt{3}$ $\therefore$ $x=\pm ai$, $x=(-2\pm\sqrt{3})a$. **6.** Notăm rădăcinile $\frac{u}{v^3}$, $\frac{u}{v}$, uv, uv^3. Ultima relaţie între rădăcini şi coeficienţi dă $u=a$, penultima $\frac{u}{v}+uv+\frac{u}{v^3}+uv^3=-qa$ $\therefore$ $-pa=-qa$ $\therefore$ $p=q$ şi ecuaţia se rezolvă ca

şi precedenta. **7.** Ecuaţia se scrie $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+m=0$. Dacă notăm $x+\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$ $\therefore$ $y^3-3y^2-3y+6+m=0$. Din ecuaţia $x+\frac{1}{x}=y$ deducem că x este real dacă $y>2$, $y<-2$. **8.** Deoarece $x_1+x_2+x_3=0$, $\frac{1}{x_1+x_2}=-\frac{1}{x_3}$ $\therefore$ $y=-\frac{1}{x}$. Se elimină x între $x^3+px+q=0$ şi $y=-\frac{1}{x}$ $\therefore$ $qy^3-py^2-1=0$.

9. $\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{x_1^2}{q}$ $\therefore$ $y=-\frac{x^2}{q}$ se elimină x între aceasta şi ecuaţia dată $\therefore$ $q^2y^3-2pqy^2+p^2y+q=0$. **10.** $y_3=x_1+x_2+kx_3=x_1+x_2+x_3+(k-1)x_3=(k-1)x_3$. Eliminăm pe x între ecuaţiile $x^3+px+q=0$ şi $y=(k-1)x$, obţinem: $y^3+(k-1)^2py+(k-1)^3q=0$. **11.** $y_1=\left(\frac{x_1}{x_2-x_3}\right)^2=\frac{x_1^2}{x_1^2-4x_2x_3}=\frac{x_1^3}{x_1^3+4q}$. Se va elimina x între ecuaţia dată şi $y=\frac{x^3}{x^3+4q}$. **12.** Se elimină x între ecuaţia dată şi $y=x^2$. Ecuaţia cerută este $y^3+2py^2+p^2y-q^2=0$. Condiţiile sunt obţinute cu teorema lui *Rolle*: $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\leqslant 0$ sau $q=0$. Explicaţia este următoarea: să presupunem că ecuaţia dată admite rădăcina imaginară $\alpha+\beta i$. Ecuaţia transformată admite rădăcina $\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$; aceasta fiind presupusă reală trebue $\beta=0$ deci $\alpha+\beta i$ este reală sau $\alpha=0$ şi ecuaţia dată având rădăcinile $\pm\beta i$, deoarece $\beta i-\beta i+x_3=0$, $x_3=0$, deci $q=0$. **13.** Ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date, $tg(\alpha+\beta)=\frac{-tg\gamma}{1-tg\alpha\,tg\beta}$ etc., deci $y_1=tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha+\gamma)=\frac{-q}{tg\alpha-q\,tg^2\alpha+tg^3\alpha}$. Eliminăm pe x între ecuaţia dată şi $y=\frac{-q}{x-qx^2+x^3}$ $\therefore$ $y^3+\frac{p(p-1)}{1-p-q^2}y^2+\frac{q^2(3-2p)}{(1-p-q^2)^2}$

$y-\frac{q^2}{(1-p-q^2)^3}=0$. (G. M. VIII). **14.** $y_3=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}=\frac{-3a_1tg\gamma-a_0tg^2\gamma}{a_0tg\gamma+a_3}$. Se elimină deci x între ecuaţia dată şi $a_0x^2+3a_1x+a_0xy+a_3y=0$. Rezultatul este: $(a_3^2+3a_0a_2-3a_1a_3-a_0^2)y^3+3(a_0a_3+3a_1a_2-2a_0a_1-2a_2a_3)y^2+3(a_1a_3+3a_2^2-a_0a_2-3a_1^2)y+a_0a_3-9a_1a_2=0$. **15.** Notând x_1, x_2 x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei date, se formează întâi ecuaţia de grad III care admite rădăcinile $y_1=x_1x_2+x_3x_4$, $y_2=x_1x_3+x_2x_4$, $y_3=x_1x_4+x_2x_3$. Cu ajutorul relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi avem: $\Sigma y_1=b$, $\Sigma y_1y_2=ac-4d$, $y_1y_2y_3=a^2d+c^2-4bd$. Observând apoi că $z_1=tg(\alpha+\beta)tg(\gamma+\delta)=\frac{b-y_1}{1+d-y}$, eliminăm pe y între ecuaţiile $z=\frac{b-y}{1+d-y}$, $y^3-by^2+(ac-4d)y+4bd-c^2-a^2d=0$. Se găseşte: $[(d+1)^2(d-b+1)+(ac-4d)(d+1)+4bd-a^2d-c^2]z^3-[2b(d+1)(d-b+1)+(2d+b+2)(ac-4d)+3(4bd-a^2d-c^2)]z^2+[b^2(d-b+1)+(d+2b+1)(ac-4d)+3(4bd-a^2d-c^2)]z-(abc-a^2d-c^2)=0$. (G. M. XLI. p. 153). **16.** Trebue eliminat x_1 şi x_2 între ecuaţiile $x_1^4+px_1^2+qx_1+r=0$, $x_2^4+px_2^2+qx_2+r=0$, $y=x_1+x_2$. Punând $x_1x_2=z$, adunând şi scăzând primele două relaţii obţinem $2z^2-2(p+2y^2)z+y^4+py^2+qy+2r=0$ şi $y^3-2zy+py+q=0$. Intre acestea eliminăm pe z. Avem: $y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$. **17.** Insemnând cu u cea de a treia rădăcină, ecuaţiile $u^3-5u+q=0$ şi $u^2+u+q=0$ (obţinută din relaţia de condiţie) trebue să aibă o rădăcină comună. Rezultă $q=-2$, $q=-12$. **18.** Se va forma ecuaţia ale cărei rădăcini sunt x_1^2, x_2^2... această ecuaţie este $y^{2n}+(p_1^2-2p_2)y^{2n-1}+\ldots=0$, avem $\frac{y_1}{y_2}+\ldots+\frac{y_1}{y_n}+\frac{y_2}{y_1}+\ldots+\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{\Sigma y_1^2y_3\ldots y_n}{y_1y_2\ldots y_n}=\frac{\Sigma y_1y_2..y_{n-1}\Sigma y_1-2n\,y_1y_2\ldots y_n}{y_1y_2\ldots y_n}=(p_1^2-2p_2)^2-2n$. **19.** Din relaţia $y=\frac{1-x}{1+x}$ rezultă că schimbând pe x în $\frac{1}{x}$, y se schimbă în $-y$, deci ecuaţia dată admiţând rădăcinile

x_1 şi $\frac{1}{x_1}$, ecuaţia transformată va admite rădăcinile y_1 şi $-y_1$, adică polinomul din membrul I are factori de forma $y^2-y_1^2$. Din $z=x+\frac{1}{x}$ şi $y=\frac{1-x}{1+x}$, rezultă $y^2=\frac{z-2}{z+2}$. **20.** Avem $F\left[\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^2, 1\right]=0$ şi punând $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^2=u$, $F(u,1)=0$ apoi se va verifica dacă şi rădăcinile polinomului x^2-x+1 sunt rădăcini ale ecuaţiei. **21.** Presupunând că am înlăturat rădăcina $x=1$, în cazul când ar exista, ceeace nu particularizează problema, avem: $F\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4, 1\right]=0$; punând $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4=u$, rezultă $F(u,1)=0$. **22.** Ecuaţiile $f(x)=0$ şi $f(-x)=0$ au o rădăcină comună pe care o putem calcula, deci gradul se reduce cunoscând cel puţin o rădăcină a ecuaţiunii date. **23.** $x_1=-\frac{cx_2+d}{ax_2+b}$ şi ecuaţiile $f(x)=0$, $f\left[-\frac{cx+d}{ax+b}\right]=0$ au o rădăcină comună. **24.** Ecuaţiile $f(x)=0$ şi $f[\varphi(x)]=0$ au o rădăcină comună. In cazul particular rădăcina comună este 1 şi ecuaţia devine $x^2-5x+6=0$. **25.** Insemnând cu y_1 şi y_2 valorile lui y corespunzătoare lui x_1 şi x_2, între ele avem relaţia $(a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2)y_1y_2+(....)(y_1+y_2)+a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2=0$. Luând $\frac{\alpha}{\gamma}$ şi $\frac{\beta}{\delta}$ egali cu rădăcinile ecuaţiei $ax^2+2bx+c=0$, $y_1+y_2=0$ şi ecuaţia în y va avea rădăcinile două câte două egale în valoare absolută şi de semne contrarii.

XXXIII. 1. Rădăcinile calculate sunt: 4; $-2\pm i\sqrt{3}$ **2.** Făcând substituţia: $x=\left(a-\frac{1}{a}\right)y$ şi punând: $a^2+\frac{1}{a^2}=b$, ecuaţiunea devine: $(b-2)y^3+3y-(b+1)=0$, sau încă: $(y-1)[(b-2)y^2+(b-2)y+(b+1)]=0$. **3.** Făcând succesiv transformările evidente $x=ay$; $y=\frac{6}{z}$, ecuaţia devine: z^3-6z

$-6=0$ *** $z=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, etc. **4.** Făcând succesiv tansformările $x=\frac{y}{3}$ şi $y=z+2$ obţinem ecuaţiunea: $z^3-12z-34=0$ *** $z=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{32}$. **5.** Punând $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2=y$ obţinem ecuaţiunea: $y^3+3y^2-5y+1=0$ sau încă: $(y-1)(y^2+4y-1)=0$, etc. **6.** Punând pentru prescurtare: $b+c+d=A$, $c+d=B$, $d=C$ şi $x+a+b+c+d=\sqrt{y}$, se găseşte imediat ecuaţiunea de gradul al 3-lea la care satisface y. (G. M. II). **7.** Punând pe a factor comun între termenii care îl conţin şi observând ceilalţi termeni în x suntem conduşi la substituţia: $x(x^2-3)=2y$ şi ecuaţiunea revine la rezolvarea ecuaţiunilor: $x^3-3x-2y=0$ şi $4y^2+2ay+b=0$ *** $x=\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2-1}}+\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2-1}}$. **8.** Punem: $\sqrt[7]{\alpha+\sqrt[5]{x}}=u$, $-\sqrt[7]{\beta+\sqrt[5]{x}}=v$ $\therefore$ aşa că $u+v=\gamma$, $u^7+v^7=\alpha-\beta$. Ridicând prima ecuaţie la puterea 7, $u^7+v^7+7uv(u^5+v^5)+21u^2v^2(u^3+v^3)+35u^3v^3(u+v)=\gamma^7$ sau $7uv[(u^5+v^5)+3uv(u^3+v^3)+5\gamma u^2v^2]=\gamma^7-(\alpha-\beta)$. Insă $u^5+v^5=\gamma^5-5uv(u^3+v^3)-10u^2v^2\gamma$; $u^3+v^3=\gamma^3-3\gamma uv$, deci punând $uv=z$, z este dat de ecuaţia $7\gamma z(\gamma^2-z)^2=\gamma^7-(\alpha-\beta)$. Punând $\gamma^2-z=\frac{1}{y}$ şi $\delta=\frac{\gamma^7-(\alpha-\beta)}{7\gamma}$, avem $y^3-\frac{\gamma^2}{\delta}y+\frac{1}{\delta}=0$ etc. u şi v sunt daţi de ecuaţiunea $X^2-\gamma X+(uv)_i=0$, unde $(uv)_1$, $(uv)_2$, $(uv)_3$ sunt cele 3 valori ale lui z. (G. M. IX. p. 63). **9.** Deducem din relaţia dată $x=(a-by):(y-1)$; înlocuind în ecuaţiunea dată pe x şi scriind că termenii în y şi y^2 sunt nuli, găsim că a şi b sunt determinaţi de sistemul de ecuaţiuni: $ab=-\frac{p}{3}$, $a+b=\frac{3q}{p}$, iar ecuaţia devine: $y^3-\varphi(-a):\varphi(-b)=0$, unde am pus: $\varphi(x)\equiv x^3+px+q$ **10.** Avem: $C\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{3}}-e^{-\frac{\alpha}{3}})$ *** $4C^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-\frac{3}{2}(e^{\frac{\alpha}{3}}-e^{-\frac{\alpha}{3}})=C(\alpha)-3C\left(\frac{\alpha}{3}\right)$; de altă parte punând: $\varphi(x)=$

x^3+px-q, avem: $\varphi\left[2\,C\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sqrt{\frac{-p}{3}}\right]\equiv 8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}C^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)+2p\sqrt{\frac{-p}{3}}$ $C\left(\frac{\alpha}{3}\right)-q=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\left[4C^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)+3C\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right]-q=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}C(\alpha)-q=$ $\frac{3pq}{3p}-q=0$. **11.** Scriind y subt forma: $y=(x-1)^9(x+1)^9$ şi aplicând formula derivării de ordinul 9, termenii lui $y^{(9)}$ grupaţi sunt produse între puterile lui (x^2-1) şi factori de forma $(x-1)^p+(x+1)^p$, deci $y^{(9)}$ este un polinom de gradul al 9-lea şi nu conţine decât puterile impare ale lui x, deci punând în evidenţă rădăcina $x=0$ şi apoi $x^2=z$ în ecuaţia rămasă, reducem la rezolvarea unei ecuaţii de gradul al 4-lea. **12.** Introducând în ecuaţiune $x=uv(u+v)$, putem scrie ecuaţia subt forma: $(uv)^3[u^3+v^3]+q+3uv(u+v)\left[u^3v^3+\frac{p}{3}\right]=0$; luând deci $u^3v^3=-\frac{p}{3}$ *** $u^3+v^3=\frac{3q}{p}$, de unde deducem valorile lui u şi v, pe care însemnându-le respectiv cu u, εu, $\varepsilon^2 u$, şi v, εv, $\varepsilon^2 v$ (ε fiind o rădăcină cubică a unităţii complexă), cele nouă valori ale expresiunii $x=u^2v+uv^2$ sunt egale trei câte trei. **13.** Rezultatul eliminării se obţine eliminând pe y între ecuaţiunile: $by^2+ay-x=0$ şi $ay^2-xy+b=0$ şi este: $x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$, ale cărei rădăcini sunt: $a+b$, $(a\varepsilon+b\varepsilon^2)$, $(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, unde ε este rădăcina cubică complexă a unităţii; ecuaţiunea dată coincide cu cea de mai sus dacă luăm pe a^3 şi b^3 egali cu rădăcinile ecuaţiei: $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$. **14.** Plecând dela $y^4-1=0$, $x=ay+by^2+cy^3$, se obţine rezultatul eliminării lui y, observând că aceasta revine la eliminarea lui y între ecuaţiile $cy^3+by^2+ay-x=0$, $by^3+ay^2-xy+c=0$, $ay^3-xy^2+cy+b=0$, $-xy^3+cy^2+by+a=0$, şi anume: $x^4-2(b^2+2ac)x^2-4b(a^2+c^2)x+b^2(b^2-4ac)-(a^2-c^2)^2=0$. Observând că: $b^2(b^2-4ac)-(a^2-c^2)^2=(a+b+c)(b-a-c)[-b+(a-c)i]$ $[-b-(a-c)i]=x_1x_2x_3x_4$ şi că $\Sigma x_1=0$; $\Sigma x_1x_2=-2(b^2+2ac)$; $\Sigma x_1x_2x_3=4b(a^2+c^2)$, deducem că rădăcinile

ecuaţiunii în x sunt tocmai: $x_1=a+b+c$; $x_2=b-a-c$; $x_3=-b+(a-c)i$; $x_4=-b-(a-c)i$. Identificând acum ecuaţiunea în x cu ecuaţiunea dată, obţinem: $a^2+c^2=-\frac{q}{4b}$; $ac=-\frac{1}{4}(p+2b^2)$; $b^2(b^2-4ac)-(a^2-c^2)^2=r$, care conduce prin eliminarea lui (a^2+c^2) şi ac la o ecuaţiune de gradul al treilea în a^2. **15.** Ecuaţia admiţând rădăcina $x_1=a+\sqrt{b}$, admite şi rădăcina $x_2=a-\sqrt{b}$, deci având $\Sigma x_i=0$ *** $x_3+2a=0$ sau $x_3=-2a$, de unde rezultă proprietatea enunţată. **16.** Făcând în ecuaţiune substituţia indicată, avem grupând convenabil: $(\Sigma u^2)^2+2\Sigma uv\,.\,[2\Sigma u^2+p]+4\Sigma u^2v^2+[8uvw+q]\Sigma u+p\Sigma u^2+r=0$. Luând: $\Sigma u^2=-\frac{p}{2}$ şi $uvw=-\frac{q}{8}$ *** $\Sigma u^2v^2=\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4}-r\right)$; deci u^2, v^2, w^2 sunt rădăcinile ecuaţiei: $t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4}-r\right)t-\frac{q^2}{64}=0$, care se transformă punând $t=\frac{z}{2}$ în următoarea: $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$. **17.** Pentru calculul lui Δ se va aplica metoda generală de calcul a funcţiunii simetrice care reprezintă produsul prătratelor diferenţelor rădăcinilor unei ecuaţiuni date. In cazul problemei u^2, v^2, w^2 sunt rădăcinile ecuaţiunii: $t^3+\frac{p}{2}t^2+$ $+\frac{1}{4}\left(\frac{p}{4}-r\right)t-\frac{q^2}{64}=0$. In ipotezele problemii dacă u^2 şi v^2 ar fi imaginari conjugaţi şi w^2 real, ar urma că $\Delta<0$ contrar ipotezei, deci u^2, v^2, w^2 fiind reali, după teorema lui *Descartes* ei sunt şi pozitivi, etc. **18.** Desvoltând determinantul Δ şi identificând cu polinomul ecuaţiei date avem: $uv=-\frac{p}{3}$, $u^3+v^3=-q$, deci u^3 şi v^3 sunt rădăcinile ecuaţiei: $z^2+qz-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$, de unde: $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ şi

$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$; de altă parte observăm că avem:

$$\Delta=(x-u-v)[x^2+(u+v)x+u^2+v^2-uv].$$

19. Insemnând cu u_i rădăcinile ecuaţiunii de gradul al 6-lea, observăm întâi că $\Sigma u_i=0$ (căci $\sum_1^3 x_i=0$); apoi scriind că $\Sigma u_i u_k=0$, găsim că a şi b trebue să satisfacă relaţiunilor $a+b=-1$ şi $ab=+1$, care verifică celelalte condiţiuni; aşadar a şi b trebue să fie cele două rădăcini cubice complexe ale unităţii. **20.** Desvoltând a doua ecuaţiune şi identificând-o cu prima se găseşte: $2b+a^2=0$, $p=-\frac{a^2}{2}$, $q=\frac{a^3}{8}$, deci transformarea este posibilă dacă $p^3+8q^2=0$.

21. Din relaţia $\varphi(x_i, x_k)=-\varphi(x_k, x_i)$ deducem $\varphi(x_i, x_i)=0$, deci φ este divizibil cu (x_i-x_k), deci el este divizibil cu Δ, iar raportul $(\varphi:\Delta)$, rămânând invariabil când schimbăm două litere oarecare între ele, este o funcţiune simetrică. **22.** Fie ecuaţia $x^2-px+q=0$, pentru care să presupunem că avem $x_1=\varphi(p, q)$ φ fiind o expresiune raţională în raport cu p şi q; deci $x_1=\varphi(x_1+x_2, x_1 x_2)$, identitate imposibilă dacă rădăcinile x_1 şi x_2 nu sunt egale, căci *partea doua* rămâne invariabilă când schimbăm pe x_1 cu x_2, pe când *partea întâia* se schimbă.

XXXIV. 1. Găsim: $\frac{2}{x+1}+\frac{\frac{11}{2}}{x-2}+\frac{-\frac{8}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{6}}{x+2}$.

2. Găsim: $\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{7}{(x-2)^3}+\frac{1}{(x-2)^4}$. **3.** Se poate întrebuinţa procedeul general, sau se pot determina cu ajutorul derivării polinoamele corespunzătoare lui $(x-1)^3$, $(x+2)^2$, reducând astfel descompunerea la exerciţiul precedent. Rezultatul este: $\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{-\frac{5}{54}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{7}{108}}{x-1}+\frac{\frac{1}{27}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{2}{135}}{x+2}+$

$\frac{\frac{1}{20}}{x-3}$. **4.** $1-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+x+1}$. **5.** Avem:
$\frac{x}{(1+x^2)^4}+\frac{x}{2(1+x^2)^3}-\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{8}\frac{x+\sqrt{2}}{8x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{8}$
$\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. **6.** $\frac{\frac{1}{18}}{(x-2)^2}-\frac{\frac{5}{108}}{x-2}+\frac{\frac{1}{18}(x-4)}{(x^2+2)^2}+\frac{\frac{1}{108}(5x+4)}{x^2+2}$.
7. $\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right]$.
8. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}$. **9.** Insemnând cu A_k coeficientul termenului general, găsim: $A_k=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!}$, deci: $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!}\frac{1}{x+k}$. **10.** Punând: $\frac{1}{(x^4+1)^2}=$
$\frac{Ax+B}{(x^2+x\sqrt{2}+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{A'x+B'}{(x^2-x\sqrt{2}+1)^2}+$
$\frac{C'x+D'}{x^2-x\sqrt{2}+1}$, observăm că dacă schimbăm pe x în $-x$ prima parte nu se schimbă, deci diferenţa părţilor din dreapta trebue să fie nulă oricare ar fi x, deci $A'=-A$, $B'=B$, $C'=-C$, $D'=D$; înmulţind apoi egalitatea identică cu $(x^2+x\sqrt{2}+1)^2$ şi făcând apoi $x^2=-x\sqrt{2}-1$, avem prin identificare $A=\frac{\sqrt{2}}{8}$, $B=\frac{1}{8}$; apoi determinăm pe C şi D şi găsim: $C=\frac{3\sqrt{2}}{8}$, $D=\frac{3}{8}$.
11. Punând $\frac{x^{2m}}{(x^2+1)^{2m}}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^{2m}}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+1)^{2m-1}}+\ldots$
$+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+1)^{2m-k}}+\ldots+\frac{A_{2m-1}x+B_{2m-1}}{(x^2+1)}$, observăm în primul rând că toţi A_k sunt nuli. Determinarea lui B_k se face din aproape în aproape, căutând limita unei expresiuni de forma:
$E=\frac{[u^m-(-1)^m]-(-1)^1C_m^1(u+1)-(-1)^2C_m^2(u+1)^2-\ldots-(-1)^{p-1}C_m^{p-1}(u+1)^{p-1}}{(u+1)^p}$

când u tinde către -1. Găsim rezultatul: $(-1)^m \sum_0^{2m-1} \frac{(-1)^k C_m^k}{(x^2+1)^{2m-k}}$.

12. Punând: $\frac{1}{x^{2n+1}-1} = \frac{A}{x-1} + \Sigma \frac{A_k x + B_k}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1}$, găsim imediat că $A = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^{2n+1}-1} = \frac{1}{2n+1}$; apoi deasemenea:

$$A_k x + B_k = \lim_{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1=0} \left[\frac{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}{x^{2n+1}-1}\right]; \text{ încă}$$

$$A_k x + B_k = \left[\frac{2x - 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{(2n+1)x^{2n}}\right]_{x^2 = 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}-1} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\left[\frac{x^2 - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{x^{2n+1}}\right]_{x^2 = 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}-1} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\frac{2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} - \cos\frac{2k\pi}{2n+1} - 1}{1} = \frac{2\left(x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} - 1\right)}{2n+1}.$$

Rezultatul este deci: $\frac{1}{x^{2n+1}-1} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1} + 2\Sigma \frac{x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1}\right]$. Pentru a doua expresiune avem: $\frac{1}{n}\Sigma \frac{x\cos\frac{2k\pi}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}$, k variind dela *zero* la $\frac{1}{2}(n-1)$ sau $\frac{1}{2}n$ după cum n este fără soţ sau cu soţ. **13.** Punând $\lambda = \cos\frac{2k\pi}{p}$ şi $\mu = \cos\frac{2k\pi}{q}$, avem după exerciţiul precedent: $\frac{1}{x^p - 1} = \frac{1}{p}\Sigma \frac{\lambda x - 1}{x^2 - 2\lambda x + 1}$ şi $\frac{1}{x^q - 1} = \frac{1}{q}\Sigma \frac{\mu x - 1}{x^2 - 2\mu x + 1}$ * * *

$\frac{1}{(x^p-1)(x^q-1)}=\frac{1}{pq}\cdot\Sigma\frac{\lambda x-1}{x^2-2\lambda x+1}\cdot\Sigma\frac{\mu x-1}{x^2-2\lambda x+1}=\frac{1}{pq}\sum_{\lambda}\sum_{\mu}\frac{(\lambda x-1)(\mu x-1)}{(x^2-2\lambda x+1)(x^2-2\mu x+1)}$. Descompunând fracţia de subt sumă, punem: $\frac{(\lambda x-1)(\mu x-1)}{(x^2-2\lambda x+1)(x^2-2\mu x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-2\lambda x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-2\mu x+1}$. Se vede în primul rând schimbând pe λ cu μ că $Cx+D\equiv Ax+B$; apoi că: $Ax+B=\left[\frac{\lambda\mu x^2-(\lambda+\mu)x+1}{x^2-2\mu x+1}\right]$; cu $x^2-2\lambda x+1=0$; sau încă: $Ax^2+Bx=\frac{2\lambda^2\mu-\lambda-\mu}{2(\lambda-\mu)}x-\frac{\lambda\mu-1}{2(\lambda-\mu)}$ *** $(2\lambda A+B)x-A=\frac{2\lambda^2\mu-\lambda-\mu}{2(\lambda-\mu)}x-\frac{\lambda\mu-1}{2(\lambda-\mu)}$ *** $A=\frac{\lambda\mu-1}{2(\lambda-\mu)}$; $B=\frac{1}{2}$, etc. Dacă $\lambda=\mu$ avem să descompunem termenul general în forma: $\frac{(\lambda x-1)^2}{(x^2-2\lambda x+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2-2\lambda x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2\lambda x+1}$ şi se găseşte procedând în modul obişnuit: $\frac{(\lambda x-1)^2}{(x^2-2\lambda x+1)^2}=\frac{2\lambda(\lambda^2-1)x+(1-\lambda^2)}{(x^2-2\lambda x+1)^2}+\frac{\lambda^2}{x^2-2\lambda x+1}$. **14.** $f(x)=k(x^2-a^2)$. **15.** Observăm că $(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right]$ *** $\frac{d^{n+1}(arctg\,x)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$, etc. **16.** Având $\frac{f(x)}{F(x)}\equiv\Sigma\frac{A_k}{x-x_k}$, x_k fiind rădăcinile simple ale lui $F(x)$, deducem egalitatea identică: $\frac{xf(x)}{F(x)}\equiv\Sigma A_k+\Sigma\frac{A_k x_k}{x-x_k}$. Cele două funcţiuni fiind identic egale, limitele lor pentru aceeaşi valoare de x sunt evident egale; în particular, avem $\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[\Sigma A_k+\Sigma\frac{A_k x_k}{x-x_k}\right]$ sau încă: $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{xf(x)}{F(x)}\right]=\Sigma A_k$. Dacă gradul lui $f(x)$ este cu două unităţi mai mic

decât gradul lui $F(x)$, avem $\Sigma A_k=0$; dacă gradul lui $f(x)$ este numai cu o unitate mai mic ca gradul lui $F(x)$, avem: $\Sigma A_k=\frac{B}{C}$; unde B, C sunt coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt în $f(x)$ şi $F(x)$. **17.** Vom aplica rezultatul din exerciţiul precedent luând: $f(x)\equiv x^p$ şi $F(x)\equiv(x-a)(x-a-r)...(x-a-nr)$. Cum $p<n$ *** $(n+1)-p\geqq 2$; deci descompunând fracţia raţională $\frac{f(x)}{F(x)}$ în fracţii simple şi scriind că $\Sigma A_k=0$, avem simplificând cu $\frac{1}{r^n}$ relaţia cerută **18.** Avem prin ipoteză $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$; deci formând derivata logaritmică avem identitatea: $\frac{f'(x)}{f(x)}\equiv\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...$

$$+\frac{1}{x-x_n},\ ***\ \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\equiv\Sigma\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\equiv\Sigma\frac{\varphi(x)-\varphi(x_i)}{x-x_i}+$$

$$\Sigma\frac{\varphi(x_i)}{x-x_i}\equiv Q(x)+\frac{1}{x}\Sigma\frac{\varphi(x_i)}{1-\frac{x_i}{x}}\equiv Q(x)+\frac{1}{x}\Sigma\varphi(x_i)+\frac{1}{x^2}$$

$\Sigma x_i\varphi(x_i)+...$ care având loc pentru valorile lui $x>x_i$, este verificată. Rezultă deci ca $\Sigma\varphi(x_i)$ este egală cu coeficientul lui $\frac{1}{x}$ din desvoltarea restului obţinut din împărţirea lui $\varphi(x)f'(x)$ prin $f(x)$. **19.** Din egalitatea $\frac{\varphi_h(x)}{f(x)}=\Sigma\frac{x_k^h}{x-x_k}$ *** $\varphi_h(x)=\Sigma x_k^h\cdot\frac{f(x)}{x-x_k}=\Sigma x_k^h u_k$, punând $u_k=\frac{f(x)}{x-x_k}=\alpha_{1,k}x^{n-1}+\alpha_{2,k}x^{n-2}+...+\alpha_{n,k}$; deci $\varphi_h(x_i)$ este dat cu ajutorul funcţiunilor $u_1, u_2, ..., u_n$ care pot fi calculate prin diviziune. Determinantul funcţiunilor φ este de forma $A.\Delta^2$, unde Δ este determinantul lui *Vandermonde* relativ la rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$. **20.** Punând $\frac{f(x)}{F(x)}=\Sigma\frac{A_k}{x-a-kr}$, avem: $A_k=\left[\frac{f(x)(x-a-kr)}{F(x)}\right]_{x=a+kr}=$

$$\left[\frac{f(x)+f'(x).(x-a-kr)}{F'(x)}\right]_{x=a+kr}=\frac{f(a+kr)}{F'(a+kr)};\ \text{deci obţinem}$$

desvoltând în fracţiuni simple, identitatea: $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{(x-a)F'(a)}+$ $\frac{f(a+r)}{(x-a-r)F'(a+r)}+\ldots+\frac{f(a+nr)}{(x-a-nr)F'(a+nr)}$ în care făcând succesiv pe x egal cu $a+(n+1)r$; $a+(n+2)r$;... şi adunând se obţine relaţiunea cerută. (G. M. III). Fie $f(x)\equiv A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_n)$. Punând în evidenţă în descompunere partea corespunzătoare lui $(x-x_k)$, avem: $\frac{1}{(x^2-1)[f(x)]^2}=$ $\frac{C_k}{(x-x_k)^2}+\frac{D_k}{x-x_k}+R(x)$. *** $C_k=\lim_{x=x_k}\left[\frac{(x-x_k)^2}{(x^2-1)[f(x)]^2}\right]=\frac{1}{x_k^2-1}$ $\left[\lim_{x=x_k}\frac{f(x)}{x-x_k}\right]^2=\frac{1}{x_k^2-1}\cdot\frac{1}{[f'(x_k)]^2}$; apoi:

$$D_k=\lim_{x=x_k}\frac{\dfrac{1}{(x^2-1)\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]}-\dfrac{1}{(x_k^2-1)[f'(x_k)]^2}}{x-x_k}=$$

$$\lim_{x=x_k}\left[\frac{1}{(x^2-1)\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]^2}\right]'=\lim_{x=x_k}\frac{\left[(x^2-1)\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]^2\right]'}{(x^2-1)^2\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]^4}=$$

$$\lim_{x=x_k}\frac{2x\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]^2+(x^2-1).2\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right].\dfrac{f'(x)(x-x_k)-f(x)}{(x-x_k)^2}}{(x^2-1)^2\left[\dfrac{f(x)}{x-x_k}\right]^4};$$

dar $\lim_{x=x_k}\left[\frac{f(x)}{x-x_k}\right]=f'(x_k)$ şi $\lim_{x=x_k}\frac{f'(x)(x-x_k)-f(x)}{(x-x_k)^2}=\frac{1}{2}f''(x_k)$,

deci: $D_k=\frac{2x_k[f'(x_k)]^2+(x_k^2-1)f''(x_k)f'(x)}{(x_k-1)^2[f'(x_k)]^4}=$

$\frac{2x_kf'(x_k)+(x_k^2-1)f''(x_k)}{(x_k^2-1)^2[f'(x_k)]^3}$. Aşadar, pentru ca descompunerea să aibă forma cerută trebue ca să avem: $2x_kf'(x_k)+(x_k^2-1)f''(x_k)=0$ adică $[(x^2-1)f'(x)]=0$ să aibă aceleaşi rădăcini ca $f(x)=0$.

22. Având: $a=\frac{C_m^1x-C_m^3x^3\ldots}{1-C_m^2x^2+C_m^4x^4\ldots}$ *** $[(1+ix)^m-(1-ix)^m]$--

$ai[(1+ix)^m+(1-ix)^m]=0$, din care, avem:

$$ai=\frac{(1+ix)^m-(1-ix)^m}{(1+ix)^m+(1-ix)^m} \text{ şi punând } \frac{1+ix}{1-ix}=y \quad * * *$$

$$ai=\frac{y^m-1}{y^m+1}=1-2\,.\,\frac{1}{y^m+1}$$ deci făcând descompunerea în raport cu y, se obţine imediat aceea în raport cu x. **23.** Să notăm în mod general rădăcinile lui F_i cu $x_{i,1}, x_{i,2},..., x_{i,k_i}$ deci că am descompus (teoretic) pe F în factori de gradul întâi. Având deci, $F=A_0 \Pi (x-x_{i,1})^{\alpha_i}(x-x_{i,2})^{\alpha_i}...(x-x_{i,k_i})^{\alpha_i}$ şi făcând descompunerea lui $\frac{f}{F}$ avem punând în evidenţă partea relativă la $(x-x_{i,p})$, relaţiunea: $\frac{f}{F}=\sum_{p=1}^{p=k_i}\left[\frac{(M_{i,1})_p}{(x-x_{i,p})^{\alpha_i}}+\right.$

$$\left.\frac{(M_{i,2})_p}{(x-x_{i,p})^{\alpha_i-1}}+...+\frac{(M_{i,\alpha_i})_p}{x-x_{i,p}}\right]+R(x)=\sum_{p=1}^{p=k_i}\frac{(M_{i,1})_p}{(x-x_{i,p})^{\alpha_1}}+$$

$$\sum_{d=1}^{p=k_i}\frac{(M_{i,2})_p}{(x-x_{i,p})^{\alpha_i-1}}+...+R(x)=\frac{\varphi_1}{F_i^{\alpha_i}}+\frac{\varphi_2}{F_i^{\alpha_i-1}}+...+\frac{\varphi_{\alpha_i}}{F_i}+R(x),$$

de unde rezultă relaţiunea cerută.

XXXV. 1. Să notăm $f(x)\equiv x^4-4x^3+16x+a$ (1), $f'(x)=4(x^3-3x^2+4)=4(x+1)(x-2)^2$; $f'(-1)=a-11$, $f'(2)=a+16$. Deci, pentru $-\infty<a<-16$, ecuaţiunea are două rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(2, +\infty)$. $f(x)=0$ defineşte pe x ca funcţiune implicită de a şi derivând identitatea (1) în raport cu a, avem: $x'_a=\frac{-1}{4(x+1)(x-2)^2}$; rezultă că $x'_a>0$ pentru prima rădăcină, deci ea creşte dela $-\infty$ la -1 şi $x'_a<0$ pentru a doua rădăcină, deci ea descreşte dela $+\infty$ la 2. Pentru $-16<a<11$ ecuaţiunea are două rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -1)$, crescând în interval cealaltă descrescând dela 2 la -1. Pentru $a=-16$ ecuaţiunea are o rădăcină triplă egală cu 2 şi o rădăcină cuprinsă între $-\infty$ şi -1. Lui $a=11$ îi corespunde o rădăcină dublă egală cu -1. Pentru $a>11$, ecuaţiunea are rădăcini imaginare. **2.** Ecuaţia este $32x^6-48x^4+18x^2-1-a=0$, punând

$y=x^2$, fie $f(y)=32y^3-48y^2+18y-1-a=0$, $f'(y)=0$, are rădăcinile $\frac{1}{4}$ şi $\frac{3}{4}$, avem $f(0)=-1-a<0$, căci $|a|<1$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=1-a>0$, $f\left(\frac{3}{4}\right)=-1-a<0$, $f(1)=1-a>0$, ecuaţia în y are 3 rădăcini rèale cuprinse în intervalele $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$; ecuaţia în x va avea 6 rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(-1, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ldots\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\right)$. Avem $y'_a=1:96\left(y-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)$, $y_1<y_2<y_3$ fiind cele trei rădăcini ale ecuaţiei $f(y)=0$, când a creşte dela -1 la $+1$, y_1 creşte dela 0 la $\frac{1}{4}$, y_2 descreşte dela $\frac{3}{4}$ la $\frac{1}{4}$, iar y_3 creşte dela $\frac{3}{4}$ la 1; din variaţiunea lui y se deduce imediat variaţiunea lui x. **3.** Notând $f(x)$ membrul I al ecuaţiei, $f'(x)=4x(x-a)(x-b)$, avem $x'_q=1:4x(x-a)(x-b)$, unde $a=\frac{1}{2}p(3-\sqrt{5})$, $b=\frac{1}{2}p(3+\sqrt{5})$. Să presupunem $p>0$ şi să formăm şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)$, $f(0)=-q$, $f(a)=\frac{1}{2}(5\sqrt{5}-11)p^4-q$, $f(b)=-\frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11)p^4-q$, $f(\infty)$. Când $-\infty<q<-\frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11)p^4$ nu avem rădăcini reale. Pentru $-\frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11)\,p^4<q<0$ sunt două rădăcini reale în intervalele (a, b), $(b, +\infty)$; prima rădăcină descreşte în interval pentrucă $x'_q<0$, a doua creşte pentru că $x'_q>0$, etc. **4.** Rădăcinile derivatei polinomului din membrul I, $f(x)$ sunt 0 şi $\frac{27}{4}$. Şirul lui *Rolle*: $f(-\infty)$, $f(0)=a^4-9a^3+1$, $f\left(\frac{27}{4}\right)=a^4-9a^3+1-\frac{3^{11}}{2^8}$, $f(+\infty)$. Dar $f(0)$ are două rădăcini reale: a_1 şi a_2 respectiv în intervalele

$\left(0, \frac{27}{4}\right), \left(\frac{27}{4}, +\infty\right); f\left(\frac{27}{4}\right)$ are deasemenea două rădăcini reale a_3, a_4 între $(-\infty, 0)$ şi $\left(\frac{27}{4}, +\infty\right)$. In ordine crescătoare avem a_3, a_1, a_2, a_4. Când a este cuprins între a_3 şi a_1 avem două rădăcini reale în intervalele $\left(0, \frac{27}{4}\right)$ şi $\left(\frac{27}{4}, \infty\right)$. Pentru $a_1 < a < a_2$, rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 0)$ şi $\left(\frac{27}{4}, +\infty\right)$. Când $a_2 < a < a_4$, 2 rădăcini reale în $\left(0, \frac{27}{4}\right)$ şi $\left(\frac{27}{4}, \infty\right)$. Studiul variaţiunii analog ca în cazurile precedente. **5.** $y'' = -18(x^3+1)(x^2-2x-1)$: $(x^3+3x-2)^3$, rădăcinile sunt -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$, $1 \pm \sqrt{2}$. **6.** Rădăcinile ecuaţiei de gradul n fiind $tg\,\alpha_1$, $tg\,\alpha_2$,... $tg\,\alpha_n$, relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ne spun că $\Sigma tg\,\alpha_1$, $\Sigma tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_2$,... sunt numere reale. Ori $tg(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n) = \frac{\Sigma tg\,\alpha_1 - \Sigma tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_2\,tg\,\alpha_3 + \ldots}{1 - \Sigma tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_2 + \ldots}$, deci are valoare reală. **7.** Fie ABC triunghiul considerat. Dacă scriem că aria sa este egală cu suma ariilor triunghiurilor pe care le determină bisectoarea α, avem: $2S = \alpha(b+c)\,sin\frac{A}{2}$. (1). Ducând prin C o paralelă la α care întâlneşte pe AB în D, din triunghiul BCD, $(b+c)\,sin\frac{A}{2} = a\,sin\left(C+\frac{A}{2}\right)$, deci a $a\alpha = \frac{2S}{cos\frac{B-C}{2}} = \frac{2S}{\lambda}$. Analog pentru $b\beta$, $c\gamma$. Inlocuind aceste valori în ecuaţia din enunţ, căpătăm: $\frac{2\lambda\mu\nu}{S^3}x^3 - (\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\frac{x^2}{S^2} + 1 = 0$ (2). S este rădăcină dacă $2\lambda\mu\nu - (\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + 1 = 0$ (3) sau $cos^2\frac{A-B}{2} + cos^2\frac{B-C}{2} + cos^2\frac{C-A}{2} - 2\,cos\frac{A-B}{2}\,cos\frac{B-C}{2}\,cos\frac{C-A}{2} = 1$,

relaţie adevărată, căci $\frac{1}{2}(A-B)+\frac{1}{2}(B-C)+\frac{1}{2}(C-A)=0$. Impărţind ecuaţia (2) cu $(x-S)$ şi ţinând seama de (3) găsim câtul $2\lambda\mu\nu x^2-Sx-S^2=0$ (4). Realizantul $1+8\lambda\mu\nu$ al ecuaţiei (4) este pozitiv pentrucă unghiurile $\frac{1}{2}(B-C)$, etc. fiind mai mici decât 90^0, λ, μ, ν sunt pozitivi. Ecuaţia (4) are deci rădăcinile reale de semne contrare, cea mai mare fiind pozitivă. Dacă înlocuim în ecuaţia (4) pe x prin S găsim rezultatul $S^2(\lambda\mu\nu-1)<0$, S este deci cuprins între rădăcinile ecuaţiei (4). **8.** Fie ABC triunghiul isoscel $(\overline{AB}=\overline{AC})$, $\overline{AD}$ şi $\overline{BE}=h$ înălţimile. Notăm $\overline{AB}=x$. Insă într'un triunghiu produsul a două laturi este egal cu produsul înălţimii adiacente cu diametrul cercului circumscris: $\overline{BA}.\overline{BC}=\overline{BE}.2R$, $hx=\overline{BC}.\overline{AD}$, $hx=\overline{BC}\sqrt{x^2-\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2}$, deducem ecuaţia care dă pe x: $x^6-4R^2x^4+4R^4h^2=0$. Cu şirul lui *Rolle* se găseşte că problema admite două soluţii, dacă $h:R<\frac{8}{9}\sqrt{3}$. Dacă $h=\frac{8}{9}\sqrt{3}\,R$, avem o singură soluţie pozitivă egală cu $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$, a treia latură se deduce din $BC=\frac{2Rh}{x}$. Ecuaţia dată are în acest caz $\pm\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ ca rădăcini duble şi $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\,Ri$. **9.** Identificând $x^3+px^2+qx+r\equiv(x^2+mx+n)^4-x^4$, deducem $q^2\pm8r^3=\pm4pqr$; rezolvarea ecuaţiei transformate se reduce la rezolvarea a două ecuaţii de gradul I şi II. In cazul particular, se obţine $x+1=0$ şi $x^2+x+1=0$. **10.** Observăm că: $\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x-x_1}=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{x-x_k}$ şi că $\lim_{x\to x_1}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x-x_1}\right]=0$, deducem relaţia cerută; dacă $f(x)$ este de gradul al treilea avem: $2x_1=x_2+x_3$. **11.** Se vor considera expresiunile $\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x-x_1}=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{x-x_k}$

şi $\frac{f''(x)}{f'(x)}=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{x-x_k^1}$ şi se va observa că: $\lim_{x\to x_1}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x-x_1}\right]$

$=\lim_{x\to x_1}\frac{\frac{f''(x)}{f'(x)}}{1+\frac{f(x)}{(x-x_1)f'(x)}}=\frac{1}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]_{x=x_1}$. **12.** După formula lui *Moivre*: $\left(\cos\frac{\alpha}{2m+1}+i\sin\frac{\alpha}{2m+1}\right)^{2m+1}+\left(\cos\frac{\alpha}{2m+1}-\right.$

$\left.i\sin\frac{\alpha}{2m+1}\right)^{2m+1}=2\cos\alpha$, deci $f(x)=0$ va fi:

$2f(x)=(x+i\sqrt{1-x^2})^{2m+1}+(x-i\sqrt{1-x^2})^{2m+1}-2a=0$ (1).

$f'(x)$ este independent de a, deci putem lua $a=1$, $\cos\alpha=1$, $\alpha=2k\pi$; rădăcinile ecuaţiei (1) sunt 1, $\cos\frac{2\pi}{2m+1}$, $\cos\frac{4\pi}{2m+1}$...

$\cos\frac{2m\pi}{2m+1}$ (2); $\cos\frac{2(m+1)\pi}{2m+1}\ldots\cos\frac{4m\pi}{2m+1}$ (3). Rădăcinile din şirul (2) sunt egale cu cele din (3) luate în ordine inversă. Deci $f(x)=(x-1)\,P^2(x)$ (4). Din (4) deducem $f'(x)=P(x).Q(x)$. $f(x)$ are numai puteri impare ale lui x, deci $f'(x)$ va conţine numai puteri pare şi rădăcinile sunt 2 câte 2 egale şi de semne contrare. Fie α o rădăcină a lui $P(x)$. $f'(x)$ admite şi rădăcina $-\alpha$ care va anula tot pe $P(x)$ sau pe $Q(x)$; în cazul când ar anula tot pe $P(x)$, $f(x)=0$ ar avea 2 rădăcini egale şi de semne contrare, deci $\cos\frac{2k\pi}{2m+1}=-\cos\frac{2k'\pi}{2m+1}$, de unde $2(k+k')=2m+1$, imposibil. Deci $Q(x)=kP(-x)$ $\therefore$ $f'(x)=kP(x)P(-x)$. Pentru a determina pe k, facem $x=0$; $f'(0)=kP^2(0)=-kf(0)$. $f(0)=1$, $f'(0)=(2m+1)i^{2m}=\pm(2m+1)$.

13. Se va considera funcţiunea $f(\theta)=1-\frac{x_1}{a_1+\theta}-\frac{x_2}{a_2+\theta}-\ldots$

$-\frac{x_n}{a_n+\theta}$ care se anulează pentru $\theta=\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots\ldots\lambda_n$ $\therefore$

$f(\theta)=\frac{(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)\ldots(\theta-\lambda_n)}{(\theta+a_1)(\theta+a_2)\ldots(\theta+a_n)}$, scoţând pe x_1 şi făcând $\theta=-a_1$, găsim $x_1=(-1)^n\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)}$.

14. a fiind rădăcina reală, celelalte rădăcini sunt $\frac{-a \pm i\sqrt{3a^2+4p}}{2}$; modulul este $\sqrt{a^2+p}$. (G. M. XIII).

15. Relaţia se mai scrie $[a_0 x_1 x_2 + a_1(x_1+x_2)+a_2]x_3 + a_1 x_1 x_2 + a_2(x_1+x_2)+a_3=0$, de unde $x_3 = -\frac{a_0 x_1 x_2 + a_2(x_1+x_2)+a_3}{a_0 x_1 x_2 + a_1(x_1+x_2)+a_2}$. Pentruca x_3 să fie nedeterminat, trebue $a_1 x_1 x_2 + a_2(x_1+x_2)+a_3=0$, $a_0 x_1 x_2 + a_1(x_1+x_2)+a_2=0$. Deci $x_1+x_2 = -\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}$, $x_1 x_2 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}$. Acum x_1 şi x_2 sunt considerate drept variabile fără semnificaţia iniţială şi sunt date de ecuaţia $(a_1^2 - a_0 a_2)X^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_2)X + a_2^2 - a_1 a_3 = 0$. Această ecuaţie având acelaş discriminant cu ecuaţia dată rezultă propoziţiile problemei relative la natura rădăcinilor. **16.** Trebue ca F să fie divizibil cu relaţia care leagă sinusul cu tangenta, adică, să avem: $F(\sin x, tg\, x) \equiv (tg^2 x - \sin^2 x . tg^2 x - \sin^2 x)\, Q(\sin x, tg\, x)$. **17.** Se exprimă $\cos kx$ în funcţie de $\cos x = y$ şi se obţine un polinom de gradul n identic nul, din care se deduce $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. **18.** Ecuaţia derivată admite rădăcina pq şi fiind de gradul II, a doua rădăcină trebue să fie deasemenea raţională, coeficienţii ecuaţiunii derivate fiind raţionali. **19.** Avem $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3q$ $\therefore$ $x_2 = \frac{-x_1 \pm \sqrt{3(4q-x_1^2)}}{2}$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt reali, $4q - x_1^2 > 0$, deci $q>0$, $|x_1| < 2\sqrt{q}$. Dacă x_1 şi x_2 sunt imaginari, fie $x_1 = \alpha + \beta i$, $x_2 = \alpha - \beta i$, $x_3 = -2\alpha$ şi cum $x_1 x_2 - (x_1+x_2)^2 + 3q = 0$, $\beta^2 = 3(\alpha^2 - q)$, deci, dacă $q>0$, $|\alpha| > \sqrt{q}$. **20.** Fie $\Delta = p_1^2 p_2^2 + 18 p_1 p_2 p_3 - 4p_2^3 - 4p_1^3 p_3 - 27 p_3^2$ discriminantul ecuaţii date, ecuaţia va avea una sau trei rădăcini reale după cum $\Delta < 0$ sau $\Delta \geqslant 0$. Vom distinge următoarele cazuri: 1°). $\Delta < 0$, ecuaţia are o singură rădăcină reală x_1, care împreună cu $-\infty$ şi $+\infty$, determină două intervale $A(-\infty, x_1)$ şi $D(x_1, +\infty)$; un număr a va fi în primul sau al doilea interval după cum rezultatul substituţii în primul membru al

ecuaţii ne va da un rezultat negativ sau pozitiv. 2°). $\Delta>0$, ecuaţia are trei rădăcini reale şi diferite spre ex: $x_1<x_2<x_3$, acestea împreună cu $-\infty$ şi $+\infty$, determină 4 intervale: $A(-\infty, x_1)$, $B(x_1, x_2)$, $C(x_2, x_3)$, $D(x_3, \infty)$. Poziţiunea numărului a în raport cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 depinde de semnele diferenţelor x_1-a, x_2-a, x_3-a (1) şi dacă reprezentăm cu $f(x)$ primul membru al ecuaţii date, ecuaţia care are ca rădăcini diferenţele (1) va fi: (2) $f(y+a)=y^3+\frac{1}{2}f''(a)y^2+f'(a)y+f(a)=0$; semnele rădăcinilor acestei ecuaţii ne arată în ce anume interval se găseşte numărul a. Concluzii: a este în A când (1) sunt pozitive, deci (2) are toate rădăcinile pozitive, deci trebue să avem: $f''(a)<0$, $f'(a)>0$, $f(a)<0$; *b*). a se află în B când (2) prezintă 2 variaţiuni şi cum $f(a)>0$ unul din coeficienţii $f'(a)$ sau $f''(a)$ trebue să fie negativ; *c*). a se află în C când $f(a)<0$, $f'(a)$ $f''(a)>0$ sau $f'(a)<0$ şi $f''(a)>0$; *d*). In fine a se află în D când $f(a)$, $f'(a)$ şi $f''(a)$ sunt pozitivi. 3°). $\Delta=0$, ecuaţia are cel puţin 2 rădăcini egale, putem avea $x_1=x_2$ sau $x_2=x_3$ şi unul din intervalele B sau C se reduce la zero. Criteriile pentru a recunoaşte în ce interval se găseşte numărul a sunt aceleaşi ca şi în cazul precedent. Dacă $x_1=x_2=x_3$, primul membru al ecuaţii este un cub perfect (G. M. X). **21.** $f(x)$ fiind un polinom, avem relaţia identică $f(x)-x=(x-\alpha)\varphi(x)$ sau $f(x)=x+u$, deci u e funcţie de x; $f[f(x)]=f(x+u)=f(x)+\frac{u}{1}f'(x)+\frac{u^2}{2!}f''(x)+\ldots$, $f[f(x)]-x=u[1+f'(x)]+\frac{1}{2}u^2f''(x)+\ldots$ Pentruca α să fie rădăcină multiplă în $f[f(x)]$ trebue ca $1+f'(x)=(x-\alpha)\psi(x)$ deci $f[f(x)]-x=(x-\alpha)^2\varphi(x)$ $[\psi(x)+\frac{1}{2}f''(x)\varphi(x)]+\ldots$ Dar din $f'(x)=(x-\alpha)\psi(x)-1$, deci $f''(x)=\psi(x)+(x-\alpha)\psi'(x)$, şi $\psi(x)+\frac{1}{2}f''(x)\varphi(x)=\psi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)\varphi(x)+\frac{1}{2}(x-\alpha)\varphi(x)\psi'(x)=\psi(x)\left[1+\frac{1}{2}\varphi(x)\right]+\frac{1}{2}(x-\alpha)$

$\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)$. Dar cum $1+f'(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=-1$ şi din $f'(x)-1=\varphi(x)+(x-\alpha)\varphi'(x)$, $\varphi(\alpha)=-2$, rezultă că $\psi(x)+\frac{1}{2}f''(x)\varphi(x)$ se divide cu $x-\alpha$. **22.** Avem $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$, derivând succesiv relaţia dată între f, f', f'', avem $(n-1)f'(x)=(x-a)f''(x)+bf'''(x)$, $(n-2)f''(x)=(x-a)f'''(x)+bf^{(IV)}(x)+\ldots$ $\therefore f''(a)=\frac{n}{b}f(a)$, $f'''(a)=\frac{n-1}{b}f'(a)$, $f^{(IV)}(a)=\frac{n(n-2)}{b^2}f(a)$, $f^{(V)}(a)=\frac{(n-1)(n-2)}{b^2}f'(a)$,... legea de formaţie este evidentă şi $f(x)=f(a)\left[1+\frac{n}{2!\,b}(x-a)^2+\frac{n(n-2)}{4!\,b^2}(x-a)^4+\ldots\right]+(x-a)f'(a)\left[1+\frac{n-1}{3!\,b}(x-a)^2+\frac{(n-1)(n-3)}{5!\,b^2}(x-a)^4+\ldots\right]$. Polinoamele lui *Sturm* sunt $f(x)$, $f'(x)$, $-bf''(x)$, $-bf'''(x)\ldots$ Se va aplica metoda lui *Newton* pentru găsirea limitelor rădăcinilor. **23.** Se verifică imediat că teorema este adevărată pentru $n=2$; pentru a arăta că este generală să admitem că este adevărată pentru o valoare a lui n şi să arătăm că este adevărată pentru valoarea imediat superioară; avem $U_{n+1}=(x-a_{n+1})\,U_n+b_{n+1}\,V_n=x^{n+1}+\ldots$, $V_{n+1}=(x-a_{n+1})\,V_n-b_{n+1}\,U_n=-(b_1+b_2+\ldots+b_n)x^n+\ldots\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n$ fiind rădăcinile lui $U_n=0$, avem $V_n(-\infty)$ de semnul lui $(-1)^n$, $V_n(\alpha_1).(-1)^n>0$, $V_n(\alpha_2).(-1)^{n-1}>0,\ldots$ $V_n(\alpha_n).(-1)>0$; apoi $U_{n+1}(-\infty).(-1)^{n+1}>0$, $U_{n+1}(\alpha_1).(-1)^n>0,\ldots$; din relaţia $U_{n+1}V_n-V_{n+1}U_n=(U_n^2+V_n^2)\,b_{n+1}>0$, deducem că rădăcinile lui V_{n+1} sunt cuprinse între acelea ale lui U_{n+1}. **24.** Să căutăm mai întâi forma generală a polinoamelor care verifică identitatea $F(x)=F(1-x)$; fie $F(0)=B_0$, avem $F(1)=B_0$, $F(x)-B_0$ este divizibil cu x^2-x, punând $F(x)=B_0+(x^2-x)\,F_1(x)$, $F_1(x)$ verifică o identitate de aceiaşi formă, putem scrie $F_1(x)=B_1+(x^2-x)\,F_2(x)\;\therefore$ $F(x)=B_0+B_1(x^2-x)+B_2(x^2-x)^2+B_3(x^2-x)^3+\ldots$ sau

punând în evidență factorii de forma $(x^2-x)+1$, putem scrie $F(x)=C_0(x^2-x+1)^k+C_1(x^2-x)(x^2-x+1)^l+\ldots$, care este forma generală căutată. Exprimând apoi că $F(x)$ verifică și identitatea $F(x)=x^m F(1:x)$, găsim $F(x)=A_0(x^2-x+1)^{3n}+A_1(x^2-x)^2(x^2-x+1)^{3n-3}+\ldots$; dacă un număr oarecare de coeficienți sunt nuli putem încă avea factorul $(x^2-x+1)^q(x^2-x)^{2p}$. **25.** $f(x)=A_0 x^{mr}+A_r x^{(m-1)r}+A_{2r} x^{(m-2)r}+\ldots.+A_{mr}$; A_0, A_r,... fiind coeficienți arbitrari, r cel mai mic număr întreg, așa fel ca $a^r-1=0$. (G. M. XIII). **26.** Trebue să avem $e_1^2=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, $e_1e_2=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$, $e_1e_3=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$ $\therefore$ $(a_1-e_1)e_1+a_2e_2+a_3e_3=0\ldots.$; e_1, e_2, e_3 fiind diferiți de zero trebue ca determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1-e_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2-e_1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3-e_1 \end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând, găsim: $Ae_1^3+Be_1^2+Ce_1+D=0$, ceeace arată că e este real sau complex. **27.** Dacă în ecuație punem $x=y+h$, p_1, p_2 devin p_1+nh, $p_2+(n-1)p_1h+\frac{(n-1)n}{2!}h^2\ldots$; x_1, x_2,... x_n se micșorează fiecare cu cantitatea h, iar diferențele lor rămân neschimbate, deci $f(y_1-y_2,\ y_1-y_3,\ldots,y_i-y_k,\ldots)=f(x_1-x_2,\ldots,x_i-x_h,\ldots)=f[p_1+nh,\ p_2+(n-1)p_1h+\frac{n(n-1)}{2!}h^2,\ldots]$, derivând în raport cu h găsim relațiile căutate.

28. Ecuația dată având toate rădăcinile reale, ecuația $b_1f(x)+xf'(x)=0$ va avea toate rădăcinele reale după teorema lui *Rolle*. Această ecuație se mai scrie $\Sigma(b_1+i)a_ix^n=0$. Aplicând această proprietate succesiv de mai multe ori, avem că ecuația dată în enunț are rădăcinile toate reale. Dacă pentru fixarea ideilor se presupune $a_n>0$, trebue $b_1<-n$, $b_2<-n$,.. $b_k<-n$ pentru valorile negative ale lui b_1, b_2,... b_n.

29. Presupunem $m\geqslant n$, dacă $f(x)$ este prima ecuație, $F(x)=b_0f(x)+b_1xf'(x)+b_2x^2f''(x)+\ldots+b_nf^{(n)}(x)=0$ are toate rădăcinile reale căci și ecuația $b_0+b_1zx+b_2z^2x^2+\ldots+b_mz^mx^m=0$ are evident toate rădăcinile reale, putem scrie $F(x)=P_0(z)+$

$+x\,P_1(z)+\ldots+x^m P_m(z)$, $P_i(z)$ fiind un polinom de gradul $n-i$ în z anume $P_0(z)=a_0 b_0+1!\ a_1 b_1 z+2!\ a_2 b_2 z^2+\ldots+n!\ a_n b_n z^n$. Pe baza realităţii rădăcinilor ecuaţiei $F(x)=0$ şi făcând uz de teorema lacunelor se arată că şirul $P_0, P_1,\ldots P_n$ este un şir al lui *Sturm* pentru polinomul P_0. Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $P_0=0$ este egal cu numărul variaţiilor pierdute în şirul $a_n b_n z^n$, $a_n b_{n-1} z^{n-1},\ldots a_n b_0$ când trecem dela $-\infty$ la $+\infty$, care este egal cu n căci b_n, $b_{n-1},\ldots b_0$ au acelaş semn. Rezultă că toate rădăcinile ecuaţiei $P_0=0$, care e cea dată de enunţ, sunt reale. Dacă $m<n$ în locul celei de a doua ecuaţii se consideră $(1+\varepsilon x)^{n-m}(b_0+b_1 x\ldots+b_m x^m)$ unde ε e un număr pozitiv. Această ecuaţie este de gradul m şi satisface aceleaşi condiţiuni. Vom aplica cele date mai sus şi vom face ca ε să tindă la zero vom obţine teorema din enunţ. Evident că restricţiunea ca ecuaţia a doua să aibe rădăcinile negative a fost pentru comoditatea demonstrării. In general ea trebue să aibe rădăcinile de acelaş semn. **30.** Se ştie că dacă ecuaţia $A_0+A_1 x+A_2 x^2+\ldots+A_n x^n=0$ are toate rădăcinile reale, ecuaţia $A_0 f^{(n)}(x)+A_1 f^{(n-1)}(x)+\ldots+A_n f(x)=0$ are rădăcinile reale când ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcinile reale; în particular deci ecuaţia $A_0+\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{A_n}{n!}x^n=0$ va avea rădăcini reale. Problema precedentă ne dă deci că ecuaţia $a_0 b_0+a_1 b_1 x+\ldots+a_k b_k x^k=0$ are toate rădăcinile reale. In particular ecuaţia $b_0^2+b_1^2 x+\ldots+b_m^2 x^m=0$ are rădăcinile reale adică şi ecuaţia $b_0^p+b_1^p x+\ldots+b_m^p x^m=0$. Când $b_i=C_m^i$ avem ecuaţia lui *Hermite*. **31.** Fără a restrânge generalitatea problemei, se poate presupune $x_n=1$, $x_{n-2}=0$, aşa că e destul a arăta că $f'\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$ adică $x_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}$ întrucât în ecuaţia $f(x)=x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ primul coeficient se poate lua egal cu 1. Avem după teorema lui *Descartes* $a_1>0$, $a_2>0\ldots a_{m-3}>0$. Avem apoi $f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=\left(\frac{n}{2^{n-1}}-1\right)$

$+a_1\left(\frac{n-1}{2^{n-2}}-1\right)+a_2\left(\frac{n-2}{2^{n-3}}-1\right)+\ldots+a_{n-3}\left(\frac{3}{4}-1\right)-a_n$ şi $f(1)=1+a_1+\ldots+a_n=0$. Dacă $a_n\geqslant 0$ evident $f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$ deci teorema e demonstrată. Dacă $a_n<0$ avem $f(x)=\left(x+\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x+\frac{1}{\alpha_2}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\cdot(x-1)$, α_1, $\alpha_2\ldots.\alpha_{n-1}$ fiind numere pozitive suma lor fiind A. Se poate arăta prin calcul că $\Sigma\alpha_i(A-2-\alpha_i)=0$ în felul cum s'a pus problema. Acum $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{a_{i-2}}-1\right)$, dar $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Trebue să arătăm că $\Sigma\frac{\alpha_i}{\alpha_i+2}-1>0$ sau $\Sigma\frac{\alpha_i A}{\alpha_i+2}-A=\Sigma\frac{(A-2-\alpha_i)\alpha_i}{\alpha_i+2}<0$. In suma $\Sigma\alpha_i(A-2-\alpha_i)=0$ se vede că pentru a ajunge la $\Sigma\frac{(A-2-\alpha_i)\alpha_i}{\alpha_i+2}$ totdeauna un termen negativ se împarte cu un număr mai mare ca un termen (oarecare) pozitiv, ceeace demonstrează teorema. **32.** Se demonstrează prin inducţie. Să presupunem că ecuaţia cu $n-1$ termeni $1+x^\alpha+a_3x^\beta+\ldots+a_{n-1}x^\varepsilon=0$ are o rădăcină în modul mai mică ca 2^{n-3}. Fie x' rădăcina acestei ecuaţii şi x o rădăcină a celei date, să punem $x=x'+y$ ecuaţia dată devine $a_n x'^\lambda+by+cy^2+\ldots+a_n y^\lambda=0$ produsul rădăcinilor este $(-1)^\lambda x'^\lambda$ deci cel puţin un y satisface $|y|<|x'|$, dar $|x|\leqslant|x'|+|y|$ şi $|x'|<2^{n-3}$ rezultă că $|x|<2|x'|<2^{n-2}$. Deci dacă ecuaţia cu $n-1$ termeni satisface problema şi ecuaţia cu n termeni o satisface. Dar pentru $n=3$ avem $|x'|=1$ deci $|x|<2$, deci teorema e generală. **33.** Pentru fixarea ideilor să presupunem că punctele rădăcini a_1, a_2 sunt aşa ca toate celelalte puncte rădăcini să fie de aceeaş parte a dreptei a_1a_2. Evident este destul a arăta că şi punctele rădăcini ale derivatei sunt de aceeaş parte. Să presupunem că o rădăcină x_1 a derivatei ar fi de partea opusă. Dacă $a_1, a_2,\ldots a_n$ sunt rădăcinile avem $f'(x)=f(x)\Sigma\frac{1}{x-a_i}$ în punctul x_1, $f(x_1)\neq 0$. Suma $\Sigma\frac{1}{x-a_i}$ este

o transformată prin omografie a rezultantei vectorilor $x_1 a_1$, $x_1 a_2, \ldots x_1 a_n$ care prin faptul că x_1 nu este de aceeaş parte cu $a_1, a_2, \ldots a_n$ este neapărat diferită de zero. Deci $f'(x_1) \neq 0$ ceeace e absurd, adică punctele x_1, $a_i (i = 1, 2, \ldots n)$ sunt de aceeaş parte. **34.** Ecuaţia se presupune tot de forma din probl. 32. Se demonstrează la fel prin inducţie completă. Se presupune adevărată pentru $k-1$ termeni. Ecuaţia derivată se transformă în $y = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x$ şi apoi se aplică teorema presupusă adevărată pentru $k-1$ termeni, apoi făcând uz de problema precedentă avem rezultatul dorit. Mai general ecuaţia $A_0 + A_1 x^\alpha + \ldots.$ se poate aduce la forma studiată prin substituţia $x = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} y$. **35.** Înmulţind ambii membri ai sumei din enunţ cu produsul $(n+2)(n+1)$ avem: $(n+2)(n+1)S = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \ldots + C_{n+2}^n$ şi cum $1 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots.. + C_{n+2}^{n+2} = 2^{n+2}$, avem $(n+2)(n+1)\, S = 2^{n+2} - 1 - C_{n+2}^1 - C_{n+2}^2 - C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2} = 2^{n+2} - \frac{n^2+7n+14}{2}$ etc. (G. M. XLI. p. 154). **36.** Pentru $n=1$, $u_1 = a$. u_2 este arbitrar. Punând relaţia de recurenţă sub forma $\frac{n-2}{n} u_n = u_{n-1} - u_1$, dând lui n valorile 3, 4, 5, $\ldots n-1$, n, — multiplicând egalităţile obţinute respectiv cu 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1.2}{3.4}, \ldots, \frac{1.2\ldots(n-4)}{3.4\ldots(n-2)}$, $\frac{1.2\ldots(n-3)}{3.4\ldots(n-1)}$, apoi adunând, avem $\frac{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)}{3.4.5\ldots(n-1)n} u_n = u_2 - u_1 \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.4} + \ldots + \frac{1.2\ldots(n-3)}{3.4\ldots(n-1)}\right]$. Dar coeficientul lui u_1 se scrie $1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \ldots + \frac{2}{(n-2)(n-1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n-1}$. De unde avem $u_n = \frac{n(n-1)}{2} u_2 - n(n-2) u_1$. (G. M. XL. p. 472). **37.** Se dovedeşte inegalitatea pentru $p=2$. Considerăm $f(a_1) = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} - a_1^{\frac{m_1}{m_1+m_2}} \cdot a_2^{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$ $(0 < a_1 < \infty)$ a_1

variabilă, a_2 constantă pozitivă. $f(a_1)$ are un singur minim în interval, pentru $a_1=a_2$. Minimul fiind zero, rezultă inegalitatea. Pentru cazul general, se admite pentru $p-1$ și se demonstrează că este adevărată pentru p. Admitem totdeodată că pentru $p-1$ inegalitatea devine egalitate dacă $a_1=a_2=...=a_{p-1}$. Pentru acestea se consideră $F(a_1)=\frac{m_1a_1+m_2a_2+..+m_pa_p}{m_1+m_2+...+m_p}-a_1^{\frac{m_1}{s}}.a_2^{\frac{m_2}{s}}...a_p^{\frac{m_p}{s}}$ a_1 variind dela 0 la ∞, iar a_2, $a_3...a_p$ fiind constante pozitive. $F'(a_1)=\frac{m_1}{s}\left(1-a_1^{-\frac{\sigma}{s}}a_2^{\frac{m_2}{s}}...a_p^{\frac{m_p}{s}}\right)$, $(\sigma=m_2+m_3+,..+m_p)$ se anulează pentru $a_1=a_2^{\frac{m_2}{\sigma}}a_3^{\frac{m_3}{\sigma}}...a_p^{\frac{m_p}{\sigma}}=k$. Funcția este minimă pentru $a_1=k$ etc. (G. M. XL. p. 368).

38. Cu teorema raportului se arată că seria este convergentă pentru $|x|<1$. Pentru însumare, observăm că $k_p^r=C_{p+r-1}^r=C_{p+r-1}^{p-1}$, deci $S_{p,m}(x)=C_{p+m-1}^{p-1}+C_p^{p-1}C_{p+m}^{p-1}x^2+...+C_{p+n-1}^{p-1}C_{p+m+n-1}^{p-1}x^{2n}+...$ Să considerăm desvoltarea: $(1-t)^{-p}=1+C_p^{p-1}t+C_{p+1}^{p-1}t^2+...+C_{p+n-1}^{p-1}t^n+...$ Seria de membrul II este absolut și uniform convergentă pentru $|t|<1$. Același lucru constatăm și despre seriile obținute derivând-o termen cu termen. Inmulțind deci ambii membri cu t^{m+p-1} și derivând de $p-1$ ori, $\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p+1)}=A_{m+p-1}^{p-1}t^m+C_p^{p-1}A_{p+m}^{p-1}t^{m+1}+...$, de unde (1) $\frac{1}{(p-1)!\,t^m}\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p-1)}=C_{m+p-1}^{p-1}+C_p^{p-1}C_{p+m}^{p-1}t+,..+C_{p+n-1}^{p-1}C_{p+m+n-1}^{p-1}t^n+...$, iar seria din membrul II devine pentru $t=x^2$ seria propusă. Să calculăm valoarea explicită a primului membru. Deoarece $[(1-t)^{-p}]^{(k)}=p(p+1)...(p+k-1)(1-t)^{-p-k}$, aplicând formula lui *Leibnitz* avem $\frac{1}{(p-1)!\,t^m}\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p-1)}=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{C_{p+i-1}^iC_{m+p-1}^{p-i-1}t^i}{(1-t)^{p+i}}$ deci: $(1-x^2)^{2p-1}S_{p,m}(x)=\sum_{i=0}^{p-1}C_{p+i-1}^iC_{m+p-1}^{p-i-1}x^{2i}(1-x^2)^{p-i-1}$. (G. M. XLI. pag. 593).

39. Se folosesc relaţiile între rădăcini şi coeficienţi $x+y+z=1$, $xy+yz+xz=-1$, $xyz=1$. Pentru prima relaţie trebue să avem $XY+XZ+YZ=XYZ$. Dar $\Sigma XY=\Sigma(x^2+2x+3)(y^2+2y+2)=\Sigma x^2y^2+2\Sigma xy(x+y)+4\Sigma xy+6\Sigma x^2+12\Sigma x+27=\Sigma x^2y^2+6\Sigma xy-6xyz+6\Sigma x^2+12\Sigma x+27$. Dar din $\Sigma xy=-1$, deducem $\Sigma x^2y^2+2xyz\Sigma x=1$ sau $\Sigma x^2y^2=-1$ şi din $\Sigma x=1$, $\Sigma x^2+2\Sigma xy=1$, $\Sigma x^2=3$. Inlocuim aceste valori în ΣXY, etc. *Soluţia II.* Ecuaţia ne dă $2x=2x^3-2x^2-2$, deci $X=x^2+2x+3=2x^3-x^2+1=x\left[x^2-x(1-x)+\frac{1}{x}\right]$ şi cum $x+y+z=1$, $xyz=1$, $X=x[x^2-x(y+z)+yz]=-x(x-y)(z-x)$. Analog $Y=-y(y-z)(x-y)$, $Z=-z(z-x)(y-z)$. Verificarea relaţiilor este simplă $\Sigma\frac{1}{X}=\Sigma-\frac{1}{x(x-y)(z-x)}=-\frac{\Sigma yz(y-z)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=1$ etc. (G. M. XXXV. p. 396). **40.** Ecuaţia (1) de gradul $p-1=2q$ are două rezolvante, una de gradul q şi una de gradul 2. Acestea se formează din (1) punând $x+\frac{1}{x}=y$. Avem ecuaţia (2) $f(y)=0$ de gradul q, la care alăturăm $x^2-yx+1=0$. (3) Un al doilea sistem de rezolvante de gradul II şi q îl obţinem considerând o rădăcină α a ecuaţiei (1) şi o rădăcină primitivă r a numărului prim p. Rădăcinile ecuaţiei (1) vor fi α^{r^0}, α^{r^1}, α^{r^2},... $\alpha^{r^{2q-1}}$. Să formăm ecuaţia ce are ca rădăcini pe $x'=\alpha^{r^0}+\alpha^{r^2}+...+\alpha^{r^{2(q-1)}}$ şi $x''=\alpha^{r^1}+\alpha^{r^3}+...+\alpha^{r^{2q-1}}$. Avem $x'+x''=-1$, $x'x''=\Sigma\alpha^{r^{2h}+r^{2k+1}}$, sub Σ fiind q^2 termeni. *a)* q impar, q din termeni sunt egali cu 1, căci exponentul lui α din x' fiind de forma r^{2h}, iar al unuia din x'' de forma r^{2k+1}, care se poate înlocui cu r^{2h+q}, avem: $\alpha^{r^{2h}}.\alpha^{r^{2h+q}}=1$ deoarece $r^q=-1$. Ceilalţi q^2-q termeni reprezintă produse de câte $\frac{q^2-1}{2q}$, cele $2q$ rădăcini ale ecuaţiei (1) a căror sumă este -1, deci $x'x''=q-\frac{q^2-q}{2q}=a$. *b)* q par, cele q^2

produse din $z'z''$ sunt toate rădăcini ale ecuației (1), nici unul nu este egal cu 1 și reproduc cele $2q$ rădăcini ale ecuației de $\frac{q}{2}=a$ ori. Ecuația va fi $z^2+z+a=0$. (4) (a întreg). A doua rezolvantă este o ecuație în x de gradul q care are ca rădăcini puterile lui α din grupul ce dă pe z' sau z'': (5) $\varphi(x)=x^q+A_1x^{q-1}+\ldots+A_q=0$, $A_1, A_2\ldots A_q$ fiind polinoame întregi în raport cu z' sau z''. Rezolvarea ecuației (1) se face sau prin sistemul (2) și (3) sau prin (4) și (5). Ecuațiile (3) și (5) au o rădăcină comună și una singură, se obține împărțind $\varphi(x)$ la x^2-yx+1 $\therefore$ $x'_i=\frac{B(y_i,z')}{A(y_i,z')}$ A și B fiind 2 polinoame. Puterile lui z' mai mari ca 1 se reduc după (4) la forma $mz'+n$, căci $z'^2=-z'-a$, $z'^3=-z'^2-az'=z'+a+az'+\ldots$, Deci $B(y_i,z')$ este de forma $P_i(y_i)z'+Q(y_i)$, iar $A(y_i,z')$ de forma $P_1(y_i)z'+Q_1(y_i)$. (G. M. XL. p. 454).

41. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației (1), $f(x)=0$ presupuse distincte; ele sunt afixele punctelor A și B, iar numărul λ este afixul punctului L. Punctele A, B, L fiind colineare, raportul $E=\frac{\lambda-x_1}{\lambda-x_2}$ este real și invers. Mai precis, dacă $E>0$ punctul L este de aceeași parte a punctelor A și B, iar dacă $E<0$ L este situat între aceste puncte. Rămâne acum să exprimăm această condiție cu ajutorul coeficienților ecuației (1) și a numărului λ. In acest scop să considerăm expresia următoare, simetrică în raport cu x_1 și x_2, $E_1=E+\frac{1}{E}=\frac{\lambda-x_1}{\lambda-x_2}+\frac{\lambda-x_2}{\lambda-x_1}$ $=\frac{2\lambda^2-2(x_1+x_2)\lambda+x_1^2+x_2^2}{(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)}$, sau încă $E_1=2+\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}$. Este evident că dacă E este real și E_1 este real și deci: $\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}$ este real. *Prin urmare punctele* M *și* N, *de afixe respectiv* p^2-4q *și* $f(\lambda)$ *sunt colineare cu* O. *Deci, dacă punctele* A, B, L *sunt colineare, atunci și punctele* O, M, N *sunt colineare.* Să cercetăm acum reciproca acestui rezultat. Presupunem dar că O, M, N sunt colineare adică E, este real.

Să punem numărul E sub formă trigonometrică $E=re^{i\theta}$ r, θ fiind modulul şi argumentul lui. Atunci se are $E_1=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{i-\theta}$. E_1 fiind presupus real, trebue să avem $\left(r-\frac{1}{r}\right)sin\,\theta=0$, şi deci, sau $\theta=k\pi$ şi în acest caz şi E este real şi prin urmare punctele A, B, L sunt colineare, sau $r=1$ şi prin urmare avem $E=e^{i\theta}$, aceasta înseamnă că punctul L este aşezat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei AB. *In rezumat dacă* E_1 *este real, adică punctele* O, M, N *sunt colineare două cazuri se pot prezenta*: 1°. *Punctele* A, B, L *sunt colineare.* 2°. *Punctul* L *este situat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei* AB. In discuţie vom distinge 3 cazuri. (*a*) $\frac{p^2-4q}{f(x)}>0$. Prin urmare punctele O, M, N sunt presupuse colineare, M şi N fiind de aceeaşi parte a punctului O şi *vrem să dovedim că în acest caz punctul* L *este pe dreapta* A B *de aceeaşi parte a punctelor* A *şi* B. In adevăr nu putem avea $E\equiv e^{i\theta}$ căci ar urma să avem $E_1=2+\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}=2cos\,\theta>2$. Prin urmare E este real şi din $E+\frac{1}{E}>2$ deducem $\frac{(E-1)^2}{E}>0$, deci E este pozitiv. (*b*) $-4<\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}<0$. *In acest caz punctul* L *este aşezat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei* AB. In adevăr E nu poate fi real, căci contrar inegalitatea $\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}<0$ sau inegalitatea $E+\frac{1}{E}<2$ ne arată că avem $E<0$; pe de altă parte inegalitatea $-4<\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}$ sau inegalitatea $-2<E+\frac{1}{E}$ ne dă $E>0$. Deci nu putem avea decât $E=e^{i\theta}$ ceeace trebuia dovedit. (*c*) $\frac{p^2-4q}{f(\lambda)}\leqq -4$. *Să arătăm că punctele* L, A, B *sunt colineare, punctul* L *fiind situat între* A *şi* B. In adevăr E nu poate fi imaginar şi deci de forma $E=e^{i\theta}$ căci ar urma

VERIFICAT
2017

să avem $E_1 = 2 + \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} = 2\cos\theta \leqq -2$ ceeace este imposibil. Deci E este real şi negativ căci având $E + \frac{1}{E} \leqq -2$ rezultă $E < 0$. *Observaţii.* In discuţia cazurilor (*b*) şi (*c*) intră expresia $\frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} + 4 = \frac{4\left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2}{f(\lambda)}$ care are o interpretare geometrică lesne de văzut unde apare semisuma $-\frac{p}{2}$, a rădăcinilor ecuaţiei (1). *Caz particular.* Dacă p, q, x_1, x_2 sunt reali pentru ca numărul λ să fie în afara rădăcinilor, cazul (*a*) ne dă $f(\lambda) > 0$. Deci cazul (*a*) este o generalizare acestei din urmă proprietăţi. Iar pentru ca λ să fie între rădăcini cazul (*c*) ne dă $f(\lambda) < 0$. Cazul (*c*) este generalizarea acestei proprietăţi. (G. M. XL. p. 500). **42.** Presupunem că toate cantităţile din (1) şi (2) sunt complexe. (2) este o substituţie lineară simetrică, iar rădăcinile ecuaţiei (1) punctele duble ale substituţiei. Punem: $z = x_1 + Z$, $z' = x_1 + Z'$, $z'' = x_1 + Z''$, $x_1 = -\frac{b}{a}$, (1) şi (2) devin $Z^2 = m = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}$ (1') $z'z'' = m$ (2'). Fie r, α; r', α'; r'', α'' modulele şi argumentele lui z, z', z''. (1') şi (2') dau $r^2 e^{2\alpha i} = m = r'r'' e^{(\alpha' + \alpha'')i}$ $\therefore$ (3) $r^2 = r'r''$, $2\alpha = \alpha' + \alpha'' = 2k\pi$. Deci: 1) A' şi A'' corespunzătoare rădăcinilor ecuaţiei (1) sau (1') sunt simetrice faţă cu noua origine Q_1 a axelor; 2) A'A'' este bisectoarea unghiului $M'O_1M''$. Dacă D este întâlnirea bisectoarei cu M'M'', avem $O_1D = \frac{2r'r''\cos\frac{\alpha' - \alpha''}{2}}{r' + r''}$, $\overline{O_1D} \leqq r\cos\frac{\alpha' - \alpha''}{2} \leqq r$. Deci punctele A', A'' nu pot fi de aceeaşi parte a dreptei M'M''. Dacă a, b, c sunt reale rezultatul se menţine. (G. M. XL. p. 555).

— SFÂRŞIT —

VERIFICAT 2007

VERIFICAT
1987